Løsningsforslag Eksamen TTK4100 Kybernetikk introduksjon

Desember 2018

Oppgave 1. (28 %)

a) (2 %) Newtons 2. (kraftbalanse) og momentbalanse.

b) (5 %)

$$
\begin{aligned}
F_1 &= mg + u - m\ddot{y} \\
&= mg + u - mr_1\ddot{\phi} \\
\\
F_2 &= kx + d\dot{x} \\
&= kr_2\phi + dr_2\dot{\phi} \\
\\
J\ddot{\phi} &= F_1 r_1 - F_2 r_2 \\
&= mgr_1 + r_1 u - mr_1^2\ddot{\phi} - kr_2^2\phi - dr_2^2\dot{\phi} \\
\\
\Longrightarrow \; (mr_1^2 + J)\ddot{\phi} + dr_2^2\dot{\phi} + kr_2^2\phi &= mgr_1 + r_1 u
\end{aligned}
$$

c) (4 %)

$$
\ddot{\phi} + \frac{dr_2^2}{(mr_1^2 + J)}\dot{\phi} + \frac{kr_2^2}{(mr_1^2 + J)}\phi = \frac{mgr_1}{(mr_1^2 + J)} + \frac{r_1}{(mr_1^2 + J)}u
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0^2 &= \frac{kr_2^2}{(mr_1^2 + J)} \Longrightarrow \omega_0 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{kr_2^2}{(mr_1^2 + J)}}}} \\
2\zeta\omega_0 &= \frac{dr_2^2}{(mr_1^2 + J)} \\
\Longrightarrow \zeta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dr_2^2}{mr_1^2 + J} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{mr_1^2 + J}{kr_2^2}} \cdot \frac{dr_2^2}{mr_1^2 + J} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(mr_1^2 + J) \cdot d^2 r_2^4}{kr_2^2 \cdot (mr_1^2 + J)^2}} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{dr_2}{\sqrt{k \cdot (mr_1^2 + J)}}}}
\end{aligned}
$$

d) (4 %) Merk at $\dot{\phi}_r = 0$.

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} + 2\zeta\omega_0\dot{\phi} + \omega_0^2\phi &= \frac{mgr_1}{(mr_1^2+J)} + \frac{r_1}{(mr_1^2+J)}u \\
&= \frac{mgr_1}{(mr_1^2+J)} + \frac{r_1}{(mr_1^2+J)}\big(k_p(\phi_r-\phi) + k_d(\dot{\phi}_r - \dot{\phi})\big) \\
\ddot{\phi} + \Big(2\zeta\omega_0 + \frac{k_d r_1)}{mr_1^2+J}\Big)\dot{\phi} + \Big(\omega_0^2 + \frac{k_p r_1}{mr_1^2+J}\Big)\phi &= \frac{mgr_1}{(mr_1^2+J)} + \frac{k_p r_1 \phi_r}{(mr_1^2+J)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_0^2 &= \omega_0^2 + \frac{k_p r_1}{mr_1^2+J} \\
\Longrightarrow k_p &= \underline{\underline{\frac{(\tilde{\omega}_0^2 - \omega_0^2)(mr_1^2+J)}{r_1}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tilde{\zeta}\tilde{\omega}_0 &= 2\zeta\omega_0 + \frac{k_d r_1}{mr_1^2+J} \\
\Longrightarrow k_d &= \underline{\underline{\frac{(2\tilde{\zeta}\tilde{\omega}_0 - 2\zeta\omega_0)(mr_1^2+J)}{r_1}}}
\end{aligned}$$

Alternative løsninger for innsetting av verdier for ω_0 og ζ:

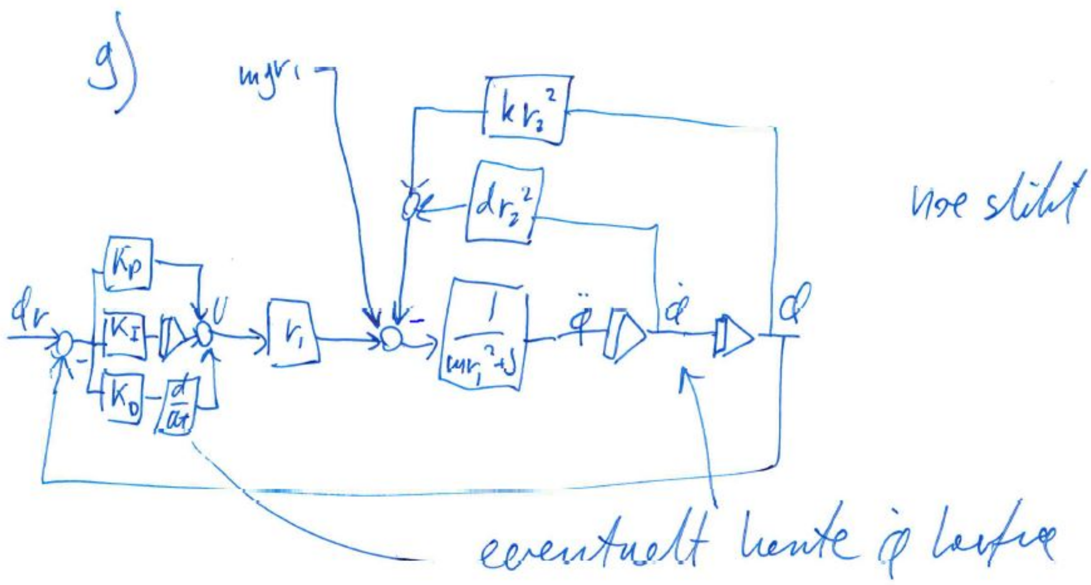
$$k_p = \underline{\underline{\frac{\tilde{\omega}_0^2(mr_1^2+J) - kr_2^2}{r_1}}} \qquad k_d = \underline{\underline{\frac{2\tilde{\zeta}\tilde{\omega}_0(mr_1^2+J) - dr_2^2}{r_1}}}$$

e) (2 %) Ønsker ikke oversving som kan gjøre at lasten krasjer inn i båtdekket. Derfor er kritisk dempning en god idé, dvs. $\tilde{\zeta} = 1$.

f) (3 %) I (6) har vi konstantledd pga g, og dette vil man kompensere for ved bruk av integralvirkning.

g) (5 %) Se figur 1.

h) (3 %) At pådragety går i metning kan føre til wind-up, der metning i pådraget fører til at integralleddet i regulatoren hoper seg opp og det blir stor over-shoot. Kan løses med anti-wind-up.



Figur 1: Blokkdiagram for systemet (6) i lukka sløyfe med PID-regulatoren (8)

Oppgave 2. (10 %)

a) (5 %)

$$
\begin{aligned}
x &= l\cos q_1 + l\cos(q_1+q_2) + \ldots + l\cos(q_1+\ldots+q_n) = l\sum_{i=1}^{n}\cos(\sum_{j=1}^{i} q_j) \\
y &= l\sin q_1 + l\sin(q_1+q_2) + \ldots + l\sin(q_1+\ldots+q_n) = l\sum_{i=1}^{n}\sin(\sum_{j=1}^{i} q_j)
\end{aligned}
$$

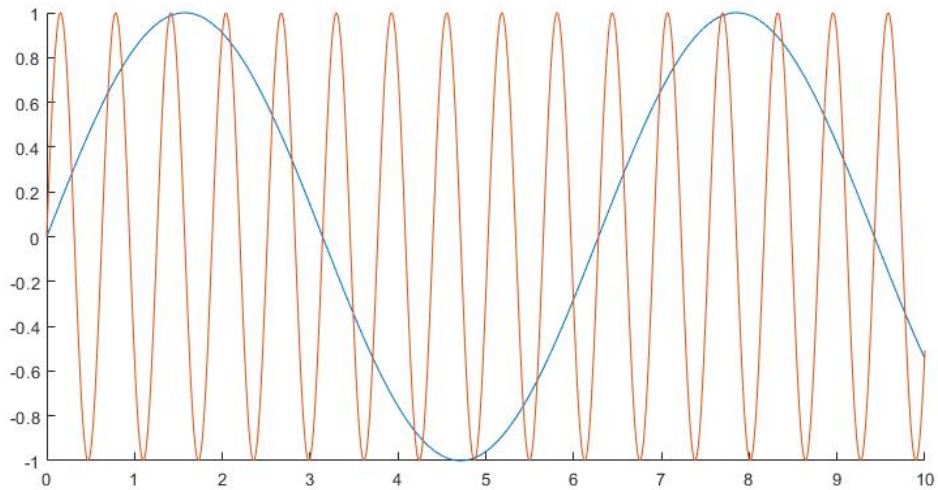
b) (5 %) Inverskinematikk. Blir *veldig* komplisert, og har mange løsninger.

Oppgave 3. (6 %)

a) (3 % Et analog signal kan representeres med et digital signal, og rekonstrueres fra dette, hvis samplingsfrekvensen f_s er minst dobbelt så stor som den høyeste frekvensen f_{max} i signalet,

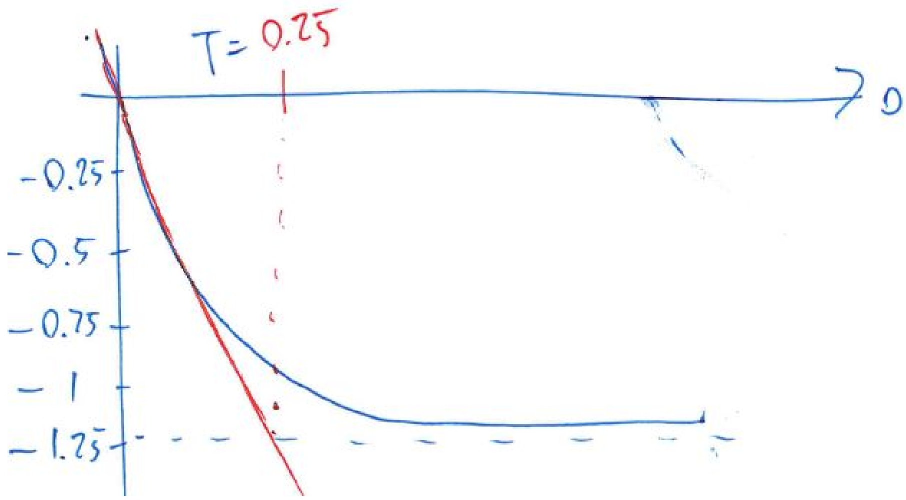
$$f_s > 2f_{max}$$

I praksis brukes gjerne en enda større samlingsfrekvens $f_s = 10f_{max}$.



Figur 2: Nedfolding

b) (3 %)Nedfolding (Eng: aliasing) er et fenomen som oppstår når vi sampler med for lav samlingsfrekvens, slik at det gjenskapte signalet ikke stemmer med det opprinnelige signalet. Dette er vist i figur 2.



Figur 3: Tidskonstant

Oppgave 4. (12 %)

a) (2 %)

$$\dot{x} = ax + bu = -4x - u$$

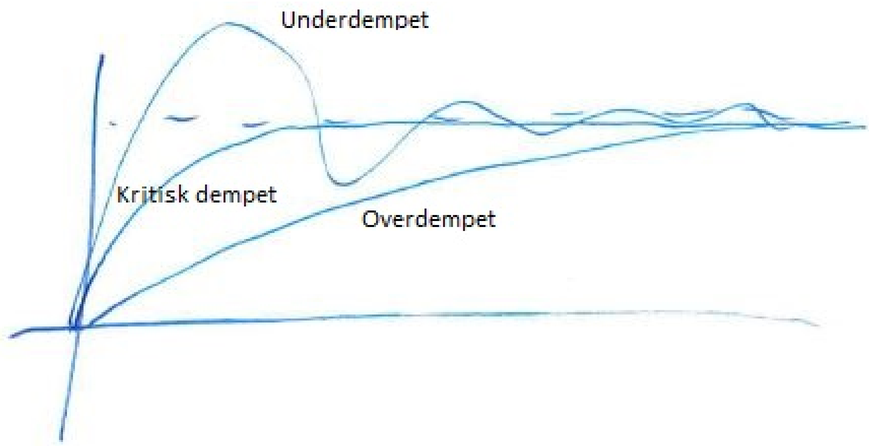
$$T = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{(-4)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \qquad K = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{-4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

b) (3 %) Punktet der tangenten fra initialverdien skjærer linja langs stasjonærverdien, se figur 3.

c) (2 %) Gitt systemet

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 0.09x = 0$$
$$\omega_0^2 = 0.09 \implies \omega_0 = \sqrt[+]{0.09} = \underline{\underline{0.3}}$$
$$2\zeta\omega_0 = 0.6 \implies \zeta = \frac{0.6}{2\omega_0} = \frac{0.6}{2 \cdot 0.3} = \underline{\underline{1}}$$

d) (2 %) Kritisk dempet



Figur 4: Underdemping, kritisk demping og overdemping

e) (3 %) Et underdempet signal vil få svigninger før det retter seg inn mot stasjonærverdien, mens et overdempet system vil vlitt langsomt, og bruke lenger tid på å nå stasjonærverdien, men uten svingninger. Et kritisk dempet system når stasjonærverdien raskest mulig, uten svingninger. Se figur 4.

Oppgave 5. (8 %)

a) (6 %) Tidskonstanten T er tida fra signalet begynner å endre verdi og til det når 63 % av stasjonærverdien, her ca. 0.45 sek.
Forsterkningen K er forholdet mellom inngangssignalet u og stasjonærverdien, her $K = 1$.
Tidsforsinkelsen τ er tida fra inngangssignalet u blir gitt og fram til signalet begynner å endre verdi, her $\tau = 0.25$ sek.

b) (2 %) Bruker likninga for τ selv om likninga for T egentlig kunne vært brukt på samme måte fordi det står nevnt i oppgaven at V_0 er ukjent/vanskelig å bestemme nøyaktig.

$$\tau = \frac{Ad}{q} \implies \underline{\underline{q = \frac{Ad}{\tau}}}$$

Oppgave 6. (6 %)

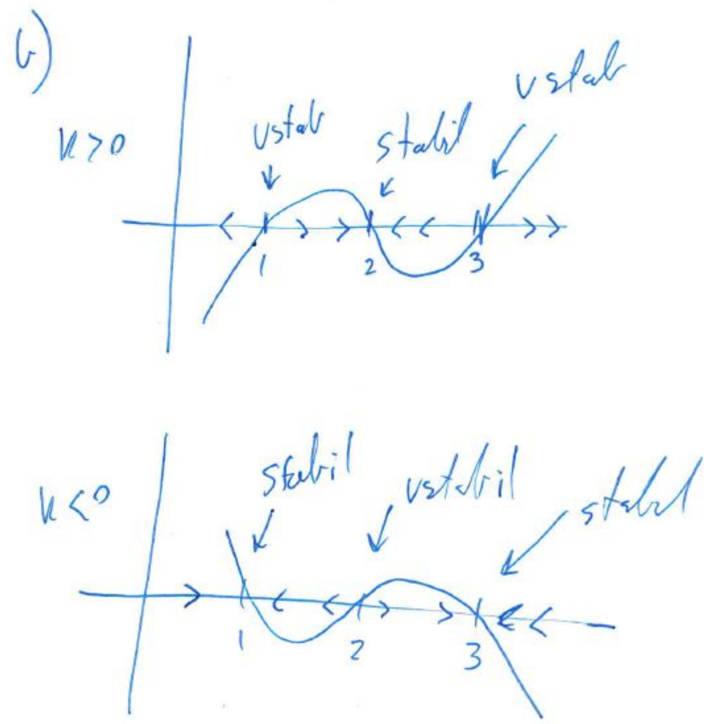
a) (2 %)

$$\dot{x} = 0 = k(x-1)(x-2)(x-3) \implies x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

b) (4 %) k > 0:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\sim (x-1)(x^2-5x+6) \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x + 6 = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 11 \\ f'(x_1) = f'(1) &= 3 - 12 + 11 = 2 \implies x_1 = 1 \text{ ustabilt} \\ f'(x_2) = f'(2) &= 12 - 24 + 11 = -1 \implies x_2 = 2 \text{ stabilt} \\ f'(x_3) = f'(3) &= 27 - 36 + 11 = 2 \implies x_3 = 3 \text{ ustabilt} \end{aligned}$$



Figur 5: Grafisk løsning av stabilitet for likevektspunkt

Akkurat motsatt når k < 0:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= k(x-1)(x-2)(x-3) \\
&\sim (1-x)(x^2-5x+6) \\
&= -x^3+6x^2-11x+6 = f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -3x^2+12x-11 \\
f'(x_1)=f'(1) &= -3+12-11=-2 \implies x_1=1 \;\; \text{stabilt} \\
f'(x_2)=f'(2) &= -12+24-11=1 \implies x_2=2 \;\; \text{ustabilt} \\
f'(x_3)=f'(3) &= -27+36-11=-2 \implies x_3=3 \;\; \text{stabilt}
\end{aligned}$$

Oppgave 7. (10 %)

a) (2 %) Energibalanse

b) (4 %)

$$
\begin{aligned}
u = P &= -k_p(T - T_r) \\
\\
\dot{T} &= -k_1 T - k_2 k_p (T - T_r) \\
0 &= -k_1 T_s - k_2 k_p (T_s - T_r) \\
(k_1 + k_{2k} p) T_s &= k_2 k_p T_r \\
T_s &= \frac{k_2 k_p}{k_1 + k_2 k_p} T_r \\
\\
e_s &= T_r - T_s \\
&= \frac{k_1 + k_2 k_p p}{k_1 + k_2 k_p} T_r - \frac{k_2 k_p}{k_1 + k_2 k_p} T_r \\
&= \underline{\underline{\frac{k_1}{k_1 + k_2 k_p} T_r}}
\end{aligned}
$$

alternativt:

$$
\begin{aligned}
T_r &= \frac{k_1 + k_2 k_p}{k_2 k_p} T_s \\
\\
e_s &= T_r - T_s \\
&= \frac{k_1 + k_2 k_p}{k_2 k_p} T_s - \frac{k_2 k_p}{k_2 k_p} T_s \\
&= \underline{\underline{\frac{k_1}{k_2 k_p} T_s}}
\end{aligned}
$$

c) (4 %)

$$
\begin{aligned}
u = P &= k_p(T_r - T) + k_i \int_0^t (T_r - T(\tau))d\tau \\
\dot{T} &= -k_1 T + k_2\big(k_p(T_r - T) + k_i \int_0^t (T_r - T(\tau))d\tau\big) \\
\ddot{T} &= -k_1 \dot{T} - k_2 k_p \dot{T} + k_2 k_i (T_r - T)
\end{aligned}
$$

setter derivert signal til 0:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 - 0 + k_2 k_i (T_r - T_s) \\
\Longrightarrow T_s &= T_r
\end{aligned}
$$