Kybernetikk introduksjon: Øving 2

Lars André Roda Jansen

September 20, 2024

1 Oppgave 1

1.1 1a)

$$\sum F = ma$$
$$ma = u - r$$
$$r = kv$$
$$ma = u - kv$$
$$m\dot{v} = -kv + u$$
$$\underline{\underline{\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u}}$$

Pådraget til modellem er u. Modellen er av første orden.

1.2 1b)

Anta att u er konstant.

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u \quad | \cdot e^{\frac{k}{m}t}$$
$$\dot{v}e^{\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$$
$$\frac{d}{dt}(ve^{\frac{k}{m}t}) = \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$$
$$\int \frac{d}{dt}(ve^{\frac{k}{m}t}) = \int \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$$
$$ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{1}{k}ue^{\frac{k}{m}t} + C \quad | \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$
$$v = \frac{1}{k}u + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$
$$v(0) = v_0$$
$$v(0) = \frac{1}{k} + C$$
$$C = v_0 - \frac{1}{k}u$$
$$\underline{\underline{v = \frac{1}{k}u + (v_0 - \frac{1}{k}u)e^{-\frac{k}{m}t}}}$$

1.3 1c)

$$\dot{x} = ax + bu$$
$$\rightarrow T = -\frac{1}{a}$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$
$$T = -\frac{1}{-\frac{k}{m}}$$
$$\underline{\underline{T = \frac{m}{k}}}$$

Tidskonstanten i et dynamisk system beskriver hvor lang tid det tar for systemet å nå stasjonærverdien. Om k økes så vil tidskonstanten minke, som tilsvarer att systemet når stasjonærverdien raskere. Om m økes så vil T øke, systemet vil da bruke lengre tid på å nå stasjonærverdien.

1.4 1d)

$$\dot{x} = ax + bu$$
$$\rightarrow K = -\frac{b}{a}$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$
$$K = -\frac{\frac{1}{m}}{-\frac{k}{m}}$$
$$\underline{\underline{K = \frac{1}{k}}}$$

1.5 1e)

$m = 200kg$, $k = 100kg/s$

$$T = \frac{m}{k} = \frac{200kg}{100kg/s}$$
$$\underline{\underline{T = 2s}}$$

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{100kg/s}$$
$$\underline{\underline{K = 1/100}}$$

Tidskonstanten $T = 2s$ forteller oss at systemet kommer til å nå ca 63 prosent av stasjonærverdien etter 2 sekunder. Pådraget $K = 1/100$ forteller oss att ?????.

1.6 1f)

$u = 500N$, $v_0 = 0m/s$, $m = 200kg$, $k = 100kg/s$

$$v = \frac{1}{k}u + (v_o - \frac{1}{k}u)e^{-\frac{k}{m}t}$$

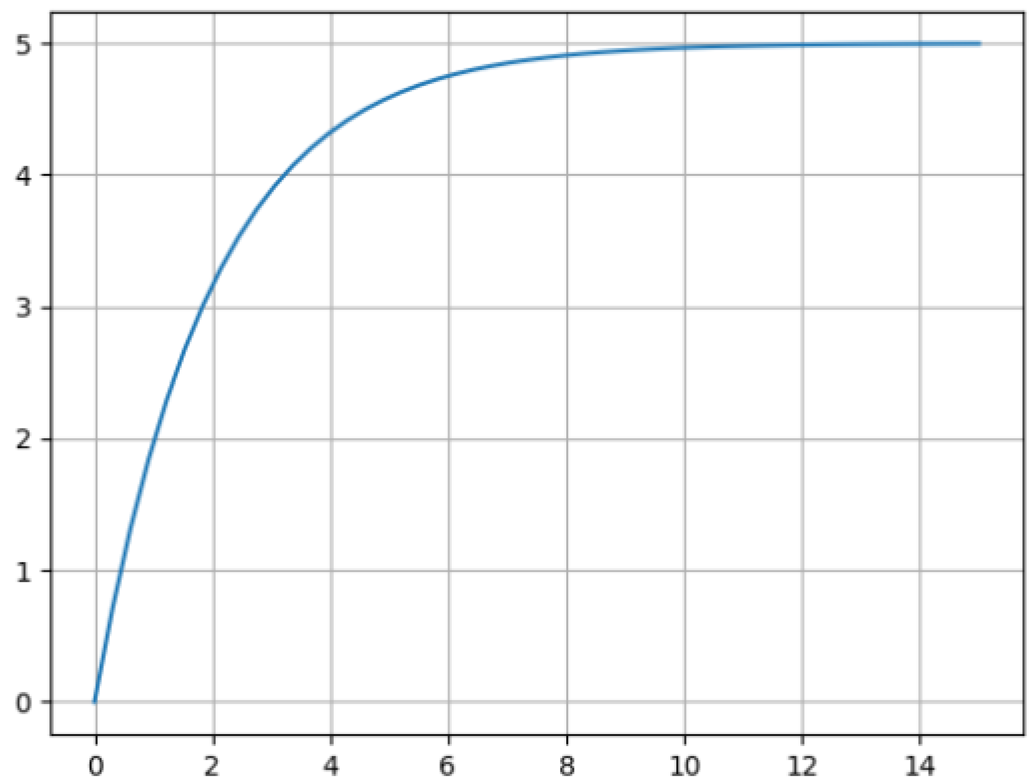
$$v = \frac{1}{k}u + (0 - \frac{1}{k}u)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \frac{1}{k}u - \frac{1}{k}ue^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \frac{1}{k}u(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$v = \frac{1}{100} \cdot 500 \cdot (1 - e^{-\frac{100}{200}t})$$

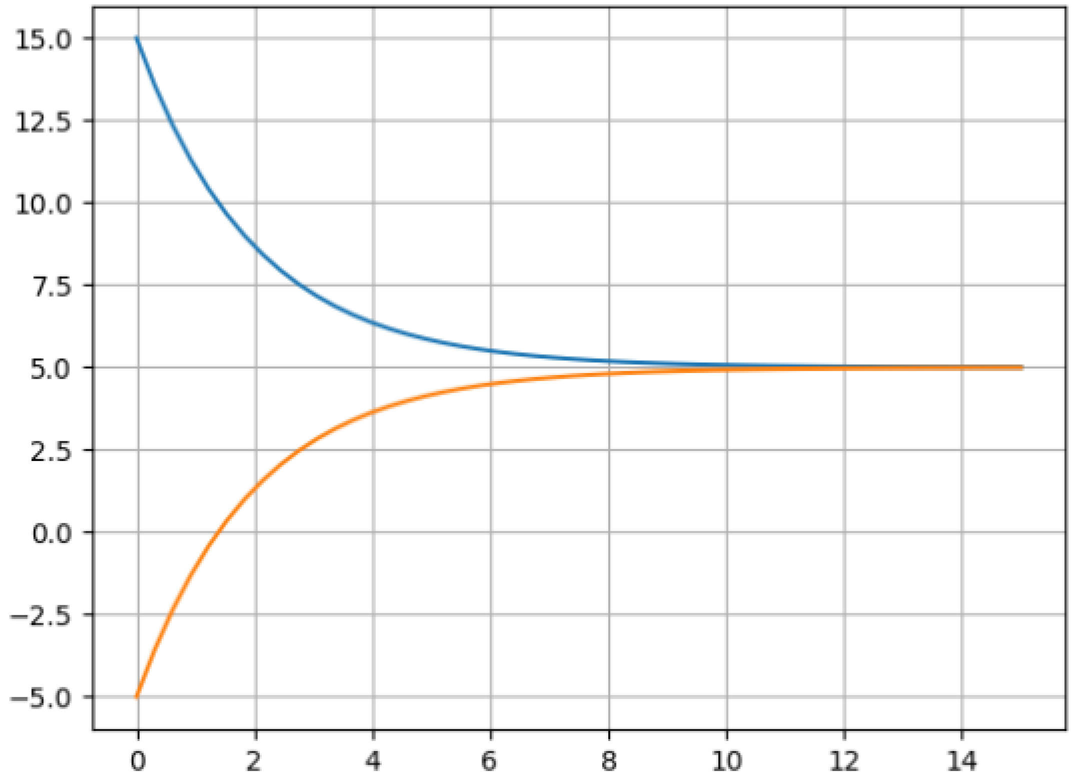
$$\underline{\underline{v(t) = 5 * (1 - e^{-\frac{1}{2}t})}}$$



1.7 1g)

$u = 500N$, $m = 200kg$, $k = 100kg/s$ $v_0 = 15m/s, -5m/s$

$$v = \frac{1}{k}u + (v_o - \frac{1}{k}u)e^{-\frac{k}{m}t}$$



1.8 1h)

$v = 3m/s$, $\dot{v} = 0$, $u = 500N$, $m = 200kg$, $k = 100kg/s$

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u$$

$$u = kv$$

$$u = 100 * 3$$

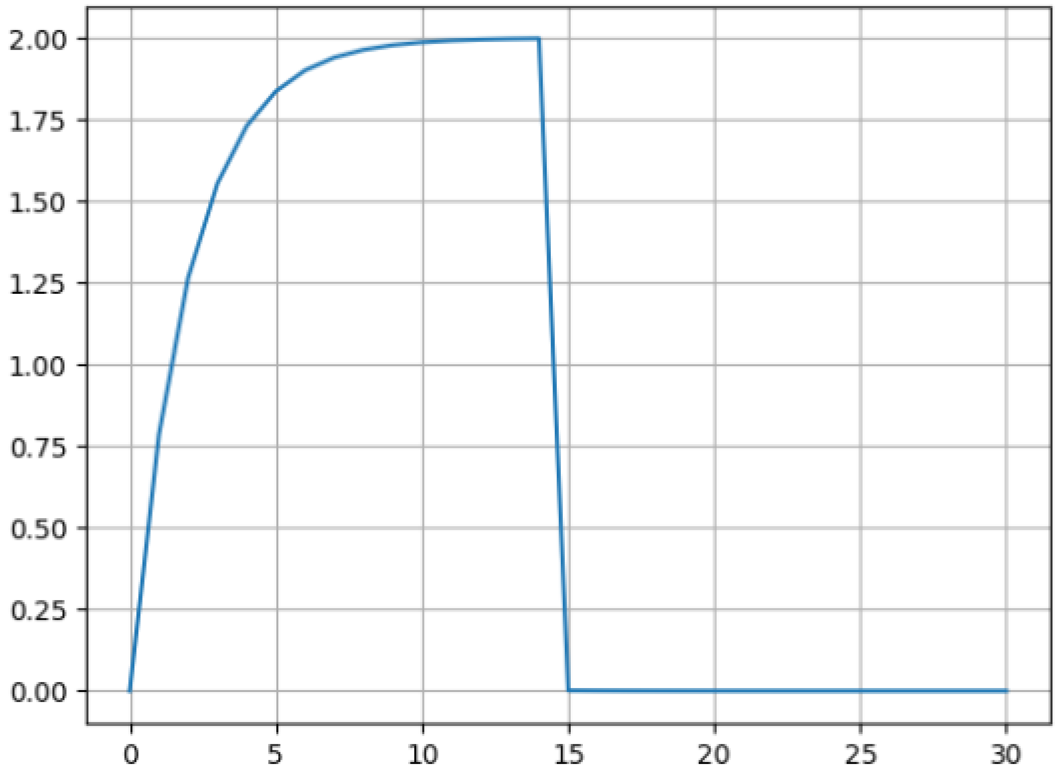
$$\underline{\underline{u = 300N}}$$

1.9 1i)

AUV 1 har en stasjonærfart $1.5m/s$ mens AUV 2 har halve stasjonærfarten på $0.75m/s$. Dette fører til at systemet til AUV 1 bruker betydelig lengre tid på å nå ro enn systemet til AUV 2. Dette tilsvarer att tidskonstanten til AUV 1 er større en tidskonstanten til AUV 2. Gitt att pådraget er likt så burde forsterkningen være lik mellom AUV 1 og 2.

1.10 1j)

$m = 200kg$, $k = 100kg/s$, $v_0 = 0$ $t = [0, 15] \to u = 200N$, $t = [15, 30] \to u = 0N$



Grafen ligner på en RLC-krets der spenningskilden blir koblet ut.

2 Oppgave 2

2.1 2a)

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

$$\sum F = ma = m\ddot{x}$$
$$F_f = kx$$
$$F_d = d\dot{x}$$

$$\sum F = -kx - d\dot{x}$$
$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x}$$
$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$
$$\underline{\underline{\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}}$$

Systemet er av andre orden fordi den inneholder en andrederivert. Det trengs to initalbetingelser for å kunne løse systemet.

2.2 2b)

$m = 2,\ d = 4,\ k = 6$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{4}{2}\dot{x} + \frac{6}{2}x = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$
$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$$
$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$
$$\lambda = -1 \pm \frac{i \cdot 2\sqrt{2}}{2}$$
$$\underline{\underline{\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i}}$$

2.3 2c)

$$x(t) = e^{at}(C\cos bt + D\sin bt)$$
$$x(t) = e^{-t}(C\cos\sqrt{2}t + D\sin\sqrt{2}t)$$
$$x(0) = 0$$
$$\underline{C = 1}$$

$$\dot{x}(t) = -e^{-t}(C\cos\sqrt{2}t + D\sin\sqrt{2}t) + e^{-t}(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}D\cos\sqrt{2}t)$$

$$\dot{x} = 0$$
$$-1 + \sqrt{2}D = 0$$
$$\sqrt{2}D = 2$$
$$\underline{D = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t)}}$$

2.4 2d)

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

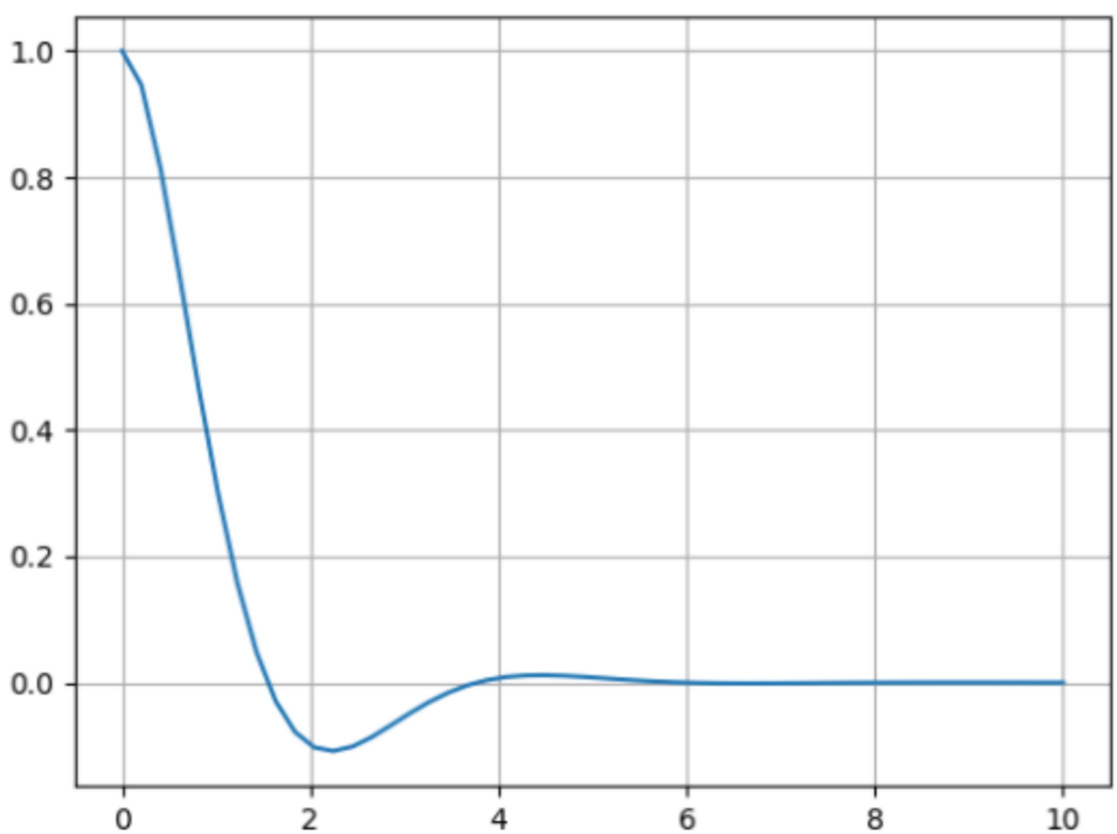
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$$
$$\frac{d}{m} = 2\zeta\omega$$

$$\frac{d}{m} = 2 \cdot \frac{d}{2\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\frac{d}{m} = \frac{d}{\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{km} \cdot \frac{k}{m}$$
$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}$$
$$m^2 = m^2$$
$$\underline{\underline{\frac{d}{m} = 2\zeta\omega}}$$
$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$
$$\frac{k}{m} = \sqrt{\frac{k}{m}}^2$$
$$\frac{k}{m} = \frac{k}{m}$$
$$\underline{\underline{\frac{k}{m} = \omega_0^2}}$$

$m = 2,\ d = 4,\ k = 6$

$$\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$$
$$\zeta = \frac{4}{2\sqrt{12}}$$
$$\zeta = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{3}}$$
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\zeta < 1 \Rightarrow Underdempet$$



Et andreordenssystem er underdempet (Svingninger før den når ro) dersom $\zeta < 0$. Systemet er kritisk dempet (når ro så fort som mulig) når $\zeta = 1$. Systemet er overdempet (når ro treigere enn kritisk dempning, og uten svingninger) når $\zeta > 1$.

Dette systemet er derfor underdempet ettersom $\zeta < 1$.

2.5 2e)

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$\omega_D = \sqrt{3}\sqrt{1-\frac{1}{3}}$$
$$\omega_D = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\underline{\underline{\omega_D = \sqrt{2}Hz}}$$

2.6 2f)

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -\frac{d}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

Tilstandene i andreordenssystemet etter å bli omgjort til to førsteordenssystemer er: $\underline{\dot{x_1} = x_2 \text{ og } \dot{x_2} = -\frac{d}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1}$.