Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspera. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst i høyre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidater for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din tilgjengelig.

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i IMAA2021, IMAG2021 og IMAT2021 Matematiske metoder 2 for Dataingeniør

Eksamensdato: 14. mai 2020

Eksamenstid (fra-til): 09:00-14:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A / Alle hjelpemidler tillatt, Eksamen skal være et individuelt arbeid.

Faglig kontakt under eksamen: (Ring bare hvis det er feil i oppgaven.)
Tlf.: 938 32 172, 920 50 951 (Trondheim)
Tlf.: 988 01 068 (Ålesund)
Tlf.: 464 20 404 (Gjøvik)

Teknisk hjelp under eksamen: NTNU Orakel
Tlf: 73 59 16 00

ANNEN INFORMASJON:

Gjør dine egne antagelser og bruk sunn fornuft. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet.

Lagring: Besvarelsen din i Inspera Assessment lagres automatisk. Jobber du i andre programmer – husk å lagre underveis.

Juks/plagiat: Eksamen skal være et individuelt, selvstendig arbeid. Det er tillatt å bruke hjelpemidler. Alle besvarelser blir kontrollert for plagiat. *Du kan lese mer om juks og plagiering på eksamen her*.

Vekting av oppgavene: Hvordan oppgavene er vektet står i inholdslisten og under hver oppgave i oppgavesettet.

Trekk av poeng i flervalgsoppgavene med flere riktige alternativ:
Du får poeng for kvart riktige svar. For feil svar blir du trukket like mange poeng.
Du kan ikke få negative totalpoeng på en oppgave.

OM LEVERING:

Besvarelsen din leveres automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger, forutsatt at minst én oppgave er besvart. Dette skjer selv om du ikke har klikket «Lever og gå tilbake til Dashboard» på siste side i oppgavesettet. Du kan gjenåpne og redigere besvarelsen din så lenge prøven er åpen. Dersom ingen oppgaver er besvart ved prøveslutt, blir ikke besvarelsen din levert.

Trekk fra eksamen: Ønsker du å levere blankt/trekke deg, gå til menyen i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Du finner besvarelsen din i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1 Betrakt følgende argument.

P_1 *Hvis du spiser mye søtpoteter får kroppen din nok C-vitamin.*
P_2 *Du senker blodtrykket eller kroppen din får ikke nok C-vitamin.*
P_3 *Du spiser mye søtpoteter.*

$\therefore$ *Du senker blodtrykket.*

Definer følgende logiske variable
$p =$ "Du spiser mye søtpoteter."
$q =$ "Du senker blodtrykket."
$r =$ "Kroppen din får nok C-vitamin."

Gitt følgende logiske former.

$A = \sim (\sim q \vee r)$
$B = q \wedge \sim r$
$C = \sim (q \wedge r)$
$D = q \vee \sim r$
$E = \sim (r \vee q)$

i) Premiss P_2 er på formen ☐ (Alternativ A, Alternativ B, Alternativ C, Alternativ D, Alternativ E)

ii) Velg riktig begrunnelse for at argumentet er gyldig eller ugyldig. Ett eller flere svar kan være sanne.

- ☐ Argumentet er gyldig fordi WHO har forsket på at C-vitaminer gir lavere blodtrykk.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi konklusjonen er riktig selv om maksimalt et av premissene er gale.
- ☐ Argumentet er ugyldig fordi konklusjonen kan være gal selv om alle premissene er sanne.
- ☐ Argumentet er ugyldig fordi du kan spise appelsiner i stedet for søtpoteter å få nok C-vitamin.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi argumentets logiske form $[(p \to r) \wedge (q \vee \sim r) \wedge p] \to q$ er en tautologi.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi konklusjonen om at du senker blodtrykket ikke er galt samtidig som at alle premisser er sanne.

(NB! Du blir trukket for hvert svar som er feil. Samlet poengsum på oppgavene i) og ii) vil ikke være negativ.)

Maks poeng: 6

2 Vi skal finne en tilnærming til $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ med feil mindre enn 0,001. Først finner vi en rekke-representasjon for e^{-x^2}. Siden $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, følger det at

Velg ett alternativ

- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{2n}}{n!}$

Derfor $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$.

Dette er en alternerende rekke $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ med $b_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$. Av kunnskapen vår om alternerende rekker vet vi at om vi estimerer $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!}$ med $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!}$, vil feilen være mindre enn

Velg ett alternativ

- $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(n+1)!}$
- $b_n = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$
- $b_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$
- $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$

Det betyr at vi må finne *n* slik at $\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 0,001.$

Når vi prøver noen verdier av *n* finner vi at for $n = 3, \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} =$ ☐ og for $n = 4, \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} =$ ☐. Derfor gir

Velg ett alternativ

- $\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!} =$
- $\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \frac{1}{(2i+3)(i+1)!} =$
- $\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!} =$
- $\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \frac{1}{(2i+3)(i+1)!} =$

☐ oss tilnærmingen vi er på jakt etter.

Maks poeng: 10

3 I staten Vekslemania brukes pengenheten "U". De har mynter med følgende valører i enheten U:

15, 21, 35, 55, 77, 105.

De vil fjerne alle valører bortsett fra to, slik at betalinger av alle heltallige transaksjoner kan gjennomføres ved bruk av veksling.

a) Hvilke to valører vil en kunne bruke for å få til dette? Det er to løsninger. Den ene er å bruke valørene 15 og 77. Hva er den andre?

Løsning 2: Minste valør: ☐, største valør: ☐

b) Hva er det minste antallet mynter en trenger (betaling og veksel tilsammen) for å betale et beløp på 1U, hvis en bruker valørene 15U og 77U ?

Antall mynter totalt: ☐

Maks poeng: 6

4 **a)** Finn alle kritiske punkter til funksjonen

$f(x,y) = x^2\,y + 2\,x\,y - y^3 - 6\,y^2 - 8\,y.$

b) Klassifiser de kritiske punktene du fant i **a)**.

Kritisk punkt	Type
((-1,1), (1,-1), (4,0), Ingen av disse er kritiske punkter., (-1,-3))	(Lokalt maksimum, Ikke mulig å si, Sadelpunkt, Ingen av alternativene er kritiske punkter., Lokalt minimum)
(Ingen av disse er kritiske punkter., (-2,0), (1,1), (-4,0), (1,3))	(Ikke mulig å si, Lokalt minimum, Lokalt maksimum, Ingen av alternativene er kritiske punkter., Sadelpunkt)
((0,4), (0,2), Ingen av disse er kritiske punkter., (1,4), (-1,-1))	(Sadelpunkt, Ikke mulig å si, Ingen av alternativene er kritiske punkter., Lokalt maksimum, Lokalt minimum)
((2,3), Ingen av disse er kritiske punkter., (0,0), (2,0), (3,2))	(Lokalt minimum, Ikke mulig å si, Ingen av alternativene er kritiske punkter., Sadelpunkt, Lokalt maksimum)

Maks poeng: 8

5 I denne oppgaven definerer vi sprettkoeffisienten $0 < r < 1$ til en ball på følgende måte: Når ballen slippes fri fra høyde h, spretter den tilbake til høyde $r \cdot h$.

En ball med sprettkoeffisient $r = 0{,}58$ slippes fri fra starthøyde 0,9 meter og så spretter den uendelig mange ganger.

a) Bruk en geometrisk rekke for å finne den totale opp-og-ned avstanden som ballen tilbakelegger i løpet av denne prosessen. (Ta summen av alle avstandene oppover og nedover, og husk at ballen bare avlegger den første avstanden én gang (nedover) og alle øvrige avstander to ganger).

Du står fritt til å løse denne oppgaven med algebraiske eller numeriske metoder, men du skal oppgi svaret numerisk med fire desimaler etter kommaet.

Svar: ☐ meter

Tiden t det tar for ballen til å falle en avstand s (fra stillstand) er $\sqrt{\frac{2s}{g}}$ der $g = 9,81\,\frac{m}{s^2}$ er gravitasjonskonstanten. (Å sprette opp fra bakken til høyde s tar like lang tid).

b) Hvor lang tid tar det før ballen med sprettkoeffisient $r = 0{,}58$ er ferdig med å sprette når den slippes fra høyde h=0,9 meter? Gi svaret numerisk med fire desimaler etter kommaet.

SVAR: ☐ sekunder

Maks poeng: 10

6 La A være mengden av alle heltallene mellom 1 og 1000 som kan divideres på 3. La B være mengden av alle heltallene mellom 1 og 1000 som kan divideres på 7.

a. Bestem $|A|$. (det vil si, antall elementer i mengde A)

svar: ☐

b. Bestem $|B|$.

svar: ☐

c. Bestem $|A \cup B|$.

svar: ☐

Maks poeng: 5

7 Hvor mange bijeksjoner finnes det fra en mengde med 2 elementer til en mengde med 4 elementer?

Svar: ☐

Hvor mange injeksjoner finnes det fra en mengde med 2 elementer til en mengde med 3 elementer?

Svar: ☐

Maks poeng: 2

8 **Hvilke av disse påstandene er sanne?**
Velg ett eller flere alternativer

- [ ] Om forholdet mellom leddene til to rekker har grenseverdi 1, konvergerer eller divergerer begge rekkene samtidig.
- [ ] Om leddene til en uendelig rekke ikke konvergerer mot 0, konvergerer ikke rekken.
- [ ] Om en uendelig rekke ikke divergerer mot uendelig eller minus uendelig, konvergerer den.
- [ ] Om leddene til en alternerende rekke minker i absoluttverdi, konvergerer rekken.

Maks poeng: 4

9 Gitt mengdene

$A = \{1, 2\} \cap \{3, 4\}$

$B = \{1, 2, 5\}$

$C = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$

$D = B \cup C$

$E = A \cup (B \cap C)$

$F = A \cap B \cap C$

Hvor mange elementer inneholder mengdene D, E og F?

Antall elementer i D: ____

Antall elementer i E: ____

Antall elementer i F: ____

Maks poeng: 5

10 La Z_n vere mengden av alle n-te-røtter av 1 i det komplekse planet.

Teorem. *La m og n være positive heltall. $Z_m \subseteq Z_n$ hvis og bare hvis $m|n$.*

Vi har laget et bevis av teoremet og tatt ut noen deler.

a) Din oppgave er å fylle inn bokstaver som tilsvarer det som mangler. Alle bokstavene bør brukes minst en gang og en bokstav må brukes to ganger.

A: $z^n = z^{km} = z^{mk} = (z^m)^k = 1^k = 1$
B: $m|n$
C: $z \in Z_n$
D: $z \in Z_m$
E: $n = km$
F: $z^m = 1$
G: alle elementer i Z_m også er elementer i Z_n
I: n-te-rot av 1
H: m-te-rot av 1

Bevis: Anta at m og n er positive heltall og at ☐. Siden ☐ så finnes det et heltall k slik at ☐. La ☐. Da er z en ☐. Det betyr at ☐. Da er ☐ og derfor er z også en ☐. Derfor er ☐. Vi kan derfor slutte at ☐. Vi har derfor at $Z_m \subseteq Z_n$.

b) Er beviset over et bevis av ***hele*** teoremet, ***hvis***-delen eller ***bare-hvis***-delen? ☐ (Hvis delen, Bare hvis delen, Hele teoremet)

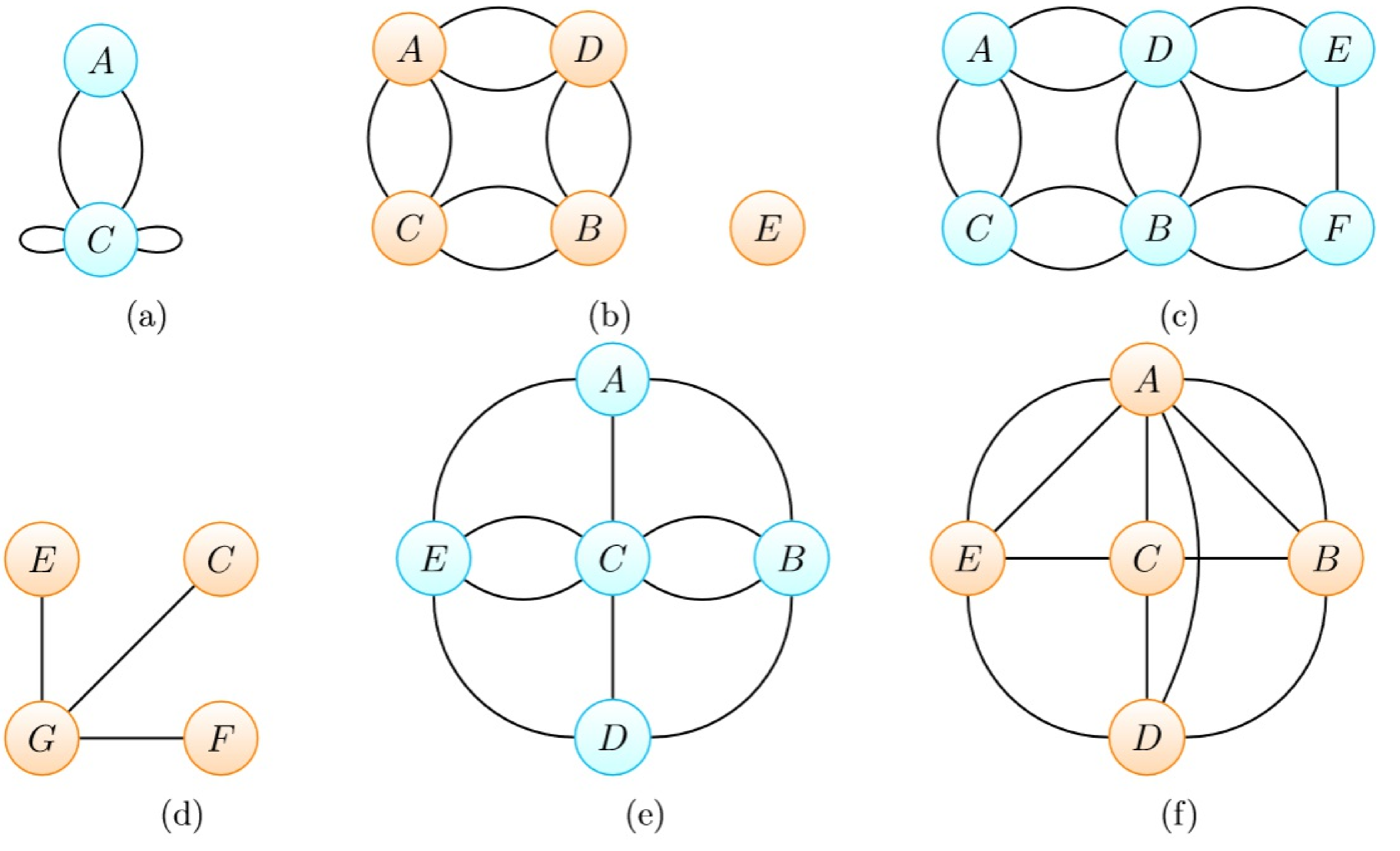
c) Hva passer **dårligst** om dette beviset?

Velg ett alternativ

- ○ Direkte bevis
- ○ Elementargument
- ○ Bevis med selvmotsigelse

Maks poeng: 12

11 Besvar spørsmål 1-6 om disse grafene:



1. Hvilke grafer er IKKE enkle (engelsk: NOT simple)? Velg alle passende alternativer.

- a
- e
- c
- f
- d
- b

2. Hvilke grafer er sammenhengende (engelsk: connected)? Velg alle passende alternativer.

- d
- b
- f
- a
- e
- c

3. Hvilke grafer er todelte (engelsk: bipartite)? Velg alle passende alternativer.

- [ ] d
- [ ] f
- [ ] e
- [ ] c
- [ ] b
- [ ] a

4. Hvilke grafer er eulerske? (En eulersk graf er en graf som inneholder en eulerkrets (engelsk: Eulerian cycle)). Velg alle passende alternativer.

- [ ] d
- [ ] a
- [ ] e
- [ ] f
- [ ] b
- [ ] c

5. Hvilke grafer er ikke eulerske, men inneholder en eulersti (engelsk: Eulerian path)? Velg alle passende alternativer.

- [ ] f
- [ ] b
- [ ] e
- [ ] c
- [ ] a
- [ ] d

6. Hvilke grafer har minst to ikke-isomorfe utspennende trær (engelsk: spanning trees)? Velg alle passende alternativer.

- [ ] c
- [ ] f
- [ ] d
- [ ] e
- [ ] a
- [ ] b

Maks poeng: 10

12 I denne oppgaven skal du undersøke følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, B \in \mathbb{R}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(2a_n + \frac{B}{a_n^2}\right).$$

Finn svar på følgende spørsmål. Det trengs ikke å bevise noe formelt, men du må være rimelig sikker i svaret. Du bestemmer valg av en løsningsmetode selv (for eksempel, en numerisk metode, analytisk metode eller begge metoder).

La $a_1 = 1, B = 7$.

Har følgen noen av disse egenskapene?

Marker ett alternativ som er FEIL:

- monoton fra et visst n
- begrenset nedenifra
- begrenset ovenifra
- alternerende
- konvergerende
- positiv

Finn grenseverdien med 5 riktige desimaler dersom den finns. Skriv inn 0 dersom grenseverdien ikke eksisterer:

Skriv inn nummeret til det første elementet i følgen som tilnærmer grenseverdien med 5 riktige desimaler. Skriv inn 0 dersom grenseverdien ikke eksisterer:

Dersom du ikke kjenner til verken $a_1 \neq 0$ eller B, men veit at grenseverdien eksisterer, kan du finne den? Skriv svaret som en funksjon av B og a_1.

Maks poeng: 8

13 Anta at en 5×5-matrise A har fem ulike egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ med tillhørende egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_5$. Anta at $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ og $B = x \cdot A$. Velg mellom alltid riktig/aldri riktig/kan være både riktig og feil for hver av påstandene nede.
Du må begrense deg til matriser A og tall x som oppfyller vilkår nevnte ovenfor når du vurderer sannheten.

- Alltid riktig betyr at påstanden er riktig for alle tillatte 5×5 matrisene A og tallene x.
- Aldri riktig betyr at det ikke finns enten matriser A og/eller tall x slik at påstanden blir riktig,
- Både riktig og feil betyr at for noen matriser A og/eller tall x er påstanden riktig og for noen andre matriser og/eller tall er påstanden feil.

Riktig svar gir 1,6 poeng, feil svar gir -0,5 poeng.

1) $v_i, i = 1, \ldots, 5$, er egenvektorene til B

Velg ett alternativ

- Både riktig og feil
- Aldri riktig
- Alltid riktig

2) $\lambda_i, i = 1, \ldots, 5$ er egenverdiene til B

Velg ett alternativ

- Alltid riktig
- Aldri riktig
- Både riktig og feil

3) $x \cdot v_i, i = 1, \ldots, 5$ er egenvektorene til B

Velg ett alternativ

- Aldri riktig
- Alltid riktig
- Både riktig og feil

4) B har egenvektorer som er forskjellige fra både v_i og $x \cdot v_i, i = 1, \ldots, 5$.

Velg ett alternativ

- Aldri riktig
- Både riktig og feil
- Alltid riktig

5) B har egenverdier som er forskjellige fra både λ_i og $x \cdot \lambda_i, i = 1, \ldots, 5.$

Velg ett alternativ

- Alltid riktig
- Aldri riktig
- Både riktig og feil

Maks poeng: 8

14 En klubb har 12 medlemmer. Det er fire arbeidsoppgaver som skal fordeles på medlemmene. Angi hvor mange måter som oppgavene kan fordeles på dersom

a) Alle oppgavene er forskjellige, og hvert medlem får høyst en oppgave hver?

Svar:

b) Alle oppgavene er like, og hvert medlem får høyst en oppgave hver?

Svar:

c) Alle oppgavene er like, og hvert medlem kan få flere oppgaver?

Svar:

Maks poeng: 3

15 En klubb har 12 medlemmer. Det er fire arbeidsoppgaver som skal fordeles på medlemmene.

La N stå for antall måter som oppgavene kan fordeles på, hvis alle arbeidsoppgavene er like, og det er ingen begrensning på hvor mange oppgaver et medlem kan få.

Hvilke av følgende nedenfor har N som løsning ?

Velg ett eller flere alternativer

- Antall funksjoner fra mengden {1,2,3,4} til mengden {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.
- Antall ikke-negative heltallsløsninger til likningen $x_1+x_2+x_3+x_4 = 12$
- Antall positive heltallsløsninger til likningen $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$
- Antall måter å velge 11 oppgaver fra en samling på 15 oppgaver (uten å bry oss om rekkefølgen på oppgavene).
- Antall ikke-negative heltallsløsninger til likningen $x_1+x_2+...+x_{12} = 4$
- Antall surjektive funksjoner fra mengden {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} til mengden {1,2,3,4}

Maks poeng: 3