Darstellung rationaler Zahlen durch Ägyptische Brüche

Lars Berger

Universität der Bundeswehr München

18. Dezember 2019

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lilliani

Geschichte

Ägyptische Multiplikatio

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmu:

Auswertung einiger

Methodik

Ergebnis

Theorie u

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretise Fragen

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Geschichte Ägyptische Multiplikation Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithmen

Greedy-Algorithmus Farey-Folgen-Algorithmus Binär-Algorithmus

Auswertung einiger Testreihen

Methodik Nennenswerte Ergebnisse

Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken Ungeklärte theoretische Fragen

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einig

Methodik

Ergebniss

Theorie und

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus Farey-Folgen-Algorithmu

Binar-Aigoritimus

Auswertung einige Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie un Ausblick

Theoretische Schranken
Ungeklärte theoretische

Definition

Ein Bruch soll fortan ,,in ägyptischer Form" bzw. ,,Ägyptischer Bruch" heißen genau dann, wenn er in der Form

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \ge 1$$

mit paarweise verschiedenen x_i , $i \in \{1, ..., n\}$, vorliegt.

Beispiel: 23 · 69

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
	16	1104
Summe:	0	0

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lilliui

Geschich

Ägyptische Multiplikation

7erlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorith

uswertung ein

Auswertung einige Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Ausblick

Beispiel: 23 · 69

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
\checkmark	16	1104
Summe:	16	1104

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lilliui

Geschich

Ägyptische Multiplikation

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorith

Augwertung e

luswertung e

Methodik

Ergebniss

Theorie u Ausblick

Beispiel: 23 · 69

	1	69
	2	138
\checkmark	4	276
	8	552
\checkmark	16	1104
Summe:	20	1380

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintur

Geschich

Ägyptische Multiplikation

7erlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithm

Auswertung ei

Testreihen

Methodik

Theorie

Ausblick

Beispiel: 23 · 69

	1	69
\checkmark	2	138
\checkmark	4	276
	8	552
\checkmark	16	1104
Summe:	22	1518

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintur

Geschich

Ägyptische Multiplikation

7erlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithm

Auswertung einig

Testreihen

Freehniss

Ergebniss

Theorie u Ausblick

Beispiel: 23 · 69

\checkmark	1	69
\checkmark	2	138
\checkmark	4	276
	8	552
\checkmark	16	1104
Summe:	23	1587

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintur

Geschich

Ägyptische Multiplikation

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithm

Auswertung ein

Auswertung einiger Testreihen

Methodik

TI......

Ausblick

Beispiel: 117 ÷ 7

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
	16	112
Summe:	0	0

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Emiur

Geschich:

Ägyptische Multiplikatio Ägyptische Division

Zerlegungsalı

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorith

Binar-Al

Auswertung einige

Methodik

Ergebniss

Theorie i

Theoretische Schranker

Beispiel: 117 ÷ 7

```
1 7
2 14
4 28
8 56
✓ 16 112
Summe: 16 112
```

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintur

Geschicht

Agyptische Multiplikatio Ägyptische Division

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algo

Auswertung einige

Methodik

Ergebniss

Theorie u

Theoretische Schranken

Ägyptische Brüche

1	7
$\frac{1}{7}$	1
$\frac{1}{14}$ $\frac{1}{28}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikatio Ägyptische Division

Zerlegungsalg

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmu

Auswertung einiger

Testreihen

Methodik

Theorie u

Beispiel: 117 ÷ 7

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
\checkmark	16	112
	$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{array}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{\frac{1}{2}}{112}$
Summe:	16	112

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Emiur

Geschich:

Agyptische Multiplikation Ägyptische Division

7erlegungsale

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithm

Auswertung einiger

Methodik

Ergebniss

Theorie

Ausblick
Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Beispiel: 117 ÷ 7

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
\checkmark	16	112
\checkmark	$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} \end{array}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{\frac{1}{2}}{115 + \frac{1}{2}}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2}$	$115 + \frac{1}{2}$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Emiur

Geschichte

Ägyptische Division

7erlegungsalı

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithn

Auswertung einiger

Testreihen

E---b-i--

Ligenniss

Ausblick

Beispiel: 117 ÷ 7

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
\checkmark	16	112
\checkmark	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{7}$	$3 + \frac{1}{2}$
\checkmark	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{\frac{1}{2}}{116 + \frac{1}{2}}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$	$116 + \frac{1}{2}$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintur

Geschichte

Ägyptische Division

7erlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithm

Auswertung einiger

Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie

Theoretische Schranken

Ungeklärte theoretische Fragen

Beispiel: $117 \div 7$

		1	7
		2	14
		4	28
		8	56
\checkmark		16	112
\checkmark		$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
\checkmark		$\frac{1}{7}$	1
\checkmark		$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$	1/1/	117

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintur

Geschich

Ägyptische Multiplikation

Zerlegungsalı

Greedy-Algorithm

Farey-Folgen-Algorith

Binär-Alg

Auswertung einiger

Methodik

Ergebniss

Theorie Ausblick

Zerlegungsalgorithmen

Betrachtung einer Auswahl:

- ► Greedy-Algortihmus
- ► Farey-Folgen-Algorithmus
- ▶ Binäralgorithmus

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lillian

Geschicht

Ägyptische Multiplika

Ägyptische Divisi

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus
Farey-Folgen-Algorithi

.

Auswertung einige

Methodik

Ergebniss

Theorie un Ausblick

Der Greedy-Algorithmus

Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{x_i}.$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Eintunr

Geschicht

Ägyptische Multiplikat

Zerlegungsale

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmu:

Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Theorie ur Ausblick

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{i} \frac{1}{x_i}.$$

Algorithmus

- 1. finde den größten, noch nicht verwendeten Stammbruch $\frac{1}{x}$, sodass $\frac{1}{x} \leq \frac{p}{q}$.
- 2. setze $\frac{1}{x}$ als weiteren Summanden des Ergebnisses
- 3. falls $\frac{p}{q} \frac{1}{x} > 0$, gehe zu Schritt 1 mit $\left(\frac{p}{q}\right) \leftarrow \left(\frac{p}{q} \frac{1}{x}\right)$.

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplikation

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus
Rinär-Algorithmus

Auswertung einiger

Testreihen

Ergebniss

Ergebniss

Ausblick

Ungeklärte theoretische Fragen

Ägyptische Brüche

Lars Bergei

Lillian

Geschichte

Ägyptische Multiplikatio

Ägyptische Division

Zerlegungsalg

 ${\sf Greedy-Algorithmus}$

Farey-Folgen-Algorithmus

Binär-Algorithm

Auswertung einige

Method

Ergebnis

Theorie

Theoretische Schranker

Rechenbeispiel

Farey-Folgen

Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q, F_q , ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: 0 < a < b < q, $b \neq 0$.

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschicht

Ägyptische Multiplikati

Ägyptische Divisior

Zerlegungsalg

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmus

Auguertung einige

uswertung einige estreihen

Methodik

Ergebniss

Theorie ur Ausblick

Farey-Folgen

Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q, F_a , ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: $0 < a < b < q, b \neq 0.$

Beispiel: F_5

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right).$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Zerlegungsalgorithm

Farey-Folgen-Algorithmus

Auswertung einiger

Der Farey-Foglen-Algorithmus

Algorithmus

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ in gekürzter Form der zu zerlegende Bruch.

- 1. Konstruiere F_q .
- 2. Sei $\frac{r}{s}$ der zu $\frac{p}{q}$ adjazente Bruch in F_q , sodass $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$. Aufgrund der Eigenschaften der Farey-Folge gilt dann

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s},$$

wobei s < q, r < p.

3. Wiederhole dieses Vorgehen für $\frac{r}{s}$ solange, bis $s = 1 \Leftrightarrow r = 0$.

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Agyptische Multiplikation Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithm

Farey-Folgen-Algorithmus

Auswertung einiger

Testreihen

Frachnica

Ergebniss

Theorie un Ausblick

Ägyptische Brüche

.ars Berger

Lilliuli

Geschichte

Ägyptische Multiplikati

Ägyptische Division

Zerlegungsalg

Greedy-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einige

Method

Fraebni

Theorie

Theoretische Schranker

Algorihtmus

Sei $rac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ in gekürzter Form und $k \in \mathbb{N}.$

- 1. Finde $N_{k-1} < q \le N_k$ wobei $N_k = 2^k$ ist.
- 2. Falls $q = N_k$, schreibe p als Summe von Teilern von N_k , hier d_i genannt:

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{j} \frac{d_i}{N_k} = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}}$$

Einführung

Geschicht

Gescilicité

Ägyptische Di

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithm

Farey-Folgen-Algorithm Binär-Algorithmus

Auswertung einiger Testreihen

Methodik

Ergebniss

Theorie und Ausblick

3. Sonst seien $s, r \in \mathbb{N}, 0 \le r < q$ so gewählt, dass:

$$pN_k = qs + r$$
.

Es folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{pN_k}{qN_k} = \frac{qs+r}{qN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{qN_k}.$$

- 4. Schreibe $s = \sum d_i$ und $r = \sum d'_i$, wobei d_i , d'_i jeweils paarweise verschiedene Teiler von N_k sind.
- 5. Erhalte den Ägyptischen Bruch:

$$\sum \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}} + \sum \frac{1}{\frac{qN_k}{d_i'}}.$$

Einführung

Geschicht

Ägyptische Multiplikation Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger

Methodik

Ergebniss

Theorie un Ausblick

Ägyptische Brüche

Lars Bergei

Lilliulli

Geschichte

Ägyptische Multiplikati

Ägyptische Division

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algo

...

Testreihen

Methodik

Ergebniss

Theorie u

Theoretische Schranken

Rechenbeispiel

Datensatzform:
$$M_q = \left\{ rac{p}{q} \, | \, (\, 2 \leq p < q) \wedge (\mathsf{ggT}(p,q) = 1)
ight\}$$

Enthaltene Informationen:

- die durchschnittliche Anzahl der Summanden, avgTerms(q)
- das Minimum der Anzahl der Summanden, minTerms(q)
- das Maximum der Anzahl der Summanden, maxTerms(q)
- das Minimum des jeweils größten Nenners, minDenom(q)
- das Maximum des jeweils größten Nenners, maxDenom(q).

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Division

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Binär-Algorithmus

Auswertung einiger

Testreihen

Methodik

Ergebnisse

Theorie und Ausblick

Durchschnittliche Anzahl der Terme

bild

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lilliumi

Geschichte

Ägyptische Multiplikatio

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmus

Binär-A

Auswertung einiger

Methodik

Ergebnisse

Theorie und Ausblick

Minimum der größten Nenner

bild

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lilliumi

Geschichte

Ägyptische Multiplikatio

Zerlegungsalı

Greedy-Algorithmus

Binär-A

Auswertung einiger

Methodik

Ergebnisse

Theorie und

Theoretische Schranken

Maximum der größten Nenner

bild

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Lilliumi

Geschichte

Ägyptische Multiplikatio

- . . .

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Al

Δuswertung e

Auswertung einiger Testreihen

memoun

Ergebnisse

Theorie und Ausblick

Theoretische Schranker

Bekannte theoretische Schranken

Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. $\frac{2}{n}$ lässt sich für jedes n als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} + \frac{1}{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einfun

Geschicht

Ägyptische Multiplikation

Zerlegungsal

Greedy-Algorithmu

Farey-Folgen-Algorithmu

Auswertung einiger

Testreihen

Ergebniss

heorie und

Bekannte theoretische Schranken

Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. $\frac{2}{n}$ lässt sich für jedes n als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} + \frac{1}{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

Berechnung von $\frac{3}{n}$

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} + \frac{1}{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschicht

Ägyptische Multiplikation

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithmus

Farey-Folgen-Algorithmu

Auswertung einiger

Testreihen

Freehniss

Ergebnis

Theorie und Ausblick

Theoretische Schranken

Sonstige Ansätze und offene Fragen

Weitere Ansätze und Fragen umfassen u.a.:

- ► Thesen für $\frac{4}{n}$, $\frac{5}{n}$ usw.
- allgemeingültige Schranken für
 - ► Größe der Nenner
 - Anzahl der Summanden
- Zulassen auch negativer Terme
- Umgang mit Polynomen.

Ägyptische Brüche

Lars Berger

Einführung

Geschichte

Ägyptische Multiplik

Ägyptische Divi

Zerlegungsalgorithm

Greedy-Algorithr

Farey-Folgen-Algorithmu

Auswertung einiger

Testreihen

Methodik

Ergebniss

Theorie u

Ausblick