

TK4100 Øving 2

Oppg 1

a) $\Sigma F = m a$

$$m a = u - r \quad r = k v$$

$$m a = u - k v$$

$$m \ddot{v} + k v = u$$

$$\ddot{v} + \frac{k}{m} v = \frac{1}{m} u$$

Pådrager til modellen er $\frac{1}{m} u$.

Modellen er av første orden.

b) u er konstant

$$\ddot{v} + \frac{k}{m} v = \frac{1}{m} u \quad | \cdot e^{\frac{k}{m} \tau}$$

$$\ddot{v} e^{\frac{k}{m} \tau} + \frac{k}{m} v e^{\frac{k}{m} \tau} = \frac{1}{m} u e^{\frac{k}{m} \tau}$$

$$\int \frac{d}{d\tau} (v e^{\frac{k}{m} \tau}) = \int \frac{1}{m} u e^{\frac{k}{m} \tau}$$

$$v e^{\frac{k}{m} \tau} = \frac{1}{k} u e^{\frac{k}{m} \tau} + C \quad | \cdot e^{-\frac{k}{m} \tau}$$

$$v = \frac{1}{k} u + C e^{-\frac{k}{m} \tau}$$

$$v(0) = v_0$$

$$v(0) = \frac{1}{k} u + C$$

$$v_0 = \frac{1}{k} u + C$$

$$C = v_0 - \frac{1}{k} u$$

$$\underline{v = \frac{1}{k}u + (v_0 - \frac{1}{k}u)e^{-\frac{k}{m}\tau}}$$

c) $\dot{x} = ax + bu$

$$T = -\frac{1}{a}$$



$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

$$T = -\frac{1}{-\frac{k}{m}} = \frac{m}{k}$$

$$\underline{T = \frac{m}{k}}$$

Tidskonstanten i et dynamisk system beskriver hvor lang tid det tar for systemet å nå stasjonærverdien, altså når den er stabil.

Om k økes så vil tidskonstanten T minke, som tilsvarer att systemet når stasjonærverdien raskere. Om m økes så vil T øke, altså at det tar lengre tid for att systemet skal nå stasjonærverdien

d)

$$v = \frac{1}{k}u + (v_0 - \frac{1}{k}u)e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k}u + v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau} - \frac{1}{k}u e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k}u(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}) + v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau} = v - \frac{1}{k}u(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau})$$

$$K = \frac{(1 - e^{-\frac{k}{m}T})}{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}u(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}) &= v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau} \\ u(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}) &= k(v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau}) \\ u &= \frac{k(v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau})}{1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}} \end{aligned}$$

Feil utgangspunkt

Om vi øker k , altså att mostanden i vannet øker, så vil pådraget u måtte øke for å holde systemet tilsvarende.

$$\ddot{v} + \frac{k}{m} v = \frac{1}{m} u$$

$$\ddot{v} = -\frac{k}{m} v + \frac{1}{m} u$$

$$a = -\frac{k}{m} \quad b = \frac{1}{m}$$

$$K = -\frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(-\frac{k}{m}\right)} = \frac{1}{k}$$

$$c) \quad m = 200 \text{ kg} \quad k = 100 \text{ kg/s}$$

$$T = \frac{m}{k} = \frac{200 \text{ kg}}{100 \text{ kg/s}} = 2 \text{ s}$$

$$u = \frac{k(v - v_0 e^{-\frac{k}{m}\tau})}{1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}}$$

$$u = \frac{100 \text{ kg/s} (v - v_0 e^{-\frac{100 \text{ kg/s}}{200 \text{ kg}}\tau})}{1 - e^{-\frac{100}{200}\tau}}$$

$$= \frac{100 \text{ kg/s} (v - v_0 e^{-\frac{1}{2}\tau/\text{s}})}{1 - e^{-\frac{1}{2}\tau/\text{s}}}$$

Tidskonstanten $T = 2 \text{ s}$ forteller oss at systemet vil nå ro relativt fort.

Pådraget u forteller oss at pådraget kommer ann på farten v til ubåten.

$$f) \quad u = 500 \text{ N} \quad v_0 = 0 \text{ m/s} \quad m = 200 \text{ kg} \quad k = 100 \text{ kg/s}$$

$$v = \frac{1}{k} u + (v_0 - \frac{1}{k} u) e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

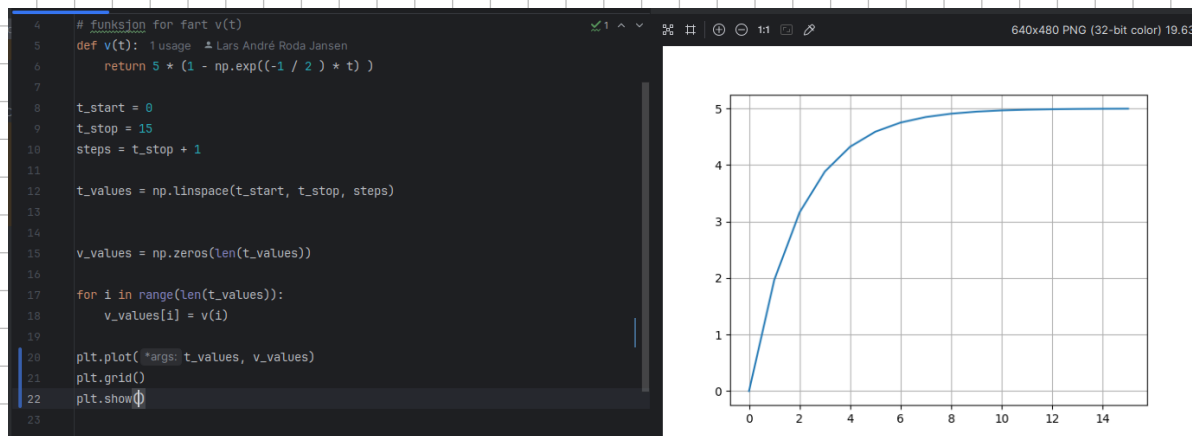
$$v = \frac{1}{k} u + (0 - \frac{1}{k} u) e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k} u - \frac{1}{k} u e^{-\frac{k}{m}\tau}$$

$$v = \frac{1}{k} u (1 - e^{-\frac{k}{m}\tau})$$

$$v = \frac{1}{100 \text{ kg/s}} \cdot 500 \text{ kg m/s}^2 \left(1 - e^{-\frac{100 \text{ kg}}{200 \text{ kg/s}}\tau}\right)$$

$$v(\tau) = 5 \text{ m/s} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2} \text{s}^{-1} \tau})$$



g)

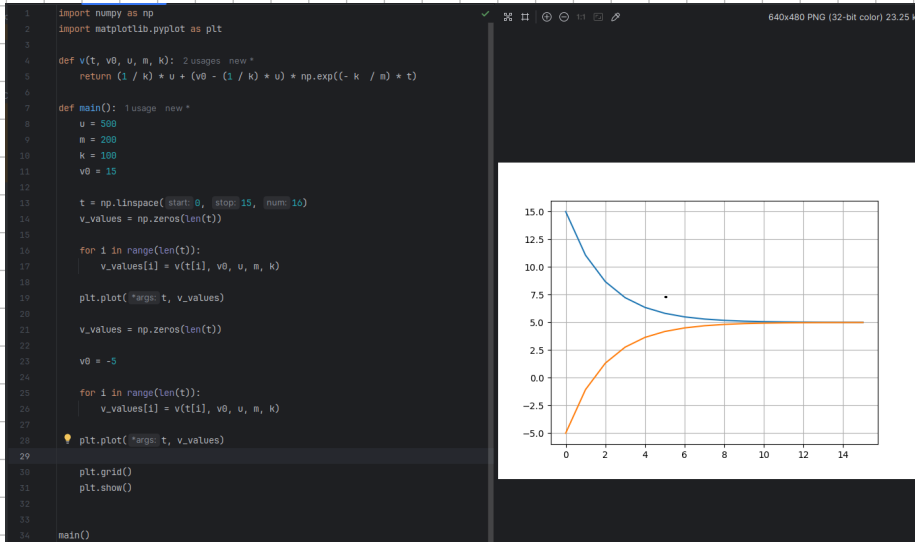
$$u = 500 \text{ N}$$

$$m = 200 \text{ kg}$$

$$k = 100 \text{ kg/s}$$

$$v = \frac{1}{k} u + (v_0 - \frac{1}{k} u) e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$v_0 = 15 \text{ m/s} \quad \& \quad v_0 = -5 \text{ m/s}$$



$$h) \quad v = 3 \text{ m/s}, \quad \ddot{v} = 0 \quad u = 500 \text{ N} \quad m = 200 \text{ kg} \quad k = 100 \text{ kg/s}$$

$$\ddot{v} + \frac{k}{m} v = \frac{1}{m} u$$

$$u = k v$$

$$u = 100 \text{ kg/s} \cdot 3 \text{ m/s}$$

$$\underline{\underline{u = 300 \text{ kgm/s}^2}}$$

Oppg c)

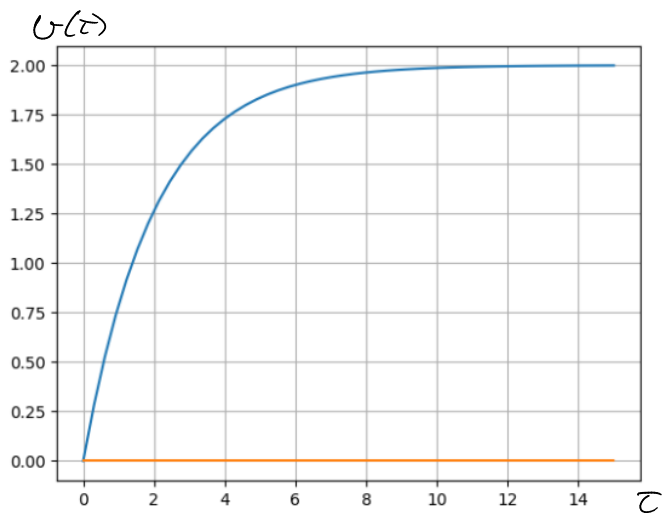
AUV 1 har en stasjonærfart 1.5m/s mens AUV 2 har halve stasjonærfarten på 0.75m/s.
 Dette fører til at systemet til AUV 1 bruker betydelig lengre tid på å nå ro enn systemet til AUV 2.
 Dette tilsvarer att tidskonstanten T til AUV 1 er større en tidskonstanten til AUV 2.

Gitt att pådraget er likt så burde også forstekningen være lik mellom AUV 1 og AUV 2

Oppg d)

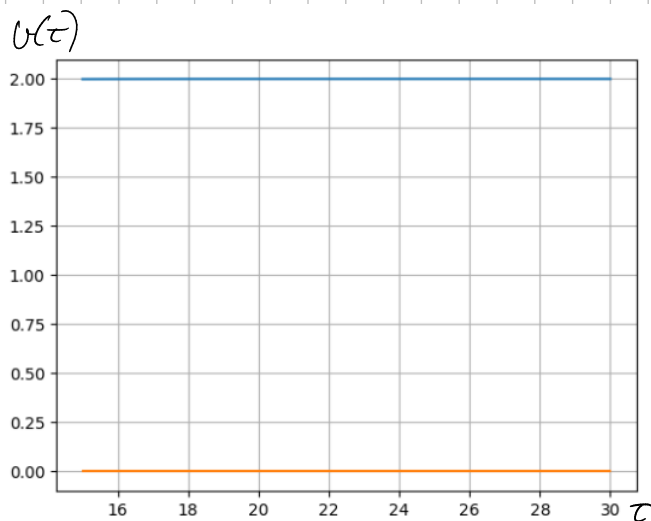
$$m = 200 \text{ kg} \quad k = 100 \text{ kg/s} \quad v_0 = 0 \quad x = [0, 1.5] \quad u = 200 \text{ N} \quad \& \quad 0 \text{ N}$$

$$2. \quad \tau = [1.5, 3.0] \quad u = 200 \text{ N} \quad \& \quad 0 \text{ N}$$



$$u = 200 \text{ N}$$

$$u = 0 \text{ N}$$



$$u = 200 \text{ N}$$

$$u = 0 \text{ N}$$

Oppgave 2

a) $\ddot{x} + \mu \dot{x} + \gamma x = 0$

$$\sum F = ma \quad F_s = kx \quad F_d = d\dot{x}$$

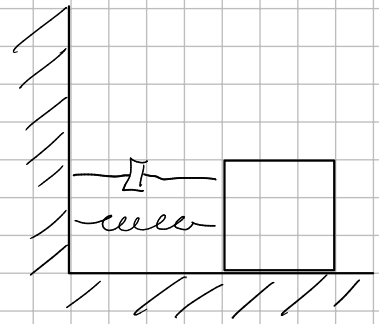
$$\sum F = -kx - d\dot{x}$$

$$ma = -kx - d\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



Systemet er av andre orden fordi den inneholder en andrerivert.
Det trengs to initialverdier for å finne løsningen på systemet.

b) $m = 2 \quad d = 4 \quad k = 6$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{4}{2}\dot{x} + \frac{6}{2}x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$\lambda = -1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2}i$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i}}$$

$$c) \quad x(t) = e^{at} (C \cos(\sqrt{2}t) + D \sin(\sqrt{2}t)) \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = e^{-t} (C \cos(\sqrt{2}t) + D \sin(\sqrt{2}t))$$

$$x(0) = 1$$

$$\underline{C = 1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t} (C \cos(\sqrt{2}t) + D \sin(\sqrt{2}t)) \\ &\quad + e^{-t} (-\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} D \cos(\sqrt{2}t)) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$-1 + (\sqrt{2} D) = 0$$

$$\sqrt{2} D = 1$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{D = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = e^{-t} \left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}t) \right)}}$$

$$d) \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{k m}}$$

$$\frac{d}{m} = 2\zeta\omega$$

$$\frac{d}{m} = 2 \cdot \frac{d}{2\sqrt{k m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d}{m} = \frac{d}{\sqrt{k m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{k m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{k m} \cdot \frac{k}{m}$$

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}$$

$$m^2 = m^2$$

$$0 = 0$$

$$\underline{\underline{\frac{d}{m} = 2\zeta\omega}}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{k}{m} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2$$

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{m}$$

$$0 = 0$$

$$\underline{\underline{\frac{k}{m} = \omega_0^2}}$$

$$C = \frac{d}{2\sqrt{k/m}}$$

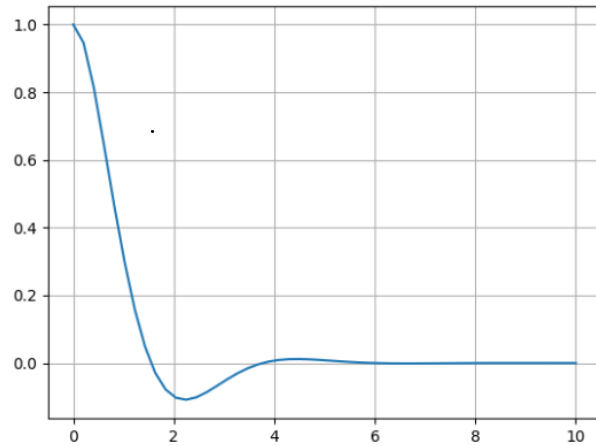
$$m = 2, \quad d = 4, \quad k = 6$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{12}}$$

$$= \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{3}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\zeta < 1 \Rightarrow \text{Underdampet}$$



Et andreordenssystem er underdampet (har svingninger før den når ro) når $\zeta < 1$.

Systemet er kritisk dampet (når ro så fort som mulig) når $\zeta = 1$.

Systemet er overdampet (når ro tregere enn når den er kritisk dampet, og uten svingninger) når $\zeta > 1$.

Dette systemet er underdampet fordi $\zeta < 1$.

e)

$$\begin{aligned}\omega_b &= \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \sqrt{2} \text{ Hz} \\ &\approx 1,41 \dots \text{ Hz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} & \zeta &= \frac{d}{2\sqrt{k m}} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{6}{2}} \\ \omega_0 &= \sqrt{3} & \zeta &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

f) $\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{d}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + q x = 0$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\mu x_2 - q x_1$$

Tilstandene i det andreordenssystemet etter det har blitt gjort om til to førsteordenssystem er:

$$d(x_1)/dt = x_2$$

$$d(x_2)/dt = -(d/m) * x_2 - (k/m) * x_1$$

