Darstellung rationaler Zahlen durch Ägyptische Brüche

Lars Berger

Universität der Bundeswehr München

18. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

Definition

Ein Bruch soll fortan „in ägyptischer Form” bzw. „Ägyptischer Bruch” heißen genau dann, wenn er in der Form

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

mit paarweise verschiedenen x_i, $i \in \{1, ..., n\}$, vorliegt.

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
	16	1104
Summe:	0	0

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	16	1104

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	20	1380

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

	1	69
✓	2	138
✓	4	276
	8	552
✓	16	1104
Summe:	22	1518

Ägyptische Multiplikation

Beispiel: $23 \cdot 69$

$\checkmark$	1	69
$\checkmark$	2	138
$\checkmark$	4	276
	8	552
$\checkmark$	16	1104
Summe:	23	1587

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
	16	112
Summe:	0	0

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
Summe:	16	112

$$
\begin{array}{cc}
1 & 7 \\
\frac{1}{7} & 1 \\
\frac{1}{14} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{28} & \frac{1}{4} \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{cr}
1 & 7 \\
\frac{1}{2} & 3 + \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	16	112

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
$\checkmark$	16	112
$\checkmark$	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2}$	$115 + \frac{1}{2}$

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
$\checkmark$	16	112
$\checkmark$	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
$\checkmark$	$\frac{1}{7}$	1
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$	$116 + \frac{1}{2}$

Ägyptische Division

Beispiel: $117 \div 7$

		1	7
		2	14
		4	28
		8	56
$\checkmark$		16	112
$\checkmark$		$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
$\checkmark$		$\frac{1}{7}$	1
$\checkmark$		$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
Summe:		$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$	117

Zerlegungsalgorithmen

Betrachtung einer Auswahl:

- Greedy-Algortihmus
- Farey-Folgen-Algorithmus
- Binäralgorithmus

Der Greedy-Algorithmus

Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j}.$$

Der Greedy-Algorithmus

Ziel

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j}.$$

Algorithmus

1. finde den größten, noch nicht verwendeten Stammbruch $\frac{1}{x}$, sodass $\frac{1}{x} \leq \frac{p}{q}$.
2. setze $\frac{1}{x}$ als weiteren Summanden des Ergebnisses
3. falls $\frac{p}{q} - \frac{1}{x} > 0$, gehe zu Schritt 1 mit $\left(\frac{p}{q}\right) \leftarrow \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{x}\right)$.

Farey-Folgen

Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q, F_q, ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: $0 \leq a \leq b \leq q$, $b \neq 0$.

Farey-Folgen

Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q, F_q, ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller einmalig darin vorkommenden gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: $0 \leq a \leq b \leq q$, $b \neq 0$.

Beispiel: F_5

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right).$$

Der Farey-Foglen-Algorithmus

Algorithmus

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ in gekürzter Form der zu zerlegende Bruch.

1. Konstruiere F_q.
2. Sei $\frac{r}{s}$ der zu $\frac{p}{q}$ adjazente Bruch in F_q, sodass $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$. Aufgrund der Eigenschaften der Farey-Folge gilt dann

   $$\frac{p}{q} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s},$$

   wobei $s < q$, $r < p$.
3. Wiederhole dieses Vorgehen für $\frac{r}{s}$ solange, bis $s = 1 \Leftrightarrow r = 0$.

Der Binäralgorithmus

Algorihtmus

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ in gekürzter Form und $k \in \mathbb{N}$.

1. Finde $N_{k-1} < q \leq N_k$ wobei $N_k = 2^k$ ist.
2. Falls $q = N_k$, schreibe p als Summe von Teilern von N_k, hier d_i genannt:

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{j} \frac{d_i}{N_k} = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}}$$

Der Binäralgorithmus

Algorihtmus

3. Sonst seien $s, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < q$ so gewählt, dass:

$$pN_k = qs + r.$$

   Es folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{pN_k}{qN_k} = \frac{qs + r}{qN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{qN_k}.$$

4. Schreibe $s = \sum d_i$ und $r = \sum d_i'$, wobei d_i, d_i' jeweils paarweise verschiedene Teiler von N_k sind.
5. Erhalte den Ägyptischen Bruch:

$$\sum \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}} + \sum \frac{1}{\frac{qN_k}{d_i'}}.$$

Rechenbeispiel

Datensatzform: $M_q = \left\{ \frac{p}{q} \,|\, (\, 2 \leq p < q) \wedge (\mathrm{ggT}(p,q) = 1) \right\}$

Enthaltene Informationen:

- die durchschnittliche Anzahl der Summanden, *avgTerms(q)*
- das Minimum der Anzahl der Summanden, *minTerms(q)*
- das Maximum der Anzahl der Summanden, *maxTerms(q)*
- das Minimum des jeweils größten Nenners, *minDenom(q)*
- das Maximum des jeweils größten Nenners, *maxDenom(q)*.

Durchschnittliche Anzahl der Terme

bild

Minimum der größten Nenner

bild

Maximum der größten Nenner

bild

Bekannte theoretische Schranken

Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. $\frac{2}{n}$ lässt sich für jedes n als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Bekannte theoretische Schranken

Berechnung von $\frac{2}{n}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. $\frac{2}{n}$ lässt sich für jedes n als Summe zweier Stammbrüche notieren, nämlich:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Berechnung von $\frac{3}{n}$

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1}{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Sonstige Ansätze und offene Fragen

Weitere Ansätze und Fragen umfassen u.a.:

- Thesen für $\frac{4}{n}$, $\frac{5}{n}$ usw.
- allgemeingültige Schranken für
  - Größe der Nenner
  - Anzahl der Summanden
- Zulassen auch negativer Terme
- Umgang mit Polynomen.