TTK4100 Kybernetikk introduksjon

Eksamen høsten 2017

Løsningsforslag

Oppgave 1. (33 %)

a) (5 %) Massebalanse:

$$
\begin{aligned}
\dot{m} &= w_i - w_u \\
V\dot{\rho} &= w_i - w_u \\
\frac{V}{c^2}\dot{p} &= k(p_i - p) - w_u \\
\dot{p} &= \underline{\underline{-\frac{c^2 k}{V}p + \frac{c^2 k}{V}p_i - \frac{c^2}{V}w_u}}
\end{aligned}
$$

b) (3 %)

$$
\begin{aligned}
T &= -\frac{1}{a} = \underline{\underline{\frac{V}{c^2 k}}} \\
[T] &= \frac{\mathrm{m}^3}{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{ms}} = \underline{\underline{\mathrm{s}}}
\end{aligned}
$$

c) (5 %)

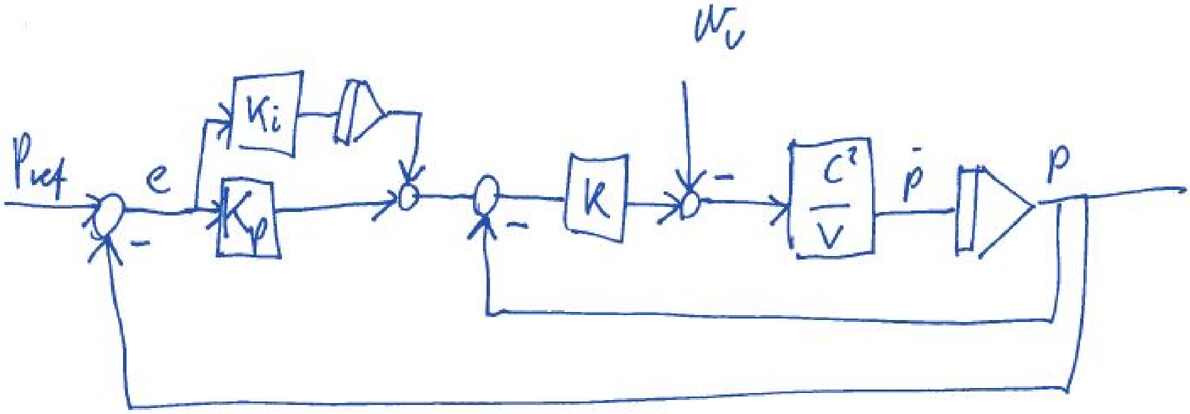
$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\frac{c^2 k}{V} p + \frac{c^2 k}{V} K_p (p_{ref} - p) \\
0 &= -\frac{c^2 k}{V} p_s + \frac{c^2 k}{V} K_p (p_{ref} - p_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_s + K_p p_s &= K_p p_{ref} \\
p_s &= \frac{K_p}{1 + K_p} p_{ref} \\
e_s &= p_{ref} - p_s = \left(\frac{1 + K_p}{1 + K_p} - \frac{K_p}{1 + K_p} \right) p_{ref} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + K_p} p_{ref}}}
\end{aligned}$$

Alternativt riktig svar:

$$e_s = \underline{\underline{\frac{1}{K_p} p_s}}$$

d) (3 %) Se figur 1.



Figur 1: Blokkdiagram av system (1), med $p_i = u$, i lukket sløyfe med (4).

e) (4 %)

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{c^2k}{V}p + \frac{c^2k}{V}\left(K_pe + K_i\int e\ \mathrm{dt}\right)\\ \ddot{p} &= -\frac{c^2k}{V}\dot{p} + \frac{c^2k}{V}K_p\dot{e} + \frac{c^2k}{V}K_ie\end{aligned}$$

$$\dot{e} = -\dot{p} \quad , \quad \ddot{e} = -\ddot{p}$$

$$\ddot{e} + \frac{c^2k}{V}(1+K_p)\dot{e} + \frac{c^2kK_i}{V}e = 0.$$

f) (2 %) Det stasjonære avviket blir null fordi $\ddot{e} = \dot{e} = 0 \Rightarrow e_s = 0$.

g) (2 %)

$$\begin{aligned}\omega_0^2 = \frac{c^2kK_i}{V} \quad &\Rightarrow \quad K_i = \underline{\underline{\frac{V\omega_0^2}{c^2k}}}\\ 2\zeta\omega_2 = \frac{c^2k}{V}(1+K_p) \quad &\Rightarrow \quad K_p = \underline{\underline{\frac{2V\zeta\omega_0}{c^2k} - 1}}\end{aligned}$$

h) (2 %) Sammenhengene i deloppgave g) kan brukes til å finne K_i, K_p gitt ζ, ω_0, dvs. *tuning*.

i) (4 %)

$$\begin{aligned}\frac{c^2kK_p}{V} > 0 \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{K_i > 0}}\\ \frac{c^2k}{V}(1+K_p) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{K_p > -1}}\end{aligned}$$

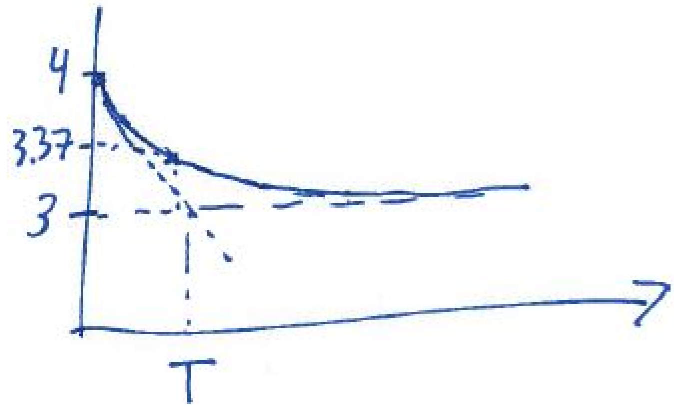
j) (3 %) En konstant lekkasje w_u vil forsvinne når vi regner ut $\ddot{e}$ i e), og vi får samme resultat som i f), dvs. $\underline{\underline{e_s = 0}}$.

Oppgave 2. (5 %)

a) (2 %) Energibalanse

b) (3 %) Det har gått én tidskonstant, se figur 2, så vi kan enkelt regne ut tiden T:

$$T = -\frac{1}{a} = \frac{\rho V}{w} = \frac{0.125 \cdot 1}{0.1} = \underline{\underline{1.25\mathrm{s}}}$$



Figur 2: Det har gått én tidskonstant, fordi temperaturen har endret seg 63 % av den totale temperaturendringen.

Oppgave 3. (10 %)

a) (5 %)

$$\begin{aligned} x &= \big(l_1 + d_2 + q_2\big)\cos q_1 \\ y &= \big(l_1 + d_2 + q_2\big)\sin q_1 \end{aligned}$$

b) (5 %)

$$q_1 = \underline{\underline{\operatorname{atan2}(x, y)}}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (l_1 + d_2 + q_2)^2 \\ l_1 + d_2 + q_2 &= \pm\sqrt{x^2 + y^2} \\ q_2 &= \pm\sqrt{x^2 + y^2} - l_1 - d_2 \\ q_2 &= \underline{\underline{\sqrt{x^2 + y^2} - l_1 - d_2}} \end{aligned}$$

Ser bare på positiv løsning av kvadratroten fordi dette er fysiske størrelser.

Oppgave 4. (16 %)

a) (4 %)

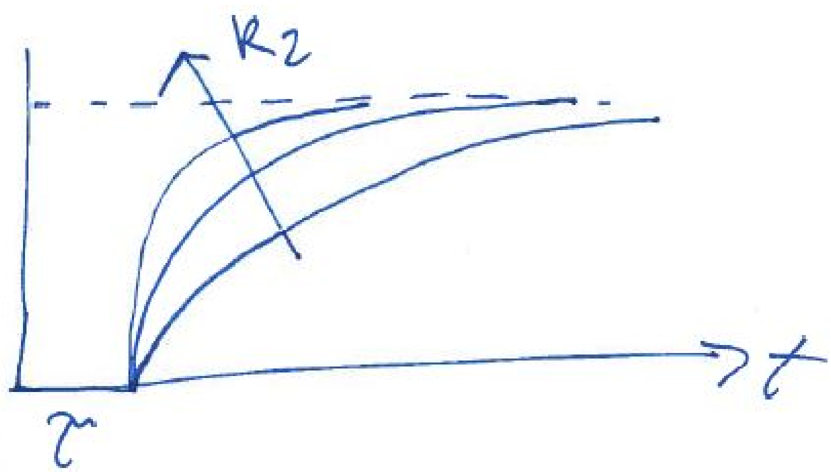
$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= K_p(r - x_2(t-\tau)) - k_1 x_1 \\ \dot{x_2} &= x_1 - k_2 x_2 \end{aligned}$$

b) (6 %)

$$\begin{aligned} K_{pk} &= 0.315 \qquad\qquad T_k = 12 \\ K_p &= 0.6 \cdot 0.315 = \underline{\underline{0.189}} \\ \\ T_i &= 0.5 T_k = 6 \\ K_i &= \frac{0.189}{6} = \underline{\underline{0.0315}} \\ \\ T_d &= 0.125 T_k = 1.5 \\ K_d &= 1.5 \cdot 0.189 = \underline{\underline{0.284}} \end{aligned}$$

c) (2 %) Systemet er av 4. orden. Svaret 3. orden godkjennes også dersom du har argumentert for at $\dot{x_2}$ kan finnes direkte ved hjelp av x_1.

d) (4 %) Se figur 3.



Figur 3: τ utgjør tidsforsinkelsen før verdien begynner å endre seg. Større k_2 fører til lavere tidskonstant, som vil si at kurven stiger til (63 % av) stasjonærverdi raskere.

Oppgave 5. (6 %)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_p x + b_p(a_x x + a_r r) \\ &= a_p x + b_p a_x x + b_p a_r r \\ &= (a_p + b_p a_x)x + b_p a_r r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_m &= a_p + b_p a_x \\ a_x &= \frac{a_m - a_p}{b_p} = \frac{-2 + 0.8}{1.6} = \underline{\underline{-0.75}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_m &= b_p a_r \\ a_r &= \frac{b_m}{b_p} = \frac{2}{1.6} = \underline{\underline{1.25}}\end{aligned}$$

Oppgave 6. (10 %)

a) (2 %)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2)\\ \dot{x}_2 &= x_2(-c + dx_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \quad \Rightarrow a - bx_{2s} = 0 \Rightarrow x_{2s} = \frac{a}{b}\\ \dot{x}_2 &= 0 \quad \Rightarrow -c + dx_{1s} = 0 \Rightarrow x_{1s} = \frac{c}{d}\end{aligned}$$

$$x_{2s} = \underline{\underline{1.5}} \quad , \quad x_{1s} = \underline{\underline{3}}$$

b) (2 %) Ustabilt

c) (6 %)

```
x=0;
h=0.01;  %Skrittlengde
T=20;    %Slutt-tid
a=1.5; b=1; c=3; d=1;

x1(1)=4; %Initialverdier
x2(1)=6;

for n=2:T/h+1  %Simulere i T sek

x1(n) = x1(n-1) + h*(a*x1(n-1) - b*x1(n-1)*x2(n-1));
x2(n) = x2(n-1) + h*(-c*x2(n-1) + d*x1(n-1)*x2(n-1));

end

t=0:h:T;
figure(3)
plot(t,x1);
grid
```