Universität der Bundeswehr München

Bachelorarbeit

# Darstellung rationaler Zahlen durch Ägyptische Brüche

## Eine Untersuchung von Algorithmen und Aufwand


Eingereicht von: Lars Berger
1173278

Aufgabensteller: Prof. Dr. Cornelius Greither

Betreuer: Dr. Soeren Kleine



Abgabedatum: 19.11.2019



Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Informatik
Institut für Mathematik und Operations Research

# Inhaltsverzeichnis

**0 TODOs** **1**
**1 Einleitung** **2**
**2 Ägyptische Arithmetik** **3**
2.1 Ägyptische Multiplikation . . . . . 3
2.2 Ägyptische Division . . . . . 3
2.2.1 Ganzzahlige Division . . . . . 3
2.2.2 Division mit Rest . . . . . 4
2.3 Ermittlung Ägyptischer Zerlegungen von Brüchen . . . . . 4
**3 Der Greedy Algorithmus** **6**
**4 Anhang** **7**
4.1 PARI/GP Code für den Greedy-Algorithmus . . . . . 7
**Literaturverzeichnis** **8**
**Eidesstattliche Erklärung** **9**

# 0 TODOs

## Notes

this is right, isn't it? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

Namen und Quelle finden! . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

wann? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

Beweis einfügen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

woher weiß ich das? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

# 1 Einleitung

Obwohl die Divergenz der Harmonischen Reihe zeigt, dass man mit Brüchen solcher Art durchaus alle Rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ erzeugen kann, waren für ganzzahlige Werte in Ägypten Schreibweisen gängig, weshalb hier auf eine Betrachtung von Brüchen $\frac{a}{b} \geq 1$ verzichtet wird.

Folgende Algorithmen werden Betrachtet:

- Greedy-Algorithmus (auch Fibonacci-Sylvester-Algo)

    \- Varianten (odd, even)

- Continued-Fraction Algorithm (Bleicher)
- Erdös

## Fragen

-

# 2 Ägyptische Arithmetik

Um die Verwendung ägyptischer Brüche historisch zu verstehen, lohnt sich ein kurzer Blick in die Arithmetik des alten Ägypten. Im Folgenden werden dazu die Multiplikation und die darauf aufbauende Division betrachtet, welche letztendlich die Verwendung von Brüchen bei Division mit Rest erforderlich macht. Das gesamte arithmetische System der Ägypter baut dabei letztendlich auf der Addition auf.

## 2.1 Ägyptische Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier ganzer Zahlen $a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ stellt man eine zweispaltige Tabelle auf, die in der linken Spalte die Zweierpotenzen $2^n$ für die n-te Zeile, mit n=0 beginnend, und rechts das Produkt $a \cdot 2^n$. Zur Multiplikation wählt man nun aus der linken Spalte die Zeilen aus, deren Werte sich zu $b$ addieren, und markiert diese, bspw. mittels eines Hakens (✓). Schließlich werden die Zahlen der rechten Spalte aufaddiert, deren Zeile mittels ✓markiert wurde. Die sich ergebende Summe ist das Ergebnis.

**Beispiel 2.1.** Die Multiplikation 23 · 69 bzw. 69 · 23 exemplarisch:

| | | |
|---|---|---|
| ✓ | 1 | 69 |
| ✓ | 2 | 138 |
| ✓ | 4 | 276 |
| | 8 | 552 |
| ✓ | 16 | 1104 |
| Summe: | 23 | 1587 |

| | | |
|---|---|---|
| ✓ | 1 | 23 |
| | 2 | 46 |
| ✓ | 4 | 92 |
| | 8 | 184 |
| | 16 | 368 |
| | 32 | 736 |
| ✓ | 64 | 1472 |
| Summe: | 69 | 1587 |

Diese Methode funktioniert, da jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe paarweise verschiedener Zweierpotenzen darstellbar ist. Es wird im Allgemeinen angezweifelt, dass dies von den Ägyptern je formal bewiesen wurde, aber die Nutzung zeigt, dass sie diesen Zusammenhang zumindest erkannt hatten. Burton [2011]

## 2.2 Ägyptische Division

### 2.2.1 Ganzzahlige Division

Der einfachere Fall der ganzzahligen Division ohne Rest ist dem Prinzip der Multiplikation sehr ähnlich, nur die Herangehensweise ist verändert. Zur Division von $a \div b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ nutzt man die Tabellenmethode aus der Multiplikation wie in 2.1, nur wird $a$ als Ergebnis in der letzten Zeile rechts notiert und der fehlende Multiplikator ergibt sich dann in der letzten Zeile links.

**Beispiel 2.2.** Es sei die Division 117 ÷ 9 betrachtet. Die Tabelle generiert sich wie oben. Nun wählt man alle Zeilen aus, deren rechte Spalten sich zu 117 addieren, addiert die linke Spalte der ausgewählten Zeilen und erhält das Ergebnis $117 \div 9 = 13$

| | | |
|---|---|---|
| ✓ | 1 | 9 |
| | 2 | 18 |
| ✓ | 4 | 36 |
| ✓ | 8 | 72 |
| | $\underline{\underline{13}}$ | 117 |

### 2.2.2 Division mit Rest

Die Division mit Rest $a \div b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ funktioniert ähnlich wie die ganzzahlige, jedoch fügt man an die Tabelle nun noch die nötigen Bruchteile von $a$ an, die nötig sind.

**Beispiel 2.3.** Wir betrachten hierfür die Division 117 ÷ 7.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 7 |
| | 2 | 14 |
| | 4 | 28 |
| | 8 | 56 |
| ✓ | 16 | 112 |
| ✓ | $\frac{1}{2}$ | $3 + \frac{1}{2}$ |
| ✓ | $\frac{1}{7}$ | 1 |
| ✓ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | $\underline{\underline{16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}}}$ | 117 |

Sei $x \in \mathbb{N}$ und $n$ der Divisor der gewählten Division. Typische Brüche, die in der linken Spalte verwendet wurden, weil einfach zu berechnen, waren $\frac{1}{2x}$ sowie $\frac{1}{nx}$.

Aus dieser Methodik heraus ergibt sich die Notation der Ägyptischen Brüche. Selbstverständlich wurde auch mit solchen Brüchen multipliziert und dividiert, solche Beispiele würden aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb diese nicht weiter betrachtet werden.

## 2.3 Ermittlung Ägyptischer Zerlegungen von Brüchen

Die Ägypter brauchten nun also ein System, mit dessen Hilfe sie die Zerlegung von Brüchen in eine Summe von Stammbrüchen mit paarweise Verschiedenen Nennern berechnen konnten. Die einfache Zerlegung

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}}_{a-mal}$$

kam dabei nicht in Frage, da die Ägypter es als „unnatürlich” ansahen, dass es mehr als diesen einen, wahren Teiler $\frac{1}{b}$ einer Zahl geben sollte. BURTON [2011]
Für z.B. Brüche $\frac{2}{n}$ für $5 \leq n \leq 101$ ungerade findet sich dafür im Rhind Papyrus eine Tabelle mit der jeweiligen Zerlegung. Auch waren einige Regeln bekannt, beispielsweise

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Tatsächlich wurde diese Regel in der zuvor genannten Tabelle des Papyrus nur einmal, bei $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$, verwendet, sonst wurden kürzere Zerlegungen gewählt. Trotz immenser Bemühungen ist es bisher nicht gelungen, das System zu ermitteln, mittels welchem diese Tabelle zustande kam. BURTON [2011]

## 3 Der Greedy Algorithmus

Eine der bekanntesten Methoden, eine Ägyptische Brucherweiterung für Brüche $\frac{a}{b}$ ; $a, b \in \mathbb{Q}$ zu finden, ist der Greedy Algorithmus. Dabei werden jeweils die größtmöglichen Stammbrüche $\frac{1}{x_i}$ gesucht, wobei

$$\frac{1}{x_i} \leq \frac{a}{b} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{x_j} < \frac{1}{x_i - 1}, \tag{1}$$

wobei gilt, dass

$$x_i \neq x_j; \forall i \neq j = (1, .., i)$$

solange, bis

this is right, isn't it?

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j}.$$

Da in jedem Fall der größtmögliche, noch nicht vorhandene Bruch gesucht wird, der noch in die Summe der Stammbrüche passt, ohne dass diese zu groß wird, kann es zu sehr ungünstigen Ergebnissen mit extrem langen Divisoren kommen; ein anschauliches Beispiel dafür ist:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},$$

wobei man den Bruch auch folgendermaßen zerlegen kann:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

Durch diese Komplexitätsprobleme scheint es unsinnig, den Greedy-Algorithmus zu verwenden. Trotz hat WERAUCHIMMER IRGENDWANN nachgewiesen, dass der Algorithmus tatsächlich terminiert. Im Anhang 4.1 findet sich eine eigene Implementierung des Greedy-Algorithmus.

Namen und Quelle finden

wann?

Beweis einfü

**Satz 3.1.** *Der Greedy-Algortihmus terminiert für paarweise verschiedene Brüche* $\frac{1}{x}$

*Beweis.* Für die erste Iteration des Greedy-Algorithmus ergibt sich aus 1:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{x-1}$$

Daraus folgt ein Rest $r$ von

$$r = \frac{a}{b} - \frac{1}{x} = \frac{ax - b}{bx},$$

der den Zähler $(ax - b)$ hat, der kleiner als a ist.

woher weiß i das?

Somit verkleinert sich dieser Rest mit jedem Schritt und erreicht irgendwann Null, wie gefordert. □

# 4 Anhang

## 4.1 PARI/GP Code für den Greedy-Algorithmus

Die Umsetzung aller Code-Beispiele erfolgte in PARI/GP. PARI Group [2018]

```
listsum( list ) = sum(i=1,#list,list[i]);


fibonacci_sylvester(fraction, stepsize, start)=
{ local(candidate, result);
  result=List();
  candidate = start;

  /* print error if fraction is larger one */
  if (numerator(fraction) > denominator(fraction),
    print("fraction is larger than 1. Use fractions smaller or equal to 1.");
    return;
  );

  /* check if fraction is a unit fraction */
  if (numerator(fraction) == 1,
    print("fraction was already a unit fraction");
    listput(result, fraction);
  );

  /* calculate summands and add them to the result */
  while (listsum(result) < fraction,
    candidate += stepsize;
    while (1/candidate > fraction - listsum(result),
      candidate += stepsize;
    );
    print("adding ", 1/candidate);
    listput(result, 1/candidate);
  );

  return(result);
}


greedy(fraction) = fibonacci_sylvester(fraction, 1, 1);
greedy_odd(fraction) = {print("\nthis might not come to an end!\n"); fibonacci_sylvester(fraction, 2, 1);}
greedy_even(fraction) = fibonacci_sylvester(fraction, 2, 0);
```

## Literaturverzeichnis

[Burton 2011] Burton, David: *The History of Mathematics - An Introduction*. 7. Auflage. New York : McGraw-Hill, 2011. – 33–46 S. – ISBN 978–0–071–28920–7

[PARI Group 2018] PARI Group: *PARI/GP, version 2.9.4*. Univ. Bordeaux, 2018. – available from `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden.
Ferner habe ich vom Merkblatt über die Verwendung von Bachelor/Masterabschlussarbeiten Kenntnis genommen und räume das einfache Nutzungsrecht an meiner Bachelorarbeit der Universität der Bundeswehr München ein.

Neubiberg, den 19.11.2019

Lars Berger