TTK4100 Øving 2

Oppg 1

a) $\Sigma F = ma$

$mq = u - r \qquad r = kv$

$ma = u - kv$

$m\dot{v} + kv = u$

$$\underline{\underline{\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u}}$$

<u>Pådraget til modellen er $\frac{1}{m}u$.</u>

<u>Modellen er av første orden.</u>

b) u er konstant

$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u \qquad | \cdot e^{\frac{k}{m}t}$

$\dot{v}e^{\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$

$\int \frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right) = \int \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$

$ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{1}{k}ue^{\frac{k}{m}t} + C \qquad | \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

$v = \frac{1}{k}u + Ce^{-\frac{k}{m}t}$

$v(0) = v_0$

$v(0) = \frac{1}{k}u + C$

$v_0 = \frac{1}{k}u + C$

$C = v_0 - \frac{1}{k}u$

$$\underline{\underline{v = \frac{1}{k}u + \left(v_0 - \frac{1}{k}u\right)e^{-\frac{k}{m}\tau}}}$$

c) $\dot{x} = ax + bu$

$T = -\frac{1}{a}$

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

$$T = -\frac{1}{-\frac{k}{m}} = \frac{m}{k}$$

$$\underline{\underline{T = \frac{m}{k}}}$$

Tidskonstanten i et dynamisk system beskriver hvor lang tid det tar for systemer å nå stasjonærverdien, altså når den er stabil.

Om k økes så vil tidskonstanten T minke, som tilsvarer att systemet når stasjonærverdien raskere. Om m økes så vil T øke, altså at det tar lengre tid for att systemet skal nå stasjonærverdien

d)

$$v = \frac{1}{k}u + \left(v_0 - \frac{1}{k}u\right)e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k}u + v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau} - \frac{1}{k}u e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k}u\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}\right) + v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau} = v - \frac{1}{k}u\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}\right)$$

$$K = -\frac{\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}\right)}{k}$$

$$\frac{1}{k}u\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}\right) = v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$u\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}\right) = k\left(v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}\right)$$

$$u = \frac{k\left(v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}\right)}{1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}}$$

Feil utgangspunkt

Om vi øker k, altså att mostanden i vannet øker, så vil pådraget u måtte øke for å holde systemet tilsvarende.

$$\dot{v} + \frac{k}{m} v = \frac{1}{m} u$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m} v + \frac{1}{m} u$$

$$a = -\frac{k}{m} \qquad b = \frac{1}{m}$$

$$K = -\frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(-\frac{k}{m}\right)} = \frac{1}{k}$$

e) $m = 200\,kg \qquad k = 100\,kg/s$

$$T = \frac{m}{k} = \frac{200\,kg}{100\,kg/s} = 2\,s$$

$$u = \frac{k\left(v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}\right)}{1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}}$$

$$u = \frac{100\,kg/s\left(v - v_0 e^{-\frac{100\,kg/s}{200\,kg}\tau}\right)}{1 - e^{-\frac{100}{200}\tau}}$$

$$= \frac{100\,kg/s\left(v - v_0 e^{-\frac{1}{2}\tau/s}\right)}{1 - e^{-\frac{1}{2}\tau/s}}$$

Tidskonstanten T = 2s forteller oss at systemet vil nå ro relativt fort.

Pådraget u forteller oss at pådraget kommer ann på farten v til ubåten.

f) $u = 500\,N \qquad v_0 = 0\,m/s \qquad m = 200\,kg \qquad k = 100\,kg/s$

$$v = \frac{1}{k}u + \left(v_0 - \frac{1}{k}u\right)e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k}u + \left(0 - \frac{1}{k}u\right)e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

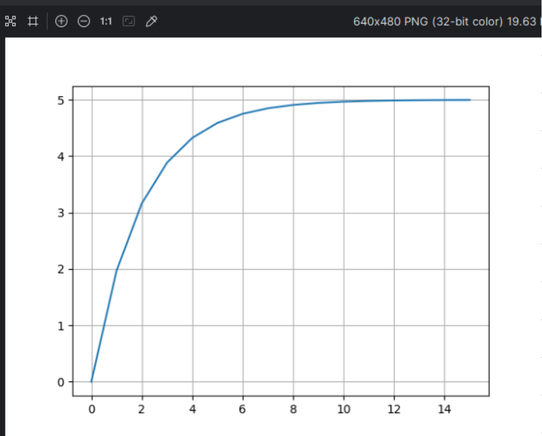
$$v = \frac{1}{k}u - \frac{1}{k}u\,e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k}u\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}\right)$$

$$v = \frac{1}{100\,kg/s} \cdot 500\,kgm/s^2 \left(1 - e^{-\frac{100\,kg/s}{200\,kg}\tau}\right)$$

$$v(\tau) = 5\,m/s \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{2s}\cdot\tau}\right)$$

```python
# funksjon for fart v(t)
def v(t):
    return 5 * (1 - np.exp((-1 / 2 ) * t) )

t_start = 0
t_stop = 15
steps = t_stop + 1

t_values = np.linspace(t_start, t_stop, steps)


v_values = np.zeros(len(t_values))

for i in range(len(t_values)):
    v_values[i] = v(i)

plt.plot( t_values, v_values)
plt.grid()
plt.show()
```



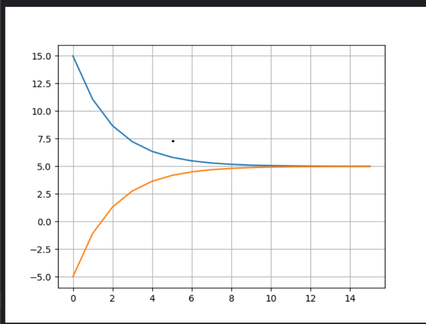
g) $u = 500\,N$ $\quad m = 200\,kg \quad k = 100\,kg/s$

$$v = \frac{1}{k}u + \left(v_0 - \frac{1}{k}u\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$v_0 = 15\,m/s$ & $v_0 = -5\,m/s$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def v(t, v0, u, m, k):  2 usages  new *
    return (1 / k) * u + (v0 - (1 / k) * u) * np.exp((- k  / m) * t)

def main():  1 usage  new *
    u = 500
    m = 200
    k = 100
    v0 = 15

    t = np.linspace( start: 0,  stop: 15,  num: 16)
    v_values = np.zeros(len(t))

    for i in range(len(t)):
        v_values[i] = v(t[i], v0, u, m, k)

    plt.plot( *args: t, v_values)

    v_values = np.zeros(len(t))

    v0 = -5

    for i in range(len(t)):
        v_values[i] = v(t[i], v0, u, m, k)

    plt.plot( *args: t, v_values)

    plt.grid()
    plt.show()


main()
```

640x480 PNG (32-bit color) 23.25 kB



h) $v = 3\,m/s, \quad \dot{v} = 0 \quad u = 500\,N \quad m = 200\,kg \quad k = 100\,kg/s$

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u$$

$u = k\,v$

$u = 100\,kg/s \cdot 3\,m/s$

$\underline{\underline{u = 300\,kgm/s^2}}$

Oppg i)

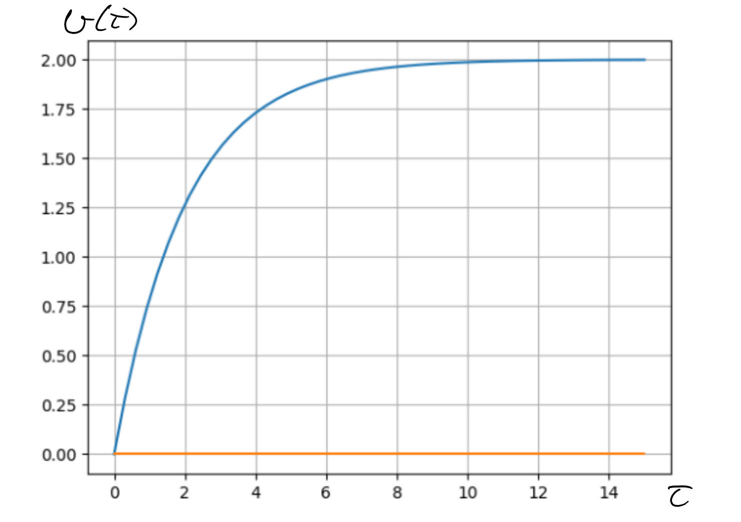
AUV 1 har en stasjonærfart 1.5m/s mens AUV 2 har halve stasjonærfarten på 0.75m/s.
Dette fører til at systemet til AUV 1 bruker betydelig lengre tid på å nå ro enn systemet til AUV 2.
Dette tilsvarer att tidskonstanten T til AUV 1 er større en tidskonstanten til AUV 2.

Gitt att pådraget er likt så burde også forsteknigen være lik mellom AUV 1 og AUV 2

Oppg j)

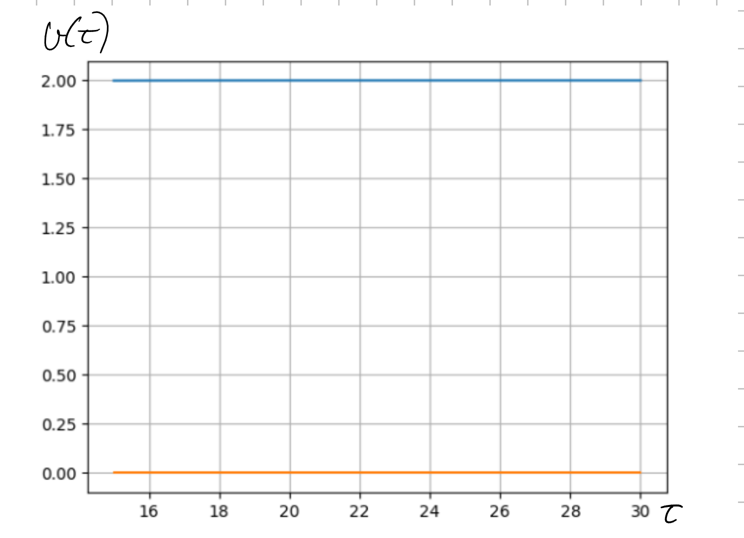
$m = 200\,kg \quad k = 100\,kg/s \quad v_0 = 0 \quad \tau = [0, 15] \quad u = 200N \;\&\; 0N$

2. $\tau = [15, 30] \quad u = 200N \;\&\; 0N$



$u = 200\,N$

$u = 0\,N$

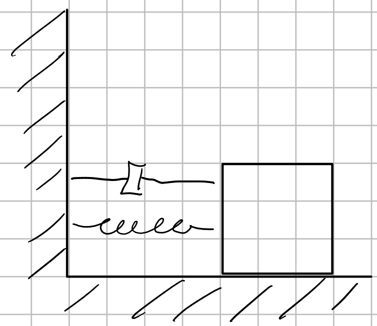


$u = 200\,N$

$u = 0\,N$

Oppgave 2

a) $\ddot{x} + \mu \dot{x} + q x = 0$



$\sum F = ma \qquad F_f = kx \qquad F_d = d\dot{x}$

$\sum F = -kx - d\dot{x}$

$ma = -kx - d\dot{x}$

$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x}$

$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Systemet er av andre orden fordi den inneholder en andrederivert.
Det trengs to initialverdier for å finne løsningen på systemet.

b) $m = 2 \qquad d = 4 \qquad k = 6$

$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + \frac{4}{2}\dot{x} + \frac{6}{2}x = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$

$\lambda = -1 \pm \frac{i \cdot 2\sqrt{2}}{2}$

$\underline{\underline{\lambda = -1 \pm \sqrt{2}\, i}}$

c) $x(\tau) = e^{a\tau}\left(C\cos(b\tau) + D\sin(b\tau)\right)$ $\qquad x(0) = 1,\ \mathring{x}(0) = 0$

$x(\tau) = e^{-\tau}\left(C\cos(\sqrt{2}\tau) + D\sin(\sqrt{2}\tau)\right)$

$x(0) = 1$

$\underline{C = 1}$

$\mathring{x}(\tau) = -e^{-\tau}\left(\cos(\sqrt{2}\tau) + D\sin(\sqrt{2}\tau)\right)$
$\qquad + e^{-\tau}\left(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\tau) + \sqrt{2}D\cos(\sqrt{2}\tau)\right)$

$\mathring{x}(0) = 0$

$-1 + (\sqrt{2}D) = 0$

$\sqrt{2}D = 1$

$D = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

$\underline{D = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\underline{\underline{x(\tau) = e^{-\tau}\left(\cos(\sqrt{2}\tau) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\tau)\right)}}$$

d) $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad$ $\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$

$\frac{d}{m} = 2\zeta\omega$

$\frac{d}{m} = 2 \cdot \frac{d}{2\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{d}{m} = \frac{d}{\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{km} \cdot \frac{k}{m}$

$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}$

$m^2 = m^2$

$0 = 0$

$\underline{\underline{\frac{d}{m} = 2\zeta\omega}}$

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$\frac{k}{m} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2$

$\frac{k}{m} = \frac{k}{m}$

$0 = 0$

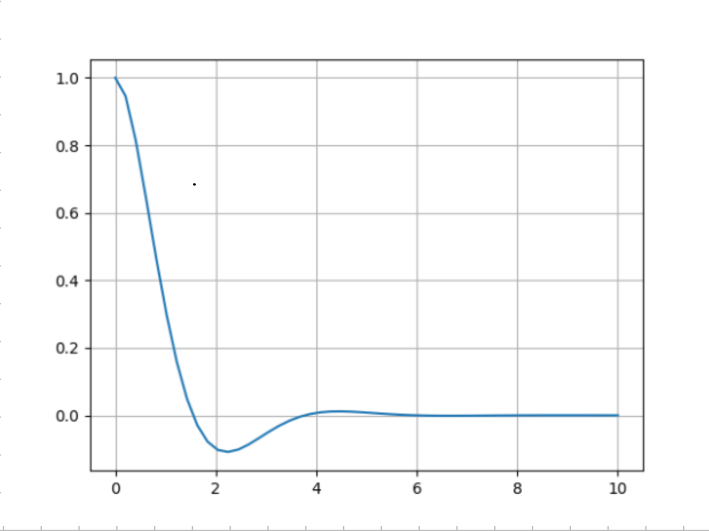
$\underline{\underline{\frac{k}{m} = \omega_0^2}}$

$m = 2, \quad d = 4, \quad k = 6$

$$\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}} = \frac{4}{2\sqrt{12}} = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{3}}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\zeta < 1 \Rightarrow$ Underdempet



Et andreordenssystem er underdempet (har svingninger før den når ro) når zeta < 0.
Systemet er kritisk dempet (når ro så fort som mulig) når zeta = 1.
Systemet er overdempet (når ro tregere enn når den er kritisk dempet, og uten svingniger) når zeta > 1-

Dette systemet er underdempet fordi zeta < 1.

e)

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{2}\,Hz$$

$$\approx 1{,}41\ldots\,Hz$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{3} \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

f) $\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{d}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + q x = 0$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\mu x_2 - q x_1$$

Tilstandene i det andreordenssystemet etter det har blitt gjort om til to førsteordenssystem er:
d(x_1)/dt = x_2
d(x_2)/dt = - (d/m) * x_2 - (k/m) * x_1