Universität der Bundeswehr München

Bachelorarbeit

Darstellung rationaler Zahlen durch Ägyptische Brüche

Eine Untersuchung von Algorithmen und Aufwand

Eingereicht von: Lars Berger
1173278

Aufgabensteller: Prof. Dr. Cornelius Greither

Betreuer: Dr. Soeren Kleine

Abgabedatum: 19.11.2019

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Informatik
Institut für Mathematik und Operations Research

Inhaltsverzeichnis

0 TODOs

Notes

1 Einleitung

Obwohl die Divergenz der Harmonischen Reihe zeigt, dass man mit Brüchen solcher Art durchaus alle Rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ erzeugen kann, waren für ganzzahlige Werte in Ägypten Schreibweisen gängig, weshalb hier auf eine Betrachtung von Brüchen $\frac{a}{b} \geq 1$ verzichtet wird.

Folgende Algorithmen werden Betrachtet:

- Greedy-Algorithmus (auch Fibonacci-Sylvester-Algo)

  - Varianten (odd, even)

- Farey-Series-Algorithm
- Continued-Fraction Algorithm (Bleicher)
- Erdös (?)

Fragen

- Anmerkung "Übersetzung durch den Autor"

2 Ägyptische Arithmetik

Um die Verwendung ägyptischer Brüche historisch zu verstehen, lohnt sich ein kurzer Blick in die Arithmetik des alten Ägypten. Im Folgenden werden dazu die Multiplikation und die darauf aufbauende Division betrachtet, welche die Verwendung von Brüchen bei Division mit nichttrivialem Rest erforderlich macht. Das gesamte arithmetische System der Ägypter baut dabei letztendlich auf der Addition auf.

2.1 Ägyptische Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ stellt man eine zweispaltige Tabelle auf, die in der linken Spalte die Zweierpotenzen 2^n für die n-te Zeile, mit $n = 0$ beginnend, und rechts das Produkt $a \cdot 2^n$. Zur Multiplikation wählt man nun aus der linken Spalte die Zeilen aus, deren Werte sich zu b addieren, und markiert diese, bspw. mittels eines Hakens (✓). Schließlich werden die Zahlen der rechten Spalte aufaddiert, deren Zeile mittels ✓markiert wurde. Die sich ergebende Summe ist das Ergebnis.

Beispiel 2.1. Die Multiplikation $23 \cdot 69$ bzw. $69 \cdot 23$ exemplarisch:

✓	1	69
✓	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	23	1587

✓	1	23
	2	46
✓	4	92
	8	184
	16	368
	32	736
✓	64	1472
Summe:	69	1587

Diese Methode funktioniert, da jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe paarweise verschiedener Zweierpotenzen darstellbar ist. Es wird im Allgemeinen angezweifelt, dass dies von den Ägyptern je formal bewiesen wurde, aber die Nutzung zeigt, dass sie diesen Zusammenhang zumindest erkannt hatten. Burton [2011]

Beweis/ Que

2.2 Ägyptische Division

2.2.1 Ganzzahlige Division

Der einfachere Fall der ganzzahligen Division ohne Rest ist dem Prinzip der Multiplikation sehr ähnlich, nur die Herangehensweise ist verändert. Um das Prinzip der Multiplikation anzuwenden zu können, verändert man dafür die Fragestellung. Seien $x \in \mathbb{Q}; a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$. Statt die Lösung für x in der Gleichung $x = \frac{a}{b}$ zu suchen, stellt man die Frage, für welches x gilt $b \cdot x = a$. Somit ergibt sich das Problem der Multiplikation, nur dass die unbekannte Variable eine andere ist.

Beispiel 2.2. Es sei die Division $117 \div 9$ betrachtet. Die Tabelle generiert sich wie oben. Nun wählt man mittels Greedy-Verfahren, also mit jeweils dem größten Wert beginnend, alle Zeilen aus, deren rechte Spalten sich zu 117 addieren, addiert die linke Spalte der ausgewählten Zeilen und erhält das Ergebnis $117 \div 9 = 13$

✓	1	9
	2	18
✓	4	36
✓	8	72
	$\underline{\underline{13}}$	117

2.2.2 Division mit Rest

Die Division mit Rest $a \div b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ funktioniert ähnlich wie die ganzzahlige, jedoch fügt man an die Tabelle nun noch die nötigen Bruchteile von a an, die nötig sind.

Beispiel 2.3. Wir betrachten hierfür die Division $117 \div 7$ und stellen die Tabelle auf wie oben.

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
×	16	112

Offensichtlich ist das Ergebnis hier noch nicht erreicht, allerdings kann keine weitere Zahl der rechten Spalte ausgewählt werden, ohne 117 zu überschreiten. Folglich sind also kleinere Zahlen als 7 notwendig. Die - aus heutiger Sicht betrachtet - einfache Mathematik des alten Ägypten würde nun, statt die 7 fortlaufend zu verdoppeln, diese zunächst durch sich selbst teilen, um eine 1 zu generieren und dann weiter halbieren, woraus sich diese unvollständige Tabelle ergäbe:

Tabellen 1 und 2 nebeneinander anordnen(?)

1	7
$\frac{1}{7}$	1
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 1: Teilen durch 7, dann Fortgesetzte Halbierung von 1

Zudem ist auch das bloße fortgesetzte Halbieren der Zahl oben rechts praktisch angewendet worden:

1	7
$\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 2: Fortgesetzte Halbierung von 7

Verfahren wird hier nach einem systematisierten trial-and-error-Verfahren. Da sich aus Tabelle 1 die Harmonische Reihe ergibt, aber ein Gesamtwert von $117 - 112 = 5$ benötigt wird, fällt die Wahl zunächst auf das größte Element in Tabelle 2 mit Wert $3+\frac{1}{2}$. Es folgt nun ein Rest von $5-(3+\frac{1}{2}) = 1+\frac{1}{2}$, welcher durch die Tabelle 1 mit den Werten 1 und $\frac{1}{2}$ genau erfüllt wird. Es folgt die Gesamttabelle:

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
✓	$\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{2}$
✓	$\frac{1}{7}$	1
✓	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
	$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$	117

Tabelle 3: Die vollständige Divisionstabelle

Sei $x \in \mathbb{N}$ und n der Divisor der gewählten Division. Typische Brüche, die in der linken Spalte verwendet wurden, weil einfach zu berechnen, waren $\frac{1}{2^x}$, sowie $\frac{1}{n \cdot 2^x}$.

Aus dieser Methodik heraus ergibt sich die Notation der Ägyptischen Brüche. Selbstverständlich wurde auch mit solchen Brüchen multipliziert und dividiert, solche Beispiele würden aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb diese nicht weiter betrachtet werden. vielleicht doch?

2.3 Ermittlung Ägyptischer Zerlegungen von Brüchen

Die Ägypter brauchten nun also ein System, mit dessen Hilfe sie die Zerlegung von Brüchen in eine Summe von Stammbrüchen mit paarweise Verschiedenen Nennern berechnen konnten. Die einfache Zerlegung

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}}_{a-mal}$$

kam dabei nicht in Frage, da die Ägypter es als „unnatürlich” ansahen, dass es mehr als diesen einen, wahren Teiler $\frac{1}{b}$ einer Zahl geben sollte. [Burton, 2011, p.]

Für z.B. Brüche $\frac{2}{n}$ für $5 \leq n \leq 101$ ungerade findet sich dafür im Rhind-Papyrus eine Tabelle mit der jeweiligen Zerlegung. Auch waren einige Regeln bekannt, beispielsweise

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Tatsächlich wurde diese Regel in der zuvor genannten Tabelle des Papyrus nur einmal, bei $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$, verwendet, sonst wurden kürzere Zerlegungen gewählt. Trotz immenser Bemühungen ist es bisher nicht gelungen, das System zu ermitteln, mittels welchem diese Tabelle zustande kam. Burton [2011]

eigenes Kapitel/ Subkapitel für "Rechentricks" der Ägypter?

3 Der Greedy-Algorithmus

Seien $a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$. Eine der bekanntesten Methoden, eine Ägyptische Erweiterungen für Brüche $\frac{a}{b}$ zu finden, ist der Greedy-Algorithmus. Dabei werden solange jeweils die größtmöglichen Stammbrüche $\frac{1}{x_i}$ gesucht, sodass

$$\frac{1}{x_i} \leq \frac{a}{b} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{x_j} < \frac{1}{x_i - 1}, \tag{1}$$

wobei gilt, dass

$$x_j \neq x_k; \forall j \neq k; j, k \in \{1, .., i\},$$

bis

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j}.$$

Da in jedem Fall der größtmögliche, noch nicht vorhandene Bruch gesucht wird, der noch in die Summe der Stammbrüche passt, ohne dass diese zu groß wird, kann es zu sehr ungünstigen Ergebnissen mit extrem langen Divisoren kommen; ein anschauliches Beispiel dafür ist:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},$$

wobei man den Bruch auch folgendermaßen zerlegen kann:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

Aufgrund dieser Komplexitätsprobleme scheint es unsinnig, den Greedy-Algorithmus zu verwenden. Nichtsdestotrotz lässt sich beweisen, dass der Greedy-Algorithmus immer terminiert. Im Anhang 4.1 findet sich eine eigene Implementierung des Greedy-Algorithmus.

Satz 3.1. *Der Greedy-Algorithmus, wie oben beschrieben, terminiert für jede Eingabe.*

Beweis. Für die erste Iteration des Greedy-Algorithmus ergibt sich aus 1:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{x-1} \tag{2}$$

Daraus folgt ein Rest r von

$$r = \frac{a}{b} - \frac{1}{x} = \frac{ax - b}{bx},$$

der den Zähler $(ax - b)$ hat. Aus 2 folgt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{1}{x-1} \quad &\Leftrightarrow \quad a(x-1) < b \\ &\Leftrightarrow \quad ax - a < b \\ &\Leftrightarrow \quad ax - b < a. \end{aligned}$$

Somit ist dieser Rest kleiner als a, verkleinert sich mit jedem Schritt und erreicht irgendwann Null, wie gefordert. □

4 Anhang

4.1 PARI/GP Code für den Greedy-Algorithmus

Die Umsetzung aller Code-Beispiele erfolgte in PARI/GP. (The PARI Group [2018])

```
listsum( list ) = sum(i=1,#list,list[i]);


fibonacci_sylvester(fraction, stepsize, start)=
{ local(candidate, result);
  result=List();
  candidate = start;

  /* print error if fraction is larger one */
  if (numerator(fraction) > denominator(fraction),
    print("fraction is larger than 1. Use fractions smaller or equal to 1.");
    return;
  );

  /* check if fraction is a unit fraction */
  if (numerator(fraction) == 1,
    print("fraction was already a unit fraction");
    listput(result, fraction);
  );

  /* calculate summands and add them to the result */
  while (listsum(result) < fraction,
    candidate += stepsize;
    while (1/candidate > fraction - listsum(result),
      candidate += stepsize;
    );
    print("adding ", 1/candidate);
    listput(result, 1/candidate);
  );

  return(result);
}


greedy(fraction) = fibonacci_sylvester(fraction, 1, 1);
greedy_odd(fraction) = {print("\nthis might not come to an end!\n");
      alarm(3600, fibonacci_sylvester(fraction, 2, 1));}
greedy_even(fraction) = fibonacci_sylvester(fraction, 2, 0);
```

Literaturverzeichnis

[Beck 2000] BECK, Anatole: *Excursions Into Mathematics - The Millennium Edition.* Wellesley, Massachusetts : Peters, 2000. – ISBN 978–1–568–81115–4

[Burton 2011] BURTON, David: *The History of Mathematics - An Introduction.* 7. Auflage. New York : McGraw-Hill, 2011. – 33–46 S. – ISBN 978–0–071–28920–7

[Gong 1992] GONG, Kevin: Egyptian Fractions. In: *Math 196 Spring, UC Berkeley* (1992)

[The PARI Group 2018] THE PARI GROUP: *PARI/GP, version* `2.9.4`. Univ. Bordeaux, 2018. – available from `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden.
Ferner habe ich vom Merkblatt über die Verwendung von Bachelor/Masterabschlussarbeiten Kenntnis genommen und räume das einfache Nutzungsrecht an meiner Bachelorarbeit der Universität der Bundeswehr München ein.

Neubiberg, den 19.11.2019

Lars Berger