

Bachelorarbeit

**Darstellung rationaler Zahlen durch
Ägyptische Brüche**

Eine Untersuchung von Algorithmen und Aufwand

Eingereicht von: Lars Berger
1173278

Aufgabensteller: Prof. Dr. Cornelius Greither

Betreuer: Dr. Soeren Kleine











Abgabedatum: 19.11.2019

Inhaltsverzeichnis

0	TODOs	1
1	Einleitung	2
2	Ägyptische Arithmetik	3
2.1	Ägyptische Multiplikation	3
2.2	Ägyptische Division	3
2.2.1	Ganzzahlige Division	3
2.2.2	Division mit Rest	4
2.3	Ermittlung Ägyptischer Zerlegungen von Brüchen	5
3	Algorithmen zur Erstellung Ägyptischer Brüche	7
3.1	Der Greedy-Algorithmus	7
3.2	Der Farey-Folgen-Algorithmus	8
3.3	Fazit und Vergleich	9
4	Anhang	10
4.1	PARI/GP Code für den Greedy-Algorithmus	10
4.1.1	Optimierter Greedy-Algorithmus	11
4.2	PARI/GP Code für den Farey-Folgen-Algorithmus	12
	Literaturverzeichnis	13
	Eidesstattliche Erklärung	14

0 TODOs

Notes

	insert ref	2
	Beweis/ Quelle!	3
	Tabellen 1 und 2 nebeneinander anordnen(?)	4
	vielleicht doch?	5
	eigenes Kapitel/ Subkapitel für "Rechentricks" der Ägypter?	6
	Als <code>\begin{algorithm}</code> aufschreiben	7
	eigene Definition oder bessere Beschreibung	8
	Terminierungsbeweis	9
	Beispielrechnung	9
	insert Bsp.	9

1 Einleitung

Vor über 4000 Jahren entstand in Ägypten das heute als "Rhind-Papyrus" bekannte Dokument, das als älteste bekannte Schrift mathematischen Wissens der Menschheit gilt. In der Präambel dieses Papyrus heißt es "Ein sorgfältiges Studium aller Dinge, Einblick in Alles, was es gibt, Wissen über alle obskuren Geheimnisse" [BURTON, 2011, S. 37, Übersetzung durch den Autor]

In den dort enthaltenen 85 Problemen werden dann Multiplikation und Division definiert sowie darauf aufbauende Probleme diskutiert. Obwohl heute bekannt ist, dass die Arithmetik der Ägypter sich ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht weiterentwickelte bzw. weiterentwickeln konnte, da sie kein Stellenwertsystem besaßen, bietet die aus heutiger Sicht primitive Mathematik des alten Ägypten viele bis heute ungelöste Probleme. Ein solches Problemfeld sind die sog. Ägyptischen Brüche.

...

Definition 1.1. Ein Bruch soll fortan „in ägyptischer Form“ bzw. „Ägyptischer Bruch“ heißen, genau dann wenn er in der Form

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

vorliegt.

Obwohl die Divergenz der Harmonischen Reihe zeigt, dass man mit Brüchen solcher Art durchaus alle Rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ erzeugen kann, waren für ganzzahlige Werte in Ägypten Schreibweisen gängig, weshalb hier auf eine Betrachtung von Brüchen $\frac{a}{b} \geq 1$ verzichtet wird.

2 Ägyptische Arithmetik

Um die Verwendung ägyptischer Brüche historisch zu verstehen, lohnt sich ein kurzer Blick in die Arithmetik des alten Ägypten. Im Folgenden werden dazu die Multiplikation und die darauf aufbauende Division betrachtet, welche die Verwendung von Brüchen bei Division mit nichttrivialem Rest erforderlich macht. Das gesamte arithmetische System der Ägypter baut dabei letztendlich auf der Addition auf.

2.1 Ägyptische Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ stellt man eine zweispaltige Tabelle auf, die in der linken Spalte die Zweierpotenzen 2^n für die n -te Zeile, mit $n = 0$ beginnend, und rechts das Produkt $a \cdot 2^n$. Zur Multiplikation wählt man nun aus der linken Spalte die Zeilen aus, deren Werte sich zu b addieren, und markiert diese, bspw. mittels eines Hakens (\checkmark). Schließlich werden die Zahlen der rechten Spalte aufaddiert, deren Zeile mittels \checkmark markiert wurde. Die sich ergebende Summe ist das Ergebnis.

Beispiel 2.1. Die Multiplikation $23 \cdot 69$ bzw. $69 \cdot 23$ exemplarisch:

			\checkmark	1	23
				2	46
	\checkmark	1		4	92
	\checkmark	2		8	184
	\checkmark	4		16	368
		8		32	736
	\checkmark	16		64	1472
Summe:	23	1587	Summe:	69	1587

Diese Methode funktioniert, da jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe paarweise verschiedener Zweierpotenzen darstellbar ist. Es wird im Allgemeinen angezweifelt, dass dies von den Ägyptern je formal bewiesen wurde, aber die Nutzung zeigt, dass sie diesen Zusammenhang zumindest erkannt hatten. BURTON [2011]

Beweis/ Que

2.2 Ägyptische Division

2.2.1 Ganzzahlige Division

Der einfachere Fall der ganzzahligen Division ohne Rest ist dem Prinzip der Multiplikation sehr ähnlich, nur die Herangehensweise ist verändert. Um das Prinzip der Multiplikation anzuwenden zu können, verändert man dafür die Fragestellung. Seien $x \in \mathbb{Q}; a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$. Statt die Lösung für x in der Gleichung $x = \frac{a}{b}$ zu suchen, stellt man die Frage, für welches x gilt $b \cdot x = a$. Somit ergibt sich das Problem der Multiplikation, nur dass die unbekannte Variable eine andere ist.

Beispiel 2.2. Es sei die Division $117 \div 9$ betrachtet. Die Tabelle generiert sich wie oben. Nun wählt man mittels Greedy-Verfahren, also mit jeweils dem größten Wert beginnend, alle Zeilen aus, deren rechte Spalten sich zu 117 addieren, addiert die linke Spalte der ausgewählten Zeilen und erhält das Ergebnis $117 \div 9 = 13$

✓	1	9
	2	18
✓	4	36
✓	8	72
<hr/>		
	13	117

2.2.2 Division mit Rest

Die Division mit Rest $a \div b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ funktioniert ähnlich wie die ganzzahlige, jedoch fügt man an die Tabelle nun noch die nötigen Bruchteile von a an, die nötig sind.

Beispiel 2.3. Wir betrachten hierfür die Division $117 \div 7$ und stellen die Tabelle auf wie oben.

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
<hr/>		
×	16	112

Offensichtlich ist das Ergebnis hier noch nicht erreicht, allerdings kann keine weitere Zahl der rechten Spalte ausgewählt werden, ohne 117 zu überschreiten. Folglich sind also kleinere Zahlen als 7 notwendig. Die - aus heutiger Sicht betrachtet - einfache Mathematik des alten Ägypten würde nun, statt die 7 fortlaufend zu verdoppeln, diese zunächst durch sich selbst teilen, um eine 1 zu generieren und dann weiter halbieren, woraus sich diese unvollständige Tabelle ergäbe:

Tabellen 1 und 2 nebeneinander anordnen(?)

1	7
$\frac{1}{7}$	1
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮

Tabelle 1: Teilen durch 7, dann Fortgesetzte Halbierung von 1

Zudem ist auch das bloße fortgesetzte Halbieren der Zahl oben rechts praktisch angewendet worden:

1	7
$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
\vdots	\vdots

Tabelle 2: Fortgesetzte Halbierung von 7

Verfahren wird hier nach einem systematisierten trial-and-error-Verfahren. Da sich aus Tabelle 1 die Harmonische Reihe ergibt, aber ein Gesamtwert von $117 - 112 = 5$ benötigt wird, fällt die Wahl zunächst auf das größte Element in Tabelle 2 mit Wert $3 + \frac{1}{2}$. Es folgt nun ein Rest von $5 - (3 + \frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2}$, welcher durch die Tabelle 1 mit den Werten 1 und $\frac{1}{2}$ genau erfüllt wird. Es folgt die Gesamttabelle:

	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
✓	16	112
✓	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
✓	$\frac{1}{7}$	1
✓	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$
<hr/>		
	$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$	117

Tabelle 3: Die vollständige Divisionstabelle

Sei $x \in \mathbb{N}$ und n der Divisor der gewählten Division. Typische Brüche, die in der linken Spalte verwendet wurden, weil einfach zu berechnen, waren $\frac{1}{2^x}$, sowie $\frac{1}{n \cdot 2^x}$.

Aus dieser Methodik heraus ergibt sich die Notation der Ägyptischen Brüche. Selbstverständlich wurde auch mit solchen Brüchen multipliziert und dividiert, solche Beispiele würden aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb diese nicht weiter betrachtet werden.

vielleicht
doch?

2.3 Ermittlung Ägyptischer Zerlegungen von Brüchen

Die Ägypter brauchten nun also ein System, mit dessen Hilfe sie die Zerlegung von Brüchen in eine Summe von Stammbrüchen mit paarweise Verschiedenen Nennern berechnen konnten. Die einfache Zerlegung

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a\text{-mal}}$

kam dabei nicht in Frage, da die Ägypter es als „unnatürlich“ ansahen, dass es mehr als diesen einen, wahren Teiler $\frac{1}{b}$ einer Zahl geben sollte. [BURTON, 2011, S.39]

2 Ägyptische Arithmetik

Für z.B. Brüche $\frac{2}{n}$ für $5 \leq n \leq 101$ ungerade findet sich dafür im Rhind-Papyrus eine Tabelle mit der jeweiligen Zerlegung. Auch waren einige Regeln bekannt, beispielsweise

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Tatsächlich wurde diese Regel in der zuvor genannten Tabelle des Papyrus nur einmal, bei $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$, verwendet, sonst wurden kürzere Zerlegungen gewählt. Trotz immenser Bemühungen ist es bisher nicht gelungen, das System zu ermitteln, mittels welchem diese Tabelle zustande kam. BURTON [2011]

eigenes Kapitel/ Subkapitel für "Rechentricks" der Ägypter?

3 Algorithmen zur Erstellung Ägyptischer Brüche

Im Folgenden sollen verschiedene Algorithmen erklärt und verglichen werden, mit welchen sich rationale Brüche in solche ägyptischer Schreibweise zerlegen lassen. Die dabei aufgezeigten Methoden wurden über mehrere Jahrhunderte hinweg entwickelt und weisen dementsprechend signifikante Unterschiede auf. Im Anschluss an die Erklärung der Algorithmen soll ein Vergleich gezogen werden, der die Effizienz anhand der Kriterien Anzahl der verwendeten Stammbrüche und Länge des größten Nenners vergleicht. Die nun betrachteten Algorithmen werden sein:

- der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus (auch: Greedy-Algorithmus)
- der Farey-Folgen-Algorithmus
- der Kettenbruch-Algorithmus

3.1 Der Greedy-Algorithmus

Seien $a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$. Eine der bekanntesten Methoden, eine Ägyptische Erweiterungen für Brüche $\frac{a}{b}$ zu finden, ist der Greedy-Algorithmus. Dabei werden solange jeweils die größtmöglichen Stammbrüche $\frac{1}{x_i}$ gesucht, sodass

$$\frac{1}{x_i} \leq \frac{a}{b} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{x_j} < \frac{1}{x_i - 1}, \quad (1)$$

wobei gilt, dass

$$x_j \neq x_k; \forall j \neq k; j, k \in \{1, \dots, i\},$$

bis

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{x_j}.$$

Als `\begin{algorithm}` aufschreiben

Da in jedem Fall der größtmögliche, noch nicht vorhandene Bruch gesucht wird, der noch in die Summe der Stammbrüche passt, ohne dass diese zu groß wird, kann es zu sehr ungünstigen Ergebnissen mit extrem langen Divisoren kommen; ein anschauliches Beispiel dafür ist:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763.309} + \frac{1}{873.960.180.913} + \frac{1}{1.527.612.795.642.093.418.846.225},$$

wobei man den Bruch auch folgendermaßen zerlegen kann:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

3 Algorithmen zur Erstellung Ägyptischer Brüche

Aufgrund dieser Komplexitätsprobleme scheint es unsinnig, den Greedy-Algorithmus zu verwenden. Nichtsdestotrotz lässt sich beweisen, dass der Greedy-Algorithmus immer terminiert. Im Anhang 4.1 findet sich eine eigene Implementierung des Greedy-Algorithmus.

Satz 3.1. *Der Greedy-Algorithmus, wie oben beschrieben, terminiert für jede Eingabe.*

Beweis. Für die erste Iteration des Greedy-Algorithmus ergibt sich aus 1:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{x-1} \quad (2)$$

Daraus folgt ein Rest r von

$$r = \frac{a}{b} - \frac{1}{x} = \frac{ax - b}{bx},$$

der den Zähler $(ax - b)$ hat. Aus 2 folgt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{1}{x-1} &\Leftrightarrow a(x-1) < b \\ &\Leftrightarrow ax - a < b \\ &\Leftrightarrow ax - b < a. \end{aligned}$$

Somit ist dieser Rest kleiner als a , verkleinert sich mit jedem Schritt und erreicht nach endlich vielen Schritten Null, wie gefordert. \square

3.2 Der Farey-Folgen-Algorithmus

Eine weitere Methode zur Erstellung Ägyptischer Brüche stellt der sog. Farey-Folgen-Algorithmus dar, der seinen Namen aus dem Umstand bezieht, dass die Farey-Folge dafür genutzt wird.

Definition 3.2. Sei $q \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge der Ordnung q , F_q , ist definiert als die aufsteigend sortierte Folge aller gekürzten Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, für die gilt: $0 \leq a \leq b \leq q$.

Der Algorithmus funktioniert dann wie folgt.

Algorithmus 3.3. Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ in reduzierter Form der zu zerlegende Bruch. Konstruiere F_q . Sei $\frac{r}{s}$ der zu $\frac{p}{q}$ adjazente Bruch in F_q , sodass $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$. Aufgrund der Eigenschaften der Farey-Folge gilt dann

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{qs} + \frac{r}{s},$$

wobei gilt, dass $s < q$, $r < p$. Wiederhole dieses Vorgehen für $\frac{r}{s}$ solange, bis $s = 1 \Leftrightarrow r = 0$.

Da die Farey-Folge F_q schon für mäßig große q sehr groß wird, bietet sich für das Tatsächliche Berechnen eine Optimierung an, indem nur der relevante Teil der Farey-Folge konstruiert wird. Anwendung findet dabei das Bisektionsverfahren.

eigene Definition oder bessere Beschreibung

3 Algorithmen zur Erstellung Ägyptischer Brüche

Beispiel 3.4. Sei $\frac{p}{q} = 21/23$. Die obere und untere Schranken sind in unserem Fall 0 bzw. 1. Der Median liegt also bei $1/2$, wir stellen fest: $\frac{1}{2} < \frac{21}{23} < 1$, also setzen wir die Suche im Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ fort. Der Median liegt nun bei $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} < \frac{21}{23} < 1$ usw. Beim Median $\frac{11}{12}$ stellen wir fest: $\frac{10}{11} < \frac{21}{23} < \frac{11}{12}$. Daraus folgt der relevante Teil von F_{23} , hier F_{23rel} genannt:

$$F_{23rel} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{21}{23}, \frac{11}{12}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Somit enthält die gekürzte Farey-Folge nur noch 10 der andererseits 173 zu berechnenden Elemente von F_{23} .

Terminierungsbeweis

Beispielrechnung

3.3 Fazit und Vergleich

Wie in den vorangegangenen Beispielen zu sehen, liefern verschiedene Methoden z.T. stark voneinander abweichende Ergebnisse. Wie optimal zwei Ergebnisse im Vergleich zueinander sind, wird oft in den Maßeinheiten der oberen Schranken der "Länge des größten Nenners" bzw. der "Anzahl der Summanden" angegeben. In Tabelle 4 sind die entsprechenden Werte zum Vergleich aufgelistet.

insert Bsp.

Algorithmus	Anzahl der Summanden	Länge des längsten Nenners
Fibonacci-Sylvester(Greedy)	p	exponentiell
Farey-Folgen-Algorithmus	p	$q(q-1)$
Kettenbruch-Algorithmus	$\frac{2(\ln q)^2}{\ln \ln q}$	q^2

Tabelle 4: Vergleich der beschriebenen Algorithmen (obere Schranken)

4 Anhang

4.1 PARI/GP Code für den Greedy-Algorithmus

Die Umsetzung aller Code-Beispiele erfolgte in PARI/GP. (THE PARI GROUP [2018])

```

1 listsum( list ) = sum(i=1,#list,list[i]);
2
3 fibonacci_sylvester(fraction, stepsize, start)={
4   local(candidate, result);
5   result=List();
6   candidate = start;
7
8   /* print error if fraction is larger one */
9   if (numerator(fraction) > denominator(fraction),
10     print("fraction is larger than 1. Use fractions smaller or equal to 1.");
11     return;
12   );
13
14   /* check if fraction is a unit fraction */
15   if (numerator(fraction) == 1,
16     print("fraction was already a unit fraction");
17     listput(result, fraction);
18   );
19
20   /* calculate summands and add them to the result */
21   while (listsum(result) < fraction,
22     candidate += stepsize;
23     while (1/candidate > fraction - listsum(result),
24       candidate += stepsize;
25     );
26     /*print("adding ", 1/candidate);*/
27     listput(result, 1/candidate);
28   );
29   return(Vec(result));
30 }
31
32 greedy(fraction) = fibonacci_sylvester(fraction, 1, 1);
33 greedy_odd(fraction) = {print("\nthis might not come to an end!\n");
34   alarm(3600, fibonacci_sylvester(fraction, 2, 1));}
35 greedy_even(fraction) = fibonacci_sylvester(fraction, 2, 0);

```

4.1.1 Optimierter Greedy-Algorithmus

```

1 largestUnitFractionLEQ(fraction)={
2   /* x: current candidate, ub: currently known upper bound*/
3   local (x,ub);
4   x=2;
5   ub=0;
6
7   /*catch unit fractions for efficiency */
8   if (numerator(fraction) == 1,
9     return (fraction);
10  );
11
12  while (1/x > fraction,
13    x*=2;
14  );
15
16  ub=x;
17
18  while (x > 1,
19    x /= 2;
20    if (1/(ub-x) <= fraction,
21      ub -= x;
22    );
23  );
24  return (1/ub);
25 }
26
27 greedy_fast(fraction)={
28   local (result);
29   result = List();
30   /* print error if fraction is larger one */
31   if (numerator(fraction) > denominator(fraction),
32     print ("fraction is larger than 1. Use fractions smaller or equal to 1.");
33     return;
34   );
35
36   /* check if fraction is a unit fraction */
37   if (numerator(fraction) == 1,
38     print ("fraction was already a unit fraction");
39     listput (result , fraction);
40   );
41
42   /* calculate summands and add them to the result */
43   while (listsum (result) < fraction,
44     listput (result , largestUnitFractionLEQ(fraction-listsum(result)));
45   );
46   return (Vec(result));
47 }

```

4.2 PARI/GP Code für den Farey-Folgen-Algorithmus

```

1 findAdjacent(Fs, fraction)={
2   for(i=1, #Fs-1,
3     if(fraction == Fs[i],
4       return(Fs[i-1]);
5     );
6     if(fraction > Fs[i],
7       if(fraction < Fs[i+1],
8         return(Fs[i]);
9       );
10    );
11  );
12  return(-1);
13 }
14
15 FareySeries(order)={
16   local(result);
17   result = List();
18   for(den=1,order,
19     for(num=0, den,
20       if(contains(result, num/den)==0,
21         listput(result, num/den);
22       );
23     );
24  );
25  result = vecsort(Vec(result));
26  return(result);
27 }
28
29 FS(fract)={
30   local(adjacent, remainder, result);
31   result = List();
32   while(1,
33     adjacent = findAdjacent(FareySeries(denominator(fract)), fract);
34     remainder = 1/(denominator(fract)*denominator(adjacent));
35     listput(result, remainder);
36     if(numerator(adjacent) == 1,
37       listput(result, adjacent);
38       return(reverse_vecsort(Vec(result)));
39     );
40     fract = adjacent;
41  );
42  return(-1);
43 }

```

Literaturverzeichnis

- [Beck 2000] BECK, Anatole: *Excursions Into Mathematics - The Millennium Edition*. Wellesley, Massachusetts : Peters, 2000. – ISBN 978-1-568-81115-4
- [Burton 2011] BURTON, David: *The History of Mathematics - An Introduction*. 7. Auflage. New York : McGraw-Hill, 2011. – 33-46 S. – ISBN 978-0-071-28920-7
- [Gong 1992] GONG, Kevin: Egyptian Fractions. In: *Math 196 Spring, UC Berkeley* (1992)
- [The PARI Group 2018] THE PARI GROUP: *PARI/GP, version 2.9.4*. Univ. Bordeaux, 2018. – available from <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden.

Ferner habe ich vom Merkblatt über die Verwendung von Bachelor/Masterabschlussarbeiten Kenntnis genommen und räume das einfache Nutzungsrecht an meiner Bachelorarbeit der Universität der Bundeswehr München ein.

Neubiberg, den 19.11.2019

LARS BERGER