

# Doc of PathPlanning Approaches for GeckoBot

Lars Schiller

19. Juni 2019

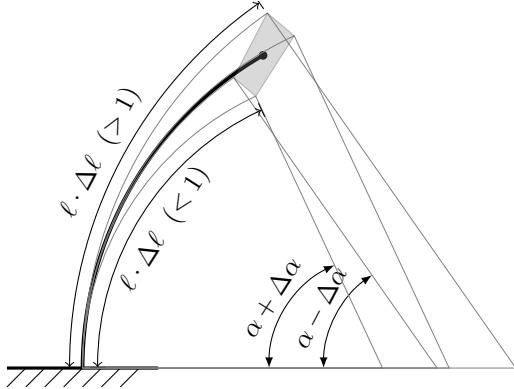
## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Predicting the next pose of the robot</b>	<b>2</b>
1.1 Modeling of Soft Bending Actuator . . . . .	2
1.2 Modeling of the robot . . . . .	2
<b>2 Path Planning with Search Tree</b>	<b>3</b>
2.1 Different Gait Patterns for a curve . . . . .	3
2.2 Search Tree . . . . .	4
2.2.1 Search Tree with weights . . . . .	6
2.3 Simulation Results . . . . .	6
2.3.1 Simulation Results Curve . . . . .	6
2.3.2 Simulation Results Straight . . . . .	7
2.4 What happens if Process Noise occurs? . . . . .	8
2.4.1 Curve Noise . . . . .	9
2.4.2 Straight Noise . . . . .	9
2.5 Conclusion . . . . .	9
<b>3 Finding a Analytic Model for describing the General Gait</b>	<b>10</b>
3.1 Problem Statement . . . . .	10
3.2 Approach: Guess structure for a analytic model for walking curves . . . . .	11
3.2.1 Simulation Results . . . . .	11
3.2.2 Observations . . . . .	12
3.3 Approach: Find a reasonable structure . . . . .	12
3.3.1 Simulation Results . . . . .	13
3.4 Approach: Optimize Extra leg bending Angle for given extra torso bending . . . . .	15
3.4.1 Optimization Results . . . . .	16
3.4.2 Function Fitting . . . . .	16
3.4.3 Simulation Results . . . . .	17
3.5 Compare model 2 and model 3 . . . . .	18
3.5.1 Conclusion . . . . .	18
<b>4 Optimal PathPlanner based on General Gait Model</b>	<b>19</b>
4.1 Idea . . . . .	19
4.2 Coordinate Transformation in order to reduce complexity . . . . .	20
4.2.1 Explizite Formulierung für mehrer Zyklen . . . . .	21
4.3 Simplified Optimization Problem . . . . .	22
4.3.1 Calculation of Jacobian . . . . .	22
4.3.2 sum sin for n = 2 . . . . .	23
4.3.3 Distance d sympy . . . . .	23
4.3.4 Euler . . . . .	24

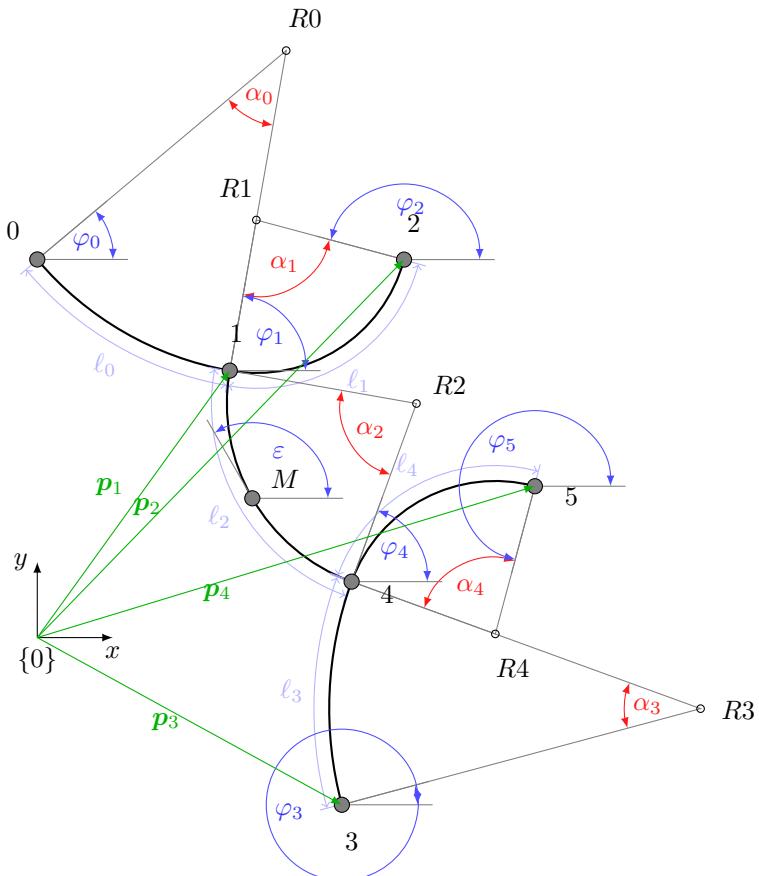
# 1 Predicting the next pose of the robot

## 1.1 Modeling of Soft Bending Actuator

- Einführung virtueller Längen, um größeren Bereich erreichen zu können, und dennoch die Annahme von *Constant curvature* nutzen zu können.
- Weil Sehr effektiv zu rechnen.



## 1.2 Modeling of the robot



- Zustands- und Eingangsgrößen:

$$\mathbf{x} = [ \boldsymbol{\alpha} \ \boldsymbol{\ell} \ \varepsilon ], \quad \mathbf{r} = [ \boldsymbol{\alpha}_{\text{ref}} \ \mathbf{f} ]$$

- Innere Spannung:

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{x}_k) = & w_\ell |\boldsymbol{\ell}_k - \boldsymbol{\ell}_n|_2 \\ & + w_\alpha |\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{\text{ref},k}|_2 \\ & + w_\varphi |\text{diag}(\boldsymbol{f}_k)(\boldsymbol{\varphi}_k - \boldsymbol{\varphi}_{k-1})|_2\end{aligned}$$

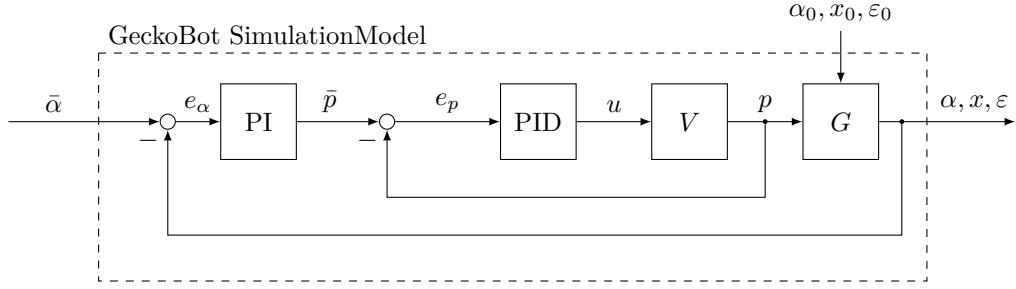
- Minimale Spannung:

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{X}} \sigma(\boldsymbol{x}_k) \\ \text{s. t. } \|\text{diag}(\boldsymbol{f}_k)(\boldsymbol{P}_k - \boldsymbol{P}_{k-1})\|_2 = 0\end{aligned}$$

- Folgepose:

$$\boldsymbol{\rho}_k = [\boldsymbol{x}_k \ \boldsymbol{P}_k \ \boldsymbol{f}_k] = \text{fun}_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{\rho}_{k-1})$$

- Das Modell liefert dann eine quasi statische Vorhersage der neuen Ruhelage zu gegebenen Eingangsgrößen:



## 2 Path Planning with Search Tree

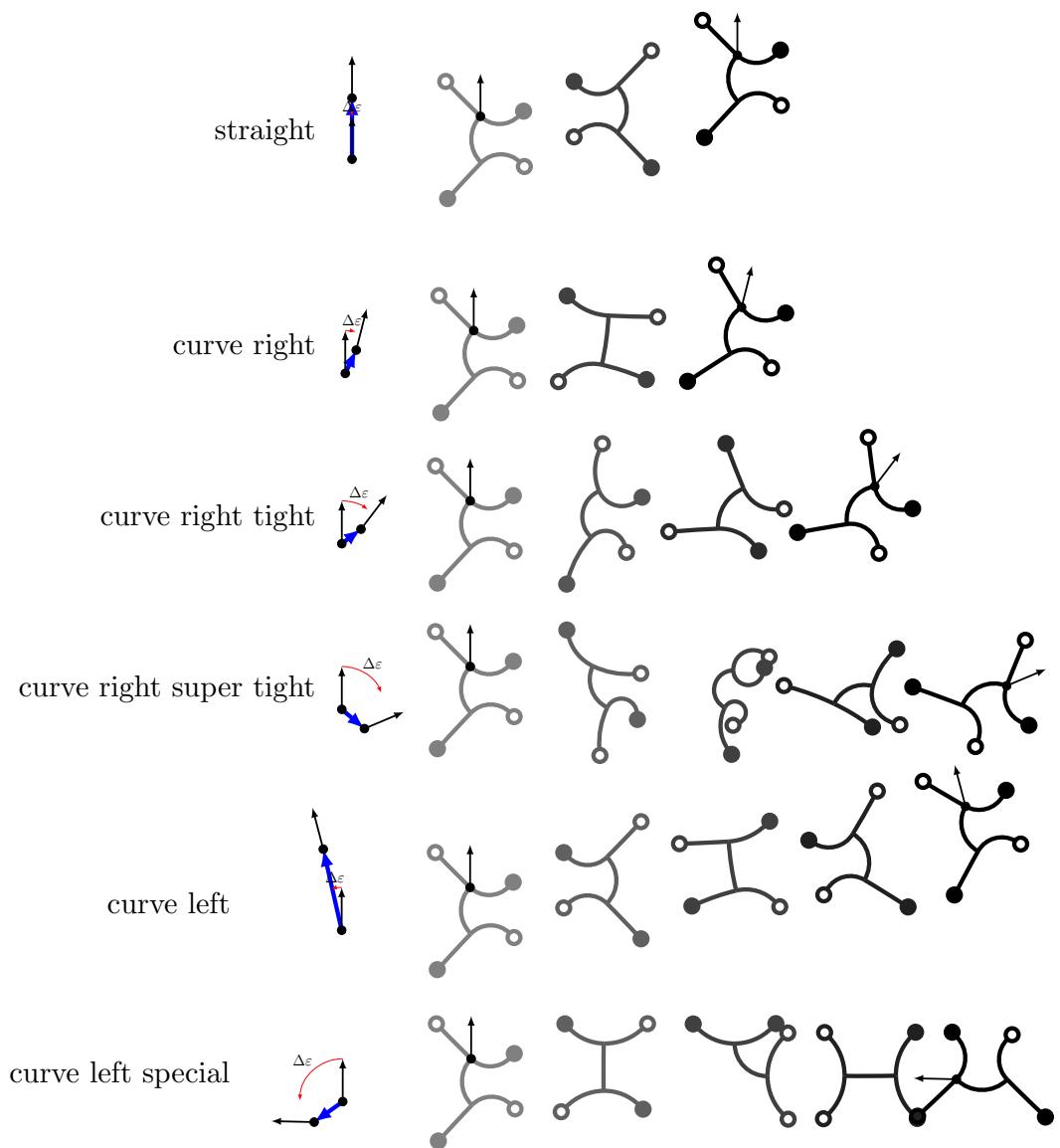
### 2.1 Different Gait Patterns for a curve

- Vom Kinematic Paper sind schon verschieden Laufmuster für Kurven bekannt, basierend auf dem Minimierungsproblem:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \varepsilon(\boldsymbol{\alpha}) \quad (1)$$

wobei  $\boldsymbol{\alpha}$  die Referenzwinkel von zwei Posen, also einem Zyklus enthält.

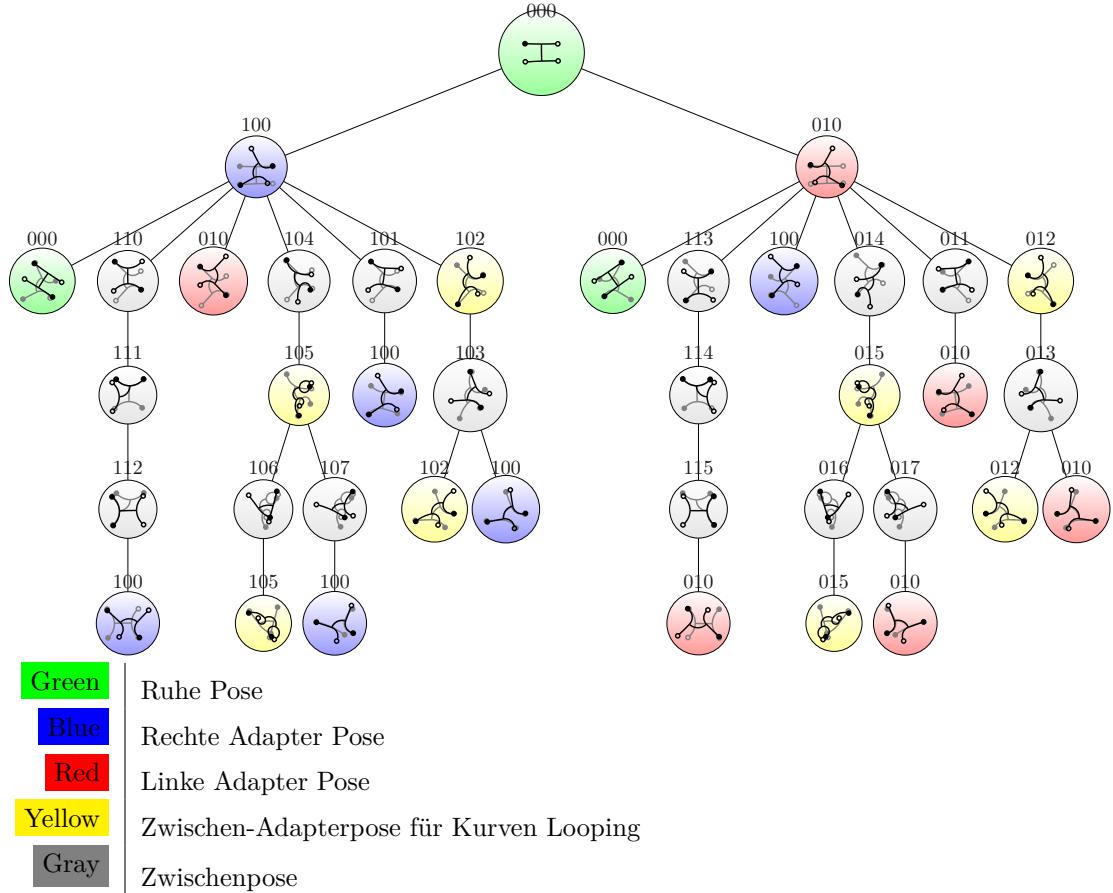
- Beispiele:



- Idee: Eine ausgewählte Anzahl an Posen, als Grundbausteine für einen beliebigen Gang.
- Diese dann wie Legosteine aufeinander setzen, um von A nach B zu gelangen.

## 2.2 Search Tree

- Folgender Suchbaum wurde implementiert.



- Dabei hat jede Kante des Baums eine Richtung und eine Gewichtung  $w$ .
- Die Gewichtung  $w = ((\delta x, \delta y), \delta \varepsilon)$  gibt an, inwieweit das entsprechende Kind (Folgepose repräsentiert durch den Knoten, der mit der gewichteten Kante mit dem momentanen Knoten  $k$  verbunden ist) den Roboter relativ zur momentanen Orientierung bewegt:  $(\delta x, \delta y)$  und wie weit diese Pose ihn drehen wird:  $\delta \varepsilon$ .
- Für eine gegebene, momentane Pose  $\rho_k$  wird für alle Kandidaten  $j \in [0, \dots, J - 1]$  ausge-rechnet, wieweit der Abstand  $d_j$  der potentiell neuen Pose  $\rho_j$  zum Ziel  $\bar{x}$  ist:

$$d(\rho_k, w_j, \bar{x}) = \left| \bar{x} - \left( \mathbf{p}_{1,k} + \mathbf{R}(\varepsilon_k) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \right) \right|_2 \quad (2)$$

- Außerdem wird die Richtungsabweichung  $\Delta \varepsilon_j$  aller potentiell neuen Pose  $j$  berechnet:

$$\Delta \varepsilon(\rho_k, w_j, \bar{x}) = \angle \left( \bar{x} - \left( \mathbf{p}_{1,k} + \mathbf{R}(\varepsilon_k) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \right), \mathbf{R}(\varepsilon_k + \delta \varepsilon) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

- Die Folgepose  $\rho_{k+1}$  ergibt sich dann aus dem Minimum der mit  $a = .5$  gewichteten Summe von Abstand und Orientierungsabweichung für alle Möglichkeiten  $\rho_j$ :

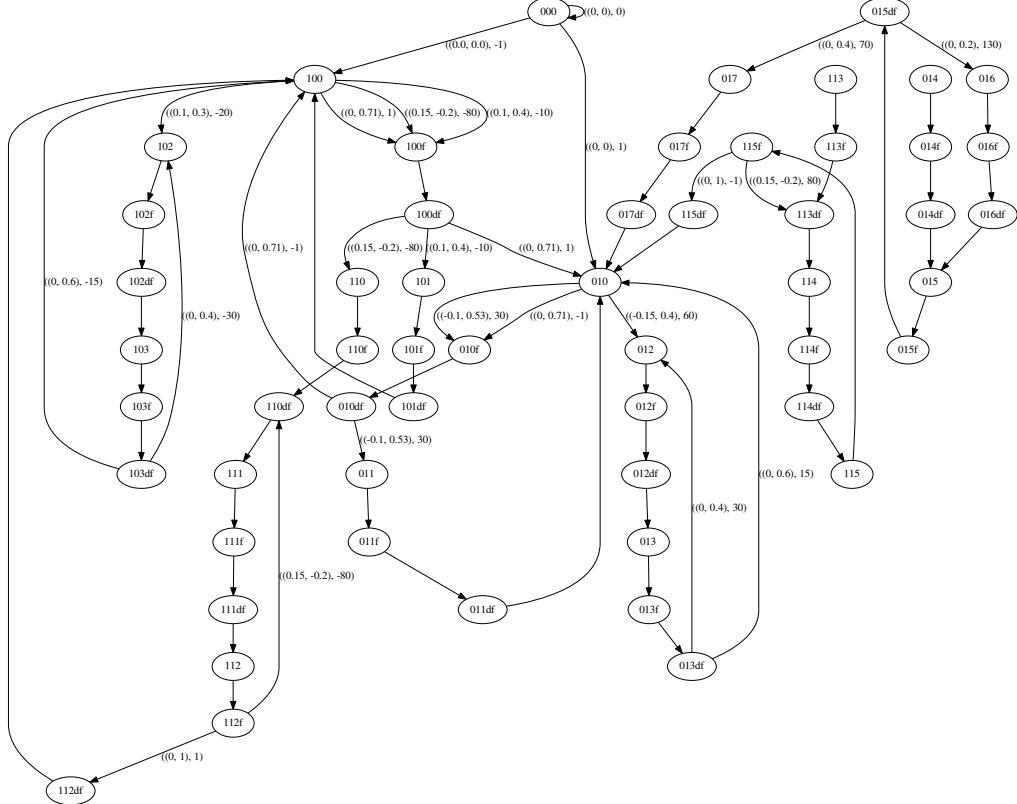
$$\rho_{k+1} = \min_j \left( a \frac{d_j}{d_{\min}} + (a - 1) \frac{\Delta \varepsilon_j}{\Delta \varepsilon_{\max}} \right) \quad (4)$$

- wobei  $\Delta \varepsilon_{\max}$  die maximale Orientierungsabweichung aller Möglichkeiten ist; und  $d_{\min}$  der minimale Abstand aller Möglichkeiten ist.

### 2.2.1 Search Tree with weights

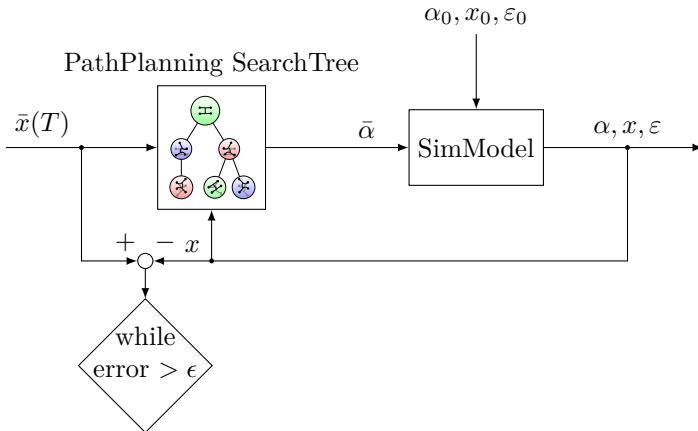
Complete SearchTree contains:

- all vertices (i.e. poses) including fix and defix poses
  - weights of egdes:  $w = ((\delta x, \delta y), \delta \varepsilon)$



### 2.3 Simulation Results

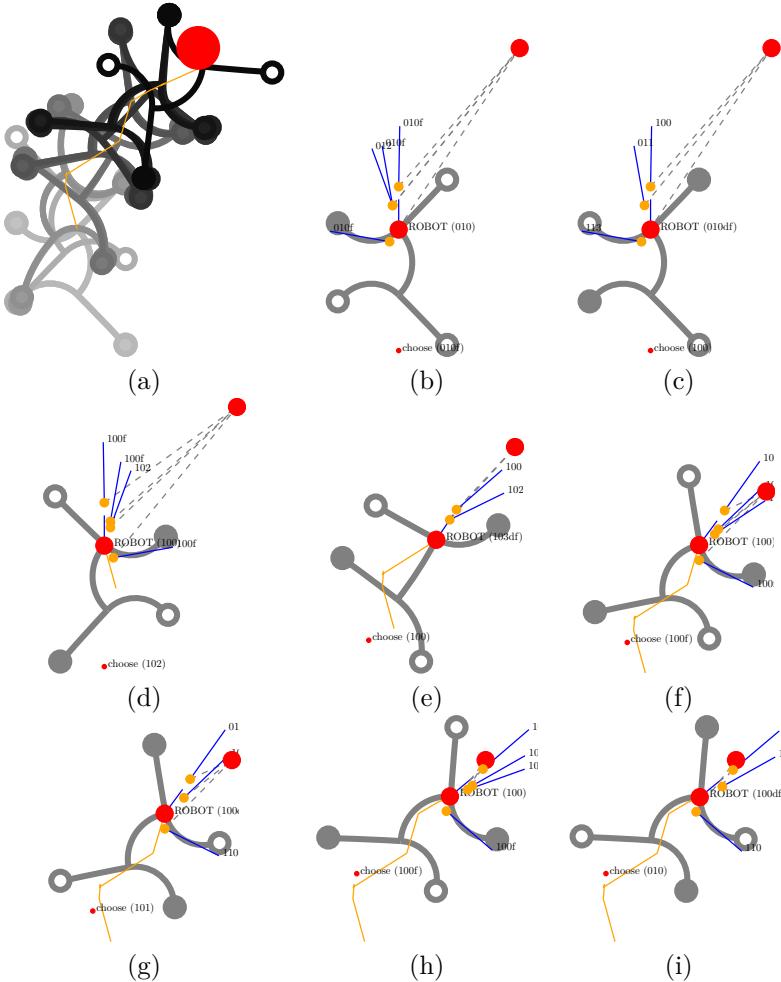
### Block Diagram of Simulation:



### 2.3.1 Simulation Results Curve

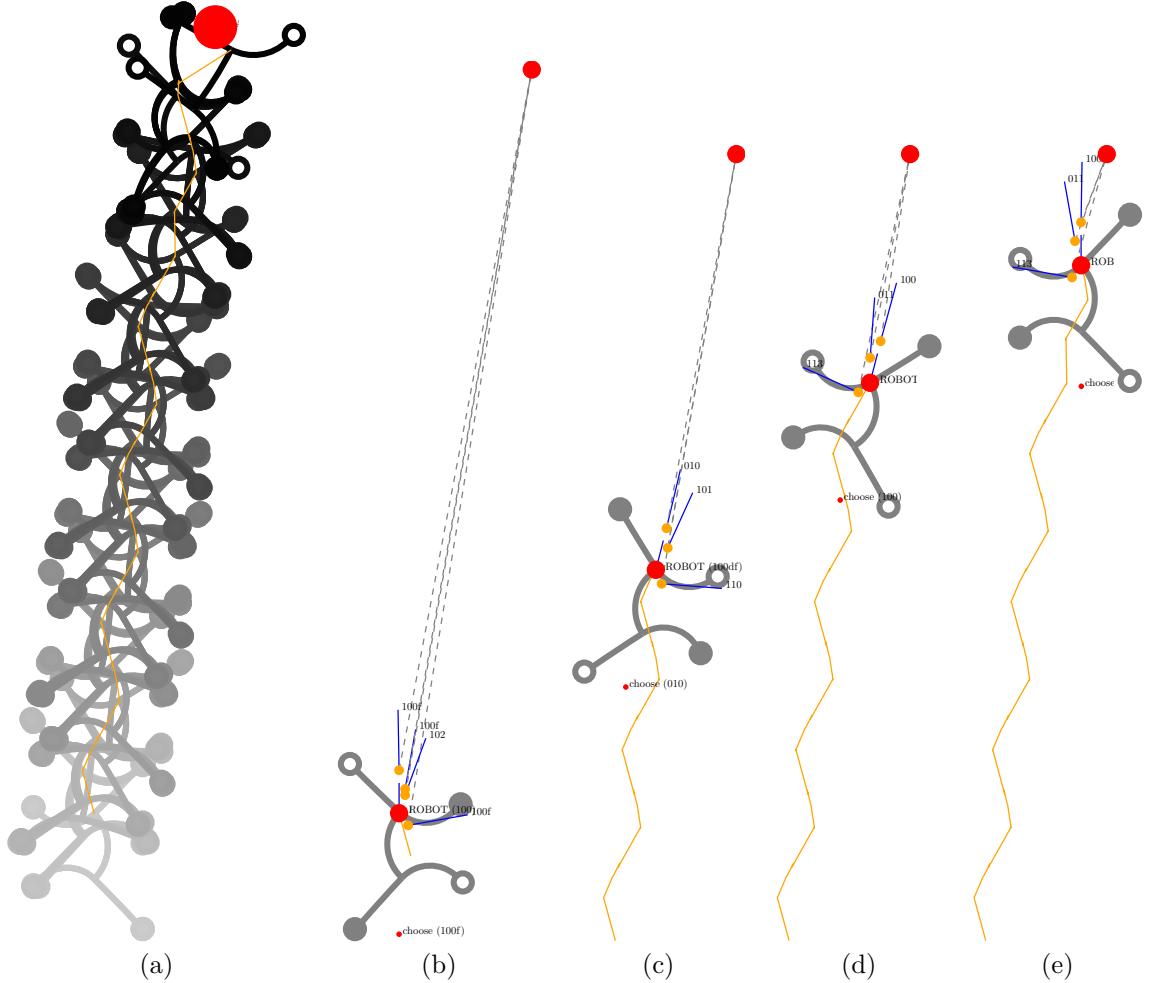
- Src: path\_planner.py

- Startwerte:  $p_{1,0} = (0, 0)$ ,  $\bar{x} = (2, 3)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = [90, 0, -90, 90, 0]$
- Zu sehen sind:
  - Der gesamte Gang
  - Und alle Schritte, in denen eine Entscheidung getroffen werden musste.
  - Die Position des Roboters und die Zielposition sind als rote Punkte markiert
  - Das möglichen Folgeposen sind als orange Punkte dargestellt.
  - Alle Orientierungen sind als blaue Linien dargestellt



### 2.3.2 Simulation Results Straight

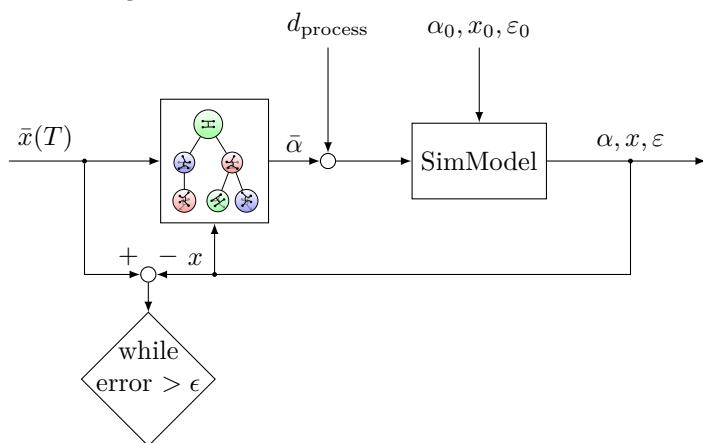
- Src: `path_planner.py`
- Startwerte:  $p_{1,0} = (0, 0)$ ,  $\bar{x} = (2, 13)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = [90, 0, -90, 90, 0]$



## 2.4 What happens if Process Noise occurs?

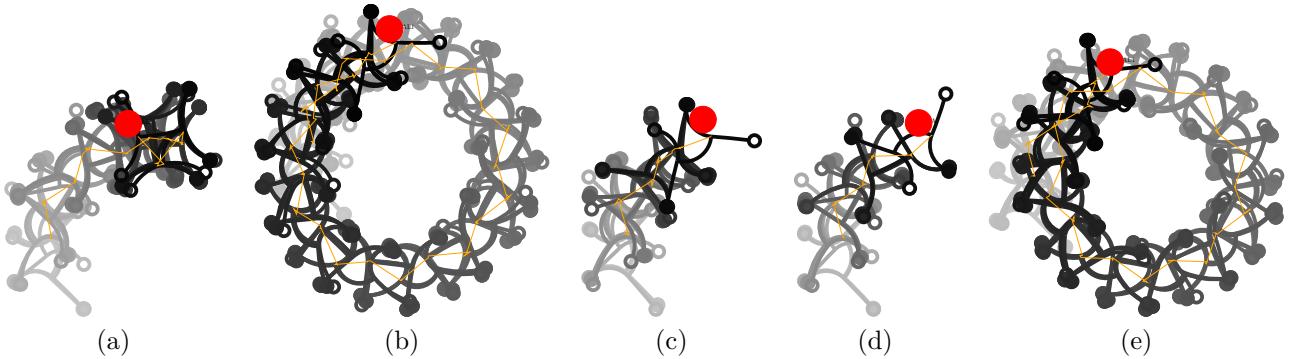
- Es kann nicht davon ausgegangen werden, dass der Roboter stets exakt die ReferenzWinkel einnimmt.
- Diese Abweichung soll nun modelliert werden
- Add process noise to Simulation input (0 mean, 5 standard deviation)
- Implementierung: `alp = alp + np.random.normal(0, 5, 5)`

Block Diagram of Simulation with noise:



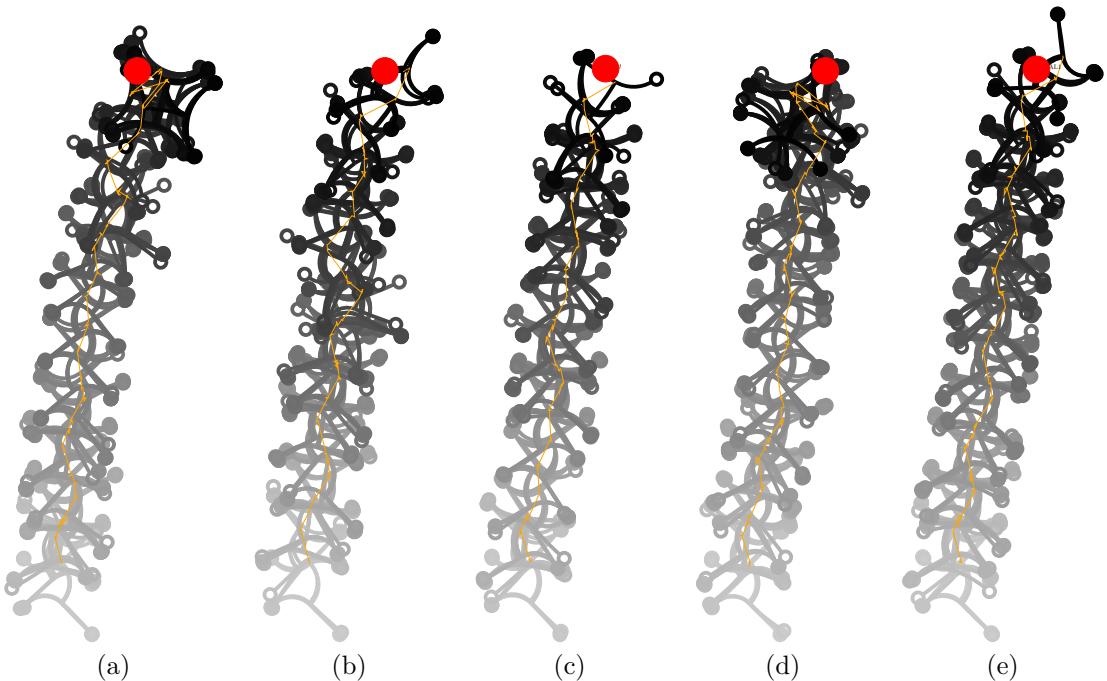
#### 2.4.1 Curve Noise

- Src: `path_planner.py`
- Startwerte:  $p_{1,0} = (0, 0)$ ,  $\bar{x} = (2, 3)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = [90, 0, -90, 90, 0]$
- Die Simulation wurde 5 mal wiederholt.
- Gezeigt ist jeweils nur der gesamte Gang.



#### 2.4.2 Straight Noise

- Src: `path_planner.py`
- Startwerte:  $p_{1,0} = (0, 0)$ ,  $\bar{x} = (2, 13)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = [90, 0, -90, 90, 0]$
- Die Simulation wurde 5 mal wiederholt.
- Gezeigt ist jeweils nur der gesamte Gang.



#### 2.5 Conclusion

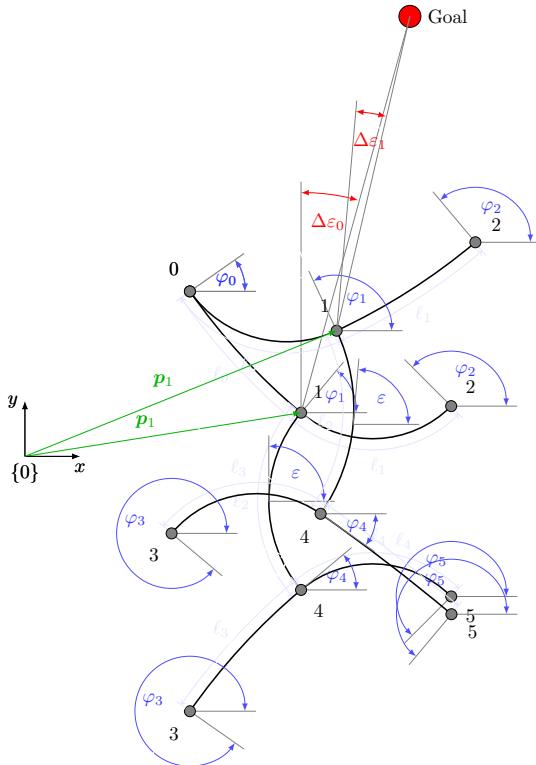
- SearchTree Pathplanner funktioniert. Der Roboter kommt ans Ziel! Sowohl in der Simulation als auch im Experiment.

- Durch die finite Anzahl an möglichen Folgeposen, läuft der Roboter allerdings im ZickZack auf das Ziel zu.
- Wird Prozess Rauschen in die Simulation eingebaut, wird der Prozess instabil.
- Teilweise läuft der Roboter knapp am Ziel vorbei und ist in einem Kurven-Loop gefangen.
  - Diese Phänomen konnte auch schon im Experiment gesichtet werden.
- Fazit:
  - PathPlanner SearchTree ist nicht wirklich flexibel. Kann zwar erweitert werden, aber umständlich.
  - instabil bei ProzessRauschen.

### 3 Finding a Analytic Model for describing the General Gait

#### 3.1 Problem Statement

- Angenommen die Konfiguration / Pose des Roboters  $\rho = [\alpha, p_1, \varepsilon]$  ist vollständig bekannt, wobei  $\alpha$  die Gelenkkoordinaten / Biegewinkel der einzelnen Glieder sind,  $p_1$  die Position des vorderen Torsoendes und  $\varepsilon$  die Orientierung des Roboters. Siehe Bild:



- Für die Pfadplanung, wäre eine Funktion hilfreich, die zu einer gegebenen Wunschkreisung  $\Delta\varepsilon$ , eine entsprechende Abfolge von Roboter-Konfigurationen / Posen ausgibt, sodass sich der Roboter entsprechend dreht.
- So könnte zB die Richtung des Roboters so justiert werden, dass er sich auf ein gegebenes Ziel zu bewegt.
- Für den geraden Gang ist eine analytische Funktion bekannt, die die Geschwindigkeit des Roboters einstellt. Geschwindigkeit im Sinne von Schrittweite, bzw. Vorschub pro Zyklus:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 45 - \frac{x_1}{2} \\ 45 + \frac{x_1}{2} \\ x_1 \\ 45 - \frac{x_1}{2} \\ 45 + \frac{x_1}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Die Schrittweite ist hier als  $x_1$  beschrieben.

### 3.2 Approach: Guess structure for a analytic model for walking curves

- Src can be found: `analytic_model.py`

- Model:

$x_1$  beschreibt hier die Schrittweite

$x_2$  das Maß der Drehung.

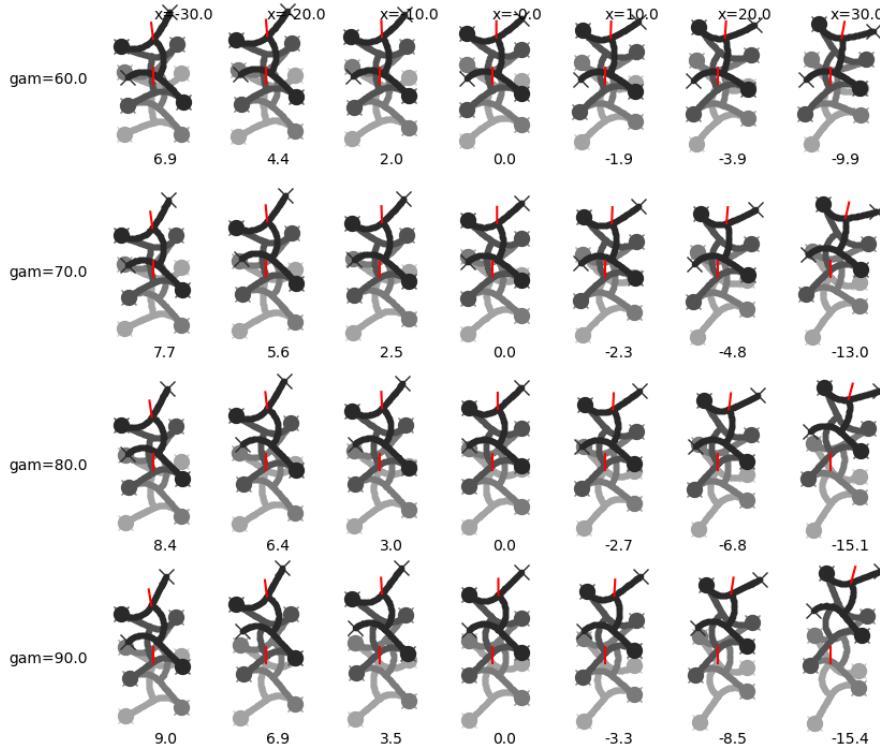
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 45 - \frac{x_1}{2} \\ 45 + \frac{x_1}{2} \\ x_1 + x_2 \\ 45 - \frac{x_1}{2} \\ 45 + \frac{x_1}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

- Method:

Simulate for different  $x_1$  and  $x_2$  (in der Abbildung unten ist  $x_1 = \text{gam}$  und  $x_2 = \text{x}$ )

#### 3.2.1 Simulation Results

Results für 2 Zyklen:



### 3.2.2 Observations

- Es funktioniert. Der Roboter läuft eine Kurve.
- Kurve ist unsymmetrisch. Rechts klappt besser als links.
- Startpose ist besser für Rechtskurve geeignet.
- Noch nichts über die innere Spannung des Roboters herausgefunden

### 3.3 Approach: Find a reasonable structure

- Src can be found:

analytic_model_2.py	First Tries
analytic_model_2_adv.py	Final Results

- Orientierung der Füße soll konstant bleiben:

$$\varphi_0 = \varepsilon + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_0 \quad (7)$$

Da im vorhergegangenem Versuch die asymmetrischen Aktuierung des Torsos schon zu guten Ergebnissen geführt hat, soll dieses Modell beibehalten werden. Allerdings in einer leicht variierten Form.  $x_2$  ist nun ein relatives Maß für die Drehung:

$$\alpha_2 = x_1 + x_2|x_1| \quad (8)$$

Es muss also  $\alpha_0$  so gewählt werden, dass  $\varphi_0$  möglichst unabhängig von  $x_i$  wird. Deshalb wird ein noch unbekannter Term  $x_3$  hinzugefügt. Damit ergibt sich der Biegewinkel des Beines:

$$\alpha_0 = 45 + \frac{x_1}{2} + x_3. \quad (9)$$

Für die Orientierung des Fußes bedeutet das:

$$\varphi_0 = \varepsilon + \frac{x_1 + x_2|x_1|}{2} - \left(45 + \frac{x_1}{2} + x_3\right) \quad (10)$$

$$= \varepsilon - 45 + \frac{x_2|x_1|}{2} - x_3 \quad (11)$$

$$(12)$$

Es wird **angenommen**, dass die Orientierung des Roboters mit der Schrittweite linear wächst (i.e. Der Roboter dreht sich ein wenig zwischen seinen Extremposen):

$$\varepsilon = c_1 x_1 + \varepsilon_0 \quad (13)$$

Mit konstantem Orientierungswinkel  $\varphi = \varphi_0$  ergibt sich somit:

$$\varphi_0 = c_1 x_1 + \varepsilon_0 - 45 + \frac{x_2|x_1|}{2} - x_3 \quad (14)$$

$$x_3 = c_1 x_1 + \frac{x_2|x_1|}{2} + c \quad (15)$$

Unter der **Annahme**, dass  $\varphi_0 \approx \varepsilon_0 - 45$  ist, ergibt sich  $c \approx 0$ . Das meint, die Orientierung ändert sich nur minimal. entspricht also im Wesentlichen der Ausgangskonfiguration. Weiterhin wird **angenommen**, dass für einen fixierter Fuß der Term  $c_1 x_1 \approx 0$  vernachlässigbar ist. Somit ergibt sich für den Biegewinkel des fixierten vorderen linken Beins:

$$\alpha_{0,f} = 45 - \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2}x_2|x_1| \quad (16)$$

Wenn das Bein nicht fixiert ist, kann es beliebige Orientierung annehmen. Hierfür wird **angenommen**, dass sich die Drehung des Körpers erst in der nicht fixierten Phase eines Beines in dessen Orientierung auswirkt. Deshalb, wird der Term  $c_1x_1$  in dieser Phase aktiv. Weiterhin wird **angenommen**, dass  $c_1 = x_2$ . Damit ergibt sich für einen nicht fixierten Fuß:

$$\alpha_{0,\bar{f}} = 45 - \frac{x_1}{2} + x_2x_1 \quad (17)$$

- Das resultierende Modell sieht so aus:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 45 - \frac{x_1}{2} + f_0 \frac{1}{2}|x_1|x_2 + \bar{f}_0 x_1 x_2 \\ 45 + \frac{x_1}{2} + f_1 \frac{1}{2}|x_1|x_2 + \bar{f}_1 x_1 x_2 \\ x_1 + |x_1|x_2 \\ 45 - \frac{x_1}{2} + f_2 \frac{1}{2}|x_1|x_2 + \bar{f}_2 x_1 x_2 \\ 45 + \frac{x_1}{2} + f_3 \frac{1}{2}|x_1|x_2 + \bar{f}_3 x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

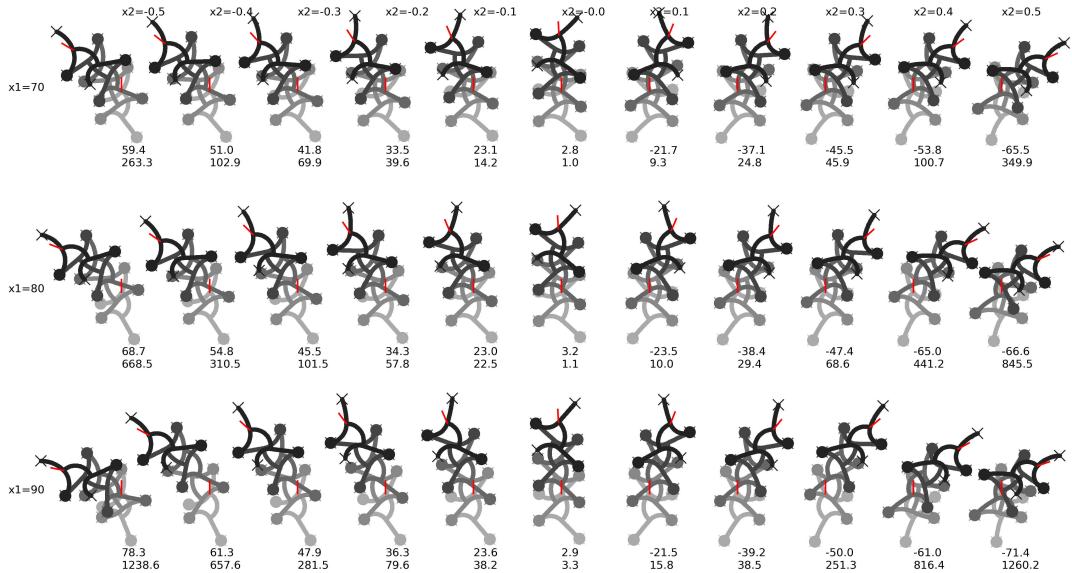
Wobei  $f_i$  den Zustand des Fußes beschreibt:

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{if} & \text{foot fixed} \\ 0 & \text{else} & \end{cases} \quad (19)$$

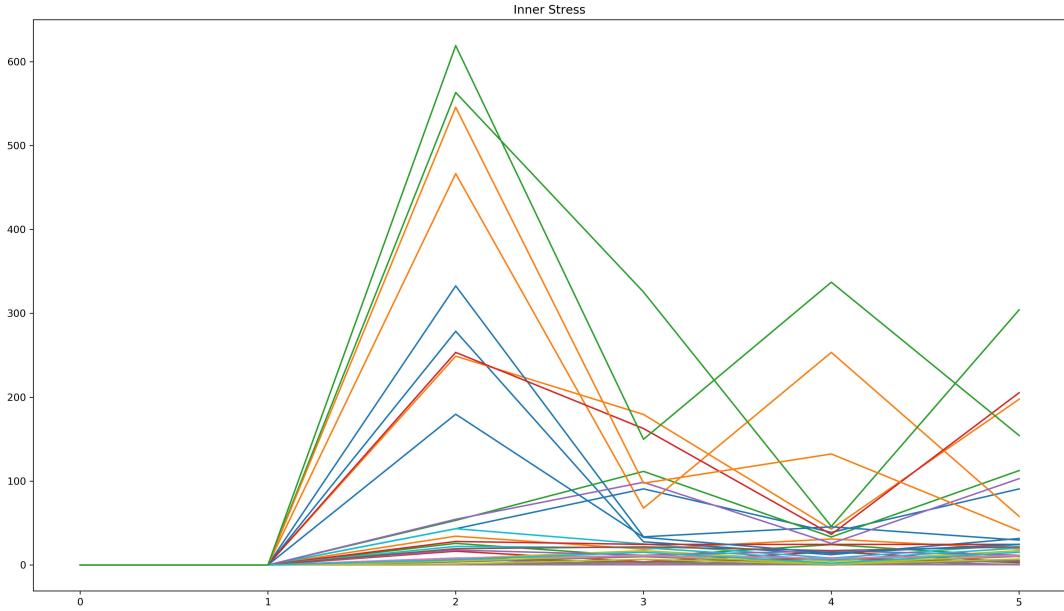
$$\bar{f}_i = \begin{cases} 0 & \text{if} & \text{foot fixed} \\ 1 & \text{else} & \end{cases} \quad (20)$$

### 3.3.1 Simulation Results

- In der abgebildeten Matrix sind in den Reihen konstante Schrittweite  $x_1$
- Spalten: konstantes Kurvenmaß  $x_2$
- Jedes Einzelbild zeigt die Simulation von zwei Zyklen mit dem zu  $(x_1, x_2)$  entsprechenden Laufmuster.
- Unter jedem Einzelbild ist die Drehung in Grad  $\Delta\epsilon$  und die Summe der inneren Spannung aller Posen innerhalb des Laufes  $\sum_i \sigma(\rho_i)$ .



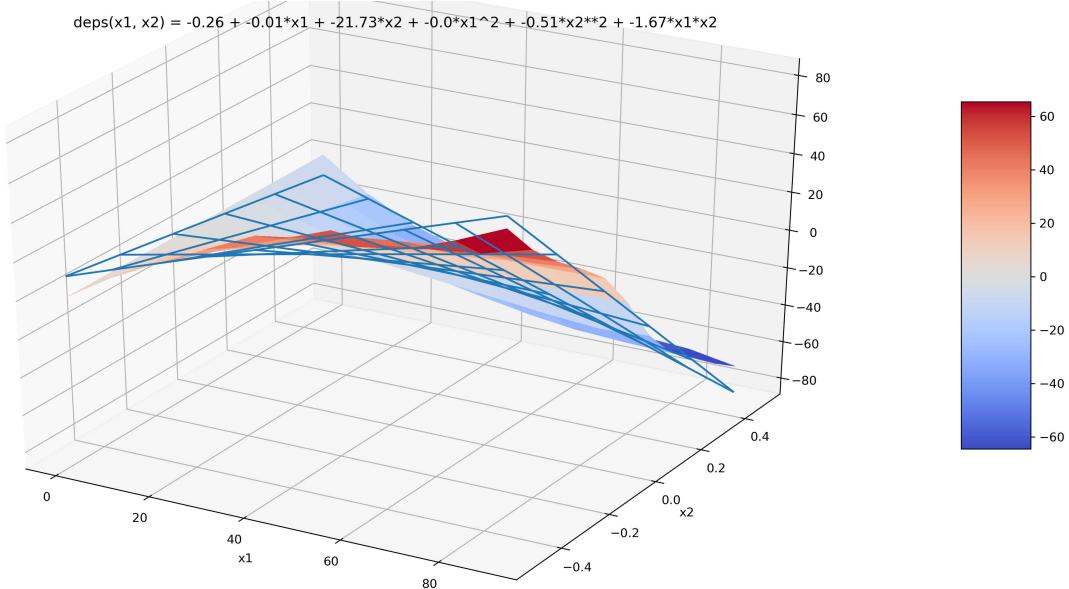
- Folgende Abbildung zeigt den Stressverlauf  $\sigma(\rho_i)$
- Bis auf ein paar Ausreißer ist die innere Spannung über den Lauf moderat.



- Delta Epsilon kann jetzt gefittet werden:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2\text{cycle}}(x_1, x_2) = -21.7x_2 - .51x_2^2 - 1.67x_1x_2 \quad (21)$$

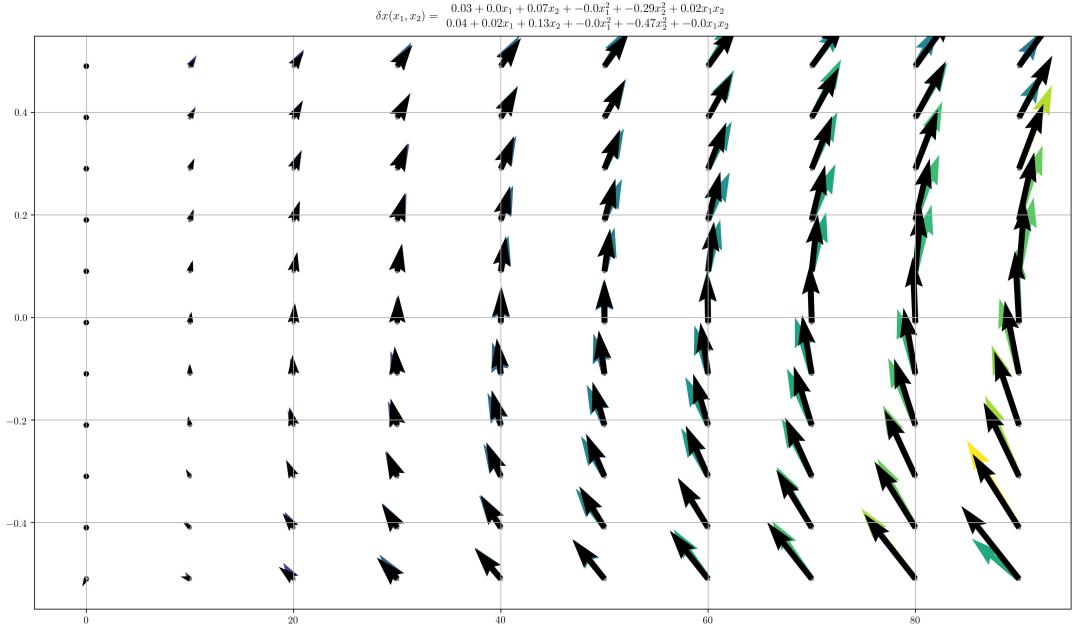
- SurfacePlot ist Simulations Data und WirframPlot ist der Fit



- Ebenso kann die Translation in Bewegungsrichtung gefittet werden:

$$\frac{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}(x_1, x_2)}{1\text{cycle}} = \begin{bmatrix} .07x_2 - .29x_2^2 + .02x_1x_2 \\ .02x_1 + .13x_2 - .47x_2^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

- Schwarze Pfeile sind Fit. Bunte Pfeile Simulations Ergebnisse.



### 3.4 Approach: Optimize Extra leg bending Angle for given extra torso bending

- Src can be found:
 

<code>analytic_model_3.py</code>	Optimizing $x_3$ und $x_4$
<code>eval_analytic_model_3.py</code>	Evaluate Simulation and Function Fitting
<code>eval2_analytic_model_3.py</code>	Simulate Gait with obtained gait law
- Nun soll untersucht werden, welche Extra Leg Bending Angle die innere Spannung des Roboters minimiert.
- Model:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 45 - \frac{x_1}{2} + \bar{f}_0 x_3 + f_0 x_4 \\ 45 + \frac{x_1}{2} + \bar{f}_1 x_3 + f_1 x_4 \\ x_1 |x_2| \\ 45 - \frac{x_1}{2} + \bar{f}_2 x_4 + f_3 x_3 \\ 45 + \frac{x_1}{2} + f_3 x_4 + f_4 x_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

- Annahme:  
Die Extra Biegung  $x_3$  für freie Beine und die Extra Biegung  $x_4$  für fixierte Beine sind abhängig von der Extra Biegung  $x_2$  für den Torso.

Hinter- und Vorderbeine sind nicht symmetrisch, aber kreuzweise symmetrisch: Die Extra-biegung für ein **nicht fixiertes Vorderbein** entspricht der Extrabiegung eines **fixierten Hinterbeins** und andersherum.

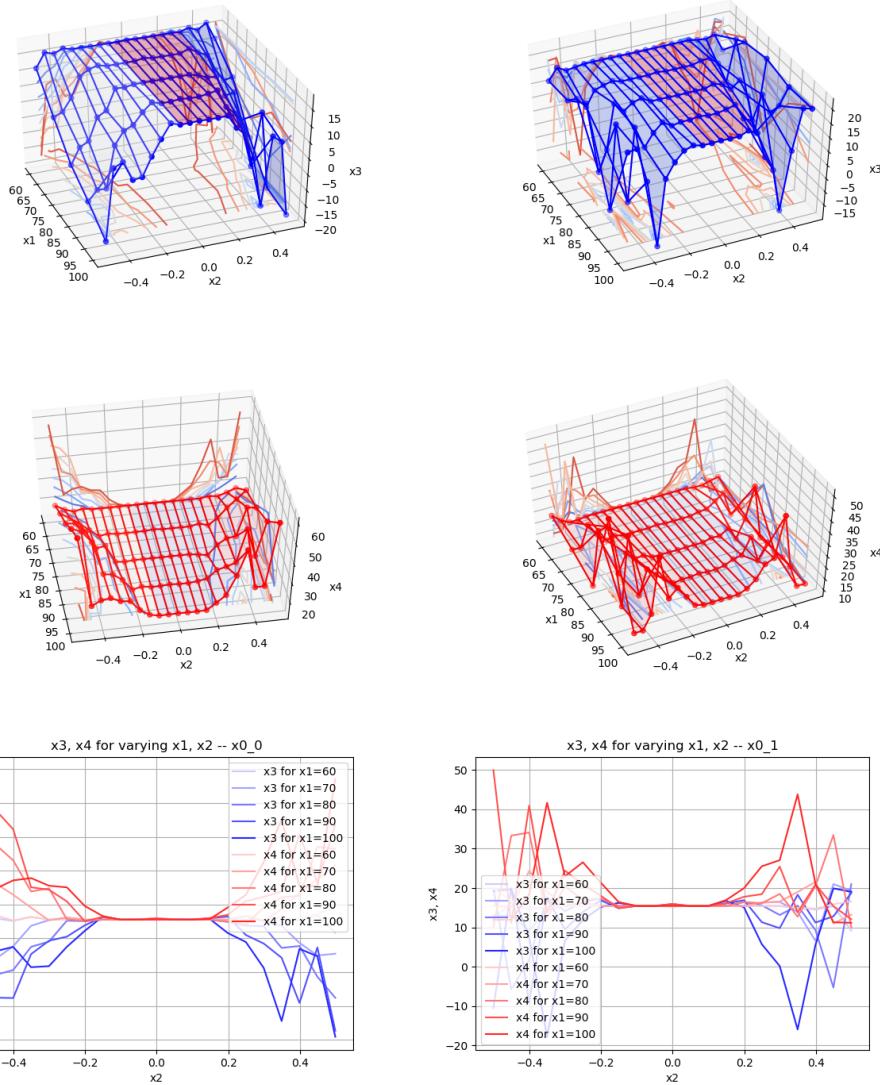
- Methode:  
Für gegebenes Extra Torso Bending  $x_2$  und gegebenen Schrittweite  $x_1$  minimiere die Innere Spannung über den Gang mit  $n$  Zyklen aufsummiert:

Gegeben:	$x_1$	Schrittweite
	$x_2$	Extra Torsobiegung
Gesucht:	$x_3$	Extra Beinbiegung fixiert vorn
	$x_4$	Extra Beinbiegung fixiert hinten

$$(x_{3,\text{opt}}, x_{4,\text{opt}}) = \min_{x_3, x_4} \sum_k^{2n} \sigma(\rho_k(\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4))) \quad (24)$$

### 3.4.1 Optimization Results

Results (links mit Startwert (10, 20) rechts mit Startwert (20, 10)):

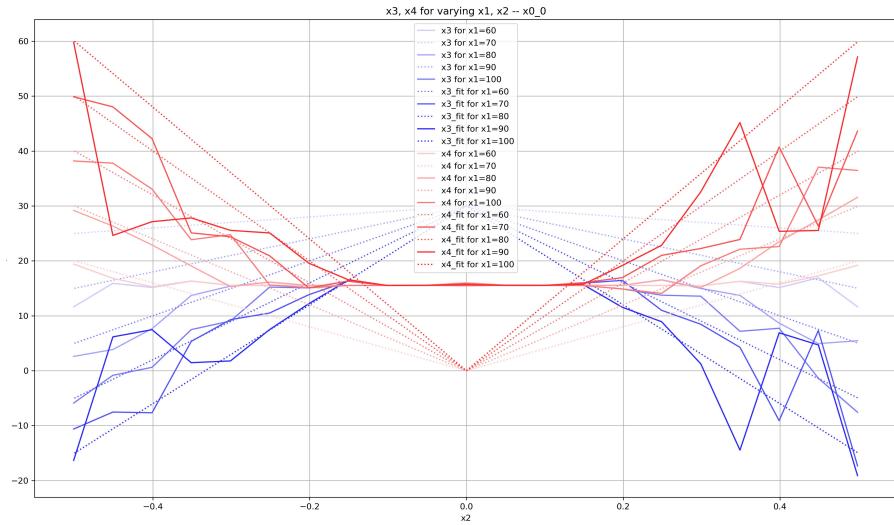


### 3.4.2 Function Fitting

- Es werden Ergebnisse des ersten Startwert genommen.
- Es ergibt sich:

$$x_3(x_1, x_2) = 30 - 2|x_1 x_2| + 110|x_2| \quad (25)$$

$$x_4(x_1, x_2) = 2|x_1 x_2| - 80|x_2| \quad (26)$$

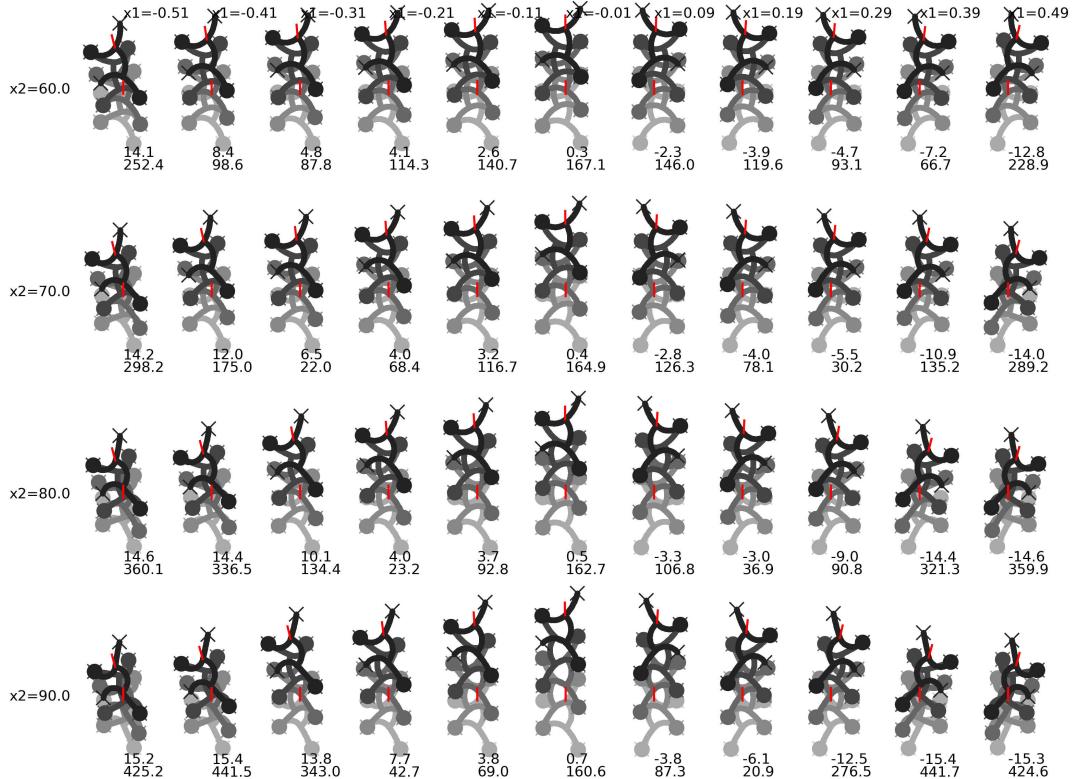


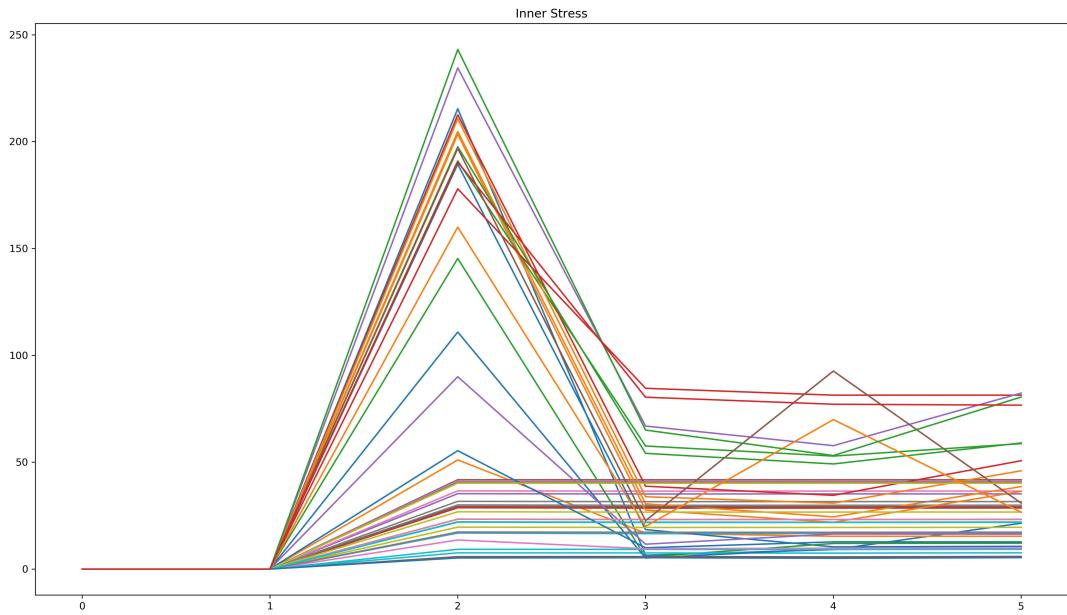
Und somit als Gait Law:

$$\alpha = \begin{cases} 45 - \frac{x_1}{2} + \bar{f}_0(30 - 2|x_1x_2| + 110|x_2|) + f_0(2|x_1x_2| - 80|x_2|) \\ 45 + \frac{x_1}{2} + f_1(30 - 2|x_1x_2| + 110|x_2|) + f_1(2|x_1x_2| - 80|x_2|) \\ x_1|x_2| \\ 45 - \frac{x_1}{2} + \bar{f}_2(2|x_1x_2| - 80|x_2|) + f_3(30 - 2|x_1x_2| + 110|x_2|) \\ 45 + \frac{x_1}{2} + f_3(2|x_1x_2| - 80|x_2|) + f_4(30 - 2|x_1x_2| + 110|x_2|) \end{cases} \quad (27)$$

### 3.4.3 Simulation Results

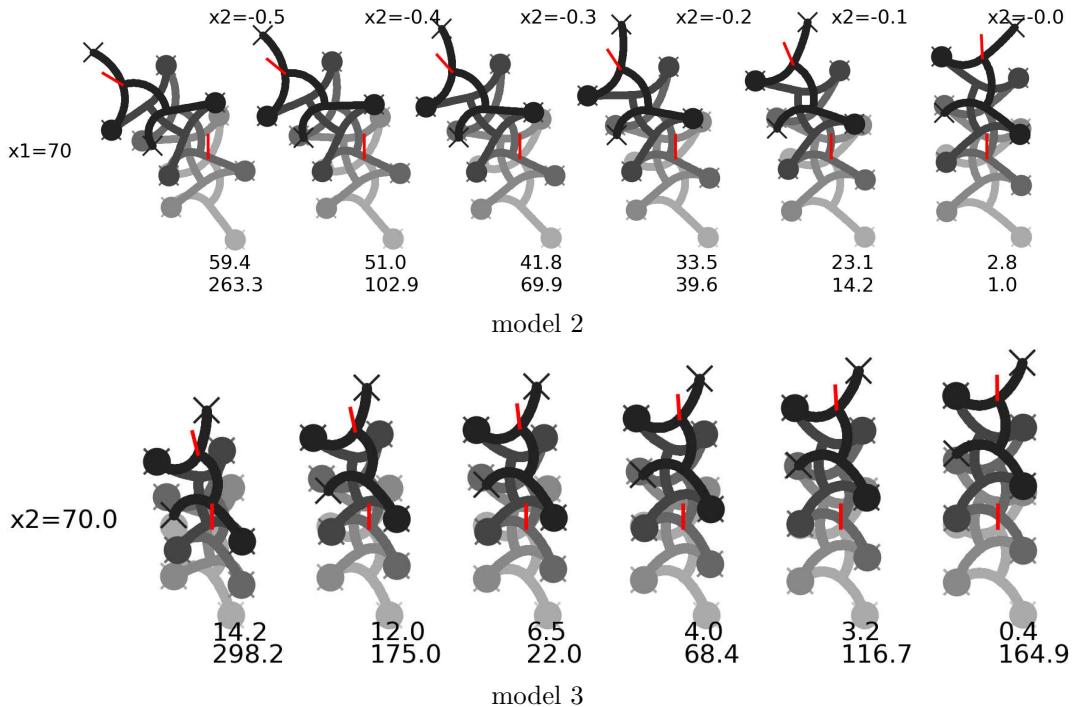
- Gleiche Struktur wie in model 2
- Stress ist deutlich kleiner. Drehung allerdings auch.





### 3.5 Compare model 2 and model 3

- Betrachtet man die beiden unteren Bilder, stellt man fest, dass der dritte Ansatz nicht wirklich erfolgreich war.
- Model 2 führt zu besseren Drehungen und kleinerer innerer Spannung. (Zumindest für die betrachtete Zeile ( $x_1 = 70$ ))



#### 3.5.1 Conclusion

- Es wird das Gait Law aus Model 2 für den Optimalen Pathplanner gewählt.

## 4 Optimal PathPlanner based on General Gait Model

### 4.1 Idea

- Wie schon beim SearchTreePathplanner soll die optimale Folgepose berechnet werden.
- Optimal in dem Sinne, dass sie den Roboter näher an das Ziel bringt und seine Orientierung so verändert, dass er in die Richtung des Ziels zeigt.
- Dieses Mal soll aber nicht aus einer endlichen Anzahl aus vorher definierten möglichen Folgeposen gewählt werden, sondern aus der unendlichen Anzahl aller möglichen Posen.
- Das Minimierungsproblem ist ähnlich:

$$\boldsymbol{\rho}_{k+1} = \min_j \left( a \frac{d(\boldsymbol{\rho}_j)}{d_k} + (1-a) \frac{\Delta\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_j)}{\Delta\varepsilon_k} \right) \quad (28)$$

- Mithilfe des analytischen Modells lässt sich die Distanz zum Ziel  $d$  und die Orientierungsabweichung  $\Delta\varepsilon$  in Abhängigkeit der Schrittweite  $x_1$  und des Drehungsmaßes  $x_2$  beschreiben.
- Zur Erinnerung:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} (x_1, x_2) / \text{cycle} = \delta \mathbf{x}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} .07x_2 - .29x_2^2 + .02x_1x_2 \\ .02x_1 + .13x_2 - .47x_2^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\delta\varepsilon(x_1, x_2) / \text{cycle} = -.005x_1 - 10.85x_2 - .255x_2^2 - .835x_1x_2 \quad (30)$$

- Der Abstand  $d$  ergibt sich zu:

$$d(\boldsymbol{\rho}_k, \bar{\mathbf{x}}, x_1, x_2) = \left| \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{x}_k + \mathbf{R}(\varepsilon_k) \delta \mathbf{x}(x_1, x_2)) \right|_2 \quad (31)$$

- Die Richtungsabweichung  $\Delta\varepsilon'$  der Folgepose ergibt sich zu:

$$\Delta\varepsilon'(\boldsymbol{\rho}_k, \bar{\mathbf{x}}, x_1, x_2) = \angle(\bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{x}_k + \mathbf{R}(\varepsilon_k) \delta \mathbf{x}(x_1, x_2)), \mathbf{R}(\varepsilon_k + \delta\varepsilon(x_1, x_2)) \mathbf{e}_x) \quad (32)$$

wobei  $\mathbf{e}_x$  der Einheitsvektor in  $x$ -Richtung ist.

- Das Minimierungsproblem lässt sich nun konkretisieren:

$$x_{1,\text{opt}}, x_{2,\text{opt}} = \min_{x_1, x_2} \left( a \frac{d(x_1, x_2)}{d_k} + (1-a) \frac{\Delta\varepsilon(x_1, x_2)}{\Delta\varepsilon_k} \right) \quad (33)$$

Der nächste Zyklus (i.e. die nächsten zwei Posen) ist damit definiert:

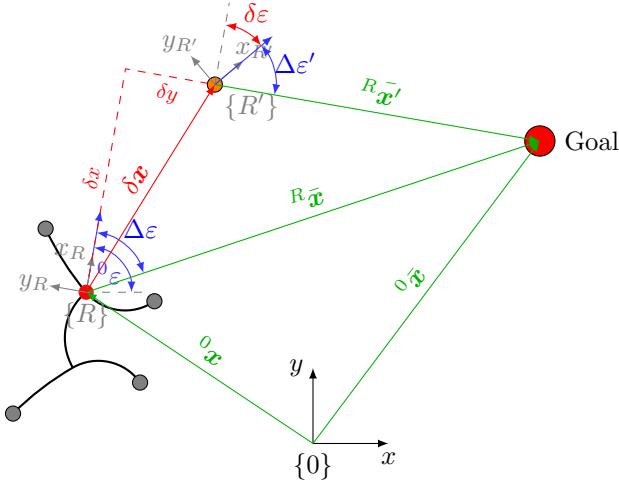
$$\boldsymbol{\rho}_{k+1} = [\boldsymbol{\alpha}(x_1, x_2), \bar{\mathbf{f}}_k], \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{k+2} = [\boldsymbol{\alpha}(-x_1, x_2), \mathbf{f}_k], \quad (35)$$

wobei  $\bar{\mathbf{f}}$  die genau entgegen gesetzte Fixierung von  $\mathbf{f}$  ist.

## 4.2 Coordinate Transformation in order to reduce complexity

- Idee: Formulierung des Optimierungsproblems in Koordinaten System des Roboters, Um Komplexität zu verringern.
- Messung wird im globalen Kamera system erfolgen, d.h. folgende Größen werden zu verfügen stehen:
  - ${}^0\boldsymbol{x}$  Position des Roboters im globalen (Kamera-) COS
  - ${}^0\bar{\boldsymbol{x}}$  Soll Position im Globalen COS
  - ${}^0\varepsilon$  Orientierung des Roboters im Globalen COS



- Da das Problem nun im roboterfesten Koordinaten system beschrieben wird, ist der Ortsvektor des Roboters  ${}^R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ .
- Den Ortsvector vom Roboter zum Ziel erhält man durch folgende Koordinatentransformation:

$${}^R\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{R}({}^0\varepsilon)({}^0\bar{\boldsymbol{x}} - {}^0\boldsymbol{x}) \quad (36)$$

- Die Position der Folgepose  ${}^R\boldsymbol{x}'$  beschrieben im Roboterfesten COS:

$${}^R\boldsymbol{x}' = \delta\boldsymbol{x}(x_1, x_2) \quad (37)$$

- Der Vektor der von der Folge Pose zum Ziel zeigt, ergibt sich:

$${}^R\bar{\boldsymbol{x}}' = {}^R\bar{\boldsymbol{x}} - {}^R\boldsymbol{x}' \quad (38)$$

- Der Abstand der Folgepose des Roboters beschrieben im Koordinatensystem des Roboters  $\{R\}$  zum Ziel  $d$  vereinfacht sich nun zu:

$$d({}^R\bar{\boldsymbol{x}}, x_1, x_2) = |{}^R\bar{\boldsymbol{x}}'|_2 \quad (39)$$

$$= |{}^R\bar{\boldsymbol{x}} - \delta\boldsymbol{x}(x_1, x_2)|_2 \quad (40)$$

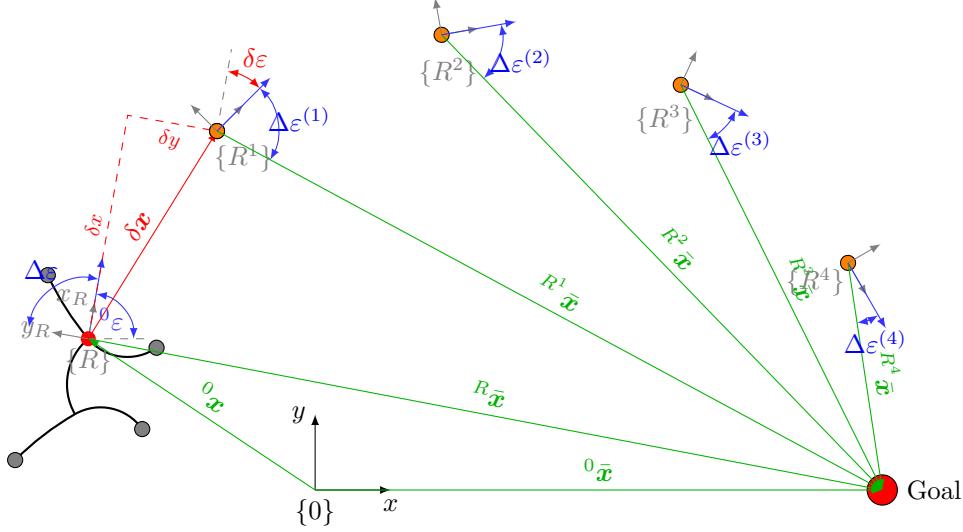
$$= \sqrt{({}^R\bar{x}_x - \delta x_x(x_1, x_2))^2 + ({}^R\bar{x}_y - \delta x_y(x_1, x_2))^2} \quad (41)$$

- Und die Richtungsabweichung  $\Delta\varepsilon'$  der Folgepose vereinfacht sich nun zu:

$$\Delta\varepsilon'({}^R\bar{\boldsymbol{x}}, x_1, x_2) = \angle({}^R\bar{\boldsymbol{x}} - \delta\boldsymbol{x}(x_1, x_2), {}^R\boldsymbol{e}_x) - \delta\varepsilon(x_1, x_2) \quad (42)$$

$$= \text{atan}\left(\frac{{}^R\bar{x}_y - \delta x_y(x_1, x_2)}{{}^R\bar{x}_x - \delta x_x(x_1, x_2)}\right) - \delta\varepsilon(x_1, x_2) \quad (43)$$

#### 4.2.1 Explizite Formulierung für mehrere Zyklen



- Mit jedem Zyklus dreht sich der Roboter um  $\delta\epsilon$  und verschiebt sich um  $\delta\mathbf{x}$ .
- Die Position der  $(n+1)$ -ten Folgepose beschrieben im COS der  $(n)$ -ten Folgepose kann dann rekursiv beschrieben werden:

$${}^{R^{(n)}}\mathbf{x}^{(n+1)} = \delta\mathbf{x}(x_1, x_2) \quad (44)$$

- Den Ortsvector der  $(n)$ -ten Pose des Roboters zum Ziel (beschrieben im COS der  $(n)$ -ten Folgepose) erhält man durch folgende Koordinatentransformation der vorhergegangen Pose:

$${}^{R^{(n)}}\bar{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{R}(-\delta\epsilon) \left( {}^{R^{(n-1)}}\bar{\mathbf{x}}^{(n-1)} - {}^{R^{(n-1)}}\mathbf{x}^{(n)} \right) \quad (45)$$

- Explizit lässt sich das Formulieren zu:

$${}^{R^{(n)}}\bar{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{R}(-\delta\epsilon) \left( \mathbf{R}(-\delta\epsilon) \left( {}^{R^{(n-2)}}\bar{\mathbf{x}}^{(n-2)} - \delta\mathbf{x} \right) - \delta\mathbf{x} \right) \quad (46)$$

$$= \mathbf{R}^n(-\delta\epsilon) {}^R\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \sum_{i=0}^n \mathbf{R}^i(-\delta\epsilon) \delta\mathbf{x} \quad (47)$$

$$= \mathbf{R}(-n\delta\epsilon) {}^R\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \sum_{i=0}^n \mathbf{R}(-i\delta\epsilon) \delta\mathbf{x} \quad (48)$$

da mehrfache Rotation um die gleiche Achse und somit  $\mathbf{R}^n(x) = \mathbf{R}(nx)$

- Und die Richtungsabweichung  $\Delta\epsilon^{(n)}$  der  $(n)$ -ten Pose zu:

$$\Delta\epsilon^{(n)} = \angle \left( {}^{R^{(n)}}\bar{\mathbf{x}}^{(n)}, {}^{R^n}\mathbf{e}_x \right) \quad (49)$$

$$= \text{atan} \left( \frac{{}^{R^{(n)}}\bar{\mathbf{x}}_y^{(n)}}{{}^{R^{(n)}}\bar{\mathbf{x}}_x^{(n)}} \right) \quad (50)$$

- Nun kann der Abstand zum Ziel  $d_n$  nach  $n$  Zyklen mit dem zu  $\delta\mathbf{x} = [\delta x, \delta y, \delta\epsilon]^\top$  korrespondierenden Laufmuster formuliert werden:

$$d_n({}^R\bar{\mathbf{x}}, \delta\mathbf{x}) = \left| \mathbf{R}(-n\delta\epsilon) {}^R\bar{\mathbf{x}} - \sum_{i=0}^n \mathbf{R}(-i\delta\epsilon) \delta\mathbf{x} \right|_2 \quad (51)$$

### 4.3 Simplified Optimization Problem

- Da die Richtungsabweichung  $\Delta\varepsilon$  im der Abstandsformel für mehrere Zyklen schon implizit enthalten ist, kann das Minimierungsproblem nun drastisch vereinfacht werden (die Funktion wird quadriert, um die Wurzel zu beseitigen und die Ableitung zu vereinfachen):

$$x_{1,\text{opt}}, x_{2,\text{opt}} = \min_{x_1, x_2} d_n^2({}^R\bar{\mathbf{x}}, \delta\mathbf{x}) \quad (52)$$

- Zur Lösung des Optimierungsproblems ist die Jacobi-Matrix sehr hilfreich:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} & \frac{\delta f}{\delta x_2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

- Möge die Suche nach der Jacobi Matrix beginnen

#### 4.3.1 Calculation of Jacobian

**Ableitung der Trigonometrischen Summe in einer Dimension** Als Euler'sche Formulierung

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\delta_\varepsilon) = \frac{i(-e^{i\delta_\varepsilon n} + 1)(-e^{i\delta_\varepsilon(n+1)} + 1)e^{-i\delta_\varepsilon n}}{2(-e^{i\delta_\varepsilon} + 1)} \quad (54)$$

Ableitung:

$$\frac{(-ne^{i\delta_\varepsilon} + ne^{2i\delta_\varepsilon(n+1)} - ne^{i\delta_\varepsilon(2n+1)} + n - e^{i\delta_\varepsilon} + 2e^{i\delta_\varepsilon(n+1)} - e^{i\delta_\varepsilon(2n+1)})e^{-i\delta_\varepsilon n}}{2(e^{2i\delta_\varepsilon} - 2e^{i\delta_\varepsilon} + 1)} \quad (55)$$

Laut Formelsammlung (BFS39):

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\delta_\varepsilon) = \frac{\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \quad (56)$$

Ableitung

$$\frac{n \cos(\delta_\varepsilon n) - n \cos(\delta_\varepsilon(n+1)) + \cos(\delta_\varepsilon n) - 1}{2(-\cos(\delta_\varepsilon) + 1)} \quad (57)$$

**Partielle Ableitung der Trigonometrischen Summe** Euler:

$$\frac{i(-e^{in(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1)(-e^{i(n+1)(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1)e^{-in(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)}}{2(-e^{i(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1)} \quad (58)$$

Ableitung:

$$\frac{\delta}{\delta x_1} = -\frac{(c_0 + c_3x_2) \left( \left( n \left( e^{in(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1 \right) \left( -e^{i(n+1)(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1 \right) + (n+1) \left( -e^{in(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1 \right) \right) \right)}{2(-e^{i(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1)} \quad (59)$$

$$\frac{\delta}{\delta x_2} = -\frac{\left( \left( n \left( e^{in(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1 \right) \left( -e^{i(n+1)(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1 \right) + (n+1) \left( -e^{in(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1 \right) \right) \right)}{2(-e^{i(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)} + 1)} \quad (60)$$

Normal:

$$\frac{\sin\left(\frac{n(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)(c_0x_1+c_1x_2+c_2x_2^2+c_3x_1x_2)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{c_0x_1}{2} + \frac{c_1x_2}{2} + \frac{c_2x_2^2}{2} + \frac{c_3x_1x_2}{2}\right)} \quad (61)$$

#### 4.3.2 sum sin for n = 2

$$\frac{\sin(c_0x_1 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2) \sin\left(\frac{3c_0x_1}{2} + \frac{3c_1x_2}{2} + \frac{3c_2x_2^2}{2} + \frac{3c_3x_1x_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{c_0x_1}{2} + \frac{c_1x_2}{2} + \frac{c_2x_2^2}{2} + \frac{c_3x_1x_2}{2}\right)} \quad (62)$$

diff sumsin2 dx1

$$\frac{(c_0 + c_3x_2) \left( -\frac{3 \cos(2c_0x_1 + 2c_1x_2 + 2c_2x_2^2 + 2c_3x_1x_2)}{2} + \cos(3c_0x_1 + 3c_1x_2 + 3c_2x_2^2 + 3c_3x_1x_2) + \frac{1}{2} \right)}{\cos(c_0x_1 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2) - 1} \quad (63)$$

diff sumsin2 dx1

$$\frac{(c_1 + 2c_2x_2 + c_3x_1) \left( -\frac{3 \cos(2c_0x_1 + 2c_1x_2 + 2c_2x_2^2 + 2c_3x_1x_2)}{2} + \cos(3c_0x_1 + 3c_1x_2 + 3c_2x_2^2 + 3c_3x_1x_2) + \frac{1}{2} \right)}{\cos(c_0x_1 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2) - 1} \quad (64)$$

#### 4.3.3 Distance d sympy

$$d = \begin{aligned} & \left( xb_x \sin(-n(-0.835x_1x_2 - 0.005x_1 - 2.55x_2^2 - 10.85x_2)) \right. \\ & \quad \left. + xb_y \cos(-n(-0.835x_1x_2 - 0.005x_1 - 2.55x_2^2 - 10.85x_2)) \right) \\ & - \frac{(0.02x_1 - 0.47x_2^2 + 0.13x_2) \sin\left(\frac{n(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right)}{\sin(0.4175x_1x_2 + 0.0025x_1 + 1.275x_2^2 + 5.425x_2)} \\ & - \frac{(-0.02x_1x_2 + 0.29x_2^2 - 0.07x_2) \sin\left(\frac{(n+1)(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right) \cos\left(\frac{n(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right)}{\sin(0.4175x_1x_2 + 0.0025x_1 + 1.275x_2^2 + 5.425x_2)} \\ & + \left( xb_x \cos(-n(-0.835x_1x_2 - 0.005x_1 - 2.55x_2^2 - 10.85x_2)) \right. \\ & \quad \left. - xb_y \sin(-n(-0.835x_1x_2 - 0.005x_1 - 2.55x_2^2 - 10.85x_2)) \right) \\ & - \frac{(0.02x_1 - 0.47x_2^2 + 0.13x_2) \sin\left(\frac{(n+1)(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right) \cos\left(\frac{n(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right)}{\sin(0.4175x_1x_2 + 0.0025x_1 + 1.275x_2^2 + 5.425x_2)} \\ & + \frac{(-0.02x_1x_2 + 0.29x_2^2 - 0.07x_2) \sin\left(\frac{n(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)}{2}\right)}{\sin(0.4175x_1x_2 + 0.0025x_1 + 1.275x_2^2 + 5.425x_2)} \end{aligned} \quad (65)$$

Mit  $\delta_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
d = & \left( -xb_x \sin(\delta_\varepsilon n) + xb_y \cos(\delta_\varepsilon n) + \frac{(0.02x_1 - 0.47x_2^2 + 0.13x_2) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(-0.02x_1x_2 + 0.29x_2^2 - 0.07x_2) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \right)^2 \\
& + \left( xb_x \cos(\delta_\varepsilon n) + xb_y \sin(\delta_\varepsilon n) - \frac{(0.02x_1 - 0.47x_2^2 + 0.13x_2) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(-0.02x_1x_2 + 0.29x_2^2 - 0.07x_2) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \right)^2
\end{aligned} \tag{66}$$

#### 4.3.4 Euler

$$\begin{aligned}
& d(x_1, x_2) \\
&= \frac{\left( \left( - \left( xb_x \left( e^{2in(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)} + 1 \right) - ix b_y \left( -e^{2in(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)} + 1 \right) \right) \left( -e^{i(0.835x_1x_2 + 0.005x_1 + 2.55x_2^2 + 10.85x_2)} + 1 \right) \right) \right.}{\left. \left( \left( - \left( -xb_x \left( e^{2i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) - ix b_y \left( -e^{2i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) \right) \left( -e^{i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) e^{\frac{i\delta_\varepsilon(2n+1)}{2}} - \left( -ix_2 \left( -e^{i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) \left( 0.02x_1 - 0.29x_2 + 0.07 \right) + \left( -0.02x_1x_2 + 0.29x_2^2 - 0.07x_2 \right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right) \right) \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{67}$$

Mit DepsDummy:

$$\left( \left( - \left( -xb_x \left( e^{2i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) - ix b_y \left( -e^{2i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) \right) \left( -e^{i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) e^{\frac{i\delta_\varepsilon(2n+1)}{2}} - \left( -ix_2 \left( -e^{i\delta_\varepsilon n} + 1 \right) \left( 0.02x_1 - 0.29x_2 + 0.07 \right) + \left( -0.02x_1x_2 + 0.29x_2^2 - 0.07x_2 \right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon n}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon(n+1)}{2}\right) \right) \right) \right)^2
\tag{68}$$