

Rulling på skråplan

Birthe Emilie Christiansen, Lars Mikkell Lødeng Nilsen og Harry Linrui Xu

23.02.2023

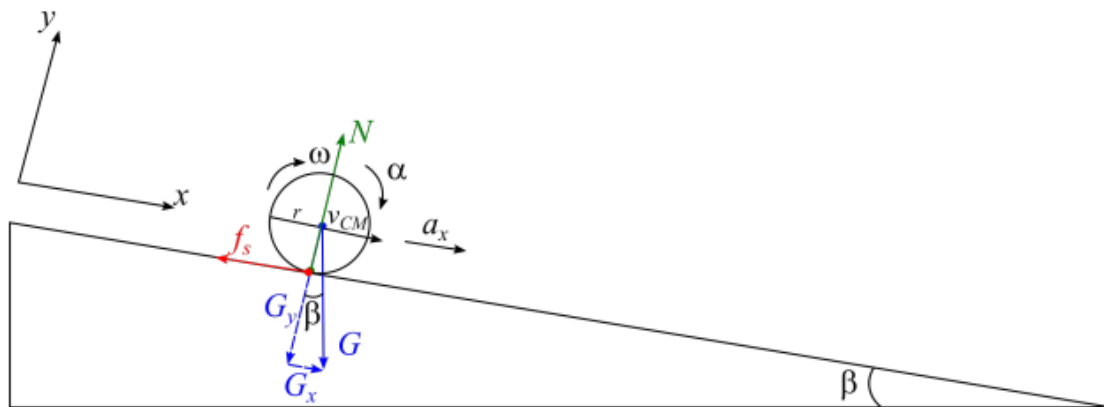
Hensikt

Dette forsøket har som hensikt å bestemme akselerasjonen for to valgte legemer som ruller uten å gli nedover et skråplan. Forsøket skal også sammenligne resultatet i forhold til mekanisk teori, og i den sammenheng avdekke eventuelle avvik som oppstår i forsøket.

Teori

Krefter på rullende legemer uten gli.

Det vil virke flere krefter på legemer som er i bevegelse. Figur 1 visualiserer de kreftene som påvirker et legeme som ruller ned et skråplan uten sluring. Sluring betyr at legemet ikke glir.



Figur 1: Illustrasjon av kreftene som virker på legemet som ruller ned skråplanet.

Figur 1 illustrerer de tre ulike kreftene som virke på et slikt legeme; en tyngdekraft $G = m \cdot g$, en normalkraft N som står normalt på skråplanet og en friksjonskraft f_s som virker i motsatt retning av bevegelsen. Ved å sette positiv x -retning nedover skråplanet og dekomponere kreftene som virker på legemet kan Newtons 2. lov $\Sigma F_x = ma_x$ gi¹:

¹ Ling, Sanny & Moebs 2016: 207.

$$mg \sin\beta - f_s = ma_x \quad (1)$$

Her beskriver β vinkelen som skapes mellom skråplanet og bordet. Videre kan også Newtons 2. lov for rullebevegelser benyttes på legemet $\Sigma\tau = I\alpha$ dette gir²:

$$f_s r = I\alpha \quad (2)$$

Her vil I representere treghetsmomentet til et legeme. Da treghetsmomentet regnes om aksen til massesentret, vil den avhenge av massen m og radiusen r , og derfor være ulik for ulike typer legemer. Ved rulling av legemer uten gli gjelder også rulle betingelsene som gir at³:







$$a_x = \alpha r \text{ og } v_{CM} = \omega r \quad (3)$$

Her representerer henholdsvis α legemets vinkelakselerasjon og ω vinkelhastigheten. Ved å angi forholdet mellom den kinetiske energien for legemets rotasjon og translasjon kan dette beskrives ved hjelp av følgende formel⁴:

$$c = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}Mv_{CM}^2} \quad (4)$$

Under i Tabell 1 kan man se verdien for konstanten c for ulike typer legemer. Legg merke til at kun legeme nummer 1 - skiven, og legeme nummer 5 - den massive kulen er relevant for dette forsøket.

Tabell 1: *Forhold mellom roterende og translatorisk kinetisk energi for ulike legemer*

Legeme	I	c
 Skive	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$
 Hul sylinder	$\frac{1}{2}M(R_i^2 + R_o^2)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2\right)$
 Tynnvegget sylinder	MR^2	1
 Sylinder med mindre rulleakse	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2$
 Massiv kule	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}$
 Kuleskall	$\frac{2}{3}MR^2$	$\frac{2}{3}$

² Ling, Sanny & Moebs 2016: 502.

³ Ling, Sanny & Moebs 2016: 529.

⁴ Ling, Sanny & Moebs 2016: 483.

Ved å kombinere disse fire ligningen kan følgende uttrykk beskrive legemets akselerasjon a_x i bevegelsen nedover skråplanet: $a_x = \frac{g \sin \beta}{c+1}$. Uttrykket kan videre utledes på følgende måte:

Ved å flytte om på ligning (1) gis: $a_x = g \sin \beta - \frac{1}{m} f_s$

Ved å sette (2) inn i (1) gis: $a_x = g \sin \beta - \frac{I \alpha}{mr}$

Ved å sette (3) inn i (1) gis: $a_x = g \sin \beta - \frac{I a_x}{mr^2}$

Ved å flytte om på uttrykket gir dette videre at: $a_x = \frac{g \sin \beta}{1 + \frac{I}{mr^2}}$

Deretter kan ligning (3) settes inn i ligning (4), noe som gir: $c = \frac{I}{mr^2}$, hvor både $\frac{1}{2}$, ω kanselleres av hverandre. Det er også mulig å anta at $m = M$, da det kun er legemets masse som er tilstede i situasjonen med legemer som beveger seg nedover skråplan.

Avslutningsvis vil det å sette ligning (4) inn i ligning (1) gi akselerasjonen for legemet på vei nedover skråplanet: $a_x = \frac{g \sin \beta}{c+1}$.

Energibevaring for rullende legemer

For et legeme som beveger seg ned et skråplan vil all potensiell energi omformes til *translatorisk* kinetisk energi. Dersom legemet ruller nedover skråplanet, vil deler av den translatoriske kinetiske energien omformes til *roterende* kinetisk energi. Forholdet mellom legemets potensielle energi sammenlignet med den translatoriske og roterende kinetiske energien kan uttrykkes med følgende formel⁵:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + I\omega^2 \quad (5)$$

Gitt en konstant høyde på skråplanet vil energien være den samme for alle objekter.

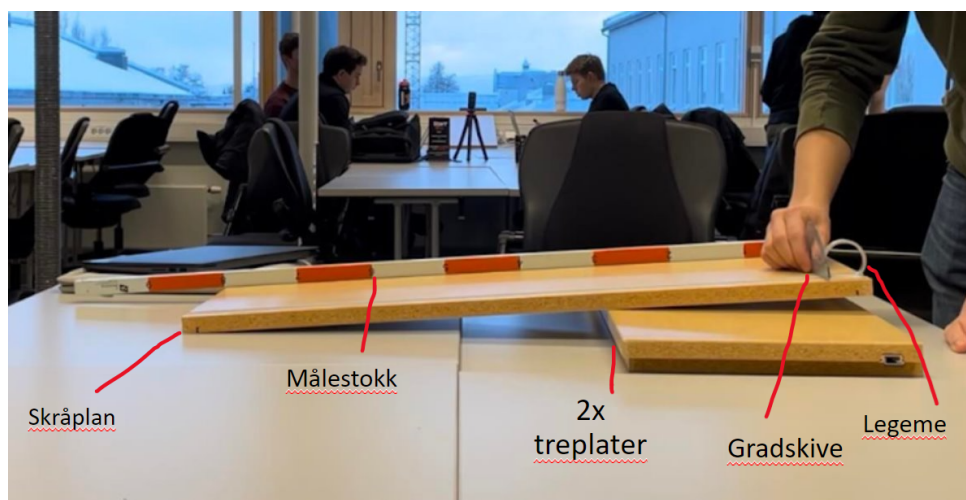
⁵ Ling, Sanny & Moebs 2016: 535.

Utstyrsoppsett

Følgende utstyr ble benyttet for å utføre forsøket:

- 2 stk. ulike legemer som kan rulle: En ball og en skive.
- 1 stk. skråplan med lengde på ca. 1m.
- 2 stk. flater og solide objekter: bøker er et eksempel som kan støtte opp skråplanet.
- 1 stk. målestokk.
- 1 stk. mobiltelefon med kamera eller et apparat som kan filme video.
- 1 stk. tripod.
- 1 stk. linjal, gradskive eller et langt flatt objekt. Dette var ikke påkrevd, men anbefalt.

Oppsettet som ble benyttet i forsøket er konkretisert i *Figur 3*. Legemene som ble brukt i dette forsøket var en ball og en kompakt skive. Merk treplanker er blitt brukt i stedet for bøker for å konstruere skråplanet, ettersom disse var tilgjengelige under forsøket. Det er også verdt å merke at gradskiven er kun blitt benyttet for å sette i gang rullebevegelsen. Dette kan begrunnes med bakgrunn i dens flate overflate, som reduserer sannsynligheten for å tilføre en startfart i det legemet blir sluppet nedover skråplanet.



Figur 3: Oppsettet av skråplanet benyttet i forsøket.

Metode

1. Plasser de to solide objektene oppå hverandre.
2. Plasser den ene enden av objektet som skal benyttes som skråplan opp på de stablede objektene.
3. Plasser deretter målestokken på skråplanet, slik at den ligger parallelt med planet. Oppsettet skal være likt det som er presentert i *Figur 3*.
4. Plasser mobiltelefonen i tripoden med ca. to meters avstand fra skråplanet, slik at bildet fanger hele rullebevegelsen. Dette bidrar også til å filme rullebevegelsen horisontalt med bordflaten.
5. Noter ned helningsvinkelen. Helningsvinkelen til skråplanet kan regnes ut ved å benytte tangens formel for den ukjente vinkelen som en funksjon av motstående og hosliggende side. Dette kan måles ved hjelp av en linjal. Alternativ finnes det mobilapplikasjoner som måler denne vinkelen ved hjelp av kameraet.
6. Plasser det første valgte legemet på av planet. Bruk gradskiva for å holde legemet i ro.
7. Start å filme like før legemet slippes. For å unngå å gi legemet startfart, skal gradskiven gli langs planet i det legemet slippes nedover planet.
8. Gjenta steg 6 og 7 fem ganger, slik at fem forsøk blir gjennomført for hvert legeme.
9. Kopier videofilene over til Trackeren som er koblet opp mot en PC.
10. Hent inn en av videofilene til Tracker ved å trykke på “mappeknappen” (direkte under “File”), “Open File Chooser” og filen du ønsker å analysere.
11. Påse at filen har riktig “frame rate”. Dette gjøres ved å trykke Frame rate knappen som ligger to til høyre for “mappeknappen”. Avhengig av kamerainnstillingene for opptaket kan 25/29.97/30/50/60/120 være riktige verdier.
12. Marker start og slutt for opptaket ved å spole slideren neders til ønsket startsted, høyreklikk og velg Set start frame to slider. Dra så til ønsket sluttsted, det skal være like før legemet treffer underlaget, høyreklikk og velg Set end frame to slider.
13. Kalibrer deretter lengdeskalaen. Dette gjøres ved å trykke på “Kalibreringsknappen”. Den ligger til høyre for Frame rate knappen (se steg 10), trykk New og velg Calibration stick. Hold inne Shift og trykk på begge endene av målestokken.
14. Definer koordinatsystemet ved å trykke på knappen til høyre for Kalibreringsknappen. Spol videoen til bildet som viser at objektet slippes, og dra origo til objektets massesenter i startposisjonen. Roter koordinataksene (“tilt”) ved å dra i krysset til høyre for origo, og la positiv x-akse ligge nedover langs skråplanet, slik at akselerasjonsverdiene blir positive.
15. Sett opp manuell tracking ved å trykke på “Track”, deretter New og Point Mass. Høyreklikk på den nye massen og gi den et passende navn.

16. Spol til hvor objektet slippes og trykk Shift og klikk på objektet. Gjør dette helt til objektet når bunnen av helningen.
17. For grafisk analyse av bevegelse høyreklikkes det på grafen som blir laget. Velg Analyze, deretter trykk Analyze, Curve fitter og Parabola. Under grafen skal det nå ligge et parameter felt med noen variabler. Les av A. Dette utgjør halvparten av akselerasjonen. Akselerasjonen for dette forsøket blir dermed $2A$.
18. Noter verdien for akselerasjon ned. Gjenta steg 10 til 17 for de resterende ni opptakene.

Resultater

Tabell 2: Målinger på akselerasjon av hvert legeme, i tillegg til gjennomsnittlig akselerasjon og standardfeil og standardavvik.

Tabell 2: Målinger av akselerasjon for de to legemene								
Rullende legeme	Radius[m] +/- 0.01[m]	Målinger [m/s²] +/- 0.001[m/s²]					Avg $\overline{a_x}$ [m/s²] +/- 0.001[m/s²]	Std.Avvik [m/s²] (δa)
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5		
Kompakt skive	0.03	0.626	0.630	0.631	0.653	0.621	0.627	0.005
Liten ball	0.01	0.610	0.624	0.618	0.614	0.620	0.617	0.005

Tabell 3: Sammenligning av den teoretiske mot den eksperimentelle akselerasjon for hvert av de to valgte legemene

Tabell 3: Teoretiske vs eksperimentell akselerasjon			
Rullende legeme	Målt $\overline{a_x}$ [m/s²]	Utregnet $\overline{a_x}$ [m/s²]	Prosentvis usikkerhet $\overline{a_x}$
Kompakt skive	0.627	0.570	+10.0%
Liten ball	0.617	0.611	+0.982%

Den gjennomsnittlige eksperimentelle akselerasjonen, $\overline{a_x}$ for den kompakte skiven og ballen ble regnet ut til å være henholdsvis 0.627m/s² og 0.617m/s², som vist i Tabell 2. Under eksemplifiseres en beregning for legeme to, ballen:

$$\overline{a_x} = \sum_{i=0}^N \frac{x_i}{N} = \sum_{i=0}^5 \frac{x_i}{5}$$

$$\overline{a_x} = \frac{0.610 + 0.624 + 0.618 + 0.614 + 0.620}{5}$$

$$\overline{a_x} = 0.617 \text{ m/s}^2$$

Det vil være hensiktsmessig å kommentere at måling nummer 4 for den kompakte skiven er relativt høy i forhold til resten av målingene. Dette kan begrunnes med at de fire andre målingene er spredt i intervallet mellom 0.621 og 0.63 m/s², mens måling nummer 4 er vesentlig høyere da målingen viser en akselerasjon på 0.653m/s². Med bakgrunn i dette er derfor denne målingen blitt eliminert. Det er ikke blitt gjort utregninger for å bevise formelt at det er en uteligger, men gruppen vurderte forskjellen til å være stor nok for at målingen kunne fjernes.

Standardavviket av legemenes akselerasjon presenteres i Tabell 3, og ble regnet til å være 0.005m/s² og 0.006m/s². Under følger et eksempel på hvordan dette er blitt regnet ut, eksemplet viser standardavviket for legemet to ballen:

$$\delta a_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(a_i - \bar{a})^2}{N-1}}$$

$$\delta a_x = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \frac{(a_i - \bar{a})^2}{4}}$$

$$\delta a_x = \sqrt{\frac{(0.610 - 0.617)^2 + (0.624 - 0.617)^2 + (0.618 - 0.617)^2 + (0.614 - 0.617)^2 + (0.620 - 0.617)^2}{4}}$$

$$\delta a_x = 5.4083 \times 10^{-3} \approx 0.005\text{m/s}^2$$

Ut ifra dette ble standardfeilene til målingene regnet ut. Disse ble begge rundet av til 0.002m/s².

Videre følger utregningen for legeme to, ballen:

$$\overline{\delta a_x} = \frac{\delta a_x}{\sqrt{n}}$$

Hvor n er antall forsøk

$$\overline{\delta a_x} = \frac{0.005}{\sqrt{5}} = 2.41863 \times 10^{-3} \approx 0.002\text{m/s}^2$$

Som et resultat av disse utregningene blir derfor de eksperimentelle akselerasjonene til legemene:

$$a_{skive} = (0.627 \pm 0.002)\text{m/s}^2$$

$$a_{ball} = (0.617 \pm 0.002)\text{m/s}^2$$

Størrelsen på standardfeilen peker på en liten gjennomsnittlig usikkerhet for målingene.

Vinkelen på skråplanet ble beregnet ved hjelp av applikasjonen "Måleverktøy" på en av grupped medlemmets telefoner. Ved å plassere telefonen parallelt på skråplanet, regnet den ut plantenes helning i forhold til bordflaten. Ved hjelp av applikasjonen ble helningsvinkelen målt til 5,0 grader.

Vinkelen ble også forsøkt beregnet ved hjelp av trigonometri. Ved å benytte skråplanets lengde og høyde fra bordplaten, ble vinkelen målt til å være 5,3 grader. Gruppen vurderte og sammenlignet både presisjon og nøyaktighet for begge metodene, og valgte å bruke vinkelen til beregnet med applikasjonen. I dette forsøket ble derfor skråplanets hellningsvinkel satt til 5,0 grader.

Ved å sette inn vinkelen inn i uttrykket for akselerasjon var det dermed mulig å regne ut de teoretiske verdiene for akselerasjonene som var 0.570m/s^2 og 0.611m/s^2 , henholdsvis for skiven og ballen. Under følger den teoretiske beregningen av akselerasjonen til legemet to, ballen:

$$a_x = \frac{g \sin \beta}{c+1}$$

Fra Tabell 1 er verdien $c = \frac{2}{5}$ listet opp for ball:

$$a_{ball} = \frac{9.81\text{m/s}^2 \times \sin(5.0^\circ)}{\frac{2}{5}+1}$$

$$a_{ball} = 0.611\text{m/s}^2$$

En interessant observasjon av disse observasjonene er at den kompakte skiva har en høyere akselerasjon ned langs skråplanet enn ballen. Med utgangspunkt i teorien er det mulig å forvente det motsatte. Dette tyder på en potensiell feilkilde i forsøket og vil derfor bli videre utdypet i neste kapittel.

I Tabell 2 sammenlignes de eksperimentelle verdiene mot de teoretiske. Dette resulterte i en prosentvis usikkerhetsmargin på 10.0% for skiven og 0.98% for ballen, noe som betyr at de målte akselerasjonene er forskjøvet oppover. Utregningen for usikkerhetsmarginen er illustrert under med legeme to, ballen:

$$\%uncertainty = \frac{new - org}{org} \times 100\%$$

$$\%uncertainty = \frac{0.617\text{m/s}^2 - 0.611\text{m/s}^2}{0.611\text{m/s}^2} \times 100\%$$

$$\%uncertainty = 0.982\%$$

Feilkilder for denne forskyvningen vil bli ytterligere diskutert i det påfølgende kapittelet.

Diskusjon

Som nevnt i kapitlet Resultater, er de målte verdiene for akselerasjon for begge legemene forskjøvet opp i forhold til de teoretiske verdiene. Dette kan tolkes fra de positive usikkerhetsverdiene på henholdsvis 10.0% og 0.982%. Dataene tilsier at påvirkningen av feilkilder på skiven var vesentlig størst, ettersom den prosentvise usikkerheten er større med en faktor av ti.

Størrelsen på den prosentvise usikkerheten til skiven kan tyde på en systematisk feil i gjennomførelsen av forsøket. I tilfellet med ballen er usikkerheten sannsynligvis et resultat av tilfeldige feil. Dette kan også finne støtte i den lave beregnede standardfeilen på 0.002m/s^2 , noe som gjelder for målingen av begge legemene.

Det eksisterer flere mulige feilkilder som kan ha påvirket eksperimentets resultater. En av disse er påvirkningen av luftmotstanden. Formelen for luftmotstand, er gitt ved: $F_D = \frac{1}{2}C_D \rho A v^2$.⁶ Formelen viser at luftmotstanden er særlig avhengig av legemets fart, da den er kvadrert. Motstanden er også avhengig av areal og dragkoeffisienten, men disse er vesentlig mindre enn farten. Ved høyere akselerasjon vil farten være høyere, noe som derfor vil resultere i at luftmotstanden vil øke. Utfordringen knyttet til dette eksperimentet går ut på at den kompakte skiven allerede har en høy eksperimentell akselerasjon, noe som ville ha gitt legemet enda høyere akselerasjon uten luftmotstand. Den teoretiske verdien antar at luftmotstanden er null, dermed gir det ikke mening å bruke luftmotstand som en feilkilde, ettersom den forskyver akselerasjon ned, ikke opp.

En annen feilkilde kan være at objektene ikke rullet direkte ned skråplanet. Dersom legemene rullet på skrå ville akselerasjonsmålingene resultert i mindre verdier, da all farten ikke akkumuleres ned x-aksen. Fartsvektoren ville også peke inn i planet, i retning z-aksen. En lavere endring i fart ned langs x-aksen ville ha ført til en lavere akselerasjon ned x-aksen. Dersom det var tilfeldig om et objekt rullet skrått, kunne denne typen feilkilde ha blitt vurdert som en tilfeldig feil. Derimot dersom det kun var skiven som rullet skrått ned skråplanet, ville feilkilden kunne ha blitt karakterisert som en systematisk feil - akselerasjonen ville da ha blitt lavere enn det teorien tilsa. Også denne gang oppstår det en konflikt, da resultatene tilsier det motsatte - akselerasjonens verdier er høyere enn forventet. Imidlertid var det et langsgående spor i skråplanet som ble benyttet i forsøket, dette sikret at legemenes rulling nedover planet ikke kan betegnes som skrå. Dermed kan ikke rullingens vurderes som den utslagsgivende feilkilden som har påvirket avvikene som er fremkommet i forsøket.

⁶ Ling, Sanny & Moebs 2016: 289.

Videre vil det være hensiktsmessig å diskutere hvordan objektene ble sluppet. Til tross for at det bevisst ble gjort forsøk på å unngå å gi legemene startfart ved å benytte gradskiven, er det likevel mulig å argumentere for at legemene kan ha hatt en startfart i noen av forsøkene. En alternativ forklaring kan være at gradskiven ikke ble fjernet hurtig nok, slik at legeme ble hindret nok i starten til at målingene underestimerte den sanne verdien. I slike tilfeller vil gravitasjonskraften bruker mer tid på å akselerere legemene ned planet. I likhet med de to første opplistede feilkildene, vil måten legemene ble sluppet på kun senke akselerasjon, altså ikke øke den. Dermed kan ikke denne feilkilden forklare den positive forskyvningen av akselerasjonsverdi.

Helningsvinkelen som ble brukt for å kalkulere den teoretiske akselerasjonsverdien kan også ha innvirket på forsøket som en feilkilde. Dersom vinkelen, som ble målt ved hjelp av applikasjonsverktøyet "Måleverktøy", beregnet en mindre vinkel enn hva den virkelig var, ville dette ha resultert i en teoretisk verdi som ville ha blitt forskjøvet nedover. Imidlertid forklarer dette ikke hvorfor forskyvningen av akselerasjon, mellom eksperimentell og teoretisk, ikke var tilsvarende for begge legemene. På bakgrunn av dette kan derfor ikke helningsvinkelen regnes som en utslagsgivende feilkilde i det gjennomførte forsøket.

I forsøket ble det forbehold at legemene som beveget seg nedover skråplanet ikke skulle gli eller slure. Dersom denne antagelsen ble brutt, kunne dette ha påvirket resultatene. Med utgangspunkt i formel (5) ville dette ha medført lavere *roterende* kinetisk energi, da vinkelhastigheten senkes ved sluring. På grunn av at energien er blitt bevart, må derfor den *translatoriske* kinetiske energien økes. Med andre ord må legemets hastighet øke, noe naturlig medfører at akselerasjonen også må øke. I sum kunne dette ha resultert i en høyere eksperimentell akselerasjon enn forventet. Likevel kan ikke dette vurderes som særlig sannsynlig, gitt den lave skråningsvinkelen. Hadde forsøket vært gjort med en større helning, kunne dette argumentet ha hatt mer verdi for å fremsette sluring som en utslagsgivende feilkilde.

Det er mulig å argumentere for at inkonsistente målinger med videoanalyse-programmet Tracker er den sentral feilkilde i dette forsøket, da den kan gi en forklaring på forskyvningen av akselerasjonsverdien. Under gjennomførelsen av eksperimentet oppstod det en rekke tekniske utfordringer med målingen av legemenes bevegelse. Et annet relatert og underliggende problem kan være at bevegelsen til legemene ble analysert med to ulike PC-er. Ulik kvalitet på målingene på PC-ene kan ha ført til en systematisk forskyvning av det ene datasettet, og dermed ha resultert i skiven fikk en høyere usikkerhet, i sammenligning mellom eksperimentell og teoretisk utregning av legemenes akselerasjon. Dette til tross for at ballen også hadde forskjøvet verdi. Dette kan begrunnes med at ballens usikkerhetsprosent ble beregnet til å være så minimal at dette kan forklares som en tilfeldig feil i målingene, i motsetning til en systematisk feil.

Basert på disse erfaringene og de gitte feilkildene, vil fremtidige forsøk kunne ha nytte av å kun benytte en PC for å analysere videoene med Tracker for å sikre mer konsistente målinger. Et annet alternativ ville ha vært å benytte andre verktøy i analysen. Videoanalyse-verktøyet PASCO kan i denne sammenheng stille som et aktuelt eksempel, da den i likhet med Tracker også tilbyr bevegelsesanalyse av legemer.

Konklusjon

Hensikten med forsøket var å bestemme akselerasjonen til en skive og en ball som ruller nedover et skråplan, ved hjelp av analyseverktøyet Tracker. Deretter skulle disse resultatene sammenlignes med den teoretiske akselerasjonen til legemene. Ved hjelp av Tracker ble skiven og ballens gjennomsnittlige akselerasjon ble regnet ut til å være henholdsvis 0.627m/s^2 og 0.617 . Den teoretiske akselerasjonen ble lavere for begge legemene med henholdsvis 0.570m/s^2 og 0.611m/s^2 . Skiven hadde en prosentvis usikkerhet på 10.0% og ballen på 0.982%. På grunn av at ballens usikkerhet ble minimal, er det mulig å anta at dette kun skyldtes en tilfeldig feil. Derimot hadde skiven en høyere usikkerhet, noe som resulterte i at det ble knyttet systematisk feil til denne beregningen. Den systematiske feilen kan blant annet ha kommet av bruken av feil helningsvinkel i beregningene, at legemene sluret nedover planet i stedet for å rulle, eller tekniske feil med bruk av Tracker. En kombinasjon av disse kan også regnes som en samlet feilkilde i dette forsøket. Likevel ble bruken av Tracker vurdert som mest utslagsgivende for resultatene. Erfaringen fra dette forsøket gjør at slike feilkilder kan minimeres i andre tilsvarende forsøk, enten ved å kun benytte en PC i analysen eller ved å benytte andre analyseverktøy.

Referanser

Ling, S. J., Sanny, J. & Moebs, W. (2016). *University Physics Volum 1*. Houston: Openstax.