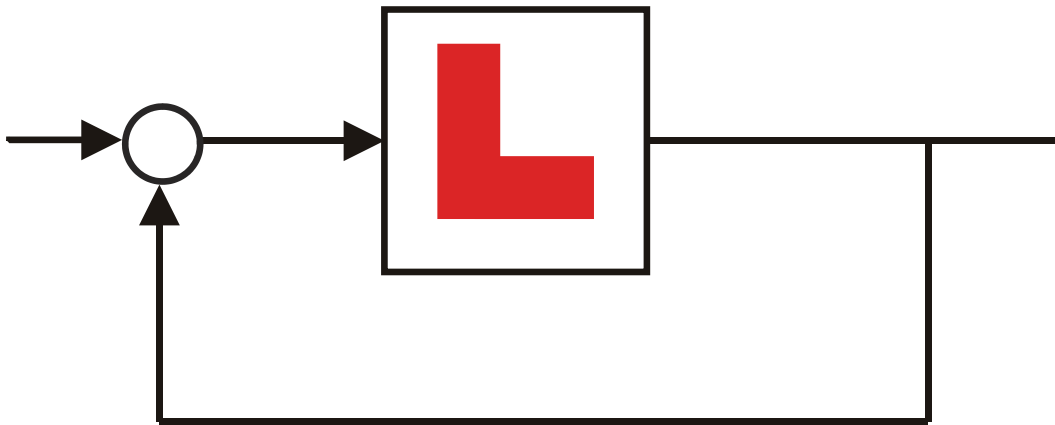


KYBERNETIKK INTRODUKSJON:

Innføring i dynamikk og
reguleringsteknikk



Jan Tommy Gravdahl
Institutt for teknisk kybernetikk, NTNU

August 2020

Innhold

Forord	v
1 Introduksjon	1
1.1 Hva er kybernetikk?	1
1.1.1 Opphav	2
1.1.2 Kybernetikk i samfunnsvitenskap	3
1.1.3 Teknisk kybernetikk	3
1.2 Hva er reguleringsteknikk?	3
1.3 Vesentlige begreper og definisjoner	4
2 Diff.ligninger og mat. modellering	7
2.1 Introduksjon	7
2.2 Differensialligninger	7
2.2.1 Introduksjon	7
2.2.2 Tilstandsromsform	8
2.2.3 Likevektspunkt	9
2.2.4 Modellering	10
2.2.5 Førsteordens differensialligninger	18
2.2.6 Andreordens differensialligninger	24
2.2.7 Differensialligninger av høyere orden	30
3 Dynamiske systemer	31
3.1 Introduksjon	31
3.2 Stasjonær respons	32
3.3 Transient respons	34
3.3.1 Førsteordens systemer	34
3.3.2 Andreordens systemer	38

4	Blokkdiagrammer	43
4.1	Introduksjon	43
4.2	Blokker	43
4.2.1	Funksjonsgenerering	44
4.2.2	Multiplikasjon	44
4.2.3	Addisjon og subtraksjon	44
4.2.4	Integrasjon	44
4.3	Sammensatte blokkdiagrammer	44
5	Simulering, Matlab og Simulink	49
5.1	Simulering	49
5.1.1	Innledning	49
5.1.2	Eulers metode	49
5.1.3	Valg av skrittlengde	53
5.1.4	Andre metoder	56
5.2	Simulink	57
6	Innføring i reguleringsteknikk	63
6.1	Innledning	63
6.2	Tilbakekobling	64
6.2.1	P-regulator	65
6.2.2	Integralvirkning, PI-regulator	66
6.2.3	Demping, PD-regulator	69
6.3	Foroverkobling	73
6.4	Tidsforsinkelse	78
6.5	Valg av regulatorparametere	82
6.5.1	Polplassering	82
6.5.2	Ziegler-Nichols' metoder	83
7	Stabilitet	89
7.1	Definisjon	89
7.2	Stabilitet for lineære systemer	92
7.2.1	Systemer av første orden	92
7.2.2	Systemer av andre orden	93
7.3	Andre systemer	98
7.4	Alternativ metode for stabilitetsanalyse	99
7.4.1	Grafisk metode	99
7.4.2	Analytisk metode	100

7.5	Stabilisering	102
8	Ulineære systemer	105
8.1	Ulineære fenomener	105
8.1.1	Metning	106
8.1.2	Dødsone	106
8.2	Integrator windup	107
9	Robotikk	111
9.1	Introduksjon	111
9.2	Kinematikk	111
9.2.1	Foroverkinematikk	111
9.2.2	Inverskinematikk	114
9.3	Dynamikk	116
9.4	Ulineær regulering	118
10	Aktuatorer og pådragsorganer	121
10.1	Introduksjon	121
10.2	Likestrømsmotrer	122
10.3	Vekselsstrømsmotorer	124
10.4	Ventiler	126
11	Måling av resistans og kapasitans	131
11.1	Resistans	131
11.1.1	Direkte måling av resistans	131
11.1.2	Indirekte måling av resistans	132
11.2	Kapasitans	137
11.3	Lys og optiske sensorer	138
11.3.1	Emisjonsceller	139
11.3.2	Magnetfelt	141
12	Mekaniske sensorer	143
12.1	Måling av posisjon	143
12.1.1	Potensiometer	143
12.1.2	Kapasitive sensorer	143
12.1.3	Strekklapper	145
12.1.4	Måling av nivå	149
12.2	Måling av strømning	149

12.2.1	Måling av faststoff	151
12.2.2	Måling av gass og væske	151
13	Signaler og sampling	155
13.1	Digitale og analoge signaler	155
13.2	Sampling	155
A	Komplekse tall	163
A.1	Introduksjon	163
A.2	Regneregler	165
A.2.1	Komplekskonjugering	165
A.2.2	Addisjon og subtraksjon	165
A.2.3	Multiplikasjon	165
A.2.4	Divisjon	166
A.3	Anvendelser	166

Forord

Dette kompendiet er skrevet for bruk i faget TTK4100 Kybernetikk introduksjon som undervises i første semester i første årskurs på masterstudiet i Kybernetikk og robotikk. Jeg vil sette stor pris på tilbakemeldinger om forbedringer, trykkleif og så videre. En beskrivelse av faget og utviklingen av det er publisert i [Gravdahl and Egeland, 2004]. En takk rettes til Irja Gravdahl, vit.ass. Tore Bjølseth, PhD-studenter Svein Hovland og Michael Ragazzon for korrekturlesning, forslag til forbedringer og tegning av figurer.

Institutt for teknisk kybernetikk, august 2020
Jan Tommy Gravdahl

Kapittel 1

Introduksjon

Denne introduksjonen bygger i stor grad på [Rossen and Gravdahl, 2018] og [Balchen et al., 2003].

1.1 Hva er kybernetikk?

Kybernetikk er vitenskapen og teknologien som omhandler å observere og beskrive dynamikken og samvirket i tekniske prosesser og levende vesener, og ved hjelp av metodebasert styring, aktivt på virke slike. Tilbakekobling er et sentralt begrep i kybernetikken og innebærer måling av en størrelse som skal styres. Denne målingen blir sammenlignet med en ønsket referanseverdi og så blir prosessen påvirket i henhold til avviket mellom den målte og den ønskede verdien.

Kybernetikk er en informasjonsvitenskap, og kybernetikere beskriver hvordan informasjon strømmer gjennom systemer omtrent som elektrisitet gjennom elektriske kretser, og man er opptatt av hva som skjer når informasjon fra systemets utgang kobles til systemets inngang. Informasjonen om de fysiske størrelsene i systemet blir behandlet som signaler, og signalbehandling er derfor sentralt.

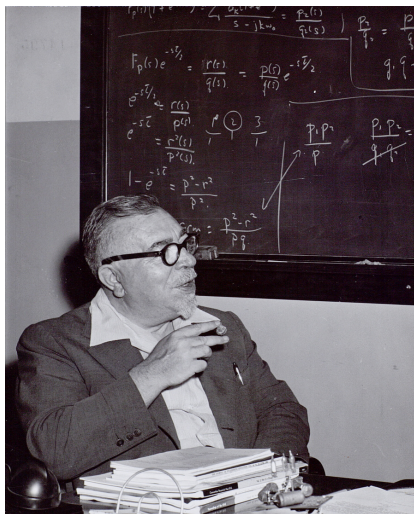
Et enkelt eksempel på dette er en elektrisk panelovn som fungerer slik at en termostat slår på varmeovnen når den får informasjon fra omgivelsene om at det er for kaldt, og slår ovnen av igjen når den får informasjon fra omgivelsene om at det er for varmt.

En panelovn med termostat eller en sisterte med en flottør er eksempler på selvregulerende mekanismer. Lignende mekanismer, kjent som homeosta-

se, finnes i menneskekroppen for å regulere for eksempel surhetsgrad, temperatur eller blodsukkernivå. De samme grunnprinsippene som beskriver disse mekanismene i naturen, finnes i økonomiske og sosiale systemer.

Sentralt i kybernetikken er systemforståelse, det vil si å vite hvilke signaler som påvirker hvilke enheter og i hvilken rekkefølge. Dette har stor nytteverdi i teknologiske systemer og dette tankesettet brukes i stor utstrekning i teknisk kybernetikk, automatisering, robotikk, servoteknikk og reguleringsteknikk.

1.1.1 Opphav



Figur 1.1: Begrepet kybernetikk ble definert som «regulering og kommunikasjon i dyr og maskiner» i boken *Cybernetics* av den amerikanske matematikeren professor Norbert Wiener i 1948. [Norbert Wiener \(1894–1964\)](#) av Tekniska museet, Stockholm/flickr.com. [cc by 2.0](#)

Begrepet kybernetikk ble definert som «regulering og kommunikasjon i dyr og maskin» i boken *Cybernetics* av den amerikanske matematikeren professor Norbert Wiener i 1948, [\[Wiener, 1948\]](#). Han hentet navnet til denne nye vitenskapen fra det greske ordet "kybernetes" som betyr rormann, det vil si den som styrer. Wieners idé var at regulering og styring i både biologiske og tekniske systemer følger felles lover som kan uttrykkes matematisk, og matematikk og matematisk modellering er sentralt i kybernetikken.

Kybernetikk ble de første par tiårene etter Wieners bok sterkt assosiert med elektroniske datamaskiner. Det er årsaken til dagens dataord som starter på cyber, som for eksempel cyberspace, cybersikkerhet og cyberforsvar. Senere ble ord som datavitenskap og informatikk brukt til å betegne det mer allmenne ved kybernetikkbegrepet fra slutten av 1960-årene, og kybernetikk oppfattes i dag som læren om regulerende og selvregulerende mekanismer i naturen og teknologien.

1.1.2 Kybernetikk i samfunnsvitenskap

I samfunnsvitenskapene brukes kybernetikk om samvirkende forhold innen større sosiale enheter, f.eks. organisasjoner, lokalsamfunn eller storsamfunnet. Som begrep i samfunnsvitenskapelig teori betegner kybernetikk de reguleringsmekanismer og den kommunikasjon som er nødvendig for at det sosiale systemet skal fungere.

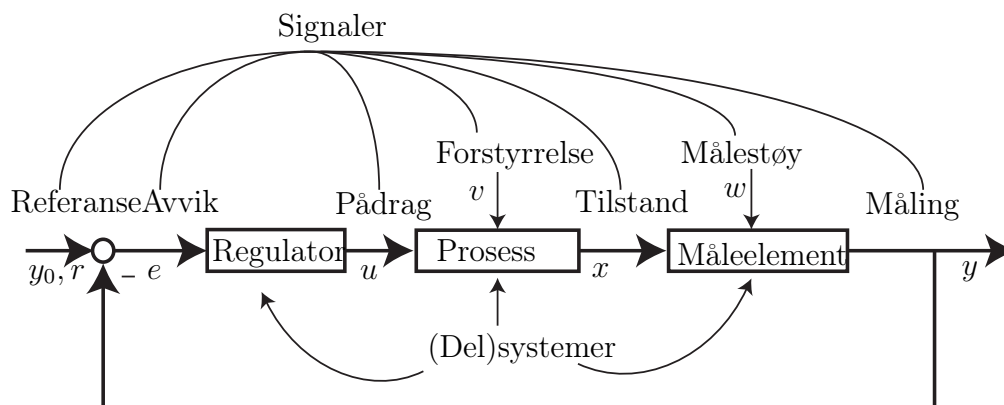
Kybernetikk eller systemteori har sin styrke i at man understreker vekselvirkningen mellom to aktører eller mellom deler av systemet. Et signal som starter i en del, returnerer til opphavsstedet etter å ha blitt omdannet gjennom en rekke delprosesser i systemet. Anvendt på sosiale forhold forutsetter kybernetikken at systemet har en felles målsetting og en utpreget tregheit mot endringer i den indre strukturen.

1.1.3 Teknisk kybernetikk

Teknisk kybernetikk er et samlebegrep for en rekke tekniske disipliner som har et felles teoretisk metodegrunnlag. Det benyttes avanserte datatekniske virkemidler til utforming av komplekse tekniske systemer for overvåkning og styring av mange slags prosesser i blant annet industri, energiproduksjon, transport og romfart. De samme grunnprinsippene som beskriver naturens reguleringsystemer, gjenfinnes i økonomiske og sosiale systemer og danner basis for forståelse også av tekniske reguleringsystemer. Informasjonsteknologi, med de aller fleste aspekter av ordet, står derfor sentralt i alle fagdisipliner innunder begrepet teknisk kybernetikk.

1.2 Hva er reguleringsteknikk?

Reguleringsteknikk er den delen av kybernetikken som har som formål å generere en automatisk påvirkning av et teknisk system eller en prosess slik at man oppnår et ønsket resultat. Reguleringsteknikken omfatter det teoretiske fundament og ingeniørmessige prinsipper for styring av prosesser av vidt forskjellig karakter.



Figur 1.2: Begreper i et reguleringsystem

1.3 Vesentlige begreper og definisjoner

Dette kapittelet er hentet fra boken [Balchen et al., 2003] som er læreboken i faget Reguleringssteknikk, og vi vil her forklare en del begreper som er sentrale i reguleringssteknikken.

Med et **system** skal vi i dette kompendiet forstå en samling av enkeltenheter som påvirker hverandre gjensidig og som til sammen har en funksjon. Med andre ord er det vårt formål som bestemmer hva vi anser å utgjøre systemet, det vil si hvordan vi avgrenser systemet mot omverdenen (i virkeligheten påvirker jo alle “enheter” rundt oss hverandre, selv om påvirkningene kan være svake).

Dynamiske systemer er den undergruppen av systembegrepet som er viktigst for regulerings teknikere. At et system er dynamisk betyr at dets indre tilstander endrer seg med tiden på grunn av vekselvirkningene mellom systemets enkeltenheter.

Figur 1.2 gir en oversikt over noen sentrale begreper.

Det som utsettes for et *pådrag* og *forstyrrelser*, karakteriseres ved *tilstander* og observeres gjennom *målinger*, vil betegnes som en **prosess**. Vi bruker “prosess” om det fysiske system som vi betrakter eller skal styre, mens helheten som består av prosess + reguleringsselementer da vil utgjøre et (regulerings)system. Eksempel: Et skip kan defineres som en prosess, mens skipet med autopilot er et system. Nå er ikke dette helt helt konsekvent i litteraturen. Man bruker også “system” om “prosess”, men det går da

fram av sammenhengen hva som menes. Dette forekommer også i dette kompendiet. En prosess kan være en del av en framstillingskjede for et produkt, f.eks. en kjemisk reaktor, metallurgisk reaktor eller en maskin som bearbeider egenskaper hos materialer eller enkeltkomponenter. En prosess kan i overført betydning være et fartøy eller en kraftmaskin. Et reguleringsobjekt vil ofte være et ekvivalent begrep til en prosess.

Tilstander (eller tilstandsvariable) er sentrale i beskrivelsen av prosesser. En tilstand endrer sin verdi som resultat av en forutgående påvirkning. Et eksempel på en tilstand er temperaturen i en reaktor. Dersom vi endrer oppvarmingen/avkjølingen eller graden av kjemiske reaksjoner i reaktoren, vil temperaturen endre seg. Et annet eksempel: hvis en motor virker på en robotarm, vil robotarmens tilstander være dens posisjon og hastighet, fordi disse størrelsene karakteriserer nå-situasjonen til robotarmen og kan endres. Vi vil heretter bruke $x(t)$ for å betegne en tilstand. En enkel fartøy-modell f.eks., vil ha to tilstander, hastighet og posisjon.

Et dynamisk system vil oftest være utsatt for påvirkning fra omgivelsene, i vår terminologi kalt **forstyrrelse**. Slike påvirkninger kan være av forskjellig karakter, med har det til felles at de er *utenfor vår kontroll*. Eksempler på forstyrrelser er endring i sammensetningen av råvarer og endring i omgivelsestemperaturen til en reaktor, endring i omgivelsestemperatur rundt en bygning hvor temperaturen skal styres, endring i bølgepåvirkningen eller vindpåvirkningen på et fartøy. Vi bruker $v(t)$ for å betegne en forstyrrelse.

I motsetning til forstyrrelser har vi *tilsiktete* påvirkninger som skal utføre en styrende funksjon, blant annet å kompensere virkningen av de samme forstyrrelser. En slik påvirkning kalles gjerne et **pådrag**, se Figur 1.2. Eksempler på pådrag er effektilførsel eller kraftpåvirkning. Vi bruker symbolet $u(t)$. Noen ganger bruker vi betegnelsen inngang(svariabel) for pådrag. Pådraget genereres av regulatoren, og vi kan derfor si at en **regulator** er en algoritme som genererer et pådrag.

Man tar ofte **målinger** av de fysiske eller matematiske tilstandene i et system (se Figur 1.2). Men et system kan ha flere tilstander enn det som kan måles med det tekniske utstyret som er tilgjengelig. Målevariablene er som oftest funksjoner av systemets tilstander. Målingene kan være utsatt for målestøy (eller måleusikkerhet, målefeil) som forringer målingen. En “god” måling er gjerne et mål for en tilstand (eller noen få tilstander) i systemet og er lite påvirket av støy. Eksempler på målevariable er spenningen fra et termoelement (temperaturmåling), bevegelsen av en membran (trykkmåling), indusert spenning i en tacho-generator (hastighetsmåling) eller tidsavstan-

Begrep	Symbol
Tilstand	$x(t)$
Pådrag	$u(t)$
Måling	$y(t)$
Forstyrrelse	$v(t)$
Målestøy	$w(t)$
Referanse	$r(t)$
Avvik	$e(t)$

Tabell 1.1: Symboler for variable i reguleringsteknikk

den mellom utsendt puls og ekko i radar og sonar (avstandsmåling). Vi vil heretter bruke $y(t)$ for å betegne en måling. Noen ganger bruker vi betegnelsen utgang(svariabel) for måling.

Referanse er betegnelsen på den ønskede verdien av en måling og gis symbolet y_0 eller r . Ofte brukes ordet settpunkt for det samme begrepet, hvis referansen er konstant.

Forskjellen mellom y_0 og y kalles **avvik** og har symbolet e .

Tabell 1.1 gir en oversikt over de symbolene som er nevnt ovenfor. Øvrige begreper vil bli definert etterhvert som vi får bruk dem.

Kapittel 2

Innføring i differensialligninger og matematisk modellering

2.1 Introduksjon

For å kunne designe et reguleringsystem for en fysisk prosess, det være seg en autopilot for et skip, en nivåregulator for en væskebeholder i en kjemisk prosess eller en turtallsregulator for en motor, så har vi behov for å beskrive fenomenet vi skal styre matematisk. Verktøyet vi bruker til dette er differensialligninger.

2.2 Differensialligninger

2.2.1 Introduksjon

I kybernetikken bruker vi differensialligninger for å beskrive hvordan tilstander eller variabler varierer med tiden. Den deriverte av en variabel eller tilstand x kan uttrykkes med forskjellig notasjon. I matematikken har dere møtt formen x' . En annen måte å skrive dette på, kalt differensialform, er $\frac{dx}{dy}$ som betyr den deriverte av x med hensyn på y . Dette kalles også en første ordens derivert, eller enklere 'den deriverte' (av x). Med en andreordens derivert forstår vi

$$x'' = (x')',$$

eller på differensialform

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Dette kan generaliseres til å inkludere n -te ordens deriverte.

En differensialligning er en ligning der deriverte av forskjellig orden inngår. En løsning av en differensialligning vil være en funksjon av den størrelsen det deriveres med hensyn på. En første ordens differensialligning der x er tilstanden og vi deriverer med hensyn på tiden t kan skrives som

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

der $f(x)$ er en generell funksjon av x . Legg merke til at ligningen beskriver hvordan tilstanden x varierer med tiden t . Dette kalles en dynamisk ligning, og vi sier at ligningen beskriver *dynamikken* til systemet.

Innen kybernetikk og reguleringsteknikk benyttes notasjonen med prikker over variabelen som deriveres:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x', \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \quad osv$$

Når vi bruker prikk-notasjonen er det underforstått at vi deriverer med hensyn på tiden t . Hvis det skal deriveres med hensyn på en annen størrelse, skrives dette eksplitt, f.eks $\frac{df}{dz}$.

2.2.2 Tilstandsromsform

Ligning (2.1) kan nå skrives

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.2)$$

Ligning (2.2) er skrevet på det vi kaller for *tilstandsromsform*, eller vi sier at vår matematiske modell er en *tilstandsrommodell*. Slik som (2.2) er skrevet kan som sagt $f(x)$ være vilkårlig, f.eks $f(x) = \sin(x) - x^3$. Vi sier da i så fall at $f(x)$ er ulineær, og (2.2) er et eksempel på et *ulineært system*. Et eget fag TTK4150 Ulineære systemer er viet dette temaet; det gis i 7. semester. I dette faget skal vi stort sett konsentrere oss om *lineære systemer*, dvs $f(x)$ er av formen

$$f(x) = ax + b,$$

der a er en konstant. Som vi ser vil vi, hvis vi plotter $f(x)$ som en funksjon av x , få en rett linje med stigningstall a . Ligning (2.2) kan nå skrives

$$\dot{x} = ax + b, \quad (2.3)$$

der x er en tilstand og varierer, mens a og b er konstante.

2.2.3 Likevektspunkt

Et viktig konsept for tilstandsrommodeller er *likevektspunkt*. Et punkt $x = \bar{x}$ er et likevektspunkt for (2.2), hvis det har den egenskapen at hvis systemet starter i \bar{x} , vil det forbli i \bar{x} for all fremtid. For (2.2) er likevektspunktene gitt av de reelle røttene av ligningen $f(\bar{x}) = 0$. Merk at ulineære systemer kan ha flere likevektspunkter, mens lineære systemer kun har ett.

Example 1 *Likevektspunktet til et lineært system finnes på følgende måte*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax + bu \\ 0 &= a\bar{x} + bu \\ \bar{x} &= -\frac{bu}{a} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Example 2 *Vi vil ofte ha behov for systemer av førsteordens differensialligninger, og dette kommer vi tilbake til senere. Her vil vi vise hvordan vi finner likevektspunktene til et system av to førsteordens ulineære differensialligninger:*

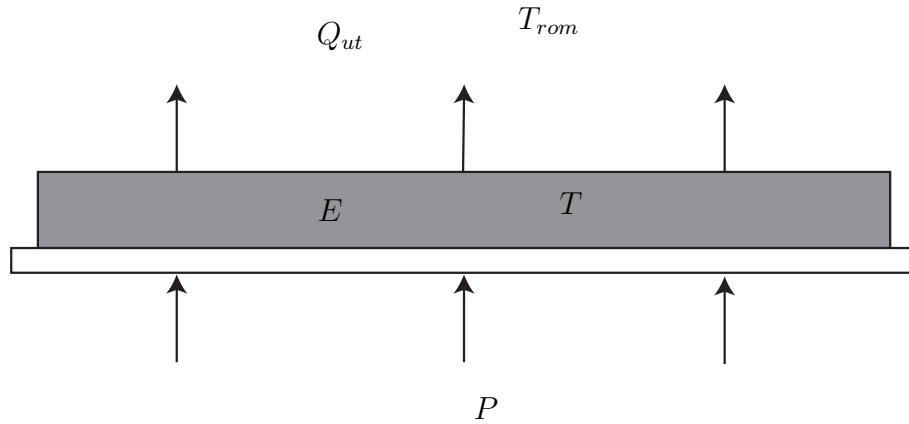
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + dx_1x_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ved å sette begge ligningene lik null og faktorisere, finner vi

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{x}_1(a - b\bar{x}_2) \\ 0 &= \bar{x}_2(-c + d\bar{x}_1), \end{aligned} \quad (2.6)$$

og de to likevektspunktene er gitt av

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0) \text{ og } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right). \quad (2.7)$$



Figur 2.1: Kokeplate som styres av en effekt P .

2.2.4 Modellering

Det å sette opp differensialligninger som beskriver en prosess eller et system kalles matematisk modellering eller bare modellering, og faget TTK4130 Modellering og Simulering er viet dette temaet. Matematisk modellering er en prosess der vi ved å studere et fysisk system ender opp med et sett av differensialligninger som beskriver systemet. Dette lar seg best illustrere med eksempler.

Example 3 *Vi skal se på hva som skjer når vi skrur på en kokeplate. Platen er vist i Figur 2.1.*

*Det er effekten P (for eksempel 1400 W på en vanlig ovn) vi tilfører platen som bestemmer hva slags temperatur vi får på platen. Grunnlaget for å sette opp en differensialligning for dette fenomenet kaller vi en **energibalanse**. Energibalanser og andre typer balanselover kommer vi tilbake til i modelleringsfaget. Sagt med ord vil dette si at **endringen** i energien E i kokeplata vil være lik tilført effekt minus avgitt effekt. Under visse forutsetninger er platas temperatur T proporsjonal med energien E . Proporsjonalitetskonstanten kalles varmekapasiteten C , slik at*

$$E = CT. \quad (2.8)$$

Endringen i energi, eller temperatur, tilsvarer den tidsderivate av E , eller T . Skrevet som en differensialligning:

$$\dot{E} = P - Q_{ut}. \quad (2.9)$$

Energistrømmen, eller den avgitte effekten, Q_{ut} følger Newtons avkjølingslov¹:

$$Q_{ut} = k(T - T_{rom}), \quad (2.10)$$

der k er varmeovergangstallet mellom kokeplata med temperatur T og lufta i rommet med temperatur T_{rom} . Ved å kombinere (12.5), (2.9) og (2.10) finner vi

$$\begin{aligned} C\dot{T} &= P - k(T - T_{rom}) \\ \dot{T} &= \frac{P}{C} - \frac{k}{C}(T - T_{rom}) \\ \dot{T} &= -\frac{k}{C}T + \frac{1}{C}(P + kT_{rom}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

der \dot{T} er den tidsderiverte av kokeplatas temperatur. Vi har nå en lineær ligning som har samme form som (2.3) med

$$x = T \quad (2.12)$$

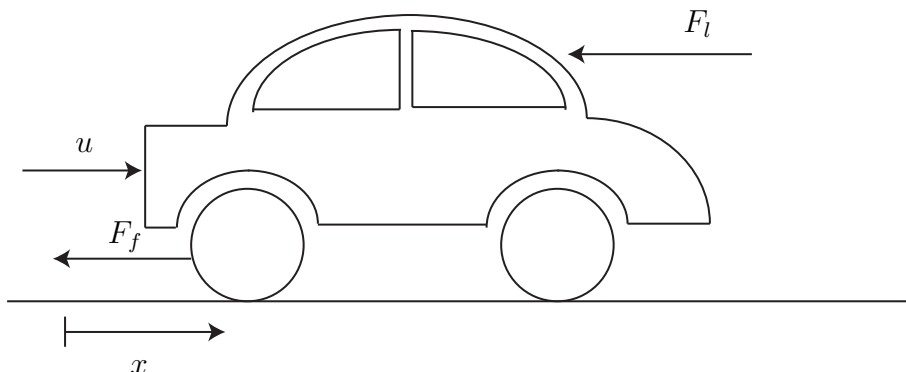
$$a = -k/C \quad (2.13)$$

$$b = (P + kT_{rom})/C. \quad (2.14)$$

Det må understrekes at selv om kokeplata er et enkelt eksempel, er selv den enkle differensialligningen (2.11) vi har kommet frem til her en forenkling! Vi har ikke tatt hensyn til varmestråling, varmeovergang til resten av materialene i varmeovnen, varierende romtemperatur, osv. Dette illustrerer at modellering i de aller fleste tilfeller vil gi oss en modell som er en forenkling av det fysiske fenomenet. For vår formål, regulering og styring, er ikke dette nødvendigvis en ulempe. Vi er faktisk avhengige av å ha relativt enkle modeller for å kunne gjøre en analyse av dem. *Det er da viktig at den modellen vi har satt opp er nøyaktig i den forstand at den beskriver det fenomenet vi ønsker å styre.* Dette er en metodikk vi kaller **modellering for regulering**. Det er også slik at godt designede regulatorer vil kunne kompensere for feilene vi har gjort i modelleringen.

Example 4 Vi skal nå modellere hastigheten til en bil.

¹Dette er et eksempel på at vi benytter allerede etablerte sannheter fra fysikken, eller andre fagfelt, i modelleringen.



Figur 2.2: Forenklet modell av kreftene som virker på en bil i fart.

Senere skal vi bruke denne modellen for å designe en hastighetsregulator, også kjent som "cruise control", eller hastighetsholder. En slik modell kan baseres på Newtons lov

$$\Sigma F = m\alpha, \quad (2.15)$$

som er en **kraftbalanse**. Vi må også her gjøre forenklinger: De kreftene vi tar med i betraktning er drivkraften fra motoren u og en friksjonskraft som virker i motsatt retning. Kreftene er vist i Figur 2.2. For enkelhets skyld antar vi at friksjonskraften er proporsjonal med bilens hastighet v , det vil si

$$F_f = kv,$$

der F_f er friksjonskraften og k er proporsjonalitetskonstanten. Vi antar også at bilen kjører i ett gir med konstant skyvkraft u . Siden akselerasjon er den tidsderiverte av hastighet, det vil si

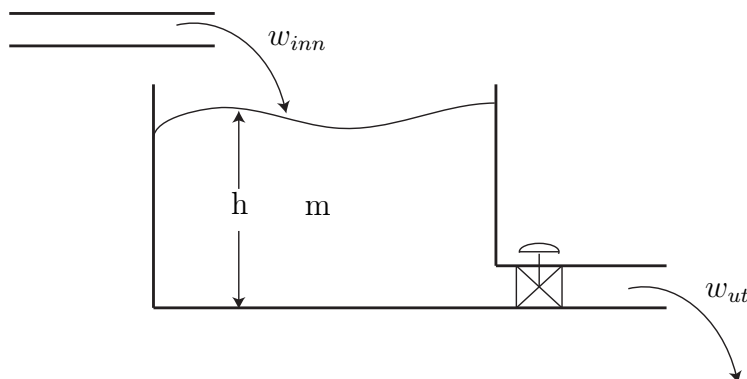
$$\dot{v} = \alpha,$$

kan vi fra (2.15) sette opp ligningen

$$m\dot{v} = u - kv,$$

og videre

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u. \quad (2.16)$$



Figur 2.3: Tank med strømning inn og ut.

Vi har her en førsteordens differensialligning på samme form som (2.3), med

$$\begin{aligned} x &= v \\ a &= -\frac{k}{m} \\ b &= \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Igjen er dette en meget enkel modell, og mange fysiske fenomener er utelatt. For eksempel ville luftmotstand, som er proporsjonel med v^2 , bidratt med et ulineært ledd

$$F_l = -k_l v^2.$$

Allikevel vil modellen være nyttig når et reguleringsystem for bilens hastighet skal designes.

Example 5 Vi skal nå se på et eksempel der en tank eller et kar fylles av en massestrøm, og tømmes av en massestrøm ut av en ventil, se Figur 2.3.

Målet vårt er å finne en differensialligning som beskriver hvordan nivået h i tanken varierer med tiden. Denne modellen skal vi senere bruke til å designe en regulator som styrer nivået. Nivåregulering er en meget vanlig anvendelse og forekommer i mange prosessanlegg i industrien. Nivået betegnes h , og tanken har tverrsnittsareal A . Den samlede massen i tanken vil da til en hver tid være gitt av

$$m = \rho Ah,$$

der ρ er tettheten i $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. For å modellere dette setter vi opp en **massebalanse**, som sagt med ord betyr at endring (det vil si derivert med hensyn på tid) av massen er lik netto (massestrøm inn minus massestrøm ut) massestrøm inn i tanken. Massestrøm har enhet $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= w_{\text{inn}} - w_{\text{ut}} \\ \frac{d(\rho Ah)}{dt} &= w_{\text{inn}} - w_{\text{ut}} \\ &\Downarrow \text{ (Se kommentar 6) } \\ \dot{h} &= \frac{1}{\rho A} (w_{\text{inn}} - w_{\text{ut}}).\end{aligned}$$

Under visse forutsetninger (se kommentar 7) kan massestrømmen w_{ut} ut av ventilen beregnes som

$$w_{\text{ut}} = kh,$$

der k er en konstant, slik at vi nå har en differensialligning for høyden h

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{\text{inn}}}{\rho A},$$

og vi ser at den har samme form som (2.3) med

$$\begin{aligned}x &= h \\ a &= -k/\rho A \\ b &= \frac{w_{\text{inn}}}{\rho A}.\end{aligned}$$

Remark 6 Denne overgangen krever at vi antar at både tettheten ρ og tverrsnittarealet A er konstante. Hvis dette ikke hadde vært tilfelle, måtte vi ha derivert etter produktregelen og dermed fått med uttrykk for $\dot{\rho}$ og \dot{A} i likningen. Væsker kan ofte betraktes som inkompressible, og da er konstant tetthet en fornuftlig antagelse. Hadde det vært en gass vi beregnet massebalansen for, måtte høyst sannsynlig variabel tetthet ha blitt tatt hensyn til. Konstant tverrsnittsareal setter krav til den tanken, eller volumet, vi beregner massebalansen til. Hvordan?

Remark 7 For å illustrere hva som ligger bak ligningen for massestrømmen gjennom ventilen, $w_{\text{ut}} = kh$, skal vi gå nærmere inn på dette. Dette eksempelet, som er hentet fra [Egeland and Gravdahl, 2002] som er læreboken i

modellering og simulering, illustrerer at selv om modellen blir en enkel første ordens lineær differensialligning, kan det ligge til dels avansert modellering bak.

Vi antar først at det ikke blir lagret masse i ventilen, slik at massestrøm inn i ventilen w_1 er lik massestrøm ut av ventilen w_2 . Siden væsken antas inkompressibel, vil også volumstrømmen ut være lik volumstrømmen inn, slik at

$$q = v_1 A_1 = v_2 A_2, \quad (2.17)$$

der v_1 og v_2 er strømningshastigheten før og etter ventilen og A_1 og A_2 er tverrsnittsarealet før og etter ventilen. Bernoullis ligning, som dere vil lære om i fluiddynamikk, gir

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}, \quad (2.18)$$

der p_1 og p_2 er trykket før og etter ventilen. Ved å sette (2.17) inn i (2.18) får vi

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \right) v_2^2 = \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \right) \frac{\rho q_2^2}{2A_2^2}$$

som kan skrives som

$$q = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(p_1 - p_2)}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}},$$

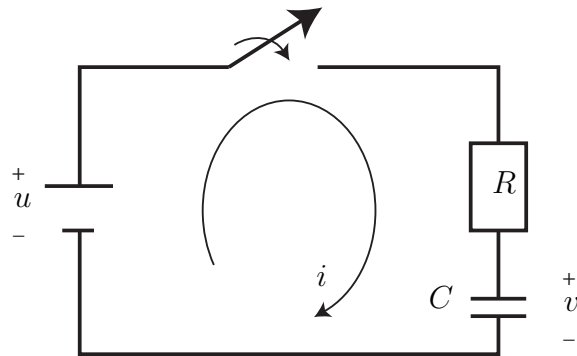
og vi har fått en ligning for volumstrømmen gjennom ventilen. Hvis strømmingen er ut av et volum, slik som her, kan vi la $A_1 \rightarrow \infty$ slik at

$$q = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}. \quad (2.19)$$

Massestrømmen kan nå regnes ut som

$$w = q\rho = \rho A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}.$$

Det antas så at p_2 , trykket på utgangen av ventilen er gitt av atmosfæretrykket, $p_2 = p_0$. Videre er det hydrostatiske trykket i bunnen av tanken, som

Figur 2.4: Generell RC -krets.

også bestemmer trykket på inngangen av ventilen gitt av $p_1 = p_0 + \rho gh$, slik at

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2\rho A_2} \sqrt{(p_0 + \rho gh - p_0)} \\ &= \sqrt{2g\rho A_2} \sqrt{h} \end{aligned}$$

eller

$$w = k' \sqrt{h},$$

der $k' = \sqrt{2g\rho A_2}$ er en konstant. Vi ser at massestrømmen varierer som en funksjon av kvadratroten av høyden h . Siden modellen vår skal være lineær, bruker vi tangenten til kvadratrotkurven, altså en rett linje. Dette er en metode kjent som linearisering og som blir behandlet i mer detalj i faget reguleringsteknikk. Vi ender da opp med et uttrykk

$$w = kh$$

som i eksempelet.

Example 8 Vi skal i dette eksempelet (som er basert på Eksempel 5.8 i [Rizzoni, 2004]) sette opp en differensialligning som beskriver kretsen som lader blitzen i et kamera. Kretsen består av en spenningskilde u , en motstand R og en kondensator med kapasitans C , og er vist Figur 2.4.

Fra kretsteknikken vet vi at spenningen over kondensatoren, når vi antar at initialspenningen er gitt av $v_C(0) = 0$, er gitt av

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt',$$

der i_C er strømmen gjennom kondensatoren. Ved å derivere med hensyn på tiden finner vi at for en kondensator, så er

$$\frac{dv_C}{dt} = \dot{v}_C = \frac{1}{C} i_C.$$

Siden strømmen gjennom motstanden er lik strømmen gjennom kondensatoren, det vil si $i = i_R = i_C$, har vi at

$$\begin{aligned} i_R &= i_C \\ \frac{u - v_C}{R} &= C \dot{v}_C, \end{aligned}$$

eller

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{RC} v_C + \frac{1}{RC} u,$$

og vi har en ligning som beskriver spenningen over kondensatoren. Vi har nå en lineær ligning som har samme form som (2.3) med

$$\begin{aligned} x &= v_C \\ a &= -\frac{1}{RC} \\ b &= \frac{1}{RC} u. \end{aligned}$$

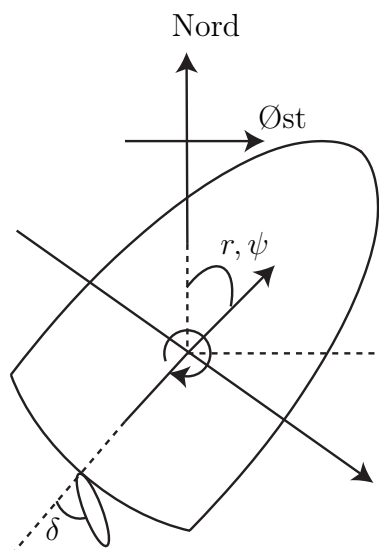
Example 9 En av de mest populære modellene for design av autopiloter for båter er Nomotomodellen, se [Fossen, 2002] som er læreboken i Fartøystyring. Denne modellen beskriver sammenhengen mellom et fartøys rorvinkel δ og girhastighet r , se Figur 2.5.

Girhastigheten er den hastigheten kursvinkelen ψ endrer seg med. Dermed er

$$r = \dot{\psi}.$$

Enheten til r er $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Nomotomodellen er gitt av

$$\dot{r} = -\frac{1}{T} r + \frac{K}{T} \delta.$$



Figur 2.5: Definisjon av kursvinkel ψ og rorvinkel δ for et fartøy.

For et lasteskip kan for eksempel konstantene i modellen ha verdiene $K = 0.185$ og $T = 107.3$. Modeller som dette og design av regulatorer for dem, det vil si autopiloter, er tema i faget TTK4190 Fartøystyring. Grunnen til at denne modellen brukes så mye, er dens enkelhet og det at den beskriver virkeligheten veldig godt.

2.2.5 Førsteordens differensialligninger

Det vi bør legge merke til på dette tidspunkt er det faktum at i de fem foregående eksemplene, som er hentet fra forskjellige fagområder som termodynamikk, mekanikk, fluiddynamikk, kretsteknikk og hydrodynamikk, så ender vi opp med modeller som har akkurat samme form: De er første ordens differensialligninger. Dette illustrerer hvor viktig denne ligningsformen er, og rettferdiggjør at vi ser litt nærmere på den. I første omgang skal vi lære hvordan vi finner løsningen til disse ligningene.

Løsning av førsteordens differensialligninger

Innen reguleringsteknikken er det egentlig sjelden at vi har behov for å løse differensialligninger eksplisitt. Dessuten vil ulineære differensialligninger med

mange tilstander generelt sett være uløselige. Mye av analysen gjøres på differensialligningene uten å løse dem. Det vil allikevel være nyttig å finne løsningen på første ordens lineære ligninger, siden løsningen naturlig nok kan fortelle oss mye om egenskapene til systemet. Ligningen (2.3) er separabel, og for å løse den gjør vi som følger:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= ax + b \\
 \frac{dx}{dt} &= ax + b \\
 \int \frac{1}{ax + b} dx &= \int dt \\
 \frac{1}{a} \ln |ax + b| &= t + C_1 \\
 |ax + b| &= e^{a(t+C_1)} \\
 ax + b &= e^{at} e^{aC_1} \\
 x &= Ce^{at} - \frac{b}{a}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Konstanten $C = \frac{e^{aC_1}}{a}$ er i utgangspunktet en vilkårlig konstant, men hvis ligningen vår har en initialverdi, dvs $x(0) = x_0$ er gitt, så vil C være påvirket av denne verdien:

$$x(0) = Ce^{a \cdot 0} - \frac{b}{a} = x_0 \implies C = x_0 + \frac{b}{a}.$$

Løsningen til differensialligningen (2.3) er dermed gitt av

$$\begin{aligned}
 x &= \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a} \\
 x &= x_0 e^{at} + \frac{b}{a} e^{at} - \frac{b}{a} \\
 x &= x_0 e^{at} + \frac{b}{a} (e^{at} - 1)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Hvis vi nå for enkelhets skyld setter $b = 0$, ser vi at differensialligningen

$$\dot{x} = ax$$

vil ha løsningen

$$x = x_0 e^{at}. \tag{2.22}$$

I dette forenklete tilfellet ville vi hatt $C = x_0$.

Denne særdeles enkle ligningen kan beskrive veldig mange fysiske prosesser. Et velkjent eksempel er strømmen gjennom en spole der tilstanden x nå er strømmen i gjennom spolen og L er induktansen til spolen. Denne prosessen dukker opp i en mengde andre mer kompliserte prosesser, som for eksempel likestrømsmotoren. I følgende eksempel skal vi se hvordan temperaturen i kokeplaten oppfyller samme ligning.

Example 10 Ligningen for temperaturen i en kokeplate er gitt i (2.11) som

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom}) \quad (2.23)$$

Ved å bruke samme metode som over, eller sette inn for a og b i (2.21), vil løsningen finnes som

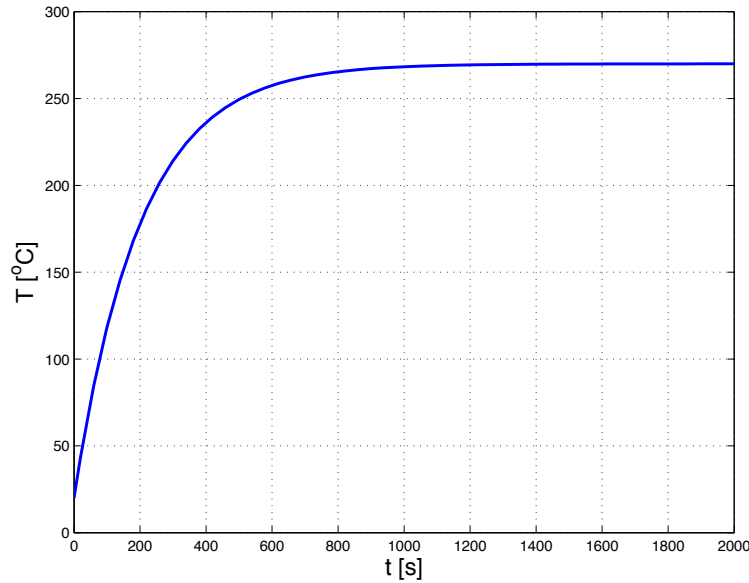
$$T(t) = T_0 e^{-\frac{k}{c}t} - \frac{(P + kT_{rom})}{k} \left(e^{-\frac{k}{c}t} - 1 \right) \quad (2.24)$$

Denne løsningen er plottet i Figur 2.6, og som vi ser starter temperaturen T på 20°C ved $t = 0$. Dette stemmer med at vi satte $T_0 = 20$. Videre ser vi at temperaturen svinger seg inn til sin endelige verdi på 270 grader over tid. Det er eksponensialfunksjonen som gir dette innsvingningsforløpet, og det stemmer jo godt overens med praktiske erfaringer med en elektrisk kokeplate: Det tar litt tid før plata blir varm. For å plote (2.24) har vi brukt konstantene $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $P = 500 \text{ W}$, $k = 2 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$, $T_{rom} = 20^\circ\text{C}$ og $c = 400 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$.

Remark 11 Hvis vi hadde satt $P = 2000 \text{ W}$, ville vi sett at kokeplata hadde nådd 1020°C , noe som er helt urealistisk. Hva kommer dette av? Årsaken er de antagelsene som ble nevnt i eksempelet (stråling osv). Dette er et eksempel på at en enkel lineær modell som vi kom frem til her bare vil ha et begrenset gyldighetsområde. Hvis vi hadde tatt med andre fenomener, ville vi fått en mer komplisert, gjerne ulineær, modell, men denne ville hatt et større gyldighetsområde og ville gitt et fornuftig svar selv for denne store effekten. Man kan omforme en ulineær komplisert modell til en lineær modell som er gyldig omkring de tilstandene man ønsker å studere. Dette kalles **linearisering**, og vil bli behandlet i detalj i faget Reguleringssteknikk.

Example 12 Vi vil også studere hva som skjer hvis vi skruer av plata. Da vil $P = 0 \text{ W}$ og (2.24) forenkles til

$$T = T_0 e^{-\frac{k}{c}t} - T_{rom} \left(e^{-\frac{k}{c}t} - 1 \right).$$



Figur 2.6: Temperaturen som funksjon av tiden slik som i ligning (2.24).

Vi anta at den har stått på så lenge at den har nådd tilnærmet konstant temperatur. Som vi ser av Figur 2.6 er da $T = 270^\circ\text{C}$. Vi setter inn dette som T_0 , og dessuten $P = 0$ W, og temperaturen synker som i Figur 2.7. Dette stemmer også meget godt overens med praktisk erfaring; temperaturen enderes ikke momentant når vi skrur av plata, men synker gradvis ned mot romtemperaturen, som også i dette eksempelet er satt til $T_{\text{rom}} = 20^\circ\text{C}$.

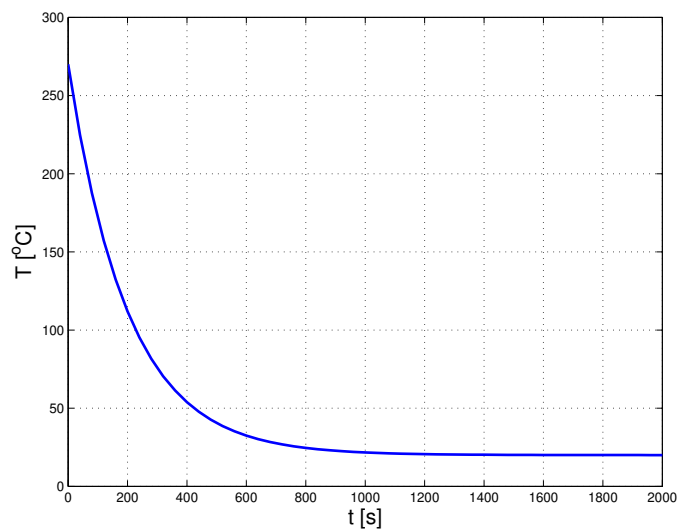
Example 13 I Eksempel 8 modellerte vi en krets som lader opp en kamerablitz. Spenningen over kondensatoren oppfyller differensialligningen

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{RC}u,$$

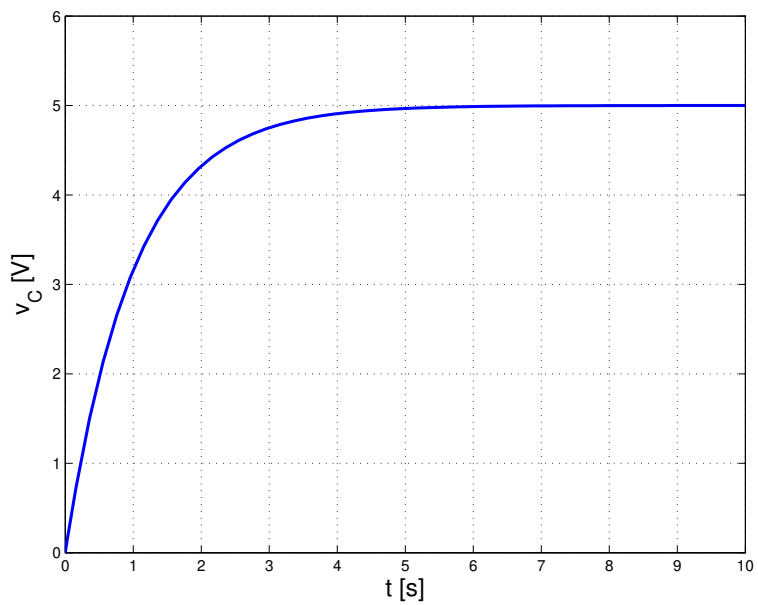
som vi nå skal løse. Ved igjen å følge metoden over, finner vi at

$$v_C = u \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

som er plottet i Figur 2.8. Følgende numeriske verdier er brukt: $u = 5$ V, $R = 1$ k Ω , $C = 1$ mF. Konstanten RC har da verdien 1 s, noe som er i samsvar med praktisk erfaring; det tar gjerne noen sekunder å lade opp en blitz.



Figur 2.7: Temperaturen i kokeplata som funksjon av tiden. Effekten (pådraget) er satt til null, slik at plata avkjøles over tid.



Figur 2.8: Spenningen over kondensatoren som funksjon av tiden.

Example 14 *Differensialligningen for hastighet til en bil ble i Eksempel 4 vist å være*

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u. \quad (2.25)$$

Hvis vi antar at bilen initielt står stille, det vil si $v_0 = 0$, vil løsningen av (2.25) være gitt av

$$v = \frac{u}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right),$$

som er plottet som den heltrukne kurven i Figur 2.9. Vi skal nå se hvilken betydning den ulineære luftmotstanden vil ha for hastigheten. Med luftmotstand vil differensialligningen være gitt av

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v - \frac{k_l}{m}v^2 + \frac{1}{m}u. \quad (2.26)$$

*Denne ligningen er ikke løsbart med teknikker som vi har lært til nå, men vi skal senere vise hvordan vi kan finne en tilnærmet løsning numerisk. I Figur 2.9 er denne numeriske løsningen plottet som en stiplet kurve. Som vi ser er det ikke store **kvalitative** forskjeller på de to kurvene, det er viktig å legge merke til at vi kan ha et innsvingningsforløp selv om differensialligningen ikke er lineær. Det er brukt samme skyvekraft i de to tilfellene, og grunnet den økte friksjonen ender bilen opp på en litt lavere hastighet når luftmotsanden tas med i betraktning, og hastighetsøkningen (akselerasjonen) går dessuten litt saktere. Ikke så veldig uventet hvis vi betrakter Newtons andre lov.*

Pådrag

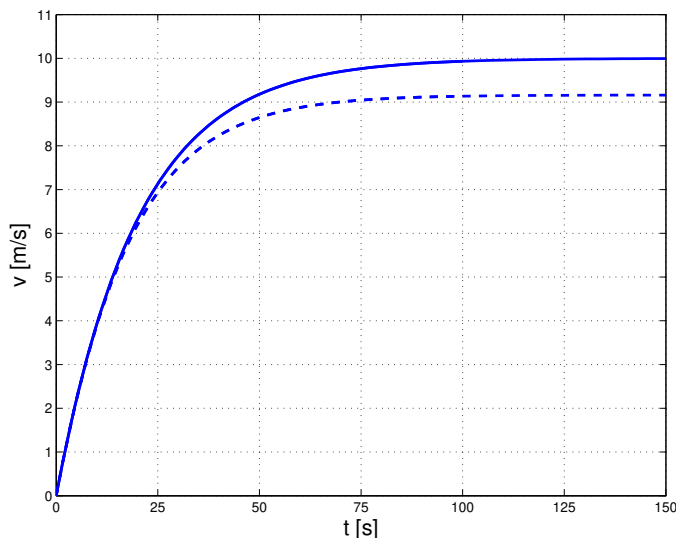
Hittill har vi sett på et system som bare består av én tilstand. I kybernetikk studerer vi styring av systemer, og det er derfor viktig å få med dette i beskrivelsen av systemene. Generelt skriver vi dette som

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.27)$$

der u er **pådraget**. I det lineære tilfellet blir dette

$$\dot{x} = ax + bu$$

der b er en konstant. I de foregående eksemplene har vi forsåvidt hatt dette, men da med konstante pådrag. I kokeplateeksempelet hadde vi $u = P = 500$ W, og i RC-krets-eksempelet var $u = 5$ V. Generell løsning av differensialligninger med generelle tidsvarierende pådrag er et tema i faget TTK4105 Regulerings-teknikk. Det vil bli også behandlet litt nærmere i Kapittel 6 i dette kompendiet.



Figur 2.9: Hastigheten til bilen som funksjon av tiden. Den heltrukte kurven er uten luftmotstand, mens den stiplede linjen er med luftmotstand.

2.2.6 Andreordens differensialligninger

Løsning av andre-ordens differensialligninger

Andre ordens differensialligninger er ligninger der den andrederiverte opptrer, og har den generelle formen

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad (2.28)$$

der p og q er konstanter. Som kjent fra Matematikk 1 og [\[Lorentzen et al., 2003\]](#), har ligning (2.28) en karakteristisk ligning gitt ved

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (2.29)$$

Videre har den karakteristiske ligningen to løsninger eller røtter r_1 og r_2 gitt av

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (2.30)$$

Løsningene til (2.28) nå være gitt av ett av tre tilfeller:

To reelle røtter. Hvis $r_1 \neq r_2$, så har (2.28) løsningen

$$x(t) = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}, \quad (2.31)$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Dette kalles et overdempet andreordens system.

En reell rot Hvis $r_1 = r_2 = r$, så har (2.28) løsningen

$$x(t) = Ce^{rt} + Dte^{rt}, \quad (2.32)$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Dette kalles et kritisk dempet andreordens system.

To komplekse røtter Hvis $r_1 = a + ib$ og $r_2 = a - ib$, så har (2.28) løsningen

$$x(t) = e^{at} (C \cos bt + D \sin bt), \quad (2.33)$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Dette kalles et underdempet andreordens system.

Remark 15 Som vi ser av løsningen (2.33) for komplekse røtter, så har denne brakt noe nytt inn i vårt studium av løsninger av differensialligninger. Både førsteordens ligninger og de to første tilfellene av andreordens ligninger har løsninger som er kombinasjoner av eksponensialfunksjoner. Dette siste tilfellet gir oss løsninger som inneholder svingninger eller oscillasjoner.

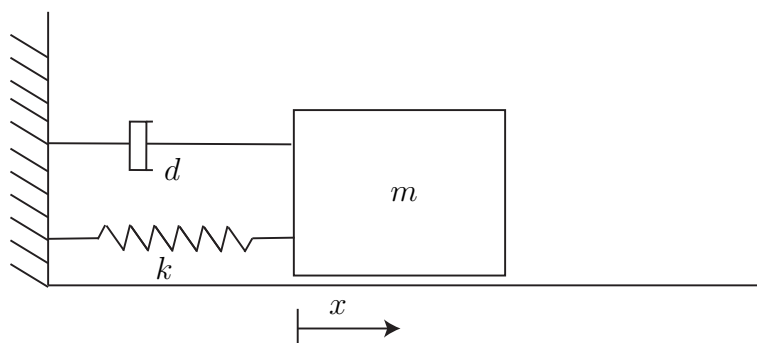
Ligning (2.28) er det vi kaller for en *homogen* ligning, det vil si at høyresiden i ligningen er lik null. Ligningen

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(x) \quad (2.34)$$

der $f(x)$ er en generell funksjon av x er *ikke-homogen*. Denne varianten er også løsbart.

Vi vil nå se på en del systemer som resulterer i andre ordens differensialligninger når vi modellerer dem.

Example 16 Gitt et masse-fjær-demper system som vist i Figur 2.10. Dette systemet består av en kloss med masse m som er festet i en vegg via en fjær



Figur 2.10: En kloss med masse m festet til en vegg med en fjær og en demper. Dette kalles et masse-fjær-demper system.

og en demper. Fjæringssystemet på en bil vil være et system som har ganske lik form.

Vi skal bruke Newtons andre lov, en **kraftbalanse**, til å sette opp en differensialligning som beskriver bevegelsen til massen m . Fjæren følger Hookes lov og trekker i klossen med en fjærkraft gitt av

$$F_f = kx,$$

der konstanten k er fjærkonstanten. En demper gir en kraft som er proporsjonal med hastighet \dot{x} slik at $F_d = d\dot{x}$. Vi setter så opp Newtons andre lov og finner

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma \\ -kx - d\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0,\end{aligned}$$

som er på samme form som (2.28) med

$$\begin{aligned}p &= \frac{d}{m} \\ q &= \frac{k}{m},\end{aligned}$$

og vi har en andreordens homogen differensialligning. Røttene til den karak-

teristiske ligningen vil være gitt av (2.30)

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{d}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}.$$

Vi skal nå sette inn tall for de forskjellige størrelsene i eksempelet og se hva slags løsninger vi får. Vi setter $m = 1$, $d = 2$ og $k = 10$. Dette gir

$$r_{1,2} = -1 \pm 3i,$$

og vi har to komplekse røtter med $a = -1$ og $b = 3$, og løsningen finnes av (2.33) til å være

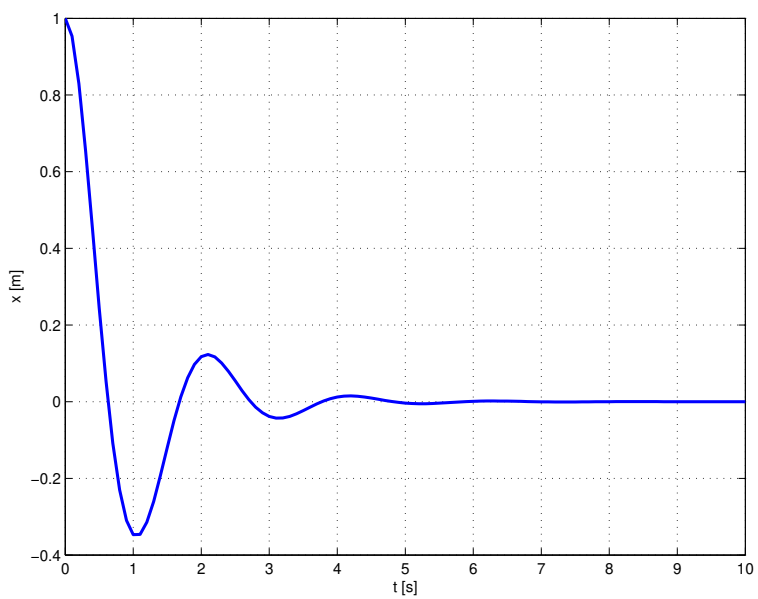
$$x(t) = e^{-t} (C \cos 3t + D \sin 3t).$$

Vi setter initialverdiene $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, det vil si vi holder klossen i ro 1 m ut og så slipper vi den. Legg merke til at siden dette er en andreordens ligning trenger vi **to** initialverdier. Vi regner ut konstantene C og D ved å sette inn for initialbetingelsene (dette er en fin øvingsoppgave) og finner

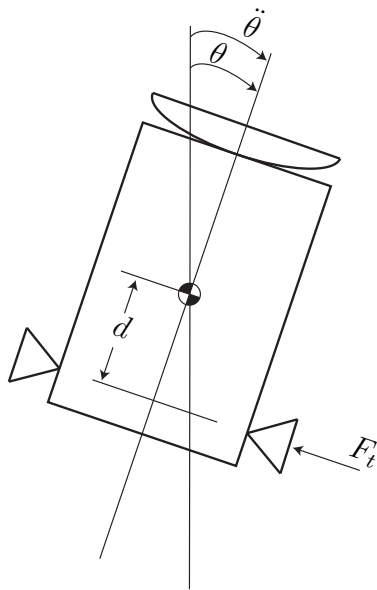
$$x(t) = e^{-t} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

som er plottet i Figur 2.11. Som ventet ut fra fysikken i systemet, starter klossen på $x = 1$, og svinger seg gradvis inn til $x = 0$ der den forblir i ro. Dette er et eksempel på et mekanisk svingesystem eller en oscillator, og ekvivalente eksempler finnes både i elektriske kretser og i termodynamiske systemer.

Example 17 For at romskip eller satellitter i bane rundt jorden, eller andre himmellegemer, skal kunne peke i riktig retning, det vil si vende solpaneler mot solen og rette instrumenter og antenner i riktig retning, er de som oftes utstyrt med styresystemer for styring av orientering. Et forenklet eksempel for endring av satellittens vinkel omkring en akse er gitt i Figur 2.12. Det er her brukt thrustere som vil gi et moment om satellittens massemiddelpunkt som vil få satellitten til å endre orientering. Dette kan modelleres ved å bruke en rotasjonsvariant (en **momentbalanse**) av Newtons andre lov. Denne sier at treghetsmoment J multiplisert med vinkelakselerasjon $\ddot{\theta}$, der θ er vinkelen, er lik summen av momenter M . Dette er analogt med kraft er lik masse ganger akselerasjon for rettlinjett bevegelse. Kraft tilsvarer moment, masse tilsvarer treghetsmoment og akselerasjon tilsvarer vinkelakselerasjon. I dette



Figur 2.11: Posisjonen x til klossen som funksjon av tiden t .



Figur 2.12: Styring av en satellitts orientering ved hjelp av thrustere.

eksempelet tar vi kun med momentet fra thrusterne, som vil være gitt av skyvkraften til thrusteren F_t multiplisert med avstanden d fra thrusteren til satellittens masse-middelpunkt, det vil si

$$M_t = F_t d.$$

I virkeligheten vil det være flere kilder til momenter, som for eksempel solvindens trykk på solpanelene, gravitasjonsgradientens moment og luftmotstand hvis satellitten går i en lav bane. Basert på disse antagelsene kan vi sette opp følgende differensialligning:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= \Sigma M = M_t \\ J\ddot{\theta} &= F_t d. \end{aligned}$$

Ligningen tilsvarer (2.28) med $p = q = 0$, og den er dessuten ikke-homogen på grunn av leddet $F_t d$. Det betyr at den ikke passer rett inn i formelverket. På den annen side er denne ligningen såpass enkel at den kan løses direkte. Ved å integrere med hensyn på tiden t to ganger finner vi

$$\ddot{\theta} = \frac{F_t d}{J} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{F_t d}{J} t + C_1 \Rightarrow \theta(t) = \frac{F_t d}{2J} t^2 + C_1 t + C_2,$$

der C_1 og C_2 er tilfeldige konstanter. Dette viser at vinkelen θ øker som en andregradsfunksjon av tiden t . Dette virker ikke som en ønsket oppførsel da satellitten vil spinne med stadig økende hastighet. Vi skal komme tilbake til dette eksempelet når vi skal lage en enkel regulator for orientering av satellitter.

Omskrivning til førsteordens ligninger

En andreordens differensialligning kan alltid skrives om til to førsteordens ligninger. Dette gjøres ved å innføre to nye tilstander x_1 og x_2 . Ved å definere

$$x_1 = \theta,$$

og

$$x_2 = \dot{\theta}$$

kan vi skrive om (2.28) til

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -p x_2 - q x_1 \end{aligned}$$

Dette gjelder generelt, slik at en n -te ordens differensialligning alltid kan skrives om til n koblede førsteordens ligninger. Dette er vanlig metode i reguleringsteknikk, men for å benytte den fullt ut trenger man matematiske begreper som *vektorer* og *matriser*. Dette er et eget tema i Matematikk 3, og videre arbeid med dette kommer i TTK4105 Reguleringsteknikk og TTK4115 Lineær systemteori.

2.2.7 Differensialligninger av høyere orden

Som et eksempel på bruk av høyere ordens differensialligninger vil vi i kapittel [10.2](#) presentere en modell for en mekansk kommutert likestrømsmotor.

Kapittel 3

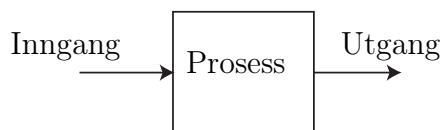
Dynamiske systemer

3.1 Introduksjon

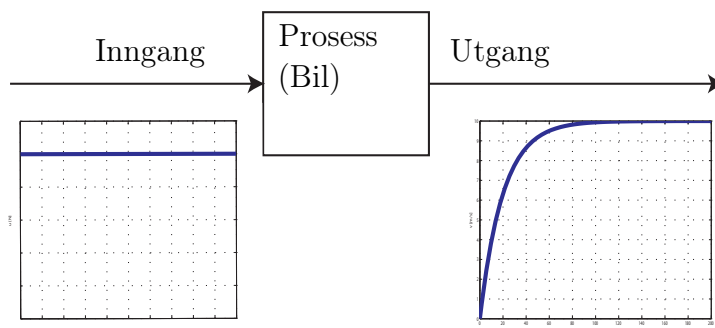
Vi vil i dette kapittelet presentere en del begreper knyttet til det vi har kalt *dynamiske prosesser*. En prosess kan beskrives ved en blokk, se Figur 3.1.

Inngang-utgang sammenhengen representerer årsak-virkning sammenhengen til prosessen. Vi vil ta utgangspunkt i eksemplene som ble presentert i Kapittel 2. I Figur 3.2 er Figur 3.1 gjentatt med responsen til bilmodellen i ligning (2.16) på utgangen. På inngangen er det plottet en kurve som viser pådraget i systemet, i dette tilfellet en kraft på 500 N , som står på hele tiden. Vi betrakter nå prosessen som en slags “svart boks” som vi ikke kjenner innholdet i, men vi kan allikevel lære en del om prosessens egenskaper ved å studere sammenhenger mellom inngangssignalet og utgangssignalet. Systemer med én inngang og én utgang kalles for *monovariabel* systemer.

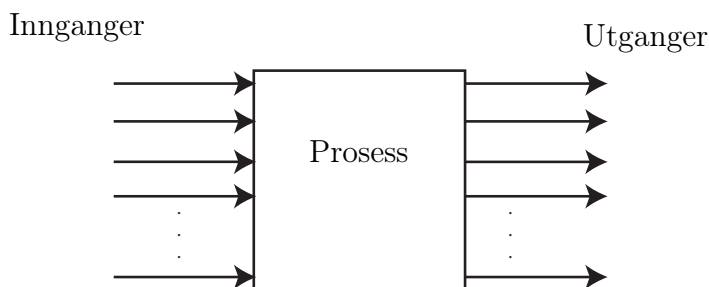
I det mer generelle tilfellet kan en prosess ha mange innganger og mange utganger slik som i Figur 3.3. Et slikt system vil kalles *multivariabelt*, og beskriver systemer med mange pådrag og mange målinger. Eksempler på dette er styring av skip (pådrag: propeller, ror, thrustere, målinger: kurs-



Figur 3.1: Generell prosess med inngang og utgang.



Figur 3.2: Dynamisk prosess illustrert ved ett signal på inngangen og ett på utgangen.



Figur 3.3: En generell multivariabel prosess

vinkel, hastigheter), kjemiske prosesser (pådrag: varmeelementer, ventiler, målinger: temperaturer, konsentrasjoner, trykk). Multivariable systemer blir studert nærmere i fagene TTK4105 Reguleringssteknikk og TTK4185 Robust regulering og er viktige i flere andre fag i tredje og fjerde årskurs.

3.2 Stasjonær respons

En prosess trenger strengt tatt ikke være dynamisk. For eksempel så vil funksjonen

$$y = f(x)$$

kunne beskrive en prosess der y er gitt som en funksjon av x . En slik prosess kalles statisk (eller momentan). I reguleringssteknikk bruker vi ofte slike

prosesser til å beskrive måleinstrumenter. Som oftest vil en statistisk prosess være kun en tilnærming av virkeligheten, og en statistisk modell kan gjøres gjeldene etter at signalene i modellen har “falt til ro”, noe følgende eksempel illustrerer.

Example 18 Hvis vi i Figur 3.2 gjør den tilnærmingen at vi sier at hastigheten v er konstant og lik 10 etter at 100 sekunder har gått (den går ikke så fort denne bilen...), vil vi kunne lage oss en sammenheng som sier at verdien av utgangssignalet er proporsjonal med verdien av inngangssignalet:

$$v = Ku,$$

der K er proporsjonalitetskonstanten. Vi kan regne ut K ved å sette inn tall fra figuren:

$$K = \frac{v}{u} = \frac{10}{500} = 0.02,$$

og vi finner den tilnærmende statiske modellen

$$v = 0.02u,$$

for bilhastigheten. Denne modellen gir ingen informasjon om innsvingningsforløpet, det vil si hva som skjer før bilen oppnår denne hastigheten og heller ikke hvor lang tid dette tar.

Vi kan også gå litt mer matematisk til verks og finne denne modellen ved å studere differensialligningen til systemet

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u.$$

Når hastigheten v er konstant, vil den deriverte \dot{v} være lik null, og vi kan sette

$$0 = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

og dermed finne

$$v = \frac{1}{k}u,$$

som med $k = 50$ (som er den verdien som ble brukt i simuleringen i Eksempel 14) er det samme vi fant ved å se på figuren.

3.3 Transient respons

Med *transienter* mener vi signaler som varierer med tiden, slik som for eksempel hastigheten på utgangen i Figur 3.2, før tidspunktet $t \approx 100$. Vi kaller kaller denne delen av signalet for transienten, og den delen av signalet som kommer etter $t \approx 100$ for stasjonærverdien. Hvis signalet går mot en stasjonærverdi kan vi også kalle det for innsvingningsforløp.

3.3.1 Førsteordens systemer

Stasjonærverdi

I Eksempel 18 fant vi hastigheten til bilen etter at denne hadde blitt konstant. Dette er stasjonærverdien. For et generelt førsteordens system, der u er konstant, kan vi finne denne ved

$$\dot{x} = ax + bu \quad (3.1)$$

$$0 = ax + bu, \quad (3.2)$$

som gir oss

$$x_{\text{stasjonær}} = -\frac{bu}{a}.$$

Legg merke til at stasjonærverdien også representerer systemets likevektspunkt.

Remark 19 Dette gjelder kun for systemer der $a < 0$, noe som vil bli klart i kapittel 7.

Tidskonstant og forsterkning

For førsteordens systemer finnes det en størrelse som beskriver transienten godt, nemlig *tidskonstanten*. Vi så i Kapittel 2 at en generell førsteordens differensialligning skrives som

$$\dot{x} = ax + bu. \quad (3.3)$$

Størrelsen

$$T = -\frac{1}{a} \quad (3.4)$$

defineres til å være ligningens tidskonstant, mens

$$K = -\frac{b}{a} \quad (3.5)$$

er *forsterkningen*. Størrelsene fremkommer hvis vi skriver om (3.3) på denne formen

$$\underbrace{-\frac{1}{a}}_T \dot{x} + x = \underbrace{-\frac{b}{a}}_K u.$$

Vi ser at hvis \dot{x} settes lik null, så vil

$$x = -\frac{b}{a}u = Ku.$$

Example 20 Vi så i Eksempel 4 at bilens hastighet er gitt av

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u, \quad (3.6)$$

slik at $a = -\frac{k}{m}$ og $b = \frac{1}{m}$. Forsterkningen er da

$$K = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{m}}{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{k}.$$

Ved å sette inn tall finner vi

$$K = \frac{1}{50 \frac{kg}{s}} = 0.02 \frac{s}{kg}.$$

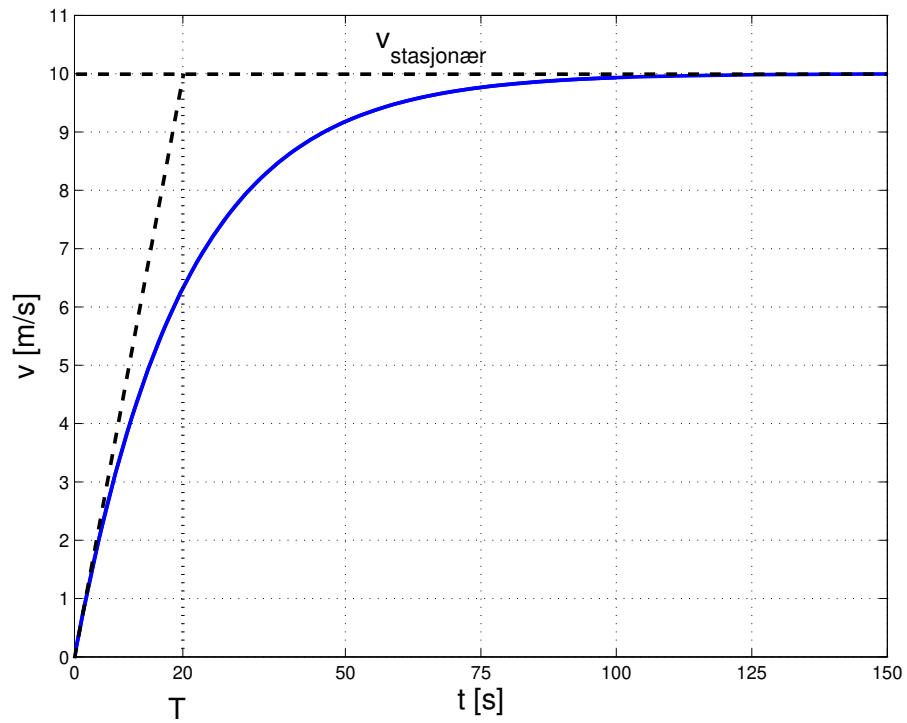
I følge (3.4) er da tidskonstanten gitt av

$$T = -\frac{1}{a} = \frac{m}{k},$$

det vil si

$$T = \frac{1000 \frac{kg}{m}}{50 \frac{Ns}{m}} = 20 \text{ s}.$$

Vi ser at tidskonstanten har sekunder som benevning; dette gjelder generelt. I Figur 3.4 er det illustrert hvor vi kan finne igjen tidskonstanten i transienten. Først beregner, eller skisserer, man tangenten til $v(t)$ for $t = 0$. Deretter finner man tidspunktet hvor denne tangenten skjærer stasjonærverdien $v_{stasjonær}$. Tidskonstanten er gitt av tallverdien for dette tidspunktet.



Figur 3.4: Tidskonstanten fremkommer ved å tegne inn tangenten til responsen i initialtidspunktet.

Vi skal se litt nærmere på hvorfor vi har denne sammenhengen mellom tidskonstanten T og tangenten for $t = 0$. Løsningen til (3.6) er gitt av (her har vi brukt s for stasjonær)

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{u}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ v(t) &= v_s \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ v(t) &= v_s (1 - e^{at}) \\ v(t) &= v_s \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vi kan nå regne ut den deriverte av $v(t)$ slik at

$$\dot{v}(t) = \frac{v_s}{T} e^{-\frac{t}{T}} \tag{3.8}$$

og videre for $t = 0$ har vi

$$\dot{v}(0) = \frac{v_s}{T}. \tag{3.9}$$

Siden tangenten går gjennom origo, se figur 3.4, så er tangenten gitt av

$$g(t) = \frac{v_s}{T} t, \tag{3.10}$$

og vi ser at $g(T) = \frac{v_s}{T} T = v_s$, det vil si at tangenten skjærer stasjonærverdien for $t = T$.

Det er interessant, i det generelle tilfellet, å regne ut verdien til $x(t)$ når $t = T$. Med $x_0 = 0$ vil løsningen av et førsteordens system være gitt av

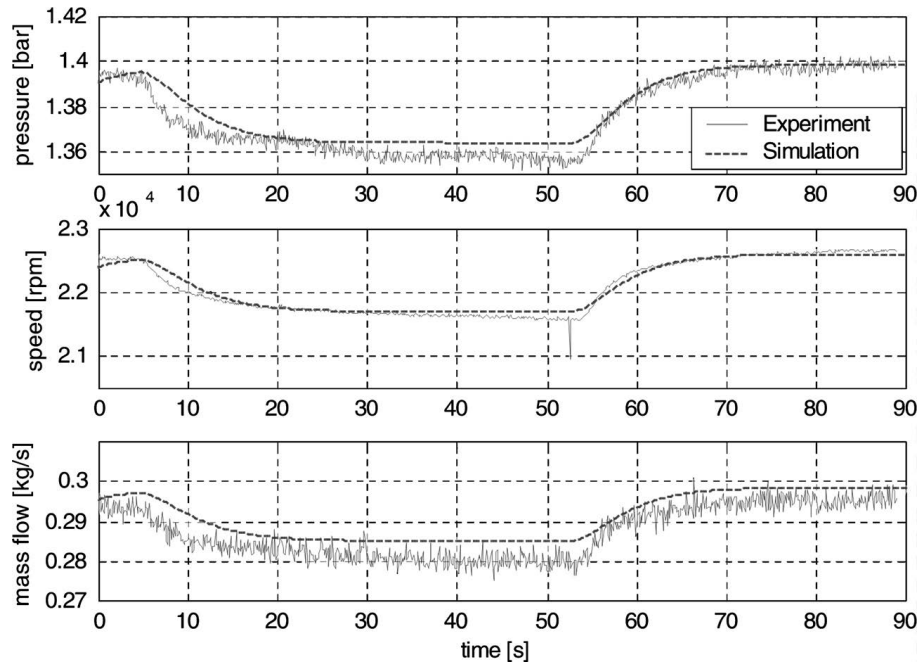
$$x(t) = x_s(1 - e^{-\frac{t}{T}}),$$

slik at

$$x(T) = x_s(1 - e^{-\frac{T}{T}}) = x_s(1 - e^{-1}) \approx 0.63 x_s$$

Dette betyr at ved tidspunktet $t = T$ har transienten nådd 63% av stasjonærverdien. På tilsvarende måte kan vi regne ut verdier for $t = 2T$, $t = 3T$ og så videre:

$$\begin{aligned} x(T) &= (1 - e^{-1})x_s \approx 0.63x_s \\ x(2T) &= (1 - e^{-2})x_s \approx 0.87x_s \\ x(3T) &= (1 - e^{-3})x_s \approx 0.95x_s \\ &\vdots \\ x(nT) &= (1 - e^{-n})x_s \end{aligned}$$



Figur 3.5: Eksperimentelle data fra gassturbinforsøk. Trykk, rotasjons hastighet og massestrøm som funksjon av tid.

Example 21 Kunnskapen om at et førsteordens system når 63% av stasjonærverdien etter $t = T$ kan vi bruke til å finne tilnærmede modeller når vi har eksperimentelle data eller målinger fra en prosess. Figur 3.5 viser måledata fra eksperimenter med en gassturbin, [Gravdahl et al., 2004]. Det er mulig å kjenne igjen responsen som noe som ligner på en førsteordens respons. Ved å lese av stasjonærverdier og regne litt, så kan tidskonstanten finnes, og vi har en tilnærmet modell for noe som egentlig er en veldig kompleks termodynamisk og mekanisk prosess.

3.3.2 Andreordens systemer

For andreordens systemer

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

har vi to andre begreper som beskriver transienten, nemlig udempet resonansfrekves ω_0 og relativ dempingsfaktor ζ . Vi skal innføre disse ved hjelp

av masse-fjær-demper systemet

Example 22 Modellen for masse-fjær-demper systemet er gitt av

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.11)$$

Ved å innføre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}},$$

kan (3.11) skrives

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

Det kan vises at et underdempet system har $0 < \zeta < 1$, et kritisk dempet system har $\zeta = 1$ og for et overdempet system så er $\zeta > 1$. I Eksempel 16, så ser vi av responsen at løsningen svinger med en gitt frekvens og er tydelig dempet siden svingningene avtar. Merk at frekvensen til svingningen, det vil si antall svingninger pr sekund ikke er gitt av ω_0 , men av den **dempede** resonansfrekvensen

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.12)$$

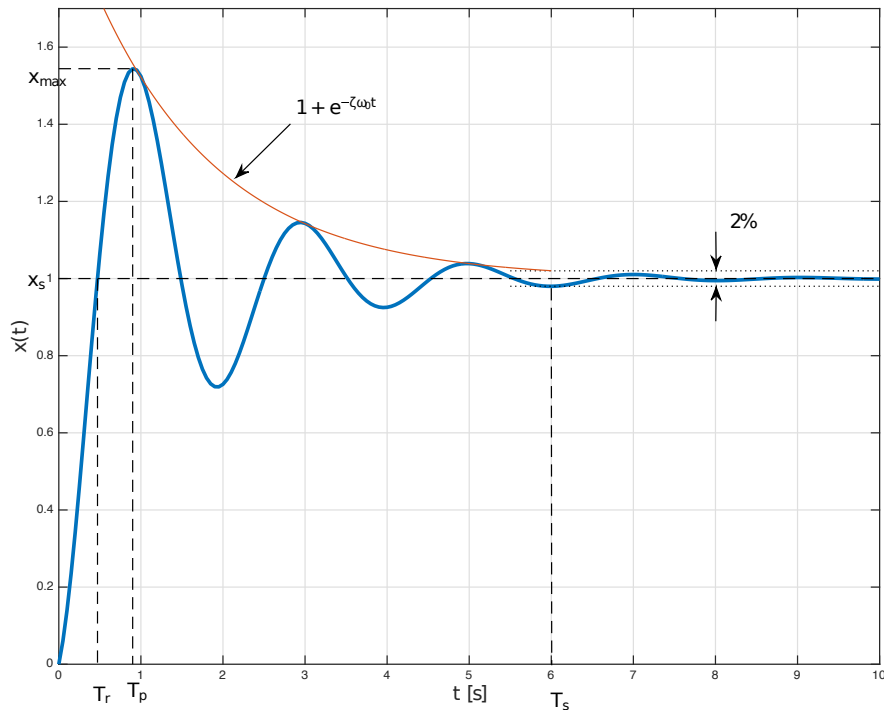
Ved å sette inn tallverdier, får vi for masse-fjær-demper systemet at $\omega_0 = \sqrt{10} \approx 3.16$, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ og $\omega_d = 3$.

Hvis vi ser på figur 2.11, så kan vi beregne frekvensen til den svingningen vi ser. Vi ser at vi har to hele svingninger mellom $t_1 = 0.6\text{s}$ og $t_2 = 4.8\text{s}$. Det vil si at frekvensen er gitt av $f = \frac{2}{4.2\text{s}} = \frac{1}{2.1\text{s}} = 0.48\text{Hz}$. Den tilsvarende vinkelfrekvensen er da gitt av $\omega_{\text{figur}} = 2\pi f = 2.99$. Det er med andre ord den dempede resonansfrekvensen vi ser på figuren.

I de fleste reguleringssystemer vil vi ønske å unngå svingninger, eller i det minste å dempe dem mest mulig. Overdempede andreordens systemer har ikke svingninger, men vil ha store tidskonstanter, det vil si de vil reagere forholdsvis tregt. Et kompromiss, og i mange tilfeller et designkriterium, vil være kritisk dempede systemer som er de raskeste andreordens systemer uten svingninger.

Vi skal nå innføre noen størrelser som er anvendelige for å beskrive oppførselen til underdempede andreordens systemer. Som vi husker fra (2.33) så er den generelle løsningen av et andreordens system gitt av

$$x(t) = e^{at} (C \cos bt + D \sin bt), \quad (3.13)$$



Figur 3.6: Andreordens underdempet respons med karakteristiske størrelser.

eller som vi skal vise i Kapittel 7

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(C \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) + D \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right), \quad (3.14)$$

hvor vi nå har fått med avhengigheten av ζ og ω_0 . Denne responsen, med passende verdier for C og D , er vist i Figur 3.6. Vi kaller det første maksimumet til denne funksjonen for x_{max} og stasjonærverdien for x_s og definerer det som kalles oversvingsfaktoren, eller det relative oversving, som

$$\delta = \frac{x_{max} - x_s}{x_s}. \quad (3.15)$$

Det kan vises at et analytisk uttrykk for oversvingsfaktoren er gitt av funksjonen

$$\delta(\zeta) = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (3.16)$$

og det kan da vises at $\delta(0) = 1$, noe som svarer til et udeмпet system, det vil si stående svingninger, og $\delta(1) = 0$, noe som svarer til et kritisk demпет system som ikke har svingninger og dermed ikke oversving. Den inverse funksjonen av (3.16) gir oss

$$\zeta(\delta) = \frac{|\ln \delta|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \delta)^2}}. \quad (3.17)$$

Sammenhengen i (3.17) gjør det mulig å lese av oversvingsfaktoren for en eksperimentell kurve og dermed beregne den relative demplingsfaktoren. Det kan også vises at tidspunktet for det første maksimumet er gitt av

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}}. \quad (3.18)$$

Innsvingningstiden for et underdemпет system kan beskrives på flere alternative måter, men alle tar utgangspunkt i den absolutte demplingsfaktoren $\zeta\omega_0$ og den tilhørende tidskonstanten

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_0}. \quad (3.19)$$

Den fallende eksponensialfunksjonen $1 + e^{-\zeta\omega_0 t}$ som er tegnet i rødt i Figur 3.6 er et eksempel på en omhylningskurve, og som vi ser svarer den til det første leddet i (3.14). Innsvingningstiden kan nå defineres som

$$T_s = k\tau = \frac{k}{\zeta\omega_0}, \quad (3.20)$$

der et vanlig valg for k er $k = 4$ slik at

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_0}, \quad (3.21)$$

noe som fører til at innsvingningstiden svarer til den tiden det tar for responsen å være innenfor $\pm 2\%$ av stasjonærresponsen, som illustrert i Figur 3.6.

Kapittel 4

Blokkdiagrammer

4.1 Introduksjon

Et blokkdiagram er en skjematisk representasjon av en matematisk modell. I blokkdiagrammene vil tilstander og andre tidsvarierende signaler som for eksempel pådrag, være representert med linjer. Den enkleste form for blokkdiagram har vi allerede sett, se for eksempel Figur 3.1, der hele prosessen ble representert med én blokk. Vi skal nå se at vi kan dele opp selv førsteordens prosesser i flere blokker, der hver blokk representerer en matematisk operasjon. Det vil da være en årsak-virkning sammenheng for komponentene i systemet. Matematiske operasjoner som summering, multiplikasjon og integrering vil være representert med firkanter, dvs blokker, eller andre symboler. Hensikten med dette er at vi kan visualisere kompliserte prosesser, og studere hvordan ulike deler av prosessen påvirker hverandre. Dette kan blant annet brukes til å forenkle prosessene. Det er viktig å merke seg at et blokkdiagram inneholder akkurat den samme informasjonen som et sett med differensialligninger.

4.2 Blokker

Vi vil her presentere hvordan forskjellige matematiske operasjoner representeres i blokkdiagram.

4.2.1 Funksjongsgenerering

I Figur 4.1 (1) er det vist hvordan vi representerer funksjonen $f(x)$. Inngangen på blokken representerer signalet x og utgangen får verdien $f(x)$.

4.2.2 Multiplikasjon

Når et signal, f.eks en tilstand x multipliseres med en konstant K tegnes dette på blokkdiagramform som i Figur 4.1 (2). Inngangen er x og utgangen er Kx . Denne blokken er mye brukt og kalles også en *forsterkning*. Blokken er et spesialtilfelle av funksjonsblokken med $f(x) = K$.

4.2.3 Addisjon og subtraksjon

Summering av to signaler, for eksempel x_1 og x_2 , tegnes som i Figur 4.1 (3). Utgangen fra summasjonstegnet har verdien $x_1 + x_2$. Subtraksjon tegnes på samme måte, men med et lite 'minus'-tegn ved siden av sirkelen som vist i Figur 4.1 (4).

4.2.4 Integrasjon

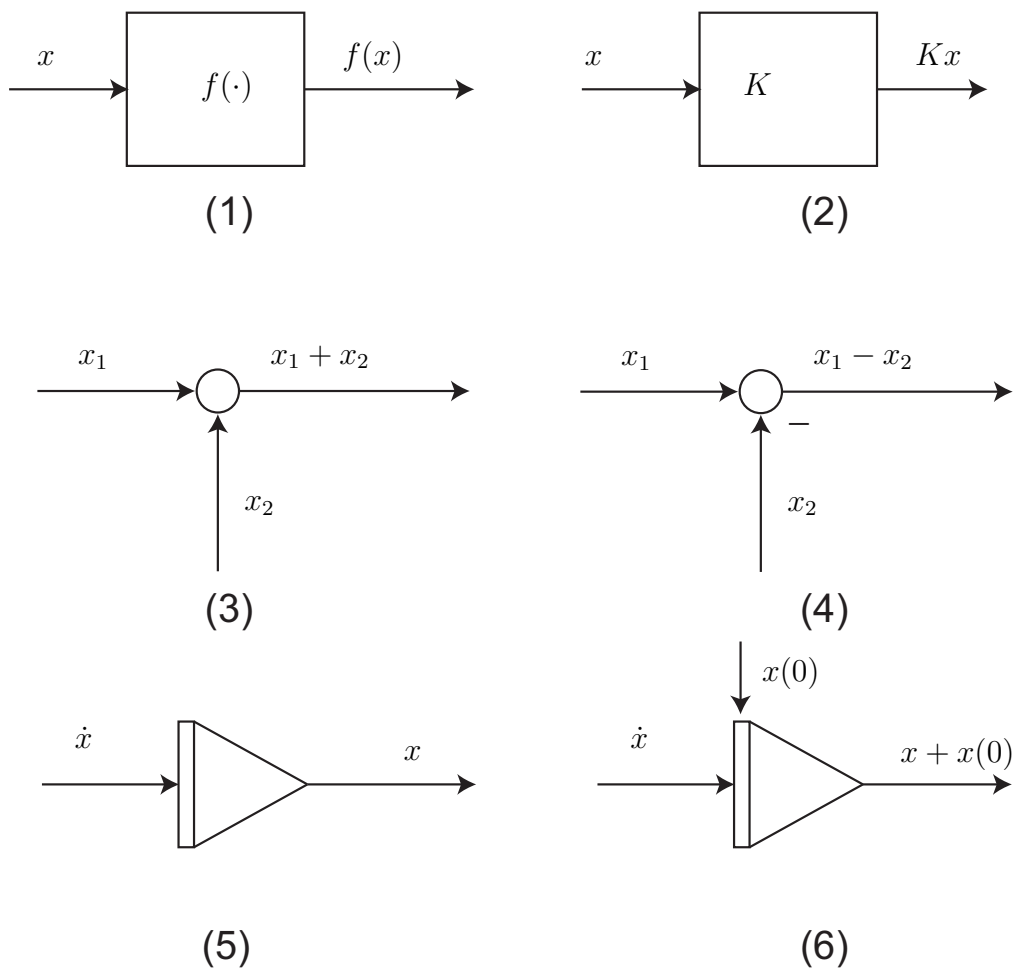
En meget sentral blokk i blokkdiagrammet er den som uttrykker integrasjon. Dette er illustrert i Figur 4.1 (5). Inngangen til denne blokken er \dot{x} og utgangen er x . Denne blokken kalles en integrator. Hvis vi også skal ta hensyn til tilstandens initialverdi, gjøres dette som vist i figur 4.1 (6).

4.3 Sammensatte blokkdiagrammer

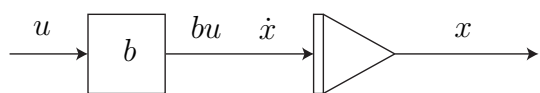
Vi har nå nok komponenter til å lage mer kompliserte blokkdiagrammer, og vi skal vise hvordan en del av de eksemplene vi har gjennomgått kan tegnes opp.

Example 23 *Differensialligningen $\dot{x} = bu$ tegnet i Figur 4.2.*

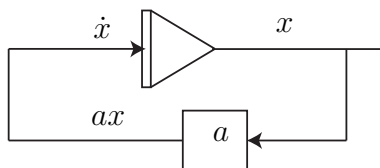
Metoden vi bruker her er at vi først tegner opp integratoren, så skriver vi på symbolene på inngangen og utgangen, i dette tilfellet \dot{x} og x . Videre ser vi at inngangen på integratoren er lik bu , noe som tegnes som konstanten b i en forsterkningsblokk med signalet u som inngang.



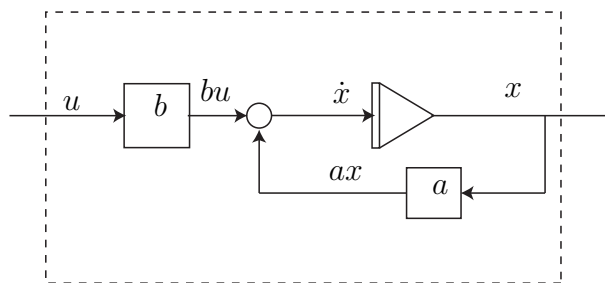
Figur 4.1: (1) Funksjonsgenerering, (2) Multiplikasjon med konstant, (3) Summering, (4) Subtraksjon, (5) Integrasjon



Figur 4.2: Forsterkning og integrator.



Figur 4.3: Tilbakekoblet integrator.

Figur 4.4: Blokkdiagram for førsteordensligningen $\dot{x} = ax + bu$.

Example 24 For å lage blokkdiagrammet til $\dot{x} = ax$, må vi koble sammen inngangen og utgangen på integratoren som vist i Figur 4.3. Dette er et eksempelet på det sentrale begrepet **tilbakekobling**.

Example 25 Den mer generelle første ordens differensialligningen

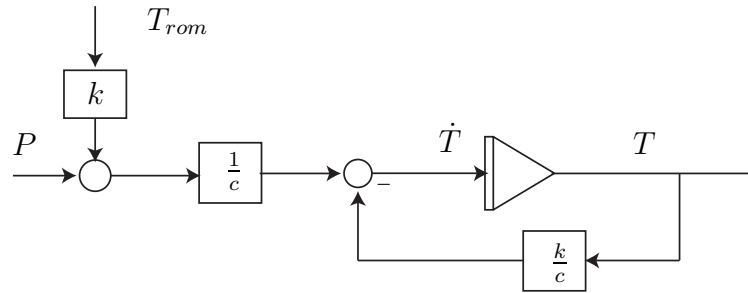
$$\dot{x} = ax + bu$$

kan nå illustreres i et blokkdiagram ved å kombinere de to forrige eksemplene, og bruke et summasjonstegn i tillegg. Som vi ser i Figur 4.4 har vi nå et diagram med en inngang u og en utgang x . Ved å betrakte alt som er innenfor det stiplede området som en blokk, ser vi at systemet ligner på det innledende eksempelet i Figur 3.1.

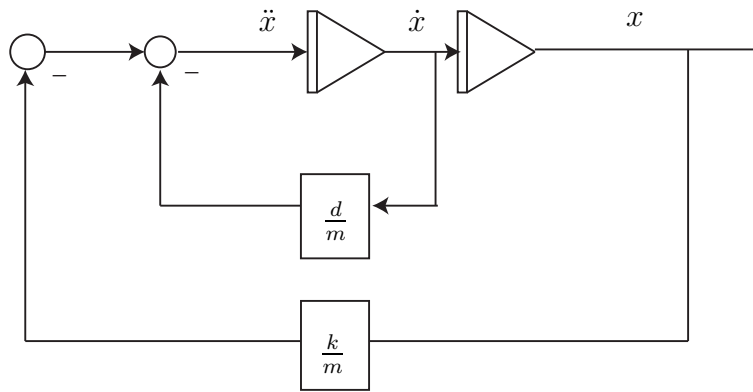
Example 26 Modellen

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom})$$

for temperaturen i kokeplata kan representeres på blokkdiagramform som vist i Figur 4.5.



Figur 4.5: Blokkdiagram for kokeplatemodellen.



Figur 4.6: Blokkdiagram for masse-fjær-demper modellen.

Example 27 *Modellen*

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

for masse-fjær-demper systemet i Eksempel 16 kan også skrives som

$$\ddot{x} = -\frac{d}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x,$$

og det er klart at blokkdiagrammet må inneholde to integratorer. Dette gjelder generelt: Et n -te ordens system har n integratorer. Blokkdiagrammet er tegnet i Figur 4.6

Kapittel 5

Simulering, Matlab og Simulink

5.1 Simulering

5.1.1 Innledning

Vi har nå sett hvordan vi kan løse differensialligninger av første og andre orden eksplisitt, det vil si finne løsningen $x(t)$ av ligningen. Det er flere årsaker til at dette vanligvis ikke er til noen stor hjelp i design av reguleringssystemer. For det første er ofte modellene vi jobber med ulineære eller av høyere orden eller begge deler, og da kan vi ikke finne en eksplisitt løsning. Videre så vil vi, selv om modellen er lineær i utgangspunktet, bruke regulatorer som vanskeliggjør løsningen. Ulineære elementer som metning, friksjon, hysteresis og andre fenomener vil også vanskeliggjøre en løsning. Dessuten er det slik at vi som regel ikke har behov for å vite den eksakte løsningen til en differensialligning.

Innen kybernetikk og reguleringsteknikk er *simulering* et mye brukt verktøy. Simulering betyr i denne sammenheng at vi finner en tilnærmet, numerisk, løsning på differensialligninger. Faget Modellering og Simulering og [Egeland and Gravdahl, 2002] behandler dette i detalj.

5.1.2 Eulers metode

Ligningen

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.1}$$

har en eksakt løsning $x(t)$, og vi ønsker nå å beregne en numerisk løsning som er en tilnærming av den eksakte løsningen. Dette gjøres med

et tidsskritt h slik at løsningen blir beregnet for $(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N)$ der $t_{n+1} - t_n = h$ kalles et tidsskritt. Den numeriske løsningen ved tid t_n betegnes x_n . Vi går nå over fra kontinuerlig tid t til såkalte diskrete tidspunkter t_k . Konstanten h kalles skrittlengden og er avstanden i tid mellom to nabo-tidspunkter t_{n+1} og t_n .

Example 28 *En metode for å løse differensialligningen*

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.2)$$

numerisk, er å beregne x_{n+1} som

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n). \quad (5.3)$$

Valget av skrittlengden h vil være med på å bestemme hvor nøyaktig tilnærmingen vår blir. Dette betyr at verdien av x_n ved tidspunkt t_n beregnes på grunnlag av verdien ved tidspunkt t_{n-1} . Den metoden vi har brukt her kalles **Eulers metode**. Metoden er illustrert i Figur 5.1. I figuren er $y = x$, og $y_L(t)$ er en eksakt løsning av 5.2 med y_n som initialverdi. Vi ser at det blir et avvik mellom beregnet numerisk løsning og eksakt løsning ved tidspunktet t_{n+1} .

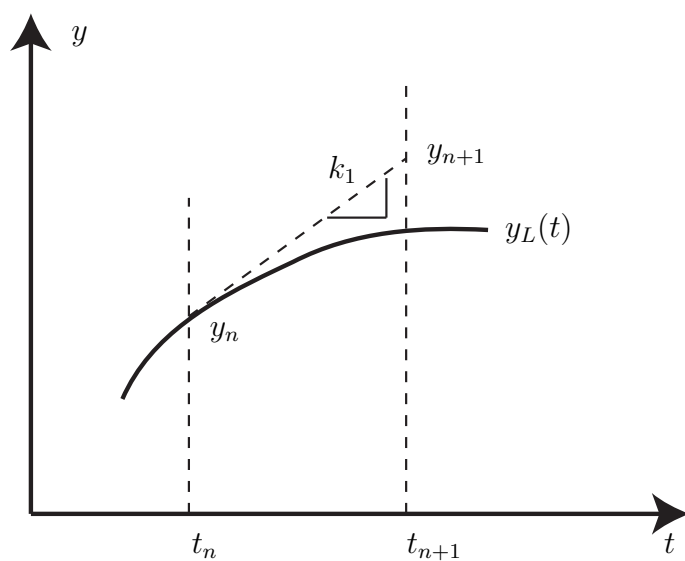
En simuleringsmetode, eller algoritme, som vist i eksempelet har en viss nøyaktighet, avhengig av h , som kan beregnes. Det finnes mange andre metoder med spesielle fordeler som høy nøyaktighet eller rask simuleringstid.

Eulers metode kan utledes som følger. Vi tar utgangspunkt i differensialligningen (5.2) og vi ønsker å finne en tilnærmet verdi for x_{n+1} når vi har gitt x_n . Den eksakte løsningen $x(t)$ til (5.2) er tegnet i Figur 5.2. Metoden går ut på å beregne en ny verdi på en tangent som går gjennom det kjente punktet (t_n, x_n) markert som ① i figuren. Som vi ser av (5.2) så er stigningstallet til tangenten gitt av $a = \dot{x} = f(x)$. Tangenten er en rett linje gitt av $x = at + b$ og i satt inn for verdier i punkt ① får vi

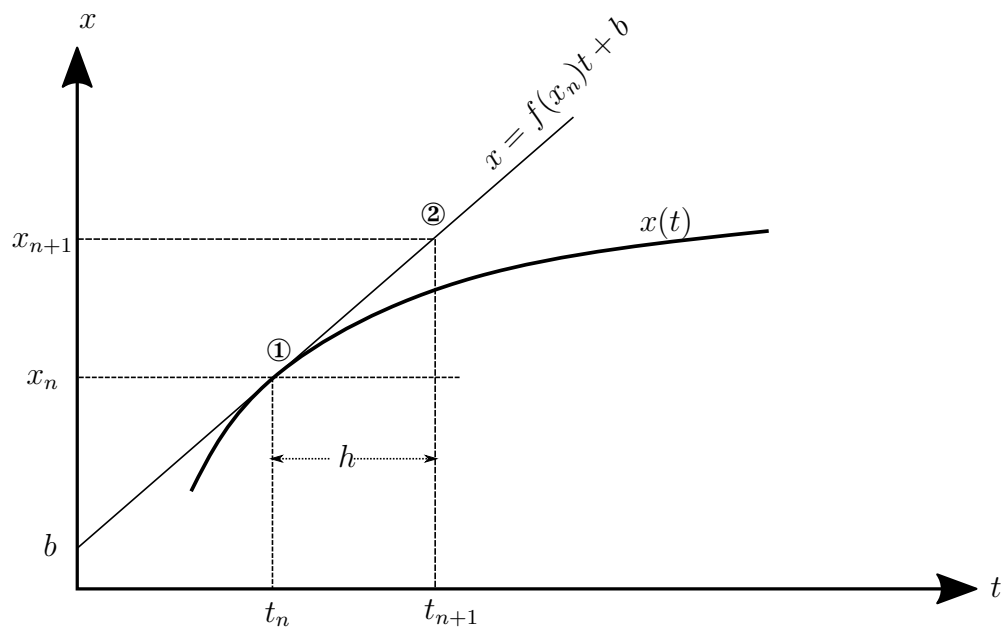
$$x_n = f(x_n)t_n + b, \quad (5.4)$$

og innsatt for verdier i punkt ② får vi

$$x_{n+1} = f(x_n)t_{n+1} + b. \quad (5.5)$$



Figur 5.1: Eulers metode. Figuren er hentet fra [Egeland and Gravdahl, 2002].



Figur 5.2: Utledning av Eulers metode.

Ved å trekke (5.4) fra (5.5) finner vi

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= f(x_n)t_{n+1} + b - (f(x_n)t_n + b) \\ &= f(x_n)(t_{n+1} - t_n) \\ &= hf(x_n), \end{aligned} \tag{5.6}$$

og dermed

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n). \tag{5.7}$$

En numerisk metode som den i (5.3) kan brukes manuelt, det vil si vi kan beregne x_{n+1} med “papir og blyant”, uten å løse differensialligningen. Den virkelige styrken til en slik metode ligger imidlertid i at den er egnet for implementering i en datamaskin. Vi kan gjøre dette selv i et hvilket som helst programmeringsspråk, i eksempelet under er det vist hvordan algoritmen for å løse differensialligningen

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 10 \tag{5.8}$$

ved hjelp av Eulers metode kan implementeres som et Matlab-script.

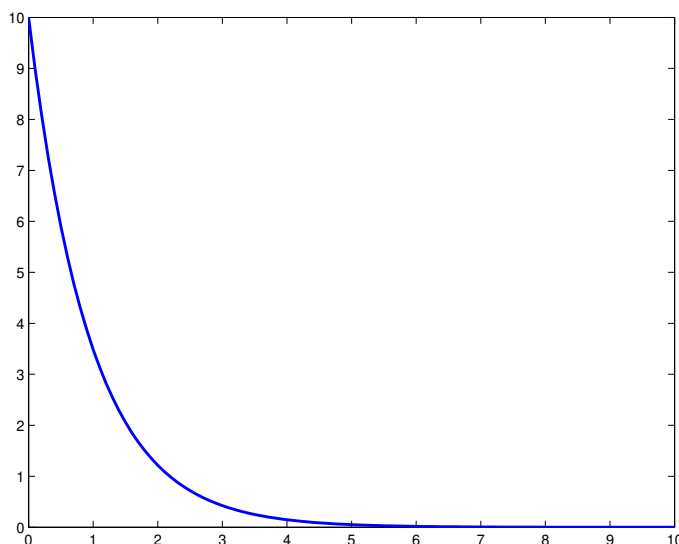
Example 29 *En numerisk løsning på ligning (5.8) kan finnes ved hjelp av Matlab-scriptet*

```
h=0.1;
a=1;
x(1)=10;
for i=2:101,
    x(i)=x(i-1)+h*(-a*x(i-1));
end
```

Deretter kan løsningen plottes slik:

```
t=0:0.1:10;
plot(t,x);
```

Vi har valgt et tidsskritt på $h = 0.1$, og ved å beregne 100 verdier betyr det at vi simulerer responsen til systemet for 10 sekunder. Grunnen til at vi bruker indekser fra 1 og oppover i beregningene er at Matlab ikke aksepterer 0 som en indeks. Resultatet av simuleringen er vist i Figur 29.

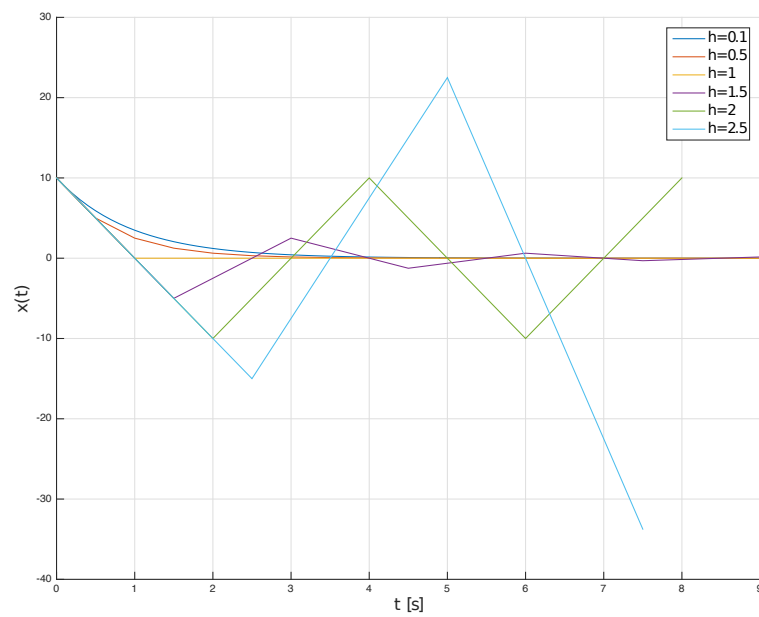


Figur 5.3: Resultatet av å beregne en numerisk løsning for $\dot{x} = -x$ med Eulers metode.

5.1.3 Valg av skrittlengde

Vi skal nå se på hvilken betydning skrittlengden h har for de numeriske løsningene. I Figur 5.1.3 vises resultatet av den samme simuleringen, men for verdiene $h = \{0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$. Sammenligner vi $h = 0.1$ og $h = 0.5$ ser vi at nøyaktigheten blir litt dårligere med $h = 0.5$, mens hvis vi setter $h = 1$ ser vi at den numeriske løsningen blir værende på null for $t > 1$. Setter vi $h = 1.5$ skjer det noe helt nytt, vi ser at vi får en type svingninger som avtar asymptotisk mot null. Systemet oppfører seg på en måte som ligner et underdempet andreordens system, selv om det vi simulerer er en enkel førsteordens differensialligning, (5.8). Dette viser at vi må vise stor varsomhet når vi velger verdien på h , da det er mulig å fremprovosere dynamikk og oppførsel som den opprinnelige ligningen ikke innehar. Videre ser vi at $h = 2$ fører til en trekantpuls, en type stående svingninger, mens $h = 2.5$ (og høyere) gjør at simuleringen blir ustabil.

Det er interessant å finne metoder for å velge fornuftige verdier for h . Det er tydelig at vi kan øke nøyaktigheten ved å velge h liten, men vi skal nå undersøke hvor stor vi kan velge h uten at den numeriske løsningen blir ustabil. Det er vanlig å gjøre stabilitetsundersøkelser av numeriske metoder



Figur 5.4: Resultatet av å beregne en numerisk løsning for $\dot{x} = -x$ med Eulers metode og med forskjellige verdier for skrittlengden h .

ved å studere løsningen av ligningen

$$\dot{x} = \lambda x, \quad (5.9)$$

der $\lambda < 0$ er en konstant. Ved å bruke Eulers metode (5.3) får vi

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n = (1 + h\lambda)x_n. \quad (5.10)$$

Et krav til at den numeriske løsningen skal være stabil er at

$$|x_{n+1}| \leq |x_n|, \quad (5.11)$$

og vi kan da se at

$$|(1 + h\lambda)x_n| \leq |(1 + h\lambda)| \cdot |x_n|, \quad (5.12)$$

noe som følger av Cauchy-Schwarz' ulikhet¹. Vi kan nå se at hvis (5.11) skal være oppfylt så må vi kreve at

$$|(1 + h\lambda)| \leq 1. \quad (5.13)$$

Siden (5.13) er en ulikhet med absoluttverdi får vi to nye ulikheter. For det første må

$$\begin{aligned} (1 + h\lambda) &\leq 1 \\ h\lambda &\leq 0 \\ h &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

som rett og slett betyr at skrittlengden må være positiv, og den siste ulikheten følger av at $\lambda < 0$. For det andre har vi

$$\begin{aligned} -1 - h\lambda &\leq 1 \\ -h\lambda &\leq 2 \\ h &\leq -\frac{2}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

¹Generelt lyder Cauchy-Schwarz' ulikhet $|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$ der u og v er vektorer, men den gjelder da også for skalarer.

der vi i den siste ulikheten ikke har snudd ulikhetstegnet fordi $-\lambda > 0$. Vi kan nå bruke (5.15) for å finne en øvre grense for skrittlengden h . I simuleringene over hadde vi at $\lambda = a = -1$ som gir oss følgende krav til numerisk stabilitet

$$\begin{aligned} h &\leq -\frac{2}{-1} \\ h &\leq 2, \end{aligned} \tag{5.16}$$

noe som stemmer bra siden vi fikk stående svingninger med $h = 2$ og en ustabil numerisk løsning for høyere verdier av h .

5.1.4 Andre metoder

Eulers metode er den enkleste numeriske metoden for å løse differensialligninger og det finnes veldig mange andre metoder som gir høyere nøyaktighet og bedre stabilitetsegenskaper. Den såkalte modifiserte Eulers metode (også kjent som eksplisitt midtpunktregel) er gitt som

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ x_{n+1} &= x_n + hk_2, \end{aligned} \tag{5.17}$$

og som anvendt på (5.9) gir

$$x_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right) x_n, \tag{5.18}$$

som kan brukes til stabilitetsundersøkelser. Til slutt skal vi presentere den såkalte Runge-Kuttas metode av 4. orden²:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + hk_3) \\ x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Det finnes også flere kommersielt tilgjengelige programpakker som kan utføre simuleringer for oss. Vi skal nå se spesielt på programmet Simulink.

5.2 Simulink

Simulink® er et dataprogram produsert av The MathWorks Inc. for simulering av dynamiske systemer. Det er en del av programvarepakken Matlab®. Simulink og Matlab brukes i stor utstrekning innen reguleringsteknikk og kybernetikk. For å simulere et dynamisk system i Simulink, må man først spesifisere systemet. Dette gjøres ved å tegne et blokkdiagram av systemet i Simulinks grafiske editor. Deretter simuleres systemet ved å trykke på 'play'. Vi skal vise i et eksempel hvordan vi kan spesifisere en modell i Simulink og deretter simulere den.

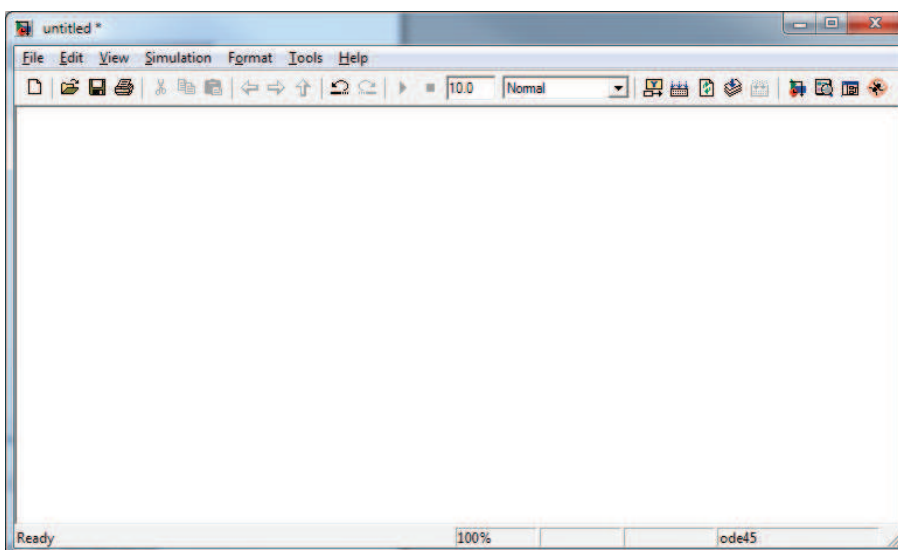
Example 30 *Vi skal i dette eksempelet se hvordan vi kan simulere, det vil si finne en numerisk løsning til, differensialligningen i Eksempel 25,*

$$\dot{x} = ax + bu,$$

når vi velger $a = -1, b = 1$

1. *Start programmet MATLAB, og åpne Simulink ved å klikke på Simulink-ikonet i Matlabs kommando-vindu. Vi får da opp Simulink Library*

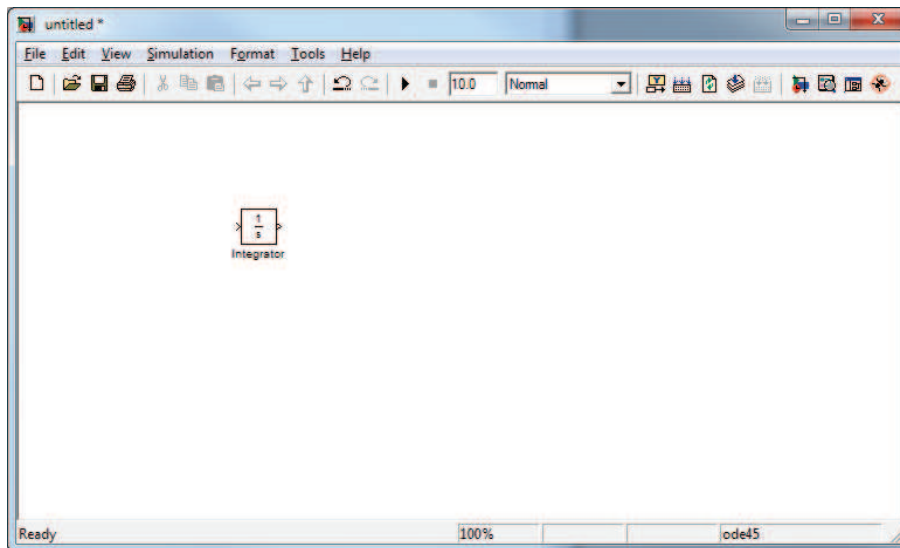
²Begrepet orden for numeriske metoder blir diskutert inngående i faget TTK4130 Modellering og simulering. Til sammenligning så har Eulers metode orden 1 og modifisert Euler har orden 2.



Figur 5.5: Tomt Simulink diagram.

*Browser. Her finner vi de komponentene vi trenger for å bygge opp et komplett blokkdiagram. Ved å velge **File**→**New**→**Model** i menyen eller klikke på New-ikonet får vi opp et tomt Simulink-vindu som vist i Figur 1.*

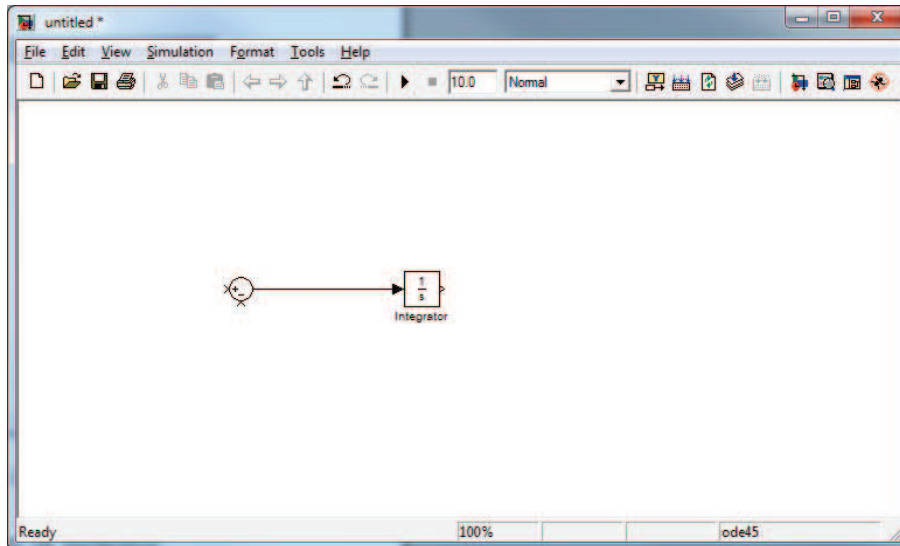
2. *Hvordan man går frem for å bygge opp blokkdiagrammet er ikke så viktig, men det kan være fornuftig å starte med integratoren. Denne finnes under delmenyen **Simulink**→**Continuous**, og har symbolet $\frac{1}{s}$ i motsetning til det vi definerte i Kapittel 4.2.4. Årsaken til dette lærer vi om i faget Reguleringssteknikk. Klikk på integrator symbolet, og dra det over i det foreløbig tomme Simulink-vinduet. Ved å dobbeltklikke på integratoren kan vi sette initialverdi for tilstanden. Simulinkblokkene vi skal bruke i dette eksempelet er vist i Figur 2.*
3. *Summasjonstegnet finner vi under **Simulink**→**Math Operations**. Dra det over i modellvinduet. Vi trenger et summasjonspunkt med en pluss og en minus. Dobbeltklikk på summasjonspunktet og endre den ene plussen til en minus.*
4. *Nå kan summasjonspunktet og integratoren knyttes sammen med en signallinje. Klikk på utgangen til summasjonspunktet, og dra en linje til*



Figur 5.6: Realisering av integrator i Simulink.

inngangen på integratoren. Legg merke til at signallinjen blir heltrukket når blokkene knyttes sammen som vist i Figur 4.

5. Forsterkninger (Gain) finnes under **Math Operations**. Sett inn 2 stykker i blokkdiagrammet. Dobbeltklikk på Gain-blokkene for å sette forsterkningen, og velg verdien 1 på begge. Legg merke til at vi realiserer $a = -1$ med en positiv konstant a i blokkdiagrammet, og en minus på tilbakekoblingen. Dette kunne også vært gjort med en negativ konstant i blokkdiagrammet og en positiv tilbakekobling. Ved å klikke på navnet under blokkene, kan man velge egne navn på blokkene. Forsterkningen 'b' må snus for å få riktig retning på inngang og utgang. Dette gjøres ved å markere blokken og velge **Format**→**Flip Block** i modellvinduet.
6. Pådraget setter vi til en konstant verdi som vi finner under **Simulink**→**Sources**.
7. For å visualisere simuleringen sender vi utgangen (det vil si tilstanden x) til et Oscilloscop. Dette finner vi under **Simulink**→**Sinks**.
8. Vi er da klar til å simulere systemet. Blokkdiagrammet skal se ut som det i Figur 8. Klikk på start simulering ikonet (▶). Simuleringen går svært fort, og ved å dobbeltklikke på Scope, får vi opp en figur som viser

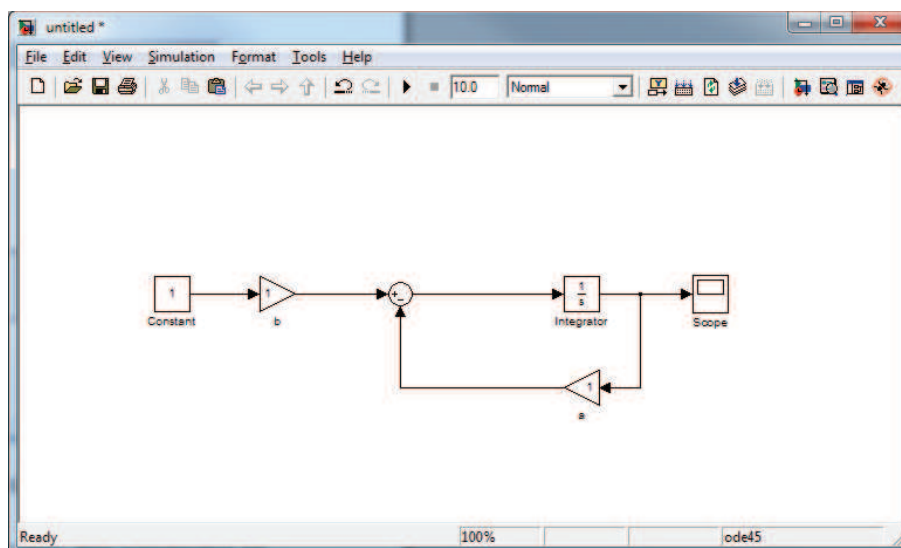


Figur 5.7: Sammenkoblet summasjonstegn og integrator.

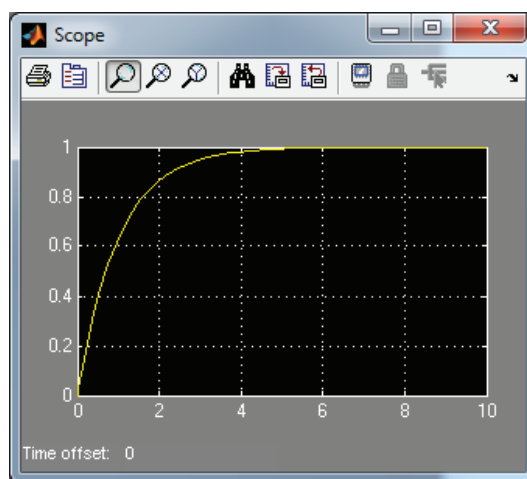
responsen til systemet. Hvis vi har gjort alt riktig, vil denne se ut som i Figur 8. Trykk på zoom-ikonet for å få best mulig presentasjon av resultatet. Under menyen *Simulation* → *Simulation Parameters* kan vi sette en del parametere, som for eksempel hvor lang tid vi ønsker å simulere systemet og hvilken nøyaktighet vi ønsker. Høy nøyaktighet vil gi en liten skrittlengde.

Remark 31 Alle systemresponsene som ble presentert i Kapittel 2 ble produsert ved hjelp av Simulink.

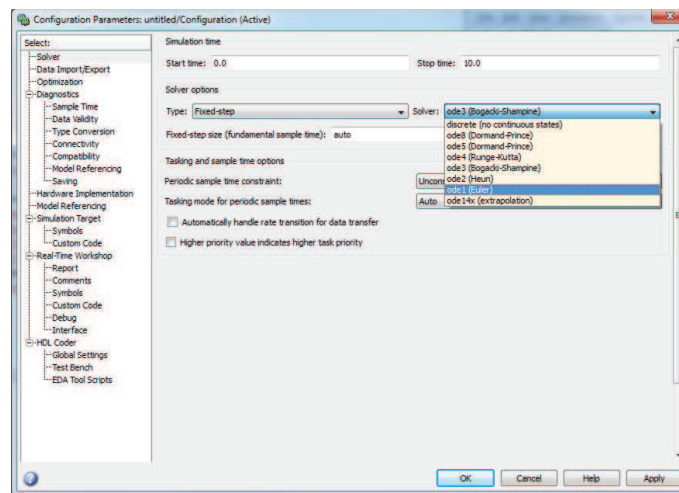
Hvis vi i et Simulinkvindu går inn på menyen *Simulation* → *Configuration Parameters* vil vi få opp et vindu som det i Figur 5.2. Under Solver options kan vi velge mellom *Variable-step* og *Fixed-step*. Under *Fixed-step* finner vi igjen Eulers metode som den enkleste metoden Simulink kan bruke, og vi ser også Runge Kuttas metode. På et førsteordens system som det brukt i eksempelet vil vi ikke se noen praktisk forskjell på bruk av de forskjellige metodene, men for mer avanserte systemer er det svært viktig å velge riktig metode. Valg av simuleringsmetode for et gitt system med visse egenskaper er et viktig tema i faget Modellering og Simulering.



Figur 5.8: Realisasjon av systemet i Eksempel 25 i Simulink.



Figur 5.9: Simulering av systemet i 10 sekunder gir opphav til følgende respons.



Figur 5.10: I Configuration Parameters vinduet kan vi blant annet velge simuleringsmetode og sette skrittlengde.

Kapittel 6

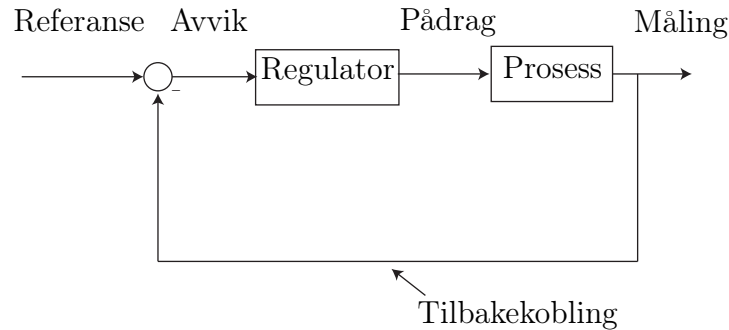
Innføring i reguleringssteknikk

6.1 Innledning

Systemene vi har studert til nå har vært gitt i utgangspunktet. Det vil si fysikken har vært gitt, og vi har regnet ut hvordan systemet vil oppføre seg. Reguleringssteknikk omfatter et sett med verktøy som tillater oss å endre på dynamikken til systemene slik at de oppfører seg slik vi vil. Dette gjelder både for transienter og for stasjonære tilstander. Et reguleringsystem er dermed en sammenkobling av komponenter som vil gi oss en ønsket (system) respons. På denne måten kan vi designe styringssystemer som regulerer for eksempel nivået i en tank eller hastigheten til et fartøy. En basis for analyse av reguleringsystemer og dynamiske systemer generelt vil gis i fagene Reguleringssteknikk og Lineære systemer.

Vi har til nå sett mange eksempler på helt forskjellige fysiske prosesser, mens vi har brukt samme type verktøy for å analysere modellene. Det samme gjelder for design av regulatorer, vi skal videre i kybernetikkstudiet lære om en mengde forskjellige metoder for dette, og de vil til dels være uavhengige av hva slags fysisk system vi skal regulere.

I enkelte tilfeller er det imidlertid slik at noen designmetoder har visse fordeler fremfor andre. Dette gjelder spesielt ulineære metoder som bruker fysikken og strukturen i systemet i design av regulatoren. For lineære systemer, eller lineariserte ulineære systemer, er det slik at metoden for design av regulator er uavhengig av fysikken til systemet vi skal regulere. Ulike typer begrensninger vil på den annen side komme inn i bildet: en ventil kan ikke åpnes mer enn så og så mye, det er begrenset hvor mye strøm, spenning eller



Figur 6.1: Generell tilbakekoblet prosess med regulator.

effekt vi kan tilføre, hastigheter er begrenset, og så videre.

6.2 Tilbakekobling

Vi har allerede sett at flere prosesser inneholder tilbakekobling. Både kokeplata og masse-fjær-demper systemet har slike naturlige tilbakekoblinger. Det viktigste verktøyet i reguleringssteknikken er å innføre kunstig *tilbakekobling*. Hensikten med dette er å endre systemets dynamikk slik at det oppfører seg slik vi vil. Tilbakekobling betyr da at vi måler en eller flere tilstander i systemet og sammenligner disse med en referanseverdi. Forskjellen, kalt reguleringsavviket, avviket, eller reguleringsfeilen, mellom disse størrelsene blir så brukt av en regulator til å beregne et pådrag til prosessen. Prinsippet er illustrert i Figur 6.1. Med tilbakekoblingen på plass sier vi at vi har *lukket reguleringsløyfen*. I motsatt fall snakker vi om en *åpen sløyfe*.

Et velkjent eksempel på dette er justering av temperaturen i en dusj. En vanlig fremgangsmåte er å måle temperaturen i vannet med hånden. Vi har en formening, referanse, om hvilken temperatur vi vil ha på vannet, og justerer på krana, pådraget, inntil disse to verdiene er like store, det vil si at vannet har den temperaturen vi vil ha. Det finnes også mange tilbakekoblede prosesser i biologien, hormonproduksjon og regulering av kroppens temperatur er typiske eksempler. Det mer generelle begrepet homeostase beskriver fenomenet regulering av en fysiologisk størrelse til å holde en konstant verdi selv om systemet utsettes for ytre påvirkninger eller forstyrrelser, altså et reguleringsystem.

6.2.1 P-regulator

Tilbakekobling brukes alltid sammen med en regulator. Den enkleste type regulator kalles for *P-regulator*. P'en står for proporsjonal, og betyr at pådraget beregnes som en konstant multiplisert med reguleringsavviket:

$$u = K (r - y), \quad (6.1)$$

der K er regulatorens forsterkning, r er referansen og y er målingen. Forsterkningen K velges når vi designer regulatoren for å få den oppførselen vi ønsker av systemet. Vi skal nå bruke P-regulator for å designe cruise-control for en bil:

Example 32 *Cruise control*, eller hastighetsholder på godt norsk, er en hastighetsregulator for biler. Funksjonaliteten er at man skal kunne sette en ønsket hastighet, altså en referanse, og at bilen skal holde denne hastigheten. Dette løses ved hjelp av tilbakekobling. Vi tar utgangspunkt i den modellen vi satte opp i Eksempel 4 for bilen:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u. \quad (6.2)$$

Vi bruker (6.1) og kombinerer med modellen (6.2) slik at vi får en differensialligning som beskriver modellen med regulator, det vil si lukket-sløyfedynamikken:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m} \underbrace{K(r - y)}_u.$$

For å realisere denne regulatoren, må vi måle hastigheten, det vil si $y = v$, slik at

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}K(r - v) \\ \dot{v} &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m}\right)v + \frac{K}{m}r \end{aligned} \quad (6.3)$$

Vi har nå endret dynamikken til bilmodellen og har en førsteordens differensialligning med

$$\begin{aligned} a &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m}\right) \\ b &= \frac{K}{m}r, \end{aligned}$$

der vi betraker r som en ny inngang til systemet. Ifølge (2.21) vil vi nå få følgende løsning på differensialligningen

$$v(t) = \frac{Kr}{K+k} \left(1 - e^{-\frac{1}{m}(k+K)t} \right). \quad (6.4)$$

For å sjekke hvordan cruise-controllen vår fungerer, vil vi nå beregne stasjonærverdien til hastigheten. Dette kan vi gjøre ved å sette $\dot{v} = 0$ i (6.3) eller undersøke hva v går mot når vi lar t bli veldig stor i ligning (6.4). Vi finner uansett at

$$v_{\text{stasjonær}} = \frac{Kr}{K+k}. \quad (6.5)$$

Ved å studere (6.5) ser vi at $v_{\text{stasjonær}}$ aldri vil bli lik r , men vi vil komme nærmere og nærmere jo høyere vi velger regulatorens forsterkning K . I Figur 6.2 er løsningen (6.4) plottet for ulike verdier av K , og som vi ser kommer vi nærmere og nærmere referansen. Avviket mellom stasjonærverdien som oppnås og den ønskede referansen kalles for **stasjonært avvik**. Som vi ser av figuren vil endring av forsterkningen føre til både endring i stasjonærverdien og i transienten til systemet. Jo høyere forsterkning vi velger, jo raskere oppnår hastigheten sin stasjonærverdi.

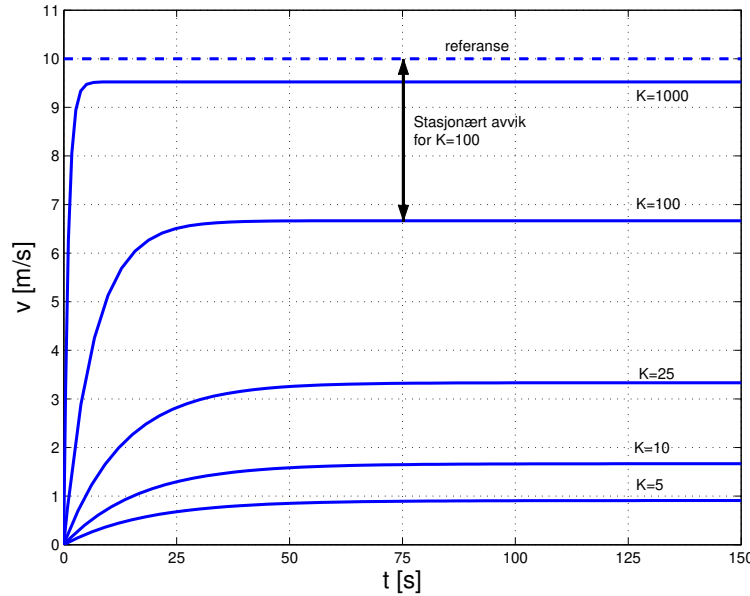
Det er ikke tilfredsstillende at hastigheten ikke oppnår sin referanseverdi, og regulatordesignet vårt kan ikke sies å være helt vellykket. En tilsynelatende løsning på dette problemet vil være å skru opp forsterkningen veldig mye slik at stasjonærverdien blir så og si lik referanseverdien, og stasjonærverdien vil i tillegg oppnås svært raskt. Et praktisk problem forhindrer imidlertid denne løsningen: nemlig begrensninger i pådraget. En forsterkning på $K = 1000$, vil gi et initielt pådrag på 10000 N , noe som er mye mer enn det motoren kan yte. Vi må derfor finne en annen løsning på dette problemet.

6.2.2 Integralvirkning, PI-regulator

Når vi bruker en P-regulator vil pådraget bli mindre og mindre jo nærmere målingen kommer referansen. Dette følger direkte av uttrykket for P-regulatoren

$$u = K(r - y).$$

Dette fører til at referansen aldri nås. Regulatorer med integralvirkning er en type regulator som ikke har denne egenskapen. Feilen $(r - y)$ integreres slik at pådraget vil ha en verdi forskjellig fra null selv om feilen blir null. Vi vil illustrere denne integrerende effekten med et eksempel



Figur 6.2: Hastigheten til bilen for ulike verdier av forsterkningen K .

Example 33 Ved å løse differensialligningen for nivået h i en tank med kun innstrømning w_{inn} , og ingen utstrømning

$$\dot{h} = kw_{inn}, \quad (6.6)$$

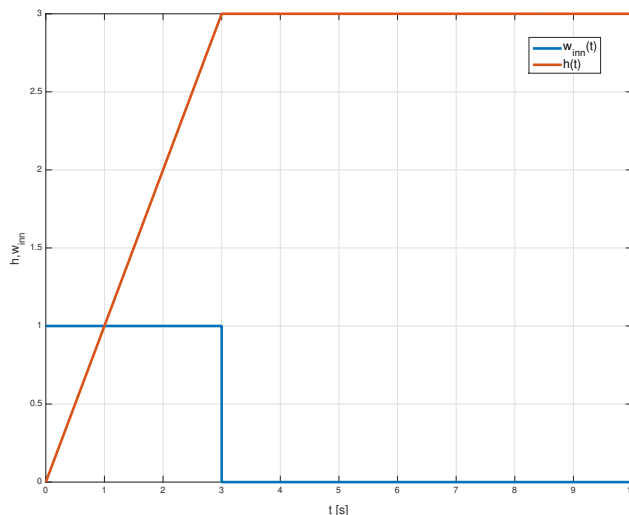
finner vi løsningen ved hjelp av en enkel integrasjon

$$h = k \int w_{inn} dt, \quad (6.7)$$

det vil si nivået er proporsjonalt med integralet av innstrømningen, eller som vi vet: når vi tapper i en vask så stiger nivået så lenge kranen er på! En simulering av et slikt system er vist i Figur 6.3, og som vi ser så er $h_s \neq 0$ selv om $w_{inn} = 0$ når $t > 3$, eller sagt på en enkel måte: når vi skrur igjen krana så forblir nivået der det var når vi skrudde igjen. Et slikt system eller prosess kalles for en integrerende prosess.

Bruken av integralvirkning slik som i en integrerende prosess vil løse problemet med stasjonært avvik. En PI-regulator vil ha formen

$$u = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (6.8)$$



Figur 6.3: Nivået i tanken er integralet av innstrømmingen.

der K_p er forsterkningen som før, mens K_i kalles integralforsterkningen. Fellesbetegnelsen for K_p og K_i er regulatorparametere. Ved å innføre integralvirkning har vi fått en integrator til i systemet, og vi har øket systemets orden fra første til andre. Det vil si at systemet vårt nå er beskrevet av en andre ordens differensialligning, eller to førsteordens, noe følgende eksempel illustrerer.

Example 34 *Forbedret cruise control for bil.* Ved å bruke regulatoren (6.8) i bilmodellen får vi følgende:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m} \left(K_p e + K_i \int_0^t e d\tau \right). \quad (6.9)$$

Dette er en ligning som inneholder både førsteordens deriverte og et integral, og dessuten opptrer både tilstanden v og avviket e . Vi kan skrive om dette til en andreordens differensialligning eller som to førsteordens ligninger. Først skal vi håndtere tilstanden v og avviket e . Aviket er gitt av

$$e = v_r - v, \quad (6.10)$$

der v_r er referansen. Vi antar at referansen er en konstant verdi, slik at $\dot{v}_r = 0$. Ligning (6.9) inneholder både deriverte og integraler, og vi ønsker å skrive dette som et sett av to første ordens differensialligninger. Av den grunn definerer vi

$$x_1 = \int_0^t e d\tau \quad (6.11)$$

og

$$x_2 = v. \quad (6.12)$$

Den tidsderivate av (6.11) er

$$\dot{x}_1 = e = v_r - v,$$

og den derivate av (6.12) skrives da som

$$\dot{x}_2 = \dot{v} \quad (6.13)$$

$$= -\frac{k}{m}x_2 + \frac{K_p}{m}(v_r - x_2) + \frac{K_i}{m}x_1. \quad (6.14)$$

Samlet kan bilsystemet nå skrives som

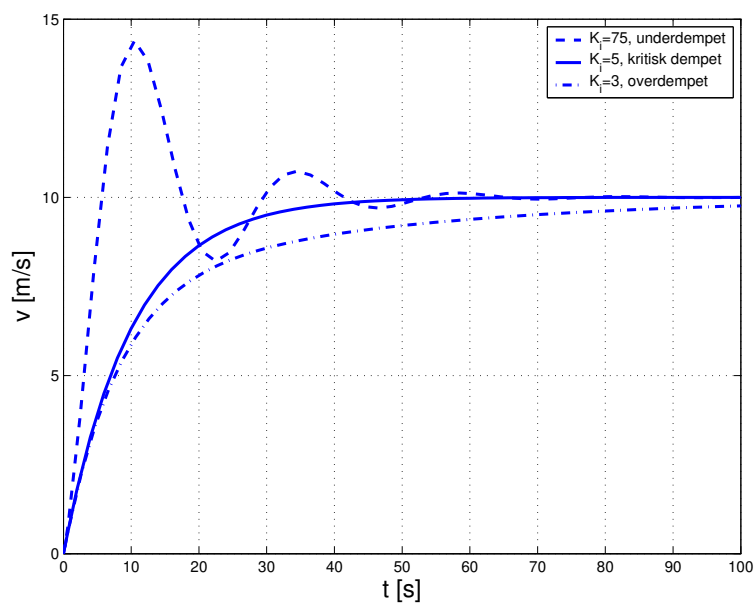
$$\dot{x}_1 = -x_2 + v_r \quad (6.15)$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{k + K_p}{m}\right)x_2 + \frac{K_i}{m}x_1 + \frac{K_p}{m}v_r. \quad (6.16)$$

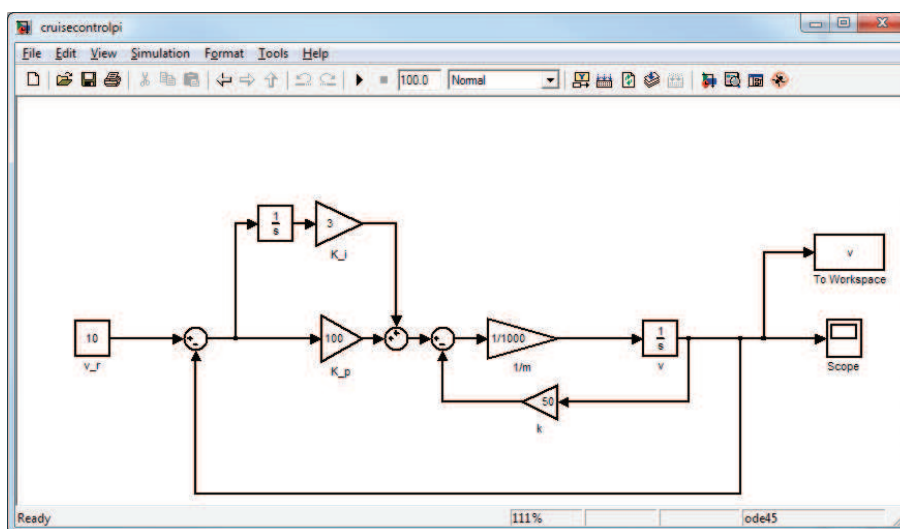
I ligning (6.16) kan vi kan kjenne igjen mye av strukturen fra ligning (6.3). Siden vi her har et andreordens system med et konstantledd (v_r), passer ikke denne ligningen rett inn i rammeverket for homogene andreordens differensialligninger. Med det vi har lært til nå kan vi ikke sette opp en eksakt løsning, men den kan lett simuleres for eksempel i Simulink. Et eksempel på hvordan denne simuleringen kan settes opp i Simulink er vist i Figur 6.5. Dette er også en blokkdiagramrepresentasjon av systemet (6.15)-(6.16). Resultater av en slik simulering er vist i Figur 6.4, der vi har brukt $K_p = 100$ i alle tre tilfellene, mens K_i har blitt variert. Vi ser de tre typene av andreordens transienter: underdempet, kritisk dempet og overdempet. I alle tilfellene blir ønsket hastighet nådd, men det er kvalitative forskjeller på transientene.

6.2.3 Damping, PD-regulator

I Eksempel 17 studerte vi dynamikken til en satellitt. Et konstant pådrag førte der til at vinkelen bare økte og økte, dvs satellitten gikk i spinn. Dette er et problem som kan løses på flere måter.



Figur 6.4: Cruisecontrol med PI-regulator.



Figur 6.5: Simulink-diagram av cruise control eksempelet.

For det første er det ikke fornuftig å sette på et konstant pådrag på en av thrusterne til satellitten, men selv om vi bare ga et kort “støt”, ville satellitten allikevel fortsette å rotere. Ved å bygge inn en ringformet tank fylt med væske inne i satellitten vil denne rotasjonen kunne dempes. Dette er rotasjonsvarianten av demperen vi hadde i masse-fjær-demper systemet, og romfartøyer og satellitter ble, i hvert fall tidligere, utstyrt med slike dempere. Dette er en robust måte å gjøre det på og sjansene for feil er små. En alternativ metode er å innføre denne dempingen kunstig, ved hjelp av en regulator, noe vi skal se på i neste eksempel.

Example 35 *Modellen for rotasjon om en akse for en satellitt var gitt av ligningen*

$$J\ddot{\theta} = F_t d,$$

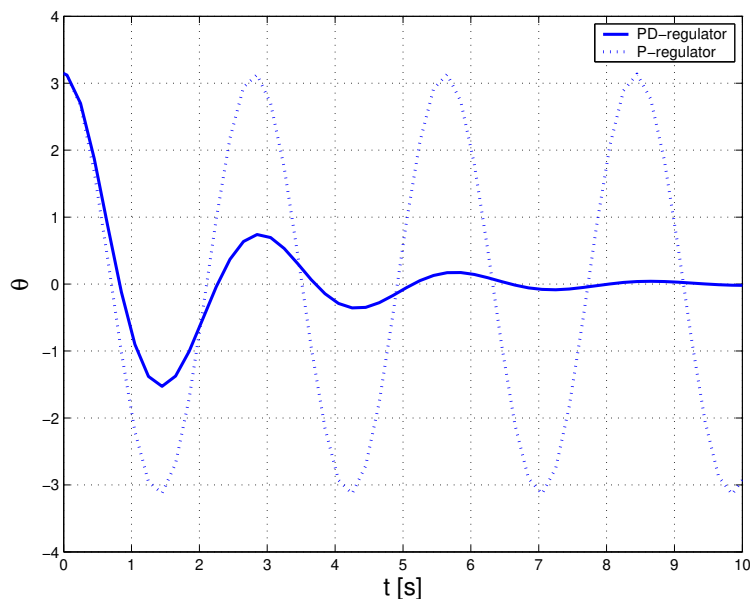
der F_t er kraften fra thrusteren. Denne kraften bruker vi som pådrag, slik at vi setter $u = F_t$. Vi prøver først en P -regulator, det vil si uten demping, med tilbakekobling fra vinkelen θ slik at

$$u = K_p (\theta_r - \theta)$$

der θ_r er referansen. Vi antar her at satellitten i utgangspunktet har en vinkel $\theta = \pi$, og at målet vårt er å styre mot referansen $\theta_r = 0$. P -regulatoren gir responsen som er plottet med stiplet linje i Figur 6.6. Dette er for såvidt en forbedring fra bruken av konstant pådrag, men satellitten oppfører seg nå som en pendel som svinger frem og tilbake. Utslaget til pendelbevegelsen er gitt av initialtilstanden. Dette er et eksempel på et svingesystem eller en oscillator. Hvis satellitten hadde vært utstyrt med en demper ville vi hatt et ledd av typen $K_d \dot{\theta}$ i **modellen**. Legg merke til at dette er helt analogt med demperen fra masse-fjær-demper systemet. Istedenfor å bygge demperen fysisk, kan vi inkludere et ledd av denne typen i **regulatoren** slik at

$$u = K_p (\theta_r - \theta) + K_d (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}), \quad (6.17)$$

der vi har i tillegg koblet tilbake fra den deriverte av θ . Hvis vi har konstant referanse, vil $\dot{\theta}_r = 0$. Vi har her innført en ny regulatorparameter K_d . Regulatoren (6.17) er kjent som en PD -regulator, der D 'en står for derivat, og vi sier at regulatoren har derivatvirkning. Som vi ser at den heltrukne linjen i Figur 6.6, så svinger nå satellitten seg inn til referanseverdien av vinkelen. Sammenlign dette med responsen til masse-fjær-demper systemet. Dette er et



Figur 6.6: Styring av orientering for satellitt

underdempet system, og ved å øke verdien til K_d kunne vi oppnådd et kritisk- eller overdempet system. Dette kunne vært gjort hvis det for eksempel hadde vært et krav om at vi ikke kunne ha svingninger i systemet. Løsningene i dette eksempelet er generert med Simulink modellen i Figur 6.7.

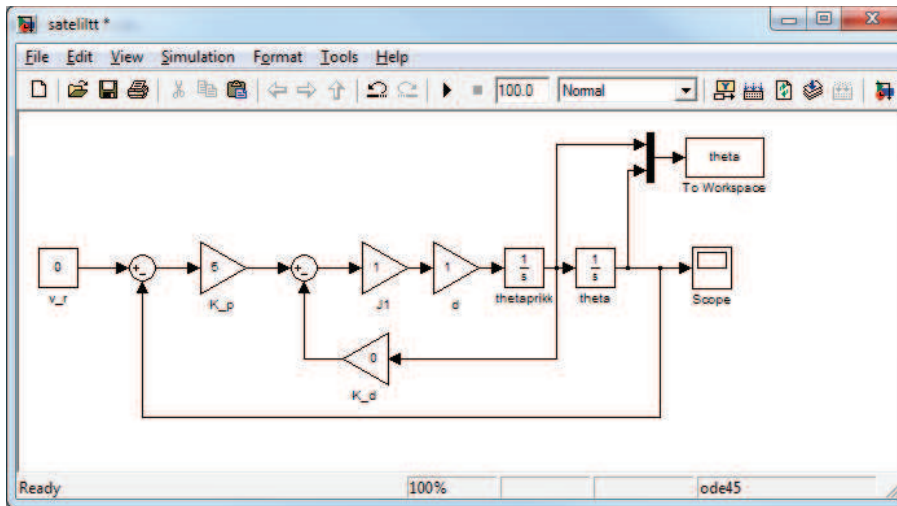
Som vi har sett over vil D-virkning forsyne systemet med mer damping. D-virkningen vil også ha den effekt at pådraget vil reagere raskere på endringer i feilen (eller i målingen eller i referansen, siden $e = r - y$), siden pådraget nå er proporsjonalt med den deriverte av feilen, \dot{e} .

Det er viktig å være klar over at hvis vi har mye målestøy, så kan D-virkning gi noen uønskede effekter. Spesielt er dette tilfelle hvis støyen er høyfrekvent, det vil si den varierer hurtig. Dette kan illustreres ved at vi ser på signalet

$$v(t) = a \sin(\omega_v t), \quad (6.18)$$

der a er amplituden og ω_v er frekvensen til dette sinussignalet. Hvis vi har målestøy som oppfører seg som dette, og bruker D-virkning, så vil støyen bli derivert. Vi ser av

$$\dot{v}(t) = a\omega_v \cos(\omega_v t) \quad (6.19)$$



Figur 6.7: Simulink-diagram for satellitt eksempelet.

at amplituden til det deriverte signalet er blitt multiplisert, eller forsterket, med ω_v . Dette viser at hvis ω_v er stor, så vil vi kunne få et veldig stort pådrag, noe som vi skal se senere kan føre til andre problemer.

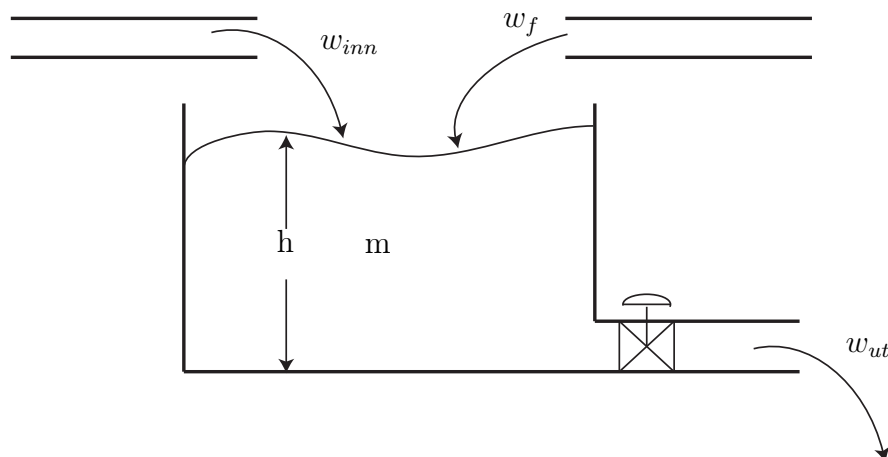
Vi har nå sett på tre typer regulatorer: P-regulator, PD-regulator og PI-regulator. Disse typene kan skrives på samlet form som

$$u = K_p e + K_i \int e dt + K_d \dot{e}. \quad (6.20)$$

Regulatoren (6.20) kalles en PID-regulator, og er den meste brukte regulatorstrukturen i regulerings teknikken. Den har anvendelser innen alle områder, som for eksempel prosessindustrien, olje og gass-industrien, robotstyring, fartøystyring og så videre.

6.3 Foroverkobling

Eksemplene vi har sett på til nå har stort sett vært uten en type fenomener kjent som forstyrrelser. I nivåreguleringseksempelet vil vi kunne kalle en inn- eller utstrømning vi ikke har kontroll på for en forstyrrelse, i bileksempelet kan vi se på varierende luftmotstand som en forstyrrelse og i satellittstyrings-eksempelet vil solvindens trykk på solcellepanelene faktisk være en forstyrrel-



Figur 6.8: To komponenter blandes i en tank. Massestrømmen til den ene komponenten er pådraget vårt, mens den andre massestrømmen betraktes som en forstyrrelse.

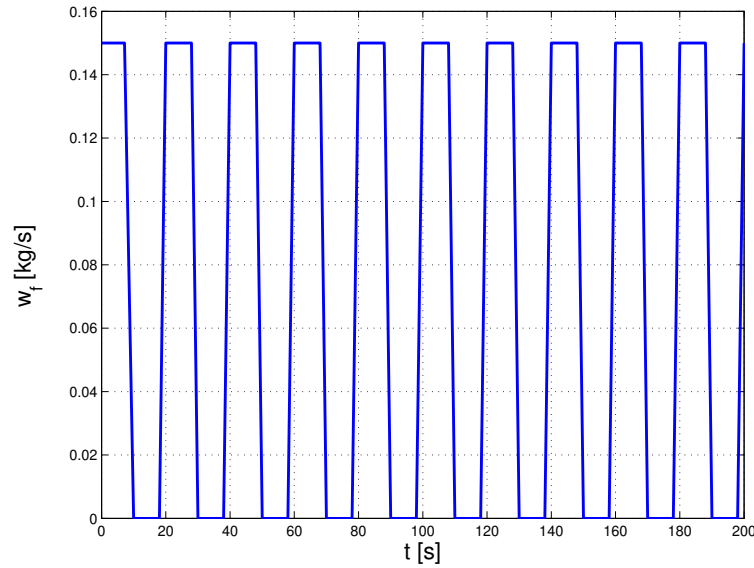
se man må ta hensyn til. For de fleste reguleringsystemer må forstyrrelsene tas med i betraktning når regulatorer designes. Vi skal her se på en svært enkel og intuitiv metode for håndtering av forstyrrelser: *foroverkobling fra forstyrrelsen*. Denne metoden forutsetter at man kjenner forstyrrelsen, og at den kan måles. I mange tilfeller er dette mulig, noe vi skal se på i et eksempel.

Example 36 Gitt en tank som skal nivåreguleres. Tanken er den samme som i Eksempel 5, der vi fant følgende modell for nivået i tanken.

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A},$$

der $u = w_{inn}$ er pådraget. Nå har vi i tillegg en forstyrrelse i form av en innstrømning vi ikke har direkte styring på. Dette kan for eksempel være et prosessanlegg der to ingredienser eller komponenter skal blandes, se Figur 6.8.

Hvis den nye innstrømningen hadde vært konstant, kunne vi kompensert for den ved å bruke en PI-regulator. Dette gjelder generelt: konstante forstyrrelser kan motvirkes av integralvirkning i regulatoren. I dette eksempelet varierer imidlertid forstyrrelsen med tiden, slik at vi vil bruke **foroverkob-**



Figur 6.9: Massestrømmen w_f . Dette kalles også en firkantpuls.

ling for å kompensere for den. Med forstyrrelse blir modellen nå

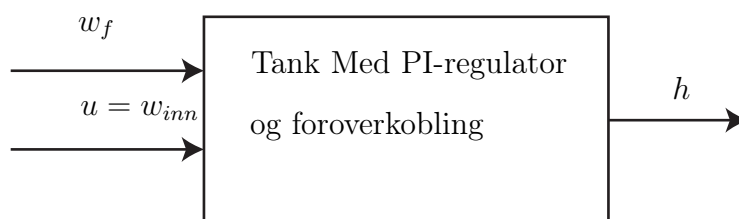
$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A} + \frac{w_f}{\rho A},$$

der w_f er forstyrrelsen. Forstyrrelsen er en massestrøm som varierer mellom 0 kg/s og 0.15 kg/s som vist i Figur 6.9. For å unngå stasjonært avvik, bruker vi en PI-regulator med foroverkobling fra forstyrrelsen:

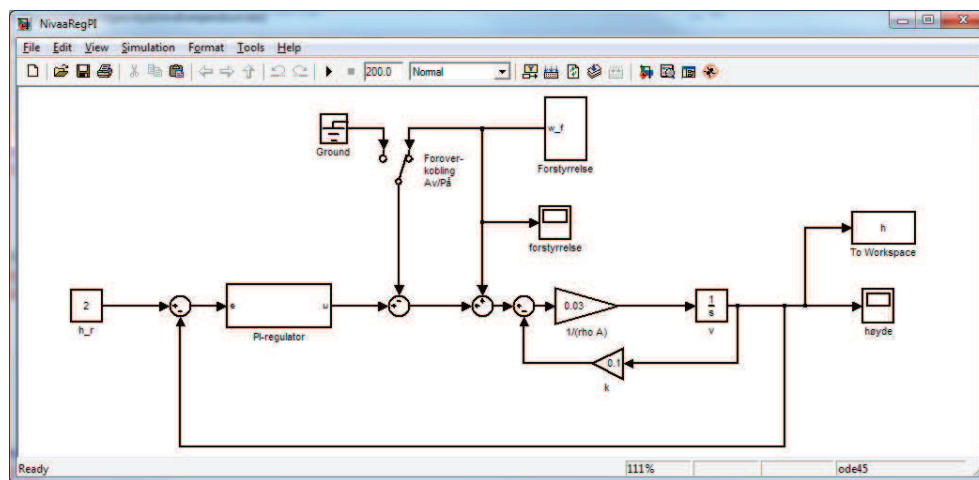
$$u = K_P(h_r - h) + K_i \int (h_r - h)dt - w_f, \quad (6.21)$$

der h_r er referansenivået. Foroverkoblingen består i at vi plusser på w_f på pådraget. Siden $u = w_{inn}$, ser vi at foroverkoblingen fjerner forstyrrelsen w_f fra ligningen. Vi har nå et system med to innganger og en utgang som vist i Figur 6.10. Simulinkdiagram for modellen og regulatoren er vist i Figur 6.11. Simulering med og uten foroverkobling er vist i Figur 6.12.

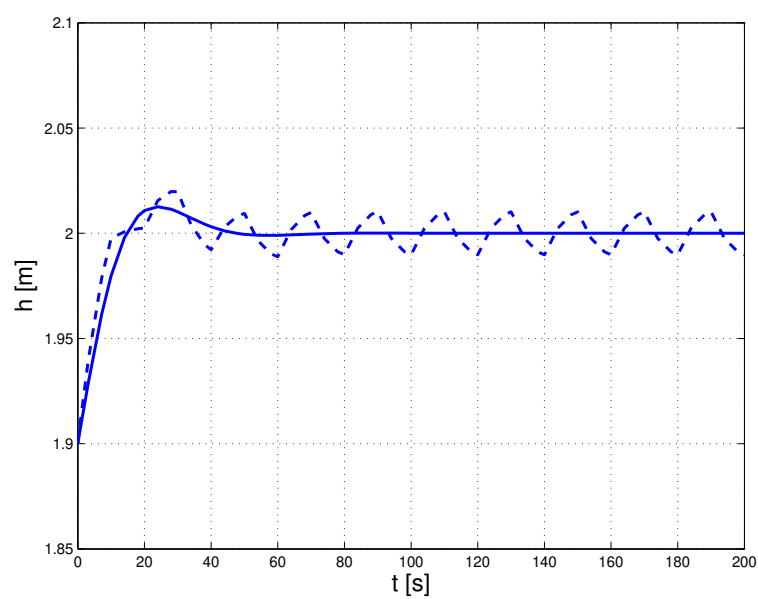
Eksempelet som ble gitt her er meget enkelt; i mange tilfeller vil det være dynamikk mellom forstyrrelsen og pådraget, eller det er dynamikk i



Figur 6.10: Tankmodellen med nivåreguleringen er en prosess med to innganger og en utgang.



Figur 6.11: Simulink-diagram for nivåregulering med PI-regulator. Bryteren brukes til å skru foroverkoblingen fra forstyrrelsen av og på.



Figur 6.12: Nivået i tanken regulert med PI-regulator med (heltrukket) og uten (stiplet) foroverkobling fra forstyrrelsen.

måleinstrumentet som måler forstyrrelsen. Alt dette kan tas hensyn til ved design av foroverkoblingen.

Nøkkelen til suksess i eksempelet over er at vi her kjente forstyrrelsen og kunne inkludere w_f i regulatoren (6.21). I andre tilfeller kjenner vi ikke forstyrrelsene, eller de er ikke målbare. Da må man designe regulatorer som kan undertrykke forstyrrelsene selv om de er ukjente. En annen løsning er å designe en estimator som beregner et estimat av forstyrrelsen og bruker denne verdien i regulatoren. Estimering er en viktig del av reguleringssteknikken. Dette temaet tas blant annet opp i faget TTK4115 Lineær systemteori, men brukes også mye i andre fag som for eksempel TTK4190 Fartøystyring og TTK4135 Optimalisering og regulering. Det er også mulig med andre typer foroverkoblinger, for eksempel foroverkobling fra referansen. Dette vil bli grundig behandlet i faget TTK4105 Reguleringsteknikk .

6.4 Tidsforsinkelse

Tidsforsinkelse (også kjent som transportforsinkelse eller dødtid) opptrer ofte i reguleringsystemer, både i prosessene og fra forsinkelser i prosessering av målte signaler. I kjemiske prosesser har vi ofte tidsforsinkelser som representerer transporttid i rør. Det vil også være tidsforsinkelse knyttet til andre former for transport, som for eksempel på transportbånd som vist i Figur 6.13.

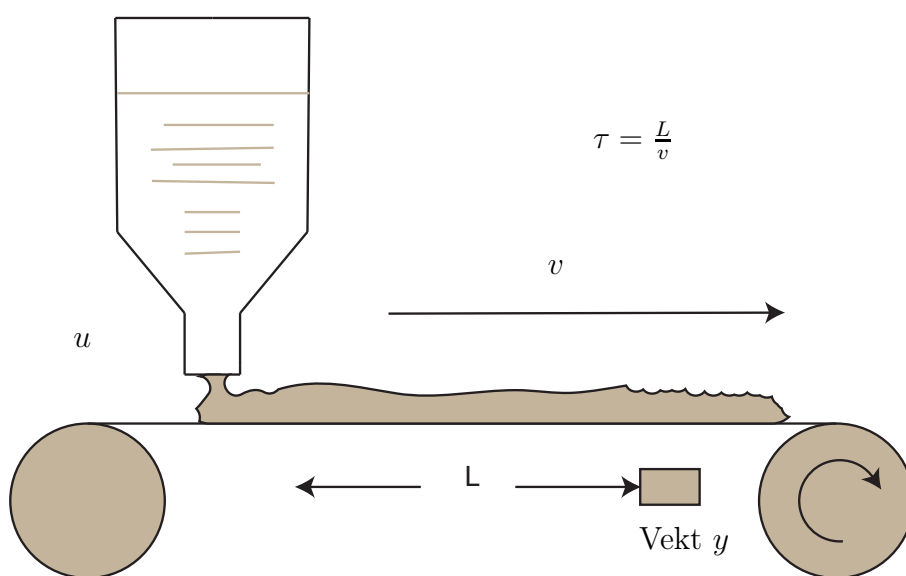
Videre vil det være en viss tidsforsinkelse knyttet til prosesseringstid i datamaskiner og prosessorer. Tidsforsinkelse påvirker *alltid* responsen og stabiliteten (som vi skal lære om i neste kapittel) til et system, og det er derfor viktig å analysere den. Hvis et signal $u(t)$ er forsinket med τ sekunder skrives dette som $u(t - \tau)$, eller i et dynamisk system

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t - \tau). \quad (6.22)$$

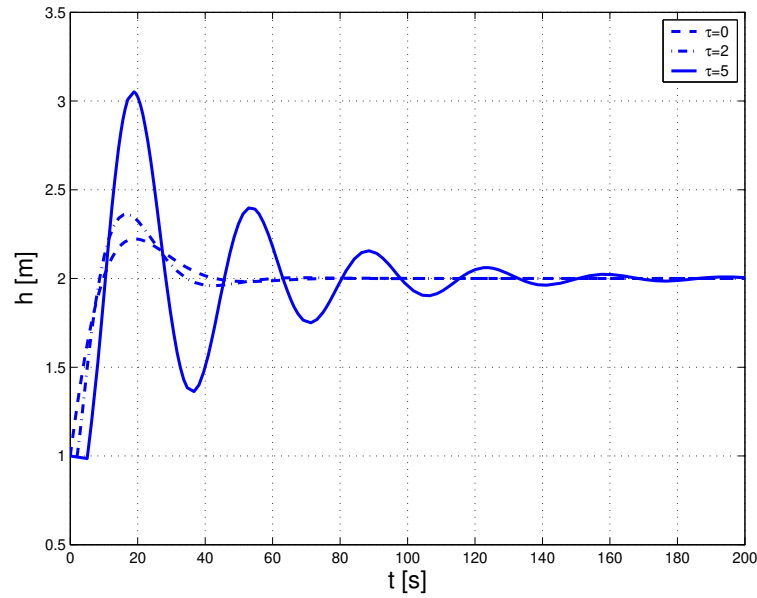
Legg merke til at systemet (6.22) fortsatt er et lineært system.

Example 37 *Vi skal se på nivåreguleringsproblemet igjen. Vi antar nå at det er en viss transporttid i røret som transporterer den massestrømmen vi har styring på. Det vil si det tar τ sekunder før pådraget vårt påvirker prosessen. transportforsinkelse i rør kan beregnes som*

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{AL}{q} = \frac{\rho AL}{w},$$



Figur 6.13: Transportforsinkelse mellom pådrag u og måling y .



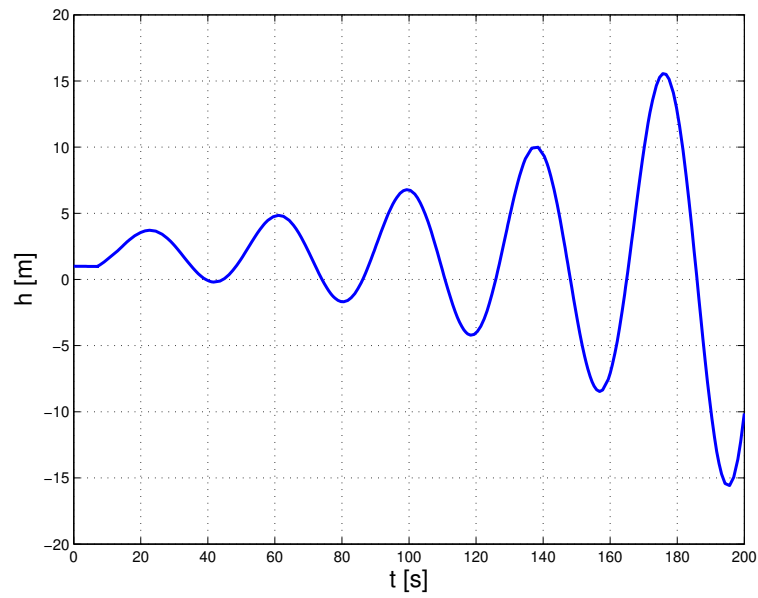
Figur 6.14: Nivået i tanken med tre forskjellige verdier av τ .

der L er lengden av røret, v er hastigheten til strømmingen i m/s, A er tverrsnittsarealet til røret, q er volumstrøm i m^3/s , ρ er tetthet i kg/m^3 og w er massestrømmen i m^3/s . Vi antar nå at vi ikke har forstyrrelse eller foroverkobling slik at modellen blir

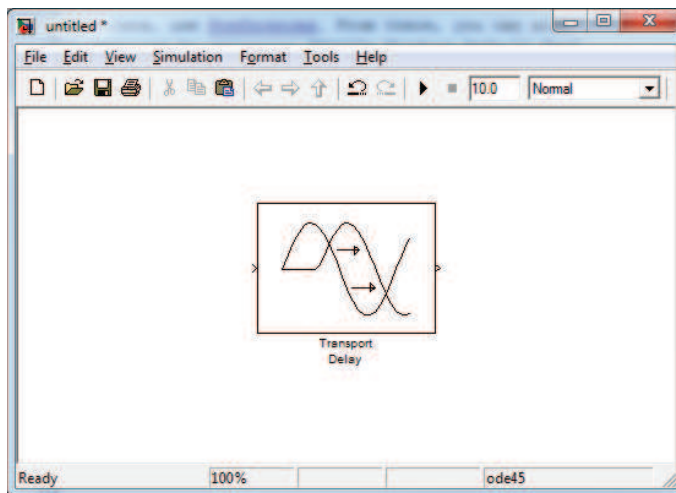
$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}(t - \tau)}{\rho A}.$$

Denne modellen er simulert for forskjellige verdier av rørlengden L , noe som gir forskjellige verdier for τ . Resultatet er vist i Figur 6.14 og som vi ser så vil reguleringsystemet få stadig mer problemer med å holde referansenivået i tanken ettersom tidsforsinkelsen øker. Hvis tidsforsinkelsen økes utover en kritisk verdi, vil ikke referansenivået oppnås i det hele tatt, noe som er vist i Figur 6.15.

I Simulink legger vi inn tidsforsinkelse med **Transport-Delay** blokken som er vist i Figur 6.16. Denne finnes under **Simulink**→**Continuous** i Library Browseren.



Figur 6.15: Nivået i tanken med en transportforsinkelse på $\tau = 7$.



Figur 6.16: Tidsforsinkelsesblokken i Simulink

6.5 Valg av regulatorparametere

Vi vil nå se på hvordan vi kan velge fornuftige verdier for regulatorparametrene K_p , K_i og K_d i PID-regulatorer. Prosessen med å finne disse parametrene kalles for tuning.

6.5.1 Polplassering

Denne metoden går ut på å velge regulatorparametrene slik at vi bestemmer verdien på løsningene til systemets karakteristiske ligning. Vi skal se dette anvendt på et system av andre orden, men metoden er generell og kan brukes på systemer av vilkårlig orden. Gitt systemet

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = u \quad (6.23)$$

med PD-regulatoren

$$u = K_px + K_d\dot{x}. \quad (6.24)$$

Generelt ville vi hatt $u = K_pe + K_d\dot{e}$ der $e = y - r$, men nå har vi for enkelhets skyld valgt $y = x$ og $r = 0$. Problemet vi skal finne svar på er følgende: Velg K_p og K_d slik at systemet

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + \omega_o^2x = K_px + K_d\dot{x}, \quad (6.25)$$

det vil si systemet i lukket sløyfe, får udeмпet resonansfrekvens gitt av $\hat{\omega}_0$ og relativ dempingsgrad gitt av $\hat{\zeta}$. Systemet kan nå skrives som

$$\ddot{x} + \underbrace{(2\zeta\omega_o - K_d)}_{2\hat{\zeta}\hat{\omega}_0}\dot{x} + \underbrace{(\omega_o^2 - K_p)}_{\hat{\omega}_0^2}x = 0. \quad (6.26)$$

Vi har nå at $\omega_o^2 - K_p = \hat{\omega}_0^2$, hvilket betyr at vi skal velge K_p slik at

$$K_p = \omega_o^2 - \hat{\omega}_0^2. \quad (6.27)$$

Videre ser vi at $2\zeta\omega_o - K_d = 2\hat{\zeta}\hat{\omega}_0$, hvilket betyr at vi skal velge K_d slik at

$$K_d = 2\left(\zeta\omega_o - \hat{\zeta}\hat{\omega}_0\right). \quad (6.28)$$

Metoden kan anvendes til å tilorde de egenskapene vi vil til det endelige systemet, men et mye brukt valg er å velge regulatorparametere slik at systemet får kritisk demping. Vi velger da $\hat{\zeta} = 1$. Grunnen til dette er at vi da får et raskest mulig system, men som ikke har svingninger. Vi skal illustrere dette gjennom et eksempel

Example 38 Modellen for det aktive fjæringssystemet i en bil er gitt av

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = u, \quad (6.29)$$

der $\omega_0 = 5\text{rad/s}$ og $\zeta = 0.9$. Under visse forhold kan systemet utsettes for forstyrrelser med frekvens rundt resonansfrekvensen. For eksempel kan bilen kjøre på en humpet veg med en slik fart at vibrasjonene som oppstår har en frekvens i nærheten av ω_0 . Disse forstyrrelsene vil da forsterkes, men dette kan unngås ved riktig valg av regulatorparametrene K_p og K_d . Vi skal nå finne disse parametrene slik at resonansfrekvensen blir flyttet til $\hat{\omega}_0 = 10\text{rad/s}$ og at systemet får kritisk demping.

$$\begin{aligned} K_p &= \omega_0^2 - \hat{\omega}_0^2 = 5^2 - 10^2 = -75 \\ K_d &= 2(\zeta\omega_0 - \hat{\zeta}\hat{\omega}_0) = 2(0.9 \cdot 5 - 1 \cdot 10) = -11 \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.5.2 Ziegler-Nichols' metoder

Disse metodene ble først publisert i artikkelen [Ziegler and Nichols, 1942]. De to metodene gir oppskrifter for hvordan man finner fornuftige regulatorparametre for regulatorer av typen P, PI og PID. Regulatoren har formen

$$u = K_p \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e d\tau + T_d \dot{e} \right), \quad (6.31)$$

der $e = r - y$. Sammenlignet med vår tidligere fremstilling av PID-regulatoren i (6.20), vil nå

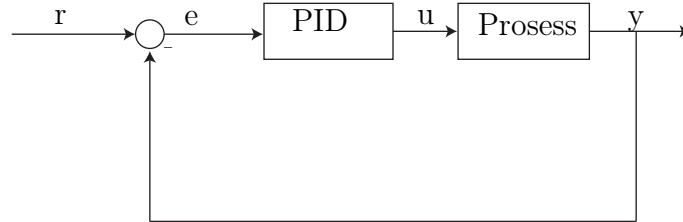
$$K_i = \frac{K_p}{T_i}, \quad K_d = K_p T_d. \quad (6.32)$$

Metodene baseres på bruk av simuleringer eller eksperimenter.

Ziegler-Nichols' lukket sløyfe metode

Metoden tar utgangspunkt i et system der man har en PID-regulator koblet til en prosess som vist i Figur 6.17. For å finne parameterne simulerer man systemet, eller eventuelt gjør eksperimenter, og følger følgende oppskrift:

1. Sett $K_i = K_d = 0$ og velg K_p liten
2. Sett på et sprang i referansen, det vil si legg inn en endring fra $r = 0$ til $r = \text{konstant}$



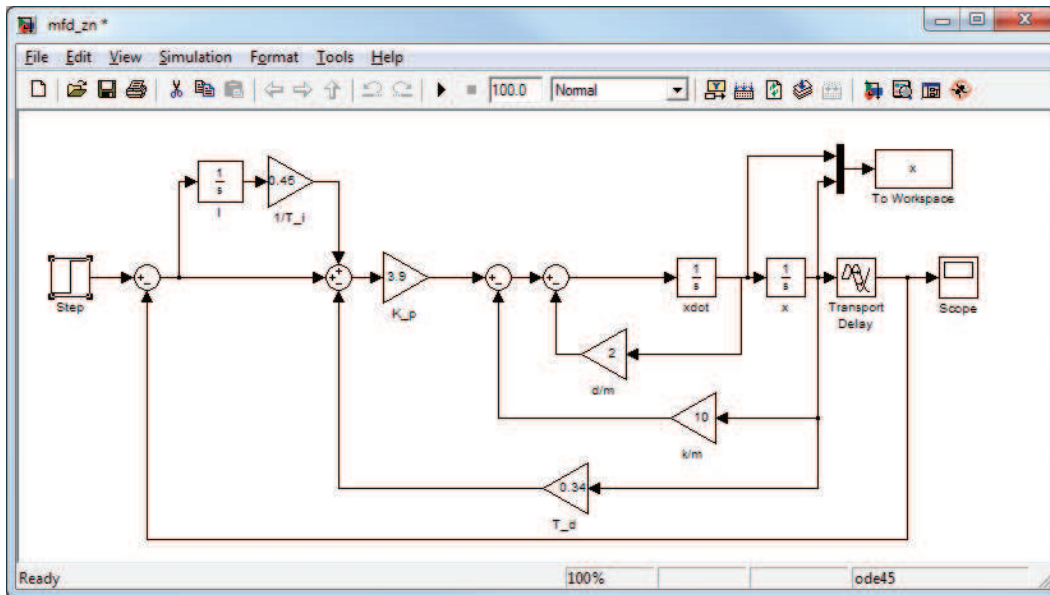
Figur 6.17: Prosess med PID-regulator.

3. Øk verdien på K_p inntil det oppstår stående svingninger i systemet. Skriv ned den kritiske forsterkningen K_{pk} , regulatorforsterkningen som fikk svingningene til å oppstå, og perioden til svingningene, kalt den kritiske perioden T_k .
4. Beregn K_p , K_i og K_d etter tabellen

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.4K_{pk}$	$0.8T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.125T_k$

Legg merke til at systemet må være av en slik type at stående svingninger kan oppstå ved bruk av P-regulator. Som vi har sett, utelukker dette systemer av første orden, og også andreordens systemer. Vi skal derfor anvende metoden på et system av andre orden med tidsforsinkelse i et eksempel

Example 39 Vi skal nå simulere masse-fjær-demper systemet, men for å få til stående svingninger, har vi også lagt til en tidsforsinkelse på ett sekund. Simulink-diagrammet for dette systemet er vist i Figur 6.18. Legg merke til hvordan PID-regulatoren er implementert. I-leddet er konstruert ved å innføre en integrator, mens D-leddet er implementeres ved å koble tilbake fra \dot{x} . Grunnen til dette er at vi ikke ønsker å innføre en derivasjon i regulatoren. Vi følger oppskriften over, og setter først $K_i = K_d = 0$ og velger $K_p = 0.5$. Simuleringen av dette er vist i Figur 6.19. Deretter økes K_p inntil vi får svingninger. I dette tilfellet gir $K_p = 6.5$ stående svingninger. Vi setter derfor $K_{pk} = 6.5$. De stående svingningene er vist i Figur 6.20. Den kritiske perioden avleses til å være $T_k = 2.75s$. Vi bruker nå tabellen til å regne ut



Figur 6.18: Simulink diagram for masse-fjær-demper system med PID regulator

parametrene for de tre regulatorene:

$$P\text{-regulator: } K_p = 0.5 \cdot 6.5 = 3.25$$

$$PI\text{-regulator: } K_p = 0.4 \cdot 6.5 = 2.6$$

$$T_i = 0.8 \cdot 2.75 = 2.2$$

$$PID\text{-regulator } K_p = 0.6 \cdot 6.5 = 3.9$$

$$T_i = 0.5 \cdot 2.75 = 1.38$$

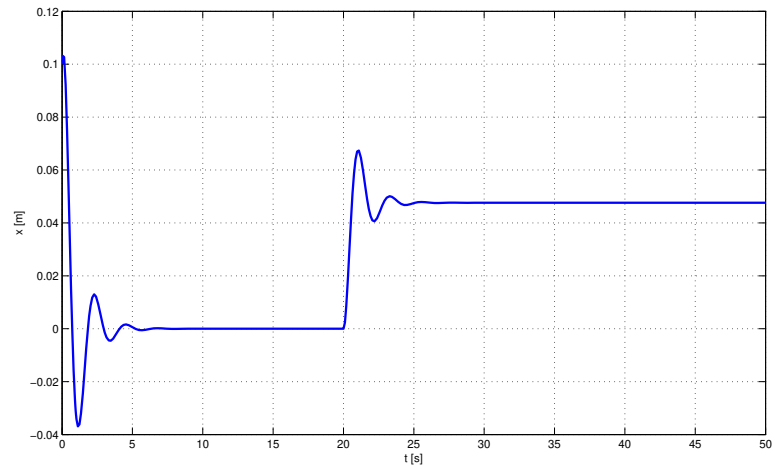
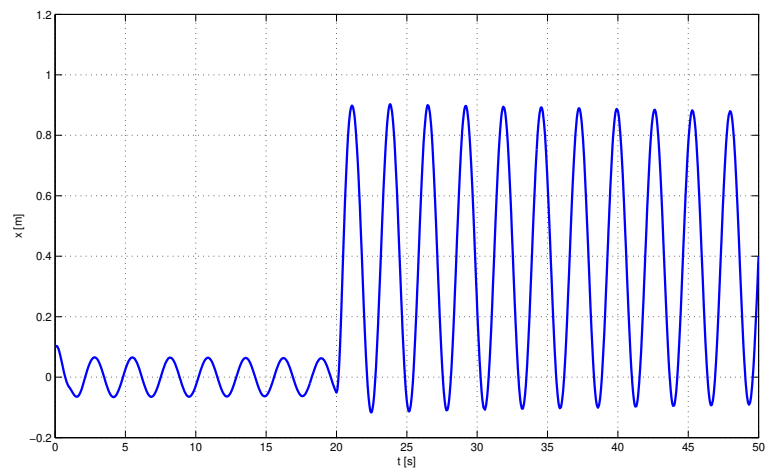
$$T_d = 0.125 \cdot 2.75 = 0.34$$

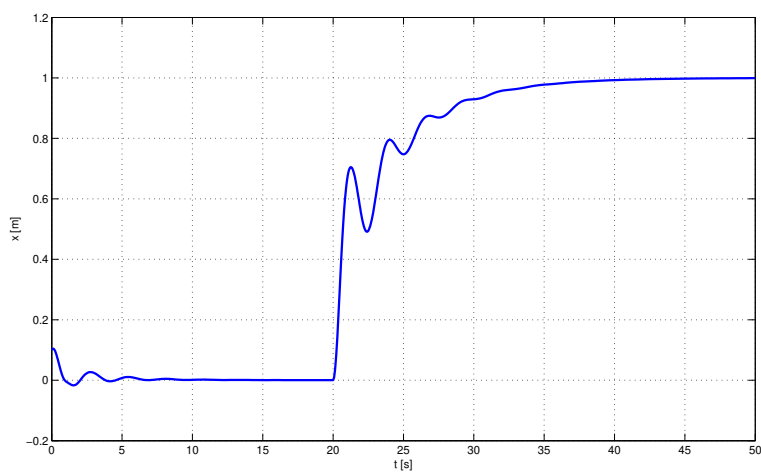
Simuleringen for systemet med PID-regulator er vist i Figur 6.21.

Ziegler-Nichols' åpen sløyfe metode

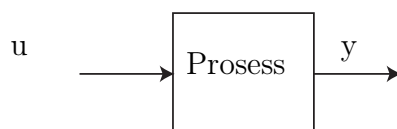
Denne metoden tar utgangspunkt i et system der man ikke har koblet til en regulator til prosessen som vist i Figur 6.22. For å finne parameterne simulerer man systemet (evt gjør eksperimenter) og følger følgende oppskrift:

1. Sett systemet i åpen sløyfe, det vil si koble fra eventuelle regulatorer og tilbakekoblinger

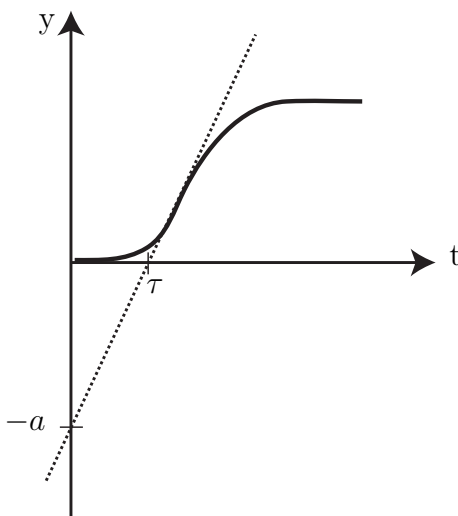
Figur 6.19: P-regulator med $K_p = 0.5$ Figur 6.20: Stående svingninger når $K_p = 6.5$



Figur 6.21: Masse-fjær-demper system med PID-regulator tunet etter Ziegler-Nichols' metode



Figur 6.22: Prosess for Ziegler-Nichols' åpen sløyfe metode



Figur 6.23: Sprangrespons for bruk i Ziegler-Nichols' åpne sløyfe metode

2. Sett på et enhetssprang i pådraget, det vil si legg inn en endring fra $u = 0$ til $u = 1$
3. Tegn på en tangent i vendepunktet til sprangresponsen. Les av skjæringspunktet $-a$ og dødtiden τ for tangenten slik som på figur 6.23
4. Beregn K_p , K_i og K_d etter tabellen

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$1/a$	∞	0
PI	$0.9/a$	3τ	0
PID	$1.2/a$	2τ	0.5τ

Kapittel 7

Stabilitet

7.1 Definisjon

Vi har nå begynt å se på hvordan reguleringsteknikk for å designe regulatoren som styrer systemets tilstander til ønsket verdi, eller sørger for at en utgang følger en referanse. Et annet vesentlig poeng er at systemet er *stabilt*. Dette er en grunnleggende egenskap for et reguleringssystem. Stabilitet er et svært viktig begrep og vil dukke opp i fag som Reguleringsteknikk, Lineær systemteori, Ulineære systemer og fagene i fjerde klasse. Stabilitet er et omfattende tema som vil bli utførlig behandlet i disse senere fagene.

Det finnes mange typer stabilitet for dynamiske systemer, og vi skal ikke gå i stor detalj her, men det er viktig med en klar og presis definisjon. Denne definisjonen er hentet fra [Khalil, 2002], som er læreboken i Ulineære systemer.

Anta at vi har et dynamisk system på formen

$$\dot{x} = f(x), \tag{7.1}$$

og anta at \bar{x} er et likevektspunkt for (7.1), det vil si $f(\bar{x}) = 0$. Systemet (7.1) kan være en matematisk modell av et fysisk system, eller en prosess og en regulator i lukket sløyfe. Vi skal nå studere stabiliteten til likevektspunktet \bar{x} . For enkelhets skyld antar vi at $\bar{x} = 0$. Definisjonen blir ikke mindre generell for det, siden vi alltid kan forskyve likevektspunktet til origo ved hjelp av et variabelskifte. Anta for et øyeblikk at $\bar{x} \neq 0$. Anta videre at vi gjør et variabelskifte

$$y = x - \bar{x}.$$

Den tidsderiverte av y er gitt av

$$\dot{y} = \dot{x},$$

siden \bar{x} er konstant. Vi har derfor

$$\dot{y} = f(x) = f(y + \bar{x}) \triangleq g(y), \text{ der } g(0) = 0.$$

I den nye variabelen y har systemet et likevektspunkt i origo. Derfor kan vi uten tap av generalitet anta at $\bar{x} = 0$ og studere stabiliteten til origo $x = 0$.

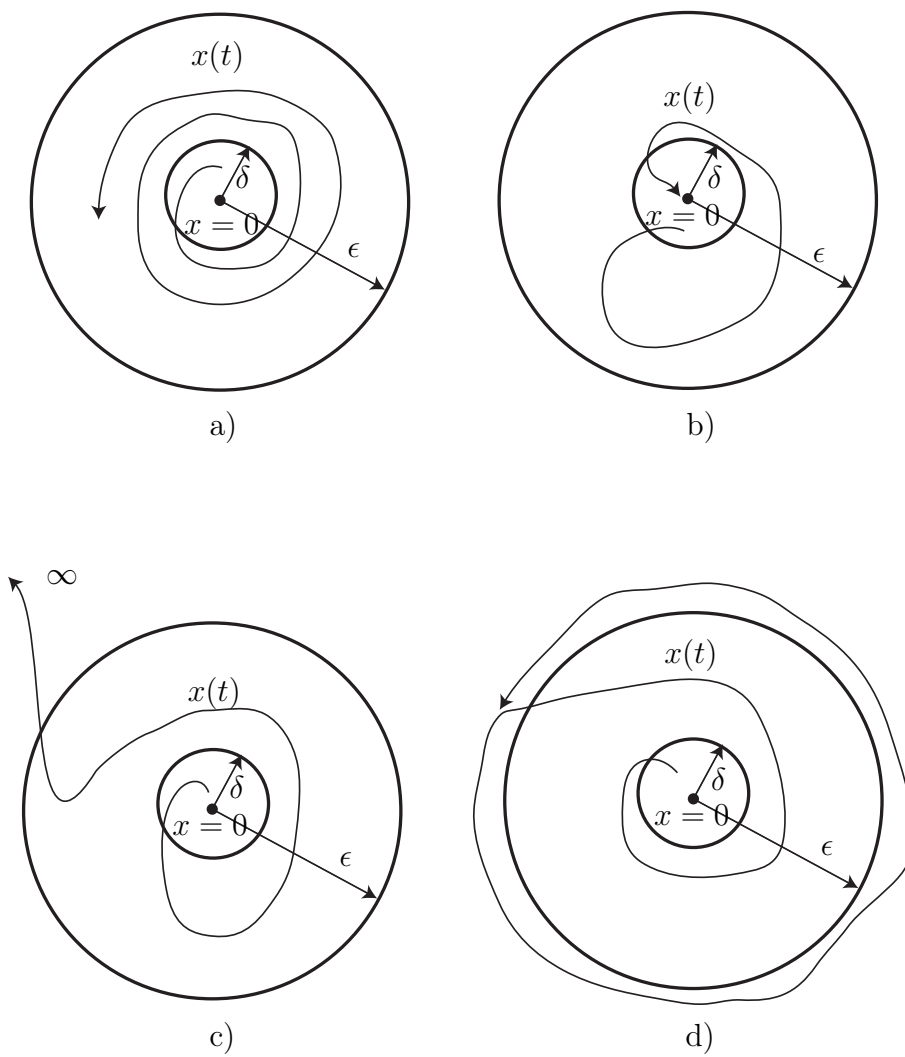
Definition 40 *Likevektspunktet $x = 0$ til (7.1) er*

1. *stabilt* hvis det, for enhver $\varepsilon > 0$, finnes en $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ slik at $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ ¹
2. *asymptotisk stabilt* hvis det er stabilt og δ kan velges slik at $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
3. *ustabilt* hvis det ikke er stabilt

I figur 7.1 er disse tre forskjellige typene av stabilitet illustrert. I figur a) ser vi en løsning som initielt, det vil si for $t = 0$, starter innenfor en sirkel med radius δ , og dermed har vi at $\|x(0)\| < \delta$. Etter som tiden går holder tilstanden $x(t)$ seg innenfor sirkelen med radius ε , og følgelig er $\|x(t)\| < \varepsilon$, og likevektspunktet er stabilt i henhold til definisjon 40 punkt 1. I figur b) er likevektspunktet stabilt, og i tillegg går $x \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$, slik at likevektspunktet er asymptotisk stabilt. I figur c) ser vi at systemet ikke er stabilt, og er derfor ustabilt i henhold til definisjon 40 punkt 3. I figur d) er det vist en ulineær grensesvingning. Dette fenomenet skal vi komme tilbake til.

Remark 41 *Den praktiske tolkningen av stabilitet er at hvis tilstanden initielt er nær likevektspunktet, så forblir tilstanden nær likevektspunktet, noe som kan sees tydelig av figur 7.1 a)*

¹Normen $\|x\|$ til en vektor x er et mål på lengden til vektoren. Den er definert som $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Hvis x er en skalar, så er $\|x\| = |x|$.



Figur 7.1: a) Stabil b) Asymptotisk stabil c) Ustabil d) Grensesvingning

7.2 Stabilitet for lineære systemer

Legg merke til at stabilitet er definert helt uavhengig av om vi studerer lineære eller ulineære systemer. Vi skal nå se nærmere på stabilitet for lineære systemer.

7.2.1 Systemer av første orden

Først skal vi studere hvordan stabilitetsegenskapene til likevektspunktet $x = 0$ til førsteordenssystemet

$$\dot{x} = ax, \quad a < 0$$

kan bestemmes ut fra definisjonen. Denne differensialligningen kan løses eksplisitt, og vi finner løsningen som

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

der $x_0 = x(0)$. Vi antar nå at initialverdien oppfyller $|x_0| < \delta$, det vil si vi starter innenfor δ -sirkelen. Da vil løsningen $x(t)$ oppfylle

$$|x(t)| = |x_0 e^{at}| \leq |x_0| |e^{at}|. \quad (7.2)$$

Siden $a < 0$ vil $e^{at} < 1$, og dermed

$$|x(t)| \leq |x_0| \leq \delta = \varepsilon.$$

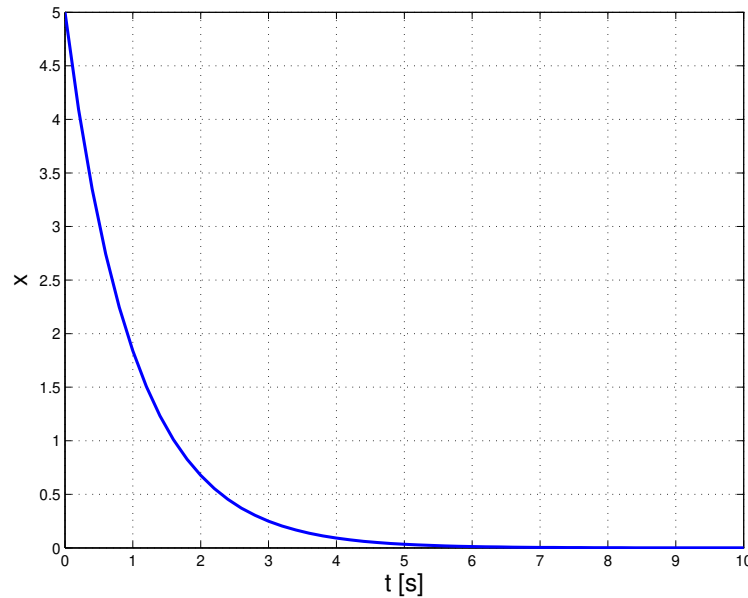
Dermed er systemet stabilt med $\delta = \varepsilon$.

Vi kan også se på tilfellet $a > 0$. Da vil vi finne at ligning (7.2) ikke har noen øvre begrensning siden $e^{at} \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$, og systemet er dermed ustabilt.

I Figur 7.2 og 7.3 har vi plottet $x(t)$ som er løsningen av differensialligningen

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = 5$$

for de to forskjellige tilfellene, $a < 0$ og $a > 0$. Som vi ser vil $a > 0$ føre til at $x \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$. Dette er et eksempel på et *ustabilt* system. For tilfellet $a < 0$ får vi at $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$, som vil være et eksempel på et asymptotisk stabilt system.

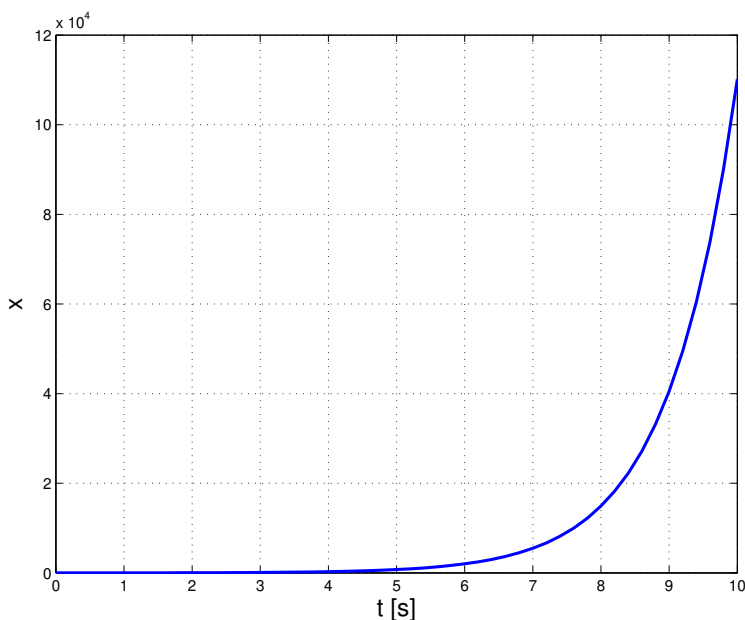
Figur 7.2: $a < 0$ gir et stabilt system

7.2.2 Systemer av andre orden

Vi skal nå se på stabilitet for andreordens systemer. I figurene 7.4, 7.5 og 7.6 er det vist simuleringer av et andreordenssystem i tre forskjellige tilfeller.

Figur 7.4 viser et andreordens system uten damping, og som vi ser resulterer dette i en stående svingning. Løsningen, som her er funnet numerisk selv om den også kan finnes analytisk, blir sinuskurver. Dette er et andre ordens system, og har således to tilstander. Som tidligere vist kan vi velge $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$. Disse to tilstandene er plottet mot hverandre i figuren og som vi ser så blir løsningen en sirkel. Dette systemet kalles også for en harmonisk oscillator. En figur der en tilstand er plottet mot en annen kalles et faseplot, eller et faseportrett. Dette vil behandles i mer detalj i Reguleringsteknikk og Ulineære systemer. Dette systemet er slik at enhver initialtilstand forskjellig fra null vil gi en ny sirkel.

Vi skal nå ved hjelp av faseportrettet i figur 7.4 påvise at dette systemet er stabilt i henhold til definisjonen. Verdien til ε velges fritt. Videre kan vi fritt velge $\delta < \varepsilon$. En løsning som starter innenfor δ -sirkelen vil nå forbli der, og likevektspunktet er dermed stabilt. En betegnelse som ofte brukes om et

Figur 7.3: $a > 0$ gir et ustabilt system

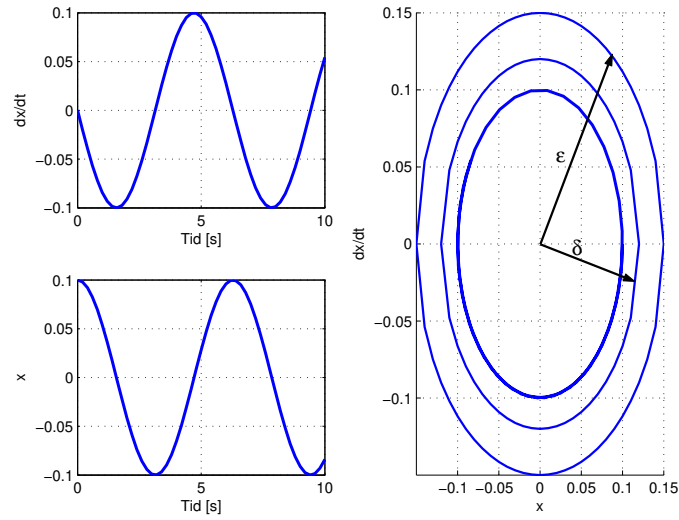
lineært svingesystem slik som dette er *marginal stabilitet*. Det er verdt å merke seg at en lineær harmonisk oscillator kun er en teoretisk konstruksjon. Ethvert fysisk system vil ha en eller annen form for friksjon, motstand eller damping som vil gjøre systemet enten asymptotisk stabilt eller ustabilt. Det finnes imidlertid fysiske ulineære svingekretser. Vi skal se eksempel på dette senere.

Figur 7.5 viser et underdempet andreordens system. Løsningen, som starter innenfor δ -sirkelen, og holder seg innenfor ε -sirkelen vil i dette tilfellet svinge seg inn mot likevektspunktet i origo, og vi har et asymptotisk stabilt system.

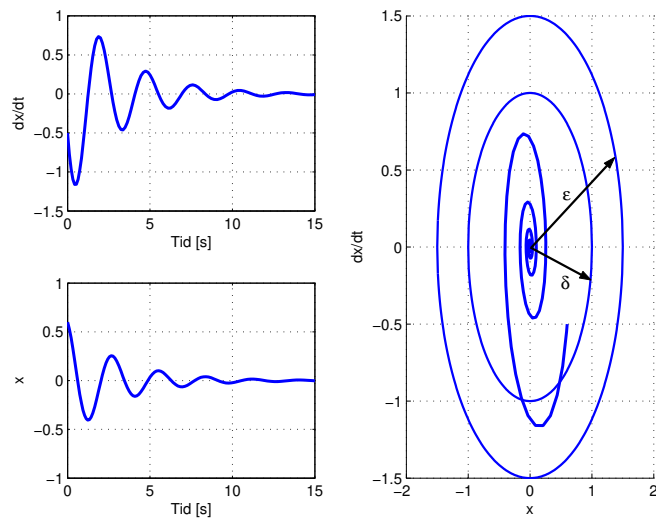
Figur 7.6 viser et ustabilt andreordens system. Trajektoren starter innenfor δ -sirkelen, men forsvinner mot uendelig.

Vi kan også studere stabilitet for andreordens systemer ved å se på løsningene til den karakteristiske ligningen. Systemet

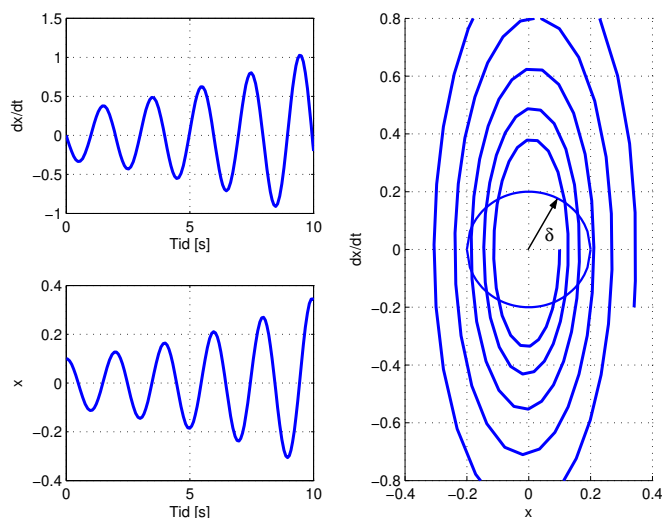
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \quad (7.3)$$



Figur 7.4: Stabilt andreordens system.



Figur 7.5: Asymptotisk stabilt andreordens system.



Figur 7.6: Ustabilt andreordens system.

har i følge det vi lærte i kapittel 2.2.6 følgende karakteristiske ligning:

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0. \quad (7.4)$$

Røttene til (7.4) er gitt av

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ &= \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)}}{2} \\ &= -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

og vi kan nå se hva forskjellige verdier av ζ og ω_0 har å si for stabiliteten til dette andreordens systemet.

To komplekse røtter Fra (7.5) ser vi at $0 < \zeta < 1$ og $\omega_0 > 0$ gir to komplekskonjugerte røtter, altså underdamping, og i følge (2.33) er løsningen

nå gitt av

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(C \cos(\underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}_{\omega_d} t) + D \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right). \quad (7.6)$$

Legg merke til at uttrykket for den dempede resonansfrekvensen ω_d fra (3.12) dukker opp i løsningen. Vi kan nå se at siden $\zeta\omega_0 > 0$ så har vi en løsning som er slik at $x(t) \rightarrow 0$ hvis $t \rightarrow \infty$, altså asymptotisk stabilitet. Hvis $\zeta = 0$ så har vi ingen damping, og vi sier at systemet er udempet. Dette svarer til den harmoniske oscillatoren diskutert over. Vi får stående svingninger representert ved

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t), \quad (7.7)$$

og systemet er stabilt.

To reelle røtter Fra (7.5) ser vi at $\zeta > 1$ og $\omega_0 > 0$ gir to forskjellige reelle røtter som begge er negative, det vil si overdamping, og i følge (2.31) er løsningen nå gitt av

$$x(t) = C e^{(-\zeta\omega_0 + \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + D e^{(-\zeta\omega_0 - \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1})t}, \quad (7.8)$$

og siden begge røttene er negative har vi igjen at $x(t) \rightarrow 0$ hvis $t \rightarrow \infty$, altså asymptotisk stabilitet.

En reell rot Fra (7.5) ser vi at $\zeta = 1$ og $\omega_0 > 0$ gir to identiske reelle negative røtter, det vil si kritisk damping, og i følge (2.32) er løsningen nå gitt av

$$x(t) = C e^{-\omega_0 t} + D t e^{-\omega_0 t}, \quad (7.9)$$

og siden $\omega_0 > 0$ har vi igjen at $x(t) \rightarrow 0$ hvis $t \rightarrow \infty$, altså asymptotisk stabilitet.

Ustabilitet I alle tilfellene over vil det være slik at hvis $\zeta < 0$ eller $\omega_0 < 0$ så vil systemet være ustabilt. Dette fører til at eksponenten i eksponensialfunksjonen i løsningene vil bli positiv og vi får at $x(t) \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$, altså ustabilitet.

For å oppsummere: Den andreordens differensialligningen i (7.4) har asymptotisk stabile løsninger hvis $\zeta > 0$ og $\omega_0 > 0$. Hvis $\zeta = 0$ har vi et grensetilfelle der løsningen er stabil, og hvis $\zeta < 0$ eller $\omega_0 < 0$ så vil systemet være

ustabilt. Dette betyr også at hvis $p > 0$ og $q > 0$ så vil løsningene til (2.28) være asyptotisk stabile.

7.3 Andre systemer

Ulineære systemer av forskjellig type kan oppvise mange forskjellige typer stabilitet. Et interessant fenomen i den forbindelse er grensesvingninger. Et eksempel på dette er gitt av Van der Pols ligning:

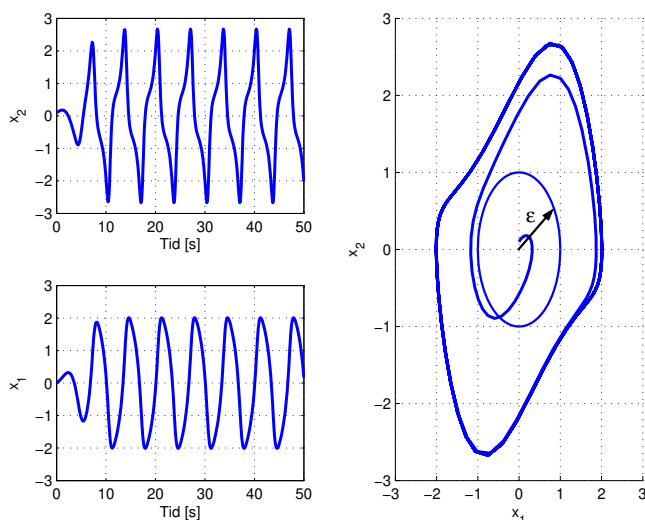
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2.\end{aligned}$$

Dette er et andreordens ulineært system. Systemet er simulert, med parameterverdien $\mu = 1$, i figur 7.7. Systemet har den egenskapen at uansett initialverdier, så vil løsningen gå mot en grensesvingning. Vi skal undersøke stabiliteten til likevektspunktet i origo. Ved å velge ε slik at ε -sirkelen ligger innenfor grensesvingningen, vil trajektorer som starter nær origo, innenfor enhver δ -sirkel, måtte krysse ε -sirkelen. Likevektspunktet er derfor ustabilt. Grensesvingninger slik som dette opptrer kun i ulineære systemer.

Remark 42 *Legg merke til forskjellen mellom de to typene ustabilitet i figur 7.7 og figur 7.6. Selv om grensesvingningen i figur 7.7 forblir i nærheten av likevektspunktet, så kan den ikke være vilkårlig nær. Dette er den fundamentale forskjellen mellom stabilitet og ustabilitet.*

I Eksempel 37 ble det vist at nivåreguleringssystemet ble ustabilt når transportforsinkelsen ble for høy. Dette er et eksempel på noe generelt: Transportforsinkelse er destabiliserende.

Metning er også destabiliserende, men som oftest i en annen form. Resultatet av metning i for eksempel pådragsraten \dot{u} , det vil si hastigheten pådraget kan endres med, vil ofte være grensesvingninger, og reguleringssystemet kan dermed ikke sies å fungere tilfredsstillende. Et eksempel på begrensning i pådragsraten er at en ventil kan bare åpnes og lukkes med en viss øvre hastighet. Det finnes metoder for å håndtere metning, der den enkleste vil være å designe regulatorene slik at ikke pådraget går i metning.



Figur 7.7: Simulering av Van der Pols ligning.

7.4 Alternativ metode for stabilitetsanalyse

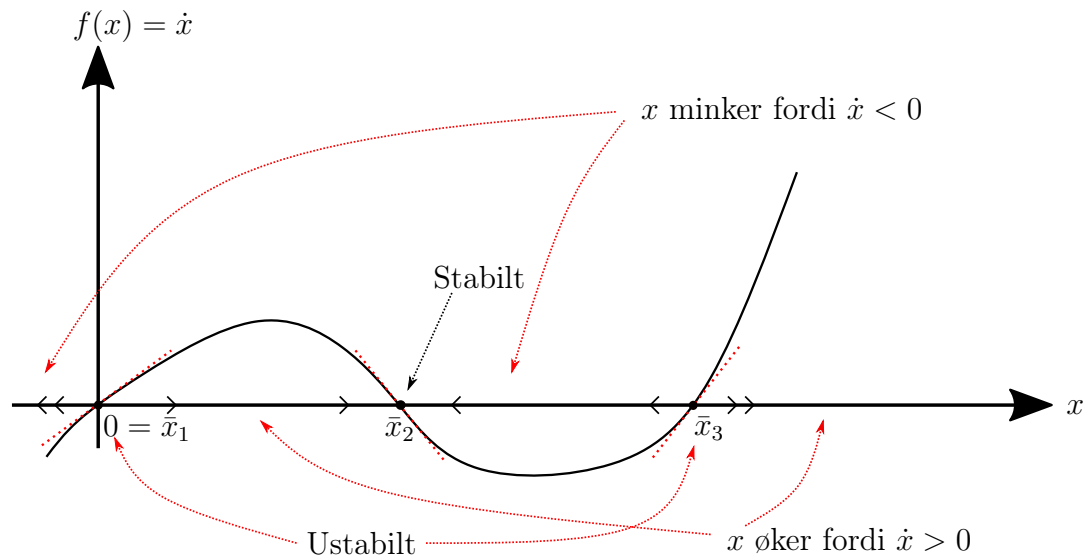
Vi vil her presentere en metode for å analysere stabiliteten til likevektspunkter i differensialligninger av formen

$$\dot{x} = f(x), \quad (7.10)$$

der $x = \bar{x}$ er et likevektspunkt, slik at $f(\bar{x}) = 0$. Legg merke til at 7.10 er generelt en ulineær differensialligning av første orden.

7.4.1 Grafisk metode

Vi skal først se på en grafisk metode for stabilitetsanalyse. I figur 7.8 er $f(x)$ plottet som en funksjon av x . Som vi ser skjærer $f(x)$ x-aksen i tre punkter. Det betyr at differensialligningen har tre likevektspunkter \bar{x}_1 , \bar{x}_2 og \bar{x}_3 . På x-aksen er det satt på små piler i positiv og negativ retning. Disse pilene peker i negativ retning hvis $f(x)$ og dermed \dot{x} er negativ, og i positiv retning hvis $f(x)$ og dermed \dot{x} er positiv. Det kan da sees av figuren at en tilstand som forskyves en liten verdi bort fra likevektspunktene \bar{x}_1 og \bar{x}_3 vil fortsette å bevege seg bort fra disse punktene, mens en tilstand som befinner seg i



Figur 7.8: To ustabile likevektspunkter og ett stabilt

nærheten av \bar{x}_2 vil bevege seg mot \bar{x}_2 . Ut fra dette kan det konkluderes at \bar{x}_1 og \bar{x}_3 er ustabile og \bar{x}_2 er stabilt. (Legg merke til tangentene i figuren)

7.4.2 Analytisk metode

Hvis vi ser på figur 7.8 så ser vi at i de ustabile likevektspunktene så har tangenten til $f(x)$ positivt stigingtall og i det stabile likevektspunktet har tangenten negativt stigningstall. Det viser seg at dette er et generelt resultat som kan oppsummeres som følger:

Påstand 1 *Stabilitetskriterium for $\dot{x} = f(x)$ der $f(x)$ er en deriverbar funksjon. Anta at \bar{x} er et likevektspunkt for (7.10), det vil si $f(\bar{x}) = 0$. Da er*

- \bar{x} (lokalt) stabilt hvis $\lambda = f'(\bar{x}) < 0$
- \bar{x} ustabilt hvis $\lambda = f'(\bar{x}) > 0$

Merknad: $\lambda = f'(\bar{x})$ kalles en egenverdi til systemet.

Bevis 1 *Vi vil nå studere hvorfor dette fungerer. Vi ser for oss at vi flytter oss en avstand z bort fra likevektspunktet, det vil si*

$$x = \bar{x} + z. \quad (7.11)$$

Vi har da at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= \frac{d}{dt}(\bar{x} + z) = f(\bar{x} + z) \\ \frac{d}{dt}(z) &= f(\bar{x} + z).\end{aligned}\tag{7.12}$$

For å komme videre her skal vi anta at z er tilstrekkelig liten slik at vi kan approksimere $f(\bar{x} + z)$ med en lineær approksimasjon²

$$\begin{aligned}L(\bar{x} + z) &= f(\bar{x}) + (\bar{x} + z - \bar{x})f'(\bar{x}) \\ &= zf'(\bar{x}) = \lambda z.\end{aligned}\tag{7.13}$$

Ved å kombinere (7.12) og (7.13) ser vi at

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z,\tag{7.14}$$

som har et stabilt likevektspunkt hvis $\lambda < 0$ eller et ustabilt likevektspunkt hvis $\lambda > 0$.

Eksempel 1 En differensialligning som beskriver logistisk vekst i en populasjon kan skrives som

$$\frac{dN}{dt} = 2N \left(1 - \frac{N}{100}\right),\tag{7.15}$$

der $N \geq 0$ er antall individer i populasjonen. Dette systemet har to likevektspunkter $N_1 = 0$ og $N_2 = 100$ som vi finner ved å løse

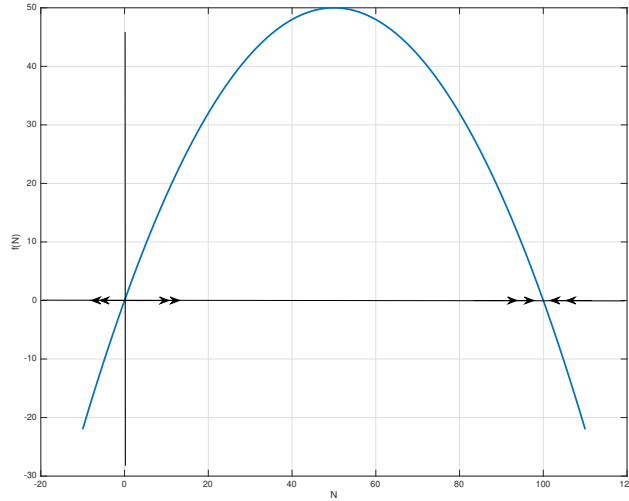
$$f(N) = 2N \left(1 - \frac{N}{100}\right) = 0.\tag{7.16}$$

Stabiliteten kan analyseres ved den grafiske metoden ved å se på figur 7.9. Ved å se på pilene på N -aksen ser vi at $N_1 = 0$ er et ustabilt likevektspunkt og $N_2 = 100$ er et stabilt likevektspunkt. For å bruke den analytiske metoden må vi beregne den deriverte av $f(N)$

$$f'(N) = 2 - \frac{2N}{50},\tag{7.17}$$

og så beregne egenverdiene for de to likevektspunktene

²Generelt er en lineær approksimasjon $l(x)$ til en funksjon $g(x)$ i et punkt \bar{x} gitt av tangenten gjennom dette punktet, det vil $l(x) = g(\bar{x}) + (x - \bar{x})g'(\bar{x})$.



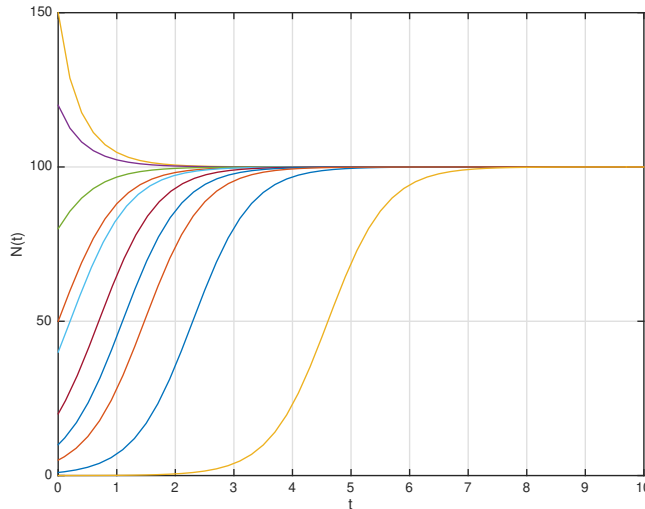
Figur 7.9: $f(N)$ og tilhørende piler på N -aksen som viser hvilken retning tilstanden vil endre seg.

- $\lambda_1 = f'(N_1) = f'(0) = 2 > 0$ som betyr at N_1 er et ustabilt likevektspunkt
- $\lambda_2 = f'(N_2) = f'(100) = 2 - \frac{200}{50} = -2 < 0$ som betyr at N_2 er et stabilt likevektspunkt

Flere simuleringer av (7.15) med forskjellige initialverdier er vist i Figur 7.10. Som vi kan se går alle løsningene mot $N_1 = 100$, det stabile likevektspunktet, også uansett hvor nær det ustabile likevektspunktet $N_2 = 0$ simuleringen starter.

7.5 Stabilisering

Til nå har vi hatt som hovedmål med regulatoren våre å styre en tilstand mot en referanseverdi, som for eksempel å holde hastigheten til en bil på ønsket verdi. Satellitteksempelen illustrerer også et annet poeng: Før vi koblet tilbake fra vinkel og vinkelhastighet, var systemet ustabilt. Dette kaller vi å *stabilisere* systemet.



Figur 7.10: Simulering av logistisk modell med forskjellige initialverdier

La oss se på systemet

$$\dot{x} = Ax + u$$

igjen. Som vi har sett, vil $A > 0$ (med $u = 0$) gi oss et ustabilt system. La oss tenke oss at dette er en modell for et fysisk system der vi har mulighet til å innføre en tilbakekobling og en P-regulator

$$u = -Kx, \quad K > 0$$

I lukket sløyfe blir da systemet

$$\dot{x} = Ax - Kx = (A - K)x,$$

gitt at vi bruker negativ tilbakekobling. I følge (2.22) er løsningen $x(t)$ gitt av

$$x = x_0 e^{(A-K)t}.$$

Vi ser at systemet vil være stabilt for $A - K < 0$, eller

$$K > A.$$

Vi har med andre ord funnet et krav på regulatorparameteren K for at vi kan stabilisere systemet. Motsatt kan dette også vise at vi kan destabilisere et

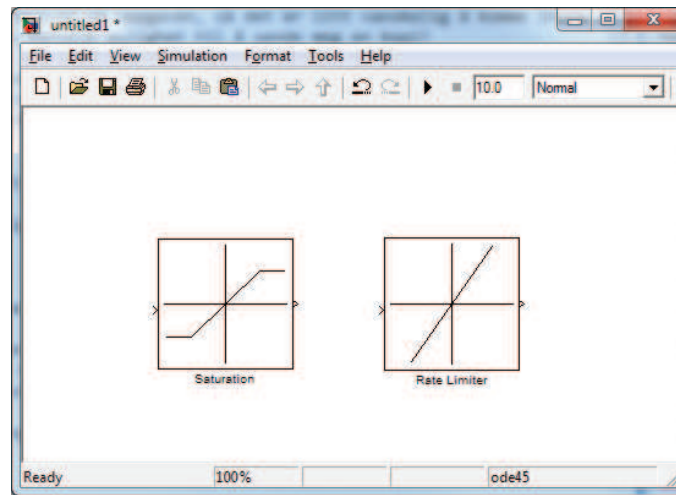
stabilt system hvis vi bruker positiv tilbakekobling og stor nok forsterkning. Vi kan også se at hvis vi øker K vil responsen til systemet bli hurtigere. Det kan virke som om vi dermed kan styre ethvert system så fort vi vil, men metning i pådraget vil hindre oss i dette.

Kapittel 8

Ulineære systemer

8.1 Ulineære fenomener

Alle fysiske systemer er ulineære hvis vi modellerer nøyaktig nok. Ofte gir en linearisering en tilstrekkelig modell for regulatordesign, men dette er en tilnærming og burde være motivasjon nok til å studere ulineære systemer. Det finnes også en mengde fenomener som opptrer kun i ulineære systemer og som en linearisert modell dermed ikke vil kunne oppvise. Ulineariteter vil kunne oppstå i modellen som følge av fysikken som er involvert. Eksempler på dette er luftmotstanden $-k_l v^2$ i cruise-control eksempelet eller ventilligningen $w = k' \sqrt{h}$ fra nivåreguleringseksempelet. Det kan også i visse tilfeller være ønskelig å designe regulatoren til å være en ulineær funksjon av tilstandene i systemet. Dette kan gjøres på grunn av stabilitetsårsaker eller på grunn av et ønske om høyere ytelse, det vil si raskere og mer nøyaktig respons. I mange tilfeller vil også en analyse av det ulineære systemet være enklere enn å først linearisere systemet og så analysere den lineære modellen. En annen grunn til å beholde en ulineær modell av systemet er det kan inneholde såkalte *harde ulineariteter*. Dette er ulineære funksjoner som inneholder diskontinuiteter (enten i funksjonsverdi eller den deriverte) eller som ikke er en-entydige, og som av den grunn ikke lar seg linearisere. Harde ulineariteter inkluderer fenomener som Coulomb-friksjon, metning, dødsoner, slark og hysteres. Dette er fenomener som ofte opptrer i reguleringssystemer og som av den grunn er viktige å ta hensyn til. Dette temaet behandles i faget Ulineære systemer, men vi skal se på to av disse ulinearitetene her



Figur 8.1: Simulink-blokker for metning i amplitude og rate.

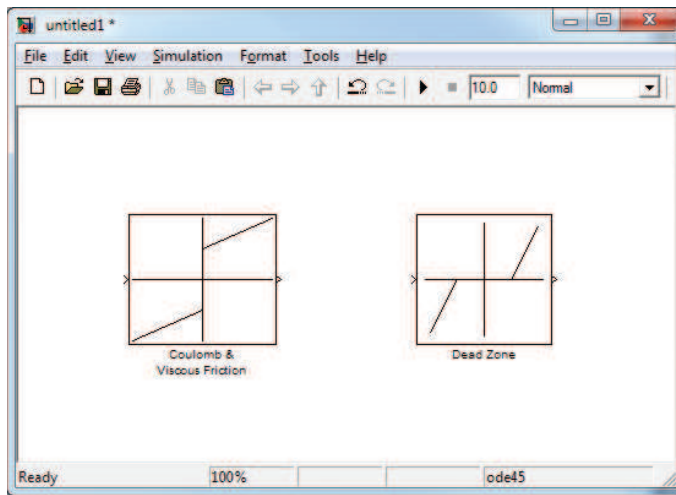
8.1.1 Metning

Et fenomen som er viktig å ta hensyn til i design av reguleringssystemer er *metning*. Metning betyr at pådrag eller tilstander ikke kan bli større (eller mindre) enn en viss grense. For eksempel så vi at skyvkraften til thrusterene i satellitteksmpelet ikke kunne bli større enn en viss øvre verdi, uansett hva regulatoren måtte diktere. Vi kan også ha metning i rate, det vil si tilstander eller pådrag kan ikke endre seg fortere enn en viss grenseverdi. For eksempel så kan ikke en ventil åpnes fortere enn en viss maksimalhastighet. Metning, både i absoluttverdi og rate, kan gi store problemer i styringssystemer hvis ikke hensyn er blitt tatt under designet.

I Simulink legger vi inn metning i verdien (amplituden) på signaler med **Saturation** blokken som er vist i Figur 6.16. Metning i raten eller hastigheten som signaler kan endre seg med legges inn med Rate Limiter blokken. Begge disse blokkene finnes under **Simulink**→**Discontinuities** i Library Browseren.

8.1.2 Dødsone

Dødsone opptrer i mange fysiske enheter. Et klassisk eksempel er rattet på en bil; man får ikke noe utslag på styringen før rattvinkelen overstiger en ned-



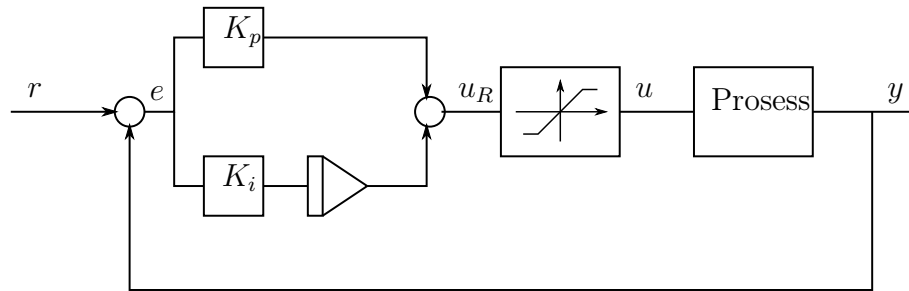
Figur 8.2: Simulink-blokker for friksjon og dødsone.

re grense. Et annen eksempel er elektriske motorer, det må en viss minste spenning til før motorakslingen gir noe utslag. I virkeligheten skyldes dette statisk friksjon, en annen ulinearitet, da rotasjon av akslingen bare skjer dersom drivmomentet er over en viss nedre grense. Dødsoner kan redusere ytelsen til reguleringsystemer, men også lede til gressesvingninger og ustabilitet.

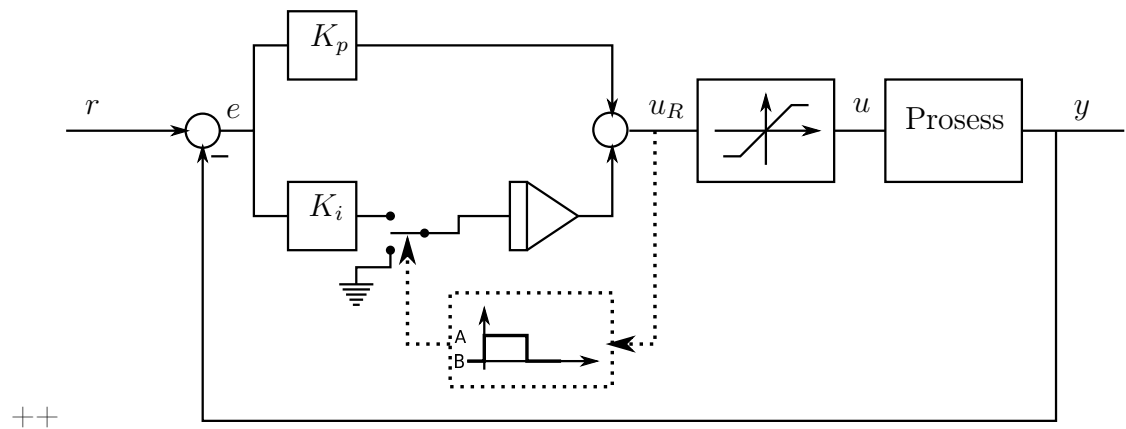
I Simulink legger vi inn dødsone med *Dead Zone* blokken i Figur 8.2 som finnes under *Simulink*→*Discontinuities* i Library Browseren. I Figur 8.2 ser vi også friksjonsblokken fra Simulink.

8.2 Integrator windup

Integrator windup er et fenomen som oppstår når vi har begrensning i pådraget, det vil si metning, og regulatoren med I-virkning (det vil si en PI eller PID regulator) samtidig ønsker å øke pådraget på grunn av at reguleringsavviket er forskjellig fra null. Et blokkdiagram for dette er vist i Figur 8.3. Det som kan skje her er at pådraget er i metning på maksimal verdi, men siden referansen ikke er nådd, fortsetter I-leddet i regulatoren å integrere feilen, og u vokser. Når feilen skifter fortegn, begynner integralbidraget i pådraget å minke, men pådraget er fortsatt i metning og vil få et oversving helt til



Figur 8.3: Metning i pådraget

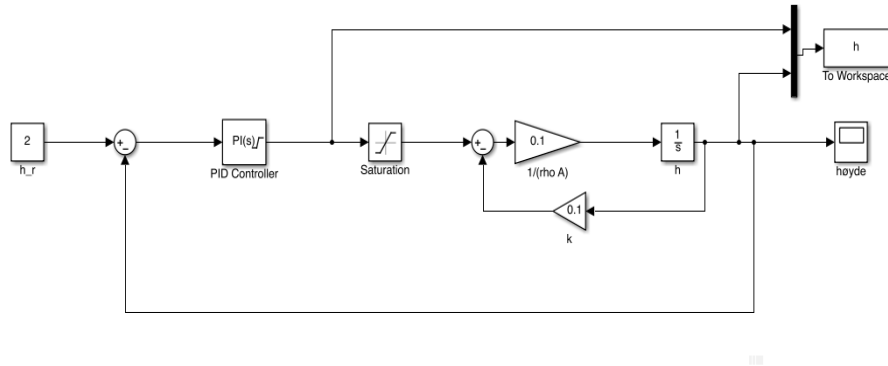


Figur 8.4: Anti-windup. Integratoren kobles fra når pådraget er i metning.

pådraget kommer under metningsgrensen. Dette fenomenet kalles integrator windup, eller integrator-overladning på norsk.

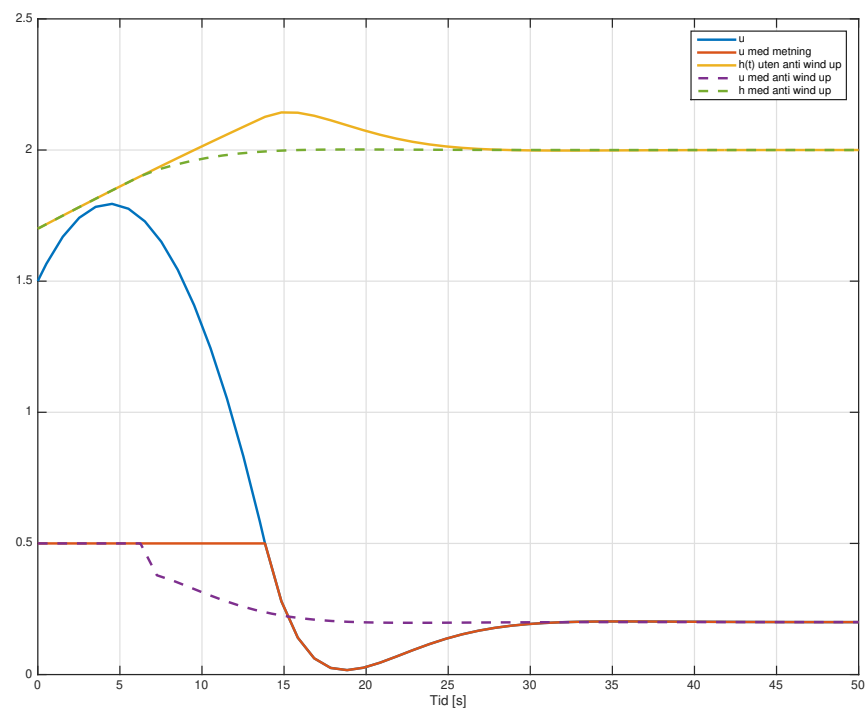
Løsningen på dette problemet er forskjellige former for anti-windup, den enkleste vil være å stoppe integreringen når pådraget er i metning, noe som er illustrert i figur 8.4. Legg merke til at det ikke er pådraget U_R som regulatoren beregner som må begrenses, men selve integreringen. Når pådraget ikke er i metning er bryteren koblet til punkt A. Inne i blokken merket Logikkbb- regnes et signal som kobler bryteren over til punkt B når u_R når u_{max} , det vil si at integratoren blir koblet fra. Symbolet ved B i figur 8.4 er for 'jord' eller verdien '0'.

Eksempel 2 I figur 8.5 er det vist et Simulink diagram for simulering av



Figur 8.5: Simulink-blokkdiagram for å simulere tank-systemet med metning i pådraget.

nivåregulering med en PI-regulator. Det er her metning i pådraget. I figur 8.6 er det vist resultatet av simulering av dette systemet. Det kan sees at når regulatoren gir et pådrag som går i metning så får vi et oversving i den regulerde høyden i tanken. Den blå linjen viser det umettede pådraget, men siden vi har metning er det verdien vist ved den røde kurven som blir påtrykt prosessen. Dette fører til at pådraget fortsetter å være i metning på maks verdi også en stund etter at referansenivået, $r = 2$ er nådd, noe som forårsaker oversvinget. Hvis vi i regulatorblokken velger Simulinks implementering av anti-windup ('clamping') får vi resultatet som er vist med stiplede linjer, og oversvinget blir forhindret.



Figur 8.6: Simulering med og uten anti-windup

Kapittel 9

Robotikk

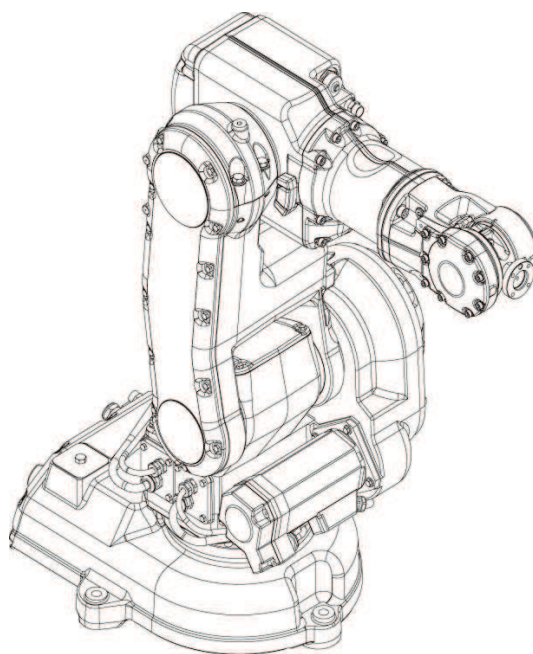
9.1 Introduksjon

Ordet robot kommer av "robota", det tsjekkisk ordet for arbeid, nærmere bestemt kjedelig og hardt arbeid. Robotnik er en eiendomsløs person som utfører slikt arbeid. Ordet ble introdusert av Karel Čapek i skuespillet "Rossum's Universal Robots" i 1920. Stykket handler om hvordan en vitenskapsmann lager antropomorfe (menneskelignende) skapninger som etter hvert gjør opprør mot sin skaper. Ordet «robot» har sin opprinnelse i det tsjekkiske språk. Ordet robota betyr Det finnes i dag mange typer av roboter: Robotmanipulatorer (Se Figur 9.1), forskjellige former for autonome kjøretøy (ROV, AUV, UAV, AGV osv), og mekaniske maskiner som imiterer eller er inspirert av biologi (to eller flerbente roboter, slanger, fisker osv). Fagfeltet robotikk dekker mekanisk og elektronisk design, instrumentering, matematisk modellering og analyse, regulatordesign, trajektorgenerering og programmering. Her skal vi se på grunnleggende matematisk modellering og gi et eksempel på regulering av en robotmanipulator.

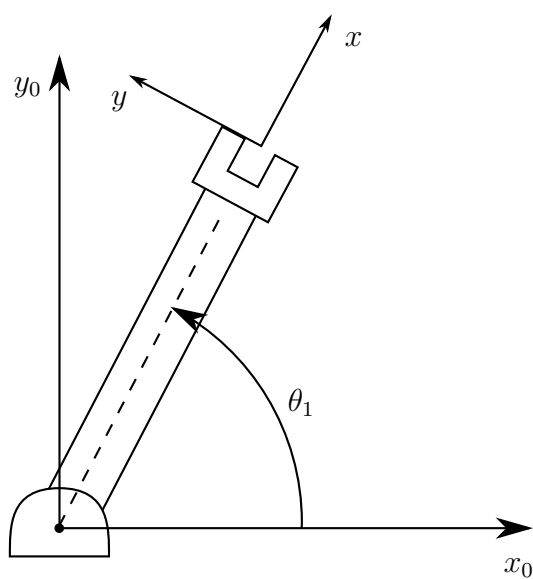
9.2 Kinematikk

9.2.1 Foroverkinematikk

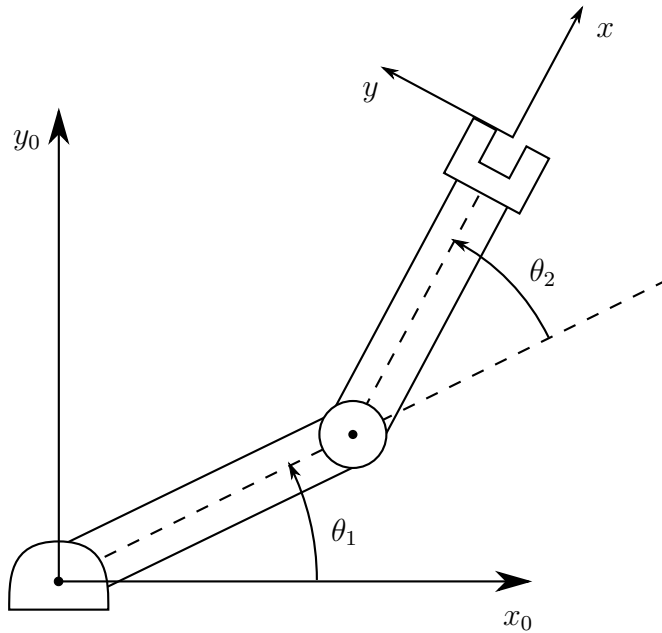
Foroverkinematikkproblemet består i følgende: Gitt leddvariablene til en robot, beregn posisjon og orientering til griperen. Det enkleste tilfellet vi kan se for oss er en såkalt 1-link manipulator i planet. Denne er vist i Figur 9.2.



Figur 9.1: Eksempel på robotmanipulator.



Figur 9.2: 1-link manipulator i planet.



Figur 9.3: 2-link manipulator i planet.

Enkel trigonometri gir oss posisjonen til griperen som

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \theta_1 \\ y &= a_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (9.1)$$

og vi ser at griperen peker i samme retning som leddvinkelen θ_1 . Dette kan ganske lett utvides til en 2-link manipulator i planet som er vist i Figur 9.3. Her vil koordinatene til griperen være gitt av

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (9.2)$$

og retningen til griperen er gitt av summen av leddvinklene $\theta_1 + \theta_2$.

Foroverkinematikk kan også formuleres for roboter med translasjonsledd, eller kombinasjoner av rotasjonsledd og rotasjonsledd. Uansett vil det være snakk om bruk av geometri og trigonometri for å finne posisjon og orientering til griperen som funksjon av leddvinkelene.

9.2.2 Inverskinematikk

Inverskinematikken betegner det motsatte problemet, nemlig gitt posisjonen og orienteringen til griperen, finn alle leddvariablene. Dette er matematisk sett et mye vanskeligere problem. Det er heller ikke sikkert at det eksisterer en analytisk løsning, det avhenger av kompleksiteten til roboten. Dessuten er det slik at selv om en løsning eksisterer, er det ikke sikkert at den er unik, det kan eksistere mange løsninger.

For 1-link manipulatorene er problemet slik: Gitt (x, y) , finn θ_1 . Ved å se på Figur 9.2, ser vi at

$$\theta_1 = \text{Atan}(y, x) \quad (9.3)$$

der $\text{Atan}(y, x)$ er en to-arguments invers tangens funksjon¹.

For 2-link manipulatorene i Figur 9.3 vil det vise seg at inverskinematikken blir ganske mye mer komplisert å regne ut. Gitt (x, y) , finn θ_1 og θ_2 . Som før har vi at

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2), \end{aligned} \quad (9.4)$$

men det vil nå være nyttig å kvadrere disse sammenhengene slik at vi får

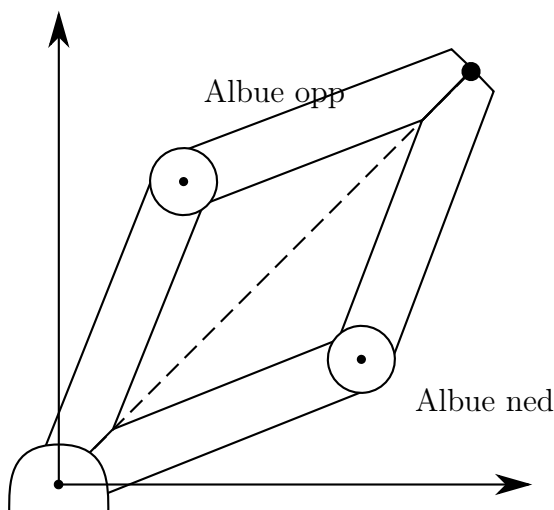
$$\begin{aligned} x^2 &= a_1^2 \cos^2 \theta_1 + a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2a_1a_2 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y^2 &= a_1^2 \sin^2 \theta_1 + a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + 2a_1a_2 \sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Ved å summere x^2 og y^2 finner² vi nå

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a_1^2(c_1^2 + s_1^2) + a_2^2(c_{12}^2 + s_{12}^2) + 2a_1a_2(c_1(c_1c_2 - s_1s_2) \\ &\quad + s_1(c_1s_2 + s_1c_2)) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2(c_1^2c_2 - c_1s_1s_2 + s_1c_1s_2 + s_1^2c_2) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2(c_1^2 + s_1^2) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

¹ $\text{Atan}(y, x)$ er definert for alle $(x, y) \neq (0, 0)$ slik at vinkelen alltid kommer i riktig kvadrant. For eksempel så er $\text{Atan}(-1, 1) = \frac{3\pi}{4}$ og $\text{Atan}(1, -1) = -\frac{\pi}{4}$. I Matlab er den tilsvarende funksjonen `atan2(y, x)`

²For å forenkle notasjonen har vi innført $c_1 = \cos \theta_1$, $s_1 = \sin \theta_1$, $c_2 = \cos \theta_2$, $s_2 = \sin \theta_2$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ og $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.



Figur 9.4: 1-link manipulator i planet.

der vi også har brukt formelene for \cos og \sin til summen av vinkler. Vi kan nå finne θ_2 fra (9.6) ved sammenhengen

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}, \quad (9.7)$$

men det viser seg at dette kan bli numerisk unøyaktig for små vinkler, og dessuten vil vi gjerne utnytte fordelene med å automatisk få rett vinkel ved hjelp av Atan-funksjonen. Derfor renger vi også ut

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (9.8)$$

slik at vi kan finne θ_2 ved hjelp av

$$\theta_2 = \text{Atan}(\sin \theta_2, \cos \theta_2). \quad (9.9)$$

Legg merke til at de to løsningene i (9.8) svarer til de såkalte albue opp og albue ned løsningene som er illustrert i Figur 9.4. For å finne θ_1 tar vi igjen utgangspunkt i (9.4) som kan skrives som

$$\begin{aligned} x &= a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 - a_2 s_1 s_2 \\ y &= a_1 s_1 + a_2 c_1 s_2 + a_2 s_1 c_2, \end{aligned} \quad (9.10)$$

og videre som

$$\begin{aligned}x &= k_1 \cos \theta_1 - k_2 \sin \theta_1 \\y &= k_1 \sin \theta_1 + k_2 \cos \theta_1,\end{aligned}\tag{9.11}$$

der $k_1 = a_1 + a_2 c_2$ og $k_2 = a_2 s_2$. Hensikten med å innføre k_1 og k_2 er at disse er begge avhenige av kun θ_2 som nå er kjent. Som illustrert i Figur V innfører vi nå $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ og vinkelen $\gamma = \text{Atan}(k_2, k_1)$ og vi ser at vi nå kan skrive $k_1 = r \cos \gamma$ og $k_2 = r \sin \gamma$. Uttrykkene for x og y kan nå skrives

$$\begin{aligned}x &= r \cos \gamma \cos \theta_1 - r \sin \gamma \sin \theta_1 \\y &= r \cos \gamma \sin \theta_1 + r \sin \gamma \cos \theta_1,\end{aligned}\tag{9.12}$$

og ved å dividere med r får vi

$$\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \cos \gamma \cos \theta_1 - \sin \gamma \sin \theta_1 \\ \frac{y}{r} &= \cos \gamma \sin \theta_1 + \sin \gamma \cos \theta_1,\end{aligned}\tag{9.13}$$

og vi kan kjenne igjen høyre sidene i (9.13) som uttrykkene for \cos og \sin til summer av vinkler slik at

$$\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \cos(\gamma + \theta_1) \\ \frac{y}{r} &= \sin(\gamma + \theta_1).\end{aligned}\tag{9.14}$$

Fra (9.14) ser vi at

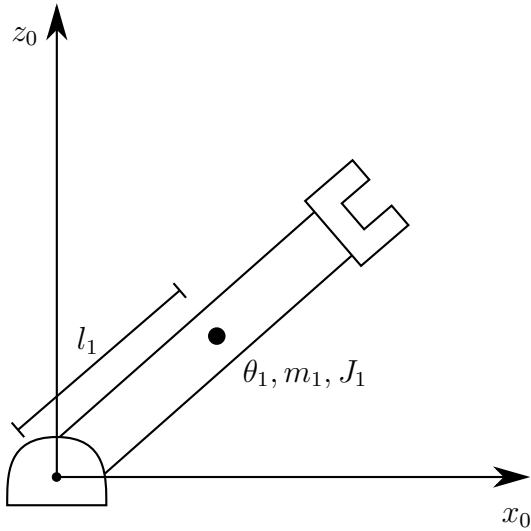
$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan}\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \text{Atan}(y, x)\tag{9.15}$$

og dermed har vi at

$$\theta_1 = \text{Atan}(y, x) - \gamma = \text{Atan}(y, x) - \text{Atan}(k_2, k_1).\tag{9.16}$$

9.3 Dynamikk

For å kunne styre en robotmanipulator må vi vite sammenhengen mellom kreftene eller momentene som motorene yter og bevegelsen som følger. Denne sammenhengen, altså robotens dynamiske ligninger eller dynamikk, kan



Figur 9.5: 1-link manipulator i planet.

finnes ved hjelp av Euler-Lagranges bevegelsesligninger. Disse ligningene kan benyttes til å modellere en mengde kompliserte mekaniske systemer og er spesielt godt egnet til å modellere robotmanipulatorer. Euler-Lagranges bevegelsesligninger er gitt av

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j, \quad (9.17)$$

der $L = K - V$ er systemets Lagrange-funksjon, K er kinetisk energi, V er potensiell energi, q_j er generalisert koordinat nr j som for vårt tilfelle tilsvare leddvinklene og τ_j er generalisert kraft nr j som for en robotmaipulator betyr motormoment nr j . Symbolet ∂ brukes for å betegne en partiellderivert, det vil si vi deriverer en funksjon av flere variable med hensyn på en av variable-ne³. Vi skal se på et enkelt eksempel med en 1-link manipulator som i Figur 9.5. Leddet som har masse m_1 , lengde $2l_1$ og dreiemoment J_1 er drevet av en motor med moment τ_1 . Den kinetiske energien til leddet er gitt av

$$K = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2, \quad (9.18)$$

³For eksempel så vil funksjonen $f(x, y) = 2x^2y^3$ ha partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2$, mer om dette i Matematikk 2

og den potensielle energien er gitt av

$$V = m_1gh = m_1gl_1 \sin q_1. \quad (9.19)$$

Lengden l_1 er da avstanden fra leddet og til massemiddelpunktet for leddet. Lagrangefunksjonen kan nå beregnes som

$$L = K - V = \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 - m_1gl_1 \sin q_1. \quad (9.20)$$

Vi kan nå beregne de ulike uttrykkene vi trenger i Euler-Lagrange ligningen som

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= 2\frac{1}{2}J_1\dot{q}_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= J_1\ddot{q}_1 \end{aligned} \quad (9.21)$$

og

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -m_1gl_1 \cos q_1 \quad (9.22)$$

og ved å sette inn (9.21) og (9.22) i (9.17) får vi

$$J_1\ddot{q}_1 + m_1gl_1 \cos q_1 = \tau_1 \quad (9.23)$$

som er en ulineær andreordens differensialligning som beskriver bevegelsen til en 1-leddet robotmanipulator.

9.4 Ulineær regulering

Enten vi skal regulere et ulineært system, eller vi ønsker å designe en ulineær regulator for et ellers lineært system, så trenger vi teknikker fra fagfeltet ulineære systemer. Vi skal se på regulering av et ulineært system i et eksempel.

Example 43 *I dette eksempelet henvises det til vektorer og matriser. Matriser og regneregler for disse vil behandles i detalj i Matematikk 3. Dynamikken til en robotmanipulator, se figur 9.1, kan beskrives med ligninger av typen*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + D\dot{q} + g(q) = u, \quad (9.24)$$

der q er en vektor bestående av robotens leddvinkler, eller koordinater, $M(q)$ er robotens treghetsmatrise, $C(q, \dot{q})$ er en matrise som inneholder sentripetal- og Coriolis-ledd, D er dempematrisen, $g(q)$ er en vektor av tyngdemomenter, og u er en vektor av påtrykte momenter, for eksempel moment fra motorene i hvert ledd. Ligning (9.24) har blitt funnet ved hjelp av Euler-Lagrange ligningen (9.17) og det kan sees at (9.24) har samme struktur som den dynamiske modellen for en en-leddet robot (9.23). For roboten i figur 9.1 vil

$$q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad u = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{pmatrix},$$

der τ_i er momentet fra motoren i ledd nr i . Det er nokså vanlig å bruke en PD-regulator med tyngdekraftskompensasjon

$$u = -K_d \dot{q} - K_p q + g(q)$$

for å styre roboten mot likevektspunktet $q = \dot{q} = 0$. Stabiliteten til dette systemet kan undersøkes ved å studere den totale energien i systemet. I dette tilfellet kan et uttrykk for kinetisk og potensiell energi skrives som

$$V = \frac{1}{2} (\dot{q}^T M(q) \dot{q} + q^T K_p q).$$

Totalenergien i systemet er alltid et positivt tall. Hvis vi kan vise at regulatoren medfører at denne energien alltid er avtagende vil dette implisere at systemet er stabilt. Hvis vi deriverer V med hensyn på tiden, og dermed finner tilført effekt, vil vi finne at

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_d \dot{q},$$

som alltid er negativ. Dette betyr at energi trekkes ut av systemet. Beregningene som ligger bak dette resultatet vil bli gjennomgått i detalj i Ulineære systemer. Stabiliteten til systemet er nå bevist. Det kan også vises at likevektspunktet er asymptotisk stabilt. Denne type stabilitetsanalyse, kjent som Lyapunovs direkte metode, etter den russiske matematikeren A.M. Lyapunov, kan vises å være ekvivalent med $\delta - \varepsilon$ -analysen.

Det er verdt å merke seg at modeller på formen (9.24) også brukes for å modellere andre mekaniske systemer slik som skip, undervannsfarkoster, fly og romfartøy.

Kapittel 10

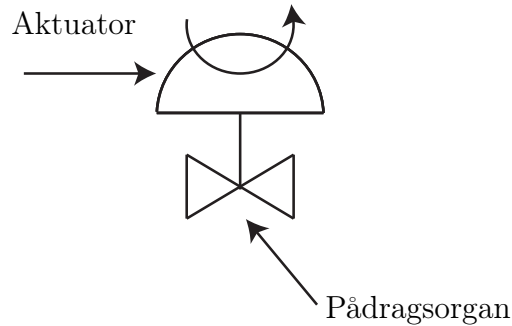
Aktuatorer og pådragsorganer

10.1 Introduksjon

Pådragssignalet u som blir beregnet av regulatoren i et system inneholder informasjon som skal føres tilbake til eller påvirke prosessen vi ønsker å styre. Som oftest må dette signalet omformes fra et lav-energi signal i en data-maskin til et eller annet høy-energi signal. For eksempel vil den automatisk styrte motoren i en heisekran kunne påvirke lasten med krefter på mange tusen Newton. Det er derfor et behov for både å oversette u til reelle verdier som påvirker prosessen. Dette er illustrert i Figur 10.1, der vi ser at u først blir regnet om i blokken Signalomsetning. Dette kan for eksempel være digital-analog omsetning, omregning mellom strøm og spenning, skalering, eller annen signalbehandling. En strøm på $4 - 20mA$ er et standard strømsignal som brukes til dette. Man bruker strøm på grunn av robusthet mot endringer i resistans, noe som også er grunnen til at spenning sjeldent blir brukt for signaloverføring. Deretter blir signalet sendt til en Aktuator, dette kan for eksempel være en elektromotor, som i sin tur påvirker Pådragsorganet, som kan være en ventil, som har direkte effekt på Prosessen. Et slikt eksempel er illustrert i Figur 10.2. Alle blokkene i Figur 10.1 kan inneholde sin egen dynamikk, og det er klart at alt dette vil påvirke ytelsen til et reguleringsystem.



Figur 10.1: Signalkjede.

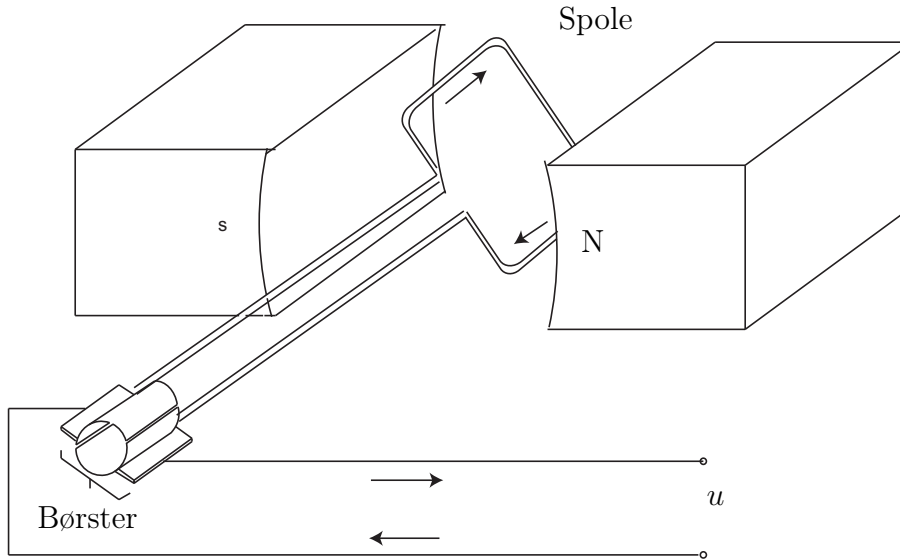


Figur 10.2: Aktuator og pådragsorgan illustrert med en ventil.

10.2 Likestrømsmotrer

Elektriske motorer produserer kontinuerlig rotasjon og finnes i mange forskjellige utgaver. Likestrømsmotorer (dc-motor) blir satt i rotasjon på grunn av interaksjonen av to konstante magnetiske felt. Prinsippet er vist i Figur 10.3 der en permanentmagnet lager det ene magnetfeltet. Det andre feltet lages av en elektrisk leder formet som en spole som kan rotere. Denne spolen kalles også ankerkretsen. Ankerkretsen er koblet til strømkilden via en kommutator som består av et sett børster, slik at strømretningen snur når ankeret roterer. Rotasjonshastigheten vil variere med strømmen. Det finnes andre varianter av likestrømsmotoren der en elektromagnet produserer det statiske feltet.

Vi skal nå sette opp en matematisk modell for likestrømsmotoren som er egnet for regulatordesign. Dette avsnittet bygger på [Egeland, 1993]. En elektrisk likestrømsmotor har en stator som er en del av motorhuset, og en rotor som er den roterende delen av motoren. Ved å sette opp et magnetsik felt i stator, kan et motormoment genereres ved å føre en strøm gjennom en leder i rotor. I en mekanisk kommutert likestrømsmotor er magnetfeltet i stator satt opp av en permanentmagnet eller av feltstrømmen i_f . Motormomentet



Figur 10.3: Likestrømmotor med permanentmagnet.

er da gitt av

$$M = K_M i_a, \quad (10.1)$$

der K_M er motorens momentkonstant og i_a er ankerstrømmen. Ankerkretsen, se figur 10.4, roterer i feltet fra stator og en indusert spenning

$$e_a = K_E \omega_m, \quad (10.2)$$

der K_E er motorens spenningskonstant, og ω_m er moterens vinkelhastighet.

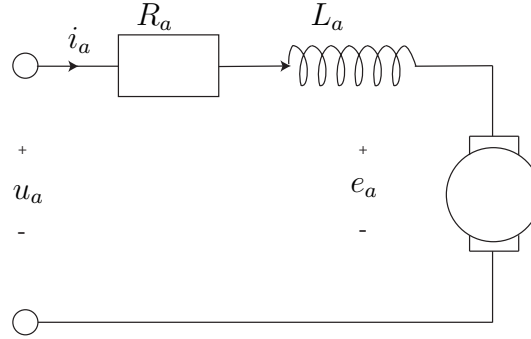
Kirchhoffs spenningslov for ankerkretsen gir

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{d}{dt} i_a + e_a, \quad (10.3)$$

der u_a er ankerspenningen som er moterens pådrag, R_a er ankermotstanden og L_a er ankerinduktansen. Momentbalansen for rotor gir

$$J_m \dot{\omega}_m = M - M_L, \quad (10.4)$$

der J_m er motorens treghetsmoment, M_L er momentet som virker på motoren



Figur 10.4: Ankerkrets.

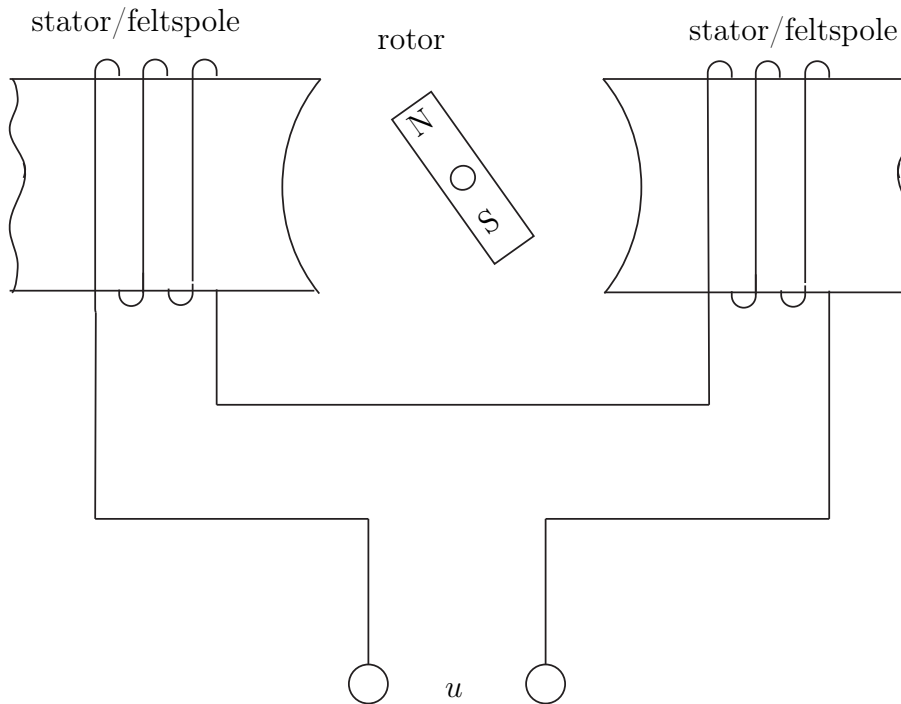
fra lasten. Ved å sette inn (10.1) og (10.2) får vi modellen

$$\begin{aligned}
 L_a \frac{d}{dt} i_a &= -R_a i_a - K_E \omega_m + u_a \\
 J_m \dot{\omega}_m &= K_M i_a - M_L \\
 \dot{\theta}_m &= \omega_m,
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

der θ_m er motorvinkelen. Som vi ser er dette et system av tre førsteordens differensialligninger. Disse kunne vært skrevet som en tredjeordens differensialligning, men det er mer gunstig å skrive ligningene slik som i (10.5). Det er flere grunner til dette. En grunn er at mange av de metodene vi har for regulator design er designet for bruk på førsteordens systemer, en annen er at systemet er mer oversiktlig når det er skrevet som i (10.5) og det er lettere for oss å se sammenhengene i systemet.

10.3 Vekselsstrømmotorer

I vekselstrømmotorer (ac-motorer) vil magnetfeltene variere med tiden siden motorene er drevet av vekselspanning. Kreftene mellom disse feltene avhenger av motorvinkelen og fasen til strømmen i spolen. Det finnes to hovedtyper vekselstrømmotorer: synkronmaskiner og induksjonsmaskiner.



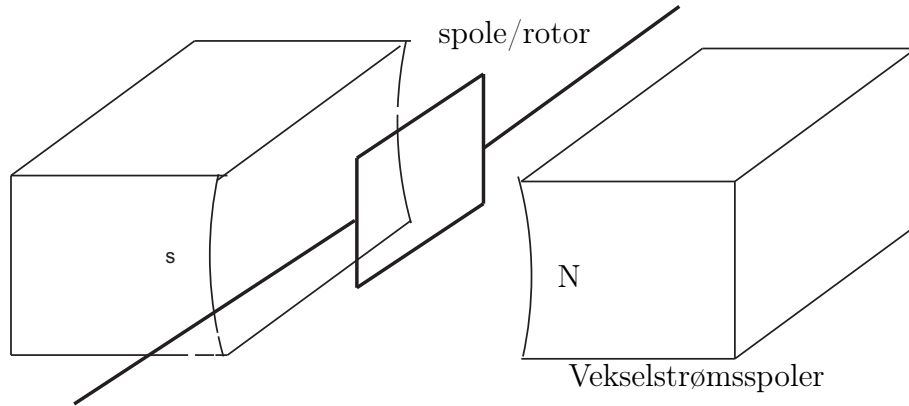
Figur 10.5: Vekselstrømmotor med permanentmagnet rotor (synkronmotor).

Synkronmaskiner

I en synkronmotor, vist i Figur 10.5 blir vekselspenningen koblet til feltspolene, kalt stator. Rotoren kan være enten en permanentmagnet eller en likestrømselektromagnet. Rotoren i Figur 10.5 har to poler, men dette antallet kan variere fra motor til motor. Rotasjonshastigheten til en synkronmotor varierer med frekvensen til vekselspenningen og antallet poler. Synkronmotorer drevet av enfase vekselspenning brukes bare for svært lave motoreffekter, mens trefasemotorer kan produseres til å være svært kraftfulle.

Induksjonsmaskiner

Induksjonsmotorer har en rotor som består av en spole, se Figur 10.6. I denne spolen blir det indusert en strøm på grunn av det varierende magnetfeltet fra statoren. Denne strømmen forårsaker igjen et varierende magnetfelt rundt rotoren og det blir dermed satt opp et moment mellom disse feltene som



Figur 10.6: Induksjonsmotor.

igjen er årsaken til at motoren roterer.

10.4 Ventiler

I prosess- og olje/gass-industrien er det mange tilfeller hvor man har behov for å regulere strømming av fluider, enten gasser eller væsker, og da blir forskjellige typer ventiler brukt som pådragsorgan. Som vist i ligning (2.19) kan volumstrømmen q gjennom en ventil beskrives av

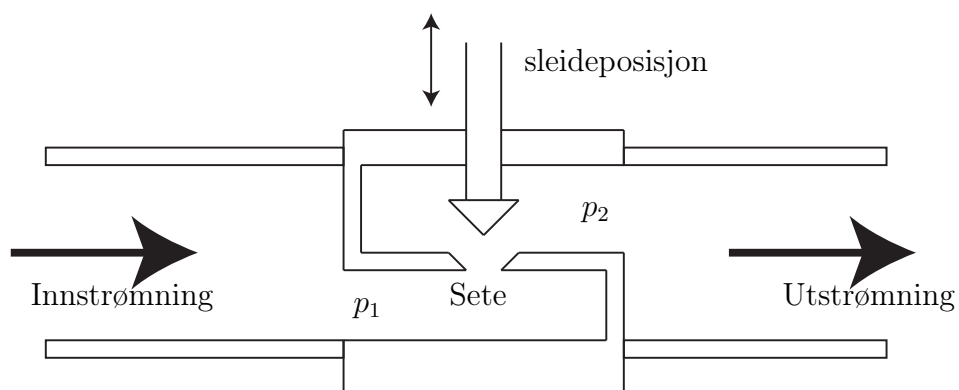
$$q = K \sqrt{(p_1 - p_2)} \quad (10.6)$$

der K avhenger av ventilåpningen eller sleideposisjonen. En enkel seteventil er vist i Figur 10.7. Avhengig av hvordan ventilene er designet, kan de klassifiseres som 1) raskåpnende, 2) lineære eller 3) likeprosentlig som illustrert i Figur 10.8. Raskåpnende ventiler benyttes hvis det er behov for av/på operasjon.

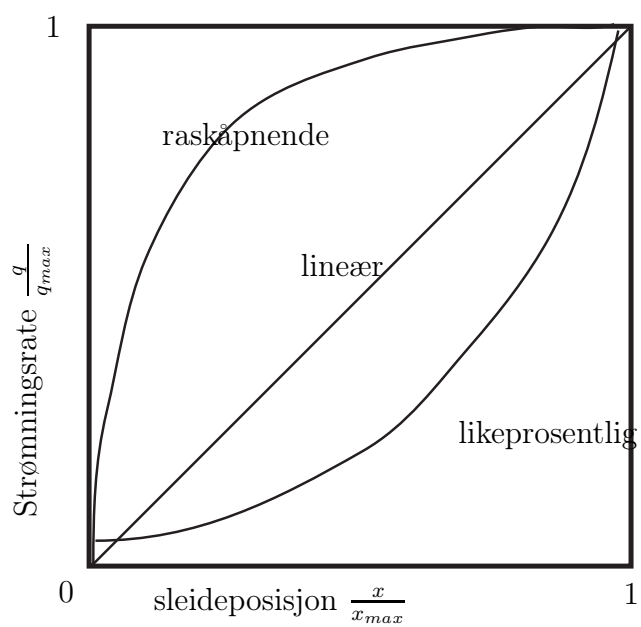
Det er vanlig å bruke pneumatiske aktuatorer for å åpne og lukke ventiler. Kraften F fra en pneumatisk aktuator kan beregnes som

$$F = A(p_1 - p_2), \quad (10.7)$$

der $p_1 - p_2$ er trykkforskjellen over membranen og A er membranarealet. Virkemåten til slike aktuatorer er beskrevet i Figur 10.9. I delfigur A vises



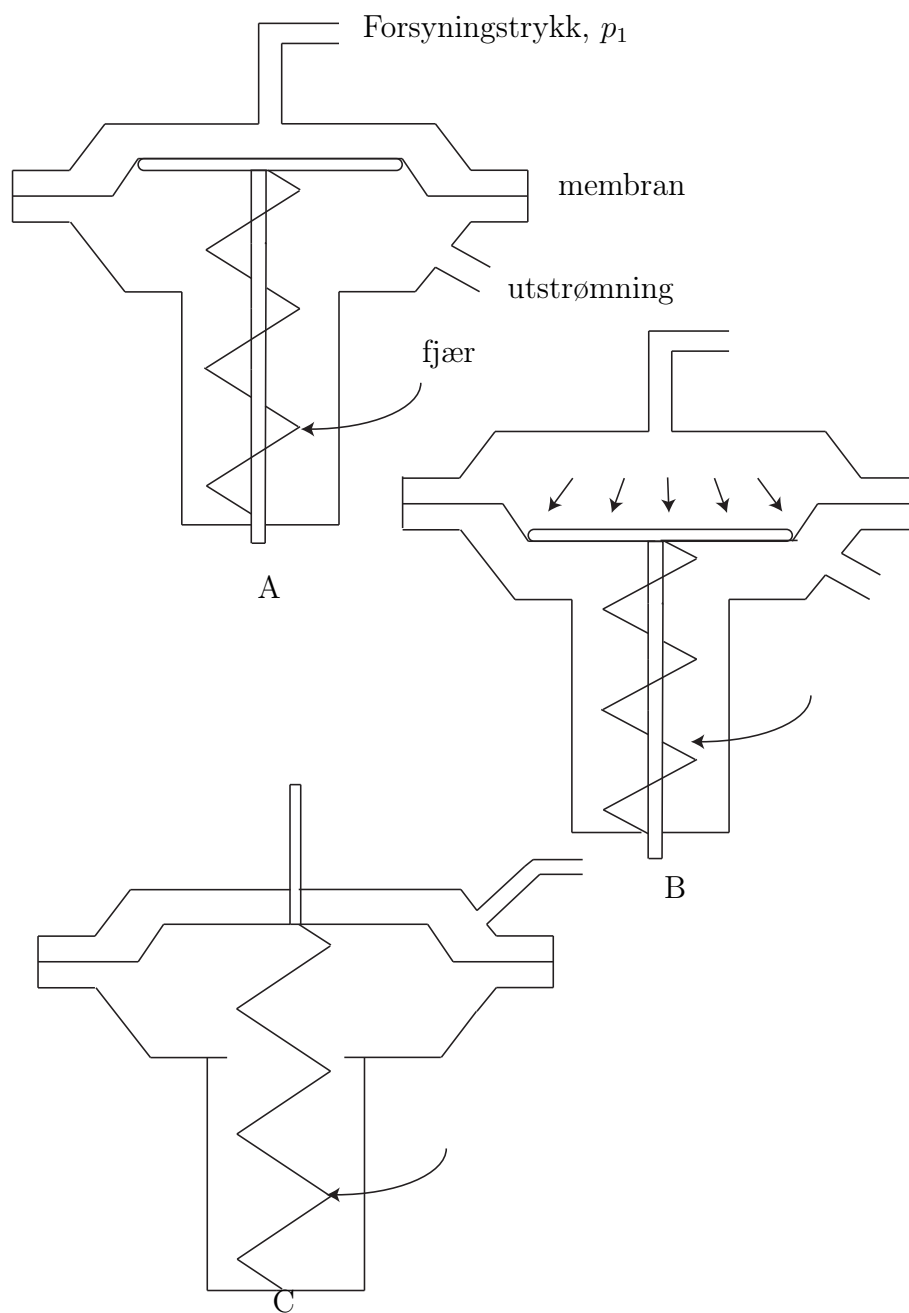
Figur 10.7: Seteventil.



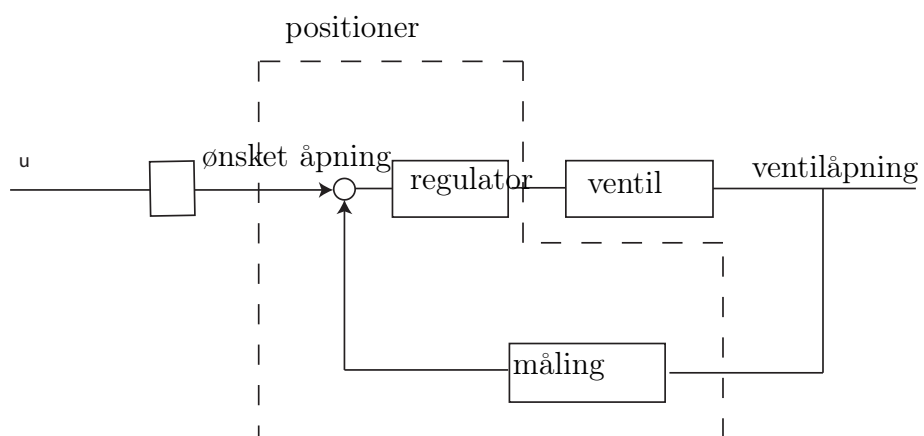
Figur 10.8: Seteventil.

aktuatoren når den er åpen. Når vi øker forsyningstrykket p_1 , vil kraften bli større og aktuatoren lukker og virker på fjæra med kraften F som vist i delfigur B. I delfigur C er en alternativ konfigurasjon vist. Denne er lukket ved lavt forsyningstrykk og åpner hvis forsyningstrykket øker. Dette er nyttig hvis det er viktig at en strømning skal stoppe hvis vi mister forsyningstrykket.

Ventilåpningen i ventilen vil variere med strømningen og i tillegg blir strømningen påvirket av ulineariteter som friksjon, hysteresse og dødgang. Tilsammen gjør dette at det finnes en del usikkerhet i sammenhengen mellom ventilåpning og strømning. En løsning på dette er å installere en dedikert posisjonsregulator for ventilåpningen. En slik regulator blir kalt en positioner og er vist i Figur [10.10](#)



Figur 10.9: Pneumatisk aktuator.



Figur 10.10: Positioner.

Kapittel 11

Måling av resistans og kapasitans

I forbindelse med regulering er ikke måling av resistans og kapasitans av primær interesse. Men de inngår veldig ofte i instrumenter for måling av andre størrelser.

11.1 Resistans

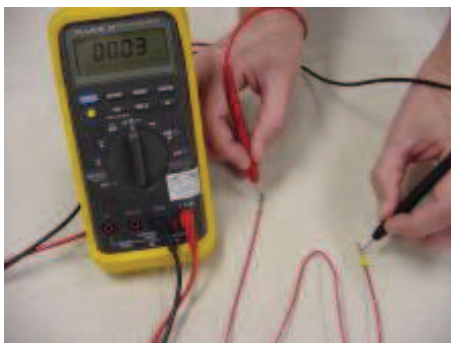
Elektrisk motstand, resistans, kan variere med andre fysiske størrelser slik som temperatur og belastning. Hvis man kjenner sammenhengen mellom den fysiske størrelsen og resistansen, kan man dermed måle den ukjente størrelsen ved å måle resistansen. For å realisere dette trengs metoder for å måle resistans.

11.1.1 Direkte måling av resistans

Ifølge Ohms lov

$$U = RI$$

er spenningen U over en motstand proporsjonal med resistansen R hvis det går en strøm I gjennom motstanden. Ved måling av en resistans vil alltid resistansen r i ledningene spille inn, slik at man ikke bare måler den ukjente resistansen R_x , men den totale resistansen $R_x + r$. Dette er måleprinsippet som er mest brukt i multimetre, se Figur 11.1. En tilsynelatende løsning er å måle ledningsmotstanden r , og så trekke denne fra den totale målte motstanden $R_x + r$. Imidlertid er måling av motstand i en leder er veldig avhengig av kontaktpunktet mellom lederen og måleinstrumentet. Denne målingen blir



Figur 11.1: Multimeter som anvender toledermåling for måling av resistans.

dermed svært lite repeterbar, og et annet måleprinsipp er nødvendig for mer nøyaktige målinger av resistans. Målefeil som følger av ledningsmotstanden kan gjøres mye mindre ved hjelp av en teknikk kjent som firepunktskobling. Prinsippet er illustrert i Figur 11.2. Strømmen I er konstant og uavhengig av ledningsmotstanden r . Spenningen u over motstanden R måles med et separat ledningspar, der spenningsmåleren har meget høy inngangsimpedans slik at strømmen i dette ledningsparet kan ignoreres, det vil si $i \ll I$, eller $i \approx 0$. Resistansen R kan da beregnes som

$$R = \frac{u}{I}.$$

Et måleinstrument som måler resistans etter dette prinsippet er vist i Figur 11.3.

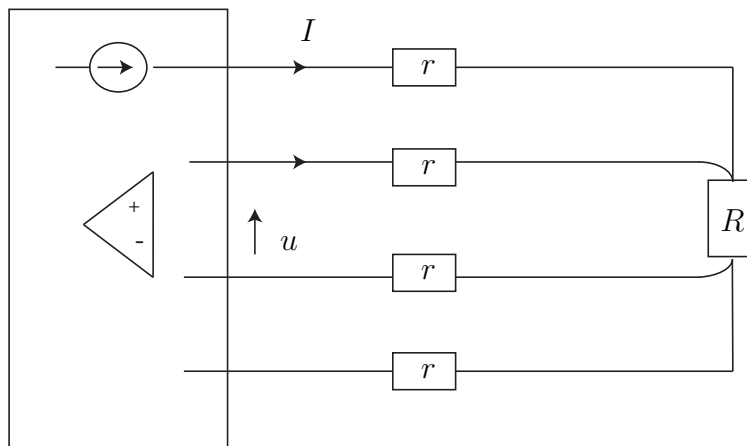
11.1.2 Indirekte måling av resistans

Resistans kan også måles ved å sammenligne en ukjent motstand med en kjent. Dette gir høy presisjon ved riktig kalibrering. Den enkleste formen for målebro, som denne teknikken kalles, er vist i Figur 11.4. Dette er en halvbro. Den kjente referanse-motstanden R_r og den ukjente R_x seriekobles. Spenningen U_r over R_r måles, og siden strømmen I gjennom begge motstandene er lik har vi at

$$\frac{U_r}{R_r} = \frac{U_x}{R_x},$$

der spenningen over den ukjente motstanden beregnes som

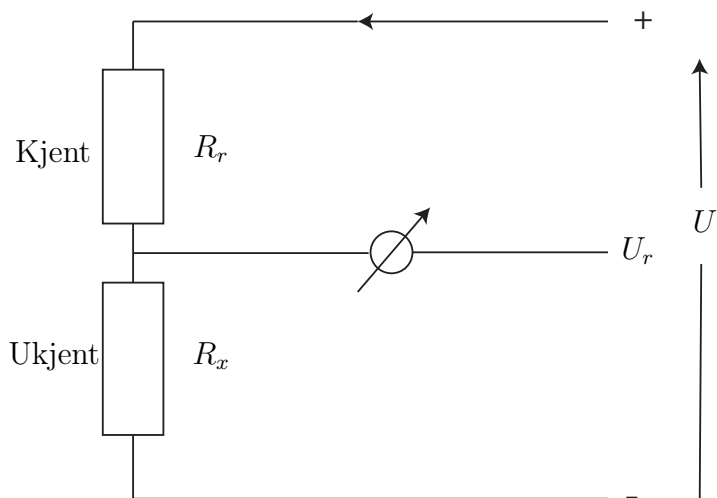
$$U = U_r + U_x \Rightarrow U_x = U - U_r.$$



Figur 11.2: Firepunktskobling for måling av motstand.



Figur 11.3: Instrument som anvender firledermåling for måling av resistans.



Figur 11.4: Halvbro, eller spenningsdeler.

Dermed følger det at

$$\begin{aligned}\frac{U_r}{R_r} &= \frac{U - U_r}{R_x} \\ R_x &= R_r \frac{U - U_r}{U_r}.\end{aligned}$$

Ulempen med denne metoden er avhengigheten av forsyningsspenningen U som igjen varierer med ledningsmotstanden.

Dette problemet kan løses ved å bruke en helbro, eller Wheatstone-bro, som er vist i Figur 11.5. Av de fire motstandene R_1, \dots, R_4 motstandene i helbroen er én ukjent, minst én variabel og de resterende konstante og kjente. Voltmeteret måler potensialforskjellen mellom punktene A og B . Ved å variere den variable motstanden inntil voltmeteret viser $U_{AB} = 0$ sier vi at målebroen er balansert. Det går da ikke noe strøm gjennom voltmeteret, og vi har at

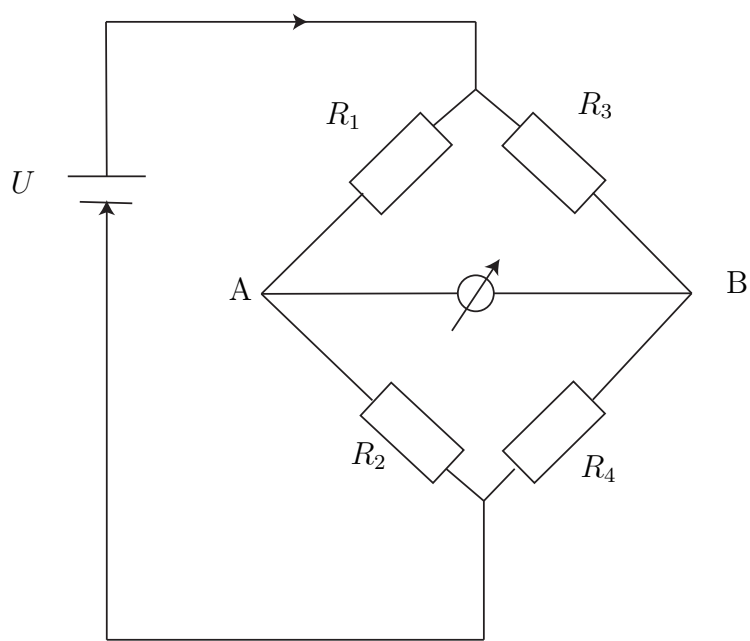
$$I_1 = I_2 \text{ og } I_3 = I_4. \quad (11.1)$$

Siden $U_{AB} = 0$ har vi at

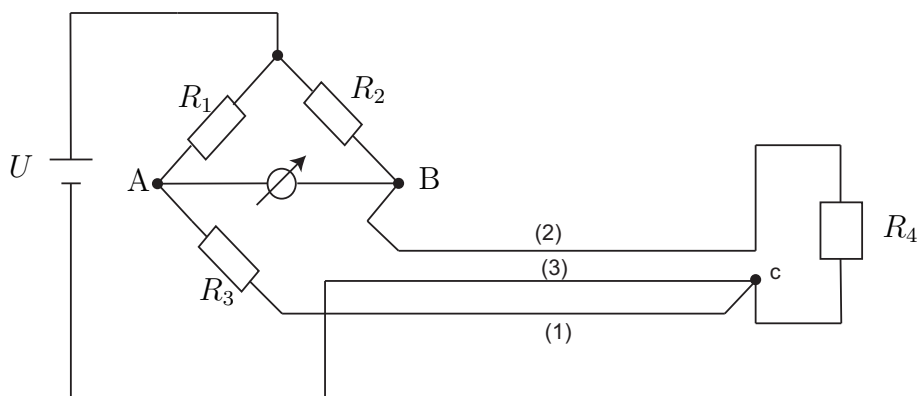
$$I_1 R_1 = I_3 R_3 \quad (11.2)$$

og

$$I_2 R_2 = I_4 R_4. \quad (11.3)$$



Figur 11.5: Helbro, eller Wheatstone-bro.



Figur 11.6: Helbro med trelederkobling.

Ved å dividere (11.2) på (11.3) får vi

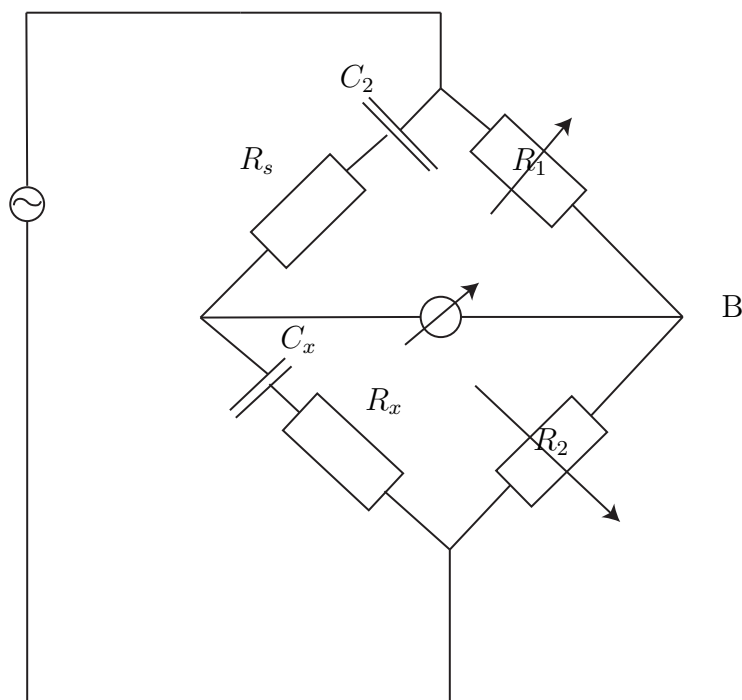
$$\frac{I_1 R_1}{I_2 R_2} = \frac{I_3 R_3}{I_4 R_4},$$

som ifølge (11.1) gir

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

som kan løses med hensyn på den ukjente motstanden. Som vi ser er resultatet uavhengig av driftspenningen til målebroen.

Hvis den ukjente motstanden er en resistiv føler (som måler temperatur, krefter, mm) som er ligger langt fra resten av målebroen i avstand vil temperaturvariasjoner i ledningenes resistans kunne bli vesentlige [Olsen, 1989]. Dette vil i stor grad påvirke nøyaktigheten til målebroen. En god løsning i slike tilfeller er en trelederkobling som vist i Figur 11.6. Temperaturvariasjonene vil være like store i begge lederene slik at nullpunktet ikke flyttes. Trelederkoblingen fungerer bra for resistive elementer plassert langt unna resten av broen, og som er del av en arm i en bro der én motstand varierer. På den annen side, målebroer der alle resistorene er variable er gjerne plassert i én pakke/komponent og nå en slik bro er plassert langt borte fra resten av systemet, må andre teknikker brukes for å opprettholde nøyaktigheten. Målebroer kan også bli drevet av konstante strømkilder. Dette har en fordel når broen er lokalisert langt fra eksitasjonen fordi motstand i ledningene ikke introduserer feil i målingen.



Figur 11.7: Målebro for måling av ukjent kapasitans.

11.2 Kapasitans

Kapasitans kan måles ved hjelp av en målebro drevet av vekselsspennning slik som vist i Figur 11.7. Det kan da vises at den ukjente kapasitansen C_x kan finnes ved hjelp av sammenhengene

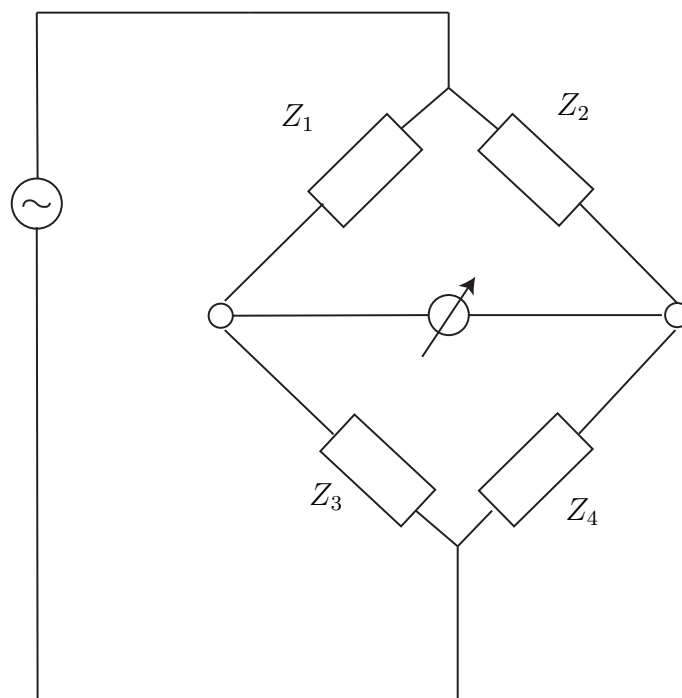
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_x}{C_s}.$$

der R_1 og R_2 er variable, men kjente motstander og C_s er en kjent kapasitans.

Kapasitans kan også måles ved å la den ukjente kapasitansen være den frekvensbestemmende komponenten i en oscillatorrets. Dermed kan man måle frekvensen, og så regne ut kapasitansen.

Det er også mulig å formulere en målebro for generell impedans Z . En slik generell vekselspenningsdrevet impedansmålebro er vist i Figur 11.8. Denne broen er i balanse når

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}. \quad (11.4)$$



Figur 11.8: Målebro for måling av ukjent generell impedans.

Legg merke til at Z_i i (11.4) er et kompleks tall, det vil si både med fase og amplitude. Slik kan man også konstruere målebroer for måling av induktans.

11.3 Lys og optiske sensorer

En viktig egenskap ved et måleinstrument er at det så liten grad som mulig påvirker det som skal måles, det vil si prosessen. Når elektromagnetisk stråling, for eksempel synlig lys, brukes for å utføre målinger av tilstander i en prosess, oppnås i stor grad dette. Slike måleinstrumenter er ikke i fysisk kontakt med omgivelsene.

Det er aktuelt å måle både synlig lys, infrarødt og ultrafiolett lys. Lyskilder velges slik at de gir ønsket bølgelengde på lyset som detektoren skal detektere. Eventuelt kan lyset filteres slik at kun ønskede frekvenskomponenter når detektoren. Lysdioder kan brukes som lyskilde hvis effektkravet er lavt.

11.3.1 Emisjonsceller

Fotoelektrisitet er et fenomen som oppstår når metaller bestråles med lys med tilstrekkelig energi. Elektroner blir frigjort fra overflaten av metallet hvis energien til lyset er høy nok. Denne energien E er gitt av Einsteins lov,

$$E = h(f - f_0),$$

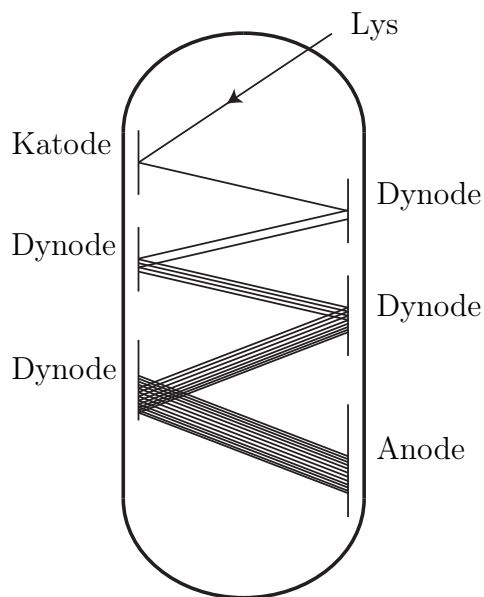
der h er Plancks konstant, f_0 er den materialavhengige terskelfrekvensen og f er frekvensen til lyset. Emisjonscellen består av en anode og en katode. Katoden belegges med det lysfølsomme metallet og det settes opp et potensial over cellen. Strømmen av de løsrevne elektronene som dannes i kretsen er avhengig av lysintensiteten. Emisjonscellen brukes i dag mest i det ultrafiolette området.

En fotomultiplikator er en følsom lysmåler som bygger på samme prinsipp som emisjonscellen. De frigjorte elektronene trekeks mot en positiv elektrode kalt en dynode for å frigjøre enda fler elektroner. Dette repeteres et antall ganger før elektronstrømmen til slutt når anoden. Fotomultiplikatoren har således en forsterkning: ett enkelt foton som treffer katoden kan resultere i en million elektroner på anoden. Forsterkninger på 10^5 til 10^7 er typisk. Det er dette som gjør fotomultiplikatoren til en av de mest sensitive tilgjengelige lysmålerene. En skisse av en fotomultiplikator er vist i figur [11.9](#).

Fotomotstander

Fotomotstander er også kjent som lysfølsomme motstander eller LDR (Light dependent resistor). Disse er produsert av halvledermaterialer og har variabel elektrisk motstand som følge av elektromagnetisk stråling. Hvis lysets frekvens er større enn en materialavhengig grensefrekvens vil elektronhullpar frigjøres. Vanlige materialer for fotomotstander for synlig (400 nm - 700nm) og nær infrarødt (700nm - 1400 nm) lys er kadmiumbaserte slik som kadmiumsulfid (CdS), CdSe og CdTe. CdS har en respons som er nær det menneskelige øyet, og er således mest vanlig i målinger som involverer menneskelig persepsjon av lys. For infrarødt lys brukes blyforbindelser som blysulfid PbS, PbSe og PbTe. For infrarødt ($3\mu m - 14mm$) brukes diverse indiumbaserte materialer (InSb, InAs), tellur, og HgCdTe-legeringer. Disse lange bølgelengdene er ute av rekkevidde for fotodioder.

Sammenhengen mellom motstanden R for en fotomotstand og belysningsstyrken $E[\text{lux}]$ er sterkt ulineær. Detaljerte modeller finnes for dette, men en



Figur 11.9: Fotomultiplikator.

enkel modell er gitt av

$$R = AE^{-\alpha},$$

der A og α er materialavhengige konstanter. For CdS er $0.7 < \alpha < 0.9$ [Pallàs-Areny and Webster, 2001]. Endringen i motstand kan også oppgis som en funksjon av lysets intensitet,

$$\Delta R = f(I), \quad (11.5)$$

der lysintensitet $I = P/A$ er effekt pr areal og måles i W/m^2 . Funksjonen $f(I)$ er ulineær og avtar med økende I . Fotomotstanden er en førsteordens prosess og tidskonstanten er avhengig av materialet, belyningsstyrken, belyningshistorien og temperaturen. Responstiden når lysstyrken økes kan være på noen få millisekunder. Glemmetiden, det vil si responsen når lysstyrken minsker, er som regel mye tregere. Denne hastigheten oppgis gjerne i $k\Omega/s$.

Lysfølsomme dioder og transistorer

Fotovoltaiske celler er best kjent for bruk i solcellepaneler for generering av elektrisk energi fra sollys, men dette prinsippet brukes også til å produsere

måleinstrumenter. Lysfølsomme dioder og transistorer genererer en spenning som er avhengig av den mottatte elektromagnetiske strålingen. De krever liten plass, har lang levetid og rask respons. [Johnson, 2003] oppgir at spenningen følger formelen

$$V_c \approx V_0 \ln(1 + I_R),$$

der V_c er den åpne krets genererte spenningen, V_0 er konstant avhengig av konstruksjonen til komponenten og I_R er den mottatte lysintensiteten. Den interne resistansen R_c varierer også med lysintensitet, men er nær konstant for høye intensiteter. Fototransistorer/dioder har en responstid (10-90%) i μs -området, og er således raskere enn fotomotstander. Komponenter med responstid i ns -området finnes.

11.3.2 Magnetfelt

Måling av magnetfelt kan gjøres på flere forskjellige måter, vi vil her presentere to.

Hallgenerator

Hall-effekten, oppdaget av Edwin Hall i 1879 i gull, kan brukes til å måle magnetfelt. Strøm sendes gjennom et ledende materiale, gjerne halvleder, plassert i et magnetfelt \mathbf{B} . En Lorentz-kraft gitt av

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

virker på elektronene, der q er elektronets ladning og \mathbf{v} er elektronhastigheten. Kraften virker normalt på planet spent ut av strømrørningen og magnetfeltet. Ladning trekkes over på den ene siden av sensoren slik at en spenning V_H proporsjonal med B dannes. Hallspenningen, V_H , er gitt av

$$V_H = \frac{A_H}{d}IB,$$

der d er tykkelsen av det ledende materialet, I er strøm, A_H er Hallkoeffisienten som er avhengig av materialet i sensoren og \mathbf{B} er magnetfeltet som måles. Hall sensorer levers som integrerte kretser.

Magnetoresistive sensorer

Disse sensorene baserer seg på magnetoresistive effekt som ble oppdaget av Lord Kelvin i 1856 i jern og nikkel. Magnetfeltet gir en resistansendring på $2 - 5\%$ som kan måles. Endringen i resistans kan måles i en målebro.

Den såkalte gigantiske magnetoresistive effekt som er basert på lagdelte strukturer av magnetisk og ikke-magnetiske materialer ble oppdaget så sent som 1988. I slike sensorer er resistansendringen på $4 - 20\%$. De er også mer nøyaktige, tåler større temperaturvariasjoner og høyere frekvenser, men er dyrere enn Hallgeneratorer.

Kapittel 12

Mekaniske sensorer

12.1 Måling av posisjon

12.1.1 Potensiometer

Måling av posisjon ved hjelp av et potensiometer, eller variabel motstand, benytter prinsippet om å måle motstand og så regne om til avstand. Dette er en av de enkleste metodene for avstandsmåling. Prinsippet er illustrert i figur 12.1. En slepekontakt beveger seg langs en motstand med resistans R_T og delmotstanden R følger sammenhengen

$$R = \frac{\rho}{A}x = \frac{\rho l}{A}\alpha, \quad (12.1)$$

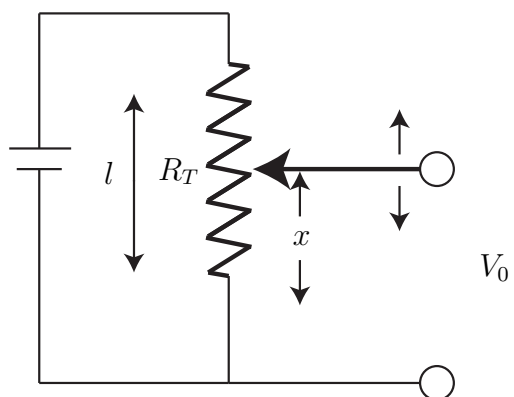
der ρ er resistivitet, eller spesifikk motstand, A er tverrsnittsareal, l er lengden av potensiometeret, x er avstanden som måles og $\alpha = x/l$. Hvis R måles i for eksempel en målebro, vil den ukjente avstanden x kunne beregnes som

$$x = \frac{A}{\rho}R. \quad (12.2)$$

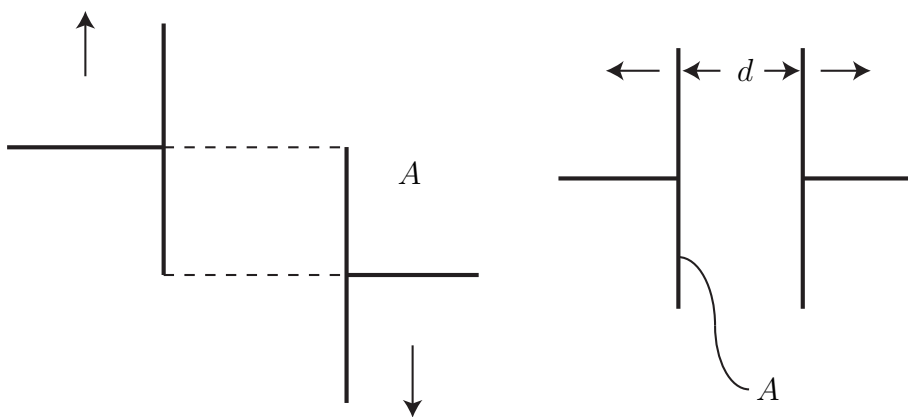
Slitasje på grunn av friksjon vil være et problem i slike målinger, og man vil også få mye målestøy.

12.1.2 Kapasitive sensorer

Kapasitans mellom to elektroder varierer både med arealet, avstanden og mediet mellom elektrodene. Dermed er variabel kapasitans velegnet for måling



Figur 12.1: Potensiometer for måling av posisjon.



Figur 12.2: Kapasitans varierer med avstand og areal.

av for eksempel nivå i tanker og mekanisk forskyvning. Kapasitansen C for en kondensator bestående av to parallelle plater som vist i Figur 12.2 er gitt av

$$C = K\varepsilon_0 \frac{A}{d},$$

der K er den dielektriske konstanter, ε_0 er permitiviteten, A er overlappende plateareal og d er avstanden mellom platene. Kapasitansen endres hvis d eller A endres, hvilket kan utnyttes i avstandsmålinger.

12.1.3 Strekkklapper

Bruk av strekkklapper som sensorer for posisjon bygger på prinsippet om at resistansen i en leder endres når den strekkes. Dette ble oppdaget av Lord Kelvin i 1856. Sammenhengen mellom spesifikk påtrykt kraft, stress, og strekk er illustrert i figur 12.3. Stress er definert som

$$stress = \frac{F}{A}, \quad (12.3)$$

og strekk defineres som

$$strekk = \frac{\Delta l}{l}, \quad (12.4)$$

der Δl er endringen i lengde. Det engelske ordet strain er mye i bruk i stedet for strekk. Strekk er dimensjonsløst, men gis som oftest enheten $[\mu m/m]$. Sammenhengen mellom strekk og stress for et materiale er vist i figur 12.4. Forholdet mellom disse størrelsene,

$$E = \frac{stress}{strekk} = \frac{F/A}{\Delta l/l}, \quad (12.5)$$

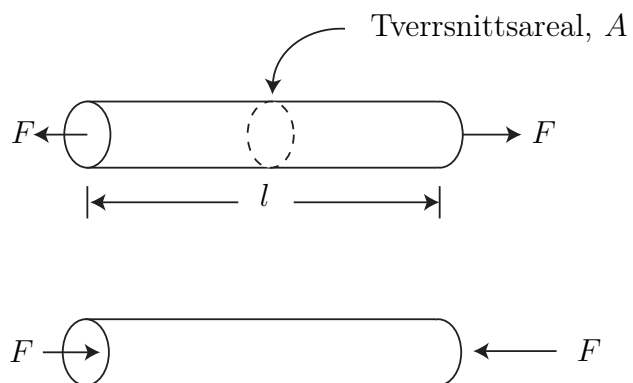
kalles elastisitetsmodulen. E er en materialkonstant, men den varierer med temperatur.

Vi vil nå utlede hvordan resistansen i en elektrisk motstand varierer med strekk. Resistansen er gitt av

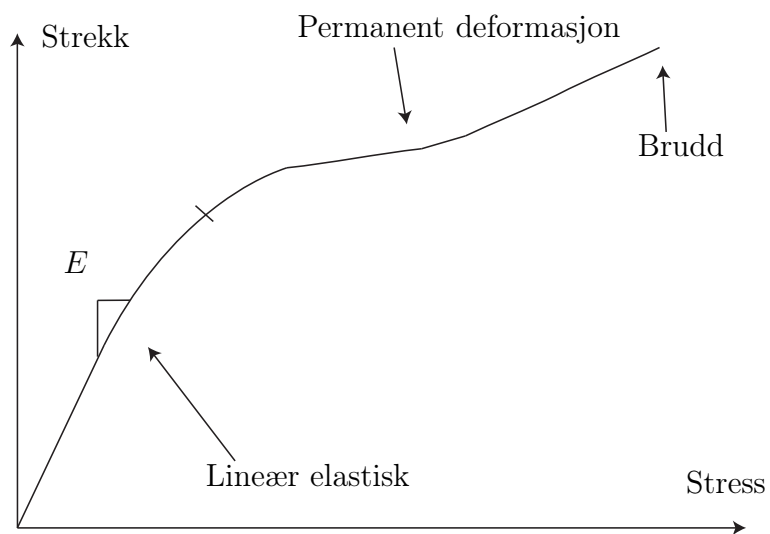
$$R_0 = \rho \frac{l_0}{A_0}, \quad (12.6)$$

der ρ er resistivitet, l_0 er nominell (ustrekt) lengde og A_0 er nominellt tverrsnittsareal. Vi antar at metallet utsettes for en kraft F og strekkes Δl slik at

$$l = l_0 + \Delta l. \quad (12.7)$$



Figur 12.3: Strekk og kompresjon av en leder.



Figur 12.4: Sammenheng mellom stress og strekk

Volumet av motstanden forblir konstant slik at tverrsnittarealet minker

$$A = A - \Delta A. \quad (12.8)$$

Volumet av motstanden kan nå skrives som

$$V = l_0 A_0 = l A = (l_0 + \Delta l)(A_0 - \Delta A), \quad (12.9)$$

og resistansen er endret til

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{(l_0 + \Delta l)}{(A_0 - \Delta A)}. \quad (12.10)$$

Vi ønsker å finne en sammenheng som er uavhengig av endringen i areal og fra (12.9) har vi at

$$(A_0 - \Delta A) = \frac{l_0 A_0}{(l_0 + \Delta l)} \quad (12.11)$$

som innsatt i (12.10) gir

$$R = \rho \frac{(l_0 + \Delta l)}{(A_0 - \Delta A)} = \rho \frac{(l_0 + \Delta l)^2}{l_0 A_0} \quad (12.12)$$

$$R = \rho \frac{l_0^2 + 2l_0 \Delta l + (\Delta l)^2}{l_0 A_0} \quad (12.13)$$

Siden endringen i lengde er liten, gjør vi nå en tilnærming og antar

$$(\Delta l)^2 \approx 0. \quad (12.14)$$

Dette er en brukt antagelse og kan sammenlignes med linearisering der vi bare beholder førsteordens ledd av Δ -størrelser. Vi har nå følgende sammenheng

$$R = \rho \frac{l_0^2 + 2l_0 \Delta l}{l_0 A_0} = \rho \frac{l_0 + 2\Delta l}{A_0} \quad (12.15)$$

som også kan skrives som

$$R = \underbrace{\rho \frac{l_0}{A_0}}_{R_0} \left(1 + 2 \frac{\Delta l}{l_0} \right) \quad (12.16)$$

og vi ser at

$$R = R_0 + \Delta R, \quad (12.17)$$

der

$$\Delta R = 2R_0 \frac{\Delta l}{l_0} \quad (12.18)$$

som er den sammenhengen vi ønsket å finne. Vi skal se hvordan dette kan brukes i et eksempel

Example 44 En metalltråd med $R_0 = 120\Omega$ utsettes for et strekk på $1000\mu\text{m}/\text{m}$. Endringen i resistans kan da regnes ut som

$$\Delta R = 2R_0 \frac{\Delta l}{l_0} = 2 \cdot 120\Omega \cdot 1000 \cdot 10^{-6} = 0.24\Omega \quad (12.19)$$

Dette svarer til en endring i resistans på $\frac{0.24}{120} \cdot 100 = 0.2\%$.

Siden endringen i resistans som følge av strekk ser ut til å være liten er det interessant å sammenligne denne effekten med andre kilder for endring i resistans.

Example 45 Den samme metalltråden som i eksempel 44 utsettes nå for en temperaturendring på 1°C . Endringen i resistans er da gitt av

$$\Delta R_T = R_0 \alpha \Delta T, \quad (12.20)$$

der ΔT er temperaturendringen og α er en materialkonstant. Vi har at

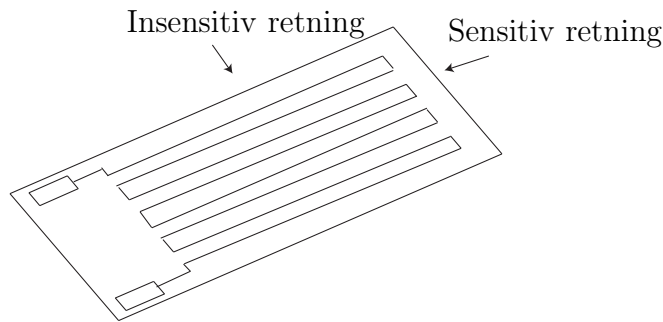
$$\Delta R_T = 120\Omega \cdot 0.004(^{\circ}\text{C})^{-1} \cdot 1^{\circ}\text{C} = 0.48\Omega. \quad (12.21)$$

Eksempelene over viser at i dette tilfellet er endringen i resistans som følge av en liten temperaturendring dobbelt så stor som endringen i resistans som følge av et strekk. Dette medfører at instrumenter for måling av strekk som er basert på dette prinsippet må ha en mekanisme for å kompensere for temperaturendringer.

En mye brukt formel for endring i resistans som følge av strekk er

$$\frac{\Delta R}{R} = k \frac{\Delta l}{l}, \quad (12.22)$$

der $k = 2$ i (12.17). Dette gjelder for metaller. Det finnes legeringer som er spesielt designet for dette bruk og de kan ha verdier på k opp til 10, og halvledere kan ha k -verdier opp til 200. Prinsippet om motstandsending som følge av strekk brukes i en type sensorer kalt strekkklapper. En slik er vist i figur 12.5 og som vi ser er en metalltråd lagt frem og tilbake mange ganger for å mangedoble effekten av strekket. Sensoren består av en plastikkklapp med en innvevd tråd. Endringen av resistans i lappen kan måles i en målebro, og det trengs en lapp for hver retning man ønsker å måle i.



Figur 12.5: Strekkklapp

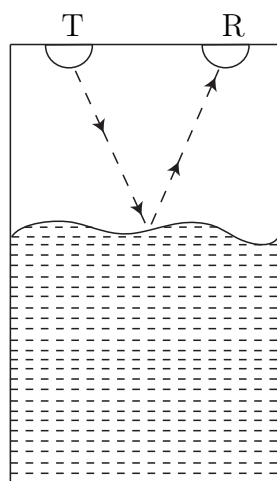
12.1.4 Måling av nivå

Måling av nivå i tanker er beslektet med måling av posisjon. I figur 12.6 er det vist fire forskjellige prinsipper. Figur a) og b) viser bruk av ultralyd for nivåmåling. Et signal sendes fra en sender T (transmitter) og mottas i R (receiver). Avstanden beregnes ved å ta tiden det tar før signalet er mottatt. Ved å ha måleutstyret over overflaten, kan det brukes til å måle nivå for både fluider og fast stoff. Et lignende måleprinsipp er å bruke radar inne i tanken. Figur c) viser bruk av en flottør. Endring av nivå fører til endring av vinkel som kan måles. Figur d) viser bruk av kapasitiv måling av nivå. To kosentriske sylindrer er nedsenket i væsken. Dette fungerer som to kondensatorer i parallell med forskjellige dielektriske konstanter, og en endring i nivå vil føre til en endring i den totale kapasitansen C som kan måles i for eksempel en målebru.

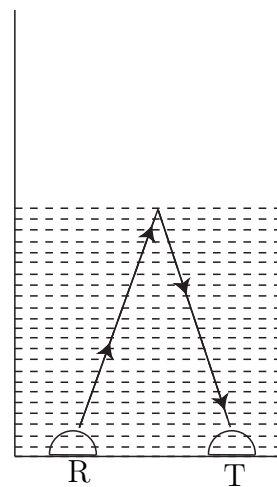
12.2 Måling av strømning

Måling av strømning omfatter måling av faststoff, væsker og gass. Valg av måleprinsipp avhenger av egenskapene til det mediet som skal måles. Det er tre forskjellige størrelser som er aktuelle for måling:

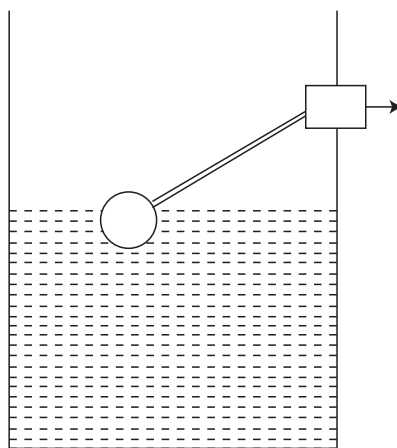
1. volumstrøm Q med enhet $[m^3/s]$, $[m^3/h]$ osv
2. strømningshastighet $v = \frac{Q}{A}$ der A er tverrsnittsareal. Enhet $[m/s]$
3. massestrøm $w = \rho Q$ der ρ er tetthet. Enhet $[kg/s]$



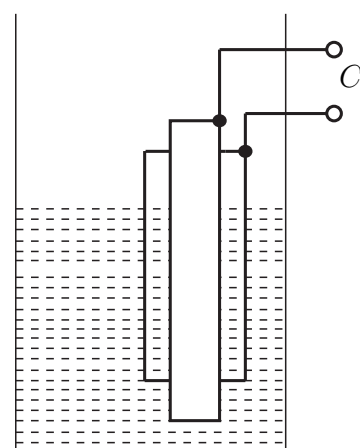
a)



b)



c)



d)

Figur 12.6: Prinsipper for måling av nivå.

12.2.1 Måling av faststoff

Måling av faststoffstrømning kan utføres ved hjelp av en båndvekt. Dette prinsippet er vist i Figur 7.12. Massestrømmen beregnes som

$$w = \frac{mv}{L}, \quad (12.23)$$

der m er målt masse ved hjelp av en vekt eller en lastcelle, v er båndets hastighet og L er lengden vi måler over.

12.2.2 Måling av gass og væske

For strømning i rør er kunnskap om strømningsbildet avgjørende, se figur 12.7. De horisontale pilene illustrerer størelsen på strømningshastigheten i et tverrsnitt av røret. Figur a) viser et generelt strømningsbilde, b) illustrerer et Newtonsk, laminært strømningsbilde der profilen har parabelform, C) viser turbulent strømning og d) viser plastisk strømning. Hvilken type strømning vi har vil diktere hva slags måleprinsipp som kan brukes.

Måleskive

Bruk av måleskive for måling av strømning baserer seg på bruk av bevaring av potensiell energi E_p og kinetisk energi E_k

$$E_p + E_k = pV + \frac{1}{2}\rho V v^2, \quad (12.24)$$

der p er trykk, V er volum og v er strømningshastighet. Hvis vi setter opp denne sammenhengen for målingene i figur 12.8 får vi følgende sammenheng

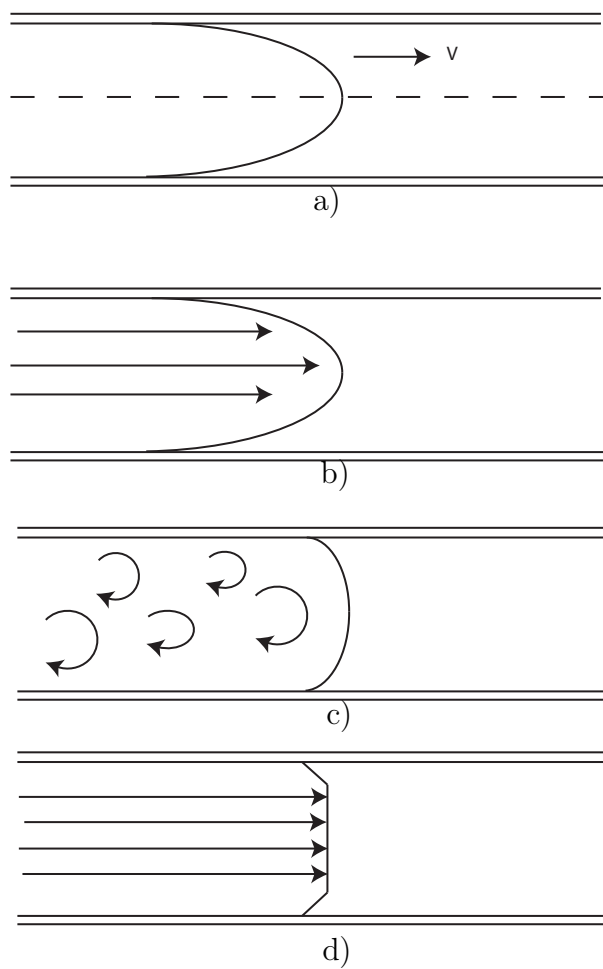
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (12.25)$$

også kjent som Bernoullis ligning. I kombinasjon med kontinuitetsligningen

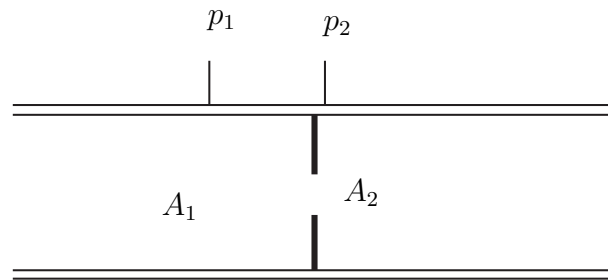
$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (12.26)$$

gir dette oss muligheten til å beregne strømmingen når vi kjenner trykkene:

$$Q = A_2 v_2 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - m^2)}}, \quad (12.27)$$



Figur 12.7: Forskjellige strømningsbilder



Figur 12.8: Måleskive

der $m = A_2/A_1$. Måleskiver er den enkleste formen for trykkfallbastert strømningsmåling. Andre varianter basert på samme prinsipp er bruk av dyser og venturidyser. Disse måleinstrumentene egner seg for turbulent strømning av både væsker og gasser. Andre måleinstrumenter for måling av strømning inkluderer pitotrør, rotametre, turbinmetre, ultralydsmålere, og magnetisk strømningsmåler

Kapittel 13

Signaler og sampling

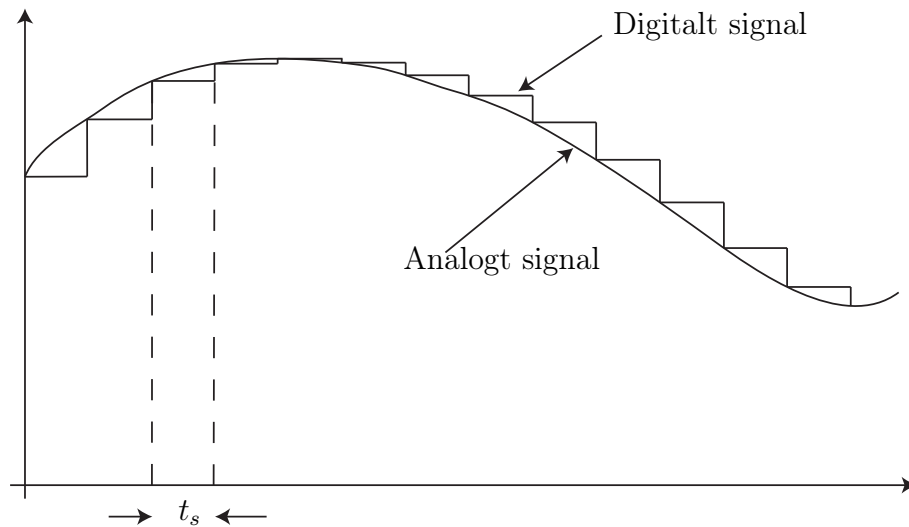
13.1 Digitale og analoge signaler

Signaler er informasjonsbærere i reguleringsystemer og riktig behandling av signalene er en viktig del av reguleringsystemet. Vi skal her skille mellom to typer signaler: analoge og digitale. En hovedforskjell på disse signalene er at analoge signaler er kontinuerlige i tid, mens digitale signaler er det vi kaller diskrete i tid, det vil si de består av øyeblikksverdier. De to typene signaler er illustrert i Figur 13.1. De fleste fysiske størrelsene vi finner i en reguleringsprosess er analoge. Dette kan være nivået i en tank, hastigheten til en bil, posisjonen til en robot eller spenningen over en kondensator. For at en datamaskin som kun opererer med digitale signaler skal kunne kommunisere med disse prosessene må vi kunne gjøre om de analoge signalene til digitale. Overføring fra måleinstrumenter til datamaskin krever at analoge signaler gjøres digitale, dette er kjent som AD-omsetning. Overføring fra datamaskin til pådragsorgan krever at digitale signaler gjøres analoge. Dette er kjent som DA-omsetning.

13.2 Sampling

For å omsette fra analog til digital brukes ofte en tast-og-hold krets (Eng: sample and hold) som vist i figur 13.2. Bryteren åpnes og lukkes med en frekvens

$$f_s = 1/t_s, \quad (13.1)$$



Figur 13.1: Analog og digital signal

der t_s er tastetiden, og øyeblikksverdier av den analoge inngangsspenningen V_i kan måles som utgangsspenningen V_o over kondensatoren C . En tast-og-hold krets opererer i ett av tre modus:

Holdemodus Bryeren er åpen. Utgangsverdien påvirkes ikke av signalet på inngangen

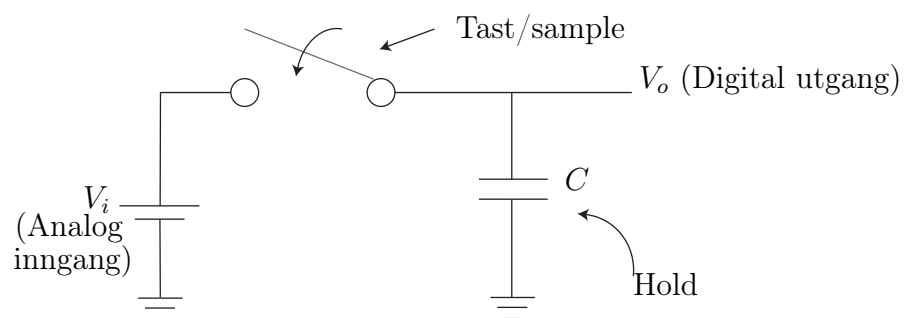
Følgemodus Bryteren er sluttet. Utgangen følger inngangen

Innsvingningsmodus Den tiden det tar for V_o å svinge seg inn til riktig verdi. Vi har her å gjøre med et førsteordens system med tidskonstant $T = RC$.

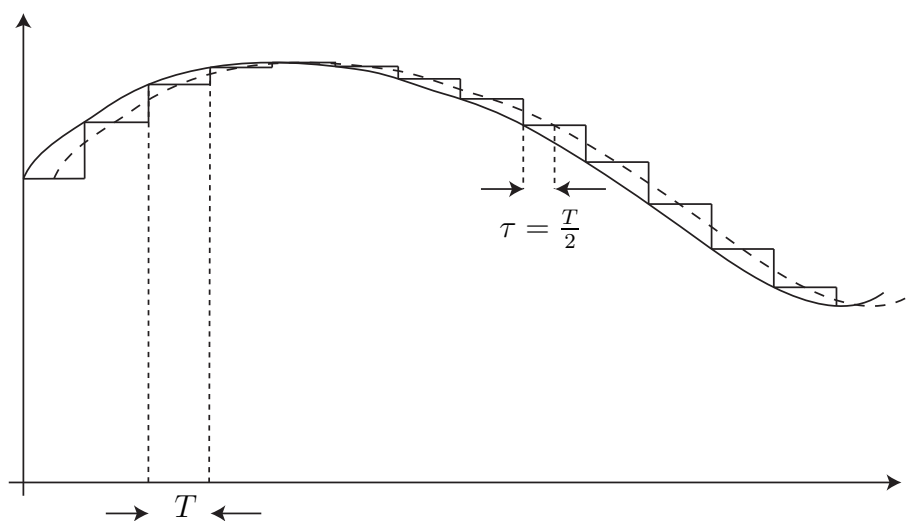
En slik tastemetode som vi har beskrevet her kalles nullte-ordens hold (Eng: zero order hold, ZOH). Det finnes også forskjellige typer av 1.ordens hold som også involverer en integrator.

En effekt av tasting er at hvis vi glatter ut det tastede signalet så får vi et signal som er tidsforsinket med en halv taste-periode. Dette er illustrert i figur 13.3 og det kan være viktig å ta hensyn til denne forsinkelsen i design av reguleringssystemer.

Et viktig spørsmål i denne sammenheng er: Hvor fort må vi taste for å kunne korrekt representere et analog signal på digital form? Svaret på dette



Figur 13.2: Sample and hold krets



Figur 13.3: Sampling medfører tidsforsinkelse

gis av følgende teorem:

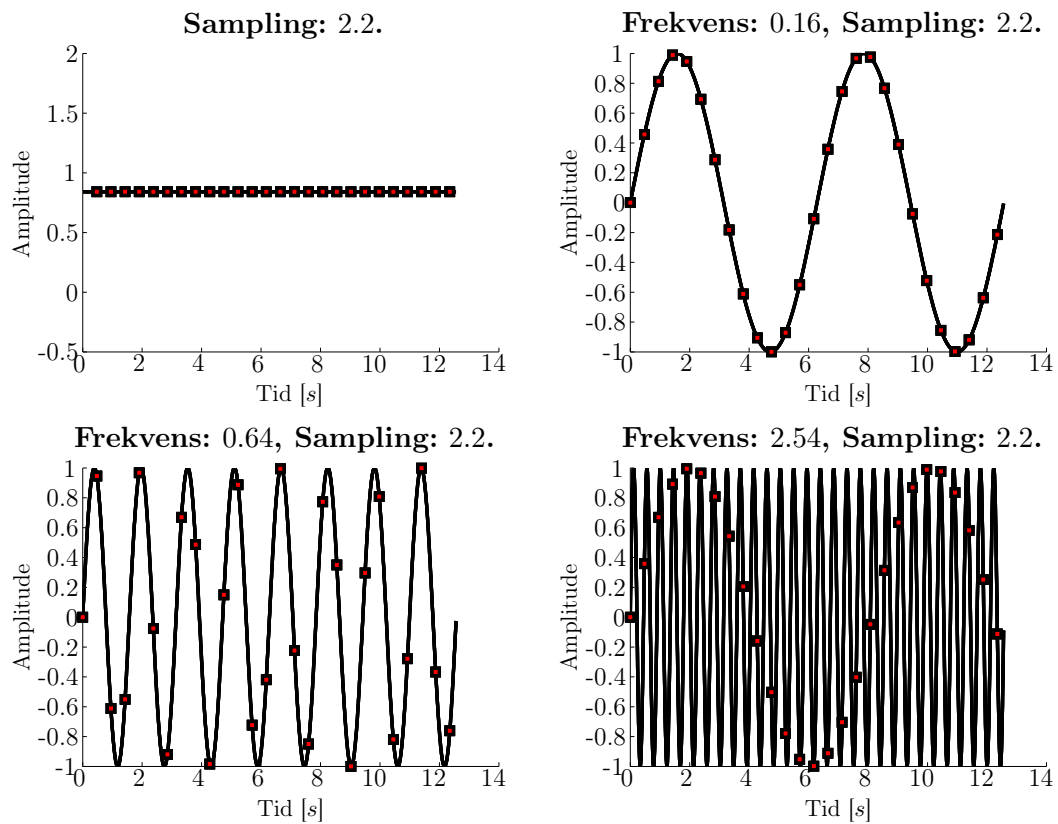
Nyquist-Shannons samplingsteorem

Et analog signal kan representeres med et digital signal, og rekonstrueres fra dette, hvis samplingsfrekvensen f_s er minst dobbelt så stor som den høyeste frekvensen f_{max} i signalet,

$$f_s \geq 2f_{max}. \quad (13.2)$$

Frekvensen f_{max} kalles for signalets nyquistfrekvens. Hvis vi taster med for lav frekvens, oppstår et fenomen kalt nedfolding (Eng: aliasing). Dette er illustrert i figur 13.4. Samme frekvens er brukt for å sample signaler med forskjellig frekvens. Neders til høyre ser vi hva som skjer hvis vi sampler et signal med frekvens $2.54Hz$ med en tastefrekvens på $2.2Hz$. Sinussignalet som oppstår har en mye lavere frekvens enn originalsignalet, det er dette som er nedfolding.

Merk at det er noen forutsetninger som ligger til grunn for samplings-teoremet. For det første må signalet være båndbegrenset, det vil si at det inneholder en max-frekvens, og for det andre må vi, for å gjenskape et signal ved å taste med $f_s = 2f_{max}$, taste uendelig mange ganger. Disse forutsetningene er som regel ikke oppfylt, og en god regel er derfor å taste raskere, for eksempel å velge $f_s = 10f_{max}$.



Figur 13.4: Konsekvensen av å bruke samme tastefrekvens på signaler med forskjellige frekvens.

Bibliografi

- [Balchen et al., 2003] Balchen, J., Andresen, T., and Foss, B. (2003). *Reguleringsteknikk*. Institutt for teknisk kybernetikk, NTNU, Trondheim.
- [Egeland, 1993] Egeland, O. (1993). *Servoteknikk*. Tapir Forlag, Trondheim.
- [Egeland and Gravdahl, 2002] Egeland, O. and Gravdahl, J. (2002). *Modeling and Simulation for Automatic Control*. Marine Cybernetics, Trondheim.
- [Fossen, 2002] Fossen, T. (2002). *Marine Control Systems: Guidance, Navigation, and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*. Marine Cybernetics, Trondheim.
- [Gravdahl and Egeland, 2004] Gravdahl, J. and Egeland, O. (2004). New undergraduate courses in control. *IEEE Control Systems magazine*, 24(5):31–35.
- [Gravdahl et al., 2004] Gravdahl, J., Willems, F., de Jager, B., and Egeland, O. (2004). Modeling of surge in free-spool centrifugal compressors: Experimental validation. *AIAA Journal of Propulsion and Power*, 20(5):849–857.
- [Johnson, 2003] Johnson, C. (2003). *Process Control Instrumentation Technology*. Prentice Hall, 7th edition.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [Lorentzen et al., 2003] Lorentzen, L., Hole, A., and Lindstrøm, T. (2003). *Kalkulus Med En Og Flere Variable*. Universitetsforlaget, Oslo.
- [Olsen, 1989] Olsen, O. (1989). *Instruemnteringsteknikk*. Tapir, Trondheim.

- [Pallàs-Areny and Webster, 2001] Pallàs-Areny, R. and Webster, J. (2001). *Sensors and Signal Conditioning*. John Wiley and Sons, New York, 2nd edition.
- [Rizzoni, 2004] Rizzoni, G. (2004). *Principles and Applications of Electrical Engineering*. McGraw-Hill, New York.
- [Rossen and Gravdahl, 2018] Rossen, E. and Gravdahl, J. (2018). kybernetikk - store norske leksikon.
- [Wiener, 1948] Wiener, N. (1948). *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine*. Wiley, New York.
- [Ziegler and Nichols, 1942] Ziegler, J. and Nichols, N. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 64:759–768.

Tillegg A

Komplekse tall

A.1 Introduksjon

De fleste vil si at man ikke kan ta kvadratroten til et negativt tall. Dette utsagnet er kun riktig hvis man begrenser seg til de reelle tall. De komplekse tall er et større tallsystem som inneholder slike tall som kvadratrøtter til negative tall i tillegg til de reelle tallene. Et kompleks tall $z \in \mathbb{C}$, der \mathbb{C} er mengden av komplekse tall, skrives som

$$z = a + bi, \quad (\text{A.1})$$

der $a, b \in \mathbb{R}$ og i er den imaginære enhet definert som

$$i^2 = -1 \quad (\text{A.2})$$

eller

$$i = \sqrt{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Realdelen til det komplekse tallet z er gitt av

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (a + bi) = a, \quad (\text{A.4})$$

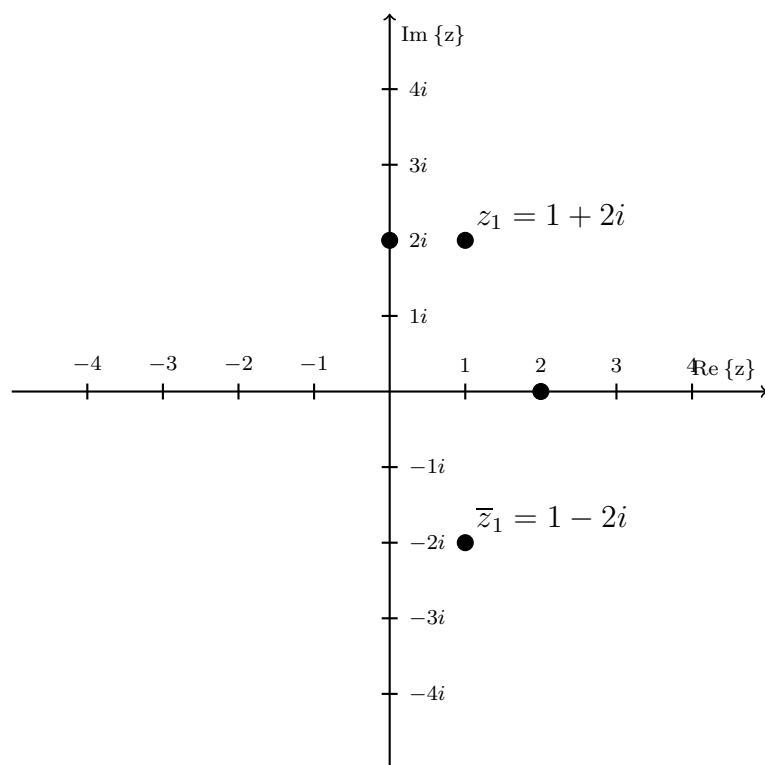
mens imaginærdelen til det komplekse tallet z er gitt av

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} (a + bi) = b. \quad (\text{A.5})$$

Videre så er absoluttverdien til z gitt av

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{A.6})$$

De komplekse tall utgør et utvidelse av de reelle tall. De reelle tallene \mathbb{R} kan plasseres på tallinjen, mens de komplekse tallene kan avsettes som punkter i det komplekse plan \mathbb{C} som vist i figur [A.1](#).



Figur A.1: Det komplekse plan. Det reelle tallet 2, det imaginære tallet $2i$ og de to komplekskonjugerte tallene $1 + 2i$ og $1 - 2i$ er markert

A.2 Regneregler

Vi vil introdusere regneregler for komplekse tall ved å regne på de to komplekse tallene $z_1 = 1 + 2i$ og $z_2 = -2 + 3i$

A.2.1 Komplekskonjugering

Konjugering betyr å skifte fortegn på den imaginære delen av et kompleks tall. Dette skrives på følgende måte

$$\bar{z}_1 = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i. \quad (\text{A.7})$$

A.2.2 Addisjon og subtraksjon

Addisjon og subtraksjon av komplekse tall foregår ved at man adderer realdelen og imaginærdelen hver for seg, det vil si

$$z_1 + z_2 = (1 - 2) + (2 + 3)i = -1 + 5i \quad (\text{A.8})$$

og tilsvarende med subtraksjon

$$z_1 - z_2 = (1 + 2) + (2 - 3)i = 3 - i. \quad (\text{A.9})$$

A.2.3 Multiplikasjon

Ved multiplikasjon følger vi vanlige regneregler, vi må bare passe på at $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (1 + 2i)(-2 + 3i) &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3i + 2i \cdot (-2) + 2i \cdot 3i \\ &= -2 + 3i - 4i + 6i^2 = -2 - 6 + 3i - 4i \\ &= -8 - i. \end{aligned}$$

Det er verdt å legge merke til at et kompleks tall multipisert den komplekskonjugerte av det samme tallet vil gi et reelt tall:

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_1 &= (1 + 2i)\overline{(1 + 2i)} = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 \\ &= 1 - 2^2 i^2 = 5 = |z_1|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Den siste likheten gjelder generelt, det vil si

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (\text{A.11})$$

A.2.4 Divisjon

Divisjon av komplekse tall er litt mer omfattende. Fremgangsmåten er å multiplisere både telleren og nevneren i den aktuelle brøken med den komplekskonjugerte av nevneren, slik at nevneren blir et reelt tall:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+2i}{-2+3i} = \frac{(1+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-3i-4i+6}{4+9} \\ &= \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i\end{aligned}\tag{A.12}$$

A.3 Anvendelser

Komplekse tall har anvendelser i svært mange forskjellige grener av matematikk, fysikk og ingeniørfag. For eksempel vil vi nå være i stand til å finne løsningen på alle andregradsligninger, også de som gir negative tall under rottegnet:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm 2i.\end{aligned}\tag{A.13}$$

Som vi ser, får vi to komplekskonjugerte tall $x_1 = -1 + 2i$ og $x_2 = -1 - 2i$ som svar.

En annen nyttig egenskap ved de komplekse tall er sammenhengen mellom eksponensialfunksjonen og trigonometriske funksjoner gjennom ligningen

$$e^{i\phi} = \sin \phi + i \cos \phi,\tag{A.14}$$

som er kjent som Eulers formel. Ved å sette inn $\phi = \pi$ får man den kjente Eulers likhet

$$e^{i\pi} + 1 = 0\tag{A.15}$$

som gir oss den vakre sammenhengen mellom 0, 1, e , π og i . Mer om dette og andre anvendelser av komplekse tall vil dere lære i Matematikk 3.

Register

- Åpen sløyfe, [64](#)
- Asymptotisk stabilitet, [90](#)
- Balanselover
 - energibalanse, [10](#)
 - kraftbalanse, [12](#), [26](#)
 - massebalanse, [14](#)
 - momentbalanse, [27](#)
- Dødsone, [106](#)
- Dempningsfaktor, relativ, [38](#)
- Eulers metode, [49](#)
- Fag i høyere årskurs
 - Fartøystyring, [18](#), [78](#)
 - Lineær systemteori, [30](#), [78](#), [89](#)
 - Modellering og simulering, [10](#), [49](#)
 - Optimalisering og regulering, [78](#)
 - Reguleringsteknikk, [23](#), [30](#), [32](#), [78](#), [89](#)
 - Robust regulering, [32](#)
 - Ulineære systemer, [8](#), [89](#)
- Faseportrett, [93](#)
- Foroverkobling, [73](#)
- Forsterkning, [35](#), [44](#)
- Forstyrrelse, [73](#)
- Grensesvingning, [98](#)
- Homogen differensialligning, [25](#)
- Ikke-homogen differensialligning, [25](#)
- Integrator windup, [107](#)
- Integrerende prosess, [67](#)
- Likevektspunkt, [9](#), [34](#), [89](#)
- Linearisering, [20](#)
- Lukket sløyfe, [64](#)
- Lyapunovs dirkete metode, [119](#)
- Marginal stabilitet, [94](#)
- Metning, [106](#)
- Monovariabel systemer, [31](#)
- Multivariabel systemer, [31](#)
- Nedfolding, [158](#)
- Norm, [90](#)
- Nyquistfrekvens, [158](#)
- Oversvingsfaktor, [40](#)
- P-regulator, [65](#), [103](#)
- Pådrag, [64](#)
- PD-regulator, [71](#), [119](#)
- PI-regulator, [67](#), [75](#)
- PID-regulator, [73](#)

- Referanse, [64](#)
- Reguleringsavvik, [64](#)
- Resonansfrekvens
 - dempet, [39](#)
 - udempet, [38](#)
- Robotmanipulator, [118](#)

- Samplingsteoremet, [158](#)
- Simulering, [49](#)
- Stabilisering, [102](#)
- Stabilitet, [89](#)
 - av numeriske metoder, [55](#)
- Stasjonært avvik, [66](#)
- Stasjonærverdi, [34](#)
- Statisk prosess, [32](#)

- Tidskonstant, [34](#)
- Tilbakekobling, [46](#), [64](#)
- Tilstandsromform, [8](#)
- Tilstandsrommodell, [8](#)
- Transient, [34](#)

- Ustabilitet, [90](#)