Løsningsforslag TTK4100
Kybernetikk introduksjon

Desember 2019

Oppgave 1. (3 %)

Blokkdiagram B.

Oppgave 2. (3 %)

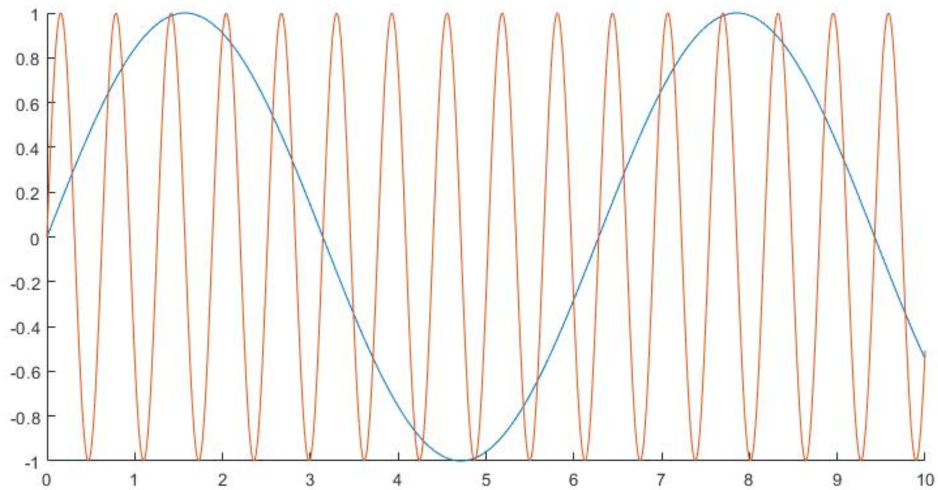
Metning/saturation.

Oppgave 3. (8 %)

a)

$$
\begin{aligned}
& & f_s &= \frac{1}{t_s} = \frac{1}{12}\mathrm{m\,s} \\
& Nyquist: & f_s &\geq 2 \cdot f_{max} \\
& & f_{max} &\leq -\frac{1}{2} f_s = \frac{1}{24\mathrm{m\,s}} = \underline{\underline{41.67\mathrm{Hz}}}
\end{aligned}
$$

b) Nedfolding (Eng: aliasing) er et fenomen som oppstår når vi sampler med for lav samlingsfrekvens, slik at det gjenskapte signalet ikke stemmer med det opprinnelige signalet. Dette er vist i figur 1.



Figur 1: Nedfolding

Oppgave 4. (22 %)

a) (2 %) Massebalanse.

b) (5 %)

$$\dot{h} = ah + bu, \qquad T = -\frac{1}{a}$$

$$A_2 = 3A_1, \qquad \rho_1 = 1.5\rho_2, \qquad k_1 = k_2$$

$$\rho_2 A_2 = \frac{\rho_1}{1.5} 3A_1 = 2\rho_1 A1$$

$$a_1 = -\frac{k_1}{\rho_1 A_1} \qquad a_1 = -\frac{k_1}{2\rho_1 A_1}$$

$$T_1 = \frac{\rho_1 A_1}{k_1} \qquad T_1 = \frac{2\rho_1 A_1}{k_1} = 2T_1$$

c) (3 %)

$$
\begin{aligned}
u_1 &= w_{i,1} = K_{p,1}(h_{r,1} - h_1) \\
\dot{h}_1 &= -\frac{k_1}{\rho_1 A_1} h_1 + \frac{K_{p,1}}{\rho_1 A_1}(h_{r,1} - h_1) \\
\dot{h}_1 &= -\frac{1}{\rho_1 A_1}(k_1 + K_{p,1}) h_1 + \frac{K_{p,1}}{\rho_1 A_1}(h_{r,1})
\end{aligned}
$$

$$
a_1 = -\frac{1}{\rho_1 A_1}(k_1 + K_{p,1}) \quad \Longrightarrow \quad T = -\frac{1}{a_1} = \underline{\underline{\frac{\rho_1 A_1}{k_1 + K_{p,1}}}}
$$

d) (3 %)

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\rho_1 A_1}(k_1 + K_{p,1}) h_{1,s} + \frac{K_{p,1}}{\rho_1 A_1}(h_{r,1}) \\
h_{1,s} &= \underline{\underline{\frac{K_{p,1}}{k_1 + K_{p,1}}}}
\end{aligned}
$$

e) (5 %) Man bør velge en regulatortype med integralledd. Både PI og PID er mulige alternativer, men PI er altså tilstrekkelig for å bli kvitt stasjonæravviket:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= K_{p,1}(h_{r,1} - h_1) + K_{i,1} \int (h_{r,1} - h_1) dt \\
\dot{h}_1 &= -\frac{k_1}{\rho_1 A_1} h_1 + \frac{K_{p,1}}{\rho_1 A_1}(h_{r,1} - h_1) + \frac{K_{i,1}}{\rho_1 A_1} \int (h_{r,1} - h_1) dt \\
&= -\frac{k_1}{\rho_1 A_1} h_1 + \frac{K_{p,1}}{\rho_1 A_1} e + \frac{K_{i,1}}{\rho_1 A_1} \int e \; dt \\
\ddot{h}_1 &= -\frac{k_1}{\rho_1 A_1} \dot{h}_1 + \frac{K_{p,1}}{\rho_1 A_1} \dot{e} + \frac{K_{i,1}}{\rho_1 A_1} e \\
0 &= 0 + 0 + \frac{K_{i,1}}{\rho_1 A_1} e_s \\
e_s &= h_{r,1} - h_{1,s} = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_{r,1} = h_{1,s}
\end{aligned}
$$

f) (2 %)

$$
w_{u,1,s} = \underline{\underline{k_1 h_{1,r}}} \qquad w_{u,2,s} = \underline{\underline{k_2 h_{2,r}}}
$$

g) (2 %) Endre ventilene eller endre referansehøydene, siden ut-massestrømmen er avhengig av konstantene k_1 og k_2 og referansehøydene $h_{1,r}$ og $h_{2,r}$.

Oppgave 5. (3 %)

Lasteskip:

$$118 \cdot 7.8\ddot{r} + (118 + 7.8)\dot{r} + r = K\delta$$

Sjekker koeffisientene:

$$118 \cdot 7.8 > 0, \qquad (118 + 7.8) > 0, \qquad 1 > 0$$

Siden alle koeffisientene har samme fortegn, er systemet stabilt.

Oljetanker:

$$-124 \cdot 16\ddot{r} + (-124 + 16)\dot{r} + r = K\delta$$

Sjekker koeffisientene:

$$-124 \cdot 16 < 0, \qquad (-124 + 16) < 0, \qquad 1 > 0$$

Siden koeffisientene har ulikt fortegn, er systemet ustabilt.

Oppgave 6. (10 %)

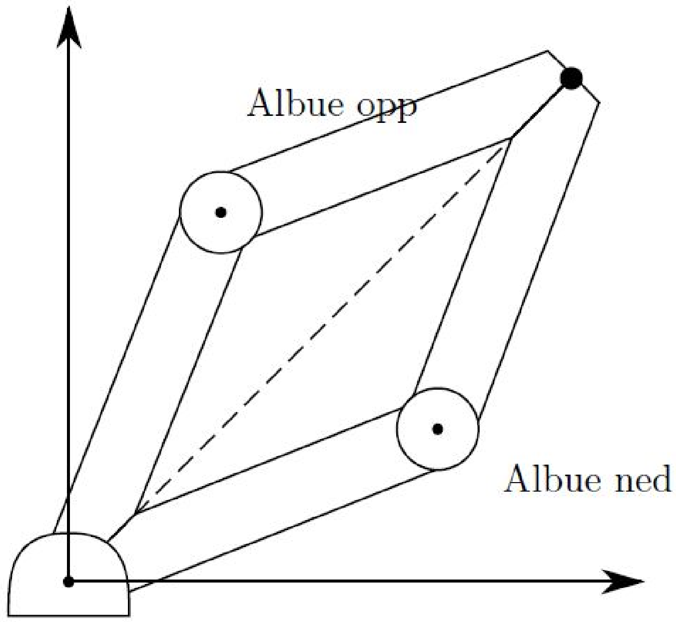
a) (5 %)

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

b) (5 %) To mulige løsninger, som vist i figur 2.

Oppgave 7. (6 %)

A: PID B: PD C: PI



Figur 2: To løsninger: Albue opp og albue ned.

Oppgave 8. (9 %)

a) (2 %)

$$T = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \qquad K = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) (1 %)

$$u = 1, \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -2x + 1 \\ 0 &= -2x_s + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_s = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

c) (3 %) Sett inn i uttrykket, eller ventuelt løs den separable diff.likningen:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -2x+1 \\
\int \frac{1}{-2x+1}dx &= \int 1dt, \qquad\qquad u=-2x+1 \\
-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du &= \int 1dt \\
ln\ u &= -2t+C' \\
u &= e^{-2t+c'} \\
-2x+1 &= C''e^{-2t}, \qquad\qquad C''=1 \\
x &= \frac{1}{2}(1-e^{-2t})
\end{aligned}$$

d) (3 %)

$$\begin{aligned}
x(3T)=x(\frac{3}{2}) &= \frac{1}{2}(1-e^{-2\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}(1-e^{-3}) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot 0.95}} = x_s \cdot 0.95
\end{aligned}$$

Oppgave 9. (6 %)

a) (2 %) For likevektspunktet $x=0$: Hvis tilstanden initielt er nær likevektspunktet ($<\delta$), så forblir tilstanden nær likevektspunktet ($<\epsilon$) i et stabilt system. For et asymptotisk stabilt system, vil tilstanden i tillegg gå helt tilbake til likevektspunktet når $t\to\infty$, altså $x\to 0$.

b) (2 %)

$$\begin{aligned}
\dot{V}=x(ax+u)=ax^2 &< 0 \\
a &< 0
\end{aligned}$$

c) (2 %)

$$\begin{aligned}
\dot{V}=x(ax+u)=x(2x+K_px)=(2+K_p)x^2 &< 0 \\
2+K_p &< 0 \\
K_p &< -2
\end{aligned}$$

Oppgave 10. (10 %)

a) (2 %)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -d\dot{x} - kx \\ 1.5\ddot{x} + 1.5\dot{x} + 6x &= 0 \\ \ddot{x} + \dot{x} + 4x &= 0 \end{aligned}$$

b) (2 %)

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\omega_0 = 2}} \\ 2\zeta\omega_0 &= 1 \\ \zeta &= \frac{1}{2\omega_0} = \frac{1}{\underline{\underline{4}}} \end{aligned}$$

Systemet er underdempet siden $0 < \zeta < 1$.

c) (4 %)

ω_d er den faktiske frekvensen på svingningen til det dempede systemet, f.eks. systemet vist i figur 3. Kan finnes grafisk ved å måle hvor lang en periode P er, og så regne ut ω_d:

$$\omega_d = \frac{1}{P} = \frac{1}{T_2 - T_1}\text{Hz}$$

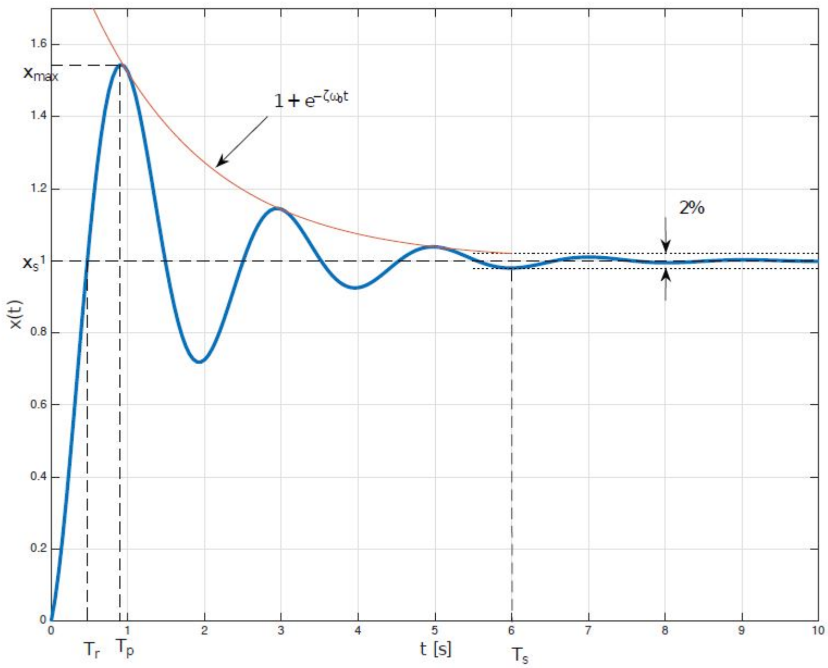
I figur 3 ser vi at det er tilnærmet 2s mellom bølgetoppene, altså er en periode 2s lang. Dermed vil den faktiske fekvensen være

$$\omega_d = \frac{1}{P} = \frac{1}{2s} = 0.5\text{Hz}$$

d) (2 %)

$$\delta(\zeta) = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{-\frac{1}{4}\pi}{\sqrt{1-(\frac{1}{4})^2}}} = \underline{\underline{0.44}}$$

Grafisk er x_{max} x-verdien på den største svigningen, og x_s stasjonærverdien, se figur 3.



Figur 3: Les av x_S og x_{max} og bruk formelen, eller mål hvor lang en periode er, og finn frekvens ut fra dette.