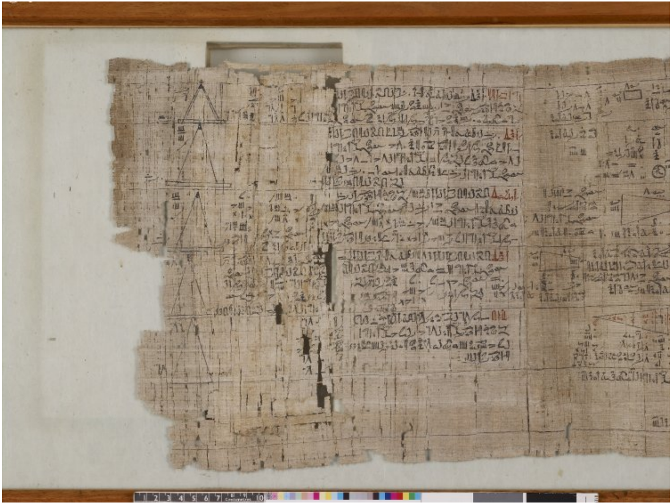
Darstellung rationaler Zahlen durch Ägyptische Brüche

Lars Berger

Universität der Bundeswehr München

18. Dezember 2019

Geschichte



https://research.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?assetId=766120001&objectId=117389&partId=1

Definition

Ein Bruch soll fortan „in ägyptischer Form" bzw. „Ägyptischer Bruch" heißen genau dann, wenn er in der Form

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

mit paarweise verschiedenen x_i, $i \in \{1, ..., n\}$, vorliegt.

Definition

Ein Bruch soll fortan ,,in ägyptischer Form" bzw. ,,Ägyptischer Bruch" heißen genau dann, wenn er in der Form

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

mit paarweise verschiedenen x_i, $i \in \{1, ..., n\}$, vorliegt.

Anmerkung

Es werden nur Brüche $\frac{p}{q}$ mit $0 < \frac{p}{q} < 1$ betrachtet.

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
	16	1104
Summe:	0	0

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	16	1104

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	20	1380

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
✓	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	22	1518

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

✓	1	69
✓	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	23	1587

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
	16	112
Summe:	0	0

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
Summe:	16	112

Ägyptische Division

$$
\begin{array}{cc|cc}
1 & 7 & 1 & 7 \\
\frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & 3+\frac{1}{2} \\
\frac{1}{14} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\
\frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
$\checkmark$	16	112
	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	16	112

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

$$
\begin{array}{lrr}
 & 1 & 7 \\
 & 2 & 14 \\
 & 4 & 28 \\
 & 8 & 56 \\
\checkmark & 16 & 112 \\
\checkmark & \frac{1}{2} & 3 + \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{7} & 1 \\
 & \frac{1}{14} & \frac{1}{2} \\
\hline
\text{Summe:} & 16 + \frac{1}{2} & 115 + \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
$\checkmark$	16	112
$\checkmark$	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
$\checkmark$	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$	$116 + \frac{1}{2}$

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
$\checkmark$	16	112
$\checkmark$	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
$\checkmark$	$\frac{1}{7}$	1
$\checkmark$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$	117

Zerlegungsalgorithmen

Betrachtung einer Auswahl:

- Greedy-Algortihmus
- Farey-Folgen-Algorithmus
- Binäralgorithmus

Der Greedy-Algorithmus

Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j}.$$

Der Greedy-Algorithmus

Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j}.$$

Algorithmus

1. finde den größten, noch nicht verwendeten Stammbruch $\frac{1}{x}$, sodass $\frac{1}{x} \leq \frac{p}{q}$.
2. setze $\frac{1}{x}$ als weiteren Summanden des Ergebnisses
3. falls $\frac{p}{q} - \frac{1}{x} > 0$, gehe zu Schritt 1 mit $\left(\frac{p}{q}\right) \leftarrow \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{x}\right)$.

Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{5}{9}$$

Nebenrechnungen:

Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{5}{9}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{5}{9} < \frac{1}{1}$$

Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{5}{9} < \frac{1}{1}$$

Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

Der Greedy-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$

Farey-Folgen

Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q, F_q, ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: $0 \leq a \leq b \leq q$, $b \neq 0$.

Farey-Folgen

Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q, F_q, ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: $0 \leq a \leq b \leq q$, $b \neq 0$.

Beispiel: F_5

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right).$$

Der Farey-Folgen-Algorithmus

Algorithmus

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ in gekürzter Form der zu zerlegende Bruch.

1. Konstruiere F_q.
2. Sei $\frac{r}{s}$ der zu $\frac{p}{q}$ adjazente Bruch in F_q, sodass $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$. Aufgrund der Eigenschaften der Farey-Folge gilt dann

   $$\frac{p}{q} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s},$$

   wobei $s < q$, $r < p$.
3. Wiederhole dieses Vorgehen für $\frac{r}{s}$ solange, bis $s = 1 \Leftrightarrow r = 0$.

Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

$$F_{9rel} = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$

Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

$$F_{9rel} = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$$

Der Farey-Folgen-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{9} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s}$$

$$F_{9rel} = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$

Der Binäralgorithmus

Algorithmus

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ in gekürzter Form und $k \in \mathbb{N}$.

1. Finde $N_{k-1} < q \leq N_k$ wobei $N_k = 2^k$ ist.
2. Falls $q = N_k$, schreibe p als Summe von Teilern von N_k, hier d_i genannt:

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{j} \frac{d_i}{N_k} = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}}$$

Der Binäralgorithmus

Algorithmus

3. Sonst seien $s, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < q$ so gewählt, dass:

   $$pN_k = qs + r.$$

   Es folgt:

   $$\frac{p}{q} = \frac{pN_k}{qN_k} = \frac{qs + r}{qN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{qN_k}.$$

4. Schreibe $s = \sum d_i$ und $r = \sum d_i'$, wobei d_i, d_i' jeweils paarweise verschiedene Teiler von N_k sind.
5. Erhalte den Ägyptischen Bruch:

   $$\sum \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}} + \sum \frac{1}{\frac{qN_k}{d_i'}}.$$

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9}$$

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16}$$

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 8 + 8}{9 \cdot 16}$$

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 8 + 8}{9 \cdot 16} = \frac{8}{16} + \frac{8}{144}$$

Der Binär-Algorithmus: Rechenbeispiel

Gesucht: Zerlegung für $\frac{5}{9}$.

$$8 < 9 < 16 \Rightarrow N_k = 16$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 8 + 8}{9 \cdot 16} = \frac{8}{16} + \frac{8}{144} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}.$$

Weitere Rechenbeispiele

Komplexitätsabschätzung

Algorithmus	Anzahl Summanden	Größtmöglicher Nenner
Fibonacci-Sylvester(Greedy)	p	-
Farey-Folgen-Algorithmus	p	$q^2 - q$
Binäralgorithmus	$O(\log q)$	$2(q^2 - q)$

Auswertung von Testreihen: Methodik

Datensatzform: $M_q = \left\{ \frac{p}{q} \,|\, (2 \leq p < q) \wedge (\mathrm{ggT}(p,q) = 1) \right\}$

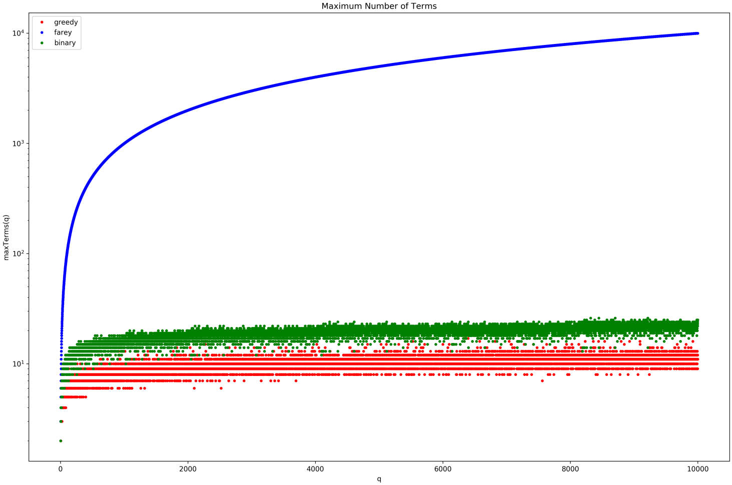
Enthaltene Informationen:

- die durchschnittliche Anzahl der Summanden, *avgTerms(q)*
- das Minimum der Anzahl der Summanden, *minTerms(q)*
- das Maximum der Anzahl der Summanden, *maxTerms(q)*
- das Minimum des jeweils größten Nenners, *minDenom(q)*
- das Maximum des jeweils größten Nenners, *maxDenom(q)*.

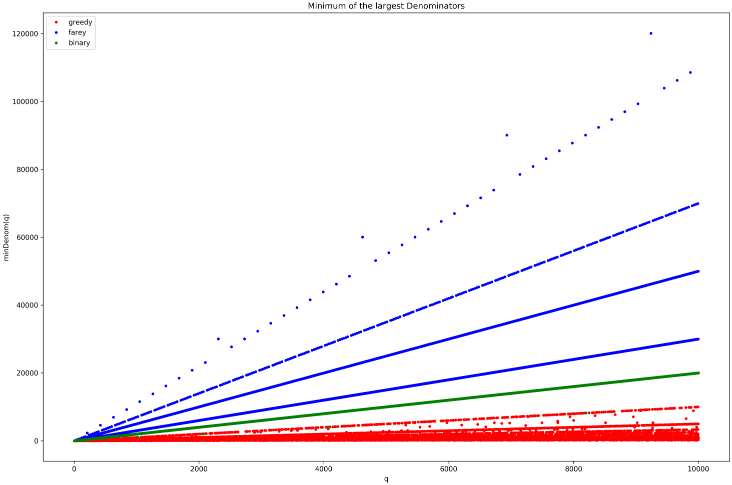
Laufzeiten

Algorithmus	h	min	sek
Binär-Algorithmus		33	22
Greedy-Algorithmus		40	53
Farey-Folgen-Algorithmus	62	33	38

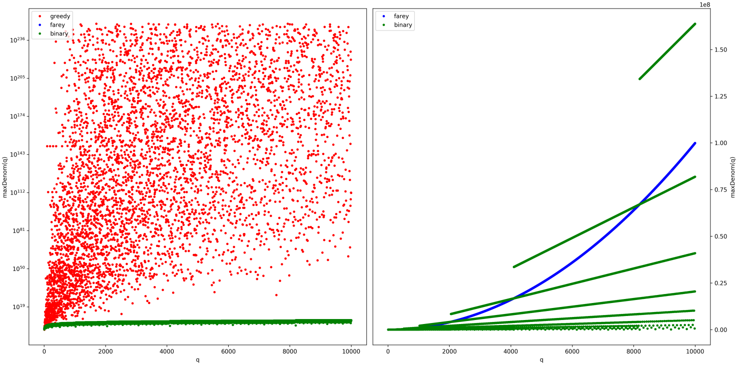
Durchschnittliche Anzahl der Terme



Minimum der größten Nenner



Maximum der größten Nenner



Bekannte theoretische Schranken

Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. $\frac{2}{n}$ lässt sich für jedes n als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Bekannte theoretische Schranken

Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. $\frac{2}{n}$ lässt sich für jedes n als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Berechnung von $\frac{3}{n}$

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Sonstige Ansätze und offene Fragen

Weitere Ansätze und Fragen umfassen u.a.:

- Thesen für $\frac{4}{n}$, $\frac{5}{n}$ usw.
- allgemeingültige Schranken für
  - Größe der Nenner
  - Anzahl der Summanden
- Zulassen auch negativer Terme