

# Darstellung rationaler Zahlen durch Ägyptische Brüche

Lars Berger

Universität der Bundeswehr München

18. Dezember 2019

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmen

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Nennenswerte Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

## Definition

Ein Bruch soll fortan „in ägyptischer Form“ bzw. „Ägyptischer Bruch“ heißen genau dann, wenn er in der Form

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

mit paarweise verschiedenen  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , vorliegt.

# Ägyptische Multiplikation

Beispiel:  $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
	16	1104
<hr/>		
Summe:	0	0

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Ägyptische Multiplikation

Beispiel:  $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
✓	16	1104
<hr/>		
Summe:	16	1104

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungelöste theoretische  
Fragen

# Ägyptische Multiplikation

Beispiel:  $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
<hr/>		
Summe:	20	1380

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungelöste theoretische  
Fragen

# Ägyptische Multiplikation

Beispiel:  $23 \cdot 69$

	1	69
✓	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
<hr/>		
Summe:	22	1518

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Ägyptische Multiplikation

Beispiel:  $23 \cdot 69$

✓	1	69
✓	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
<hr/>		
Summe:	23	1587

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungelöste theoretische  
Fragen



# Ägyptische Division

Beispiel:  $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
	16	112
<hr/>		
Summe:	0	0

## Ägyptische Brüche

Lars Berger

### Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

### Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

### Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

### Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

# Ägyptische Division

Beispiel:  $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
<hr/>		
Summe:	16	112

### Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

### Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

### Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

### Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

# Ägyptische Division

$$\begin{array}{r} 1 \quad 7 \\ \frac{1}{7} \quad 1 \\ \frac{1}{14} \quad \frac{1}{2} \\ \frac{1}{28} \quad \frac{1}{4} \\ \vdots \quad \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad 7 \\ \frac{1}{2} \quad \quad \quad 3 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

## Ägyptische Brüche

Lars Berger

### Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

### Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

### Auswertung einiger

#### Testreihen

Methodik

Ergebnisse

### Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Ägyptische Division

Beispiel:  $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	16	112

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Beispiel:  $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
✓	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2}$	$115 + \frac{1}{2}$

# Ägyptische Division

Beispiel:  $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
✓	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
✓	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$	$116 + \frac{1}{2}$

# Ägyptische Division

Beispiel:  $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
✓	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
✓	$\frac{1}{7}$	1
✓	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
<hr/>		
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$	117

Betrachtung einer Auswahl:

- ▶ Greedy-Algorithmus
- ▶ Farey-Folgen-Algorithmus
- ▶ Binäralgorithmus

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen



# Der Greedy-Algorithmus

## Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{x_j}.$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

## Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{x_j}.$$

## Algorithmus

1. finde den größten, noch nicht verwendeten Stammbruch  $\frac{1}{x}$ , sodass  $\frac{1}{x} \leq \frac{p}{q}$ .
2. setze  $\frac{1}{x}$  als weiteren Summanden des Ergebnisses
3. falls  $\frac{p}{q} - \frac{1}{x} > 0$ , gehe zu Schritt 1 mit  $\left(\frac{p}{q}\right) \leftarrow \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{x}\right)$ .

### Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

### Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

### Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

### Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

# Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{5}{9}$$

Nebenrechnungen:

# Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{5}{9}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{5}{9} < \frac{1}{1}$$

# Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{5}{9} < \frac{1}{1}$$

# Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

# Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

## Definition

Sei  $q \in \mathbb{N}$ . Die Farey-Folge der Ordnung  $q$ ,  $F_q$ , ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , für die gilt:  
 $0 \leq a \leq b \leq q$ ,  $b \neq 0$ .

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger

### Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen



## Definition

Sei  $q \in \mathbb{N}$ . Die Farey-Folge der Ordnung  $q$ ,  $F_q$ , ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , für die gilt:  
 $0 \leq a \leq b \leq q$ ,  $b \neq 0$ .

Beispiel:  $F_5$

$$F_5 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right).$$

## Algorithmus

Sei  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$  in gekürzter Form der zu zerlegende Bruch.

1. Konstruiere  $F_q$ .
2. Sei  $\frac{r}{s}$  der zu  $\frac{p}{q}$  adjazente Bruch in  $F_q$ , sodass  $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ .  
Aufgrund der Eigenschaften der Farey-Folge gilt dann

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s},$$

wobei  $s < q$ ,  $r < p$ .

3. Wiederhole dieses Vorgehen für  $\frac{r}{s}$  solange, bis  $s = 1 \Leftrightarrow r = 0$ .

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

# Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

$$F_{9rel} = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

$$F_{9rel} = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

$$F_{9rel} = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

## Algorithmus

Sei  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$  in gekürzter Form und  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Finde  $N_{k-1} < q \leq N_k$  wobei  $N_k = 2^k$  ist.
2. Falls  $q = N_k$ , schreibe  $p$  als Summe von Teilern von  $N_k$ , hier  $d_i$  genannt:

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^j \frac{d_i}{N_k} = \sum_{i=1}^j \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}}$$

## Algorithmus

3. Sonst seien  $s, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < q$  so gewählt, dass:

$$pN_k = qs + r.$$

Es folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{pN_k}{qN_k} = \frac{qs + r}{qN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{qN_k}.$$

4. Schreibe  $s = \sum d_i$  und  $r = \sum d'_i$ , wobei  $d_i, d'_i$  jeweils paarweise verschiedene Teiler von  $N_k$  sind.
5. Erhalte den Ägyptischen Bruch:

$$\sum \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}} + \sum \frac{1}{\frac{qN_k}{d'_i}}.$$



# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9}$$

# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16}$$

# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 8 + 8}{9 \cdot 16}$$

# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger

Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 8 + 8}{9 \cdot 16} = \frac{8}{16} + \frac{8}{144}$$

# Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger

Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen

Gesucht: Zerlegung für  $\frac{5}{9}$ .

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 8 + 8}{9 \cdot 16} = \frac{8}{16} + \frac{8}{144} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}.$$

$$\text{Datensatzform: } M_q = \left\{ \frac{p}{q} \mid (2 \leq p < q) \wedge (\text{ggT}(p, q) = 1) \right\}$$

Enthaltene Informationen:

- ▶ die durchschnittliche Anzahl der Summanden,  $\text{avgTerms}(q)$
- ▶ das Minimum der Anzahl der Summanden,  $\text{minTerms}(q)$
- ▶ das Maximum der Anzahl der Summanden,  $\text{maxTerms}(q)$
- ▶ das Minimum des jeweils größten Nenners,  $\text{minDenom}(q)$
- ▶ das Maximum des jeweils größten Nenners,  $\text{maxDenom}(q)$ .

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen



# Durchschnittliche Anzahl der Terme

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

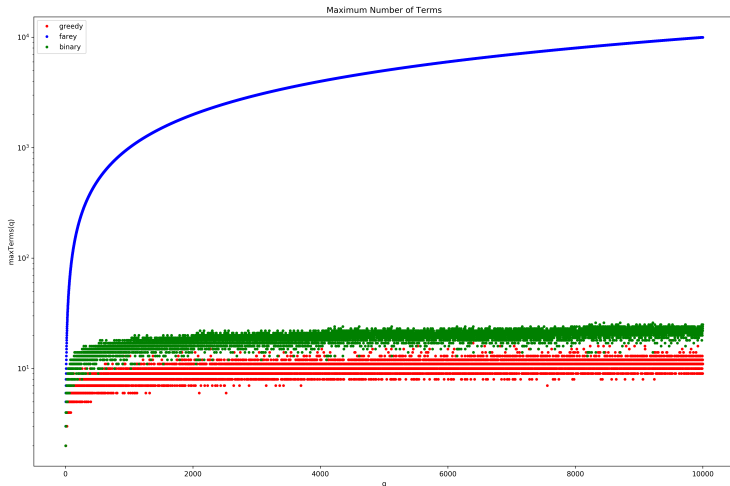
Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen



# Minimum der größten Nenner

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

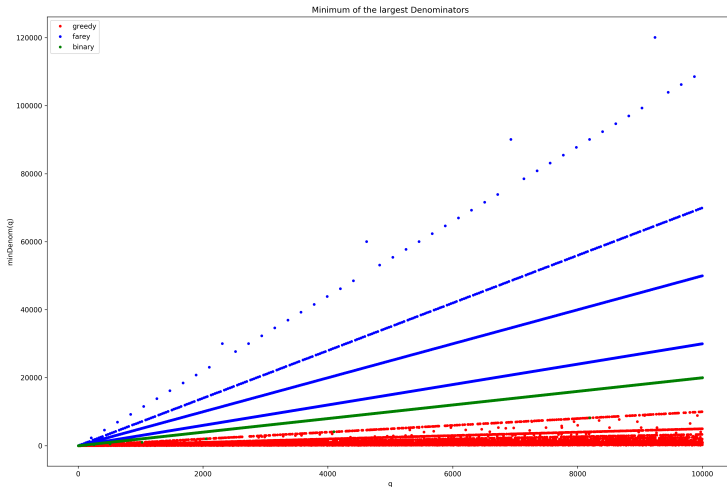
Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen



# Maximum der größten Nenner

Ägyptische Brüche

Lars Berger

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

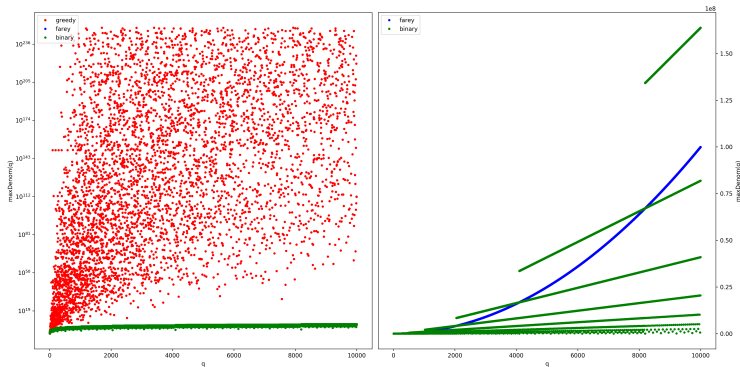
Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen



## Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  ungerade.  $\frac{2}{n}$  lässt sich für jedes  $n$  als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

## Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

## Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

## Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

## Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

## Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  ungerade.  $\frac{2}{n}$  lässt sich für jedes  $n$  als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

## Berechnung von $\frac{3}{n}$

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

### Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

### Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

### Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebnisse

### Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

# Sonstige Ansätze und offene Fragen

Weitere Ansätze und Fragen umfassen u.a.:

- ▶ Thesen für  $\frac{4}{n}$ ,  $\frac{5}{n}$  usw.
- ▶ allgemeingültige Schranken für
  - ▶ Größe der Nenner
  - ▶ Anzahl der Summanden
- ▶ Zulassen auch negativer Terme
- ▶ Umgang mit Polynomen.

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmus

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger  
Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und  
Ausblick

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische  
Fragen