Matematikk kompendium

Hans Jakob Rivertz

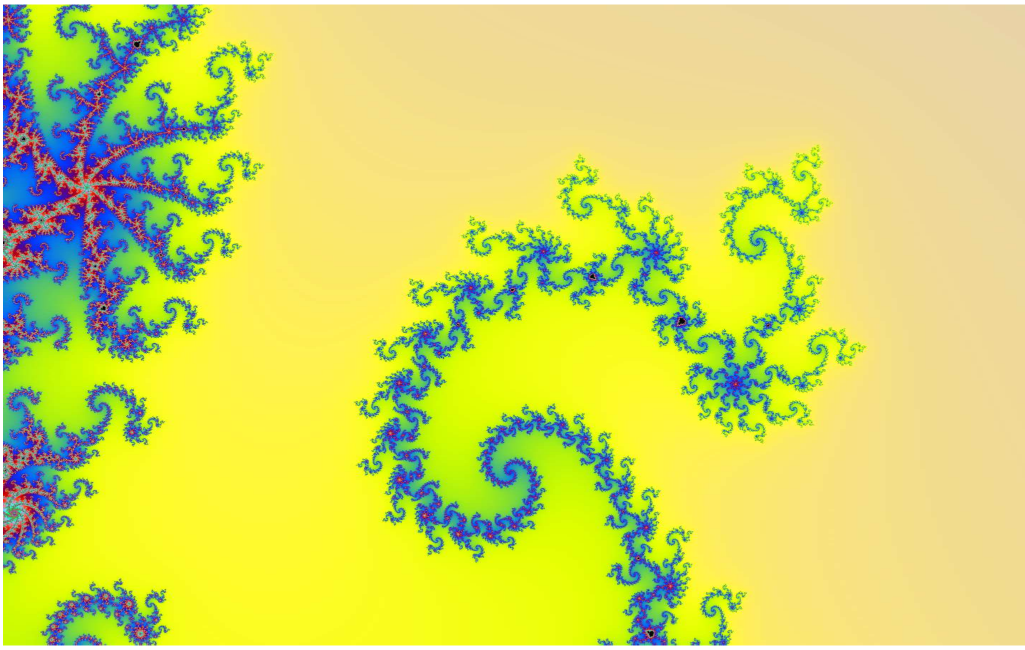
Foreløpig versjon 25. november 2021

INNHOLD

KAPITTEL 1

KOMPLEKSE TALL

1.1 Innledning



Figur 1.1: Bildet viser et utsnitt av Mandelbrot mengden [6, 7]. Komplekse tall spiller en avgjørende rolle i matematikken bak. Bildet er produsert med appen FraXplorer[2].

Komplekse tall har mange anvendelser. Noen av disse er vekselstrømteori, signalanalyse, kretsanalyse, fraktaler og geometri. Begrepet *komplekse tall* består av to ord - *kompleks* som betyr sammensatt og *tall*. I dagligspråket bruker vi ofte ordet *kompleks* for å si at noe er vanskelig. For komplekse tall er det motsatt. Komplekse tall er oppfunnet for å gjøre ting enklere.

Framstillingen i dette kapittelet er fortellende. Vi bruker begrepene før vi definerer dem. Dette gjelder for eksempel addisjon og multiplikasjon av komplekse tall.

1.2 Definisjon av komplekse tall og regning med disse

1.2.1 Bakgrunn og motivasjon

Komplekse tall undervises i faget R2 på videregående skole. Frem til da lærte du at du ikke kunne ta kvadratroten av et negativt tall. Årsaken er at hvert eneste reelt tall ganget med seg selv gir et positivt reelt tall eller null. Noen likninger, for eksempel $x^2 = -1$ har ingen løsninger på den reelle tallinjen. Utsagnet at $\sqrt{-1}$ ikke har mening gjelder for de reelle tallene.

1.2.2 Den imaginære enheten

Svaret på problemet med at $x^2 = -1$ ikke har en løsning er å gi $\sqrt{-1}$ en mening. Vi innfører den **imaginære enheten**. Det er en tenkt størrelse i som har egenskapen $i^2 = -1$. Den imaginære enheten er derfor ikke et reelt tall, det er et imaginært tall. [1]

1.2.3 Imaginære tall

Produktet $b\,i$ mellom et reelt tall b og den imaginære enheten i kalles for et **imaginært tall**. Vi skriver $0i = 0$ og $(-1)i = -i$, men ellers kan ikke tallet $b\,i$ forenkles. Faktorenes rekkefølge er uten betydning. Derfor er $i\,b = b\,i$. Multipliserer vi det imaginære tallet $b\,i$ med seg selv får vi

$$(b\,i)^2 = b\,i\,b\,i = b\,i\,i\,b = b\,i^2\,b = -b^2.$$

Merknad 1.1. Både i og $-i$ er løsninger av likningen $x^2 = -1$. Derfor er $\sqrt{-1} = \pm i$.

1.2.4 Komplekse tall

De komplekse tallene er en utvidelse av de reelle tallene. Det betyr at alle reelle tall er med i mengden av komplekse tall. Et **komplekst tall** er summen av et reelt tall a og et imaginært tall $b\,i$.

$$z = a + b\,i \tag{1.1}$$

Eksempel 1.1. Følgende størrelser er komplekse tall.

- $2 + 3\,i$
- $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $3i = 0 + 3\,i$
- $4 = 4 + 0\,i$

[1] Ordet *imaginær* betyr tenkt, mens ordet *reell* betyr virkelig.

Realdelen til det komplekse tallet $a + b\,i$ er det reelle tallet a. **Imaginærdelen** til det komplekse tallet $a + b\,i$ er det reelle tallet b. To komplekse tall $a + b\,i$ og $c + d\,i$ er **like** hvis og bare hvis $a = c$ og $b = d$. Vi skriver da $a + b\,i = c + d\,i$.

Regning med komplekse tall følger stort sett de samme reglene som regning med reelle tall. Forskjellen er at vi har en ekstra regel $i^2 = -1$. For eksempel er $i(1+i) = i \cdot 1 + i \cdot i = i + i^2 = i - 1$. Kvadratsetningene gjelder for komplekse tall. Vi har for eksempel

$$\begin{aligned}
(2+i)^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 = 4 + 4\,i - 1 = 3 + 4\,i, \\
(1-i)^2 &= 1^2 - 2\,i + i^2 = 1 - 2\,i - 1 = -2\,i, \\
(1+i)(1-i) &= 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2.
\end{aligned}$$

Fra $i^2 = -1$ avledes regneregelen $\sqrt{-r^2} = \pm i\,r$. Alle andregradslikninger kan løses når vi godtar at svaret kan være et komplekst tall.

Regneeksempel 1.1. Vi vil løse likningen $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Løsning: Vi fullfører kvadratet

$$z^2 - 2z + 1 + 1 = 0$$

Andre kvadratsetning gir

$$(z-1)^2 + 1 = 0.$$

Vi trekker fra 1 på begge sider,

$$(z-1)^2 = -1$$

tar kvadratroten på begge sider

$$z - 1 = \pm i$$

og legger til 1 på begge sider.

$$z = 1 \pm i.$$

1.2.5 Addisjon og subtraksjon

Addering og subtraksjon med komplekse tall gjøres ved å addere / subtrahere de reelle delene og de imaginære delene hver for seg.

Definisjon 1.1 (Addisjon og subtraksjon).

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i \tag{1.2}$$

$$(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i. \tag{1.3}$$

Eksempel 1.2. Gitt de komplekse tallene $z_1 = 3 + 2\,i$ og $z_2 = 2 + i$. Da er

$$z_1 + z_2 = (3 + 2) + (2 + 1)i = 5 + 3i$$

og

$$z_1 - z_2 = (3 - 2) + (2 - 1)i = 1 + i.$$

1.2.6 Multiplikasjon

Multiplikasjon av komplekse tall gjøres ved å følge vanlige regler for multiplikasjon av parentesuttrykk.

$$\begin{aligned}
&(a + b\,i)(c + d\,i) \\
&\qquad = (a + b\,i)c + (a + b\,i)d\,i = ac + b\,ic + ad\,i + b\,id\,i \\
&\qquad\qquad = ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2.
\end{aligned}$$

I siste ledd erstatter vi i^2 med -1.

Definisjon 1.2 (Multiplikasjon).

$$(a + b\,i)(c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i. \tag{1.4}$$

Eksempel 1.3. Gitt de komplekse tallene $z_1 = 3 + 2\,i$ og $z_2 = 2 + i$. Da er

$$z_1 z_2 = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2)i = 4 + 7i.$$

1.2.7 Kompleks konjugert

Den kompleks konjugerte er et viktig begrep i regning med komplekse tall. Vi kan blant annet bruke kompleks konjugert til å definere divisjon.

Definisjon 1.3. Den **kompleks konjugerte** av et komplekst tall $z = a + b\,i$ er det komplekse tallet $\bar{z} = a - b\,i$.

Legg merke til at å ta den kompleks konjugerte til et reelt tall ikke endrer på verdien. For eksempel er $\bar{3} = 3$.

Eksempel 1.4. La $z = 3 + 2i$ da er $\bar{z} = 3 - 2i$.

For å regne med kompleks konjugerte er følgende egenskaper nyttige.

Setning 1.1. *Kompleks konjugert tilfredsstiller følgende egenskaper.*

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z\,w} = \bar{z}\,\bar{w}$
3. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

Realdelen og imaginærdelen til et komplekst tall kan regnes ut ved hjelp av den konjugerte.

Realdelen: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

Imaginærdelen: $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Merknad 1.2. Legg merke til at $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Om vi ser på $z = a + bi$ som et punkt (a, b) i planet med kartesiske koordinater så er avstanden til origo lik $\sqrt{a^2 + b^2}$. Den konjugerte derfor kan brukes til å finne denne avstanden.

Vi kan bruke kompleks konjugert til å dividere med komplekse tall.

Regneeksempel 1.2. Vi vil skrive $\frac{2+i}{1+2i}$ på **standardform** $a + ib$.

Løsning: Ideen er å multiplisere med den konjugerte til nevneren $1 + 2i$ oppe og nede i brøken.

$$\frac{(2 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{4 - 3i}{1^2 + 2^2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i.$$

1.2.8 Divisjon

Ideen fra regneeksempelet kan brukes for alle brøker med kompleks nevner.

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{(a+b\,i)(c-d\,i)}{(c+d\,i)(c-d\,i)}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{c^2+d^2}.$$

Derfor har vi følgende formel for divisjon.

Definisjon 1.4 (Divisjon).

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\,i. \tag{1.5}$$

Eksempel 1.5. Vi har spesialtilfellet

$$\frac{1}{a+b\,i}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

1.2.9 Annengradslikninger med reelle koeffisienter

Når c er et positivt tall vil

$$\sqrt{-c}=\sqrt{c}\,i.$$

Vi kan løse alle andregradslikninger på formen $a\,x^2+b\,x+c=0$ ved hjelp av formelen

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2a}.$$

Regneeksempel 1.3. Finn løsningene til annengradslikningen $x^2+x+2=0$.

Løsning: Vi setter inn i formelen for annengradslikninger:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}.$$

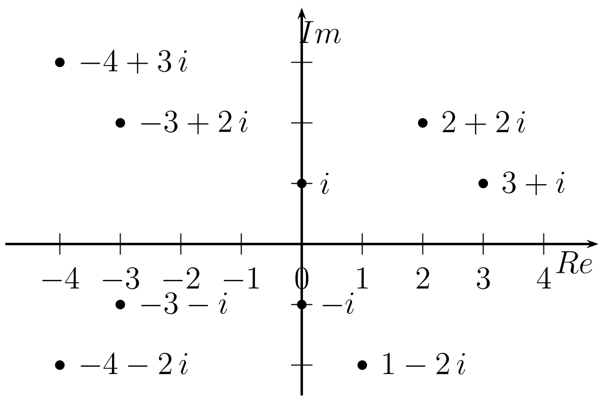
Legg merke til at komplekse løsninger til en annengradslikning med reelle koeffisienter kommer i kompleks konjugerte par.

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}{2a}\,i.$$

Komplekse løsninger til n-tegradslikninger med reelle koeffisienter kommer også i kompleks konjugerte par.

1.2.10 Det komplekse tallplanet

Vi kan også representere $z = a + b\,i$ som punktet (a, b) i planet, også kalt **Argandplanet**. Se figur 1.2. Argandplanet spiller samme rolle for komplekse tall som tallinjen spiller for reelle tall. I Argandplanet kalles første-aksen for den **reelle aksen** og andre-aksen for den **imaginære aksen**.



Figur 1.2: Argandplanet

Absoluttverdien av et komplekst tall $z = a + b\,i$ er gitt ved

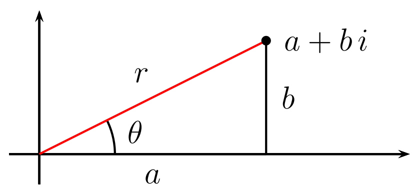
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dette er avstanden mellom punktet (a, b) og origo i Argandplanet. Absoluttverdi kan også uttrykkes ved hjelp av kompleks konjugert,

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

1.3 Polar form av komplekse tall

1.3.1 Polar form



Figur 1.3: Polar form

Hvert komplekst tall $z = a + b\,i$ kan tenkes på som et punkt (a, b) i planet. Punktet (a, b) kan beskrives med avstanden r fra origo og vinkelen θ mellom den reelle aksen og den rette linjen fra origo til punktet (a, b). Da er

$$a = r\cos\theta \qquad\qquad b = r\sin\theta.$$

Tallparet r og θ kalles for **polare koordinater** for punktet (a, b). Vi skriver det komplekse tallet på **polar form**:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

For å regne ut r og θ bruker vi formlene

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ og } \tan\theta = \frac{b}{a}.$$

Størrelsen r er lik absoluttverdien til det komplekse tallet z. Vinkelen θ kalles for **argumentet** til z. Vi skriver $\theta = \arg z$. Legg merke til at argumentet ikke er entydig. For eksempel er både $\cos(-\pi) + i\ \sin(-\pi)$ og $\cos(\pi) + i\ \sin(\pi)$ begge lik -1. Om vinkelen θ ligger i intervallet $(-\pi, \pi]$, kalles θ for **hovedargumentet** til z. Hovedargumentet til z skrives $\operatorname{Arg} z$.

Regneeksempel 1.4 (Omskrivning til polar form). Skriv om $z = 1 - i$ til polar form.

Løsning: Først har vi at $r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Likningen $\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$ har to løsninger for θ i intervallet $(-\pi, \pi]$: $\theta = -\frac{\pi}{4}$ og $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Disse representerer to forskjellige komplekse tall.

$$\sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big) = 1 - i$$

og

$$\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i.$$

Kun den første er riktig. Vi har derfor

$$z = \sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big).$$

1.3.2 Multiplikasjon og divisjon på polar form

Polar form av komplekse tall er nyttig når vi multipliserer og dividerer med komplekse tall. Gitt to komplekse tall

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ og } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Fra formel 1.4 for multiplikasjon blir produktet av disse tallene lik

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big).$$

Følgende formler er veletablerte.

$$\begin{aligned} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 &= \sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Vi har derfor at

$$z_1\, z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big). \tag{1.6}$$

Vi har også

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big). \tag{1.7}$$

Legg merke til at multiplikasjon av komplekse tall involverer addisjon av vinklene (argumentene) til de komplekse tallene og multiplikasjon av absoluttverdiene.

Setning 1.2 (Multiplikasjon og divisjon på polar form). *Om z_1 og z_2 er komplekse tall er*

- $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $|z_1/z_2| = |z_1|\,/\,|z_2|$
- $\arg z_1\, z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$
- $\arg z_1/z_2 = \arg z_1 - \arg z_2$

Regneeksempel 1.5. Gitt to komplekse tall på polar form $z_1 = 3(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$ og $z_2 = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$. Regn ut $z_1 z_2$ og z_1/z_2.

Løsning:

$$z_1 z_2 = 3\cdot 2\,(\cos(\pi/3+\pi/6) + i\sin(\pi/3+\pi/6)) = 6\,(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = 6\,i.$$

$$z_1/z_2 = (3/2)\,(\cos(\pi/3-\pi/6) + i\sin(\pi/3-\pi/6)) = 1{,}5\,(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))\,.$$

Vi legger merke til at $(r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$. [2]

1.3.3 Potenser av komplekse tall

Potenser av komplekse tall på polar form regnes ut ved formelen

$$\Big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\Big)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.8}$$

Regneeksempel 1.6. Regn ut $(1-i)^6$.

Løsning: Fra eksempel 1.4 har vi $z = 1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big)$. Da blir $z^6 = \sqrt{2}^6\,(\cos 6(-\pi/4) + i\sin 6(-\pi/4)) = 8\,(\cos(-3\pi/2) + i\sin(-3\pi/2)) = 8i$.

Et spesialtilfelle av formel (1.8) er deMoivres formel:

[2]Det er svært vanlig å skrive $\sin 2\theta$ i stedet for $\sin(2\theta)$. Det samme gjelder for de fleste funksjoner som skrives med mer enn en bokstav, slik som $\ln 2x$, $\arg z_1 z_2$ og $\cos\pi x$.

Setning 1.3 (DeMoivres formel).

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\ \sin n\theta)$$

En annen skrivemåte for $\cos\theta + i\sin\theta$ er $e^{i\theta}$. Hvorfor man skriver dette bygger på fagstoff som ligger utenfor pensum, men siden skrivemåten innebærer en forenkling så tar vi den med. Forøvrig kalles denne sammenhengen for **Eulers formel**:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Eksempel 1.6. Vi har at $e^{i\pi} = -1$.

For den spesielt interesserte opplyses at den **komplekse eksponentialfunksjonen** er definert ved

$$e^{x+y\,i} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Det finnes også komplekse logaritmer og komplekse trigonometriske funksjoner.

1.3.4 Røtter av komplekse tall

Vi lar z være et komplekst tall. Vi skal snart se at likningen

$$w^n = z \tag{1.9}$$

har n løsninger for den ukjente w. Disse løsningene kaller vi for n-terøttene.

Setning 1.4. *n-terøttene til $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ er gitt ved formelen*

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Vi kan også skrive n-teroten av $z = re^{i\theta}$ som

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{(\theta+2k\pi)i/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

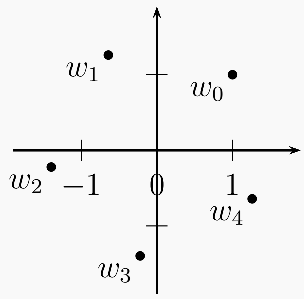
Regneeksempel 1.7. Finn alle 5 røttene til $z = -4 - 4i$, og tegn de i et koordinatsystem.

Løsning: Absoluttverdien til z er $r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ og argumentet til z er $\arg z = \frac{5\pi}{4}$. Femterøttene til z er derfor

$$w_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi + 5\pi/4}{5} + i\,\sin\frac{2k\pi + 5\pi/4}{5}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Vi lager en tabell over røttene gitt med 6 desimalers nøyaktighet.

k	$\phi_k = \frac{2k\pi+5\pi/4}{5}$	$w_k = \sqrt{2}(\cos\phi_k + i\,\sin\phi_k)$
0	$\pi/4$	$1 + i$
1	$13\pi/20$	$-0.642040 + 1.260074\,i$
2	$21\pi/20$	$-1.396802 - 0.221232\,i$
3	$29\pi/20$	$-0.221232 - 1.396802\,i$
4	$37\pi/20$	$1.260074 - 0.642040\,i$



Til slutt ser vi på et eksempel der vi får nytte av å finne røtter av komplekse tall.

Regneeksempel 1.8. Løs likninen $x^2 - x - 1 - 3i = 0$

Løsning: Vi bruker abc-formelen.

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1-3i)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 12i}}{2}$$

Vi regner ut kvadratroten av $5 + 12i = 13(\cos\theta + i\sin\theta)$ der $\theta = \tan^{-1} 12/5 = 1.1760052\ldots$.

$$\sqrt{5 + 12i} = \sqrt{13}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2) = 3 + 2i.$$

Vi regner ut løsningen og får $z = 2 + i$, $z = -1 - i$.

Oppgaver fra kapittel 1

Regn ut hvert av uttrykkene i oppgave 1 til 8, og skriv svaret på standardform, $a + b\,i$.

1. $(3 + 2\,i)(1 - 4\,i)$
2. $(3 - 2\,i)(3 + 2\,i)$
3. $\dfrac{1 - i}{3 + i}$
4. $\dfrac{1 - i}{(1 + i)^2}$
5. $(1 + i)^4$
6. $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$
7. $\sqrt{2}(\cos(11\pi/4) + i\sin(11\pi/4))$
8. $3(\cos\pi + i\sin\pi)$

Skriv om hvert av de komplekse tallene i oppgave 9 til 11 på polar form. Regn så ut z^3.

9. $z = 1 + \sqrt{3}\,i$
10. $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
11. $z = -1 - i.$
12. Regn ut $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ ved hjelp av formelen $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Sammenlikn med det du får ved å bruke deMoivres formel, og finn formlene for $\cos 2\theta$ og $\sin 2\theta$. Kjenner du igjen formlene?
13. Bruk samme oppskrift som i oppgave 12 til å finne formler for $\cos 3\theta$ og $\sin 3\theta$ med $\cos\theta$ og $\sin\theta$. Du kan bruke formelen $(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.
14. Bruk Eulers formel til å finne en annen måte å skrive $e^{2\pi i}$.
15. Regn ut z_1/z_2 og $z_1 z_2$ når $z_1 = 2e^{\pi i/4}$ og $z_2 = 4e^{\pi i/8}$.
16. Regn ut alle komplekse n-røtter til de komplekse tallene under, og tegn de Argandplanet

    a) $z = i, n = 2$

    b) $z = -1, n = 3$

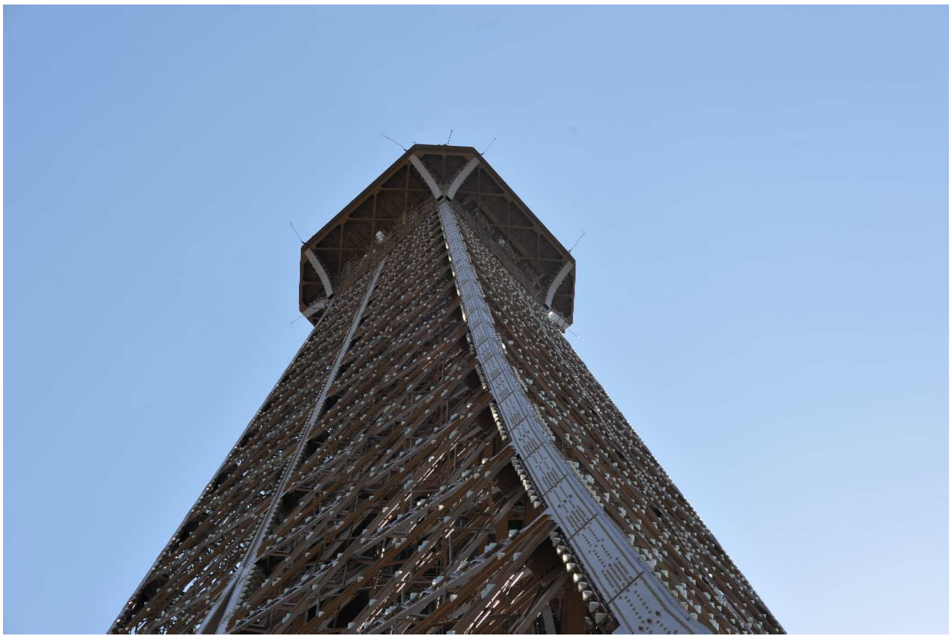
    c) $z = 1, n = 4$

    d) $z = -4 + 4\sqrt{3}\,i, n = 3$

    e) $z = -1, n = 6$
17. Finn løsningene av likningen
$$z^2 - z + (1 + i) = 0.$$
18. Finn løsningene av likningen
$$z^2 - 2iz - 10 = 0.$$
19. Finn løsningene av likningen
$$z^2 + 2iz - 5 = 0.$$
20. Finn løsningene av likningen
$$z^2 + (2 + 2i)z + 2i = 16.$$
21. Finn løsningene av likningen
$$z^2 + 4z + 5 = 0$$
ved å fullføre kvadratet.
22. Bevis setning 1.1.

KAPITTEL 2

SYSTEMER AV LINEÆRE LIKNINGER



Figur 2.1: Bildet viser øverste del av Eiffeltårnet i Paris. Det består av mange bjelker av støpejern. For å konstruere en så stor konstruksjon måtte man beregne hvor mye hver bjelke bøyde seg under vekten av resten av konstruksjonen. Noen av disse beregningene kunne gjøres ved å løse systemer av lineære likninger. Dere kan lese mer om slike anvendelser i for eksempel Numerical Analysis av Timothy Sauer [8].

2.1 Introduksjon og repetisjon

2.1.1 En enkel likning i en variabel

Fra barneskolen husker du kanskje oppgaver der du skulle fylle inn det manglende tallet i en firkantet boks, slik som i følgende oppgave.

Fyll inn tallet som mangler i boksen.

$$\square \cdot 3 = 6$$

Løsningen på oppgaven er 2 fordi $2 \cdot 3 = 6$ er sant. I logikken kalles $2 \cdot 3 = 6$ for en **påstand**. Det er fordi $2 \cdot 3 = 6$ har en sannhetsverdi, i dette tilfellet «sann». Feil svar, for eksempel 3, gir en annen påstand $3 \cdot 3 = 6$. Sannhetsverdien til denne er «usann».

Med bokstaven x for den ukjente blir oppgaven i boksen over skrevet som vist i neste boks.

Finn x i likningen

$$x \cdot 3 = 6$$

Utsagnet $x \cdot 3 = 6$ er ingen påstand fordi det ikke har en sannhetsverdi. Sannhetsverdien er avhengig av hvilken verdi x har. Likningen $x \cdot 3 = 6$ kan ses på som et **åpent utsagn**, eller et **predikat**. [1]

Definisjon 2.1. En **likning** i én ukjent x er et predikat på formen $VS(x) = HS(x)$, der venstresiden og høyresiden er funksjonsutrykk i én variabel x.

En **løsning** r er en verdi av x slik at $VS(r) = HS(r)$ er en sann påstand. Mengden av alle løsninger kalles for **løsningsmengden** til likningen.

Predikatene $\cos x = x$, $x^2 + \sin x = 2x$ og $x \cdot 3 = 6$ er alle eksempler på likninger i en ukjent.

Setning 2.1. *La c være forskjellig fra null. Hvis vi multipliserer med c på begge sider av en likning vil den nye likningen ha nøyaktig de samme løsningene som den opprinnelige likningen.*

Når vi dividerer begge sider i likningen over med 3 så får vi

$$\frac{x \cdot 3}{3} = \frac{6}{3}$$

På venstresiden kan vi forkorte 3-tallet i telleren mot 3 tallet i nevneren. Høyresiden er lik 2. Vi får derfor

$$x = 2$$

og likningen er løst. Vi sier også at x **tilfredsstiller** likningen. Noen likninger, for eksempel $x^2 = 1$, har flere løsninger. Om vi setter $x = -1$ eller $x = 1$ inn i likningen så blir den sann. Løsningsmengden til $x^2 = 1$ er $\{-1, 1\}$.

[1] Et matematisk utsagn som inneholder en eller flere variable kalles for et **predikat** eller åpent utsagn hvis utsagnet har en sannhetsverdi for hvert sett av verdier for variablene.

2.1.2 En likning i to variable

Likningen

$$x - 2 \cdot y = -1 \tag{2.1}$$

har to ukjente variable x og y. En løsning vil være et tallpar $(x, y) = (a, b)$ som gjør at likningen er sann. Løsningsmengden utgjør mengden av alle løsninger. Likningen over har uendelig mange løsninger. Løsningene kan presenteres som en rett linje i xy-planet. For å beskrive løsningene av denne likningen kan vi isolere y på en av sidene. Vi benytter oss av følgende setning.

Setning 2.2. *Hvis vi legger til samme tall på begge sider av en likning vil den nye likningen ha nøyaktig de samme løsningene som den opprinnelige.*

Om vi trekker fra x på begge sider av likningen, så får vi likningen

$$x - 2 \cdot y - x = -1 - x.$$

Ved opprydning av uttrykket på venstre side så får vi likningen

$$-2 \cdot y = -1 - x.$$

Vi dividerer hver side med -2 og får

$$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}.$$

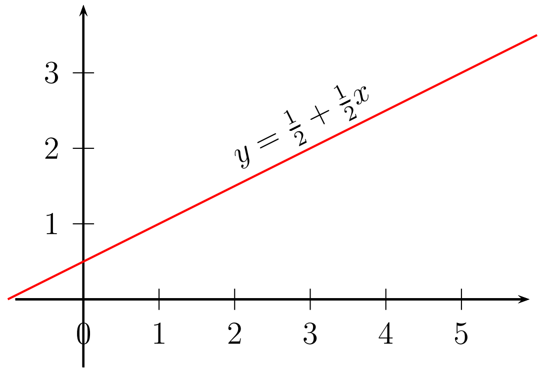
For et valg av tallet x så finner vi en tilhørende verdi for y ved å regne ut $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$. For eksempel vil paret $x = 1$ og $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ høre sammen. Vi sier at paret $x = 1$ og $y = 1$ er en løsning av likningen $x - 2 \cdot y = -1$ fordi høyresiden og venstresiden har samme verdi når vi setter inn $x = 1$ og $y = 1$. En annen løsning er $x = 5$ og $y = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$. Mengden av alle løsninger av $x - 2 \cdot y = -1$ er koordinatene (x, y) til punktene til den rette linjen $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$. Vi tegner denne i figur 2.2. Likningen har uendelig mange løsninger.

Definisjon 2.2. En **likning** i to ukjente variable x og y er et predikat på formen $VS(x, y) = HS(x, y)$, der venstresiden og høyresiden er funksjonsuttrykk i to variable x og y.

En **løsning** (r, s) er et par av verdier slik at $VS(r, s) = HS(r, s)$ er en sann påstand. Mengden av alle løsninger kalles for **løsningsmengden** til likningen.

2.1.3 Et system av to likninger i to variable

På ungdomskolen løste vi systemer av likninger i to ukjente slik som følgende oppgave.



Figur 2.2: Grafen $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$ beskriver løsningsmengden til likning 2.1. Det betyr at løsningsmengden til likningen er alle punktene til den rette linjen i planet som grafen representerer.

Bestem x og y som tilfredsstiller begge likningene under

$$\begin{array}{rrcrcr} I: & x & - & 2\cdot y & = & -1 \\ II: & 2\cdot x & - & y & = & 4 \end{array} \tag{2.2}$$

Hver av likningene har uendelig mange løsninger, men de har kun en felles løsning. Denne løsningen er $x = 3$ og $y = 2$. For å sjekke at løsningen er riktig må vi sette inn verdiene for x og y i den første likningen,

$$3 - 2 \cdot 2 = -1$$

og den andre likningen,

$$2 \cdot 3 - 2 = 4$$

og observerer at likhetene stemmer. Vi sier at paret $x = 3$ og $y = 2$ er en løsning av likningssystemet (2.2). For å sjekke at $x = 3$ og $y = 2$ er den eneste løsningen kan vi løse likningssystemet systematisk. Vi må utelukke at det finnes andre løsninger.

2.1.4 System i to variable løst systematisk.

For å løse likningssystemet (2.2) antar vi at x og y allerede har verdiene vi ønsker å finne. For den første likningen, som vi merket med I, betyr det at høyre- og venstresiden i $x - 2y = -1$ virkelig er like. Hvis vi legger til det samme tallet på hver side så beholder vi fortsatt likheten. La oss legge til $2y$ på begge sider. Dette gjør vi for å isolere x alene på venstresiden av likhetstegnet i første likning.

$$x - 2y + 2y = -1 + 2y.$$

Ved opprydding på høyresiden av denne likningen får vi

$$I': \quad x = -1 + 2y.$$

Vi har kalt denne likningen for I' for å holde oversikten og fordi den erstatter likningen som vi kalte for I. Neste trinn er å erstatte x-en i den andre likningen i likningssystemet (2.2) med venstresiden, $-1+2y$, i likningen vi kaller I'. Dette kan vi gjøre fordi x og $-1+2y$ har nøyaktig den samme verdi når x og y er en løsning av systemet (2.2). Resultatet av en slik erstatning er

$$2 \cdot (-1 + 2y) - y = 4.$$

Om vi rydder opp i likningen får vi $y = 2$. Videre får vi ved innsetting av $y = 2$ inn i likningen I' at $x = -1 + 2 \cdot 2 = 3$. Vi har dermed funnet at løsningen av systemet (2.2) er $x = 3$ og $y = 2$.

Merknad 2.1. Metoden som er brukt i dette avsnittet virker og er forholdsvis lett å forstå. Den har klare svakheter. For det første er den kun egnet til å finne svaret når det finnes én og bare en løsning. For det andre er den ikke lett å programmere på en datamaskin. Det tredje er at du skal lære om matriser og da må du regne med matriser.

2.2 Litt mer om likninger i to ukjente

2.2.1 Inkonsistente likninger

Noen systemer av lineære likninger har ingen løsning. Det følgende systemet er et slikt eksempel.

$$\begin{array}{rccccc} I: & x & - & 2\cdot y & = & -1 \\ II: & x & - & 2\cdot y & = & 1 \end{array} \tag{2.3}$$

Uansett hvilke verdier x og y har så vil venstresidene av begge likningene være like. Høyresidene er derimot forskjellig så (2.3) er en selvmotsigelse. Et tall kan ikke være -1 og 1 samtidig. Vi sier da at systemet er **selvmotsigende** eller **inkonsistent**.

2.2.2 Systemer med uendelig mange løsninger

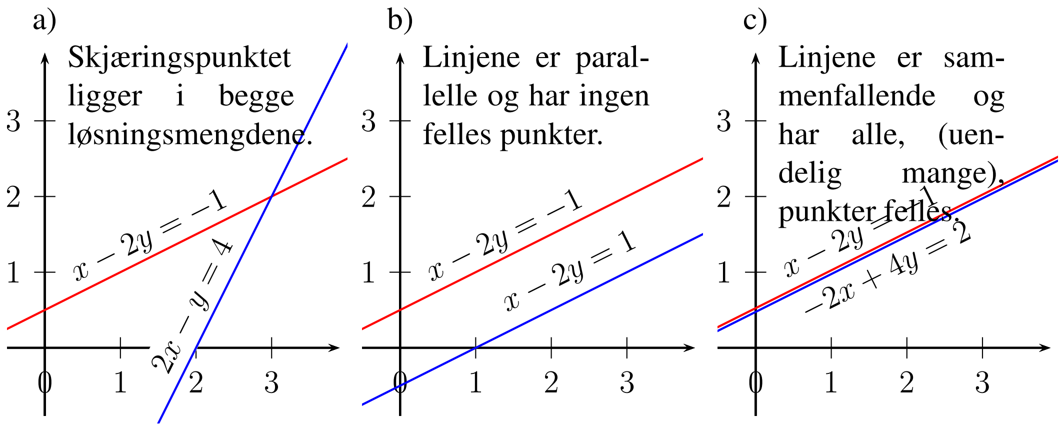
Noen systemer har uendelig mange løsninger. Et eksempel på dette er systemet gitt ved

$$\begin{array}{rccccc} I: & x & - & 2\cdot y & = & -1 \\ II: & -2\cdot x & + & 4\cdot y & = & 2 \end{array} . \tag{2.4}$$

Om vi løser likning I i systemet (2.4) for x så får vi $I' :\ x = -1 + 2 \cdot y$. Innsatt i (2.4:II) gir $-2\cdot(-1+2\cdot y)+4\cdot y = 2$. Oppløsning av parentesen gir $2-4\cdot y+4\cdot y = 2$. Løser vi for y får vi $0 \cdot y = 0$. Alle verdier av y tilfredsstiller $0 \cdot y = 0$. Derfor har vi uendelig mange løsninger.

2.2.3 Grafisk løsning av lineære systemer

Løsningen til hver av likningene i systemet (2.2) er rette linjer. Den ene linjen fant vi avsnitt 2.1.2 mens den andre finner vi ved å løse likning I i systemet (2.2) med hensyn på y. Vi får $y = 2x-4$. Vi tegner inn løsningene til hver av likningene I og II inn i samme koordinatsystem i figur 2.3a). Løsningen av systemet (2.2) er lik x- og y-koordinatene til skjæringspunktet mellom grafene. Vi leser av at disse er $x = 3$ og $y = 2$.



En løsning | Ingen løsninger. | Uendelig mange løsninger.

Figur 2.3: Løsningen av et system av to likninger i to ukjente x og y er koordinatene (x, y) til punktene som er felles for løsningsmengden for hver av likningene.

I system (2.3) derimot er løsningsmengdene parallelle linjer. Se på figur 2.3b). Siden parallelle linjer aldri skjærer hverandre, så har vi ingen løsninger av system (2.3). I system (2.4) er løsningen av likningene sammenfallende linjer. Løsningen er med andre ord alle punktene på linjen $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Se på figur 2.3c).

I figuren over ser vi 3 muligheter for antall løsninger for lineære likningssystemer. Det viser seg at dette gjelder generelt.

Teorem 2.1. *Et lineært likningssystem har enten*

1. *én éntydig løsning,*
2. *uendelig mange løsninger eller*
3. *ingen løsninger.*

Definisjon 2.3. I hvert tilfelle i teoremet over kalles systemet av lineære likninger for

1. **Bestemt**
2. **Ubestemt**
3. **Inkonsistent** eller **selvmotsigende**

Regneeksempel 2.1. Avgjør når systemet

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ x & + & ay & = & b \end{array} \tag{2.5}$$

er bestemt, ubestemt og selvmotsigende
Løsning: Følgende er et forslag til løsning. Fra den første likningen har vi at

$$y = 2 - 2x.$$

Så erstatter vi y-en i den andre likningen med $2 - 2x$ og får $x + a \cdot (2 - 2x) = b$. Etter litt regning får vi

$$(1 - 2a) \cdot x = b - 2a.$$

Hvis $a \neq \frac{1}{2}$ så er $1 - 2a \neq 0$ og vi har

$$x = \frac{b - 2a}{1 - 2a}.$$

Ved innsetting i $y = 2 - 2x$ så får vi $y = 2 - 2 \cdot \frac{b-2a}{1-2a}$. Vi her derfor én løsning når $a \neq \frac{1}{2}$:

$$x = \frac{b - 2a}{1 - 2a}, \quad y = 2 - 2 \cdot \frac{b - 2a}{1 - 2a}.$$

Vi ser nå på hva som skjer når $a = \frac{1}{2}$. Fortsatt er

$$y = 2 - 2x \text{ og } (1 - 2a) \cdot x = b - 2a.$$

Erstatt nå a med $\frac{1}{2}$ i den andre likningen.

$$0 \cdot x = b - 1.$$

Når $b = 1$ er $b - 1 = 0$ og $0 \cdot x = 0$ er tilfredsstilt for alle x, da har vi uendelig mange løsninger

$$y = -2x + 2.$$

Når $b \neq 1$ er $b - 1 \neq 0$ men $0 \cdot x = b - 1 \neq 0$ er umulig. Systemet (2.5) har

1. én entydig løsning når $a \neq \frac{1}{2}$,
2. uendelig mange løsninger når $a = \frac{1}{2}$ og $b = 1$
3. og ingen løsninger når $a = \frac{1}{2}$ og $b \neq 1$.

NB! Lengre ut i kurset skal vi løse denne oppgaven på en mye raskere måte.

2.2.4 Generelle lineære systemer av 2 likninger i 2 variable

Alle 3 systemene over er på samme format.

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array} \tag{2.6}$$

Systemet (2.6) har to ukjente størrelser x og y, mens a, b, c, d, e og f står for konstante størrelser. Legg merke til at x-ene, y-ene og tegnene $+$ og $=$ har faste plasser. Følgende tabeller er tilstrekkelig for å beskrive systemet.

$$\text{Venstresiden}\ \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array},\ \text{de ukjente}\ \begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline y \\ \hline\end{array},\ \text{og høyresiden}\ \begin{array}{|c|}\hline e \\ \hline f \\ \hline\end{array}. \tag{2.7}$$

Vi vil skrive disse tabellene på formen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Dette kaller vi for **matriser**. Den første kalles for **koeffisientmatrisen** til systemet (2.6). Matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

kalles for **totalmatrisen** til systemet.

2.2.5 Systematisk løsning av et eksempel

For små systemer med nøyaktig en løsning er metoden i avsnitt 2.1.3 god nok. For større systemer og for systemer med uendelig mange eller ingen løsninger blir metoden uoversiktlig og tungvint.

Løsning av likninger handler om å finne <u>alle</u> løsninger og å dokumentere at disse er funnet. Dette krever at metoden er oversiktlig for den som løser systemet og for den som eventuelt skal sjekke om man har regnet riktig. Vi trenger god bokføring. I dette avsnittet vil vi systematisk løse systemet (2.2) og knytte det opp til matriser.

System	Tilhørende totalmatrise
$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2\cdot y & = & -1 \\ 2\cdot x & - & y & = & 4 \end{array}$ Vi legger til første likning multiplisert med -2 til andre likning	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$
$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2\cdot y & = & -1 \\ & & 3y & = & 6 \end{array}$ Vi dividerer andre likning med 3	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2\cdot y & = & -1 \\ & & y & = & 2 \end{array}$ Vi legger til andre likning multiplisert med 2 til første likning	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{array}{rrcr} x & & = & 3 \\ & y & = & 2 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Legg merke til at totalmatrisene avspeiler nøyaktig de operasjonene vi gjør for å finne løsningen til systemet. Vi vil komme tilbake til dette neste seksjon. Mange vil synes at metoden som er skissert over er unødvendig stivbent og at løsningen vi ga på side 24 er mye enklere. Bruk allikevel tid til å forstå metoden. Det at metoden er stivbent gjør den egnet til større systemer, til implementasjon på datamaskiner og ikke minst til en forståelse av matriser. Man bruker matriser til mer enn å løse systemer av lineære likninger, som vi skal se etterhvert. De har viktige anvendelser i blant annet grafikk på datamaskiner.

2.3 Lineære systemer

2.3.1 Variabler og konstanter

I dette kompendiet kommer vi til å bruke bokstavene

$$x,\ y \text{ og } z$$

som navn på variable eller ukjente størrelser. Vi kommer også til å bruke indekserte symboler

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots,$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots,$$

etc. som navn på ukjente. Tall og bokstavene

$$a, b, c, \ldots$$

vil bli brukt som navn på konstante størrelser. I tillegg til tall og bokstaver bruker vi også symboler med enkle eller doble indekser for konstanter.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots,$$

$$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{3,5} \ldots,$$

etc. Indeksene er hele tall og vi kommer til å bruke bokstavene i, j, k, som navn på indekser. Symbolet $a_{i,j}$ vil vi også skrive som

$$a_{ij}$$

når det ikke fører til uklarheter. For eksempel vil vi mene det samme med $a_{1,2}$ og a_{12} når det går klart frem fra sammenhengen hva som menes.

2.3.2 Likninger i en eller flere variable

Likningen

$$2x + y^2 - \sin z - z = 3 \tag{2.10}$$

i de tre ukjente x, y og z har fire ledd på venstresiden av likhetstegnet. Disse er $2x$, y^2, $-\sin z$ og $-z$. I lineær algebra er vi interessert i likninger som inneholder ledd som likner på det første og fjerde leddet $2x$ og $-z$. Vi kaller disse for lineære ledd:

Definisjon 2.4. Et lineært ledd er et ledd på formen

$$a \cdot x,$$

der a er en konstant og x er en variabel.

Eksempel 2.1. Leddene $2x$ og $-z$ $(= -1 \cdot z)$ i likning 2.10 er lineære ledd. De to andre leddene på venstresiden i samme likning, y^2 og $-\sin z$ er ikke lineære ledd.

Eksempel 2.2. Alle uttrykkene under er eksempler på lineære ledd

$$a\,y, \quad 3\,z, \quad 8.32\,x_2, \quad -\pi\,z, \quad \text{og} \quad a_{2,3}\,x_3.$$

2.3.3 Lineære likninger i flere variable

En likning på formen $a\,x + b\,y = c$ representerer en rett linje i planet. Se for eksempel figur 2.3a) på side 26. Likningen $a\,x + b\,y + c\,z = d$ representerer et plan i rommet.

Definisjon 2.5. En lineær likning i de n ukjente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en likning der alle leddene er lineære eller konstant.

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = b.$$

Konstantene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaller vi for **koeffisientene** til den lineære likningen. Konstanten b kalles for et **konstantledd**. For eksempel er $2x+y-z = 3$ en lineær likning, men likning 2.10 ikke en lineær likning.

Definisjon 2.6. Et lineært system av m likninger i n ukjente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ består av m lineære likninger i de samme n ukjente variablene.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\;x_1 & + & a_{12}\;x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\;x_n & = & b_1 \\ a_{21}\;x_1 & + & a_{22}\;x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\;x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.11}$$

Størrelsene $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ kalles for **koeffisientene** til systemet. Vi kan samle alle koeffisientene i en rektangulær tabell

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

En **løsning** av én likning i variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er er en sekvens av verdier $r_1, r_2, \ldots, r_n$ for $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som gjør at likningen er sann.

Definisjon 2.7. En løsning av system av likninger i variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en sekvens av verdier $r_1, r_2, \ldots, r_n$ for $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som gjør at alle likningen i systemet er sanne samtidig. Mengden av alle løsninger av et system kalles for **løsningsmengden** av dette systemet.

Selv om $(x, y) = (3, 2)$ er en løsning av $x - y = 1$ og $(x, y) = (2, 3)$ er en løsning av $2x - y = 1$ så er hverken $(x, y) = (3, 2)$ eller $(x, y) = (2, 3)$ en løsning av systemet

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 1 \end{array}.$$

Derimot er $(x, y) = (0, -1)$ en løsning av systemet.

2.4 Lineære systemer og matriser

2.4.1 Matrisebegrepet

Matriser er et av de viktigste begrepene i lineær algebra. Målet for kurset er langt mer enn å lære metoder for å løse systemer av likninger. Teori og metode for likningsløsning er i seg selv viktig, men kunnskapen, ferdighetene og forståelsen som tilegnes i ditt arbeid med matriser er like viktig. Det er derfor viktig å bruke tid på matriser nå, selv om du ikke kan se hele målet ennå.

Vi har brukt matrise-begrepet lenger opp i teksten uten å definere det. Vi begynner dette avsnittet med å definere begrepet matrise.

Definisjon 2.8. En $m \times n$-**matrise** er en rektangulær tabell med m horisontale **rader** med n tall i hver rad slik at tallene danner n vertikale **søyler**. Tallene i en matrise kalles for **elementer**. Vi sier at matrisen har **størrelse** eller **orden** $m \times n$.

Vi har allerede gitt eksempler på matriser. Koefisientmatrisen 2.12 er et eksempel på en matrise. Høyresiden til et system av m likninger, konstantene $b_1, b_2, \ldots, b_m$, gir også et eksempel på en matrise:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har bare en søyle.

Definisjon 2.9. En $m \times 1$-matrise kalles for en **søylevektor**.

Eksempel 2.3. Matrisene

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

er eksempler på søylevektorer.

Vi kan se på en søyle i en matrise som en søylevektor. En $m \times n$ matrise kan betraktes som en ordnet samling av n søylevektorer av dimensjon m.

Vi har også et navn på matriser som bare består av en rad.

Definisjon 2.10. En $1 \times n$-matrise kalles også for en **radvektor**.

Hver rad i en matrise kan betraktes som en radvektor. Vi kan godt se på en matrise som radvektorer stablet i høyden. I kaptittel 4 skal vi se nytten av å se på en matriser som en ordnede samlinger av radvektorer og søylevektorer.

Eksempel 2.4. Matrisene

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

er eksempler på radvektorer.

2.4.2 Likhet mellom matriser

For å sammenlikne matriser er det viktig å kunne si om to matriser er like eller forskjellig. Her er en presis definisjon på likhets-begrepet.

Definisjon 2.11. To matriser $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er **like** hvis de har samme størrelse $m \times n$ og $a_{ij} = b_{ij}$ for alle $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Vi ser at $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ er forskjellige matriser fordi de har forskjellig form. Den første er en 2×2 matrise, mens den andre er en 2×3-matrise. Matrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er lik $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ hvis og bare hvis $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ og $d = 4$.

2.4.3 Koeffisientmatrisen

Vi vil bruke matriser for å løse systemer av lineære likninger dette gir oss de første eksemplene på matriser.

Eksempel 2.5. Koeffisientmatrisen A til systemet (2.11) er gitt ved matrisen (2.12). Vi skriver

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Det er vanlig å bruke en stor bokstav med kursiv skrifttype for matriser. En kortform for matrisen A er $A = [a_{ij}]$. Vi bruker små bokstaver med fet skrifttype for rad- og søylevektorer.

2.4.4 Totalmatrisen

En svært viktig matrise for løsning av lineære systemer er totalmatrisen til et lineært likningsystem.

Eksempel 2.6. Totalmatrisen til systemet (2.11) er gitt ved matrisen

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2.14}$$

For å skille totalmatrisen fra koeffisientmatrisen til et system, bruker vi en stor bokstav med en krøllstrek over. Vi leser dette som 'a tilde'. Totalmatrisen inneholder all informasjon om et likningssystem, bortsett fra navnene på de variable størrelsene.

Søylevektoren av de ukjente variablene i systemet (2.11) vil ha en sentral plass i kurset:

Eksempel 2.7. Vi skriver de ukjente størrelsene i en søylevektor.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Vi bruker en liten bokstav $\mathbf{x}$ med fet skrifttype for søylevektoren med de ukjente.

Søylevektoren $\mathbf{x}$ kan både spille rollen som den ukjente størrelsen i et likningssystem og som en vektor-variabel. Det siste er nyttig i blant annet datagrafikk. Vi skal komme tilbake til vektorvariabler senere.

2.5 Gauss-eliminasjon

2.5.1 Gauss-eliminasjon på systemer

Gauss-eliminasjon er en systematisk metode for å løse lineære systemer. Denne metoden er oversiktlig ved arbeid på papir og også for programmering av likningsløsning på en datamaskin. I korthet går metoden ut på å systematisk omforme et lineært system til et nytt system som har følgende egenskaper.

1. Det nye systemet skal ha nøyaktig de samme løsningene som det opprinnelige systemet.
2. Det nye systemet skal være enklere å løse.
3. Prosessen skal være enkel å etterprøve.

Definisjon 2.12. Vi kaller to systemer med nøyaktig den samme løsningsmengden for **ekvivalente systemer**.

Setning 2.3. *Hvis et system er fremkommet fra et annet system ved å gjøre en av følgende tre operasjoner,*

1. *multiplisere en av likningene med et tall som er forskjellig fra null,*
2. *ombytte av to likninger eller*
3. *addere et multiplum av en likning til en av de andre likningene,*

så er systemene ekvivalente.

Bevis. Hvis alle likningene er tilfredsstilt i det opprinnelige systemet så vil alle likningene i det nye systemet være tilfredsstilt. Det betyr at hver løsning av det opprinnelige systemet er en løsning av det nye systemet. Fordi hver av operasjonene er mulig å oppheve med en tilsvarende operasjon, så er hver løsning av det nye systemet er en løsning av det opprinnelige systemet. Derfor har begge systemer den samme løsningsmengden.

Å addere et multiplum av en likning oppheves ved å subtrahere det samme multiplumet av denne likningen. Ombytte av to likninger oppheves ved å bytte tilbake. Å multiplisere en av likningene med $c \neq 0$ oppheves ved å multiplisere med $1/c$. □

Meningen med beviser er ikke for å overbevise leseren om at en setning er sann, slik som et juridisk bevis er til for å overbevise dommeren i en rettssak. Et matematisk bevis skal leses for å få en dypere forståelse, som vil komme godt med senere i kurset og utdannelsen.

Definisjon 2.13. Gauss-eliminasjon er en prosess med flere trinn der hvert trinn består av én av følgende tre typer operasjoner på systemet.

1. Multiplisere en av likningene med et tall som er forskjellig fra null.
2. Ombytte av to likninger.
3. Addere et multiplum av en likning til en av de andre.

Den andre av disse operasjonene virker overflødig, men er svært viktig for å holde oversikten. I mange tilfeller er også ombytte av likninger nyttig for å lette arbeidet.

Synes du setning 2.3 eller beviset forklarer best hvorfor Gauss-eliminasjonen fungerer?

Regneeksempel 2.2 (Gauss-eliminasjon). Vi vil løse systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 3 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \end{array}$$

Vi bytter om på første og andre likning

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \end{array}$$

Vi legger til -2 ganger likning 1 til likning 2. Følgende er kun for å forklare hva som skjer, og trengs ikke å tas med i løsning av oppgaver.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (-2)\cdot \text{ første-likning} & -2x & + & 2y & & & = & -6 \\ + \text{ andre-likning} & 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ \hline \text{Gir ny andre-likning} & & & 3y & - & z & = & -6 \end{array}$$

Systemet med ny andre-likning blir

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 3 \\ & & 3y & - & z & = & -6 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \end{array}$$

Vi legger til -3 ganger likning 1 til likning 3.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(-3)\cdot \text{ første-likning} & -3x & + & 3y & & & = & -9 \\
+ \text{ tredje-likning} & 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\
\hline
\text{Gir ny tredje-likning} & & & y & - & z & = & -4
\end{array}$$

Systemet med ny tredje-likning er

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & y & & & = & 3 \\
& & 3y & - & z & = & -6 \\
& & y & - & z & = & -4
\end{array}$$

Vi bytter om på likning 2 og 3.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & y & & & = & 3 \\
& & y & - & z & = & -4 \\
& & 3y & - & z & = & -6
\end{array}$$

Nå legger vi til -3 ganger den andre likningen til den tredje likningen.

$$\begin{array}{lrcrcr}
(-3)\cdot \text{ andre-likning} & -3y & & 3z & = & 12 \\
+ \text{ tredje-likning} & 3y & - & z & = & -6 \\
\hline
\text{Gir ny tredje-likning} & & & 2z & = & 6
\end{array}$$

Systemet med ny tredje-likning er

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & y & & & = & 3 \\
& & y & - & z & = & -4 \\
& & & & 2z & = & 6
\end{array}$$

Systemet er nå på såkalt trappeform. Den tredje likningen gir $z = 3$. Om vi putter $z = 3$ inn i den andre likningen, får vi $y - 3 = -4$. Det gir løsningen $y = -1$. Det siste som gjenstår er å finne x. Vi putter $y = -1$ og $z = 3$ inn i den første likningen. Det gir $x - (-1) = 3$ og følgelig er $x = 2$. Vi har funnet løsningen $x = 2$, $y = -1$ og $z = 3$.

2.5.2 Gauss-eliminasjon på matriser

Gauss-eliminasjon kan også utføres direkte på totalmatriser og er fortsatt en metode for å løse lineære systemer. Forskjellen er at matrisene representerer systemene. Metoden går ut på å omforme en totalmatrise, (som representerer et lineært system), til en ny matrise med følgende egenskaper.

1. Den nye matrisen skal være totalmatrisen til et system med nøyaktig de samme løsningene som det opprinnelige systemet.

2. Den nye matrisen skal være på såkalt trappeform.

Gauss-eliminasjon på en matrise består av en prosess som består av flere trinn og hvor hvert trinn består av en av følgende tre typer operasjoner på systemet.

1. Multiplisere en rad med et tall som er forskjellig fra null.
2. Ombytte av to rader.
3. Addere et multiplum av en rad til en av de andre radene.

Følgende eksempel er matrisevarianten til forrige regneeksempel.

Regneeksempel 2.3 (Gauss-eliminasjon). Vi vil gjøre gauseliminasjonene på totalmatrisen til systemet i eksempel 2.2 som tilsvarer nøyaktig de samme radoperasjonene som i det eksempelet.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi bytter om på 1 og andre rad

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi legger til -2 ganger rad 1 til rad 2. Følgende er kun for å forklare hva som skjer, og trengs ikke å tas med i løsning av oppgaver.

$$\begin{array}{c|c} (-2)\cdot \text{ første-rad} & \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \\ + \text{ andre-rad} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \text{Gir ny andre-rad} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Systemet med ny andre-rad blir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi legger til -3 ganger rad 1 til rad 3.

$$\begin{array}{c|c} (-3)\cdot \text{ første-rad} & \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\ + \text{ tredje-rad} & \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ \hline \text{Gir ny tredje-rad} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Systemet med ny tredje-rad er

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Vi bytter om på radene 2 og 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Til slutt legger vi til -3 ganger den andre raden til den tredje raden.

$$\begin{array}{c|c} (-3)\cdot \text{ andre-rad} & \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \\ + \text{ tredje-rad} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \\ \hline \text{Gir ny tredje-rad} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrisen med ny tredje-rad er

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Vi kan også multiplisere den tredje raden med $1/2$. Det gir oss den nye matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er totalmatrisen til systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

I forrige eksempel fant vi at dette systemet har løsningen $x = 2$, $y = -1$ og $z = 3$.

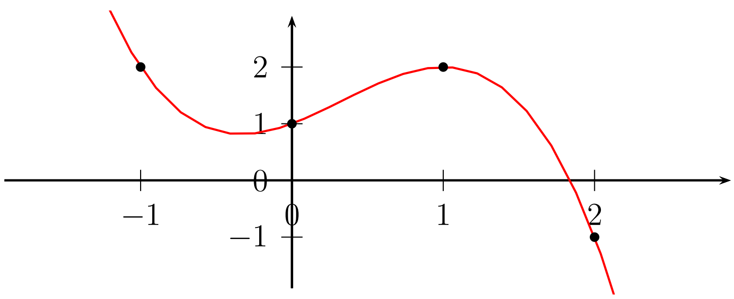
For å lette skrivearbeidet innfører vi følgende notasjon

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \\ + \end{matrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ + \end{matrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot 1/2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

2.6 Anvendelser av lineære likninger

2.6.1 Interpolasjon

Vi sier at en funksjon $f(x)$ **interpolerer** et utvalg punkter i planet hvis alle punktene ligger på grafen til $f(x)$. For eksempel interpolerer polynomet $p(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$ punktene $(-1, 2)$ $(0, 1)$, $(1, 2)$ og $(2, -1)$ fordi $p(-1) = 2$, $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ og $p(2) = -1$. Følgende figur viser punktene og grafen i et koordinatsystem.



Regneeksempel 2.4. Finn annengradspolynomet der grafen går igjennom punktene $(1,1)$, $(2,0)$ og $(3,3)$.

Løsning. Vi setter $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Hvert punkt gir oss en likning i de ukjente a_0, a_1 og a_2.

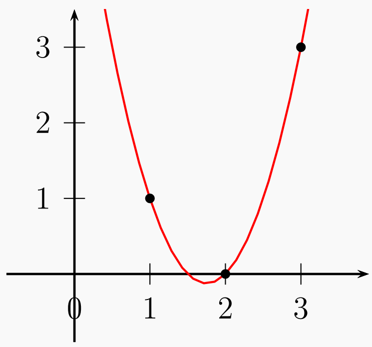
$$\begin{aligned} p(1) = a_0 + a_1 1 + a_2 1 &= 1 \\ p(2) = a_0 + a_1 2 + a_2 4 &= 0 \\ p(3) = a_0 + a_1 3 + a_2 9 &= 3 \end{aligned}$$

Vi skriver opp systemets totalmatrise og utfører Gauss-eliminasjon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tilbakeinnsetting gir $a_2 = 4/2 = 2$, $a_1 = -1 - 3a_2 = -7$ og $a_0 = 1 - a_1 - a_2 = 6$. Polynomet som det spørres etter er

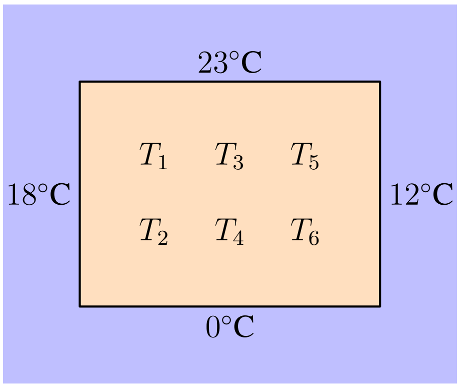
$$p(x) = 6 - 7x + 2x^2.$$



2.6.2 Temperaturen til en metallplate

En metallplate har konstant temperatur langs hver av kantene som vist i figur 2.4. Hva er temperaturen i andre punkter på platen? Fordi platen har uendelig mange punkter, har vi valgt et endelig antall av disse. I en forenklet modell for temperaturen i platen er temperaturen i hvert punkt lik gjennomsnittet av temperaturene i nabopunktene til venstre, høyre, opp og ned. Siden vi har seks punkter får vi seks likninger

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{4}(18 + T_3 + 23 + T_2) \\ T_2 &= \tfrac{1}{4}(18 + T_4 + T_1 + 0) \\ T_3 &= \tfrac{1}{4}(T_1 + T_5 + 23 + T_4) \\ T_4 &= \tfrac{1}{4}(T_2 + T_6 + T_3 + 0) \\ T_5 &= \tfrac{1}{4}(T_3 + 12 + 23 + T_6) \\ T_6 &= \tfrac{1}{4}(T_4 + 12 + T_5 + 0). \end{aligned}$$



Figur 2.4: Rutenett av 3 ganger 2 punkter på en metallplate.

Vi multipliserer hver likning med 4, samler alle variable på venstresiden og samler alle konstanter på høyresiden

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
4T_1 & - & T_2 & - & T_3 & & & & & & & = & 41 \\
-T_1 & + & 4T_2 & & & - & T_4 & & & & & = & 18 \\
-T_1 & & & + & 4T_3 & - & T_4 & - & T_5 & & & = & 23 \\
& & -T_2 & - & T_3 & + & 4T_4 & & & - & T_6 & = & 0 \\
& & & & -T_3 & & & + & 4T_5 & - & T_6 & = & 35 \\
& & & & & & -T_4 & - & T_5 & + & 4T_6 & = & 12.
\end{array}$$

Vi skriver opp totalmatrisen.

$$\begin{bmatrix}
4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 41 \\
-1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 18 \\
-1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 23 \\
0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 35 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 12
\end{bmatrix}.$$

Det er fullt mulig å utføre Gauss-eliminasjon på dette systemet. Utregningen ville ta litt over en side. På Internett finnes nettsider for å løse likningssystemer. Det finnes også programmer som kan brukes. Fra en slik side eller ved hjelp av et egnet program finner vi løsningen.

$$(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6) = (17, 11, 16, 9, 15, 9)$$

Dette er en nøyaktig løsning av likningssystemet, men en unøyaktig løsning av temperaturproblemet. Det er fordi modellen vi brukte med endelig antall punkter ikke er en god modell. For å bøte på dette kunne vi bruke flere punkter. Da vil vi trenge metoder for å løse systemer som dere vil lære om i et annet kurs.

Oppgaver for kapittel 2

1. Løs systemene under grafisk.

   a) $\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array}$

2. Løs systemene i oppgave 1 ved regning.

3. Avgjør for hvilke verdier for a systemet under er bestemt, ubestemt eller selvmotsigende.

   a) $\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & - & ay & = & 3 \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & 1 \\ x & + & ay & = & 1 \end{array}$

   c) $\begin{array}{rcrcr} a^2x & + & y & = & 1 \\ -x & + & ay & = & a \end{array}$

4. Avgjør for hvilke verdier for a og b systemet under er bestemt, ubestemt eller selvmotsigende.

   a) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & ay & = & 1 \\ x & + & y & = & b \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & b \end{array}$

Finn koeffisientmatrise og totalmatrise for systemene.

5. $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}$

6. $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$

7. $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 2 \\ 2x & & & - & z & = & 1 \end{array}$

8. Løs systemet av likninger i oppgave 5.

9. Løs systemet av likninger i oppgave 7.

10. Gjør matrisene under om til trappeform

    a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

    d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

    e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 3 & -8 & -9 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

    f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

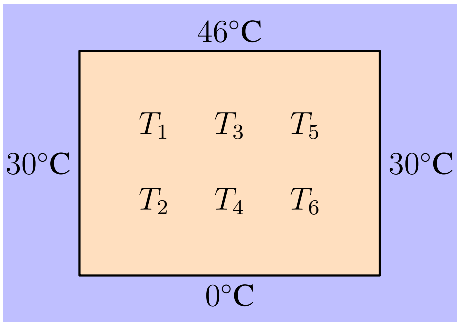
11. Anta at matrisene i oppgave 10 er totalmatriser. Skriv om til likningssystemer som svarer til disse.

12. Finn polynomet av grad to som interpolerer punktene $(1, 2)$, $(1, -1)$ og $(2, -2)$.

13. Finn polynomet av grad tre eller mindre som interpolerer punktene $(-1, 7)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, og $(3, 3)$.

14. Enhver sirkel er bestemt av en likning på formen $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Finn likningen til sirkelen som går igjennom punktene $(3, -2)$, $(2, 1)$ og $(1, 2)$.

15. En metallplate har konstant temperatur langs hver av kantene som vist i figuren under.



Hva er temperaturen i punktene $T_1, T_2, \ldots, T_6$ på platen? (Hint: Du kan benytte deg av symmetrien og sette $T_5 = T_1$ og $T_6 = T_2$.)

16. For hvilke verdier av a, b, c og d er følgende matriser like?

$$A = \begin{bmatrix} (a+b) & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ (d-c) & a \end{bmatrix}$$

17. Bevis at hvis likningene $x + ky = a$ og $x + ly = b$ har samme løsningsmengde så er likningene identiske.

KAPITTEL 3

LIKNINGSLØSNING OG MATRISER

Figur 3.1: Bildet viser søndre del av Manhattan i New York. I noen modeller av trafikkflyt brukes lineære likninger. Slik modellering er viktig i planlegging av store veiprosjekter.

3.1 Matriser og generell teori for løsning av likninger

3.1.1 Radoperasjoner og radekvivalens

I forrige kapittel så vi at ved å ordne koeffisientene og konstantleddene til et system av lineære likninger i matriser så kan vi løse likningsystemet ved å omforme disse matrisene til trappematriser som vist i eksempel 2.3. Til dette bruker vi såkalte radoperasjoner. Matrisen representerer likningsystemet og radoperasjonene tilsvarer trinnene som skal til for å løse systemet. Hovedideen er at vi omformer systemet av likninger til et enklere system som har nøyaktig den samme løsningsmengden. Systemer som har nøyaktig samme løsningsmengde kalles for **ekvivalente systemer**.

Vi gjentar de tre elementære radoperasjonene.

1. Bytte om på to rader
2. Multiplisere en rad med et reelt tall $\neq 0$
3. Addere en rad multiplisert med et tall til en annen rad.

Resultatet av en radoperasjon er en matrise som representerer et lineært system som er ekvivalent med det vi startet med.

Definisjon 3.1 (Radekvivalente). To matriser A og B kalles **radekvivalente** og vi skriver

$$A \sim B$$

hvis en serie av radoperasjoner omformer A til B

Eksempel 3.1 (radekvivalente matriser). Matrisene $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ er radekvivalente da matrisen til høyre fremkommer ved å legge første rad i matrisen til venstre multiplisert med -2 til andre rad i matrisen til venstre.

3.1.2 Pivotelementer

Vi trenger endel begreper for å snakke om og systematisere løsning av likninger ved hjelp av matriser.

Definisjon 3.2 (Pivotelementer og pivotrader). Det første element forskjellig fra null i en rad kalles for et **pivotelement**. En rad som inneholder et pivotelement kalles for en **pivotrad**.

Legg merke til at det finnes høyst ett pivotelement i hver rad. I matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

finner vi ett pivotelement 1 i første og ett pivotelement 5 i tredje rad. Det finnes ingen pivotelementer i andre rad en slik rad kalles for en nullrad.

Definisjon 3.3 (Nullrad). En rad i en matrise der alle elementene er lik null kalles for en **nullrad**.

Definisjon 3.4 (Pivotsøyle). En søyle som inneholder et pivotelement kalles for en **pivotsøyle**.

Matrisen over har nøyaktig to pivotsøyler. Det er andre og tredje søyle.

3.1.3 Trappeform

I eksempel 2.2 ender vi opp med systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{array}$$

Fordelen med dette systemet er at det er enkelt å løse. Vi starter med den nederste likningen og arbeider oss oppover. Vi kaller formen til en slik likning for trappeform. Den tilhørende totalmatrisen er også på trappeform.

Definisjon 3.5. En matrise er på **trappeform** hvis

1. Alle eventuelle nullrader ligger som de nederste radene i matrisen.
2. Hvert pivotelement ligger til venstre for eventuelle pivotelementer på radene nedenfor

Eksempel 3.2. Følgende matrise er på trappeform

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Målet med en Gauss-eliminasjon er å omforme en matrise til trappeform. I delkapittel 3.3 vil du finne en grundig beskrivelse av Gauss-eliminasjonen.

3.1.4 Løsning av ubestemte systemer på trappeform

Systemer kan ha én entydig, uendelig mange eller ingen løsninger. Vi skal se på noen eksempler der et system har uendelig mange løsninger. Vi ser først på generell teori.

Pivotsøylene til koeffisientmatrisen svarer til såkalte **pivotvariable**. De øvrige variablene kalles for **frie variable**. Det er god regneskikk å innføre **parametre** for de frie variable når vi løser et lineært system. Vi bruker bokstavene s og t som navn på parametre. Om vi trenger flere parametre, nummererer vi parametrene med en indeks nede til høyre, som t_1, t_2 og t_3.

Eksempel 3.3. Likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fordi søyle 1 og 2 er pivotsøyler, er x_1 og x_2 er pivotvariable, x_3 er en fri variabel. Vi setter $x_3 = t$.

Tilbakeinnsetting gir

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 - x_3 = 3 - t \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - 2(3-t) - t = -5 + t \end{aligned}$$

Løsningsmengden kan vi skrive som

$$L = \left\{ (x_1, x_2, x_3) = (-5+t, 3-t, t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Løsningen i eksempelet har en fri variabel t og løsningen er en rett linje. Hver av likningene i systemet beskriver et plan og løsningen av systemet er den rette linjen der planene skjærer hverandre.

Neste eksempel har mer enn en fri variabel.

Eksempel 3.4. Likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \\ & & & & 3x_4 & + & x_5 & = & 5 \end{array}$$

har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fordi søyle 2 og 4 er pivotsøyler, er x_2 og x_4 er pivotvariable, x_1, x_3 og x_5 er frie variable. Vi setter $x_1 = t_1$, $x_3 = t_2$ og $x_5 = t_3$.

Tilbakeinnsetting gir

$$\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{5-x_5}{3} = \tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{3}t_3 \\ x_2 &= 2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -t_2 - \tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{3}t_3 \end{aligned}$$

Løsningsmengden kan vi skrive som

$$L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(t_1, -t_2 - \tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{3}t_3, t_2, \tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{3}t_3, t_3\right) \Big| t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

I følgende regneeksempel skal vi løse et system som ikke er på trappeform. Vi benytter Gauss-eliminasjon for å gjøre totalmatrisen om til trappeform før vi finner frie variabler og avslutter med tilbakeinnsetting.

Regneeksempel 3.1. Finn alle løsninger av systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & & & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

Løsning: Vi skriver opp totalmatrisen og utfører Gauss-eliminasjon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} ^{(-2)} \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ^{(3/2)} \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi skriver om til likningene $x + y + 2z = 1$ og $2y + 2z = 2$. Legg merke til at vi har to likninger i tre ukjente. Vi velger z som **fri variabel** og setter $z = t$ der t kalles en **parameter**.

Følgende prosess kalles for **tilbakeinnsetting**.

- Først løser vi $2y + 2z = 2$ for y og får $y = \frac{2-2z}{2} = 1 - t$.
- Deretter løser vi $x + y + 2z = 1$ for x og får $x = 1 - y - 2z = 1 - (1 - t) - 2t = -t$.

Vi har derfor følgende løsningsmengde

$$L = \{(x, y, z) = (-t, 1 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Vi ser at trappematrisen i eksempelet over har nøyaktig to pivotelementer. Antallet likninger er redusert fra tre til to.

3.2 Rangen til en matrise

3.2.1 Definisjon av rang

Framstillingen av begrepet rang i denne boka er litt annerledes enn de fleste andre lærebøker. Vi har valgt en definisjon basert på hvordan rangen til en matrise beregnes.

Definisjon 3.6. **Rangen** til en matrise A er lik antall pivotrader i en trappematrise A^G til A. Vi skriver

$$\operatorname{Rank} A$$

Vi finner rangen lett om matrisen allerede er på trappeform.

Eksempel 3.5. Rangen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er lik 3 fordi A er en trappematrise og har 3 pivotrader.

Det er som oftest ikke mulig å finne rangen til en matrise ved bare å se på den. For å finne rangen til en matrise kan vi utføre en Gauss-eliminasjon.

Regneeksempel 3.2 (Rang). Finn rangen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi utfører Gauss-eliminasjon på matrisen A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ + \end{matrix} \begin{matrix} (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangen til A er lik 2, ($\operatorname{Rank} A = 2$), fordi trappematrisen har 2 pivotelementer.

3.2.2 Rang og likningssystemer

Antallet løsninger til et likningssystem kan finnes ved hjelp av rang-begrepet. Vi minner om at det bare er tre muligheter. Enten finnes det kun en løsning, ingen løsninger eller uendelig mange løsninger.

Setning 3.1. *Anta at vi har et system med n ukjente med koeffisientmatrise A og totalmatrise $\tilde{A} = [A|\mathbf{b}]$.*

1. *Hvis* $\operatorname{Rank} \tilde{A} = \operatorname{Rank} A = n$ *er systemet bestemt.*
2. *Hvis* $\operatorname{Rank} \tilde{A} = \operatorname{Rank} A < n$ *er systemet ubestemt.*
3. *Hvis* $\operatorname{Rank} \tilde{A} = \operatorname{Rank} A + 1$ *er systemet inkonsistent.*

Regneeksempel 3.3. Bestem for hvilke a og b systemet er

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & + & y & + & az & = & b \end{array}$$

bestemt, ubestemt eller inkonsistent.

Løsning: Vi utfører Gauss-eliminasjon på totalmatrisen til systemet

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & a & b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & (a-8) & (b-12) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & (a-5) & (b-7) \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende er koeffisientmatrisen radekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & (a-5) \end{bmatrix}.$$

- Når $a \neq 5$ er $\operatorname{Rank} A = \operatorname{Rank} \tilde{A} = 3$.

  Systemet er bestemt når $a \neq 5$.

- Når $a = 5$ og $b = 7$ er $\operatorname{Rank} A = \operatorname{Rank} \tilde{A} = 2 < 3$.

  Systemet er ubestemt når $a = 5$ og $b = 7$.

- Når $a = 5$ og $b \neq 7$ er $\operatorname{Rank} A = 2 < \operatorname{Rank} \tilde{A} = 3$.

  Systemet er inkonsistent når $a = 5$ og $b \neq 7$.

Vi skal nå se på likningssystemet

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & & & - & z & = & b_1 \\
3x & + & y & - & z & = & b_2 \\
-x & + & y & + & 3z & = & b_3.
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Hvilke begrensninger har konstantene b_1, b_2 og b_3 hvis vi ønsker at systemet skal ha løsning? Vi starter med å sette opp totalmatrisen og utføre en Gauss-eliminasjon.

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 3 & 1 & -1 & b_2 \\ -1 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & (b_2 - 3b_1) \\ 0 & 1 & 2 & (b_3 + b_1) \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & (b_2 - 3b_1) \\ 0 & 0 & 0 & (4b_1 - b_2 + b_3) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Rangen til A er 2, mens rangen til $\tilde{A}$ er 2 hvis $4b_1 - b_2 + b_3 = 0$. Når $4b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$, er rangen til $\tilde{A} = 3$. Systemet 3.1 er derfor inkonsistent når $4b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$ og ubestemt når $4b_1 - b_2 + b_3 = 0$.

Vi sier at $4b_1 - b_2 + b_3 = 0$ er en **lineær sammenheng** mellom størrelsene b_1, b_2 og b_3.

3.3 Gauss- og Gauss-Jordan-eliminasjon

3.3.1 Gauss-eliminasjon

I dette delkapittelet skal vi gi en grundigere forklaring av Gauss-eliminasjon av en matrise A. Vi starter med matrisen A og følger følgende oppskrift.

Algoritme 3.1 (Gauss-eliminasjon). *Gauss-eliminasjon er en oppskrift som systematisk lager en trappematrise. Vi begynner med å få på plass rad $r = 1$.*

1. *Finn første søyle fra venstre som har element forskjellig fra null i rad r eller under.*
2. *Bytt eventuelt om på rader slik at dette elementet havner i rad r.*
3. *Adder passende multiplum av rad r til radene under rad r slik at alle elementene under elementet i trinn 1 blir null.*
4. *Hvis det finnes rader under rad r som ikke er nullrader øker r med en og vi går til trinn 1.*

3.3.2 Gauss-Jordan-eliminasjon

Gauss-eliminasjon og tilbakeinnsetting er tilstrekkelig for å løse et likningssystem. For andre anvendelser er det allikevel nyttig å gjøre om en matrise til det som kalles redusert trappeform.

Definisjon 3.7. En trappematrise er på **redusert trappeform** hvis

1. Alle pivotelementer = 1
2. Alle elementer i en pivotsøyle er 0 bortsett fra pivotelementet.

Vi vil også kalle en slik matrise for en redusert trappematrise

Eksempel 3.6 (Redusert trappeform). Følgende matrise er på redusert trappeform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Målet med en Gauss-Jordan-eliminasjon er å omforme en matrise til redusert trappematrise.

Definisjon 3.8 (Gauss-Jordan-eliminasjon).

1. Utfør Gauss-eliminasjon på matrisen.
2. Multipliser hver pivotrad med passende tall for at pivotelementet skal bli lik 1.
3. Sørg for at pivotelementene er de eneste elementene forskjellig fra null i hver pivotsøyle. Gjør dette ved å addere et passende multiplum av hver pivotrad til radene over.

Regneeksempel 3.4. Finn den reduserte trappematrisen til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi utfører Gauss-Jordan-eliminasjon på A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det finnes få regler for hvilken rekkefølge vi utfører radoperasjonene ved en Gauss-Jordan eliminasjon. Vi kunne for eksempel ha gjort som følgende:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mid : (-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/3 & -7/3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 3/7 \\ \mid \cdot 3/4 \end{array}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} + \\ (1/3) \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Vi ser at selv om vi bruker andre radoperasjoner enn i regneeksempelet så får vi samme resultat. Det kan vises at uansett hvordan vi velger å utføre Gauss-Jordan-eliminasjonen av en matrise A så kommer vi frem til samme resultat.

Setning 3.2 (Redusert trappematrise). *For hver matrise A finnes det én og bare en redusert trappematrise som er radekvivalent med A.*

3.4 Homogene systemer

I dette delkapittelet skal vi se på likninger der konstantleddene er lik null.

Definisjon 3.9. Et system der alle konstantleddene er lik null kalles et **homogent system**

Eksempel 3.7. Et eksempel på et homogent system er

$$
\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 0. \end{array}
$$

Vi ser at dette er homogent ved at alle høyresidene er 0.

En av løsningene til et homogent system finner vi uten noe arbeid. Dette er løsningen der alle de ukjente er lik 0. Vi kaller denne løsningen for **den trivielle løsningen**.

Setning 3.3. *Gitt et homogent system med n ukjente og koeffisientmatrise A. Da gjelder*

- *Hvis* $\operatorname{Rank} A = n$ *har systemet kun én løsning* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *(triviell løsning)*
- *Hvis* $\operatorname{Rank} A < n$ *har systemet uendelig mange løsninger (i tillegg til den trivielle).*

I følgende regneeksempel skal vi benytte setning 3.3 til å diskutere antall løsninger til et system der en av koeffisientene er gitt ved en parameter a.

Regneeksempel 3.5. Bestem for hvilke verdier av a, det følgende lineære systemet har én eller uendelig mange løsninger.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}$$

Løsning: Vi gjør Gauss-eliminasjon på koeffisientmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}.$$

Rangen til A er avhengig av om tredjeraden er en pivot- eller nullrad. Hvis $a = 5$ så er tredjeraden en nullrad. Da er $\operatorname{Rank} A = 2$. Ellers, når $a \neq 5$, er tredjeraden er pivot-rad. Da er $\operatorname{Rank} A = 3$.

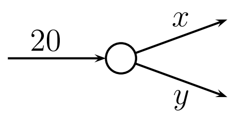
3.5 Anvendelser

3.5.1 Analyse av nettverk

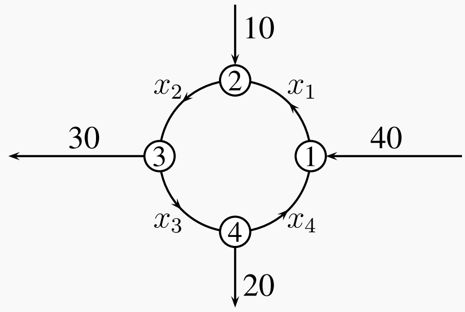
Et nettverk består av koblinger og linjer og brukes som modeller i mange områder. I trafikkplanlegging brukes nettverk til å modellere trafikken langs veier. Det er naturlig å bruke nettverk i analyse av elektriske kretser.

Felles for disse modellene er at like mye går inn i en kobling som ut av denne. Figur 3.2 viser en kobling og tre linjer. I denne figuren strømmer 20 enheter inn fra venstre. Da må det strømme 20 enheter ut også. Derfor er $x + y = 20$.

Regneeksempel 3.6. Sett opp et system av lineære likninger som representerer netverket som vist i figuren under og løs systemet.



Figur 3.2: En enkel kobling med tre linjer.



Løsning: Hver kobling gir en lineær likning. De fire likningene vi får er

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_4 + 40 && \text{Kobling 1}\\
x_2 &= x_1 + 10 && \text{Kobling 2}\\
x_3 + 30 &= x_2 && \text{Kobling 3}\\
x_4 + 20 &= x_3 && \text{Kobling 4}
\end{aligned}
$$

Vi skriver opp totalmatrisen for systemet og utfører Gauss-eliminasjon.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 40 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -20 \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -20 \end{bmatrix}
$$

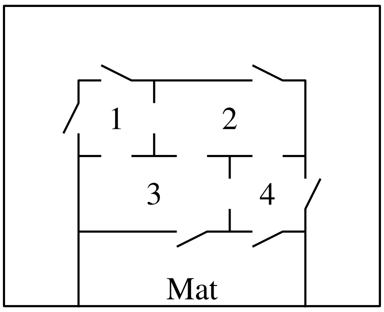
$$
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -20 \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{3.3}
$$

Vi setter $x_4 = t$ der t er en parameter. Da er

$$
\begin{aligned}
&x_1 = t + 40, \quad x_2 = t + 50,\\
&x_3 = t + 20, \quad x_4 = t.
\end{aligned}
$$

3.5.2 Sannsynlighetsregning

En mus går i en labyrint som vist i figur 3.3. I hvert rom er det til sammen 4 dører og åpninger. Musa kan ikke komme inn igjen hvis den går ut igjennom en dør. I hvert rom er det lik sannsynlighet for hvilken åpning eller dør musa velger. Hva er sannsynligheten for at musa lykkes, (det vil si at den kommer til maten), i hvert av rommene? For å svare på spørsmålet setter vi opp følgende likninger. Vi lar p_i være sannsynligheten for å lykkes når musa er i rom i. Vi har



Figur 3.3: Mus i labyrint.

da følgende likninger

$$\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{1}{4}(p_2+p_3) \\ p_2 &= \tfrac{1}{4}(p_1+p_3+p_4) \\ p_3 &= \tfrac{1}{4}(1+p_1+p_2+p_4) \\ p_4 &= \tfrac{1}{4}(1+p_2+p_3). \end{aligned}$$

Vi multipliserer hver likning med 4 og samler alle lineære ledd på venstre side.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4p_1 & - & p_2 & - & p_3 & & & = & 0 \\ -p_1 & + & 4p_2 & - & p_3 & - & p_4 & = & 0 \\ -p_1 & - & p_2 & + & 4p_3 & - & p_4 & = & 1 \\ & & -p_2 & - & p_3 & + & 4p_4 & = & 1 \end{array}$$

Vi setter opp totalmatrisen, bytter om på rader og fullfører Gauss-eliminasjonen.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & -24 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & -24 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Vi bruker tilbakeinnsetting og får $p_4 = \frac{7}{16}$, $p_3 = \frac{-1+24p_4}{20} = \frac{19}{40}$, $p_2 = \frac{1+p_3-4p_4}{-1} = \frac{11}{40}$ og $p_1 = \frac{1+p_2-4p_3+p_4}{-1} = \frac{3}{16}$. Løsningen er

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (18.75\%, 27.5\%, 47.5\%, 43.75\%).$$

3.6 Noen spesielle matriser

3.6.1 Kvadratiske matriser

Matriser med like mange søyler som rader spiller en viktig rolle i både teori og anvendelser.

Definisjon 3.10 (Kvadratisk matrise). En matrise er **kvadratisk** av orden n hvis den har n rader og n søyler.

Eksempel 3.8. Følgende matriser er kvadratiske.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Den andre matrisen i eksempel 3.8 er et eksempel på en identitetsmatrise. I kapittel 4 kommer det mer om identitetsmatriser.

Definisjon 3.11. Elementene $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ i en kvadratisk matrise A kalles for **hoveddiagonalen til A.**

Eksempel 3.9. I matrisen under har vi merket elementene i hoveddiagonalen med asterisk $*$.

$$\begin{bmatrix} 2^* & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0^* & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1^* & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1^* \end{bmatrix}$$

Definisjon 3.12. En kvadratisk matrise er en

diagonalmatrise hvis $a_{ij} = 0$ når $i \neq j$

øvre triangulær hvis alle elementene under hoveddiagonalen er 0

nedre triangulær hvis alle elementene over hoveddiagonalen er 0

Eksempel 3.10. Matrisene

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ og } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

er henholdsvis en diagonalmatrise, en øvre triangulær matrise og en nedre triangulær matrise.

Oppgaver fra kapittel 3

1. Hvilke av matrisene under er på trappeform. Er matrisene på trappeform også på redusert trappeform? Begrunn svaret.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Forklar hvorfor matrisene i punkt a) til c) er radekvivalente.

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Finn rangen til matrisene

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

   d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

   e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

   f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. Et system har 21 ukjente og 19 likninger. Rangen til totalmatrisen er 19 mens rangen til koeffisientmatrisen er 18. Hvor mange løsninger har systemet.

5. Prøv å finne et tredjegradspolynom igjennom punktene $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ og $(3,6)$. Hva som skjer og hvorfor skjer det?

6. Avgjør hvilke matriser av matrisene under som er øvre traingulære, nedre triangulære eller diagonale.

   $a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $c)$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $d)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $e)$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $f)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $g)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $h)$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. Løs de lineære likningssystemene. Bruk Gauss-eliminasjon og tilbakeinnsetting.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 &= -2 \\ - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

8. For hvilke verdier av a og b er systemene under bestemt, ubestemt eller selvmotsigende.

a)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x + y + az &= b \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ x - y - z &= 1 \\ 4x - y + az &= b \end{aligned}$$

9. Finn en lineær sammenheng mellom a, b og c for systemene

a)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= a \\ x - y + 2z &= b \\ 2x + y + z &= c \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= a \\ x - y - 2z &= b \\ x + 3y + z &= c \end{aligned}$$

10. For hvilke verdier av a er de homogene systemene under bestemt eller ubestemt.

a)
$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ -2x - 3y + az &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2x + 4y + az &= 0 \end{aligned}$$

11. For hvilke verdier av a, b, c og d er følgende matriser like?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (d+c) & (d-c) \\ d & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & (2+b) & 1 \\ 0 & 2a & 2 \\ (a+1) & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Utfør Gauss-Jordan-eliminasjon på matrisene under

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

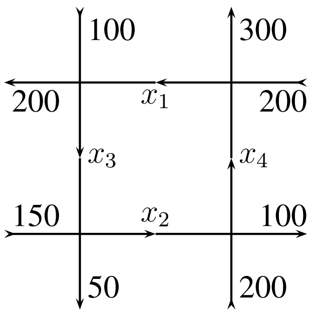
13. Vis at matrisene i a)-c) er radekvivalente med enhetsmatrisen med 3×3 elementer.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

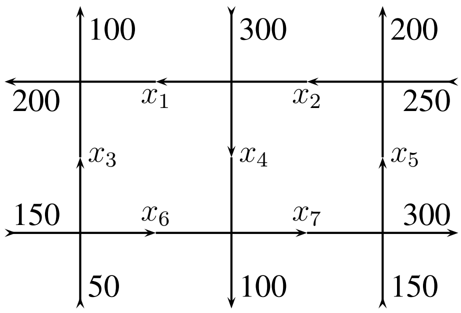
b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

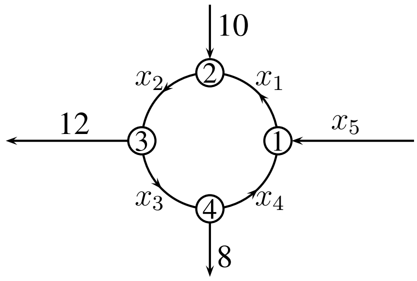
14. I en by er det fire enveiskjørte gater som vist i figuren under. Trafikken målt i biler per time er oppgitt som variable eller verdier. Sett opp et lineært system for modellen. Finn alle løsninger av systemet.



15. I en by er det fem enveiskjørte gater som vist i figuren under. Trafikken målt i biler per time er oppgitt som variable eller verdier. Sett opp et lineært system for modellen. Finn alle løsninger av systemet.

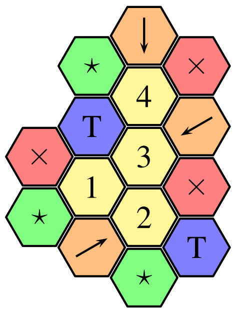


16. Figuren under viser en rundkjøring med enveiskjørte gater inn og ut. Tallene angir antall biler som passerer i minuttet. Sett opp et lineært system med de ukjente størrelsene x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Løs systemet.



17. Reglene for spillet i figuren under er som følgende. Du starter på et av de gule feltene. En terning med seks sider brukes til angi hvilken retning du går. Du går alltid ett felt i hver omgang. Havner du på et grønt felt har du vunnet. Om du lander på et rødt felt har du tapt. På det oransje feltet skal du umiddelbart til nabofeltet i den retningen pilen viser. På et blå felt tele-porteres du til et vilkårlig gult felt.

Hva er sannsynligheten for seier for hvert av de gule feltene.



18. Vis at $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er radekvivalent med identitetsmatrisen I med 2×2 elementer hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$.

KAPITTEL 4

MATRISEOPERASJONER

Figur 4.1: Nevrale nettverk går ut på å etterlikne sentralnervesystemer hos levende organismer slik som hos denne fluen. I nevrale nettverk spiller lineær algebra en avgjørende rolle.

4.1 Innledning

Matriser og tall har mye til felles. Blant annet kan vi regne med både tall og matriser. For reelle tall har vi flere regneoperasjoner. Blant de er addisjon $a + b$ og multiplikasjon $a \cdot b$. For matriser definerer vi også operasjoner. Vi kan addere og subtrahere to matriser av samme form. En matrise kan multipliseres med et tall og i enkelte tilfeller kan vi også multiplisere matriser. Vi kan trekke matriser fra hverandre og vi har også noe som ligner på divisjon. Addisjon, multiplikasjon, subtraksjon og så videre kaller vi for **regneoperasjoner** eller av og til bare operasjoner.

4.2 Addisjon av matriser

4.2.1 Addisjon

En av de enkleste regneoperasjonen å for matriser er addisjon.

Definisjon 4.1 (Addisjon av matriser). To matriser av samme form kan adderes. Hvis A og B er en $m \times n$-matriser. Så er summen av de lik $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

For 3×2-matriser blir dette

$$A + B = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \\ (a_{31} + b_{31}) & (a_{32} + b_{32}) \end{bmatrix}$$

Eksempel 4.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 10 & 16 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

Selv om addisjon er enkelt å forstå er det viktig å få meg seg betingelsen om at begge matrisene må ha samme form. Matriser med forskjellig form kan ikke adderes. For eksempel har

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

ingen mening.

Om vi adderer en matrise A med seg selv får vi $A + A = [(a_{ij} + a_{ij})] = [2a_{ij}]$. Addisjon av 3 kopier av matrisen A gir $(A + A) + A = [(3a_{ij})]$. For å slippe å skrive for eksempel $A + A + A + A + A + A$, (addisjonen av 6 kopier av A) har man bestemt at vi kan skrive $6A$ i stedet. Det betyr at $nA = [(n\, a_{ij})]$ er det samme som n kopier av A addert sammen.

4.2.2 Multiplikasjon av matrise med skalar.

Med en **skalar** menes et reelt tall. For eksempel er 2, 1, π og 1.4512 skalarer. Vi bruker små latinske bokstaver i kursiv for skalarer. Multiplikasjon med en skalar er en regneoperasjon som involverer et tall og en matrise.

Definisjon 4.2 (Skalarmultiplikasjon). En matrise B multiplisert med skalaren a er matrisen

$$a\, B = [(a\, b_{ij})]$$

For eksempel for en 4×3-matrise $B = [b_{ij}]$ har vi

$$a\,B = \begin{bmatrix} (a\,b_{11}) & (a\,b_{12}) & (a\,b_{13}) \\ (a\,b_{21}) & (a\,b_{22}) & (a\,b_{23}) \\ (a\,b_{31}) & (a\,b_{32}) & (a\,b_{33}) \\ (a\,b_{41}) & (a\,b_{42}) & (a\,b_{43}) \end{bmatrix}$$

Eksempel 4.2. La $a = 3$ og la $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$. Da er $a\,B = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-4) & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$.

4.2.3 Negasjon og subtraksjon av matriser

Negasjon av en matrise fås ved å multiplisere med skalaren -1. Hvis A er en matrise så skriver vi $(-1)A$. For eksempel hvis $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ så er $-A = (-1)A = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Subtraksjon av matriser defineres ved

$$A - B = A + (-1)B.$$

Det er ikke noe i veien for å definere subtraksjon som

$$A - B = [(a_{ij} - b_{ij})].$$

4.3 Multiplikasjon

4.3.1 Multiplikasjon av en matrise med en søylevektor

Multiplikasjon av matriser er litt mer omstendelig enn addisjon. Vi kan hente motivasjon for multiplikasjon fra lineære systemer. Et lineært system kan skrives på formen

$$\begin{bmatrix} (a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n) \\ (a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n) \\ & & & & \cdots & & \\ (a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Venstresiden velger vi å skrive som

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Eller på kortform $A\mathbf{x}$. Likningssystemet kan derfor skrives som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Legg merke til at A er en $m \times n$ matrise og at $\mathbf{x}$ er en $n \times 1$ matrise eller det som kalles en søylevektor. Resultatet blir en $m \times 1$ matrise. Høyresiden $\mathbf{b}$ er også en $m \times 1$ matrise.

Eksempel 4.3. La $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ og la $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Da er

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)) \\ (1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Multiplikasjon av matriser.

Søylene i en $m \times n$-matrise B kan betraktes som n søylevektorer.

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

Vi bruker dette til å definere matrisemultiplikasjon.

Definisjon 4.3. La A være en $m \times p$-matrise og la $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ være en $p \times n$-matrise. Da er produktet av A og B definert ved $m \times n$-matrisen

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

Vi kan også skrive matriseproduktet med formelen

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

I summenotasjon kan vi skrive

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Legg merke til at en $m \times p_1$-matrise bare kan multipliseres med en $p_2 \times n$ matrise hvis $p_1 = p_2$. Resultatet vil alltid være en $m \times n$-matrise.

Eksempel 4.4. For matrisene $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ lar seg ikke multiplisere fordi antall søyler i A er forskjelig fra antall rader i B.

Matrisene $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ lar seg multiplisere fordi antall søyler i A er lik antall rader i B. Produktet er

$$AB = \begin{bmatrix} (3\cdot 4 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 5) & (3\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 2) \\ (4\cdot 4 + 3\cdot(-2) + 7\cdot 5) & (4\cdot(-1) + 3\cdot(-2) + 7\cdot 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (12 + 0 - 5) & (-3 + 0 - 2) \\ (16 - 6 + 35) & (-4 - 6 + 14) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 45 & 4 \end{bmatrix}$$

4.3.3 Skjema for matrisemultiplikasjon

I produktet AB vil (i, j)-elementet være produktet av rad i i matrisen A multiplisert med søyle j i matrise B. Skjematisk kan vi skrive det opp som:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} | \\ \mathbf{b}_j \\ | \end{array} \\ \hline & \downarrow \\ - \quad \mathbf{a}_i \quad - & \rightarrow \quad \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j \end{array}$$

Et nyttig skjema for multiplikasjon av matriser er beskrevet i følgende eksempel

Eksempel 4.5. Vi vil multiplisere matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vi setter opp skjemaet $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$:

$$\begin{array}{c||c} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

4.3.4 Regneregler med matriser

Rekkefølgen av operasjoner i et uttrykk der flere operasjoner brukes er som for regning med vanlige tall. Multiplikasjon utføres før addisjon. For eksempel for å regne ut $A + BC$ så multipliseres B med C før produktet legges til A.

Rekkefølgen av faktorene i utregning av produkter er ikke likegyldig. For eksempel hvis $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ så er $AB = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ og $BA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. Det betyr at AB ikke er BA i dette tilfellet. Som oftest er $AB \neq BA$. Følgende regneregler for matriser sier hvilke regneregler som gjelder for matriser.

Setning 4.1. *La A, B og C være matriser slik at multiplikasjonene og addisjonene i reglene har mening og la a og b være vilkårlige reelle tall. Da gjelder*

1. $A + B = B + A$, *(**Kommutativ lov**)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$, *(**Assosiativ lov** for addisjon)*
3. $c(A + B) = cA + cB$, *(**Distributiv lov**)*
4. $(a + b)C = aC + bC$, *(**Distributiv lov**)*
5. $A(B + C) = AB + AC$, *(**Distributiv lov**)*
6. $(A + B)C = AC + BC$, *(**Distributiv lov**)*
7. $A(BC) = (AB)C$, *(**Assosiativ lov** for multiplikasjon)*
8. $A(bC) = b(AC)$
9. $(aB)C = a(BC)$
10. $a(bC) = (ab)C$

Punktene 5, 6 og 7 i setningen er vanskeligst å vise. De øvrige 7 punktene er enkle å forstå. Å lære seg disse reglene er egentlig ganske lurt fordi de også gjelder for vanlig algebra. Husk at $AB \neq BA$ i nesten alle tilfeller når A og B er matriser.

4.4 Invers

4.4.1 Identitetsmatriser og nullmatriser

En **nullmatrise** er en matrise med alle elementer lik 0. En nullmatrise skrives 0.

Eksempel 4.6. Følgende matriser er nullmatriser

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er verdt å merke seg at ingen av disse matrisene er like da de har forskjellig størrelse.

Setning 4.2. *Vi har følgende regneregler for nullmatriser.*

11. $0 + A = A + 0 = A$

12. $0A = 0$

13. $A0 = 0$

Legg merke til at nullmatriser spiller den samme rollen i matriseregningen som tallet null spiller regning med tall. Det neste begrepet er identitetsmatrisen.

Definisjon 4.4. En diagonalmatrise med bare 1-ere på diagonalen kalles en **identitetsmatrise**.

Selv om matriser av forskjellig størrelse er forskjellige så vil vi bruke samme symbol I for alle identitetsmatriser.

Eksempel 4.7. Følgende matriser er identitetsmatriser

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Identitetsmatriser har svært enkle regneregler for multiplikasjon.

Setning 4.3. *Hvis A er en matrise og I er en passende identitetsmatrise så er*

14. $IA = A$

15. $AI = A$

Legg merke til følgende hvis A er en $m \times n$ matrise så må I være en $m \times m$ matrise for at IA skal ha mening. AI har bare mening hvis I er en $n \times n$ matrise. En identitetsmatrise har mye av den samme rollen for matriser som tallet 1 har for tall.

4.4.2 Elementære matriser

Det er en sammenheng mellom matrisemultiplikasjon og radoperasjonene i en Gausseliminasjon. Denne sammenhengen er beskrevet ved hjelp av såkalte elementære matriser. Felles for alle elementære matriser er at de er kvadratiske matriser.

Elementære matriser finnes i 3 typer, en for hver type radoperasjon.

- Multiplikasjon av rad i med skalaren a forskjellig fra 0 er knyttet til den elementære matrisen
$$E_i(a) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & a & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{Rad } i.$$
Denne matrisen er en diagonal matrise med 1 på alle elementer på hoveddiagonale bortsett fra i rad i hvor elementet er lik a. Multiplikasjon av rad i i matrisen A kan skrives som
$$E_i(a)A.$$

- Ombytte av rad i og j knyttes til matrisen
$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccc} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \text{i} \\ \\ \text{j} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & i & \quad\quad & j & \quad \end{array} & \end{array}$$
der elementene på plass (i,i) og plass (j,j) er lik 0, elementene på plass (i,j) og plass (j,i) er lik 1, resten av elementene på hoveddiagonalen er lik 1 og resten av elementene er 0. Ombytting av rad i og j i matrisen A gir som resultat matrisen
$$E_{i,j}A.$$

- Addering av rad i multiplisert med a til rad j er knyttet til matrisen
$$E_{i,j}(a) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccc} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \text{i} \\ \\ \text{j} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & i & \quad\quad & j & \quad \end{array} & \end{array}$$
der elementet på plass (j,i) er lik a, alle elementene på hoveddiagonalen er lik 1 og resten av elementene er 0. Addering av rad i multiplisert med a til rad j i matrisen A gir matrisen
$$E_{i,j}(a)A.$$

4.4.3 Den inverse av en matrise

Et system av likninger kan skrives på matriseform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der A er koeffisientmatrisen, $\mathbf{x}$ er vektoren av ukjente og $\mathbf{b}$ er vektoren av konstantledd i det lineære systemet. Legg merke til at på denne formen likner systemet på $ax = b$. Ved å dele med a på begge sider får vi $x = b/a$. For systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan man bli fristet til å gjøre noe liknende, men dessverre vil det ikke alltid fungere. Inverse matriser er historien om når det fungerer.

Definisjon 4.5. En matrise A kalles **inverterbar** hvis det finnes en matrise B slik at $AB = I$ og $BA = I$. I så fall kalles B for den inverse av A og vi skriver denne som $B = A^{-1}$.

Vi leser A^{-1} som «a-invers».

Setning 4.4. *Hvis A er inverterbar så finnes det en og bare en invers A^{-1} av A.*

Bevis. La B_1 og B_2 være inverser av A. Da har vi at $AB_1 = I$. Multipliserer vi med B_2 fra venstre på begge sider av likhetstegnet får vi $B_2(AB_1) = B_2$. Men siden multiplikasjon tilfredsstiller $A(BC) = (AB)C$ så har vi $(B_2A)B_1 = B_2$. Fordi B_2 er en invers av A er $B_2A = I$, og derfor har vi at $IB_1 = B_2$. Følgelig er $B_1 = B_2$. □

Setning 4.5. *En kvadratisk matrise er inverterbar hvis og bare hvis den har full rang.*

Eksempel 4.8. Alle elementære matriser er inverterbare.

1. Den inverse av $E_i(a)$ er $E_i(1/a)$.
2. Den inverse av $E_{i,j}$ er $E_{i,j}$.
3. Den inverse av $E_{i,j}(a)$ er $E_{i,j}(-a)$.

Fra definisjonen av invers får vi følgende metode for å finne den inverse. Identitetsmatrisen I kan skrives som $I = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n\end{bmatrix}$ der

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

Problemet med å finne en invers går ut på å finne X i matriselikningen $AX = I$. Hvis vi setter $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ så får vi

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = I.$$

Med andre ord kan vi finne X ved å løse hvert av de n systemene

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Felles for hvert system er koeffisientmatrisen A. System i har totalmatrise $\tilde{A}_i = [A|\mathbf{e}_i]$. Ved løsning av disse gjøres nøyaktig de samme radoperasjonene. Vi effektiviserer ved å bruke en **utvidet totalmatrise**

$$\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}.$$

Gauss-Jordaneliminasjon viser seg å gi

$$[I|A^{-1}].$$

Regneeksempel 4.1. Vi skal finne den inverse til $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Løsning: Vi setter opp den utvidede totalmatrisen for inverteringsproblemet og bruker Gauss-Jordan eliminasjon

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & -3 \end{bmatrix} \mid \cdot (-1/10) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Følgelig kan vi lese av den inverse av A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Metoden for å finne den inverse er like god for alle kvadratiske matriser. Neste eksempel illustrerer dette.

Regneeksempel 4.2. Bruk Gauss-Jordan eliminasjon på $[A|I]$ til å finne den inverse til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi setter opp den utvidede totalmatrisen og utfører Gauss-Jordan eliminasjon.

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [I|A^{-1}].$$

Følgelig er den inverse av A lik

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ -7 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Følgende regneregler gjelder for inverse matriser

Setning 4.6. *Hvis A og B er inverterbare matriser så gjelder*

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(aB)^{-1} = \frac{1}{a}B^{-1}$

Bevis. Vi bruker assosiativ lov fra setning 4.1.
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1}) = (AI)A^{-1}) = AA^{-1}) = I$.

Vi bruker regel 8, 9 og 10 fra setning 4.1. $(aB)(\frac{1}{a}B^{-1}) = \frac{1}{a}((aB)B^{-1}) = \frac{1}{a}(a(BB^{-1})) = (\frac{1}{a}a)(BB^{-1}) = 1I = I$. □

Regneeksempel 4.3. Løs likningen $AX = C$ der $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Løsning: Vi finner først A^{-1}.

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mid \cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi kan nå bruke matrisealgebra på likningen. Vi multipliserer med A^{-1} fra venstre og får

$$X = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

4.5 Transponering

Den transponerte av en matrise finner vi ved å gjøre radene om til søyler. Formelt definerer vi transponering som følgende.

Definisjon 4.6. La A være en $m \times n$-matrise. **Den transponerte** av A er $n \times m$-matrisen $A^T = [a_{ji}]$. Elementet på plass (i, j) i matrisen A^T er a_{ji}.

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

I praksis transponerer vi en matrise ved å lese den rad for rad som vi leser en bok og skrive ned elementene i den transponerte matrisen søyle for søyle slik som i følgende eksempel.

Eksempel 4.9. Den transponerte av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

er

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

I sammensatte uttrykk som for eksempel $A + B^T$ og AB^T skal transponeringen utføres før addisjon og multiplikasjon. Følgende regneregler gjelder for transponering.

Setning 4.7. *Hvis A og B er matriser der multiplikasjonene og addisjonene har mening så gjelder*

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(aB)^T = a(B^T)$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Legg spesielt merke til den andre regneregelen i setning 4.7.

Regnereglene i setning 4.7, setning 4.1 og setning 4.6 kan brukes til å løse likninger der en matrise er den ukjente. For eksempel løser vi likningen $XA = B$ ved å multiplisere med A^{-1}

fra høyre på begge sider av likhetstegnet. Da får vi svaret $X = BA^{-1}$. Likningen $X^T A^{-1} = B$ løses ved å multiplisere med A fra høyre på begge sider av ligningen og transponere på begge sider. Løsningen er da $X = A^T B^T$. Vi viser dette med et større regneeksempel.

Regneeksempel 4.4. La A, B og X være inverterbare matriser. Løs likningen

$$(AX)^T = 3BA^T + B^{-1}A$$

Vi transponerer på begge sider for å bli kvitt transponeringen av uttrykket på høyre side, (vi bruker regel 1 på høyre side).

$$((AX)^T)^T = (3BA^T)^T + (B^{-1}A)^T$$

Vi bruker regel 3 på venstre side og regel 2 i begge ledd på høyre side.

$$AX = (A^T)^T(3B)^T + A^T(B^{-1})^T$$

Vi forenkler ved å bruke regel 3 og 4

$$AX = 3AB^T + A^T(B^{-1})^T$$

Multipliser vi med A^{-1} fra venstre får vi

$$A^{-1}(AX) = 3A^{-1}(AB^T) + A^{-1}A^T(B^{-1})^T$$

$$\begin{aligned}
(A^{-1}A)X &= 3(A^{-1}A)B^T + A^{-1}A^T(B^{-1})^T \\
IX &= 3IB^T + A^{-1}A^T(B^{-1})^T \\
X &= 3B^T + A^{-1}A^T(B^{-1})^T
\end{aligned}$$

4.5.1 Symmetriske matriser

En symmetrisk matrise er en spesiell kvadratisk matrise der elementene tilfredsstiller likningen $a_{ij} = a_{ji}$. Vi kan si at elementene i en symmetrisk matrise er speilet om hovedaksen.

Definisjon 4.7. En kvadratisk matrise kalles **symmetrisk** hvis

$$A^T = A.$$

Eksempel 4.10. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

er symmetrisk.

Legg merke til at om B er en vilkårlig matrise så er $(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$.

Setning 4.8. *For en vilkårlig $m \times n$-matrise B er*

$$B^T B, \text{ og } BB^T$$

symmetriske matriser.

4.5.2 Ortogonale matriser

Definisjon 4.8. En matrise A kalles **ortogonal** hvis $A^T = A^{-1}$

Vi kan sjekke om en matrise er ortogonal ved å regne ut $A^T A$. Matrisen A er ortogonal hvis $A^T A = I$.

Eksempel 4.11 (en ortogonal 2×2-matrise). Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

er ortogonal fordi $A^T A = I$.

Eksempel 4.12 (en ortogonal 3×3-matrise). Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{4}{5} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & -\frac{3}{5} & \frac{16}{25} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

er ortogonal fordi $A^T A = I$.

4.6 Heltallspotenser av matriser

Heltallspotenser av matriser defineres ved hjelp av gjentatte multiplikasjoner.

$$A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \quad \ldots$$

For store verdier av n vil direkte utregning av A^n være arbeidskrevende bortsett fra helt spesielle matriser A. Hvis D er en diagonal matrise vil D^n være lett å finne.

Setning 4.9. *La D være en diagonal $m \times m$-matrise med elementene $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ på hoveddiagonalen. Da er D^n $m \times m$-matrisen med elementene $a_{11}^n, a_{22}^n, \ldots, a_{mm}^n$ på hoveddiagonalen.*

Eksempel 4.13. Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Da er $A^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}$.

Oppgaver fra kapittel 4

1. Regn ut $cA + dB$ i punktene når det er mulig.

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $c = 3$, $d = 2$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $c = 2$, $d = 3$.

   c) $A = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $c = -1$, $d = 2$.

   d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $c = 1$, $d = 3$.

2. La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   Utfør matriseoperasjonene der det er mulig. Forklar hvorfor hvis det ikke er mulig.

   a) AB b) $CB + D$
   c) $CB + A$ d) $BC + A$
   e) $CB + D$ f) BB^T
   g) $B^T B$ h) $DC + B^T$

3. Regn ut AB og BA når det er mulig i punktene a)–e). Forklar hvorfor når det ikke er mulig.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

e) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,
$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 8 & 11 \end{bmatrix}$.

4. Regn ut de inverse til 2×2 matrisene hvis det er mulig

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. Regn ut de inverse til 3×3 matrisene

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Regn ut de inverse til 4×4 matrisene

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7. Finn den transponerte til hver av matrisene i punkt a)–d).

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

La A, B og X være inverterbare matriser. Løs likningene for X.

8. $XA = B$

9. $(XA)^T = B$

10. $(A^{-1}X)^T = B$

11. $(AX^{-1})^T = B^{-1}A^T$

12. Figuren under viser et kommunikasjonsnettverk. Pilene viser hvilken vei en beskjed kan sendes. Nettverket kan beskrives ved hjelp av matrisen $A = [a_{ij}]$ der $a_{ij} = 1$ hvis det går en direkte pil fra node i til node j og $a_{ij} = 0$ ellers.

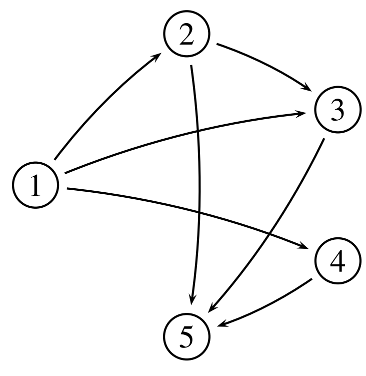
a) Skriv opp matrisen A.

b) Beregn matrisen A^2. Hva beskriver A^2?

c) Beregn også A^3.

d) Regn ut $K = A + A^2 + A^3$. Forklar hva verdien til element $(K)_{1,5}$ betyr.

e) Forklar uten å regne ut hvorfor $A^4 = 0$.



13. La $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestem alle x, y, z, w slik at $AB = BA$. (Vi sier at A og B kommuterer når $AB = BA$.)

14. La 'A'=1, 'B'=2, 'C'=3, ... , 'Å'=29, og bruk '#'=30 som mellomrom. Skriv en kort melding med store bokstaver, for eksempel 'LINEÆR#ALGEBRA#ER#GØY' og kod om til tall. I dette tilfellet blir det 12, 9, 14, 5, 27, 18, 30, 1, 12, 7, 5, 2, 18, 1, 30, 5, 18, 30, 7, 28, 25. Skriv tallene inn i en matrise med tre rader. I eksempelet blir det

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 14 & 5 & 27 & 18 & 30 \\ 1 & 12 & 7 & 5 & 2 & 18 & 1 \\ 30 & 5 & 18 & 30 & 7 & 28 & 25 \end{bmatrix}$$

Regn ut $N = BM$ der

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

og bytt med en medstudent. Du dekoder meldingen ved å regne ut $M = AN$ der A er den inverse av B. Den inverse av B er

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. a) Finn den inverse A^{-1} av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Bruk A^{-1} som du fant i oppgave a) til å løse systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & 4z & = & -3 \\ -x & + & 5y & - & 4z & = & 2 \\ -x & + & 5y & - & 5z & = & 4 \end{array}$$

c) Bruk A^{-1} som du fant i oppgave a) til å løse systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ -4x & + & 5y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & - & 4y & - & 5z & = & -1 \end{array}$$

(Hint: Legg merke til at koeffisient matrisen er den transponerte av A.)

16. Avgjør hvilke av matrisene som er ortogonale

a) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

17. Finn alle 2×2-matriser som er både symmetriske og ortogonale.

18. Anta at A er en kvadratisk matrise med egenskapen $A^2 = 0$. Bevis at $A - I$ er inverterbar.

19. Anta at A er en kvadratisk matrise med egenskapen $A^3 = 0$. Bevis at $A - I$ er inverterbar, (Finn den inverse matrisen til $A - I$.)

20. Bevis at produktet av to diagonale matriser er en diagonal matrise.

21. Vis at om B er en matrise så er $B\,B^T$ en symmetrisk matrise.

22. Vis at om A og B er diagonale $m \times m$-matriser med henholdsvis elementene $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ og $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ på hoveddiagonalene så er AB lik diagonalmatrisen

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm}b_{mm} \end{bmatrix}$$

23. Anta at A og B kommuterer, dvs at $AB = BA$. Bevis at de transponerte matrisene A^T og B^T også kommuterer. (Hint: Bruk regel 2 i setning 4.7 på side 72.)

KAPITTEL 5

VEKTORER I $\mathbb{R}^N$

Figur 5.1: Vektorer kan brukes til å angi bevegelse og endring. I tillegg finnes svært mange andre anvendelser av vektorer.

5.1 Introduksjon til vektorer

5.1.1 Vektorer og søylevektorer

Symbolet $\mathbb{R}$ står for mengden av reelle tall, også kjent som tallene på tallinjen.[1] Med $\mathbb{R}^n$ mener vi mengden av alle ordnede sekvenser av n reelle tall, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tallene x_1, x_2, og

[1]En presis definisjon av reelle tall kan du lese om i mer avanserte lærebøker.

så videre kalles for koordinater. Radvektorer og søylevektorer er eksempler på slike ordnede sekvenser. Det er bare framstillingen som skiller disse fra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og vi vil se på både mengden av alle $1 \times n$-matriser og mengden av alle $n \times 1$-matriser som kopier av $\mathbb{R}^n$. Vi kaller også $\mathbb{R}^n$ for **vektorrommet** $\mathbb{R}^n$. Vektoren $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ kalles for **nullvektoren**.

Definisjon 5.1. **Addisjon av vektorer** defineres ved

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Det er greit å legge merke til at vektorer bare kan legges sammen hvis de har like menge elementer. Vektorer legges sammen akkurat som matriser. For eksempel er $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Eksempel 5.1. La $\mathbf{a} = (1, -3, 5)$ og $\mathbf{b} = (2, 1, -6)$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$. Da er $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1 + 2, -3 + 1, 5 + (-6)) = (3, -2, -1)$.

Om vi legger sammen to like vektorer får vi

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n)$$

Vi kan også legge sammen tre like vektorer.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (3x_1, 3x_2, \ldots, 3x_n)$$

Venstresiden kan vi skrive som $3(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definisjon 5.2. For en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og en reell skalar[2] c definerer vi **skalarmultiplikasjonen**

$$c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n).$$

Spesielt skriver vi $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.

Eksempel 5.2. Gitt vektoren $\mathbf{a} = (4, 2, 1, -5)$ i $\mathbb{R}^4$. Da er

$$3\,\mathbf{a} = (3 \cdot 4, 3 \cdot 2, 3 \cdot 1, 3 \cdot (-5)) = (12, 6, 3, -15).$$

Det er nyttig å kjenne hvilke regneregler som gjelder for vektorer.

[2]Vi bruker ordet **skalar** for reelle tall som ganges med en vektor.

Setning 5.1. *Hvis* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *er vilkårlig valgte vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *og* a *og* b *er vilkårlig valgte reelle skalarer så er følgende påstander sanne.*

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *er med i* $\mathbb{R}^n$, *(*$\mathbb{R}^n$ *er* ***lukket under addisjon****)*
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, *(**Kommutativ lov**)*
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{v}+(\mathbf{u}+\mathbf{w})$, *(**Assosiativ lov**)*
4. $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, *(Vektoren* $\mathbf{0}$ *kalles også for en* ***additiv enhet****)*
5. $-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$, *(*$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ *har en* ***additiv invers****)*
6. $a\mathbf{u}$ *er med i* $\mathbb{R}^n$, *(*$\mathbb{R}^n$ *er* ***lukket under skalarmultiplikasjon****)*
7. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$
8. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$, *(**Distributiv lov**)*
9. $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$, *(**Distributiv lov**)*
10. $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$
11. $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$

Påstand nr 11 er egentlig overflødig da den følger fra de 10 øvrige egenskapene:

$$0\mathbf{u}=(-1+1)\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}+1\mathbf{u}=-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{0}.$$

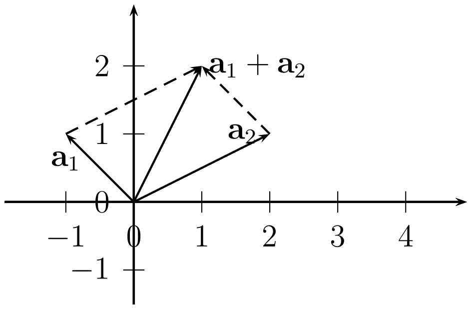
Ingen av de øvrige 10 påstandene i setning 5.1 følger fra de øvrige 9 påstandene.

Setning 5.2. *Hvis* $\mathbf{u}$ *er en vilkårlig vektor i* $\mathbb{R}^n$ *så er*

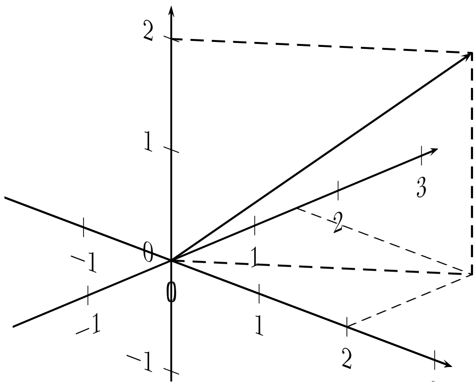
$$0\mathbf{u}=\mathbf{0}.$$

5.1.2 Vektorer i planet og $\mathbb{R}^2$

Planet utstyrt med et kartesisk koordinatsystem er det fremste eksempelet på vektorrommet $\mathbb{R}^2$. Hvert punkt har et par av koordinater (x_1, x_2). I figur 5.2 har vi tegnet et slikt koordinatsystem i planet. En **vektor i planet** er entydig gitt ved koordinatene til spissen til vektoren når den andre enden er plassert i origo. I figur 5.2 har vi tegnet to vektorer $\mathbf{a}_1=(-1,1)$ og $\mathbf{a}_2=(2,1)$.[3] Vi har også tegnet inn summen av disse vektorene, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=(1,2)$.



Figur 5.2: Vektorer i planet utstyrt med et kartesisk koordinatsystem.



Figur 5.3: Vektorer i rommet utstyrt med kartesiske koordinater

5.1.3 Vektorer i rommet og $\mathbb{R}^3$

På samme måte som tallpar representerer vektorer i planet kan talltripler representere vektorer i rommet. Med kartesiske koordinater representerer vi en vektor med koordinatene til spissen av vektoren. I figur 5.3 har vi tegnet to vektorer $\mathbf{a}_1 = (1.7, -0.7, 3.4)$ og $\mathbf{a}_2 = (1.5, 2.7, 2.4)$.

5.2 Lineære systemer på vektorform

Vektorer er ikke begrenset til formalismen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som brukes i delkapittel 5.1. En vektor kan like gjerne skrives som en radvektor $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ eller en søylevektor $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$.

5.2.1 Tre fremstillinger av samme system

Vi har sett at det lineære likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} -u & + & 2v & = & 5 \\ u & + & v & = & 1 \end{array} \tag{5.1}$$

kan skrives om på matriseform

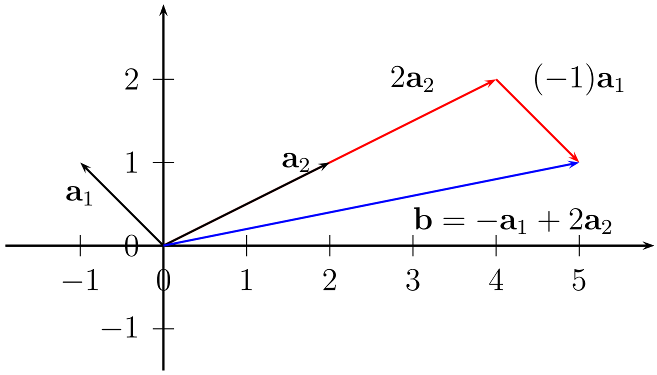
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

[3]Transponering av radvektorer letter skrivingen av søylevektorer i tekst.

Systemet kan også skrives på vektorform

$$u\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

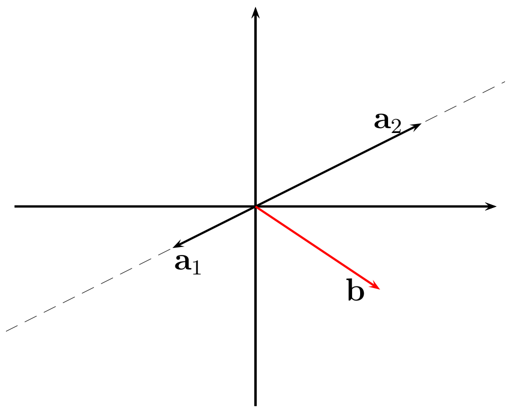
Vi kaller (5.2) for matrisebildet av systemet (5.1) og vi kaller (5.3) for vektorbildet av systemet (5.1). Med $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}^T$ kan (5.3) skrives $u\mathbf{a}_1+v\mathbf{a}_2=\mathbf{b}$. I figur 5.4 har vi illustrert



Figur 5.4: Løsning av det lineære systemet (5.3).

systemet (5.3) sammen med løsningen.

5.2.2 Vektorbildet og inkonsistente systemer



Figur 5.5: Illustrasjon av et selvmotsigende system.

I vektorbildet er det lett å forstå selvmotsigende systemer. Vi figur 5.5 ser vi at vektoren $\mathbf{b}$ ikke ligger på den stiplede linjen. Siden både $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligger langs denne linjen vil det være umulig at en vektet sum $u\mathbf{a}_1+v\mathbf{a}_2$ skal være lik $\mathbf{b}$. Derfor finnes det ingen løsning av systemet

$$u\mathbf{a}_1+v\mathbf{a}_2=\mathbf{b}.$$

5.3 Lineær avhengighet og uavhengighet

5.3.1 Lineære kombinasjoner

En **vektormengde** i $\mathbb{R}^n$ er er en mengde S av vektorer fra $\mathbb{R}^n$. For eksempel er

$$S = \left\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$$

en vektormengde i $\mathbb{R}^2$. Uttrykket $(-1)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ er en lineær kombinasjon av vektorene i S. Om vi setter inn verdier har vi $(-1)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}^T$. Det betyr at $\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}^T$ kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene i S. I lineær algebra er begrepet lineære kombinasjon et av de viktigste.

Definisjon 5.3. La $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$, $k > 0$ være endelig mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$. En **lineær kombinasjon** over S er et uttrykk på formen

$$u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \cdots u_k\mathbf{a}_k.$$

Vi sier også at en vektor er en lineærkombinasjon over S hvis den kan skrives som minst én lineær kombinasjon over S. For eksempel er $\mathbf{a}_1$ en lineærkombinasjon over S fordi $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_k$.

Eksempel 5.3. La $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$. Da er vektoren $\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\end{bmatrix}^T = (-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T + 2\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ en lineær kombinasjon over mengden S i $\mathbf{R}^n$.

Legg merke til at en matrise A multiplisert med en vektor $\mathbf{c}$ er en lineær kombinasjon av søylevektorene til matrisen A. Det motsatte stemmer også.

Setning 5.3. *Enhver lineær kombinasjon* $\sum_{i=1}^k c_i\mathbf{a}_i$ *over* $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ *kan skrives på som matriseproduktet*

$$\sum_{i=1}^k c_i\mathbf{a}_i = A\mathbf{c}$$

der $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k\end{bmatrix}$ *og* $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_k\end{bmatrix}^T$.

5.3.2 Lineært avhengige og uavhengige vektormengder

En vektormengde S kalles **lineært avhengig** hvis det finnes et element i S som kan skrives som en lineær kombinasjon av de øvrige. Av grunner vi ikke skal gå inn på kalles også en vektormengde for lineært avhengig når det inneholder en nullvektor.

Eksempel 5.4. vektormengden

$$S = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \right\}$$

er lineært avhengig fordi $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

Det er verdt å studere eksempel 5.4 nærmere. Uttrykket $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ kalles en **lineær avhengighet**. Om vi samler alle leddene på venstre side så får vi $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Med andre ord er $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T$ løsning av det lineære systemet

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \tag{5.4}$$

Eller $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ hvis du vil, der $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$.

Et vektormengde som ikke er lineært avhengig kalles for **lineært uavhengig**. Generelt har vi at om en vektormengde $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ er lineært avhengig så finnes en ikke-triviell løsning av

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{5.5}$$

Det vil si en løsning som ikke er lik nullvektoren $\mathbf{0}$.

Setning 5.4. *Hvis vektorlikningen (5.5)*

1. *har bare den trivielle løsningen så er S lineært uavhengig.*
2. *har ikke-trivielle løsninger så er S lineært avhengig.*

Regneeksempel 5.1. Avgjør om vektormengden

$$S = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \right\}$$

er lineært avhengig eller lineært uavhengig. Finn en lineær avhengighet for S i tilfelle S er lineært avhengig.

Løsning: Vi skriver

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

på matriseform:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi utfører Gauss-Jordaneliminasjon på totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \; | \cdot (-1/3) \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Systemet har bare en løsning og den er $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Det vil si at S er et lineært uavhengig. Det finnes ingen lineær avhengighet for S.

Regneeksempel 5.2. Avgjør om vektormengden

$$S = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T, \right\}$$

er lineært avhengig eller lineært uavhengig. Finn en lineær avhengighet for S hvis S er lineær avhengig.

Løsning: Vi skriver

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

på matriseform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi utfører Gauss-Jordaneliminasjon på totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen har 2 pivotelementer i søyle 1 og 2. Tredje variabel er fri og vi setter den lik en parameter $c_3 = t$. Vi løser resten og får $c_2 = -c_3 = -t$ og $c_1 = -2c_2 = -2t$. Generell løsning er

$$\mathbf{c} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er S lineært avhengig. Setter vi $t = 1$ får vi spesiell løsning for $\mathbf{c}$ som vi setter inn i likningen

$$-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Dette er en lineær avhengighet for S.

Setning 5.5.

1. *Hvis S inneholder nullvektoren så er S L.A.*
2. *$S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ er L.A. hvis og bare hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er proporsjonale*
3. *Tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ er L.A.*
4. *Tre vektorer som ligger i et plan i $\mathbb{R}^3$ er L.A.*

Setning 5.6 (Rangmetoden).
Gitt vektormengden $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ og la $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$

1. *Hvis $\operatorname{Rank} A = k$ så er S lineært uavhengig.*
2. *Hvis $\operatorname{Rank} A < k$ så er S lineært avhengig.*

Regneeksempel 5.3. Avgjør om

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært avhengig eller lineært uavhengig.
Løsning: Vi utfører Gauss-Jordaneliminasjon på den tilhørende matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Altså er $\mathrm{Rank}\, A = 3$. Dvs at S er lineært uavhengig.

Regneeksempel 5.4. Avgjør om

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært avhengig eller lineært uavhengig.

Løsning: Vi utfører Gauss-Jordaneliminasjon på den tilhørende matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Altså er $\mathrm{Rank}\, A = 2 < 3$. Dvs at S er lineært avhengig.

5.4 Underrom

5.4.1 Kort om mengder og delmengder

Før vi diskuterer underrom må vi først snakke om mengder og delmengder. Vektorrommet $\mathbb{R}^n$ er et eksempel på en mengde. Det er en samling av vektorer. Vektorene kaller vi for medlemmer av mengden $\mathbb{R}^n$. En delmengde av en mengde er også en mengde. Medlemmene av denne mengden er et utvalg av medlemmene i $\mathbb{R}^n$. en vektormengde i $\mathbb{R}^n$ er et eksempel på en delmengde av $\mathbb{R}^n$. Selv om det kan høres litt rart ut, kaller vi $\mathbb{R}^n$ for en delmengde av $\mathbb{R}^n$. En delmengde kan også være tom. Den kalles den tomme mengden $\emptyset$. Hvis S er en vektormengde i $\mathbb{R}^n$ så er mengden av alle vektorer som er en lineærkombinasjon av S en delmengde av $\mathbb{R}$. Vi kaller denne delmengden for **lineærspennet** av S i $\mathbb{R}^n$. Vi skriver

$$\operatorname{Linspan} S = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{a}_i \,\middle|\, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^k \right\} \tag{5.6}$$

vektormengden S kalles for **generatormengden** til $\operatorname{Linspan} S$. Med notasjonen til venstre i (5.6) menes mengden av alle lineærkombinasjoner $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{a}_i$ der hvert c_1, c_2,...,c_k er reelle tall.

5.4.2 Definisjon av underrom

Et underrom av $\mathbb{R}$ kan defineres på forskjellige måter. Først gir vi en formell definisjon.

Definisjon 5.4. En ikke-tom delmengde V av vektorrommet $\mathbb{R}^n$ kalles for et underrom av $\mathbb{R}^n$ hvis følgende to egenskaper er tilfredsstilt for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V og alle skalarer c i $\mathbb{R}$.

1. Vektoren $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er med i V.
2. Vektoren $c\mathbf{u}$ er med i V.

Egenskapene i setning 5.1 kalles aksiomer. Det kan vises at et underrom V av $\mathbb{R}^n$ tilfredsstiller nøyaktig de samme aksiomene som et vektorrom. Av denne grunn kan V kalles for et vektorrom.

Setning 5.7.

1. *Nullvektoren* $\mathbf{0}$ *er alltid med i et underrom* V *av* $\mathbb{R}^n$.
2. $\{\mathbf{0}\}$ *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$.
3. $\mathbb{R}^n$ *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$.

5.4.3 Lineære spenn og basis

Setning 5.8. *Lineære spenn er underrom av* $\mathbb{R}^n$.

For å se det er det nok å sjekke at begge egenskaper for underrom er oppfylt. Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er med i $\operatorname{Linspan} S$ og c en reell skalar så er $\mathbf{u} = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_k a_k$. Da er $c\mathbf{u} = cr_1 a_1 + cr_2 a_2 + \cdots + cr_k a_k$ som er med i V. Den andre egenskapen kan vises på liknende måte.

Setning 5.9. *La S være en generatormengde til $V = \operatorname{Linspan} S$. Hvis $\mathbf{v}$ er en vektor i S som er lineært avhengig av de andre vektorene i S så kan vi fjerne $\mathbf{v}$ fra S og den nye mengden S' er fortsatt en generatormengde til V. Det betyr at $V = \operatorname{Linspan} S'$.*

Det er enkelt å se at denne setningen er riktig. La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Anta at $\mathbf{v} = \mathbf{v_1}$. Betingelsen i setningen kan vi skrive som $\mathbf{v_k} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_k\mathbf{v_k}$. En vilkårlig vektor $\mathbf{x}$ i V kan skrives som $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots + x_k\mathbf{v_k}$. Vi kan nå eliminere det første leddet og vi får $\mathbf{x} = (x_2 + x_1c_2)\mathbf{v_2} + (x_3 + x_1c_3)\mathbf{v_3} + \cdots + (x_k + x_1c_k)\mathbf{v_k}$. Vi lar $S' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Det betyr at $V = \operatorname{Linspan} S'$.

Vi kan fortsette å fjerne medlemmer fra et generatorsettet S til vi sitter igjen med et lineært uavhengig generatorsett for $V = \operatorname{Linspan} S$. Slike generatorsett er så viktige at de har fått et eget navn.

Definisjon 5.5. Et lineært uavhengig generatorsett B for V kalles for en **basis** for V.

Basis er et av de mest sentrale begrepene i lineær algebra spesielt og matematikk generelt.

Eksempel 5.5. vektormengden $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ i vektorrommet $\mathbb{R}^n$, der

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

kalles for **standardbasisen** for $\mathbb{R}^n$.

Vektorene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ er nyttige vektorer. Multipliserer vi en matrise med vektoren $\mathbf{e}_i$ så får vi søyle i som resultat.

Eksempel 5.6. Om vi multipliserer en matrise med $\mathbf{e}_2$ får vi andre søyle til matrisen som resultat.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Setning 5.10. *En mengde S er en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis S er lineært uavhengig og inneholder nøyaktig n vektorer.*

Eksempel 5.7. Vektormengden $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

Vektormengden $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ er ikke en basis for $\mathbb{R}^3$.

Regneeksempel 5.5. Vis at vektormengden $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, der $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ og $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\end{bmatrix}^T$, er en basis for vektorrommet $\mathbb{R}^3$.
Løsning: S inneholder nøyaktig 3 vektorer så vi trenger kun å vise at S er lineært uavhengig. Rangmetoden sier at S er lineær uavhengig hvis og bare hvis rangen til $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix}$ er lik antall elementer i S. Gauss-eliminasjonen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

gir oss rangen 3. Derfor er S lineært uavhengig. Setning 5.10 sier da at S er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Setning 5.11. *La V være et underrom av $\mathbb{R}^n$ og la $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ være to vilkårlige basiser for V. Da inneholder $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ nøyaktig like mange vektorer.*

Siste setning gjør oss istand til å definere dimensjonen til et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Definisjon 5.6 (Dimensjonen til et underrom.). La V være et underrom av $\mathbb{R}^n$ og la $\mathcal{B}$ være en basis for V. Anta at $\mathcal{B}$ har nøyaktig k vektorer. Da sier vi at dimensjonen til V er k.

$$\dim V = k = \text{antall vektorer i } \mathcal{B}.$$

Dette stemmer med en intuitiv forståelse av dimensjon. Et plan bestemmes entydig av to vektorer. Følgende eksempel viser også at denne definisjonen er fornuftig.

Eksempel 5.8. Dimensjonen til $\mathbb{R}^2$ er lik 2 fordi standardbasisen i eksempel 5.5 har nøyaktig 2 vektorer.

Dimensjonen til $\mathbb{R}^3$ er lik 3 fordi standardbasisen i eksempel 5.5 har nøyaktig 3 vektorer.

I eksempelet kunne vi like gjerne erstattet 2 og 3 med en generell n.

Setning 5.12. *Generatorsettet $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ til $V = \operatorname{Linspan} S$ er en basis for V hvis og bare hvis hvert medlem $\mathbf{x}$ av V kan skrives på en entydig måte*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k.$$

I så fall kalles vektoren $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T$ for **koordinatvektoren** til $\mathbf{x}$ med hensyn på basisen S. Vi skriver

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T$$

Regneeksempel 5.6. La S være basisen for $\mathbb{R}^3$ fra regneeksempel 5.5. Finn koordinatvektoren til $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T$ med hensyn på S.

Løsning: Vi skal løse $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{x}$. Denne har totalmatrise $[A|\mathbf{x}]$ der A er matrisen fra regneeksempel 5.5. Gausseliminasjon gir

$$[A|\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 11 \end{bmatrix}.$$

Vi løser ved tilbakeinnsetting: $c_3 = \frac{11}{11/2} = 2$, $c_2 = \frac{4-3c_3}{2} = -1$ og $c_1 = 1 - 3c_2 - c_3 = 2$. Derfor er $[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

5.5 Underrom assosiert med matriser

5.5.1 Søylerommet til en matrise

Vi har allerede sett at søylene i en matrise kan betraktes som et sett av søylevektorer. I en $m \times n$ matrise A er det n søyler. Hver av disse søylene er vektorer i $\mathbb{R}^m$ fordi det er m rader i A. Vi skriver $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ der hver $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ er søylevektorer i $\mathbb{R}^m$. Disse vektorene utgjør vektormengden $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.

Definisjon 5.7 (Søylerommet). Underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av kolonnene til A kaller vi for **søylerommet** til A.

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Linspan}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \operatorname{Linspan} S.$$

Kolonnerom er et synonym for søylerom. Vi kan også danne en matrise A av en vektormengde S ved å la søylene til A være vektorene til S. Dette er nyttig når vi vil plukke ut en basis for $V = \operatorname{Linspan} S$ fra vektorene til S.

Setning 5.13. *Søylene til A som tilsvarer pivotsøylene til den Gauss-eliminerte matrisen A^G utgjør en basis til* $\operatorname{Col} A$.

Vi har følgende oppskrift for å finne en basis for $\operatorname{Col} A$.

1. Utfør Gausseliminsajon $A \sim \cdots \sim A^G$
2. Identifiser pivotsøylene til A^G.
3. De tilsvarende søylene til A er en basis for $\operatorname{Col} A$.

Regneeksempel 5.7. Finn en basis for søylerommet til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

1. Vi utfører Gausseliminasjon på A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \;\substack{(-2) \\ |\,:2 \\ +}\; \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \;\substack{3 \\ +}\; \sim \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^G.$$

2. Vi observerer at pivotsøylene i A^G er første og tredje søyle.
3. En basis for $\operatorname{Col} A$ er derfor første og tredje søyle i A. En basis for søylerommet til A er:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

Et underrom V av $\mathbb{R}^m$ er gjerne gitt ved en generatormengde S. Problemet med en slik mengde er gjerne at den er for stor. Vi ønsker å plukke ut vektorer fra S som utgjør en basis for V. Det vil si en lineær uavhengig generatormengde for V. Vi illustrerer dette ved et eksempel.

Regneeksempel 5.8. La V være utspent av generatormengden

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finn dimensjonen til V.

Løsning: For å finne dimensjon til V må vi finne en basis for V. Vi kan plukke en basis for V fra S. Først danner vi matrisen A ved å la vektorene i S være søylene i A. Vi utfører så en Gausseliminasjon på A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^G$$

Vi identifiserer første, andre og fjerde søyle som pivotsøyler i A^G. De tilsvarende søylene i A utgjør derfor en basis for $\operatorname{Col} A = \operatorname{Linspan} S$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.5.2 Søylerommet og lineære systemer

Et lineært system kan skrives på mange måter som vi har sett i seksjon 5.2.1 på side 82. La A være en $m \times n$-matrise. Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrives på vektorform

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}. \tag{5.7}$$

Høyresiden av likning 5.7 er en lineærkombinasjon av søylene i A og derfor en vektor i søylerommet $\operatorname{Col} A$. Hvis $\mathbf{b}$ ikke er med i søylerommet vil likhet ikke være mulig. Fra setning 5.12 vet vi at $\mathbf{b}$ kan skrives entydig på formen 5.7 hvis og bare hvis kolonnene i A er en basis for $\operatorname{Col} A$. Vi sammenfatter i følgende setning

Setning 5.14.

1. *Om* $\mathbf{b}$ *ikke er med i søylerommet* $\operatorname{Col} A$ *til* A *så er* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *selvmotsigende.*
2. *Om* $\mathbf{b}$ *er med i søylerommet* $\operatorname{Col} A$ *og* $\dim \operatorname{Col} A = n$ *så er* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *bestemt.*
3. *Om* $\mathbf{b}$ *er med i søylerommet* $\operatorname{Col} A$ *og* $\dim \operatorname{Col} A < n$ *så er* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ubestemt.*

5.5.3 Radrommet til en matrise

Radommet $\operatorname{Row} A$ til en $m \times n$ matrise A er underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radvektorene til A. En elementær radoperasjon vil ikke endre på radrommet til en matrise. Derfor er radrommet til en matrise A og matrisen man får ved å gjøre en Gausseliminasjon den samme.

Setning 5.15. *Radrommet til* A *og* A^G *er det samme.*

En nyttig konsekvens av denne setningen er at radene i A^G som ikke er nullrader utgjør en basis for $\operatorname{Row} A^G = \operatorname{Row} A$.

Regneeksempel 5.9 (Finne basis ved hjelp av Gausseliminasjon.). La V være utspent av generatormengden

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

finn en basis for V.

Løsning: Vi setter inn vektorene i S som rader i en matrise A og utfører Gauss-eliminasjon.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^G$$

Radene i A^G er en basis for $\operatorname{Row} A$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.5.4 Nullrommet til en matrise

Nullrommet til en matrise A er løsningsmengden til det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kaller denne mengden for $\operatorname{Null} A$.

Regneeksempel 5.10. Finn en basis for nullrommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Siden $\operatorname{Null} A$ er mengden av alle løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så utfører vi Gauss-Jordan-eliminasjon på A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^G.$$

Vi har to frie variable som vi setter lik parametre $x_2 = s$, $x_4 = t$. Andre rad tilsvarer likningen $x_3 - 2x_4 = 0$ som vi løser og får $x_3 = 2x_4 = 2t$. Første rad tilsvarer likningen $x_1 + 3x_2 + 3x_4$. Vi løser for x_1 og får $x_1 = -3x_2 - 3x_4 = -3s - 3t$. Løsningen er derfor

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En basisen til nullrommet til A er

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Dimensjonen til $\operatorname{Null} A$ er lik antall frie variable i det homogene systemet med koeffisient-matrise A. Dimensjonen til $\operatorname{Null} A$ er derfor antall søyler uten pivotelement i en trappematrise A^G til A. Vi minner om at rangen $\operatorname{Rank} A$ er antall pivotsøyler i en trappematrise A^G til A. Vi har derfor følgende resultat.

Setning 5.16. *For en $m \times n$ matrise A er* $\operatorname{Rank} A + \dim \operatorname{Null} A = n$.

5.5.5 Lineære systemer med kvadratisk koeffisientmatrise

Vi avslutter kapittelet med en oppsummering av sammenhengen mellom systemer, matriser og vektorrom.

[1] At to predikater er ekvivalente betyr at begge enten er sanne eller begge gale.

Setning 5.17. *For en $n \times n$-matrise A er følgende utsagn ekvivalente*[1].

1. A *er inverterbar*
2. *Det finnes en $n \times n$-matrise B slik at $A\,B = I$*
3. $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *har nøyaktig en løsning for hver* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$
5. $\dim \operatorname{Col} A = n$
6. $\operatorname{Rank} A = n$
7. $\dim \operatorname{Null} A = 0$
8. $\operatorname{Null} A = \{\mathbf{0}\}$
9. $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *har bare den trivielle løsningen*
10. A *har n pivotsøyler*
11. A *og I_n er radekvivalente*
12. *Det finnes en $n \times n$-matrise C slik at $C\,A = I$*
13. *Søylene i A er lineært uavhengige*
14. *Radene i A er lineært uavhengige*

Oppgaver fra kapittel 5

1. Adder vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$

   a) $\mathbf{a} = (5, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$
   b) $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 1)$
   c) $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 3)$
   d) $\mathbf{a} = (1, 1, 4)$, $\mathbf{b} = (3, 1, -1)$
   e) $\mathbf{a} = (4, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 5, 1)$
   f) $\mathbf{a} = (4.2, 3.1, -1.2)$, $\mathbf{b} = (-2.1, -2.2, 2.1)$

2. Regn ut $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ for verdiene av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, a og b i punktene a) til c)

   a) $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (-2, 1)$, $a = -3$ og $b = 2$.
   b) $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$, $a = 2$ og $b = 4$.
   c) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, -1, 1)$, $a = 5$ og $b = -2$.

3. Skriv om de lineære likningssystemene på vektorform $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$. tegn vektorene i et koordinatsystem. Løs systemet som vist i figur 5.4.

   a) $$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}$$
   b) $$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$
   c) $$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & -1 \end{array}$$
   d) $$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}$$

4. Avgjør om vektormengden S er lineært avhengig eller lineært uavhengig. Finn en lineær avhengighet for S hvis S er lineær avhengig.

   a) $S = \Big\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}2 & -2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\Big\}$
   b) $S = \Big\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}2 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}^T\Big\}$
   c) $S = \Big\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}2 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}3 & -2 & 2 & -1\end{bmatrix}^T\Big\}$

5. Anta at $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ er en lineært uavhengig mengde av vektorer. Avgjør om vektormengden S er lineært avhengig eller lineært uavhengig.

   a) $S = \{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\}$
   b) $S = \{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\}$
   c) $S = \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\}$

6. Avgjør om vektormengdene er en basis for $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

   a) $\{[1 \quad 3]^T, [3 \quad 1]^T\}$
   b) $\{[1 \quad 0]^T, [0 \quad 1]^T, [1 \quad 1]^T\}$
   c) $\{[3 \quad -6]^T, [-2 \quad 4]^T\}$
   d) $\{[1 \quad -2 \quad -1]^T, [-2 \quad 1 \quad -1]^T\}$
   e) $\{[1 \quad -2 \quad 1]^T, [-2 \quad 1 \quad 1]^T, [-1 \quad -1 \quad 2]^T\}$
   f) $\{[1 \quad 1 \quad 0]^T, [0 \quad 1 \quad 1]^T, [1 \quad 1 \quad 1]^T\}$
   g) $\{[2 \quad 1 \quad -1]^T, [3 \quad -2 \quad 4]^T, [1 \quad -2 \quad 2]^T, [-1 \quad 0 \quad 1]^T\}$

7. Avgjør i hvert av tilfellene om V er et underrom av $\mathbb{R}^2$.

   a) $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | v_1 \geq 0\}$, det såkalte **øvre halvplan**.
   b) $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | v_2 = 2v_1\}$
   c) $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | v_2 = v_1^2\}$
   d) $V = \mathbb{R}^2$
   e) $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | v_2 = 1 - v_1\}$

8. Finn en basis for søylerommet til $m \times n$-matrisene

   a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

9. Finn en basis for radrommet til matrisene i oppgave 8.

10. Finn en basis for nullrommet til matrisene i oppgave 8.

11. Sjekk at $\mathrm{Rank}\, A + \dim(\mathrm{Null}\, A) = n$ for matrisene i oppgave 8.

12. a) Finn en 3×3-matrise A med nullrom utspent av $[1\,0\,0]^T$ og søylerom utspent av $[1\,0\,0]^T$ $[0\,0\,1]^T$

    b) Finn en 3×3-matrise A med nullrom utspent av $[0\,1\,0]^T$ og søylerom utspent av $[1\,0\,0]^T$ $[0\,0\,1]^T$

    c) Finn en 3×3-matrise A med nullrom utspent av $[0\,1\,0]^T$ og søylerom utspent av $[0\,1\,0]^T$ $[1\,0\,-1]^T$

13. I hver oppgave under er underrommet V av $\mathbb{R}^n$ utspent av en vektormengde S. Plukk en basis for V fra mengden S. Hvilken dimensjon har V?

    a) $S = \Big\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T\Big\}, n = 4$

    b) $S = \Big\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}^T\Big\},$
    $n = 5.$

    c) $S = \Big\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T,$
    $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}^T\Big\}, n = 4$

14. Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    Avgjør for hvert deloppgave om $\mathbf{b}$ med i søylerommet til A?

    a) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -2 \end{bmatrix}^T$

    b) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

    c) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

    d) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}^T$

    e) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$

15. Gitt samme matrise A som i oppgave 14. Avgjør for hvert deloppgave om $\mathbf{c}$ med i radrommet til A?

    a) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

    b) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

    c) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

    d) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

    e) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

    f) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

    g) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

16. Skriv om vektorlikningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

    til et likningsystem.

17. Skriv om vektorlikningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

til en matriselikning på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

18. Skriv om den lineære kombinasjonen

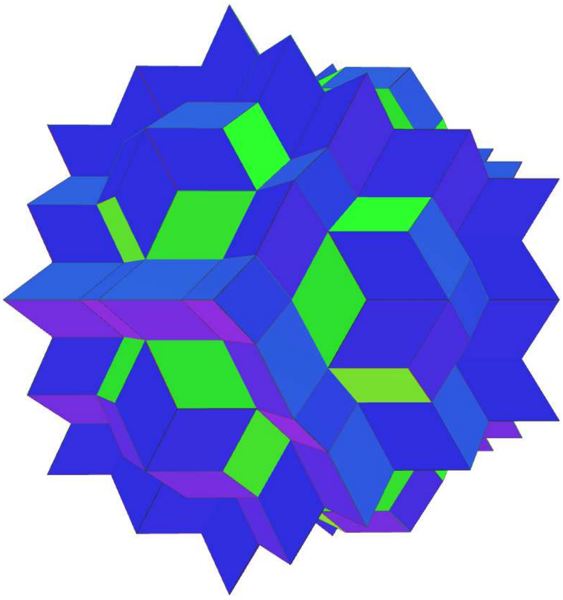
$$\mathbf{b} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

som et produkt av en matrise A og en vektor $\mathbf{c}$. Regn ut $\mathbf{b}$, kan $\mathbf{b}$ skrives som en annen lineærkombinasjon av vektorene over?

KAPITTEL 6

TRANSFORMASJONER I $\mathbb{R}^N$

6.1 Transformasjoner



Figur 6.1: Bildet viser en tredimensjonal modell av et aperiodisk krystall. Bildet er laget ved hjelp av OpenGL, et programmeringsverktøy til å lage programmer som tar i bruk grafikkprosessoren i en datamaskin. I dette kapittelet skal vi ta for oss matematikken som ligger bak OpenGL. For å få mest ut av OpenGL er det viktig å forstå denne matematikken.

6.1.1 Kort om funksjonsbegrepet

Funksjoner er definert ofte ved hjelp av funksjonsuttrykk. For eksempel har vi $f(x) = x^2 + 1$. Vi finner verdiene av funksjonen for forskjellige verdier av x ved å sette verdiene inn i funksjonsuttrykket. For eksempel er $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi kan også beskrive en funksjon med ord. La $g(x)$ være lik det største heltallet som er mindre eller lik x. Den kalles for største heltallsfunksjon. Så langt har presentert to funksjoner, men vi har ikke fortalt hva som kreves for at noe skal kalles en funksjon.

Definisjon 6.1 (Funksjonsbegrepet). En **funksjon** f er en regel som til hvert element i en mengde D_f tilordner et entydig verdi i en mengde V. Mengden D_f kalles for **definisjonsmengden** til f. Mengden V_f av alle verdier som funksjonen kan ha i V kalles for **verdimengden** til f.

En måte å beskrive en funksjon på er

$$f : D_f \to V_f.$$

og

$$f : x \mapsto < \text{et utrykk i } x >$$

For eksempel kan vi skrive $f(x) = x^2 + 1$ som $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 + 1$. Funksjonene i teksten over kalles for reelle funksjoner fordi D_f og V er delmengder av de reelle tallene.

6.1.2 Transformasjoner

I dette kompendiet skal vi se på funksjoner mellom vektorrom $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. Det vil si at $D_f = \mathbb{R}^n$ og $V = \mathbb{R}^m$. En slik funksjon kalles for en **transformasjon**. Vi bruker gjerne symbolet $T(\mathbf{x})$ eller vi skriver $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. For eksempel er $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ en transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ når A er en $m \times n$-matrise. Du kan sjekke at $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ er en transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ ved å lese kapittel 4.3.1 på side 63.

Setning 6.1. *En transformasjon på formen $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ tilfredstiller følgende to identiteter for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og alle verdier av c:*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \\ T(c\mathbf{x}) &= cT(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

6.1.3 Lineære transformasjoner

Definisjon 6.2 (Lineær transformasjon). En transformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles for en **lineær transformasjon** hvis T tilfredsstiller følgende to identiteter for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og alle verdier av c:

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \tag{6.1}$$

$$T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x}) \tag{6.2}$$

Det er enkelt å vise at

$$T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})$$

når T er en lineær transformasjon. Legg merke til at en lineær transformasjon alltid bevarer nullvektoren. Vi ser dette på følgende måte. Vi vet at $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ for alle vektorer $\mathbf{x}$. Da er $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Setning 6.2. *Enhver lineær transformasjon bevarer nullvektoren* $\mathbf{0}$.

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

for alle lineære transformasjoner T.

Eksempel 6.1.

1. Transformasjonen $T(x, y) = (x^2 + y, y)$ er ikke en lineær transformasjon.
2. Transformasjonen $T(x, y) = (x + y, x - y)$ er en lineær transformasjon.
3. Translasjon i planet $T(x, y) = (x + a, y + b)$ er ikke en lineær transformasjon når $a \neq 0$ eller $b \neq 0$.

Definisjon 6.3. En transformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles inverterbar hvis det finnes en lineær transformasjon $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ slik at

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og

$$T(S(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$$

for alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

6.1.4 Lineære transformasjoner og matriser

Definisjon 6.4 (Injektive transformasjoner). En transformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles for **injektiv** hvis det for hver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ finnes høyst en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Definisjon 6.5 (Surjektive transformasjoner). En transformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles for **surjektiv** hvis det for hver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ finnes minst en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Setning 6.3. *Enhver transformasjon på formen $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ der A er en $m \times n$ matrise er en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$.*

Setning 6.4. *La $\mathbf{y}$ være lineærkombinasjonen $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$. Da gjelder at*

$$T(\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}_1) + c_2T(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_kT(\mathbf{x}_k).$$

Standardbasisen kan brukes til å representere enhver vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ som den lineære kombinasjonen.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Fra setning 6.4 over har vi da at

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n).$$

På matriseform er dette

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Med andre ord

Teorem 6.1. *Enhver lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan skrives på formen $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, der A er $m \times n$-matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Teorem 6.1 er nyttig for å finne matrisen for en transformasjon T ut fra beskrivelse om hvordan T transformerer vektorene i standardbasisen.

Eksempel 6.2. La T være transformasjonen i planet som avbilder vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ og $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ på $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ Da er matrisen til T lik

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ofte beskrives T ved hvordan noen vektorer transformerer. Regneeksempel 6.1 viser hvordan vi kan finne matrisen til en transformasjon når vi ikke vet hvordan T virker på standardbasisen.

Regneeksempel 6.1. La lineæravbildingen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilde $(2, 1)$ på $(4, -2)$ og $(-1, 1)$ på $(1, 7)$. Finn matrisen A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Løsning: Vi representerer punktene som søylevektorer så vi kan bruke matriser:

$$A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}.$$

Da er

$$A\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 1\\-2 & 7\end{bmatrix}.$$

Vi multipliserer med den inverse av $\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ fra høyre på begge sider av likhetstegnet.

$$A\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}4 & 1\\-2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}.$$

Og finner da A

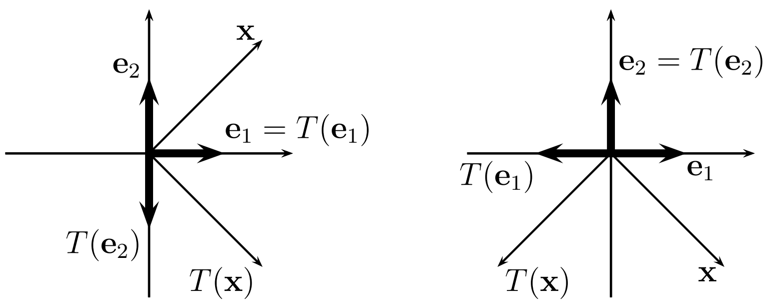
$$A = \begin{bmatrix}4 & 1\\-2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & 4\end{bmatrix}.$$

Følgelig er

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

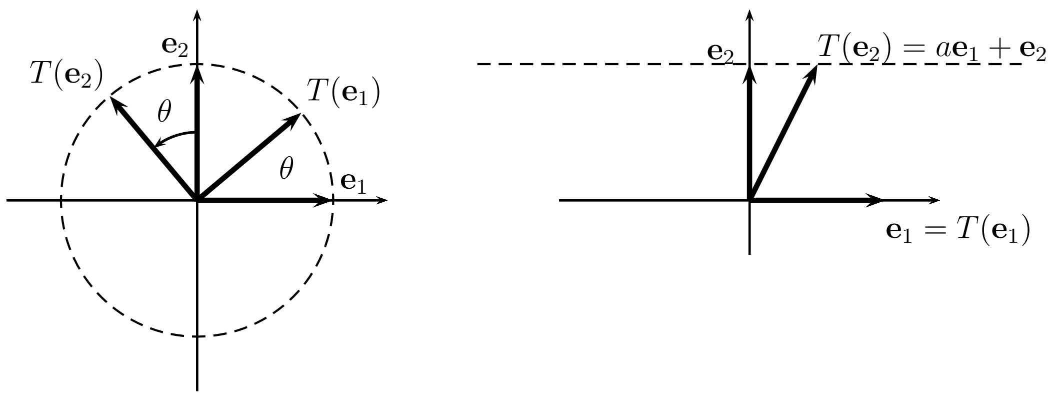
6.2 Lineære transformasjoner og geometri

6.2.1 Lineære transformasjoner i planet



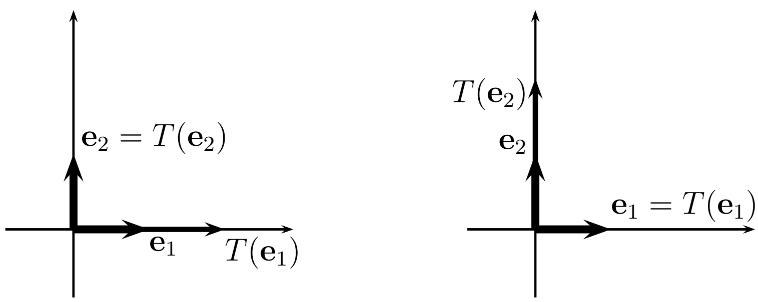
Figur 6.2: Refleksjon om førsteaksen og andreaksen

Figur 6.2 viser refleksjon om første og andre aksen. La T være refleksjon om første-aksen. Da er $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ og $T(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2$. Matrisen for T er derfor $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. I figuren til høyre er T refleksjon om andre-aksen. Da er $T(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1$ og $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$. Matrisen for refleksjon om andre-aksen er derfor $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Figur 6.3 viser rotasjon og såkalt skjærtransformasjon i planet.



Figur 6.3: Rotasjon om origo og skjærtransformasjon.

Figuren til venstre viser rotasjon av planet med vinkelen θ mot urviseren. Vektoren $\mathbf{e}_1$ roteres til $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}^T$. Vektoren $\mathbf{e}_2$ roteres til $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T$. Matrisen for denne T er derfor $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Denne matrisen kalles en **rotasjonsmatrise**. På samme måte kan vi se at matrisen for den vertikale skjærtransformasjonen er $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

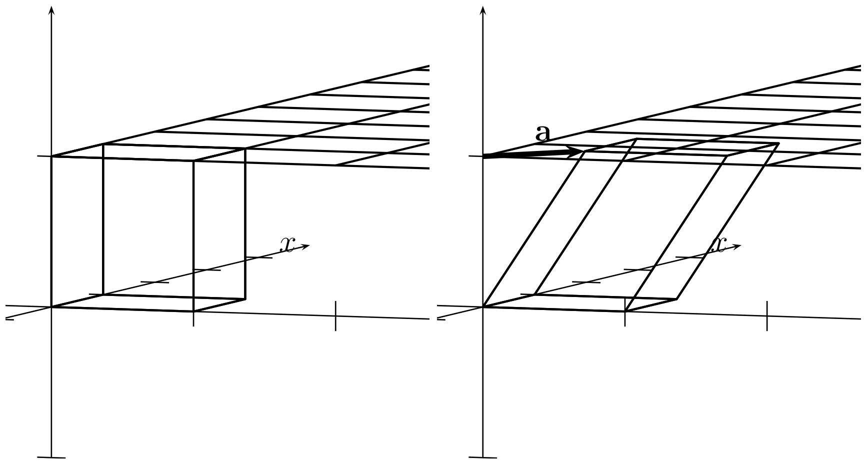


Figur 6.4: Skalering med faktoren $s = 2$ langs førsteaksen og andreaksen.

Figur 6.4 viser skalering langs aksene. Matrisen for skalering med faktoren s langs førsteaksen er $\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Skalering med faktoren s langs andreaksen har matrise $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$. Skalering med s_1 langs førsteaksen og s_2 langs andreaksen er gitt ved matrisen $\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$.

6.3 Fiktive transformasjonsmatriser.

6.3.1 Skjærtransformasjon i rommet



Figur 6.5: Skjærtransformasjon i rommet

Transformasjonen i figur 6.5 kalles en skjærtransformasjon. Vi ser at vektorene $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ bevares av transformasjonen. Vektoren $\mathbf{e}_3$ transformerer som $T(\mathbf{e}_3) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Matrisen for skjærtransformasjonen er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.3.2 Fiktive koordinater

I figur 6.5 har vi også tegnet inn det horisontale planet $z = 1$. Avgrenset til dette planet virker A som en parallelltranslasjon. Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a_1 \\ y + a_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I planet tilsvarer dette $T : (x, y) \mapsto (x+a_1, y+a_2)$. Punktet $(x, y, 1)$ i planet $z = 1$ representerer punktet $P(x, y)$ i planet. Vi kaller $(x, y, 1)$ for **fiktive koordinater** koordinater for $P(x, y)$.

De vanligste transformasjonene i fiktive koordinater er som følger er listet opp i tabell 6.1 på side 112.

6.3.3 Sammensatte lineære transformasjoner

En sammensatt transformasjon er en transformasjon som er satt sammen av flere av de elementære transformasjonene fra avsnittet over.

Når man jobber med sammensatte transformasjoner lønner det seg å tenke hva som transformeres. Det dreier seg om vektorer $\mathbf{x}$. En transformasjon av $\mathbf{x}$ gjøres matrise multiplikasjonen $A\mathbf{x}$. Ved suksessive transformasjoner T_1, T_2 og T_3 med tilhørende matriser A_1, A_2 og A_3 respektive. Får vi resultatet

$$T_3(T_2(T_1(\mathbf{x}))) = A_3A_2A_1\mathbf{x}.$$

Den sammensatte transformasjonen har derfor matrise

$$A_3A_2A_1.$$

Vi vil først se på et regneeksempel uten translasjon. Vi trenger derfor ikke å regne med fiktive transformasjonsmatriser.

Regneeksempel 6.2. Finn matrisen for skalering med faktoren 2 langs linjen med stigningstall 1.
Løsning: Først roterer vi planet med vinkelen $45°$ med urviseren,

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix}.$$

Så skalerer vi langs førsteaksen,

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deretter roterer vi planet med vinkelen $45°$ mot urviseren,

$$T_3 = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}.$$

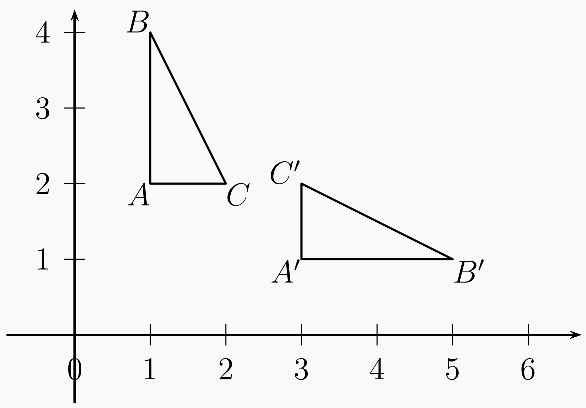
Vi passer på at matrisene kommer i motsatt rekkefølge

$$\begin{aligned} T = T_3T_2T_1 &= \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

.

I neste eksempel får vi bruk for fiktive transformasjonsmatriser. I tabell 6.1 finner du en oversikt over transformasjoner og tilhørende fiktive matriser.

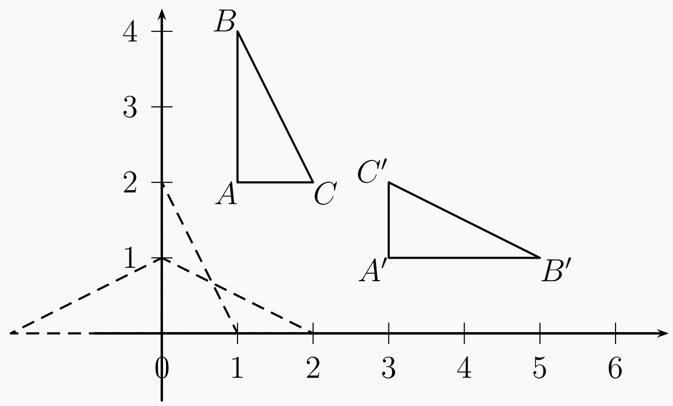
Regneeksempel 6.3. Finn den fiktive transformasjonsmatrisen for transformasjonen som sender trekant ABC til trekant $A'B'C'$ i figuren under.



Løsning: Vi translaterer A til origo. Den fiktive translasjonsmatrisen er $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Deretter roterer vi 90 grader mot klokken. Fiktiv translasjonsmatrise er $T_2 = \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vi reflekterer om andreaksen med fiktiv matrise $T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Til slutt translaterer vi fra origo til punktet A'. Den tilhørende fiktive matrisen er $T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Den fiktive matrisen for den sammensatte transformasjonen er

$$T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I figuren under ser du hvordan trekant ABC trinnvis transformerer til trekant $A'B'C'$.



6.3.4 Kort om inverse transformasjoner

Som funksjoner og matriser kan vi definere inverse av transformasjoner.

Definisjon 6.6. Gitt en transformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Hvis det finnes en transformasjon $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ slik at $T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ og $S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ så sier vi at T er inverterbar og S den inverse av T.

Om T er en inverterbar lineær transformasjon med tilhørende matrise A så er T^{-1} en lineær transformasjon med tilhørende matrise A^{-1}. Tilsvarende om en transformasjon er gitt ved en inverterbar fiktiv matrise B, har den inverse transformasjonen den fiktive matrisen B^{-1}.

6.3.5 Transformasjon av kurver

I dette kapitlet skal vi se på transformasjoner av kurver. En kurve kan beskrives ved en likning eller parametrisering. La oss se på et eksempel. En hyperbel er gitt ved likningen $x^2 - y^2 = 1$. En transformasjonen T vil avbilde hvert punkt (x, y) på kurven til et nytt punkt $(x', y') = T(x, y)$. Vi lar T være transformasjonen som er satt sammen av en rotasjon 45 grader mot urviseren og en skalering med skaleringsfaktor $s = \sqrt{2}$. T har transformasjonsmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen til den inverse transformasjonen T^{-1} er den inverse av A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Det betyr at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y') \\ (-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y') \end{bmatrix}.$$

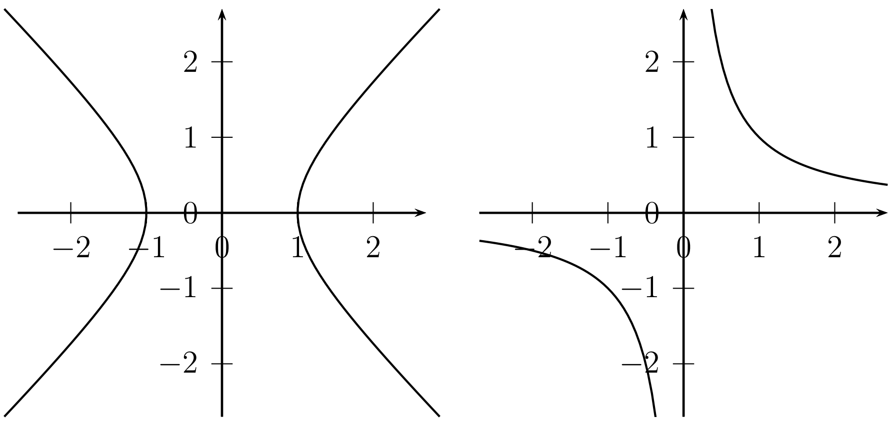
Vi erstatter x og y med $(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y')$ og $(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y')$

$$\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 = 1.$$

Vi forenkler uttrykket og får

$$x'y' = 1.$$

Vi har tegnet inn begge kurvene i figure 6.6



Figur 6.6: Hyperbelen til høyre fremkommer ved at hyperbelen til høyre roteres 45 grader mot klokka og skaleres med en faktor $\sqrt{2}$.

6.4 Transformasjoner i Rommet

Transformasjoner av rommet kan gjøres på samme måte som i planet. I stedet for fiktive 3×3 matriser bruker vi 4×4 matriser. En translasjon $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ har fiktiv matrise

$$T_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotasjon med vinkelen θ om z-aksen er gitt ved den fiktive matrisen

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En gjenstand ser mindre ut når den er langt borte en den gjør når den er nærme. Perspektiv-transformasjonen for en observatør som befinner seg i origo og ser i retning av z-aksen er gitt ved $T(x, y, z) = (x/z, y/z, 1)$. For å forstå denne avbildningen tenker vi oss at vi har et xyz-koordinatsystem med origo plassert i øyet der z-aksen peker rett frem. Et hvert observert punkt med koordinater (x, y, z) i rommet ligger på en rett linje. Denne linjen skjærer planet $z = 1$ i punktet $(x/z, y/z, 1)$. For observatøren i origo ser det likt ut om det observerte punktet er (x, y, z) eller $(x/z, y/z, 1)$ da disse ligger langs samme rette linje. Den fiktive transformasjons-matrisen for perspektiv er gitt ved

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Legg merke til at P_z ikke bevarer fjerdekoordinaten som er lik 1.

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{bmatrix}.$$

I fiktive koordinater er hvert punkt (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ modellert med et punkt $(x, y, z, 1)$. Punktet $(x/z, y/z, 1, 1)$ ligger langs den rette linjen fra origo til (x, y, z, z). På et grafikk-kort vil alle fiktive punkter

6.5 Tabell over fiktive transformasjonsmatriser

Transformasjon	**Fiktiv matrise**
Paralell translasjon med vektoren $\mathbf{a}$.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Planet rotert med vinkelen θ om origo mot urviseren.	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Refleksjon om førsteaksen.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Refleksjon om andreaksen.	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Skalering med faktoren s langs førsteaksen.	$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Skalering med faktoren s langs andreaksen.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Skalering med faktoren s_1 langs førsteaksen og med faktoren s_2 langs andreaksen.	$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Skjærtransformasjonen $T : (x, y) \mapsto (x, y + ax)$.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabell 6.1: Fiktive matriser for transformasjoner i planet.

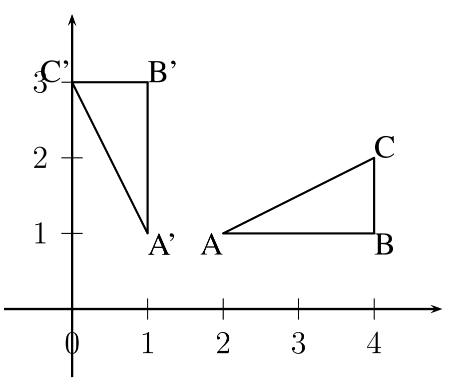
Oppgaver fra kapittel 6

1. Avgjør om følgende funksjoner er lineære transformasjoner
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, 2)$
   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - 2y)$
   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x+2, y)$
   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, \sqrt{y})$
   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, y - z, x)$
   f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x^2, xy, z)$
   g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, x - z, 1)$
   h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

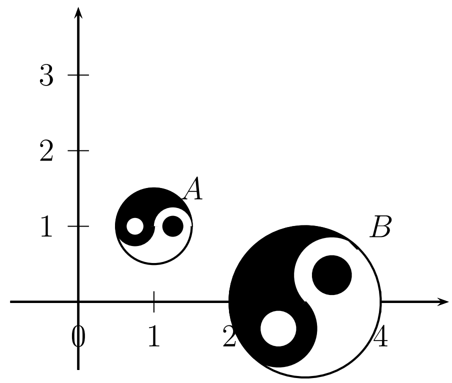
2. La T være en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at $T(1, 0) = (1, 2)$ og $T(0, 1) = (-2, 1)$. Finn $T(3, 1)$ og $T(5, -2)$.

3. La T være en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at $T(1, 2) = (2, 3)$ og $T(2, 1) = (1, 4)$. Finn $T(1, 0)$ og $T(0, 1)$.

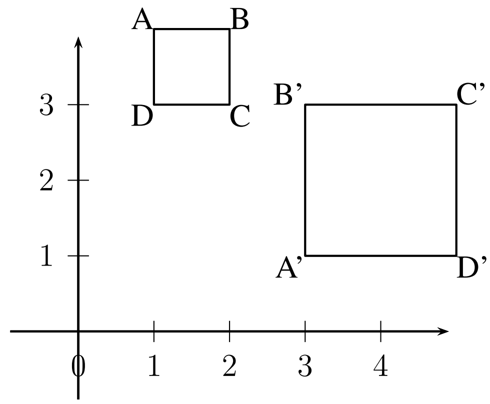
4. Transformasjonen T som transformerer trekant ABC til trekant A'B'C' i figuren under er satt sammen av translasjon av fra A til origo, rotasjon med 90 grader mot klokken om origo, og translasjon fra origo til A'. Finn de fiktive matrisene for disse tre transformasjonene. Finn så den fiktive matrisen for transformasjonen T.



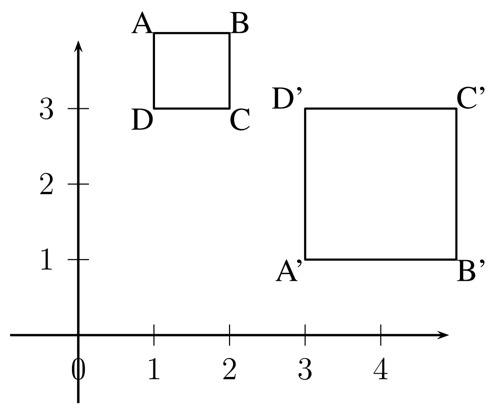
5. Finn en fiktiv transformasjonsmatrise som transformerer Yin-Yang symbolet A til Yin-Yang symbolet B.



6. Finn den fiktive matrisen for transformasjonen T som transformerer firkanten ABCD til firkanten A'B'C'D' i figuren under.



7. Finn den fiktive matrisen for transformasjonen T som transformerer firkanten ABCD til firkanten A'B'C'D' i figuren under.



8. En lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved formelen $T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$.
   a) Hva er bildet av punktet $(1, 0)$?
   b) Hva er bildet av punktet $(0, 1)$?
   c) Hva er matrisen til T?
   d) Inverter matrisen fra punkt c).
   e) Hvilket punkt avbilder T på $(2, 1)$?

9. En lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved formelen $T(\mathbf{x}) = (3x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 + x_3)$.
   a) Hva er bildene av punktene $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$?
   b) Bruk svaret fra a) til å skrive ned transformasjonsmatrisen til T.
   c) Finn matrisen til den inverse transformasjonen T^{-1}.

10. En lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved formelen $T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$.
    a) Hva er bildene av punktene $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$?
    b) Bruk svaret fra a) til å skrive ned transformasjonsmatrisen til T.
    c) Finn alle punkter som T avbilder på $(1, 0, -1)$.
    d) Finn alle punkter som T avbilder på $(1, 0, -2)$.

11. En lineær transformasjon T har transformasjonsmatrise
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$
    a) Bestem likningen for punktene som T avbilder på 1. aksen.
    b) Bestem likningen for punktene som T avbilder på 2. aksen.
    c) Tegn punktmengdene fra a) og b) inn i et koordinatsystem.
    d) Tegn inn søylevektorene til A^{-1} inn i samme figur som i punkt c).

12. En transformasjon av planet avbilder punktet $A(1, 2)$ til punktet $A'(7, 2)$, punktet $B(2, 3)$ til punktet $B'(5, 4)$ og punktet $C(1, 4)$ til punktet $C'(3, 2)$.
    a) Tegn opp trekantene ABC og $A'B'C'$ i et koordinatsystem.
    b) Den fiktive translasjonsmatrisen T_1 avbilder A til origo. Tegn opp bildet av trekanten ΔABC etter transformasjonen T_1.
    c) La T_2 være den fiktive matrisen som roterer planet 90 grader mot klokken. Finn bildet av trekant ABC etter den sammensatte transformasjonen T_2T_1.
    d) Tegn bildet av trekant ABC etter den sammensatte transformasjonen T_1T_2. Sammelign med figuren i punkt c). Hva forventet du? Stemte forventningen med det du så?
    e) Bestem den fiktive transformasjonsmatrisen T.
    f) Finn punktet i planet som holdes i ro av T.

13. La T være transformasjonen gitt ved $T(x, y) = (2x + y + 3, x + y - 2)$.
    a) Vis at T har fiktiv transformasjonsmatrise
$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
    b) Finn et punkt (x_0, y_0) slik at $T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.
    c) Finnes det flere punkter (x_0, y_0) slik at $T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ enn det du fant i deloppgave b)?

KAPITTEL 7

DETERMINANTER, EGENVERDIER OG EGENVEKTORER

7.1 Determinanter av små matriser

7.1.1 Determinanter av 2×2 matriser

Determinantbegrepet er viktig for matriser. Determinanten er et tall man regner ut for en kvadratisk matrise.

Definisjon 7.1. For en 2×2-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er determinanten lik

$$\det A = ad - bc.$$

Determinanter kan skrives på mange måter. De vanligste er

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Det er verdt å merke seg at de vertikale strekene ikke må forveksles med absoluttverdi-tegn. Determinanter kan ha både positive og negative verdier.

Regneeksempel 7.1. Finn determinanten til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi har

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4.$$

7.1.2 Kofaktormatriser av orden 2×2

Definisjon 7.2. Matrisen

$$\operatorname{kof} A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

kalles kofaktor-matrisen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Kofaktor-matrisen gir oss en grei formel for å finne den inverse av en 2×2 matrise.

Setning 7.1. *Den inverse av en 2×2-matrise A er lik*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{kof} A)^T. \tag{7.1}$$

I neste delkapittel skal vi definere kofaktor-matriser for større matriser. Med den definisjonen vil formel 7.1 gjelde for alle kvadratiske matriser. Dessverre tar det svært mye tid å regne ut $\operatorname{kof} A$ for matriser som er større enn 3×3-matriser. For den inverse av 2×2 matriser sparer formelen oss for mye regning.

Regneeksempel 7.2. Bruk formel 7.1 til å regne ut den inverse til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Løsning Determinanten til A er $\det A = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3$. Kofaktormatrisen er

$$\operatorname{kof} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Den inverse til A er derfor

$$A = \frac{1}{\det A} (\operatorname{kof} A)^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

7.1.3 Determinanter av 3×3-matriser

Definisjon 7.3. Determinanten til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

er gitt ved

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Det er ikke nødvendig å huske denne formelen. Det er tilstrekkelig å bruke definisjonen som blir gitt i delkapittel 7.2.

7.1.4 Kofaktormatriser av orden 3×3

Når vi fjerner en rad og en søyle i en 3×3-matrise får vi en 2×2-matrise. Siden det er 3 rader og 3 søyler i en 3×3 matrise får vi tre ganger tre matriser på denne måten.

Definisjon 7.4. En **underdeterminant** D_{ij} til en 3×3-matrise A er lik determinanten til 2×2 matrisen vi får når vi har fjernet rad i og søyle j fra matrisen A.

Regneeksempel 7.3. Regn ut alle underdeterminantene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Vi bruker underdeterminanter til å regne ut kofaktormatrisen til en 3×3 matrise. En 3×3-matrise har 9 kofaktorer.

Definisjon 7.5. Kofaktoren for elementet a_{ij} til en 3×3-matrise A er definert ved

$$\mathrm{kof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

der D_{ij} er underdeterminanten definert i definisjon 7.4.

Kofaktormatrisen til A er definert ved

$$\mathrm{kof}\, A = [\mathrm{kof}(a_{ij})].$$

Det er nyttig å bruke følgende "sjakkbrett"-skjema for fortegnsendring ved utregning av kofaktormatrisen.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Eksempel 7.1. Kofaktorene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

er gitt ved

$$\begin{array}{lll} \mathrm{kof}(a_{11}) = +D_{11} = 3 & \mathrm{kof}(a_{12}) = -D_{12} = 5 & \mathrm{kof}(a_{13}) = +D_{13} = -7 \\ \mathrm{kof}(a_{21}) = -D_{21} = -1 & \mathrm{kof}(a_{22}) = +D_{22} = -1 & \mathrm{kof}(a_{23}) = -D_{23} = 2 \\ \mathrm{kof}(a_{31}) = +D_{31} = -1 & \mathrm{kof}(a_{32}) = -D_{32} = -2 & \mathrm{kof}(a_{33}) = +D_{33} = 3 \end{array}$$

Kofaktormatrisen til A er

$$\mathrm{kof}\, A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Skrevet ut er den transponerte av kofaktormatrisen til A

$$(\mathrm{kof}\, A)^T = \begin{bmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{bmatrix}$$

Om vi regner ut matriseproduktet $A(\mathrm{kof}\, A)^T$ så får vi

$$A(\mathrm{kof}\, A)^T = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I. \tag{7.2}$$

Vi kunne også skrevet den transponerte av kofaktormatrisen til A som

$$(\text{kof } A)^T = \begin{bmatrix} \text{kof}(a_{11}) & \text{kof}(a_{21}) & \text{kof}(a_{31}) \\ \text{kof}(a_{12}) & \text{kof}(a_{22}) & \text{kof}(a_{32}) \\ \text{kof}(a_{13}) & \text{kof}(a_{23}) & \text{kof}(a_{33}) \end{bmatrix}$$

Fra formel 7.2 vet vi at hvert diagonalelement i matriseproduktet $A(\text{kof } A)^T$ er lik $\det A$. Det gir følgende formel for determinanten til A.

$$\det A = a_{11}\,\text{kof}(a_{11}) + a_{12}\,\text{kof}(a_{12}) + a_{13}\,\text{kof}(a_{13}).$$

Denne formelen kan vi ta som alternativ definisjon for determinanten av en 3×3-matrise.

Definisjon 7.6. Determinanten til en 3×3 matrise $A = [a_{ij}]$ er gitt ved

$$\det A = a_{11}\,\text{kof}(a_{11}) + a_{12}\,\text{kof}(a_{12}) + a_{13}\,\text{kof}(a_{13})$$

I neste kapittel skal vi definere determinanter av matriser over samme lest som i definisjon 7.6 Fra formel 7.2 får vi at formel 7.1 for den inverse av en 2×2 matrise også for 3×3 matriser.

Setning 7.2. *Den inverse av en 3×3-matrise A er lik*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{kof } A)^T. \tag{7.3}$$

Regneeksempel 7.4. Bruk formel 7.3 til å regne ut den inverse til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Determinanten til A er

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 4 - 1 - (-2) + 3 + (-1) - 6 = 1. \end{aligned}$$

Kofaktormatrisen er regnet ut i eksempel 7.1. Den inverse av A er

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{kof } A)^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ -7 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

7.2 Determinanter av matriser større enn 2×2-matriser

Definisjonen av underdeterminanter er den samme for kvadratiske matriser av alle størrelser.

Definisjon 7.7. En **underdeterminant** D_{ij} til en $n \times n$-matrise A er lik determinanten til $(n-1) \times (n-1)$ matrisen vi får når vi har fjernet rad i og søyle j fra matrisen A.

Legg merke til at foreløpig byr det på et lite problem å regne ut underdeterminanter for 5×5 matriser. Dere er ikke blitt fortalt hvordan dere regner ut 4×4-matriser. Dette løser seg når vi har definert determinanter for vilkårlige matriser. På samme måte kan vi definere kofaktorer for alle kvadratiske matriser.

Definisjon 7.8. Kofaktoren til elementet a_{ij} til en $n \times n$-matrise A er definert ved

$$\operatorname{kof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

der D_{ij} er underdeterminanten definert i definisjon 7.4.

Kofaktormatrisen til A er definert ved

$$\operatorname{kof} A = [\operatorname{kof}(a_{ij})].$$

Definisjon 7.9. **Determinanten** til en $n \times n$-matrise A er gitt ved

$$\det A = a_{11} \operatorname{kof}(a_{11}) + a_{12} \operatorname{kof}(a_{12}) + \cdots + a_{1n} \operatorname{kof}(a_{1n})$$

Siden $\operatorname{kof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} D_{ij}$ så kan vi skrive formelen over ved hjelp av underdeteminanter

$$\det A = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + \cdots + (-1)^n a_{1n} D_{1n}.$$

Regneeksempel 7.5. Finn determinanten til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

$$\det A = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - a_{14}D_{14}$$
$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 0 + 0 - 2 \cdot 1 = -4. \tag{7.4}$$

7.2.1 Kofaktorekspansjon

Formelen $\det A = a_{11}\operatorname{kof}(a_{11}) + a_{12}\operatorname{kof}(a_{12}) + \cdots + a_{1n}\operatorname{kof}(a_{1n})$ kalles **kofaktorekspansjon** langs første rad. Det viser seg at vi kan regne ut determinanten ved å ekspandere langs hvilken som helst rad

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{21}\operatorname{kof}(a_{21}) + a_{22}\operatorname{kof}(a_{22}) + \cdots + a_{2n}\operatorname{kof}(a_{2n}) \\
\det A &= a_{31}\operatorname{kof}(a_{31}) + a_{32}\operatorname{kof}(a_{32}) + \cdots + a_{3n}\operatorname{kof}(a_{3n}) \\
&\vdots \\
\det A &= a_{n1}\operatorname{kof}(a_{n1}) + a_{n2}\operatorname{kof}(a_{n2}) + \cdots + a_{nn}\operatorname{kof}(a_{nn})
\end{aligned}$$

eller søyle

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}\operatorname{kof}(a_{11}) + a_{21}\operatorname{kof}(a_{21}) + \cdots + a_{n1}\operatorname{kof}(a_{n1}) \\
\det A &= a_{12}\operatorname{kof}(a_{12}) + a_{22}\operatorname{kof}(a_{22}) + \cdots + a_{n2}\operatorname{kof}(a_{n2}) \\
&\vdots \\
\det A &= a_{1n}\operatorname{kof}(a_{1n}) + a_{2n}\operatorname{kof}(a_{2n}) + \cdots + a_{nn}\operatorname{kof}(a_{nn})
\end{aligned}$$

Vi vil vise hvordan denne valgfriheten kan brukes til å regne ut determinanter. Vi vil finne determinanten til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Legg merke til at rad 2 bare har et element forskjellig fra 0. Vi kan spare endel skriving ved å ekspandere langs den raden

$$\det A = -0 + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0$$

Vi trenger kun å regne ut en underdeterminant. Denne underdeterminanten har kun et element forskjellig fra 0 i fjerde rad og vi velger å ekspandere langs den raden.

$$\det A = 1 \cdot \left(-0 + 0 - 0 + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

I tredje søyle i 3×3 determinanten over finnes kun et element forskjellig fra null. Vi velger å ekspandere langs den tredje søyle.

$$\det A = 4 \left(0 - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \right) = 4(-1)(3 \cdot 1 - 1 \cdot 5) = 8.$$

7.2.2 Egenskaper for determinanter

I dette kapittelet skal vi se på endel egenskaper for matriser. Disse egenskapene gir oss en mye raskere metode for å regne ut determinanter enn ved å bruke definisjonen. Formelen for å regne ut en determinant blir større og mer tungvind jo større matrisen er. Derfor innførte vi kofaktorer for å regne ut determinanten. For store determinanter blir også kofaktorer for arbeidskrevende. For triangulære matriser, derimot, er det en meget enkel formel for determinanten.

Setning 7.3. *Determinanten til en triangulær matrise er lik produktet av elementene på hoveddiagonalen.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nb} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Forklaringen på at dette er sant når A er nedre triangulær er som følgende.

1. For en 2×2 matrise følger setningen direkte fra definisjonen.

2. Determinanten til en nedre triangulær matrise A er $\det A = a_{11}D_{11}$ fordi $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$. legg merke til at D_{11} er determinanten til en nedre triangulær matrise som har størrelse en mindre enn A. Setningen gjelder for $n = 2$ og derfor for $n = 3$ og derfor for $n = 4$, etc.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},$$

etc.

Setning 7.4 (Regneregler).

1. *Om to søyler eller rader bytter plass i en matrise så skifter determinanten fortegn, men den beholder absolutt verdi.*

2. *Om to matriser A og B er like bortsett fra søyle j og C dannes ved å ta A og erstatte søyle j med summen av søyle j fra A og B så er*
$$\det C = \det A + \det B.$$

3. *Om to søyler i en matrise er like så er*
$$\det A = 0.$$

4. *Hvis B er matrisen vi får ved å legge et multiplum av en søyle i A til en annen søyle i A så er*
$$\det A = \det B.$$

5. *Hvis B er matrisen vi får ved å legge multiplisere en av søylene i A med en skalar c så er*
$$\det B = c \det A.$$

6. *Transponering av en matrise endrer ikke determinanten*
$$\det(A^T) = \det A.$$
Følgelig gjelder reglene 1 til 5 også for rader istedet for søyler.

7. *Determinanten av et produkt AB er lik produktet av determinantene til hver faktor A og B*
$$\det(AB) = \det A \det B.$$

8. *Hvis A er inverterbar så er*
$$\det(A^{-1}) = 1/(\det A).$$

Fra regel 5 følger følgende ekstraregel. Hvis A er en $n \times n$-matrise og c er en skalar så er
$$\det(cA) = c^n \det A.$$

Vi kan bruke regel 1, 4 og 5 til å regne ut determinanter. Vi illustrerer dette med noen eksempler.

Regneeksempel 7.6. Bruk reglene regel 1, 4 og 5 til å regne ut determinanten til matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi bytter om på første og andre linje. Fortegnet skifter og vi kompenserer ved å multiplisere med (-1).

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} .$$

Vi adderer første rad multiplisert med (-3) til tredje rad. Ingen kompensering er nødvendig.

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} .$$

Så adderer vi andre rad multiplisert med 5 til tredje rad.

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \quad (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 16 = -16.$$

Om vi multipliserer en linje eller søyle i en determinant med en skalar c må vi kompensere med å multiplisere resultatet med $\frac{1}{c}$.

Regneeksempel 7.7. Bruk reglene regel 1, 4 og 5 til å regne ut determinanten til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.0 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi starter med å multiplisere hver rad med 10 og kompensere ved å multiplisere resultatet med $\frac{1}{10}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.0 & 0.1 & 0.3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.0 & 0.1 & 0.3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0.0 & 0.1 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-\frac{1}{1000}\right) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -20 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = \frac{1}{100}.$$

7.3 Determinanter og løsning av likninger.

Formelen for invers i setning 7.3 gjelder for vilkårlige matriser.

Setning 7.5. *Den inverse av en kvadratisk matrise A er lik*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{kof} A)^T. \tag{7.5}$$

Ulempen med denne er at arbeidet blir unødig stort for å regne ut determinanter av størrelse 4×4 eller større. Derfor er formelen over mest interessant fra en teoretisk synsvinkel. For eksempel ser vi at om $\det A \neq 0$ så er A inverterbar. Det viser seg også at om $\det(A) = 0$ så er A ikke inverterbar.

Teorem 7.1. *For en $n \times n$-matrise A er følgende utsagn ekvivalente*[1].

1. *A er inverterbar*
2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen.*
3. *Determinanten til A er ikke null.*

Eksempel 7.2. Vi vil sjekke om systemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 0 & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 7z & = & 0 \end{array}$$

har ikke-trivielle løsninger.
Løsning: Determinanten til koeffisientmatrisen er

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 - 2 = 1 \neq 0.$$

Derfor vet vi fra teorem 7.1 at systemet bare har den trivielle løsningen.

Før du ser på neste kapittel er det nyttig å forstå teoremet over. Følgende regneeksempel er beslektet med det vi skal bruke teoremet til i neste kapittel.

Regneeksempel 7.8. La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 4 \\ 1 & a & 5 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Størrelsen a er en parameter og vi sier A er avhengig av parameteren a. Bestem for hvilke verdier av parameteren a at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger.
Løsning: Vi regner ut determinanten til A.

$$\det A = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 4 \\ 1 & a & 5 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-5)+4 = a^4-5a^2+4 = (a^2-1)(a^2-4)(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$$

Determinanten til A er null hvis og bare hvis $a = \pm 1$ eller $a = \pm 2$. Vi får derfor uendelig mange løsninger når $a = -2$, $a = -1$, $a = 1$ eller $a = 2$.

7.4 Egenverdier og egenvektorer

7.4.1 Introduksjon til egenvektorer

Definisjon 7.10. La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ være en vektor forskjellig fra nullvektoren[1] i $\mathbb{R}^n$ og la λ være en reell skalar. Hvis

$$A\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

så kaller vi λ for en **egenverdi** av A. Vektoren $\mathbf{x}$ er da en **egenvektor** til A tilhørende egenverdien λ.

Eksempel 7.3. La $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ og la $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ da er

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er 2 en egenverdi for A og $\mathbf{x}$ er en egenvektor som hører til egenverdien 2.

Eksempel 7.4. La $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ og la La $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ da er

$$A\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Høyresiden kan åpenbart ikke skrives som $\lambda\mathbf{y}$ for noe verdi av λ. Derfor er $\mathbf{y}$ ikke en egenvektor til A.

La λ være en egenverdi av A og la $\mathbf{x}$ være en egenvektor som hører til egenverdien λ. La c være en reell skalar forskjellig fra 0. Da er

$$A(c\,\mathbf{x}) = c\,A\mathbf{x} = c\,\lambda\,\mathbf{x} = \lambda \cdot (c\,\mathbf{x}).$$

Derfor er $c\mathbf{x}$ også en egenvektor som tilhører egenverdien λ.

Setning 7.6. *Hvis λ er en egenverdi til A og at $\mathbf{x}$ er en tilhørende egenvektor, så er også $c\mathbf{x}$ også en egenvektor som hører til λ for hvilken som helst verdi av c forskjellig fra null.*

Setning 7.7. *Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er et sett av egenvektorer som hører til en egenverdi λ til A. Så er enhver lineærkombinasjon av S enten nullvektoren eller en egenvektor som hører til λ.*

Vi forklarer hvorfor denne setningen er riktig ved å bruke at $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ er en lineær transformasjon. For en vilkårlig lineærkombinasjonen $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ av S er

$$\begin{aligned} A\mathbf{y} = A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_kA\mathbf{v}_k = \\ c_1\lambda\mathbf{v}_1 + c_2\lambda\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda\mathbf{v}_k = \lambda(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = \lambda\,\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Definisjon 7.11. La A være en $n \times n$-matrise og la λ være en egenverdi til A. La E_λ være delmengden av $\mathbb{R}^n$ som består av nullvektoren og alle egenvektorer tilhørende λ. Mengden E_λ kalles for **egenrommet** som hører til egenverden λ.

7.4.2 Egenverdiproblemet

Å finne egenverdier og de tilhørende egenvektorerne til en matrise A kalles for egenverdiproblemet. Vi skal finne alle par av λ og $\mathbf{x}$ som tilfredstiller likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}.$$

Vi omformer denne likningen ved å trekke fra $\lambda\mathbf{x}$ fra begge sider av likningen.

$$A\mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Legg merke til at $\mathbf{x}$ er en felles faktor på venstresiden av likningen. For å kunne bruke distributiv lov så må begge leddene være på samme form. Vi omformer det andre leddet slik at begge ledd er på formen matrise ganger vektor.

$$A\mathbf{x} - \lambda\,I\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Nå kan vi bruke distributiv lov. Egenverdiproblemet kan derfor skrives på formen

$$(A - \lambda\,I)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{7.6}$$

Matematikken er full av små detaljer som tilsynelatende ikke ser viktige ut, men som i høyeste grad er det. Legg merke til at vi ikke tillater at en nullvektor kan være en egenvektor. Vi ser derfor etter ikke-trivielle løsninger av egenverdiproblemet 7.6. Vi vet at om $\det(A - \lambda\,I) \neq 0$ så er $A - \lambda\,I$ inverterbar. I så fall har egenverdiproblemet 7.6 kun den trivielle løsningen. Derfor må vi kreve at

$$\det(A - \lambda\,I) = 0. \tag{7.7}$$

Likning 7.7 kalles for den **karakteristiske likningen** for egenverdiproblemet 7.6.

Eksempel 7.5. Bruk den karakteristiske likningen til å finne alle egenverdier til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi regner ut

$$A - \lambda\,I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4-\lambda) & 2 \\ -1 & (1-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Vi regner så ut determinanten

$$\det(A - \lambda\,I) = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot(-1) = 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Vi har derfor karakteristisk likning

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Dette er en annengradslikning som vi kan løse og får

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 3.$$

Egenverdiene til A er derfor $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$.

For å finne egenverdiene tilhørende en gitt egenverdi må vi løse egenverdiproblemet 7.6 innsatt egenverdien.

Eksempel 7.6. Finn alle egenvektorer som hører til hver av egenverdiene λ_1 og λ_2 i eksempelet over **Løsning:** Vi løser for hver egenvektor

$\lambda = 2$). Vi skriver opp koeffisient matrisen til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og utfører en Gauss-eliminasjon

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi har følgende likning $x_1 + x_2 = 0$ med en fri variabel x_2. Vi setter denne lik en parameter $x_2 = t$. Løser vi likningen får vi $x_1 = -t$. Vi har derfor løsningsmengden er alle

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer tilhørende egenverdien 2 er:

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.()$$

Vektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en basis for egenrommet til A tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 2$.

$\lambda = 3$). Vi skriver opp koeffisientmatrisen til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og utfører Gauss-eliminasjon

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi har følgende likning $x_1 + 2x_2 = 0$ med en fri variabel x_2. Vi setter denne lik en parameter $x_2 = t$. Løser vi likningen får vi $x_1 = -2t$. Vi har derfor løsningsmengden er alle

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer tilhørende egenverdien 3 er:

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.()$$

Vektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ er en basis for egenrommet til A tilhørende egenverdien $\lambda_2 = 3$.

Prosessen fram til å finne en egenvektor er sammensatt og regnefeil skjer. Det er derfor nødvendig å sjekke svaret. Vi har for eksempel

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_2.$$

Regneeksempel 7.9. Finn alle egenverdier og basiser for de tilhørende egenrommene til matrisen.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Det karakteristiske polynomet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 & 2 \\ -2 & (1-\lambda) & -2 \\ -1 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -2 \\ -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$- 0 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & (1-\lambda) \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-1)\right) - 0 + 2\left((-2)(-1) - (1-\lambda)(-1)\right) =$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) - 0 + 2(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Karakteristisk likning $(3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ har løsning $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$. Vi finner egenvektorene.

$\lambda_1 = 1$**:** Egenverdiproblemet har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} (3-\lambda_1) & 0 & 2 \\ -2 & (1-\lambda_1) & -2 \\ -1 & -1 & (2-\lambda_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har likningene $x_1 + x_3 = 0$ og $x_2 - 2x_3 = 0$. x_3 er en fri variabel, $x_3 = t$. Vi løser hver av likningene og får $x_1 = -t$ og $x_2 = 2t$. Setter vi $t = 1$ får vi basis for egenrommet E_1

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

$\lambda_2 = 2$**:** Egenverdiproblemet har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} (3-\lambda_2) & 0 & 2 \\ -2 & (1-\lambda_2) & -2 \\ -1 & -1 & (2-\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har likningene $x_1 + 2x_3 = 0$ og $x_2 - 2x_3 = 0$. x_3 er en fri variabel, $x_3 = t$. Vi løser hver av likningene og får $x_1 = -2t$ og $x_2 = 2t$. Setter vi $t = 1$ får vi basis for egenrommet E_2

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

$\lambda_3 = 3$**:** Egenverdiproblemet har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} (3-\lambda_3) & 0 & 2 \\ -2 & (1-\lambda_3) & -2 \\ -1 & -1 & (2-\lambda_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har likningene $x_1 + x_2 = 0$ og $x_3 = 0$. x_2 er en fri variabel, $x_2 = t$. Vi løser hver av likningene og får $x_1 = -t$ og $x_3 = 0$. Setter vi $t = 1$ får vi basis for egenrommet E_2

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

7.4.3 Multiplisitet av egenverdier

Regneeksempel 7.10. Finn alle egenverdier og basiser for de tilhørende egenrommene til matrisen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning: Den karakteristiske likningen er

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (0-\lambda) & 1 & -1 \\ -1 & (2-\lambda) & -1 \\ -1 & 1 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Vi finner basis for egenrommene.

$\lambda_1 = 0$**:** Egenverdiproblemet har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & -1 \\ -1 & (2-\lambda_1) & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra trappematrisen leser vi av to likninger $x_1 - x_3 = 0$ og $x_2 - x_3 = 0$. Vi setter den frie variabelen lik en parameter $x_3 = t$ og løser likningene. $x_1 = t$ og $x_2 = t$. En basis for egenrommet for egenverdien 0 er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

$\lambda_2 = 1$**:** Egenverdiproblemet har koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & -1 \\ -1 & (2-\lambda_2) & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får kun en likning $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. De to frie variablene settes lik hver sin parameter $x_2 = s$ og $x_3 = t$ og vi løser likningen $x_1 = s - t$. Vi finner basisvektorene ved å sette $(s,t) = (1,0)$ og $(s,t) = (0,1)$ inn i løsningen.

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Legg merke til at 0 kan være en egenverdi, men **0** kan ikke være en egenvektor. Null er alltid en egenverdi når nullrommet til en matrise har dimensjon 1 eller større.

Videre er ser vi at egenrommet til egenverdien 1 i eksempelet har dimensjon 2. Faktoren $1 - \lambda$ kommer i annen potens i det karakteristiske polynomet $-\lambda(1-\lambda)^2$. Vi sier da at multiplisiteten til egenverdien $\lambda_2 = 1$ er lik 2. Det er en sammenheng mellom multiplisiteten til en egenverdi og dimensjonen til det tilhørende egenrommet.

Setning 7.8. *Hvis $n \times n$-matrisen A har en egenverdi λ med multiplisitet m_λ så har det tilhørende egenrommet dimensjonen maksimalt m_λ.*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda.$$

Eksempel 7.7 (Defekt matrise). Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har karakteristisk polynom $(1-\lambda)^2$. Den har en egenverdi med multiplisitet 2. Allikevel er dimensjonen til det tilhørende egenrommet 1. Egenverdiproblemet har koeffisient matrise

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne er allerede på trappeform og likningen lyder $2x_2 = 0$. Den har løsningen $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ er basis for egenrommet.

Triangulære matriser er svært enkle å finne egenverdiene til.

Setning 7.9. *Egenverdiene til en triangulær matrise er lik elementene på hoveddiagonalen.*

Eksempel 7.8. Den nedre triangulære matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdiene 0, 1 og 2. Egenverdien 1 har multiplisitet 2. De andre har multiplisitet 1.

Antallet egenverdier til en $n \times n$-matrise er aldri større enn n inklusive multiplisitet.

Setning 7.10. *Hvis A er en symmetrisk $n \times n$ matrise så har A nøyaktig n egenverdier medregnet multiplisitet.*

Teorem 7.2. *Et vektorsett $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ av k egenvektorer til en matrise A tilhørende forskjellige egenvektorer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er lineært uavhengige.*

7.4.4 Diagonalisering

En viktig anvendelse av egenvektorer er diagonalisering.

Definisjon 7.12. En **diagonalisering** av en matrise A er et par av matriser P og D der P er en inverterbar matrise og D er en diagonal metrise slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Sjekk om du forstår at en **diagonaliserbar** matrise må være kvadratisk og at P A og D må ha samme størrelse.

Setning 7.11. *En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Da er matrisene P og D gitt ved*

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

og

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

der $\mathbf{v}_i$ tilhører egenverdien λ_i til A, $i = 1, 2, \ldots, n$.

PS! Selv om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er L.U. trenger ikke $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ være forskjellige.

Vi kan også skrive diagonalmatrisen D på formen $D = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{e}_1 & \lambda_2\mathbf{e}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{e}_n \end{bmatrix}$ Da har vi ifølge definisjon 4.3 at

$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 P\mathbf{e}_1 & \lambda_2 P\mathbf{e}_2 & \cdots & \lambda_n P\mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

og

$$AP = \begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Derfor er $AP = PD$ som vi gjør om til $A = PDP^{-1}$.

Eksempel 7.9. Fra eksempel vet vi at

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

har 3 forskjellig egen verdier $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$. Da vet vi at de tilhørende egenvektorene er lineært uavhengige. Da er

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Gitt følgende eksempel

Regneeksempel 7.11. Vi vil diagonalisere matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Å finne en diagonalmatrise D og invertibel matrise P slik at $A = PDP^{-1}$

1. Finn først egenverdiene: Løs karakteristisk likning $0 = |A - \lambda I|$:

   $$0 = (0.3 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.7 \cdot 0.2 = \lambda^2 - 1.1\,\lambda + 0.1$$

   2 Løsninger: Egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.1$

2. Løs $A\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$ og $A\mathbf{x} = 0.1\mathbf{x}$.

   $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} -0.7 & 0.7 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Egenvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $\lambda_2 = 0.1$: $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Egenvektor: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Diagonalisering har mange anvendelser. Den første vi skal se på er utregning av utrykk på formen A^n, der A er en diagonaliserbar matrise.

Setning 7.12. *Anta at A er diagonaliserbar med P og D slik at $A = PDP^{-1}$. Da er*

$$A^n = PD^nP^{-1}, \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Bevis. Vi skal benytte oss av **induksjonsbevis**. Først beviser vi at setningen holder for for $n = 1$. Deretter beviser vi at setningen holder for $n = k + 1$ hvis den holder for det naturlige tallet $n = k$.

For denne setningen slipper vi å bevise setningen for $n = 1$ fordi $A^1 = PD^1P^{-1}$ er setningens betingelse. Så setningen er sann for $n = k + 1$ og setningen er bevist.

Om setningen er sann for $n = k$ så er $A^k = PD^kP^{-1}$. Vi regner ut $A^{k+1} = A^kA = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^kIDP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$. □

Regneeksempel 7.12. Finn et uttrykk for A^n der

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi har diagonalisert matrisen i regneeksempel 7.11. Den inverse av P er

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & 7/9 \\ 1/9 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

Vi har også

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (0.1)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da regner vi ut

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/9 & 7/9 \\ 1/9 & -1/9 \end{bmatrix} + (0.1)^n \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/9 & 7/9 \\ 1/9 & -1/9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/9 & 7/9 \\ 2/9 & 7/9 \end{bmatrix} + (0.1)^n \begin{bmatrix} 7/9 & -7/9 \\ -2/9 & 2/9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.4.5 Systemer av lineære differensiallikninger

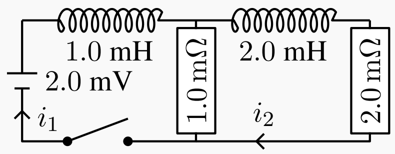
Likningen $y' = a\,y + x$ er et eksempel på en differensiallikning. Den ukjente størrelsen y er en funksjon i én variabel. Variabelen kan for eksempel være x. En løsning av likningen er en funksjon $y(x)$ som tilfredsstiller $y'(x) = a\,y(x) + b$ for alle verdier x. I dette tilfellet har vi løsningen $y(x) = c\,e^{ax} - b/a$.

Definisjon 7.13 (System av første orden). Et system av differensiallikninger i de ukjente funksjonene $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i en variabel i for eksempel x eller t.

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & +\cdots+ & a_{1n}y_n & + & g_1 \\ y_2' & = & a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & +\cdots+ & a_{2n}y_n & + & g_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & +\cdots+ & a_{nn}y_n & + & g_n \end{array}$$

Vi finner mange anvendelser av slike systemer i ingeniørvitenskapene. En av disse er anvendelsen på elektriske kretser.

Eksempel 7.10. Strømmene i den elektriske kretsen i figuren tilfredsstiller differensiallikningene i systemet under.



$$\begin{array}{ccccccc} di_1/dt & = & -1.0\,i_1 & + & 1.0\,i_2 & + & 2 \\ di_2/dt & = & 0.5\,i_1 & - & 1.5\,i_2 & & \end{array}$$

$$i_1(0) = i_2(0) = 0$$

Vi kan skrive de ukjente funksjonene som en vektor funksjon $\mathbf{y} : t \mapsto \mathbf{y}(t)$ eller som

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix}^T .$$

Vi definerer derivasjon av en slik funksjon ved å derivere hver komponent for seg.

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \end{bmatrix}^T$$

Vi definerer så vektor funksjonen.

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & \cdots & g_n(t) \end{bmatrix}$$

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kalles for koeffisientmatrisen til systemet. Med denne notasjonen kan vi skrive systemet på matriseform

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}.$$

Hvis A er diagonaliserbar så kan vi forenkle uttrykket. La $A = PDP^{-1}$ der D er en diagonal matrise. Vi innfører skifte av variabel $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$. Da er

$$P\mathbf{z}' = AP\mathbf{z} + \mathbf{g}.$$

Vi multipliserer med P^{-1}:

$$\mathbf{z}' = P^{-1}AP\mathbf{z} + P^{-1}\mathbf{g}.$$

Vi har derfor

$$\mathbf{z}' = D\mathbf{z} + P^{-1}\mathbf{g}. \tag{7.8}$$

Vi får da n ukoblede differensial likninger i variablene $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + (P^{-1}\mathbf{g})_1 \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + (P^{-1}\mathbf{g})_2 \\ &\cdots \\ z_n' &= \lambda_n z_n + (P^{-1}\mathbf{g})_n. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Regneeksempel 7.13. Vi skal løse systemet i eksempelet over.
Løsning: Vi skriver systemet på matriseform

$$d\,\mathbf{i}/dt = A\mathbf{i} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{i}(0) = \mathbf{0}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisering gir $A = PDP^{-1}$ med

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi lar $\mathbf{i} = P\mathbf{y}$ og får 2 ukoblede initialverdiproblemer som vi kan løse.

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= -2.0\,y_1 + 2/3, \quad y_1(0) = 0 \\ dy_2/dt &= -0.5\,y_2 + 2/3, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

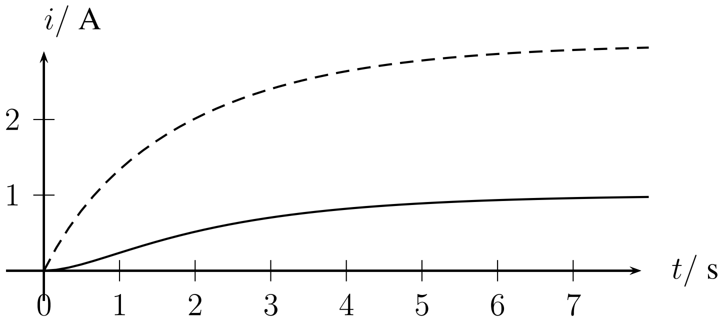
Vi finner løsningen

$$y_1 = \frac{1}{3}(1 - e^{-2t}) \text{ og } y_2 = \frac{4}{3}(1 - e^{-0.5t}).$$

$$i_1(t) = y_1 + 2y_2 = 3 - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-0.5t},$$

$$i_2(t) = -y_1 + y_2 = 1 + \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-0.5t}.$$

Homogene systemer er enkle å løse.



Figur 7.1: Graf av løsningen til systemet i eksempelet med elektrisk krets.

Setning 7.13. *Gitt det homogene differensialsystemet i n ukjente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ på matriseform*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

der A er en $n \times n$ matrise med n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ tilhørende egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Da har vi følgende generelle løsning av systemet.

$$y(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

Regneeksempel 7.14. Finn generell løsning til systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & & & y_2 & - & y_3 \\ y_2' & = & -y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 \\ y_3' & = & -y_1 & + & y_2 & & \end{array}$$

Løsning: Systemet har koeffisientmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har funnet egenverdier og basis for egenrommene fra regneeksempel 7.10. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 0$. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en lineært uavhengige egenvektorer tilhørende samme egenverdi $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vi har derfor følgende generelle løsning av systemet.

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\, e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det vil si

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 + (c_2 - c_3)e^t \\ y_2(t) &= c_1 + c_2 e^t \\ y_3(t) &= c_1 + c_3 e^t \end{aligned}$$

Oppgaver fra kapittel 7

Determinanter

1. Finn determinanten til matrisene

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

2. Finn (i) underdeterminantene og (ii) kofaktorene til matrisene

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Bruk kofaktor ekspansjon til å regne ut determinantene til matrisene

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

   f) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   h) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

4. Finn determinanten til matrisene

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \pi & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 11 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Egenverdier

5. Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Regn ut $A\mathbf{x}$ der $\mathbf{x}$ er gitt nedenfor. Avgjør hvilke av vektorene under som er egenvektorer til A. Finn også tilhørende egenverdi for egenvektorene.

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$

b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

d) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$

e) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T$

6. Bruk formel 7.1 til å regne ut de inverse til 2×2 matrisene

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. Bruk formel 7.1 til å regne ut de inverse til 3×3 matrisene

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Diagonalisering

8. Diagonaliser matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

9. En matrise kalles **stokastisk** hvis summen av elementene i hver søyle er en.

   a) Hvilke egenverdier har matrisen

   $$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}?$$

   Finn også en egenvektor for hver av egenverdiene.

   b) Finn en inverterbar matrise K og en diagonal matrise D slik at $A = KDK^{-1}$.

   c) Vis at alle stokastiske matriser har egenverdi 1. (Hint: Vis først at summen av radvektorene i matrisen $A - 1\,I$ er lik nullvektoren.)

10. I et fiktivt land der ingen flytter ut og innbyggertallet er konstant bor 30 prosent i byene og 70 prosent på landet. Hvert år flytter 10 prosent av de som bor i byen til landet og tretti prosent av de som bor på landet flytter til byen. Vi antar at landet har en million innbyggere. La $\mathbf{v}_k$ være vektoren der 1.-komponenten er lik antall personer som bor på landet etter k år og 2.-komponenten er antall personer som bor i byen etter k år.

    a) Finn matrisen A i formelen $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$.

    b) Finn egenverdiene med tilhørende egenvektorer til matrisen A.

    c) Bruk svaret i b) til å si hvor mange mennesker som bor i byen når innbyggertallet har stabilisert seg.

    d) Diagonaliser matrisen A og finn et uttrykk for A^n.

11. La $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$. Finn et uttrykk for A^n.

Differensiallikninger

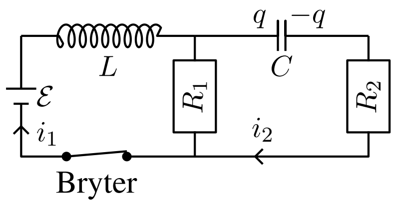
12. Løs systemene av differensiallikninger.

    a)
    $$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

    b)
    $$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

Oppgave 13 er for de som kjenner til teorien for elektriske kretser.

13. a) Finn en differensiallikning for kretsen i figuren, der de ukjente størrelsene er strømmene i_1 og i_2. (Bryteren skal være lukket.)



b) Sett inn verdiene $\mathcal{E} = 3.0\,\mathrm{V}$, $R_1 = 400\,\Omega$, $R_2 = 600\,\Omega$, $L = 40\,\mathrm{mH}$ og $C = 1.0\,\mu\mathrm{F}$ og finn den generelle løsningen.

c) Bryteren har vært åpen lenge. Ved tiden $t = 0$ lukkes bryteren. Du kan anta at $i_1(0) = i_2(0) = 0$ og $q(0) = 0$. Finn $i_1(t)$ og $i_2(t)$ med disse startbetingelsene.

Teori

14. Bevis at hvis A er ortogonal så er $\det A = \pm 1$.

15. Bevis at hvis A er inverterbar så er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. (Hint. Du kan få bruk for regelen for determinanter av et produkt av matriser.)

16. En kvadratisk matrise A er er **skjev-symmetrisk** hvis $A^T = -A$. Bevis at hvis A er skjev-symmetrisk så er $\det A = (-1)^n \det A$.

17. Hva er determinanten til en skjevsymmetrisk $n \times n$ matrise hvis n er et oddetall.

Flere oppgaver for å finne egenvektorer

18. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til matrisene.

    a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

    b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

    c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

19. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til de stokastiske matrisene.

    a) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}$

    c) $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$

20. Finn egenverdier og en basis tilhørende for egenrommene til matrisene.

    a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

    b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

    c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

KAPITTEL 8

ORTOGONALE PROJEKSJONER

8.1 Indreproduktet på $\mathbb{R}^n$

8.1.1 Indreprodukt

I dette delkapittelet skal vi se på indreprodukter. Indreprodukter er også kjent som skalarprodukt og prikkprodukt.

Definisjon 8.1. **Indreproduktet** mellom to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er definert ved

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Med summenotasjon skriver vi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n} u_i v_i.$$

Eksempel 8.1. Indreproduktet mellom vektorene $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 6 - 4 + 5 = 7.$$

Indreproduktet mellom to søylevektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ kan skrives ved hjelp av matriseproduktet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

La A og B være to matriser. Da finner vi (ij)-elementet til AB ved å regne ut indreproduktet til i-raden til A med j-søylen til B.

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}.$$

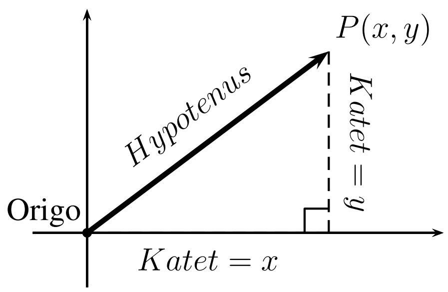
Følgende regneregler gjelde for indreproduktet i $\mathbb{R}^n$.

Setning 8.1 (Grunnleggende egenskaper til indreproduktet). *La* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *være vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *og la* a *være en skalar. Da er*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, *(symmetri).*
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, *(additivitet).*
3. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, *(homogenitet).*
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *og* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} =$ *hvis og bare hvis* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *(positivitet).*

8.1.2 Indreprodukt og lengde

Begrepet indreprodukt er nært knyttet til geometri. Ved hjelp av indreprodukt definerer vi størrelser som lengde av en vektor, avstand mellom punkter og vinkel mellom to vektorer. Dette er størrelser som opprinnelig tilhører geometri i planet og i rommet.



Figur 8.1: Pytagoras og lengden til en vektor

Lengden til en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ i planet er definert som avstanden fra origo til punktet $P(x, y)$. Betrakt trekanten i figur 8.1. Pytagoras teorem sier oss at i en rettvinklet trekant er kvadratet av lengden til hypotenusen lik summen av kvadratene av lengdene til katetene. Det vil si at lengden til $\mathbf{v}$ er $\sqrt{x^2 + y^2}$. Lengden til vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ er $\mathbf{u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Det er naturlig å definere lengde også for vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Definisjon 8.2. Lengden til en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Et annet navn på lengden til en vektor er **kvadratisk norm**.

Eksempel 8.2. Lengden til vektoren $(2, -2, 1, 4)$ er

$$\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 4 + 1 + 16} = 5.$$

Lengden til vektoren $(1, 0, 0, 0)$ er

$$\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 0 + 0 + 0} = 1.$$

Den siste vektoren i eksempelet er kalles ofte for $\mathbf{e}_1$. Den er den første av fire vektorer som utgjør standardbasisen $\mathbb{R}^4$. Standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ er definert i eksempel 5.5 på side 90.

Eksempel 8.3. Vektorene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ i standardbasisen har lengde 1.

Standardbasisen har en sentral betydning for vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vektorer med lengde 1 være nyttig for å beskrive et en retninger entydig. I mange anvendelser er enhetsvektorer viktige. De spiller en stor rolle i geometri men også i anvendelser slik som komprimering av lyd og bilder. Det finnes derfor et eget navn for vektorer med lengde lik en.

Definisjon 8.3. En vektor $\mathbf{u}$ med lengde $|\mathbf{u}| = 1$ kalles en **enhetsvektor**.

Eksempel 8.4. Vektorene $\mathbf{u} = (0.8, -.6)$, $\mathbf{v} = (6/7, -2/7, 3/7)$ og $\mathbf{w} = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ er enhetsvektorer.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}| &= \sqrt{0.8^2 + (-0.6)^2} = \sqrt{0.64 + 0.36} = 1. \\
|\mathbf{v}| &= \sqrt{(6/7)^2 + (-2/7)^2 + (3/7)^2} = \sqrt{36/49 + 4/49 + 9/49} = 1. \\
|\mathbf{w}| &= \sqrt{1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4} = 1.
\end{aligned}$$

Om to vektorer i planet peker i samme retning, kan den ene vektoren fås fra den andre ved å multiplisere med en skalar[1]. Det er godt å ha et presist begrep for retninger som vi kan bruke i $\mathbb{R}^n$. Til det er det naturlig å bruke enhetsvektorer. Følgende setning gir en oppskrift på å finne en enhetsvektor som har samme retning som en gitt vektor.

[1]Skalarmultiplikasjon er definert på side 80.

Setning 8.2. *Hvis* $\mathbf{v}$ *er en vektor forskjellig fra nullvektoren så er*

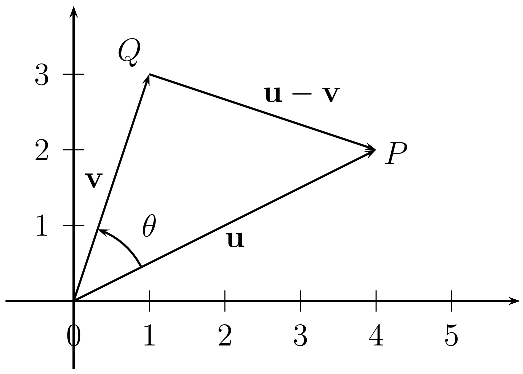
$$\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

en enhetsvektor. Denne kalles for ***retningen*** *til* $\mathbf{v}$. *Vi sier at vi har* ***normalisert*** *vektoren* $\mathbf{v}$.

Regneeksempel 8.1. Finn retningen til vektoren $\mathbf{v} = (5, -3, 4, -1, 7)$.
Løsning: Vi finner lengden til vektoren $\mathbf{v}$. $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-1) + 7^2} = \sqrt{25 + 9 + 16 + 49 + 1} = \sqrt{100} = 10$. Retningen til $\mathbf{v}$ er derfor $\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{10}(5, -3, 4, -1, 7) = (0.5, -0.3, 0.4, -0.1, 0.7)$.

8.1.3 Indreprodukt og avstand.

Punktene $P(u_1, u_2)$ og $Q(v_1, v_2)$ i planet kan representere vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$. Avstanden



Figur 8.2: Avstand og vinkel i planet.

mellom P og Q er lik lengden til vektoren $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Det er naturlig å definere avstand i $\mathbb{R}^n$ på samme måte som i $\mathbb{R}^2$.

Definisjon 8.4. **Avstanden** mellom vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er lik

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|.$$

Cosinus-setningen anvendt på trekanten i figur 8.2 gir oss

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta.$$

Litt regning gir følgende formel for vinkelen mellom to vektorer:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Der er naturlig å bruke samme formel for vinkelen mellom vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Definisjon 8.5. **Vinkelen** mellom vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er størrelsen θ i intervallet $[0,\pi]$ definert ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Regneeksempel 8.2. Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{x} = [8 \quad -6 \quad 70]$ og $\mathbf{y} = [-12 \quad 9 \quad 20]$.
Løsning: Vi har $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 8\cdot(-12)+(-6)\cdot 9+70\cdot 20 = -96-54+1400 = 1250$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{8^2+(-6)^2+70^2} = \sqrt{64+36+4900} = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$ og $|\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = \sqrt{(-12)^2+9^2+20^2} = \sqrt{144+81+400} = \sqrt{625} = 25$. Da har vi $\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{1250}{50\sqrt{2}\cdot 25} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi finner $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$, eller 45° fra tabellen på side 213 i formelsamlingen som dere finner i tillegg E.

Legg merke til at når vinkelen θ mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er 90 grader (eller $\pi/2$ hvis vi bruker radianer som vinkelmål) så er $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ og motsatt.

8.2 Ortogonale vektorer

I planet og i rommet er vi vant til å bruke ordet **vinkelrett** når to linjer eller vektorer står 90 grader på hverandre. For vektorer i $\mathbb{R}^n$ er det mer vanlig å bruke ordet ortogonal. Det er fordi vi mangler intuisjon om vinkler i flere dimensjoner enn to og tre.

Definisjon 8.6. To vektorer i $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ kalles for **ortogonale** hvis

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Eksempel 8.5. Vektorene $\mathbf{u} = (4,-2,6,1)$ og $\mathbf{v} = (3,5,-1,4)$ er ortogonale fordi $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 4\cdot 3+(-2)\cdot 5+6\cdot(-1)+1\cdot 4 = 12-10-6+4 = 0$.

Mengden av L alle vektorer i planet står vinkelrett på vektoren $\mathbf{u} = (3, -2)$ er en rett linje i planet. Denne linjen er mengden av alle vektorer $\mathbf{v} = (x, y)$ som er ortogonal med $\mathbf{u}$. Dvs at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ for alle vektorer i mengden L. Vi skriver dette ut og får $3x - 2y = 0$, som er den rette linjen $y = 1.5\,x$ gjennom origo med stigningstall 1.5. En rett linje gjennom origo et eksempel på et underrom av vektorplanet $\mathbb{R}^2$. Om vi har et underrom[2] W av et vektorrom $\mathbf{R}^n$ så er kan det være interresant å finne mengden av alle vektorer som er ortogonale med alle vektorer i W.

Definisjon 8.7 (Ortogonalt komplement). Gitt et underrom W av $\mathbb{R}^n$. Det **ortogonale komplementet** til W i $\mathbb{R}^n$ er mengden $W^\perp$ av alle vektorer i $\mathbf{R}^n$ som er ortogonale med alle vektorer i W. Når vi leser $W^\perp$ så sier vi det ortogonale komplementet til W.

Det viser seg at matriser og løsninger av homogene systemer er nyttige verktøy for å finne ortogonale komplementer. Vi minner om at indreprodukt og matriseprodukt har mye til felles. Om $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er en søylevektorer så er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

La A være en $m \times n$-matrise. Mengden av alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at $A\mathbf{x} = 0$ er mengden av alle vektorer x som er ortogonale med hver rad i A. Denne mengden er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og kalles for nullrommet til matrisen A. Du kan lese mer om nullrommet $\mathrm{Null}\, A$ til en matrise i avsnitt 5.5.4. Hvis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er radene til A og $\mathbf{x} \in \mathrm{Null}\, A$ så er $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{x}$ for alle $k = 1, 2, \ldots, m$. Da er $\mathbf{x}$ også ortogonal til enhver lineærkombinasjon av radvektorene til A. Mengden av alle radvektorer i en matrise kalles for radrommet[3] $\mathrm{Row}\, A$.

Teorem 8.1. *Hvis A er en $m \times n$-matrise så er*

$$(\mathrm{Row}\, A)^\perp = \mathrm{Null}\, A$$

og

$$(\mathrm{Col}\, A)^\perp = \mathrm{Null}(A^T)$$

Regneeksempel 8.3. La W være et underrommet av $\mathbb{R}^4$ med basis bestående av vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 4)$. Finn en basis for $W^\perp$.
Løsning. Vi lager en matrise der radene er elementene til basisen til W.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorem 8.1 sier da at $W^T = \mathrm{Row}\, A$. I de fleste tilfeller må man gjøre en Gauss eliminasjon for å finne $\mathrm{Null}\, A$. I dette tilfellet er A allerede på (redusert) trappeform. Det er to

[2]Underrom av vektottom er definert i delkapittel 5.4.
[3]Du kan lese mer om radrommet til en matrise i avsnitt 5.5.3 på side 95.

pivotsøyler i A. For de to øvrige søylene definerer vi frie variable $x_3 = s$ og $x_4 = t$. Vi bruker tilbakeinnsetting og får $x_1 = -2s - t$ og $x_2 = s - 4t$. Løsningene på $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er derfor

$$\mathbf{x} = (-2s - t, s - 4t, s, t).$$

Vi finner en basis for $\operatorname{Null} A = W^{\perp}$ ved å suksesivt sette $s = 1, t = 0$ og $s = 0, t = 1$. Det gir $\mathbf{u}_1 = (-2, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{u}_2 = (-1, -4, 0, 1)$. Derfor er $W^{\perp} = \operatorname{Linspan}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, det lineære spennet av vektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

I forige regneeksempel benytter vi intuitivt at det er tilstrekkelig å kreve at en vektor $\mathbf{x}$ i $W^{\perp}$ er ortogonal på hver av basisvektorene til W. Vi oppsumerer det i følgende setning.

Setning 8.3. *La S være en basis for W. En vektor x i $\mathbb{R}^n$ er med i $W^{\perp}$ hvis og bare hvis $\mathbf{x}$ er ortogonal med hvert av elementene S.*

I mange anvendelser er det nyttig å la vektorene i en basis være parvis ortogonale.

Definisjon 8.8. En vektormengde S kalles for **ortogonal** hvis hvert par av vektorer fra S er ortogonale.

Eksempel 8.6. Vektormengden S som består av vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$ er ortogonal fordi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -2 + 0 + 2 + 0 = 0 \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 0 + 0 - 4 + 4 = 0 \\
\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 0 + 2 - 2 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Setning 8.4. *En ortogonal vektormengde er lineært uavhengig.*

Fra setningen vet vi derfor at hvis S er en ortogonal vektormengde og S uspenner et underrom W av $\mathbb{R}^n$ så er S en basis for W. Vi kaller da S for en **ortogonal basis** for W. Nytteverdien av en ortogonal basis er stor. Om $\mathbf{y} \in W$ og $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ er en basis for W så vet vi at det finnes reelle tall $c_1, c_2, \dots, c_k$ slik at $\mathbf{y} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k$. For å finne c_i-ene for $i = 1, 2, \dots, k$ har vi kan man reformulere problemet til å la $\mathbf{a}_i$-ene være søyler i en $n \times k$ matrise A og løse matriseproblemet $A\mathbf{c} = \mathbf{y}$. Om basisen er ortogonal så er det mye raskere å finne c_i-ene ved hjelp av indreprodukter. Oppskriften er gitt i følgende setning.

Setning 8.5. *Hvis $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ er en ortogonal basis for W og*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_k$$

så er

$$c_i = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

8.3 Ortogonal projeksjon

Gitt et linje L igjennom origo i planet og en vektor $\mathbf{x}$ i planet. Vi ønsker å skrive $\mathbf{x}$ som en sum av to vektorer der den ene $\mathbf{p}$ ligger langs linjen L og den andre $\mathbf{q}$ står vinkelrett på L. Vi vil først behandle problemet helt generelt i dimensjon n og la linjen L være utspennt av en vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$. Løsningen på problemet viser seg å være

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} \text{ og } \mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{p}.$$

Det er fordi det viser seg at $\mathbf{q}$ og $\mathbf{u}$ er otogonale:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Definisjon 8.9. La $\mathbf{x}$ og $\mathbf{u}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vektoren

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$$

kalles for den **ortogonale projeksjonen** av $\mathbf{x}$ ned på vektoren $\mathbf{u}$.

La oss se på et konkret eksempel

Regneeksempel 8.4. Gitt linjen L i planet gitt ved ligningen $4x - 3y = 0$ og vektoren vektor $\mathbf{x} = (2, 3)$ i planet. Vi ønsker å skrive $\mathbf{x}$ som en sum av to vektorer der den ene $\mathbf{p}$ ligger langs linjen L og den andre $\mathbf{q}$ står vinkelrett på L.

Løsning: Vektoren $\mathbf{u} = (3, 4)$ ligger i linjen L fordi $4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$. Vi regner ut den ortonormale projeksjonen av $\mathbf{x}$ ned på vektoren $\mathbf{u}$.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{18}{25}(3, 4) = \left(\frac{54}{25}, \frac{72}{25}\right).$$

Det gjenstår da kun å finne

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{p} = \left(2 - \frac{54}{25}, 3 - \frac{72}{25}\right) = \left(-\frac{4}{25}, \frac{3}{25}\right).$$

I neste avsnitt vil vi ta sktittet en steg videre. Vi vil se på basiser til underrom som ikke bare er otogonale på hverandre, men om også der elementene i basisen er enhetsvektorer.

8.3.1 Ortonormale vektormengder

Definisjon 8.10. En ortogonal vektormengde S kalles for ortonormal hvis hver vektor i S har lengde 1.

En ortogonal vektormengde $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ av vektorer i $\mathbb{R}^m$ danner $m \times n$-matrisen

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

På grunn av at $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, så er $U^T U = [\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j] = I$. Denne betrakningen er egentlig et bevis for føgende setning.

Setning 8.6. *Søylene i en $m \times n$-matrise U er ortonormale hvis og bare hvis $U^T U = I$.*

Matriser med ortonormale søyler bevarer lengder og indreprodukt. Mer presist gjelder følgende setning.

Setning 8.7. *La U være en $m \times n$-matrise med ortogonale søyler og la $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er*

1. $|U\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$
2. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Bevis. Vi bruker at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$, at $(AB)^T = B^T A^T$ og at $U^T U = I$. 1. følger direkte av 2. fordi $|U\mathbf{x}|^2 = (U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{x})$. Vi beviser 2.:

$$(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = (U\mathbf{x})^T (U\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T U^T U \mathbf{y} = \mathbf{x}^T I \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

□

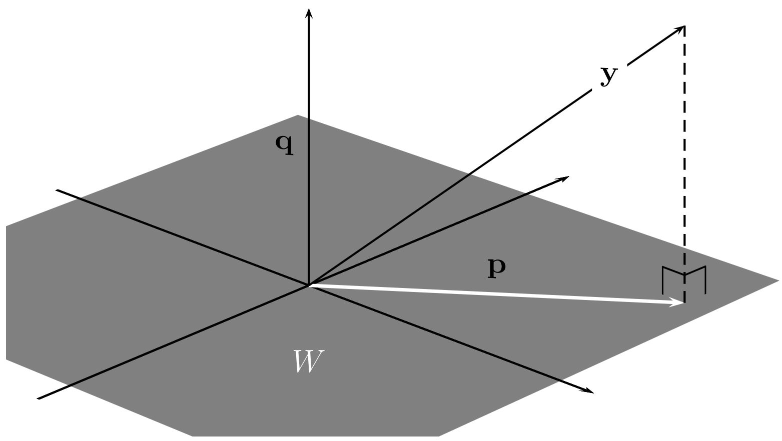
Til nå har vi behandlet projeksjon ned på en linje. Vel så interessant er det å projisere en vektor ned på et plan i rommet, eller mer generelt, et underrom i $\mathbb{R}^n$.

Definisjon 8.11. La W være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Gitt et en vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Hvis

- $\mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$,
- der $\mathbf{p}$ er med i W
- og $\mathbf{q}$ er med i $W^\perp$

så sier vi at $\mathbf{p}$ er **ortogonalprojeksjonen** av $\mathbf{y}$ ned på W:

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{p}$$



Figur 8.3: Figuren viser ortogonalprojeksjonen av vektoren $\mathbf{y}$ ned på W.

I neste teorem er det gitt en oppskrift for å regne ut projeksjonen av en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ nes på et underrom W and $\mathbb{R}^n$. Det er svært viktig at basisen som brukes i metoden er ortogonal.

Teorem 8.2. *Hvis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en othogonal basis for W, underrom i $\mathbb{R}^n$. Og $\mathbf{y}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$ så er*

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k$$

Regneeksempel 8.5. Gitt W utspennt av basisen $\{\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T\}$. Finn projeksjonen av $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ ned på W. **Løsning:** Vi regner ut $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 10$, $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 10$, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 = 16$ og $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2 = 2$.

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \tfrac{16}{10}\mathbf{u}_1 + \tfrac{2}{10}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}\frac{6}{5} & \frac{17}{5} & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Om vektoren $\mathbf{y}$ som skal ortogonal-projiseres ned i W tilfeldigvis allerede er i W så vil den projiserte også være $\mathbf{y}$.

Setning 8.8. *Hvis* $\mathbf{y} \in W$ *så er*

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

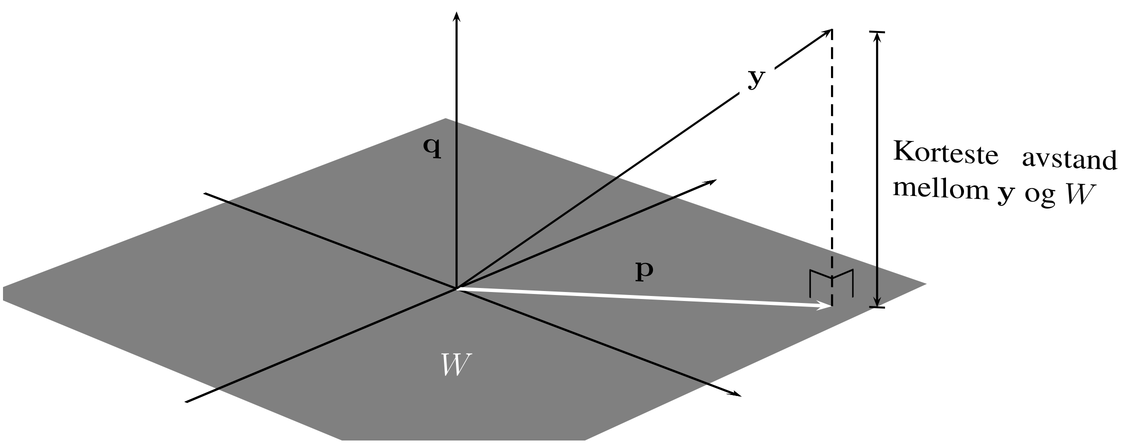
Den ortogonalprojiserte av $\mathbf{y}$ kan også brukes til å finne nærmeste punkt i W fra $\mathbf{y}$. Husk at $\mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, der $\mathbf{p} \in W$ og $\mathbf{q} \in W^{\perp}$. Hvis i tillegg $\mathbf{v} \in W$, så er

$$|\mathbf{y}-\mathbf{v}|^2 = |(\mathbf{p}-\mathbf{v})+\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}-\mathbf{v}|^2+2(\mathbf{p}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{q}+|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}-\mathbf{v}|^2+|\mathbf{q}|^2 > |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{y}-\mathbf{p}|^2.$$

Vi har derfor

Setning 8.9 (Beste tilnærming). *Hvis* $\mathbf{p} = \mathrm{Proj}_W(\mathbf{y})$ *så er* $|\mathbf{y}-\mathbf{p}| < |\mathbf{y}-\mathbf{v}|$ *for alle* $\mathbf{v}$ *i* W *som er forskjellige fra* $\mathbf{p}$.

Med andre ord $\mathbf{p}$ er punktet i W som ligger nærmest $\mathbf{y}$. Mange komprimeringsalgoritmer, går ut på å behandle et signal som en vektor $\mathbf{y}$ i et vektorrom $\mathbb{R}^n$ av dimensjon n. I tillegg defineres et m-diemensjonalt underrom W av $\mathbb{R}^n$. Signalet $\mathbf{y}$ projiseres ned på W. I utgangspunktet brukte man m tall for å lagre signalet $\mathbf{y}$. Det komprimerte signalet $\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y})$ krever kun k tall for å lagres.



I en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. For ortonormale basiser kan teorem 8.2 skrives mye enklere. I tillegg kan formelen skrives på en nyttig matriseform.

Teorem 8.3. *Hvis* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *er en* ***ortonormal basis*** *for* W*, underrom i* $\mathbb{R}^n$*. Og* $\mathbf{y}$ *er en vektor i* $\mathbb{R}^n$ *så er*

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Regneeksempel 8.6. Gitt den ortonormale basisen $u_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ for et underrom W. Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y} = (3, 6, -2, 4)$ ned på W.
Løsning: Vi har $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3}{2}$ og $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} + \frac{2}{2} - \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$. Derfor er

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = \tfrac{3}{2}\mathbf{u}_1 + \tfrac{7}{2}\mathbf{u}_2 = (\tfrac{5}{2}, 1, -\tfrac{5}{2}, -1)$$

La $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \end{bmatrix}$ være matrisen med vektorene i den ortogonale basisen som søylevektorer. Da er

$$U^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{y} \\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k^T\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_k \end{bmatrix}.$$

Derfor er

$$U(U^T\mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k.$$

Vi skriver det som et teorem

Teorem 8.4. *Hvis* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *er en* ***otonormal*** *basis for* W*, underrom i* $\mathbb{R}^n$*. Og* $\mathbf{y}$ *er en vektor i* $\mathbb{R}^n$ *så er*

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = UU^T\mathbf{y}.$$

UU^T kalles for **projeksjons-matrisen for** Proj_W. Vi løser samme eksempel som i problemet over

Regneeksempel 8.7. Gitt den ortonormale basisen $u_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ for et underrom W. Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y} = (3, 6, -2, 4)$ ned på W.
Løsning: Vi har

$$U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Projeksjonsmatrisen er

$$UU^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi multipliserer denne med $\mathbf{y}$ på søyleform

$$UU^T\mathbf{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ -5/2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

8.4 Gram Schmidt ortogonalisering

Nå som vi her sett hvor nyttig ortonormale basiser er så er det på tide å presentere en metode for å lage en ortonormal basis.

Teorem 8.5. *Gitt en basis* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *av et underrom* W *av* $\mathbb{R}^n$*. Vi danner en ortogonal basis* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *ved prosessen*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{v}_{k-1}}{\mathbf{v}_{k-1} \cdot \mathbf{v}_{k-1}}\mathbf{v}_{k-1} \end{aligned}$$

Regneeksempel 8.8. Finn en ortogonal basis til underrommet W av $\mathbb{R}^3$ utspennt av vektorene $\mathbf{x}_1 = (-1, 3, 0)$ og $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 2)$.
Løsning. Vi lar $v_1 = \mathbf{x}_1 = (-1, 3, 0)$. Deretter regner vi ut

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, 0) - \tfrac{-1}{10}(-1, 3, 0) = (0.9, 0.3, 2).$$

Vi har defor den ortogonale basisen $\{\mathbf{v}_1 = (-1, 3, 0), \mathbf{v}_2 = (0.9, 0.3, 2)\}$

Når vi har laget en ortogonal basis kan vi gjøre den ortonormal ved å normalisere hver av vektorene i basisen. En annen måte er å normalisere underveis i prosessen. Da har vi følgende modifikajson av teoremet over.

Teorem 8.6. *Gitt en basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_k\}$ av et underrom W av $\mathbb{R}^n$. Vi danner en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ved prosessen*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{u}_1 &= \tfrac{1}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \tfrac{1}{|\mathbf{v}_2|}\mathbf{v}_2 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3 &= \tfrac{1}{|\mathbf{v}_3|}\mathbf{v}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_k &= \mathbf{x}_k - (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}_{k-1} \\
\mathbf{u}_k &= \tfrac{1}{|\mathbf{v}_k|}\mathbf{v}_k
\end{aligned}$$

Regneeksempel 8.9. La W være utspennt av basisen $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, med $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 0, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (2, -1, 2, 0)$ og $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 4, 3)$. Bruk teoremet til å finne en ortonormal basis for W.
Løsning: Vi har $|\mathbf{x}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Derfor er $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{x}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$ en enhetsvektor. Videre har vi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{0} = (2, -1, 2, 0)$. Vi regner ut og finner $\mathbf{u}_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$. Til slutt har vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\
&= (1, 1, 4, 3) - 3 \cdot (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{2}{3}) - 3 \cdot (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0) \\
&= (-2, 0, 2, 1).
\end{aligned}$$

Normalisering av $\mathbf{v}_3$ gir $\mathbf{u}_3 = (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

I eksempelet har vi i funnet tre ortonormale vektorer. Om vi setter de inn som søyler i en matrise så får vi

$$Q = [\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Vi har da $Q^TQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8.5 QR-faktorisering

I mange nummeriske metoder er det nyttig å skrive en matrise A på formen $A = QR$, der Q er en matrise med ortogonale søyler og R er ne øvre diagonal matrise. Dette kalles for QR-faktorisering.

Setning 8.10 (QR-faktorisering). *La A være en $m \times n$ matrise med lineært uavhengige søyler. Da kan A faktoriseres ved $A = QR$ der Q er en $m \times n$ matrise med ortonormale søyler og R er en invertibel øvre triangulær $n \times n$ matrise med positive tall på diagonalen.*

- *Vi finner Q ved Gram Schmidt og normalisering*
- *Vi finner R ved $R = Q^T A$.*

Eksempel 8.7. Finn en QR-faktorisering av $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **Løsning:** Svar:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Når man gjør Gram Schmidt prosessen med normalisering underveis så får man R på veien. Det kan man se ved å skrive om alle trinnene i teorem 8.6

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= |v_1|\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{x}_2 &= (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + |v_2|\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{x}_3 &= (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + |v_3|\mathbf{u}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k &= (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}_{k-1} + |v_k|\mathbf{u}_k
\end{aligned}$$

Matrisen R får er derfor

$$R = \begin{bmatrix} |\mathbf{v}_1| & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_1 \\ 0 & |\mathbf{v}_2| & \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_2 \\ 0 & 0 & |\mathbf{v}_3| & \cdots & \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{v}_k| \end{bmatrix}.$$

Oppgaver fra kapittel 8

1. La vektorene $\mathbf{x} = [2, 4, -1]$, $\mathbf{y} = [4, 2, 1]$, $\mathbf{z} = [-1, -5, 1]$ og $\mathbf{w} = [-2, 1, 3]$ være gitt. Regn ut følgende indreprodukter.
   a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ c) $\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}$ e) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$
   b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ d) $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}$ f) $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

2. Normaliser vektorene i oppgave 1

3. Benytt deg av setning 8.2 til å normalisere vektorene
   a) $[6, 3, 2]$ d) $[5, -1, 3, 1]$
   b) $[5, -7, 1, 5]$ e) $[7, -8, -2, 2]$
   c) $[7, 4, -4]$ f) $[2, -10, 5, -2, 6]$

4. La vektorene $\mathbf{x} = [2, 4, -1]$, $\mathbf{y} = [4, 2, 1]$, $\mathbf{z} = [-1, -5, 1]$ og $\mathbf{w} = [-2, 1, 3]$ være gitt. Regn ut vinkelen mellom
   a) $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ c) $\mathbf{y}$ og $\mathbf{w}$ e) $\mathbf{x}$ og $\mathbf{w}$
   b) $\mathbf{x}$ og $\mathbf{z}$ d) $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ f) $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$

5. Finn ortogonal komplementet til underrommet W av $\mathbb{R}^n$ i hvert av tilfellene under.
   a) $n = 4$. $W = \text{Linspan}\{(1, 5, 0, 2), (2, -1, 4, 2)\}$.
   b) $n = 3$. $W = \{(x, y, z) | x = 2t, y = -t, z = 5t\}$.

6. Vis at $S = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ er en ortogonal vektormengde i hvert av tilfellende under.
   a) $\mathbf{y}_1 = (1, 0, 6, 2)$,
   $\mathbf{y}_2 = (4, -1, -2, 1)$,
   $\mathbf{y}_3 = (2, 7, 0, -1)$.
   b) $\mathbf{y}_1 = (1, 2, 0, 0, 2)$,
   $\mathbf{y}_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$,
   $\mathbf{y}_3 = (2, 1, -2, 2, -2)$.
   c) $\mathbf{y}_1 = (1, 2, 2)$,
   $\mathbf{y}_2 = (0, -1, 1)$,
   $\mathbf{y}_3 = (-4, 1, 1)$.

7. Bruk Gram Schmidt til å finne en ortonormal basis for underrommet W av $\mathbb{R}^n$ utspennt av vektorene:
   a) $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 2)$,
   $\mathbf{v}_2 = (-1, -3, 2, -2)$,
   $\mathbf{v}_3 = (4, -9, -2, 5)$
   b) $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 2, 0, 0)$,
   $\mathbf{y} = (2, 0, 14, -6, 2, 14)$,
   $\mathbf{z} = (4, 1, 5, -7, -9, 7)$

8. Finn QR-faktoriserintgen til
   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$
   b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 14 & 5 \\ 2 & -6 & -7 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 14 & 7 \end{bmatrix}$

KAPITTEL 9

GENERELLE VEKTORROM

9.1 Definisjon av generelle vektorrom

I kapittel 5 om vektorer i $\mathbb{R}^n$ leste dere om vektorer i planet $\mathbb{R}^2$ og vektorer i rommet $\mathbb{R}^3$. For eksemepel er tallparet $(4, 2)$ et element i $\mathbb{R}^2$. Vi kan se på $(4, 2)$ som koordinater til et punkt P i planet, men også som en vektor fra origo til punktet P. Mengden av endelig ordnede følger av reelle tall $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kaller vi for vektorrommet $\mathbb{R}^n$. I setning 5.1 ga jeg en liste med elleve regneregler for vektorregning. De ti første av disse reglene vil har en spesiell plass. Disse ti reglene er plukket ut av matematikere til for å gi en abstrakt beskrivelse av vektorrom. Det vil si at om vi regner med disse reglene så trenger vi ikke å tenke på om vi snakker om vektorer i planet, rommet eller for den saks skyld $\mathbb{R}^n$.

Definisjon 9.1 (Vektorrom). En mengde V med operasjonene addisjon og skalar multiplikasjon kalles et **vektorrom** hvis følgende *aksiomer* er oppfylt for alle $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ i V og alle skalarer a og b i $\mathbb{R}$.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Kommutativ lov)
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Assosiativ lov)
4. Det finnes en $\mathbf{0}$ i V slik at $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in V$.
5. For hver $\mathbf{v}$ i V så finnes en $-\mathbf{v}$ i V slik at $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
6. $a\,\mathbf{v} \in V$.
7. $a\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\,\mathbf{u} + a\,\mathbf{v}$. (Distributiv lov)
8. $(a + b)\,\mathbf{v} = a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{v}$. (Distributiv lov)
9. $a\,(b\,\mathbf{v}) = (a\,b)\,\mathbf{v}$.
10. $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Det er selvsagt nyttig med flere regler enn disse 10. Vi har for eksempel fjernet regelen $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Regelen $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ er viktig for effektivt å regne med vektorer og man bør selvsagt ha denne som en del av verktøykassen. Mange bruker også sunn intuisjon og erfaring fra fra regning med vektorer i planet. Da er det for eksempel opplagt at $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

I prinsippet kan alle andre regneregler for vektorer utledes fra disse ti aksiomene, men ingen av aksiomene kan utledes av de 9 øvrige aksiomene. De er derfor et minimalt sett av regler. Når det er sagt så gjør de ingen regler overflødig. Å kun bruke disse reglene uten å bruke noen ekstra antagelser er ikke lett. Det er heller ikke meningen at dere skal gjøre det i praksis. Aksiomene er først og fremst til for å sjekke om noe kan kalles for et vektorrom.

9.1.1 Utledning av noen regler fra aksiomene

Dette avsnittet er ment for de som undrer seg over hvordan man bygger videre på aksiomene. Det er kun ment å være en liten smakebit på hvordan denne delen av matematikke er oppbygd. De to første setningene kan virke opplagte.

Teorem 9.1 (Entydighet av 0). *Hvis V er et vektorrom så finnes et bare en vektor $\mathbf{0}$ med egenskapen i aksiom 4.*

Vi beviser dette teoremet med et direkte bevis. La $\mathbf{x} \in V$ oppfylle aksiom 4. Da er $\mathbf{v}+\mathbf{x} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in V$. Spesielt er dette også sant for $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Altså er $\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. For mange ser dette ut som en meningsløs aktivitet. Det er jo opplagt at det bare finnes en nullvektor i de eksemplene vi har sett på. I planet, for eksempel, er $(0, 0)$ opplagt den eneste vektoren som oppfyller aksiom 4. Legg merke til at bare to aksiomer er brukt til nå. Disse to er aksiom 2 og aksiom 4. En lignende setning har vi for $-\mathbf{v}$ i aksiom 5.

Teorem 9.2 (Entydighet av $-\mathbf{v}$). *For hver vektor $\mathbf{v}$ i V finnes bare en vektor $-\mathbf{v}$ med egenskapen i aksiom 5*

Beviset av denne setningen ligner på den foregående. Målet er å vise at om både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ tilfredstiller aksiom 5 for en fritt valgt $\mathbf{v}$ så må $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Da har vi at $\mathbf{x} = \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}+(\mathbf{v}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}+\mathbf{v})+\mathbf{y} = (\mathbf{v}+\mathbf{x})+\mathbf{y} = \mathbf{0}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{0} = \mathbf{y}$. Legg merke til at beviset av dette resultatet som man ofte tar for gitt bruker fire aksiomer. Vi har brukt aksiomene 2, 3, 4 og 5. Vi avslutter dette avsnittet ved å nevne et knippe andre regneregler som gjelder for alle vektorrom.

Føste av disse reglene bør være kjent. Hvor kommer regelen fra som vi bruker til å løse lineære likninger?

Teorem 9.3. *For alle vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ så er $\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ hvis og bare hvis $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.*

Vi legger til $-\mathbf{c}$ på hver side av likningen. Det gir
$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})+(-\mathbf{c})=(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(-\mathbf{c})$$
Assosiativ lov, dvs aksiom 3 gir
$$\mathbf{a}+(\mathbf{c}+(-\mathbf{c}))=\mathbf{b}+(\mathbf{c}+(-\mathbf{c}))$$
Aksiom 5 gir
$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{b}+\mathbf{0}$$
Til slutt bruker vi aksiom 4 og får $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

Teorem 9.4 (Noen enkle konsekvenser). *For hver vektor $\mathbf{u}\in V$ og skalar c;*

(i) $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(ii) $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$

(iii) $-\mathbf{v}=(-1)\,\mathbf{v}$

La oss vise (i) ved kun å bruke aksiomenen og teorem 9.3. På den ene siden har vi fra distributiv lov i aksiom 8 og at 0=0+0 at $0\mathbf{u}=(0+0)\mathbf{u}=0\mathbf{u}+0\mathbf{u}$. På den andre siden har vi fra aksiom 4 at $0\mathbf{u}=0\mathbf{u}+\mathbf{0}$. Vi har derfor at $0\mathbf{u}+0\mathbf{u}=0\mathbf{u}+\mathbf{0}$. Fra teorem 9.3 og aksiom 2 (kommutativ lov) at $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

9.1.2 Nye og gamle eksempler på vektorrom.

Med nye eksempeler mener vi ikke at de er fra i år eller nylig. Vi mener at de er nye for studenter som leser om vaktorrom beskrevet gjennom aksiomer. De gamle eksemplene er planet, det tredimensjonale rommet og mengden $\mathbb{R}^n$ av alle n-tupler $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Her følger en liste av noen vektorrom.

- $\mathbb{R}^n$ er et vektorrom når $n\geq 1$.
- Mengden $\mathbb{P}_n$ av alle polynomer med grad mindre eller lik n danner et vektorrom.
- Mengden av alle reelle funksjoner definert på $\mathbb{R}$ danner et vektorrom.
- Mengden $M_{m\times n}$ av alle $m\times n$ matriser danner et vektorrom.
- Mengden av alle kontinuerlige reelle funksjoner definert på intervallet $[0,1]$ danner et vektorrom.
- Mengden av alle uendelige følger.
- Mengden av alle konvergente uendelige følger.

Vi insisterer på kalle konstante funksjoner $f(x)=k$ for polynomer. Uten det vil ikke mengden $\mathbb{P}_n$ være et vektorrom. Legg merke til at mange av eksemplene over er mengder av funksjoner. Vi kan undersøke noen aksiomer for mengden av alle reelle funksjoner definert på $\mathbb{R}$. La $f(x)$ og $g(x)$ være to reelle funskjoner. Vi definerer da den reelle funksjonen $h(x)=f(x)+g(x)$. Aksiom 1 er da oppfylt. Om dere tenker dere om så er $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$. Altså er aksiom 2 er også oppfylt. Sjekk gjerne at alle aksiomene er oppfylt. Det er ganske innlysende om dere tar for dere aksiom for aksiom.

9.2 Underrom

Begrepet underrom brukes mye i andvendelser av matematikk. Lagring av lyd og bilder i en datamaskin benytter seg ofte av komprimering for å spare plass. Teorien om vektorrom og underrom spiller en avgjørende rolle i komprimering.

Definisjon 9.2. En undermengde W av V kalles et **underrom** av V hvis W selv er et vektorrom.

Et eksempel er ned og oppsampling av bilder. Et gitt digitalt bilde består av 480x640 piksler kan lagres i en floating points array av lengde 307200. En simpel komprimering er å ta gjennomsnittet av 2x2 blokker. Dimensjonen til det nye bildet er 240x320 piksler og det tar opp en fjerdedel av minnet.

Å sjekke om et delmengde W av et vektorrom V er et vektorrom er lettere enn en skulle tro. De fleste aksiomene er automatisk oppfylt siden W er en delmengde av V. For eksempel om $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer i W så er de også vektorer i V. Derfor gjelder aksiom 2 for V også for W. Det er faktisk kun aksiom 1 og aksiom 6 som må sjekkes. Dette er innholdet i følgende setning.

Teorem 9.5. *En undemende av W av V er et underrom av V hvis og bare hvis følgende to betingelser er oppfyllt*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *er med i W hver gang $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er med i W*
2. $a\,\mathbf{u}$ *er med i W hver gang $\mathbf{u}$ er med i W og a er en skalar.*

En konsekvens av teoremet er verdt å nevne separat. Hvis vi setter $a = 0$ i punkt 2 i teoremet så får vi at $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ alltid er med i alle underrom.

Korollar 9.1. *Hvis W er et underrom av V så er $\mathbf{0}$ med i W.*

9.2.1 Eksempler på underrom

Vi skal se litt på forskjellige underrom. Mengden V selv er et underrom av V. Mengden $\{\mathbf{0}\}$ som består av bare nullvektoren er et underrom av V. Rette linjer igjennom origo ($\mathbf{0}$) er underom av $\mathbb{R}^2$. Rette linjer og plan igjennom origo ($\mathbf{0}$) er underom av $\mathbb{R}^3$. Om A er en $3x3$ matrise så har likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ enten uendelig mange løsninger eller Dette er underrom som vi har sett før.

Mengden $\mathbb{P}_n$ av alle polynomer av grad mindre eller lik n er et underrom av vektorrommet av alle reelle funksjoner. La oss sjekke at $a\,p(x)$ er et polynom av grad mindre eller lik n når a

er et reelt tall og $p(x)$ er et polynom av grad mindre eller lik n. La $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. Da er $a\,p(x) = a\,c_n x^n + a\,c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a\,c_1 x + a\,c_0$.

Ordet polynom betyr mange navn. I matematikken betyr det mange ledd. Leddene i polynomet er $c_n x^n$, $c_{n_1}x^{n-1}$, osv. Disse leddene kalles for monomer. De er på formen en konstant ganger en potens av x. Potensene av x spiller derfor en viktig rolle for polynomer da de er deres byggesteiner.

Vi har snakket om basiser og lineære spenn av vektorer i $\mathbb{R}^n$ i avsnittet 5.4.3. Vi skal bruke samme terminologi for funksjoner.

9.2.2 Lineær kombinasjon og lineære spenn

Definisjon 9.3.

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \cdots + a_k\mathbf{v}_k$$

kalles en **lineær kombinasjon** av vektorene $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i V. Mengden av alle mulige lineærkombinasjoner av S kalles det **lineære spennet** av S. Vi skriver $\mathrm{Span}(S)$.

Polynomet $p(x) = 3x^2 + 5x - 4$ er et element i vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad 2 eller lavere. Det samme er monomene x^2, x og 1. De er også elementer i vektorrommet $\mathbb{P}_2$. Ved å bruke ordene fra definisjon 9.3 kan vi si at $p(x) = 3x^2 + 5x - 4$ er en *lineær kombinasjon* av monomene x^2, x og 1. Med andre ord er $p(x) = 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + (-4) \cdot 1$. Faktisk kan alle polynomer av grad 2 eller lavere skrives som en lineærkombinasjon av monomene x^2, x og 1.

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \cdot 1.$$

I en datamaskin lagres polynomer som en vektor, eller om du vil en en-dimensjonal `array` i `numpy`, hvis vi snakker om Python. Det er bare koeffisientene som lagres. Metoden `nest` i Sauer [8] tar en array av koeffisienter og som input. Vi kan addere polynomer ved å legge sammen koeffisientene. Foreksempel er $(4x^2 + 3x - 3) + (5x^2 - x + 5) = (4 + 5)x^2 + (3 - 1)x + (-3 + 5) = 9x^2 + 2x + 2$.

Lineære spenn er vektorrom siden de er et underrom av et vektorrom. Beviset av følgende setning er ikke så vanskelig men vi gir det ikke her da vi ikke vil fokusere så mye på bevis.

Teorem 9.6. *$Span(S)$ er et underrom av V. Vi kaller $Span(S)$ for underommet generert av vektorene i S.*

Vi så over at monomene 1, x og x^2 er tilstrekkelig for å utrykke alle polynomer av grad 2 og lavere. Spesielt har vi at $\mathbb{P}_2 = Span\left(\{1, x, x^2\}\right)$. Det stopper ikke her, vi kan også bruke andre funksjoner.

9.2.3 Tre forskjellige basiser for polynomrom.

9.2.4 Basiser for polynomrom

Vi har sett at vektorrommet $\mathbb{P}_2$ er utspennt av de tre monomene 1, x og x^2. Som vektorer er monomene 1, x og x^2 lineært uavhengig. Dvs at $c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ hvis og bare hvis $c_2 = c_1 = c_0 = 0$. En lineært uavhengig mengde av vektorer som utspenner et vektorrom kalles en **basis**. Mengden $\{1, x, x^2\}$ er en basis for vektorrommet $\mathbb{P}_2$. Dette er ikke eneste basis til $\mathbb{P}_2$.

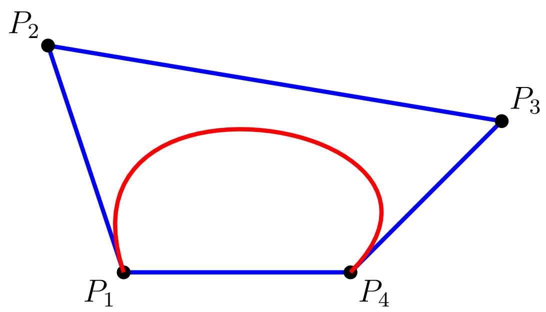
9.2.5 Basiser for Bezierkurver

I følgende eksempel vil dere se man kan ha flere basiser for et vektorrom. I Sauer [8] kan dere lese om Bezierkurver. En Bezierkurve er en kurve som er parametrisert ved $(x(t), y(t))$, der $x(t)$ og $y(t)$ er polynomer av grad høyst 3 i variabelen t. Vi skriver

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x + b_xt + c_xt^2 + d_xt^3 \\ y(t) &= a_y + b_yt + c_yt^2 + d_yt^3. \end{aligned}$$

Her er basisen $1, t, t^2, t^3$ brukt til å presentere polynomene. En bezierkurve kan også utrykkes ved hjelp av en annen basis. $B(t) = (1-t)^3P_1 + 3t\,(1-t)^2P_2 + 3t^2\,(1-t)P_3 + t^3P_4$ Kurvens starter i punktet P_1 og stopper i punktet P_4. Punktene P_2 og P_3 er kontrollpunkter.

Figur 9.1 viser et eksempel på en Bezierkurve. Polynomene $(1-t)^3$, $3t\,(1-t)^2$, $3t^2\,(1-t)$

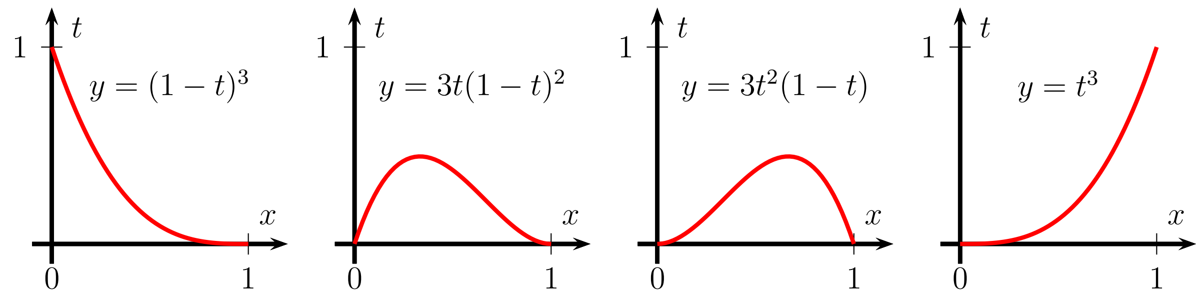


Figur 9.1: Bildet viser en bezier kurve som starter i punktet P_1 og ender i punktet P_4.

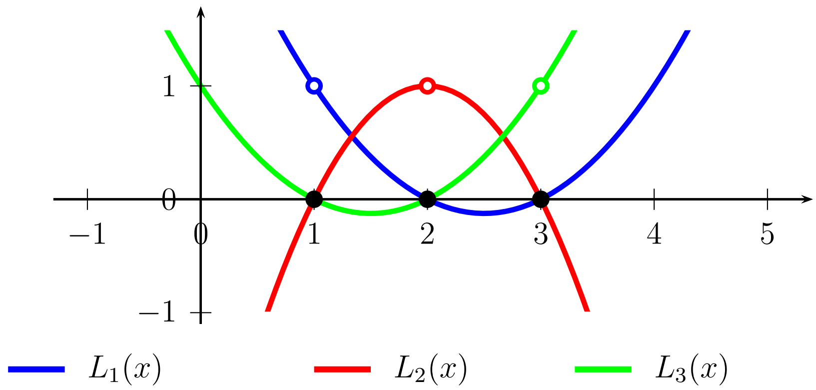
og t^3 kalles for Bezier-basis funksjoner. De er også kjent som Bernsteinpolynomene av tredje grad. Figur 9.2 under viser graferne til Bezier-basis funksjonene.

9.2.6 Lagrange basiser.

Interpolering av punkter betyr å finne en kurve som går gjennom en gitt mengde av kurver. Lagrangepolynomer er tilpasset det formålet. Gitt at vi ønsker å finne et annengradspolynom som går gjennom punktene (x_1, y_1), $(x2, y_2)$, og (x_3, y_3). Vi bruker da en basis som består av tre polynomer, $L_1(x)$, $L_2(x)$ og $L_3(x)$. Disse er valgt slik at $L_i(x_i) = 1$ og $L_i(x_j) = 0$ for



Figur 9.2: Grafene viser de fire basisfunkunksjonerne for Bezierkurver.



Figur 9.3: Figuren viser Lagrangebasisene for polynomer av andre orden for interpolering med $x_i = 1, 2, 3$.

$i \neq j$. Disse polynomene er gitt ved

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \tag{9.1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \tag{9.2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{9.3}$$

Lagrangepolynomene for interpolering med x-verdiene $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ og $x_3 = 3$ er tegnet i figur 9.3 Om vi hadde andre verdier for x_1, x_2 og x_3 ville vi fått tre andre lagrangepolynomner. En lineær kombinasjon av lagrange $p(x) = y_1\, L_1(x) + y_2\, L_2(x) + y_3\, L_3(x)$ interpolerer punktene (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3).

9.2.7 Basis for funskjonsrom

En mengde S av vektorer er **lineært avhengig** hvis det finnes et element i S som kan skrives som en lineær kombinasjon av de øvrige. Om S ikke er lineært avhengig kalles den for **lineært uavhengig**. Følgende argument viser at lagrangebasisen $\{L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$ i figur 9.3 er lineært uavhengig. Hvis $p(x) = c_1\, L_1(x) + c_2\, L_2(x) + c_3\, L_3(x)$ er nullfunksjonen, dvs at $p(x) = 0$ for alle x, så er $0 = p(1) = c_1$, $0 = p(2) = c_2$ og $0 = p(3) = c_3$. Det er grunnen til at begrepet “lagrangebasis” ender på ordet basis. En **basis** B til et vektorrom V er en lineært uavhengig mengde B av vektorer i V slik at $V = \mathrm{Span}(B)$.

9.3 Kort om anvendelser

Automatisk gjenkjenning av mønstre brukes mer og mer i hverdagen. Mange biler kan "se" veien foran dem og "oppdage" hindringer. Lineær algebra danner grunnlaget for mønstergjenkjenning. Man modellerer et bilde som en matrise der elementene er lysintensiteten til en piksel.

Oppgaver for kapittel 9

1. a) Bruk aksiomene i definisjon 9.1 og teorem 9.3 til åvise at $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ for alle reelle tall c.

   b) Bruk aksiomene i definisjon 9.1 og teorem 9.3 (1) til å vise at $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i V.

2. Bevis teorem 9.6 ved å bruke teorem 9.5.

3. Vis at mengden $\{(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t), t^3\}$ av polynomer i t er en basis for vektorrommet av alle polynomer i variabelen t av grad høyst 4.

KAPITTEL 10

LAPLACETRANSFORM

10.1 Definisjoner

10.1.1 Introduksjon

Tidligere har vi sett på metoder for å løse differensiallikninger på formen

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(t).$$

Dette er en andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter a og b. Likninger av denne typen kommer i mange anvendelser. Funksjonen $f(t)$ bestemmes gjerne fra en pådyttet ytre kraft i et mekanisk system eller et varierende signal i en elektrisk krets.

For spesielle funksjoner $f(t)$ kan man bruke ubestemte koeffisienters metode eller variasjon av parametre. Begge disse metodene fungerer greit når $f(t)$ er en kontinuerlig funksjon. Når $f(t)$ ikke er kontinuerlig er begge metodene bortimot ubrukelige.

10.1.2 Stykkvis kontinuerlige funksjoner

Både i elektriske kretser og i mekaniske systemer kan det hende at den ytre påvirkningen $f(t)$ beskrives av en funksjon som ikke er kontinuerlig.

Definisjon 10.1. En funksjon f kalles **stykkvis kontinuelig** på et intervall hvis den har et endelig antall brudd i intervallet og at høyre og venstreside grensen er endelig i hvert brudd. Et slikt brudd kalles for et **sprang**.

Eksempel 10.1. Funksjonen f definert ved

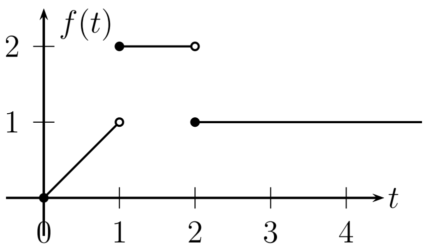
$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{for } 0 \le t < 1 \\ 2, & \text{for } 1 \le t < 2 \\ 1, & \text{for } t \ge 2 \end{cases}$$

er stykkvis kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$. Figur 10.1 viser grafen til $f(t)$. Funksjonen har brudd i $t = 1$ og $t = 2$. I $t = 1$ er venstreside-grensen lik

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1,$$

mens høyreside-grensen er

$$\lim_{t \to 1^+} f(t) = 2.$$



Figur 10.1: Funksjonen fra eksempel 10.1.

Merknad 10.1. Kontinuerlige funksjoner regnes også som stykkvis kontinuerlig funksjoner.

Et viktig spesialtilfelle er sprangfunksjonen. Den er gitt som følger

Definisjon 10.2. Sprangfunksjonen er gitt ved

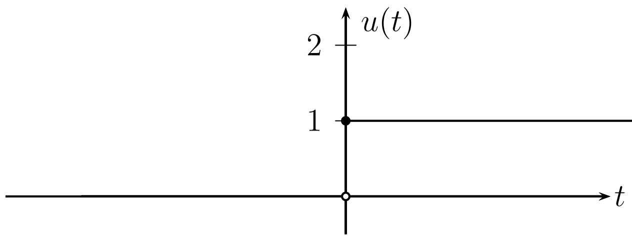
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Figur 10.2 viser grafen til sprangfunksjonen.

Sprangfunksjonen kan brukes til å skrive om funksjoner på delt forskrift. For eksempel kan funksjonen $f(t)$ fra eksempel 10.1 skrives som

$$f(t) = t + u(t-1)(2-t) - u(t-2).$$

Følgende eksempel gir en oppskrift på hvordan det kan gjøres.



Figur 10.2: Sprangfunksjonen.

Eksempel 10.2 (Omskriving av funksjon på delt forskrift). La

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & , 0 \leq t \leq a_1 \\ f_2(t) & , a_1 < t \leq a_2 \\ f_3(t) & , a_2 < t \leq \infty \end{cases}$$

Da er $f(t) = f_1(t) + u(t - a_1)(f_2(t) - f_1(t)) + u(t - a_2)(f_3(t) - f_2(t))$.

Merknad 10.2. Formelen i eksempelet over stemmer ikke på intervallgrensene. Det fører heldigvis ikke til alvorlige problemer og vi velger å overse det.

Regneeksempel 10.1. Skriv om funksjonen $f(t)$ ved hjelp av sprangfunskjoner.

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & , t \in [0, \pi/2)^1 \\ 1 & , t \in [\pi/2, \infty) \end{cases}$$

Løsning: Vi bruker oppskriften fra eksempel 10.2.

$$f(t) = \sin t + u(t - \pi/2)(1 - \sin t).$$

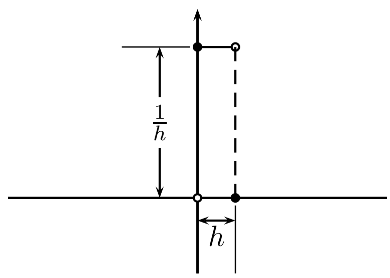
Noen ytre påvirkninger på et system er voldsomme. En gnist i et system, et lyn, to legemer som støter i hverandre. Felles for disse er at en viss energi overføres i et kort tidsrom $\Delta t = h$. Til dette bruker vi impulsfunksjonen.

[1] Tegnet $\in$ betyr "element i". Når vi skriver $t \in M$ betyr det at t er med i mengden M.

Definisjon 10.3. **Impulsfunksjonen** med bredde h er definert ved

$$\delta_h(t) = \frac{u(t) - u(t-h)}{h}.$$

Figur 10.3 viser grafen til en typisk impulsfunksjon.



Figur 10.3: Impulsfunksjon med bredde h.

En ekstem kort impuls kan modelleres ved hjelp av en såkalt **Dirac-deltafunksjon**. Når h blir veldig liten blir $1/h$ veldig stor. I grensen når h går mot null blir $1/h$ uendelig stor.

Definisjon 10.4. Dirac-deltafunksjonen er er grensen

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t).$$

Dirac-deltafuksjonen en egentlig ikke en ordentlig funksjon, men en såkalt distribusjon. For vårt bruk i vil vi bare trenge å kjenne egenskapene til $\delta(t)$. Vi vil ikke trenge å vite hva en distribusjon egentlig er.

Setning 10.1. *Dirac-deltafunksjonen tilfredstiller følgende (noe merkelige) egenskaper.*

1. $\delta(t) = 0$ *for* $t \neq 0$,
2. $\lim_{t \to 0} \delta(t) = \infty$,
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$

Den siste egenskapen krever at $f(t)$ *er en kontinuerlig funksjon.*

Oppgaver fra kapittel 10.1

1. Skriv om funksjonene ved bruk av sprangfunksjonen.

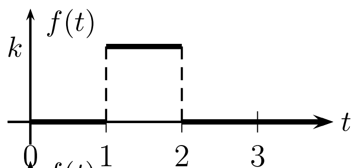
   a) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

   b) $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 4 \\ 0 & t \ge 4 \end{cases}$

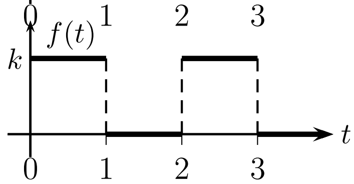
   c) $h(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$

2. Skriv om funksjonene ved bruk av sprangfunksjonen. I a), b) og d) er k maksverdien til funksjonen. Den er ikke bestemt i oppgaven.

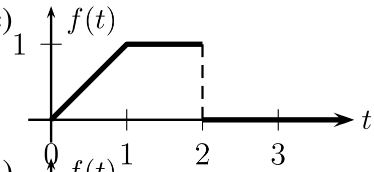
   a)



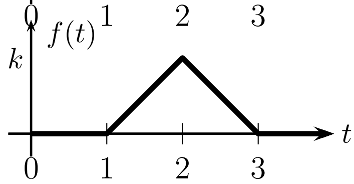
   b)



   c)



   d)



3. Regn ut integralene

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^t\,\delta(t-1)\,\mathrm{d}t.$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \delta(t-\pi)\,\cos t\,\mathrm{d}t.$

   c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \delta(t)\,\frac{1+t}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$

   d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^t\,\delta(t+2)\,\mathrm{d}t.$

4. Regn ut integralet $\displaystyle\int_0^{\infty} \delta_{1/2}(t)\,\mathrm{d}t,$ der $\delta_{1/2}(t)$ er impulsfunksjonen med bredde $1/2$.

5. Vis at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\,\mathrm{d}t = 1$

10.2 Laplacetransform

10.2.1 Definisjon av Laplace

Laplacetransform, eller ofte bare Laplace, er en såkalt integraltransform. Det vil si et integral som omformer en funksjon $f(t), t \ge 0$, til en annen funksjon $(\mathcal{L}f)(s)$. Laplace inngår i metoder for løsning av differensiallikninger. Metoden er spesielt nyttig i for eksempel kretsteknikk.

Definisjon 10.5. Laplacetransformen til en funskjon $f(t), t \ge 0$, er funksjonen $\mathscr{L}(f)(s)$ definert ved

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{10.1}$$

Den **inverse Laplacetransformasjonen** $\mathscr{L}^{-1}(F(s))(t)$ til $F(s) = \mathscr{L}(f)(s)$ er gitt ved

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s))(t) = f(t).$$

Integralet som regnes ut er avhengig av verdien til s det gjør at vi får en funksjon av s.

Merknad 10.3 (Til orientering). Til vårt bruk er det ikke nødvendig behandle definisjonsområdet til en Laplacetransform. Du kan tenke på s som en reell variabel uten at det skaper problemer. Egentlig tar variabelen s verdier i det komplekse tallplanet. Definisjonsområdet til $F(s)$ er alle komplekse tall s der integralet $\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$ konvergerer.

Vi vil nå se på et enkelt eksempel.

Eksempel 10.3. Sprangfunskjonen $u(t)$ har Laplacetransform

$$\mathscr{L}\left(u(t)\right)(s) = \int_0^\infty u(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^b = \frac{1}{s}.$$

Funksjonen $u(t)$ kalles også for Heavisidefunksjonen eller på engelsk unit step function.

Eksempel 10.4. På liknende måte regner vi ut den Laplacetransformerte av funksjonen $f(t) = t$

$$\mathscr{L}\left(t\right)(s) = \int_0^\infty t\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[t\,\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{1}{-s^2}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Eksempel 10.5. Vi regner også ut Laplace av eksponensialfunksjonen e^{at}

$$\mathscr{L}\left(e^{at}\right)(s) = \int_0^\infty e^{at}\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a-s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

10.2.2 Magien bak Laplace

For å forstå nytteverdien av Laplacetransformasjoen er det nyttig å se på noen av dens egenskaper. Grunnen til at Laplace undervises er dens styrke i å forenkle løsningsprosessen av initialverdiproblemer. Prosessen består av følgende tre trinn.

1. Et initialverdiproblem omformes til en algebraisk likning.

2. Den algebraiske likningen løses ved hjelp av kun algebra.

3. Løsningen i trinn to omformes tilbake for å gi løsningen på det opprinnelige initialverdiproblemet.

En viktig egenskap til Laplacetransformasjonen er at den er lineær.

Setning 10.2 (Linearitet). *La $f(t)$ og $g(t)$ være funksjoner definert for $t \geq 0$ med Laplacetransformasjoner $F(s)$ og $G(s)$. Lineærkombinasjonen $h(t) = a\, f(t) + b\, g(t)$ der a og b er konstanter har Laplacetransformasjon*

$$H(s) = a\, F(s) + b\, G(s).$$

Hvis $f(t)$ har Laplacetransformasjon $F(s)$ så har $f'(t)$ Laplacetransformasjonen $s\,F(s) - f(0)$. Vi ser dette ved følgende utregning der vi bruker delvis integrasjon.

$$\mathscr{L}\left(f'\right)(s) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty s\, f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = -f(0) + s\, F(s).$$

Det er blant annet denne egenskapen som vi bruker når vi skal løse en differensiallikning ved hjelp av Laplace.

Regneeksempel 10.2. Vi ser på følgende differensiallikning.

$$y' - 2y = t, \quad y(0) = 1$$

Vi anvender Laplacetransformen på begge sider av likhetstegnet.

$$-y(0) + s\, Y(s) - 2\, Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Resultatet er ikke en differensiallikning, men en likning vi kan løse med algebra. Vi løser likningen for $Y(s)$ og får

$$Y(s) = \frac{1+s^2}{s^2(s-2)}.$$

Det viste seg at det var mye enklere å finne $Y(s)$ enn $y(t)$ direkte. Neste utfordring er å finne $y(t)$. Du spør muligens om det var verdt å bruke Laplace når det viser seg å være ekstra arbeid å finne $y(t)$ fra $Y(s)$. Vi skal komme tilbake til dette senere og vi skal se at Laplace virkelig er nyttig.

Først finner vi $y(t)$ fra $Y(s)$. Forenkling av utrykket for $Y(s)$ er helt sentralt i metoden, som du kommer til å se snart. Vi skriver om $Y(s)$ ved hjelp av delbrøksoppspalting. Det vil si at vi skriver $Y(s)$ som en sum av enklere brøker som har faktorene fra nevneren til $\frac{1+s^2}{s^2(s-2)}$ i nevnerene:

$$\frac{1+s^2}{s^2(s-2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2}.$$

Vi multipliserer med $s^2(s-2)$ og får

$$1 + s^2 = A(s-2) + B(s^2 - 2s) + C\, s^2 = -2A + (A - 2B)s + (B + C)s^2.$$

Vi får $A = -1/2$, $B = -1/4$ og $C = 5/4$. Vi har derfor

$$Y(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

Veien videre er å sammenlikne hvert ledd med Laplacetransformasjonene vi har gjennomført til nå, nemlig $u(t)$, t og e^{at}. Vi får derfor

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}u(t) + \tfrac{5}{4}e^{2t}.$$

Tabeller for Laplacetransformasjoner vil være svært nyttige for å finne $y(t)$ og til å utføre Laplace transformasjonen av likningene. Noen Laplacetransformasjoner er beskrevet i tabell 10.1 på side 183.

Oppgaver fra kapittel 10.2

1. Finn Laplacetransformasjonen til følgende funksjoner ved hjelp av definisjonen.
   a) $\cos bt$ b) $\sin bt$
   c) $e^{at}\cos bt$ d) t^2
   e) $e^{at}\sin bt$ f) t^3

2. Finn Laplacetransformasjonen til følgende funksjoner ved hjelp av tabell 10.1 på side 183. Du kan også få bruk for setning 10.2 og trigonometriske identiteter.
   a) $a\,t + b$ b) $4t^2 - 1$
   c) $\cos^2 t$ d) $\sin^2 t$
   e) $\cos^2 \omega t$ f) $\sin^2 \omega t$

3. Finn Laplacetransformasjonen til funksjonene i oppgave 1 i seksjon 10.1 ved hjelp av definisjonen.

4. Finn Laplacetransformasjonen til funksjonene i oppgave 2 i seksjon 10.1.

5. Finn den inverse Laplacetransformasjonen $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)$ til følgende $F(s)$ ved hjelp av tabell 10.1 på side 183 og eventuelt setning 10.2.
   a) $\dfrac{1}{s-4}$ b) $\dfrac{2}{s}$
   c) $\dfrac{2}{s^2+4}$ d) $\dfrac{2s}{s^2+9}$
   e) $\dfrac{a}{s^3} + \dfrac{b}{s^2} + \dfrac{c}{s}$ f) $\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s^2}$

6. Finn den inverse Laplacetransformasjonen $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)$ til følgende $F(s)$ ved hjelp av tabell 10.1 på side 183 og eventuelt setning 10.2. Du vil få bruk for delbrøksoppspalting.
   a) $\dfrac{1}{(s^2+4)(s-1)}$ b) $\dfrac{1-s}{(s-2)(s-3)}$
   c) $\dfrac{s^2+1}{(s^2+4)(s-1)}$ d) $\dfrac{2s}{s(s^2+9)}$
   e) $\dfrac{1}{s^2-4}$ f) $\dfrac{1}{s(s-1)^2}$

10.3 Laplace transformasjon og differensiallikninger

10.3.1 Derivasjon i tidsområdet.

I forrige kapittel brukte vi Laplacetransformasjon for å forenkle en førsteordens lineær differensiallikning. Vi kan gjøre det samme for andre ordens, tredje ordens og høyere ordens lineære differensiallikninger. Følgende egenskap er nyttig til det formålet.

Setning 10.3. *Hvis $y(t)$ er n ganger deriverbar og $y(t)$ har Laplacetransform $Y(s)$ så har $y^{(n)}(t)$ Laplacetransform*

$$s^n\,Y(s) - y^{(n-1)}(0) - sy^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-2}y'(0) - s^{n-1}y(0).$$

Bevis. Setningen er allerede vist for $n = 1$. Anta at den er sann for $n = k$. Vi skal vise at den er sann for $n = k + 1$. La $h(t) = y^{(k)}(t)$. Laplacetransformasjonen til $h'(t) = y^{(k+1)}(t)$ er

$$\begin{aligned} &s\,H(s) - h(0) \\ &\quad = s\left(s^k\,Y(s) - y^{(k-1)}(0) - sy^{(k-2)}(0) - \cdots - s^{k-2}y'(0) - s^{k-1}y(0)\right) - y^{(k)}(0) \\ &\qquad = s^{k+1}\,Y(s) - y^{(k)}(0) - sy^{(k-1)}(0) - \cdots - s^{k-1}y'(0) - s^k y(0). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Setningen er dermed vist ved induksjon. □

Vi kommer til å bruke følgende spesialtilfeller.

$$\mathscr{L}\left(y'(t)\right) = sY(s) - y(0) \tag{10.3}$$

$$\mathscr{L}\left(y''(t)\right) = s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) \tag{10.4}$$

Eksempel 10.6. Vi kan bruke 10.3 til å regne ut $\mathscr{L}\left(e^{at}\right)$:

La $f(t) = e^{at}$. Da er $f'(t) = a\,e^{at} = a\,f(t)$. På den ene siden er

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\right) = s\,F(s) - f(0) = s\,F(s) - 1.$$

På den andre siden er

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\right) = \mathscr{L}\left(a\,f(t)\right) = a\,F(s).$$

Vi har derfor likningen

$$s\,F(s) - 1 = a\,F(s)$$

som vi løser og får

$$F(s) = \frac{1}{s-a}.$$

10.3.2 Løsning av lineære 2.-ordens differensiallikninger

Setning 10.3 brukes til å skrive om en differensiallikning til en ren algebraisk likning. Initialverdiproblemet

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

skrives om ved å bruke at $\mathscr{L}(y'(s))(s) = sY(s) - y(0)$ og $\mathscr{L}(y''(s))(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$. I stedet for å løse initialverdiproblemet så løser vi

$$(s^2 + as + b)Y - sy(0) - y'(0) - ay(0) = R(s)$$

og finner $Y(s)$. Deretter finner vi $y(t)$.

Regneeksempel 10.3. Løs initialvediproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 5\cos t, t \geq 0, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Løsning: Laplacetransform gir

$$s^2Y - s\,y(0) - y'(0) + 2sY - 2y(0) + 2Y = 5\frac{s}{1+s^2}.$$

Vi erstatter $y(0)$ og $y'(0)$ med deres verdier.

$$s^2Y + 2sY + 2Y = \frac{s}{1+s^2}.$$

Denne likningen har løsning

$$Y = \frac{5s}{(1+s^2)(s^2+2s+2)}.$$

For å finne $y(t)$ utfører vi først en delbrøksoppspalting av høyresiden

$$\frac{5s}{(1+s^2)(s^2+2s+2)} = \frac{As+B}{1+s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

Forenkling gir

$$5s = (As+B)(s^2+2s+2) + (Cs+D)(1+s^2)$$

Utregning av parantesene gir

$$5s = As^3 + 2As^2 + 2As + Bs^2 + 2Bs + 2B + Cs + D + Cs^3 + Ds^2.$$

Samling av ledd av samme orden

$$5s = (A+C)s^3 + (2A+B+D)s^2 + (2A+2B+C)s + (2B+D).$$

Vi løser sytemet av likninger

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 2A + B + D &= 0 \\ 2A + 2B + C &= 5 \\ 2B + D &= 0 \end{aligned}$$

Systemet har løsning $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$, $D = -4$. Vi setter inn i yttrykket for Y

$$Y = \frac{s+2}{1+s^2} + \frac{-s-4}{(s+1)^2+1}.$$

$$Y = \frac{s}{1+s^2} + \frac{2}{1+s^2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{(s+1)^2+1}.$$

Vi slår opp i tabell 10.1 over Laplacetransformasjoner på side 183 og finner

$$y(t) = \cos t + 2\sin t - e^{-t}\cos t - 3e^{-t}\sin t$$

Oppgaver fra kapittel 10.3

1. Bruk oppskriften i eksempel 10.6 til å regne ut

   a) $\mathscr{L}(t) = \dfrac{1}{s^2}$
   b) $\mathscr{L}(t^2) = \dfrac{2}{s^3}$
   c) $\mathscr{L}(\cos\omega t) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
   d) $\mathscr{L}(\sin\omega t) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

2. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace.

   a) $y'' + 4y = 0,$
   $y(0) = 0, y'(0) = 0.$
   b) $y'' - 2y' + 2y = 0,$
   $y(0) = 0, y'(0) = 1.$
   c) $y'' - y = 0,$
   $y(0) = 1, y'(0) = 0.$
   d) $y'' + 2y' + 2y =,$
   $y(0) = 0, y'(0) = 2.$

3. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace. Gi svaret som en funksjon i s. Dvs, du behøver ikke å utføre invers Laplace.

   a) $y'' + 4y = \delta(t-\pi),$
   $y(0) = 0, y'(0) = 0.$
   b) $y'' + 9y = \delta(t-3\pi),$
   $y(0) = 0, y'(0) = 1.$
   c) $y'' + y = \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi),$
   $y(0) = 0, y'(0) = 0.$
   d) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-2\pi),$
   $y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace.

   a) $y'' - 4y = \cos t,$
   $y(0) = 1, y'(0) = 0.$
   b) $y'' + 9y = \sin t,$
   $y(0) = 0, y'(0) = 1.$
   c) $y'' - 2y' + y = e^t,$
   $y(0) = 0, y'(0) = 2.$
   d) $y'' + 5y' + 6y = t,$
   $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

10.4 Forskyvningsteoremene

10.4.1 Forskyvning i t-rommet

Dette del-kapittelet handler om Laplacetransformasjonen av stykkvis kontinuerlige funskjoner. Dette gjøres ved å bruke sprangfunksjoner og linearitet.

Setning 10.4. *Hvis funksjonen $f(t)$ har Laplacetransformasjonen $F(s)$, har $f(t-a)u(t-a)$ Laplacetrasnformasjonen $e^{-as}F(s)$.*

$$\mathscr{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) = e^{-as}F(s).$$

Invers Laplacetransform av $e^{-as}F(s)$ er gitt ved

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right) = f(t-a)u(t-a).$$

Bevis. Det er tilstrekkelig å vise at $\mathscr{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$. I følgende utregning bruker vi substitusjonen $x = t - a$ i tredje likhetstegn. I fjerde likhetstegn har vi benyttet oss av $e^{-st-sa} = e^{-st}e^{-as}$.

$$\mathscr{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}\mathrm{d}x = e^{-sa}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\mathrm{d}x = e^{-as}F(s).$$

□

Forskyvningsteoremet vil brukes både for å regne ut en Laplacetransform og dens inverse.

Eksempel 10.7. Laplacetransformen til $u(t-1)e^{t-1}$ er

$$\mathscr{L}\left(u(t-1)e^{t-1}\right) = e^{-s}\frac{1}{s-1}.$$

Invers Laplace transform til $e^{-2s}\frac{2}{s^2+4}$ er

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{2}{s^2+4}\right) = u(t-\pi)\sin 2(t-\pi).$$

Vi har brukt formelen $\mathscr{L}\left(\sin\omega t\right)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Svært ofte er ikke uttrykket du skal regne ut Laplace av på formen $f(t-a)u(t-a)$. Neste eksempel viser blant annet hvordan dette kan gjøres.

Regneeksempel 10.4. Finn Laplacetransformen til funskjonen i regneeksempel 10.1.
Løsning: Funksjonen er allerede omskrevet ved hjelp av sprangfunksjoner

$$f(t) = \sin t + u(t-\pi/2)(1-\sin t).$$

Vi må skrive om andre ledd til formen

$$u(t-\pi/2)g(t-\pi/2).$$

Det gjør vi ved å skrive om $\sin t$ til en funksjon på formen $g(t-\pi/2)$.

$$\begin{aligned}\sin t &= \sin\big((t-\pi/2)+\pi/2\big) \\ &= \sin(t-\pi/2)\cos\pi/2 + \cos(t-\pi/2)\sin\pi/2, \qquad \text{(A.9)} \\ &= \cos(t-\pi/2)\end{aligned}$$

Vi har derfor

$$f(t) = \sin t + u(t-\pi/2)(1-\cos(t-\pi/2)).$$

Vi bruker at Laplace er lineær

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f(t)\right) &= \mathscr{L}\left(\sin t\right) + \mathscr{L}\left(u(t-\pi/2)(1-\cos(t-\pi/2))\right) \\ &= \frac{1}{s^2+1} + e^{-s\pi/2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right).\end{aligned}$$

Vi skal nå løse et enkelt initialverdiproblem med en Dirac-Delta impuls.

Regneeksempel 10.5. Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0.$$

Løsning: Vi utfører laplace transformasjon på problemet.

$$s^2 Y - s\,y(0) - y'(0) + Y = e^{-\pi s}.$$

Innsatt verdiene for $y'(0)$ og $y(0)$ får vi

$$s^2 Y - s + Y = e^{-\pi s}.$$

Vi løser for Y.

$$Y = \frac{s}{1+s^2} + e^{-\pi s}\frac{1}{1+s^2}.$$

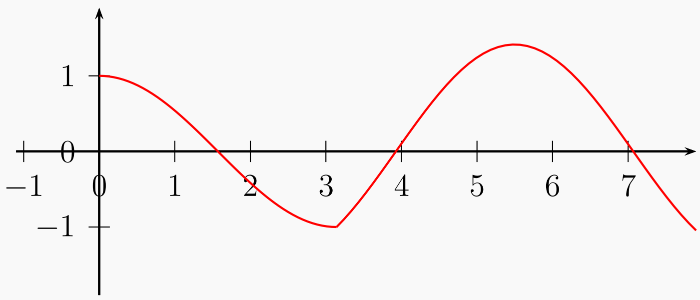
Invers Laplacetransform gir oss

$$y(t) = \cos t + u(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Vi kan skrive om resultatet til

$$y(t) = \cos t - u(t-\pi)\sin t.$$

Grafen til løsningen er tegnet i figuren under.



10.4.2 Forskyvning i s-rommet

Forskyvning i s-rommet er nyttig for funksjoner med en faktor e^{bt}, der b er en konstant.

Setning 10.5. *Hvis* $\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s)$ *så er*

$$\mathscr{L}\left(f(t)e^{bt}\right) = F(s-b), \tag{10.5}$$

der b *er en konstant.*

Bevis. Fra definisjonen har vi

$$\begin{aligned} F(s-b) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-b)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{bt}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathscr{L}\left(f(t)e^{bt}\right). \end{aligned}$$

□

Eksempel 10.8. Finn laplacetransformasjonen til $t^n e^{at}$.
Løsning: Vi bruker at $\mathscr{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Da er

$$\mathscr{L}\left(t^n e^{at}\right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Oppgaver fra kapittel 10.4

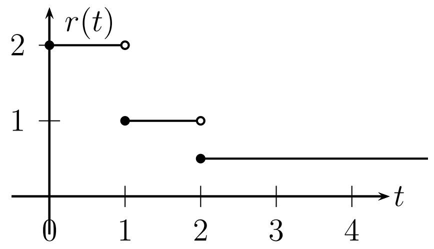
1. Regn ut Laplace til følgende funksjoner
   a) $e^{t-1}\cos(t-1)\,u(t-1)$
   b) $\cos(t-1)\,u(t-1)$
   c) $(t^2-2t+1)\,u(t-1)$
   d) $(t^2+t)\,u(t-1)$
   e) $e^{2t}\cos(3t)\,u(t-1)$
2. Regn ut Laplace til funksjonene i oppgave 1 i kapittel 10.1.
3. Regn ut Laplace til funksjonene i oppgave 2 i kapittel 10.1.
4. Løs initialverdiproblemene gitt under ved hjelp av Laplace.
   a) $y'' + 4y = (\sin(t-\pi))u(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
   b) $y''+9y = 1+(\cos t-1)\,u(t-2\pi)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
   c) $y''+y = u(t-\pi) - \frac{1}{2}u(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
   d) $y''+2y'+2y = e^{t-2\pi}u(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
5. Bruk forskyvningsteoremet i s-rommet til å finne Laplace til funksjonene
   a) t^2e^{-2t}
   b) $(t^3-t)e^t$
   c) $t\cos te^t$
   d) $\sin 2te^{-3t}$
6. Regn ut Invers Laplace til følgende funksjoner ved hjelp av forskyvningsteoremet i s-rommet.
   a) $\dfrac{1}{(s-4)^3}$
   b) $\dfrac{2}{(s-1)^2+4}$
   c) $\dfrac{s}{(s+2)^2+4}$
   d) $e^{-s}\dfrac{1}{s-3}$
7. Finn invers laplace til
   a) $\dfrac{1}{s(s^2+s-2)}$
   b) $\dfrac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)}$

c) $\dfrac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}$

8. Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y' - 2y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

der r er gitt ved den følgende grafen.



	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)(s)$		$f(t)$	$\mathscr{L}(f)(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$	2	$\delta(t)$	1
3	t	$\frac{1}{s^2}$	4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$u(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$	8	$\delta(t-a)$	e^{-as}
9	$u(t-a)(t-a)$	$\frac{1}{s^2}e^{-as}$	10	$u(t-a)(t-a)^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}e^{-as}$
11	$u(t-a)\cos\omega(t-a)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}e^{-as}$	12	$u(t-a)\sin\omega(t-a)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-as}$
13	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$			
14	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	15	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
16	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	17	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
18	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	19	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$

Tabell 10.1: Mye brukte Laplacetransformasjoner.

KAPITTEL 11

FOURIERREKKER OG PARTIELLE DIFFERENSIALLIKNINGER

11.1 Trigonometriske rekker

11.1.1 Ortogonale trigonometriske funksjoner.

Ortogonalt er et annet ord for vinkelrett. Første gang du hører om ortogonale funksjoner vil det muligens virke merkelig at funksjoner kan stå vinkelrett på hverandre. Bakgrunnen er at vi definerer et **prikkproduktet** som vi også kaller **indreprodukt** mellom funksjoner definert på et intervall $[a, b]$.

Definisjon 11.1. Indreproduktet mellom funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ definert på intervallet $[a, b]$ er gitt ved integralet

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Eksempel 11.1. Indreproduktet mellom $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$, begge definert på intervallet $[0, 1]$, er lik

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

Definisjon 11.2. Vi sier at to funksjoner f og g er **ortogonale** på intervallet $[a, b]$ hvis

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Eksempel 11.2. For eksempel er $f(x) = 1 - x$ og $g(x) = 1 + 3x$ ortogonale med hensyn på produktet $f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ fordi

$$\int_{-1}^{1} (1-x)(1+3x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1+2x-3x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x + x^2 - x^3\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Setning 11.1. *Funksjonene*

$$1, \cos\tfrac{\pi x}{L}, \cos\tfrac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\tfrac{n\pi x}{L}, \ldots,$$

$$\sin\tfrac{\pi x}{L}, \sin\tfrac{2\pi x}{L}, \ldots, \sin\tfrac{n\pi x}{L}, \ldots$$

danner en familie av inbyrdes ortogonale funksjoner på intervallet $[-L, L]$.

Vi kan sjekke dette ved å regne ut

$$\int_{-L}^{L} \cos\tfrac{n\pi x}{L} \cos\tfrac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\tfrac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\tfrac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\,\mathrm{d}x \tag{11.1}$$

som er lik 0 når $m \neq n$ og lik L når $m = n$. Tilsvarende er

$$\int_{-L}^{L} \sin\tfrac{n\pi x}{L} \sin\tfrac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\tfrac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\tfrac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\,\mathrm{d}x \tag{11.2}$$

også lik 0 når $m \neq n$ og lik L når $m = n$. Integralene

$$\int_{-L}^{L} \sin\tfrac{n\pi x}{L} \cos\tfrac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(\tfrac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \sin\left(\tfrac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]\,\mathrm{d}x \tag{11.3}$$

er alle lik 0. Vi har brukt omskrivningsformlene på side 203 for produkter av trigonometriske funksjoner.

11.1.2 Definisjon av trigonometriske rekker

Definisjon 11.3 (Trigonometriske rekker). En **trigonometrisk rekke** er en uendelig rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\tfrac{\pi n x}{L} + b_n \sin\tfrac{\pi n x}{L}\right), \tag{11.4}$$

der $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ er konstante koeffisienter.

En trigonometrisk rekke definerer en funksjon hvis den konvergerer. Da er den en periodisk funksjon $f(x)$ med periode $2L$. Trigonometriske rekker kan blant annet brukes til å løse partielle differensiallikninger. Vi kommer tilbake til det senere.

Definisjon 11.4. En trigonometrisk rekke 11.4 konvergerer hvis grensen

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos\tfrac{n\pi x}{L}+b_n\sin\tfrac{n\pi x}{L}\right)$$

eksisterer for alle x.

Eksempel 11.3. En trigonometrisk rekke kan ha uendelig mange ledd, men trenger ikke ha det. For eksempel er

$$1+\cos x+\cos 2x+\sin x+\sin 2x$$

et eksempel på en trigonometrisk rekke. Alle koefisienter a_n og b_n er lik null for $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Setning 11.2. *Hvis en funksjon $f(x)$ er lik en trigonometrisk rekke*

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\tfrac{n\pi x}{L}+b_n\sin\tfrac{n\pi x}{L}\right),$$

så kan vi regne ut verdiene til koeffisientene ved hjelp av formelene

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\tfrac{\pi n x}{L}\,\mathrm{d}x\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\tfrac{\pi n x}{L}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

11.1.3 Fourierrekker

Fourierrekker har mange anvendelser. Komprimering av lyd og bilder kan baseres på fourierrekker. Noen partielle differensiallikninger kan løses ved hjelp av fourierrekker.

Definisjon 11.5. La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig, periodisk funksjon med periode $2L$. Dens **Fourierrekke** er definert ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi X}{L},$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} f(x)\mathrm{d}x, \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ og} \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} f(x)\mathrm{d}x, \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Definisjon 11.6. En funksjon $f(x)$ kalles stykkvis glatt hvis både $f(x)$ og $f'(x)$ er stykkvis kontinuerlige.

Fourierrekken til en funksjon er ikke bare en tilnærming til funksjonen men er nøyaktig lik funksjonen i alle bortsett fra et endelig antall punkter på intervallet $[-L, L]$.

Teorem 11.1. *Fourierrekken til en periodisk stykkvis glatt funksjon $f(x)$ med periode $2L$ konvergerer mot verdien til f i alle punkter t, bortsett fra punkter der f er diskontinuerlig. I et slikt punkt, $x = x_0$, konvergerer f mot gjennomsnittet av høyre- og venstre-sidegrensene til $f(x)$.*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right).$$

Fordi Fourierrekken til en funksjon ikke nødvendigvis konvergerer mot funksjonen der funksjonen har diskontinuerlige sprang, så skriver vi $\sim$ istedet for $=$.

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Vi sier at Fourierrekken **representerer** funksjonen. En funksjon må være periodisk eller definert på et endelig intervall for at funksjonen skal kunne representeres av en Fourierrekke.

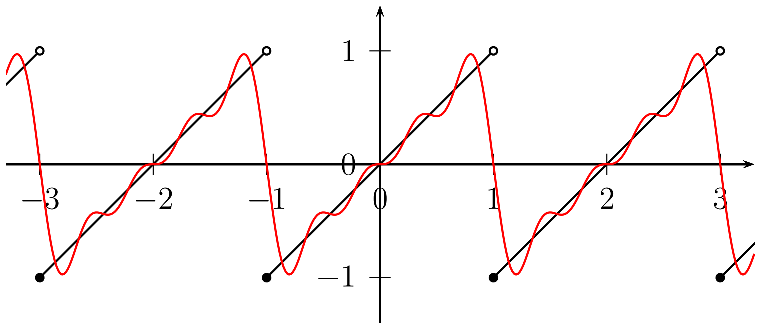
Regneeksempel 11.1. Finn Fourierrekken til den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $-1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.
Løsning: Perioden er 2. Derfor er $L = 1$. Koeffisientene er $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = 0$,

$$a_n = \int_{-1}^{1} t\cos n\pi t\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin n\pi t\,\mathrm{d}t = 0,$$

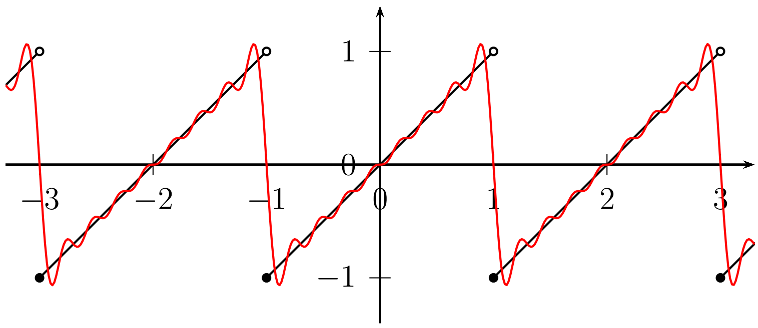
$$\begin{aligned} b_n = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t\,\mathrm{d}t &= \left[-t\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-1\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - 1\frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}(-1)^n. \end{aligned}$$

Fourierrekken til $f(t)$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi x$$



Figur 11.1: De 4 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.



Figur 11.2: De 8 første sinus leddene i rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi t$ tilnærmer den periodiske funksjonen $f(t) = t$, $1 \leq t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

Oppgaver fra kapittel 11.1

1. Regn ut indreproduktet $f \cdot g$ til funksjonene.

   a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

   b) $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $x \in [-1, 1]$.

   c) $f(x) = 1$, $g(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

2. Finn en trigonometrisk rekke som er lik funksjonene. (Hint. Det krever minimalt med regning.)

   a) $\cos^2 x$

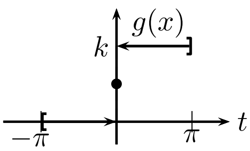
   b) $\sin^2 \pi x$

   c) $\cos^3 \pi x$

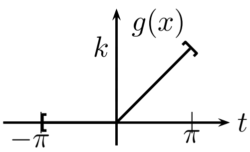
   d) $\cos^4 x$

3. Regn ut indreproduktet mellom $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, pi]$ og funksjonene $g(x)$ gitt i figurene.

   a)



   b)



4. Bestem a og b slik at $h(x) = 1 + a\,x + b\,x^2$, $x \in [-1, 1]$, er ortogonal med $f(x) = 1$ og $g(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$.

5. Fullfør detaljene i utregningene av

   a) $\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$, (se side 186).

   b) $\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$, (se side 186).

   c) $\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$, (se side 186).

6. Finn Fourierrekken til den periodiske funksjonen

   a) $f(x) = 1 - |x|, -2 < x < 2$, $f(x + 4) = f(x)$.

   b) $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $f(x + 2) = f(x)$.

   c) $f(x) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $f(x + 2) = f(x)$.

11.2 Mer om Fourierrekker

11.2.1 Jevne og odde funksjoner

Vi minner om definisjonen av odde og jevne funksjoner.

Definisjon 11.7. En funksjon $f(x)$ kalles **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. En funksjon $f(x)$ kalles **odde** hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Setning 11.3. *La $f(x)$ være en stykkvis kontinuerlig periodisk funksjon.*

1. *Hvis $f(x)$ er odde så er*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

2. *Hvis $f(x)$ er jevn så er*

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x$$

og

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Eksempel 11.4. Vi skal finne Fourierrekken til den jevne periodiske funksjonen gitt ved $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ med periode $T = 2$.

Løsning: Vi har $L = 1$ og $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3\ldots$ fordi $f(x)$ er jevn. Vi regner ut

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{L}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x &= 2\left[\frac{1}{n\pi}x\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2\pi^2}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

For alle heltallige n er $\sin n\pi = 0$ For odde n har vi at $\cos n\pi = -1$ og for jevne n har vi $\cos n\pi = 1$. Derfor har vi

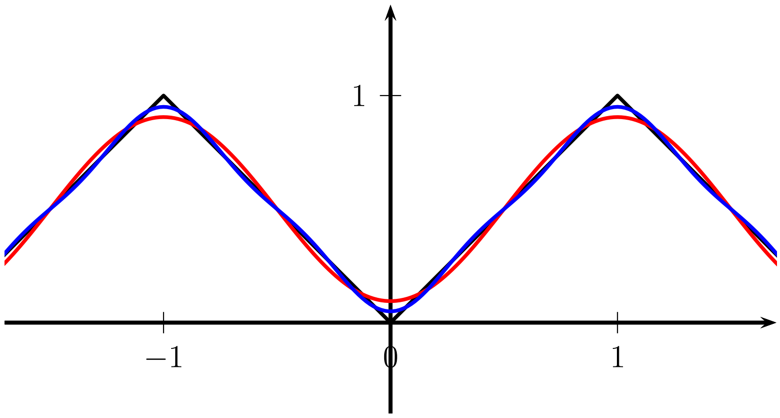
$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1).$$

Fourier rekken til $f(x)$ er

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \cdots$$

Merknad 11.1. Om vi regner ut $f(1)$ i eksempel 11.4 ved å regne ut funksjonsutrykket og fourierrekken så får vi

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{4}{25\pi^2} + \cdots$$



Figur 11.3: Tegningen viser grafen til funksjonen $f(x)$ i seksempel 11.4 sammen med $a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\pi$, for $m = 1$, (rød graf) og $m = 3$, (blå graf).

Vi skriver om og får

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

En funksjon definert på et intervall $[0, L]$ kan utvides til en periodisk funskjon med periode $2L$ på to fornuftige måter. De to måtene kalles for en jevn **periodiske utvidelse** og en odde periodisk utvidelse.

11.2.2 Cosinusrekke

I noen anvendelser ønsker man å representere en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[0, L]$ som en **cosinus rekke**

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Vi lager en **jevn periodisk utvidelse** av $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < L \end{cases}, \\ f(x+2L) &= f(x). \end{aligned}$$

Vi regner ut $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ved hjelp av formlene i setning 11.3.

11.2.3 Sinusrekke

I andre anvendelser ønsker man å representere en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[0, L]$ som en **sinus rekke**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

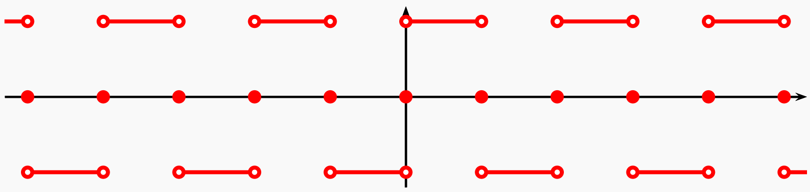
Vi lager en **odde periodisk utvidelse** av $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -f(-x), & -L < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < L \end{cases}, \\ f(x+2L) &= f(x). \end{aligned}$$

Vi regner ut $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ved hjelp av formlene i setning 11.3.

Eksempel 11.5. Vi vil finne sinusrekken til funksjonen $f(x) = 1$ definert på intervallet $[0, 1]$.

Løsning: Vi utvider $f(x)$ til en odde periodisk funksjon som vist i figuren.



Vi regner ut koeffisientene $b_1, b_2, \ldots$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^1 1 \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 2\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} 0, & \text{n jevn} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{n odde} \end{cases}.$$

Vi får derfor

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sin \pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi}\sin 5\pi x + \frac{4}{7\pi}\sin 7\pi x + \cdots$$

Fourierrekker kan brukes til å tilnærme funksjoner. Det gjøres ved å ta med et endelig antall ledd i Fourierrekken. En slik rekke kalles for en trunkert Fourierrekke.

Oppgaver fra kapittel 11.2

1. Hvilke av funksjonene under er odde, jevne eller ingen av delene. Begrunn svaret ved å sjekke betingelsene i definisjonen.
   a) x
   b) x^4
   c) $\cos x$
   d) $\sin x$
   e) $x^2 - x$
   f) $x^3 - x + \sin x$
   g) $\tan x$
   h) $\tan^2 x$
   i) $f(x)^2$
2. Skriv funksjonene som en sum av en odde og jevn funksjon.
   a) $1 + x + x^2 + x^3$
   b) e^x
3. Bevis at
   a) Produktet av to odde funksjoner er en jevn funksjon.

b) Produktet av to jevne funksjoner er en jevn funksjon.

c) Produktet av en jevn og en odde funksjoner er en odde funksjon.

4. Finn Fourierrekkene til de jevne funksjonene med periode $2L$ gitt ved

   a) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi)$, $L = \pi/2$

   b) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$, $L = 1$

5. Finn Fourierrekkene til de odde funksjonene med periode $2L$ gitt ved

   a) $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi)$, $L = \pi/2$

   b) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, $L = 1$

11.3 Derivasjon av Fourierrekker

Derivasjon av Fourierrekker krever våkenhet. Vi skal se at under visse betingelse på $f(x)$ så kan vi derivere $f(x)$ ved å derivere dens Fourierrekke ledd for ledd.

Setning 11.4. *Gitt en funksjonen $f(x)$ og la denne ha Fourierrekke*

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og $f'(x)$ er stykkvis kontinuerlig så er

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(-a_n \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Setningen sier at vi kan derivere ledd for ledd av en Fourierrekke under de gitte betingelsene på $f(x)$. Det er svært viktig at forutsetningene for $f(x)$ er oppfylt i setningen over. I eksempelet nedenfor skal vi se på et eksempel der $f(x)$ ikke er kontinuerlig.

Eksempel 11.6. I eksempel 11.4 så fikk vi Fourierrekken

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\pi x - \cdots$$

for den jevne periodiske funksjonen $f(x) = x$, $0 < x < 1$, $f(-x) = f(x)$. Funksjonen $f(x)$ tilfredstiller betingelsen i setning 11.4. Vi kan derfor deriverer Foureierreken ledd for ledd.

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi}\sin \pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{4}{5\pi}\sin 5\pi x + \cdots$$

Denne rekken gjenkjenner vi som Fourerrekken i eksempel 11.5. Funksjonen i eksempel 11.5 er ikke kontinuerlig. Den er stykkvis deriverbar med derivert lik 0. Om vi deriverer Fourierrekken ledd for ledd en gang til får vi det absurde at

$$0 = 4\sin \pi x + 4\sin 3\pi x + 4\sin 5\pi x + \cdots$$

Rekken er ikke engang konvergent. Derfor kan vi konkludere med at betingelsen i setning 11.4 er nødvendig.

Oppgaver fra kapittel 11.3

1. Kan man benytte setning 11.4 til å derivere fourierrekken i eksempel 11.5? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.
2. Benytt svaret fra oppgave a) til å finne fourier rekken til den deriverte av den jevne funksjonen gitt ved $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi)$, $L = \pi/2$.

11.4 Partielle differensiallikninger

11.4.1 Definisjon og bakgrunn

Partielle differensiallikninger brukes til å beskrive fenomener i vitenskaper som økonomi, fysikk, biologi og kjemi. I fysikken brukes de i mange områder som mekanikk, kvantemekanikk, Einsteins generelle relativitetsteori, fluid mekanikk, varmelære og et utall andre områder. Populasjoners endring over tid or rom kan kan beskrives ved hjelp differensiallikninger. Innen matematikken er partielle differensiallikninger en del av analysen, men de legger også grunnlaget for andre disipliner.

Definisjon 11.8 (Partielle differensiallikninger). En **partiell differensiallikning** av orden n er en likning, der den ukjente er en funksjon y i flere variable $x_1, x_2, \ldots, x_r$, og som inneholder partielle deriverte av y opp til n-te orden og eventuelt y og variablene $x_1, x_2, \ldots x_r$.

Eksempel 11.7 (Laplace likning). Differensiallikningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

er et eksempel på en partiell differensiallikning av andre orden. Den kalles for **Laplacelikningen i to variable**. I tre variable lyder likningen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Funksjonen $f(x,y) = x^2 - y^2$ er én løsning av Laplacelikningen. Vi ser det ved at $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 2 - 2 = 0$. Antallet løsninger av Laplacelikningen er svært stor. I anvendelser er derfor ofte randbetingelser gitt. I et Dirichletproblem er verdien til den ukjente funksjonen gitt for randen til området. Et spesialtilfelle er en rektangulær rand:

$$\begin{aligned} f(a,y) &= W(y) \\ f(b,y) &= E(y) \\ f(x,c) &= S(x) \\ f(x,d) &= N(x). \end{aligned}$$

I et Neumannproblem er verdier til de deriverte av den ukjente funksjonen gitt på randen. For eksempel kan en slik ranbetingelse være

$$\begin{aligned} f_x(a,y) &= 0 \\ f_x(b,y) &= 0 \\ f_y(x,c) &= 0 \\ f_y(x,d) &= 0. \end{aligned}$$

Eksempel 11.8 (Varmelikningen). Differensiallikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0.$$

er et eksempel på en partiell differensialliknin av andre orden. Den kalles for **Varmelikningen**.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av varmelikningen.

Varmelikningen forklarer hvordan varme og dermed temperaturen sprer seg i et ideelt legeme. En variant av varmelikningen kan brukes i studiet av populasjoner i biologien. Et område

H med de nødvendige betingelsene for at en art kan leve kalles for et habitat. Populasjonen til arten kan modelleres med randverdiproblemet

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + c\,P,$$

der α beskriver hvor godt arten sprer seg med tiden og c måler hvor stor evne arten har til å formere seg. Randbetingelsen som ofte brukes er at arten ikke kan leve på randen av habitatet. Derfor er verdien av P lik null på randen.

Eksempel 11.9 (Bølgelikningen). Differensiallikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

er en partiell differensiallikning av andre orden. Den kalles for **Bølgelikningen**.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

er to- og en-dimensjonale vesjoner av bølgelikingen.

11.4.2 Homogene likninger og superposisjonsprinsippet

En lineær partiell differensiallikning kalles for homogen hvis hvert ledd inneholder en forekomst av den ukjente størrelsen eller en partiell derivert av denne. For eksempel er ikke **Poissonlikningen**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y)$$

ikke homogen med mindre $f(x, y)$ er lik null for alle inputverdier for x og y. De øvrige differensiallikningene i kapittelet er eksempler på homogene lineære differensiallikninger. Følgende setning er svært viktig for løsning av homogene lineære partielle differensiallikninger.

Setning 11.5 (Superposisjonsprinsippet). *Hvis $f(x, y, z, t)$ og $g(x, y, z, t)$ begge er løsninger av samme homogene lineære partielle differensialikning, så er summen*

$$a\,f(x, y, z, t) + b\,g(x, y, z, t)$$

også en løsning av den samme likningen for hvilket som helst par av konstanter a og b.

Superposisjonsprinsippet gjør at vi kan finne en familie[1] av løsninger av en differensiallikning som vi legger sammen for å få en løsning av rand-/initialverdipoblemet.

[1]Ordet **familie** er kun et synonym på mengde. Det brukes ofte når elementene i mengden ikke er punkter.

11.4.3 Generell løsning av varmelikningen

Separasjon av varmelikningen

Vi vil finne løsningen av varmelikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med initialbetingelse $T(x,0) = \sin^2 \pi x$ og randbetingelse $T(0,t) = T(1,t) = 0$. Vi lar rand og initialbetingelsene ligge en liten stund mens vi undersøker løsningene av differensiallikningen.

Om vi setter inn $T(x,t) = F(x)G(t)$ inn i likningen får vi

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

Da er likningen separabel. Seperasjon av variable fører til likningen

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Hver side av denne liknigen er lik en konstant k fordi de har ikke felles variable. Derfor har vi $G'(t) = k\,G(t)$ og $F''(x) = k\,F(x)$.

Separasjon av variable gir en skare av løsninger. For positive verdier av k får vi

$$F(x) = A\,e^{\sqrt{k}x} + B\,e^{-\sqrt{k}x}.$$

Randbetingelsene $T(0,t) = 0$ og $T(1,t) = 0$ medfører $F(0)G(t) = 0$ og $F(1)G(t) = 0$. Det vil si at enten er $G(t) = 0$ for alle verdier av t eller så er $F(0) = F(1) = 0$. Tilfellet $G(t) \equiv 0$ er uinteressant fordi da er $T(x,t) \equiv 0$.[2] Vi sitter igjen med $F(0) = F(1) = 0$. Dvs at $A + B = 0$ og $Ae + Be^{-1} = 0$. Vi løser for A og B og får $A = B = 0$.

For negative verdier $k = -\omega^2$ får vi løsninger

$$F(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

og

$$G(t) = Ce^{-\omega^2 t}.$$

Av samme grunn som over får vi at $F(0) = F(1) = 0$. Det gir $F(0) = A = 0$ og $F(1) = B\sin\omega = 0$. Det betyr at $\omega = n\pi$ der n er et positivt heltall. Vi har derfor uendelig mange løsninger som tilfredstiller varmelikningen og randbetingelsene.

$$e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Anvendelse av superposisjonsprinsippet og Fourierrekker.

Superposisjonsprinsippet sier at summen av disse løsningene fortsatt er en løsning.

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

Initialbetingelsen var oppgitt til å være

$$T(x,0) = \sin^2 \pi x.$$

[2] Med tre streker i $G(t) \equiv 0$ menes at $G(t)$ er **identisk lik** 0. Det vil si at $G(t) = 0$ for alle verdier av t.

I tillegg får vi fra den generelle løsningen at

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x.$$

Problemet vårt er redusert til å finne koeffisientene B_n i sinusrekken til $\sin^2 \pi x$. Vi skriver først om $\sin^2 \pi x = 1 - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x$. Denne utvider vi til en odde periodisk funksjon med periode 2. Vi regner ut koeffisientene

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \sin n\pi x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\sin n\pi x - \frac{1}{2}\sin(n-2)\pi x - \frac{1}{2}\sin(n+2)\pi x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{2(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi x + \frac{1}{2(n+2)\pi}\cos(n+2)\pi x\right]_0^1 \\
&= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{2(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi x + \frac{1}{2(n+2)\pi}\cos(n+2)\pi x\right]_0^1 \\
&= \left(-\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2(n-2)\pi} + \frac{1}{2(n+2)\pi}\right)((-1)^n - 1) = \frac{4}{n(n^2-4)\pi}((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

for $n \neq 2$.

$$B_2 = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin 2\pi x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sin 2\pi x - \frac{1}{2}\sin 0\pi x - \frac{1}{2}\sin 4\pi x\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vi har dermed

$$\sin^2 \pi x \sim -\frac{8}{-3\pi}\sin \pi x - \frac{8}{15\pi}\sin 3\pi x - \cdots - \frac{8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi}\sin(2n-1)\pi x - \cdots$$ [3]

og løsningen av initialverdiproblemet er

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(2n-1)((2n-1)^2-4)\pi} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x. \tag{11.6}$$

11.4.4 Generell løsning av bølgelikningen

Separasjon av bølgelikningen

Vi vil løse bølgelikningen for svingninger av en gitarstreng med lengde L. For enkelhets skyld antar vi at svingningene ikke avtar overt tid, men at strengen svinger evig. Da her vi likningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Initial- og startbetingelser er $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$, $u(0,t) = f(t)$ og $u_t(0,t) = 0$.

Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i bølgelikningen. Da får vi den separerbare likningen

$$F''(x)G(t) - c^2 F(x)G''(t).$$

[3] En konsekvens av formelen er at $\pi = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{(2n-1)((2n-1)^2-4)}$.

Etter dividerer med $F(x)G(t)$ fås

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = c^2 \frac{G''(t)}{G(t)}$$

Siden denne likningen skal være sann for alle par (x, t) så er den sann for (x, t_0) der t_0 er en konstant. Det betyr at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = c^2 \frac{G''(t_0)}{G(t_0)} = K, \text{ (Konstant)}$$

Da er også

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = c^2 K.$$

Vi har derfor to ordinære differensiallikninger i stedet for en partiell differensiallikning.

$$\begin{aligned} F''(x) &= K\, F(x) \\ G''(t) &= c^2 K\, G(t) \end{aligned}$$

Av randbetingelsen $u(0, t) = u(L, t) = 0$ får vi $F(0) = F(L) = 0$ eller $G(t) \equiv 0$. Med $G(t) \equiv 0$ får vi $u(x, t) \equiv 0$ som er uten interesse. Vi sitter derfor igjen med $F(0) = F(L) = 0$. Når $K = k^2$ er positiv har vi løsningen $F(x) = a\, e^{kt} + b\, e^{-kt}$. Randbetingelsene gir da systemet $a + b = 0$ og $ae + b/e = 0$. Dette systemet har bare den trivielle løsninge $a = b = 0$. Dette medfører at $u(x, t) = F(x)G(t) = 0\, G(t) \equiv 0$. Vi får også $u(x, t)$ når K er lik null. Vi må derfor ha negativ K. Vi lar $K = -\omega^2$. Løser vi likningen $F''(x) = -\omega^2 F(x)$ får vi

$$F(x) = A\, \cos \omega x + B\, \sin \omega x.$$

Av randbetingelsen $F(0) = 0$ får vi $0 = A \cos 0 + B \sin 0 = A$. Randbetingelsen $F(L) = 0$ gir oss likningen $B \sin \omega L = 0$. Det betyr at $\omega L = n\pi$ der n er et vilkårlig helt tall. Vi får derfor løsningene

$$F(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

For samme verdier for ω løser vi $G''(t) = -c^2\omega^2 G(t)$ og får

$$G(t) = C \cos \frac{n\pi ct}{L} + D \sin \frac{n\pi ct}{L}.$$

Initialbetingelsen $u_t(x, 0)$ medfører at $F(x) \equiv 0$ eller $G'(0) = 0$. Siden $F(x) \not\equiv$ så må $G'(0) = 0$. Dvs at

$$0 = G'(0) = -C\frac{n\pi c}{L} \sin 0 + D\frac{n\pi ct}{L} \cos 0 = D\frac{n\pi ct}{L}.$$

Derfor er $D = 0$. Løsningene på formen $F(x)G(t)$ er derfor

$$u(x, t) = \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Komplett løsning av bølgelikningen med Fourierrekker

Vi bruker superposisjonsprinsippet til å finne løsningen av rand og initialverdiproblemet. Superposisjonsprinsippet sier at

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

er en løsning av bølgelikningen.

Eneste betingelse som ikke er brukt til nå er initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$. Vi kan skrive

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Det betyr at B_n er lik sinusrekke-koeffisientene til $f(x)$. For å finne disse kan vi finne den odde periodiske utvidelsen av $f(x)$. Vi vil se på noen eksempler. La $f(x) = \frac{4U_0}{L^2}x(x-L)$. Da er

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{4U_0}{L^2}x(x-L)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8U_0}{L^3}\left[-\frac{L}{n\pi}x(x-L)\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L + \frac{8U_0}{L^3}\int_0^L \frac{L}{n\pi}(2x-L)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{8U_0}{n\pi L^2}\left[\frac{L}{n\pi}(2x-L)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L - \frac{8U_0}{n\pi L^2}\int_0^L \frac{L}{n\pi}2\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + 0 - \frac{16U_0}{n^2\pi^2 L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{16U_0}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{16U_0}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1). \quad (11.7) \end{aligned}$$

Som tidligere ser vi at $B_n = 0$ for alle partall n. Vi får derfor

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32U_0}{(2n-1)^3\pi^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Fordi $f(x)$ er glatt på $[0, L]$ så har vi likhet i alle punkt for sinusrekken til $f(x)$. Løsningen til initialverdiproblemet er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32U_0}{(2n-1)^3\pi^3} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{L} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Oppgaver fra kapittel 11.4

1. Løs likningene ved hjelp av ODE-tekninkker.
   a) $u_{xy} = u_x$ (Hint: betrakt først u_x som ukjent.)
   b) $u_{xx} = u$, der u er en funksjon i x og y.
2. Bruk teknikken med separasjon av variable til å løse følgende partielle differensiallikninger.
   a) $u_t = 4u_{xx}$
   b) $u_{xx} = u_{yy}$
   c) $u_t = u_{xx} + u$
   d) $u_{tt} = u_{xx} - u$
3. Bruk separasjon av variable til å finne alle løsninger på formen $F(x)G(y)$ til

randverdiproblemene med randbetingelser $u(x,0) = 0$ og $u(x,1) = 0$.

a) $u_{xx} = u_{yy}$

b) $u_x = 4u_{yy}$

4. Bruk separasjon av variable og fourierrekker til å finne alle løsninger på formen $F(x)G(t)$ til problemene med randbetingelser $u(0,t) = 0$ og $u(1,t) = 0$ og initialverdier som gitt nedenfor.

   a) $u_t = 4u_{xx}$, $u(x,0) = \sin \pi x$

   b) $u_{tt} = u_{yy}$, $u(x,0) = \sin \pi x + \sin 3\pi x + \sin 5\pi x$

   c) $u_t = u_{xx} + u$, $u(x,0) = \sin^2 \pi x$

   d) $u_{tt} = u_{xx} - u$, $u(x,0) = (1-x)x$

TILLEGG A

TRIGONOMETRI

A.1 Trigonometriske identiteter

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{A.1}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{A.2}$$

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x \tag{A.3}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{A.4}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{A.5}$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \tag{A.6}$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x \tag{A.7}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{A.8}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{A.9}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x - y) + \cos(x + y)\Big) \tag{A.10}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x - y) - \cos(x + y)\Big) \tag{A.11}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x - y) + \sin(x + y)\Big) \tag{A.12}$$

TILLEGG B

FORENKLING AV RASJONALE UTTRYKK

B.1 Motivasjon

Adderer vi to rasjonale uttrykk danner vi felles nevner før vi adderer tellerene. For eksempel er

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1(1+x^2)}{x(1+x^2)} - \frac{x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x+x^3}.$$

Å gå den andre veien kalles delbrøksoppspalting. Det er ofte nyttig i for eksempel integrasjon. Utregningen over viser at $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x+x^3}$ Integranden i $\int \frac{1}{x+x^3}\mathrm{d}x$ erstattes med $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$:

$$\int \frac{1}{x+x^3}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

B.2 Delbrøksoppspalting

Hensikten med delbrøksoppspalting er å skrive om den rasjonale funksjonen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ til en sum av enklere rasjonale funksjoner der hvert ledd har nevner av grad 1 eller grad 2.

Delbøksoppspalting utføres i 4 trinn.

Først faktoriserer vi nevneren $Q(x)$ i lineære faktorer og kvadratiske faktorer. For eksempel faktoriserer $x + x^3$ i faktorene x og $1 + x^2$. Videre faktorisering av $1 + x^2$ er ikke mulig. Utrykket $x - x^3$ faktoriserer i x, $1 - x$ og $1 + x$. I noen utrykk repeteres en faktor flere ganger. For eksempel faktoriseres $x^3 - 2x^2 + x$ som $x(x-1)^2$. Vi sier at faktoren $x-1$ har **multiplisitet** 2.

Andre trinn er å danne for hver faktor $(x - r)$ eller $(x^2 + px + q)$, med multiplisitet m, **delbrøkene**

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

eller

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2+px+q)^m}$$

Vi får like mange ukjente A_1, B_1 etc som graden til $Q(x)$.

Tredje trinn er å sette opp likningen

$$P(x) = \text{(summen av alle delbrøkene vi fant i andre trinn)} \cdot Q(x).$$

Fjerde trinn er å finne finne nok likninger i de ukjente A_1, B_1 etc og løse disse.

Eksempel B.1. Finn delbrøksoppspalting av $\frac{1}{x+x^3}$.
Løsning: $P(x) = 1$ og $Q(x) = x + x^3$. Faktoriseringen av $Q(x)$ er $x(1 + x^2)$. Vi får to delbrøker $\frac{A}{x}$ og $\frac{Bx+C}{1+x^2}$. Så setter vi opp likningen $1 = (\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2})Q(x)$. Denne forenkles til

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

Denne gir likingene $A + B = 0$, $C = 0$ og $A = 1$. Denne har løsning $A = 1$, $B = -1$ og $C = 0$. Vi har vist at

$$\frac{1}{x + x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}.$$

TILLEGG C

INTEGRASJON

C.1 Delvis integrasjon

Setning C.1 (Delvis integrasjon). *La $f(x)$ og $g(x)$ være funksjoner som har kontinuerlige deriverte. Da er*

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)'g(x)\mathrm{d}x.$$

Tilsvarende formel for bestemt integral er

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)'g(x)\mathrm{d}x.$$

Setning C.2 (Substitusjon). *La $g(u)$ være en kontinuerlig funksjon og la funksjonen $f(x)$ ha kontinuerlig derivert. Da er*

$$\int g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u.$$

Tilsvarende formel for bestemt integral er

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\mathrm{d}u.$$

TILLEGG D

GRESKE TEGN

A			Ω		
A	α	alfa	N	ν	ny
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o	omrikon
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ	theta	Y	υ	ypsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ	phi
K	κ	kappa	X	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	my	Ω	ω	omega

Tabell D.1: Det greske alfabetet

TILLEGG E

FORMELSAMLING

A. Komplekse tall

Standardform:	$z = a + i\,b$
Polarform:	$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$
De Moivres:	$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\,\sin n\theta$
Konjugert:	$\bar{z} = a - b\,i$
Argument:	$\arg z = \theta$
Absoluttverdi:	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
Realdelen:	$\mathrm{Re}(z) = a$
Imaginærdelen:	$\mathrm{Im}(z) = b$

B. Lineær algebra

1. Matriseoperasjoner

Gitt matrisene $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$.

Sum:	$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
Multiplikasjon med skalar:	$kA = \left[k\,a_{ij}\right]$
Produkt:	$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$
Transponering:	$A^T = [a_{ji}]$ $(AB)^T = B^T A^T$

2. Spesielle kvadratiske matriser

Diagonal matrise $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$	$a_{ij} = 0$, når $i \neq j$.
Enhetsmatrise	$I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$
Øvre triangulær matrise	$a_{ij} = 0$ når $i > j$
Nedre triangulær matrise	$a_{ij} = 0$ når $i < j$
Symmetrisk matrise	$A^T = A$
Skjevsymmetrisk matrise	$A^T = -A$
Singulær matrise	$\det A = 0$

3. Rangen til en matrise

$\mathrm{Rank}\,A$ = antall pivotelementer i en trappematrise for A.

$$\mathrm{Rank}(A^T) = \mathrm{Rank}(A)$$

4. Invers matrise

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Gauss Jordan:

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

Kofaktormetoden

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{kof}\,A)^T}{\det A}$$

Følgende er ekivalent for kvadratiske matriser:

1. A er inverterbar (A^{-1} eksisterer.)
2. $\det A \neq 0$.
3. A har maksimal rang.

5. Ortogonale matriser.

$$A^T = A^{-1} \Leftrightarrow AA^T = A^T A = I$$

6. Determinanter

Kofaktor: $\operatorname{kof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} D_{ij}$, der D_{ij} er underdeterminanten en får ved å fjerne rad i og søyle j fra $\det A$.
Utvikling langs rad nr. i og langs søyle nr. j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{kof}(a_{ik}) \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \operatorname{kof}(a_{kj}).$$

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

7. Lineære transformasjoner

En transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles lineær hvis og bare hvis

1. $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$, for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og alle $c \in \mathbb{R}$.
2. $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Transformasjonsmatrisen til T er matrisen

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

8. Geometriske transformasjoner i $\mathbb{R}^2$:

De første fem er lineære. Den sjette er en fiktiv transformasjonsmatrise.

1. Speiling om 1. akse:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. Speiling om 2. akse:	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Speiling om linjen $x_1 = x_2$:	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. Rotasjon om origo:	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
5. Skalering:	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$
6. Translasjon:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Lineær avhengig/uavhengig vektormengde:

Rangmetoden: Innfør matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ så er $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ l.a. hvis $\operatorname{Rank}(A) < k$ og l.u. hvis $\operatorname{Rank}(A) = k$.

Alternativ metode: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ er l.u. hvis og bare hvis $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = 0$ kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

10. Underrom, lineært spenn:

En vektormengde V i $\mathbb{R}^n$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vilkårlige vektorer i V, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ en vektor i V,
2. c er et vilkårlig tall og $\mathbf{u}$ er en vilkårlig vektor i V, så er $c\mathbf{u}$ en vektor i V.

Vektormengden S er et **generatormengde** for V hvis og bare hvis enhver vektor i V kan skrives som en lineærkombinasjon over S.

$V = \operatorname{linsp} S$ (det **lineære spennet** til S).

En **basis** for V er en l.u. generatormengde for V.

Elementære linjeoperasjoner på en matrise bevarer eventuelle lineære sammenhenger mellom søylene i matrisen.

11. Egenverdier og egenvektorer:

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $x \neq 0$. $\mathbf{x}$ **= egenvektor**, λ **= egenverdi**. E_λ **= egenrommet hørende til egenverdien** λ. m_λ **= multiplisiteten** av en repetert egenverdi λ,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.$$

Hvis $\dim(E_\lambda) < m_\lambda$ for en repetert egenverdi λ, er A defekt.

12. Diagonalisering av A, ($n \times n$-matrise)

$$K^{-1}AK = D,$$

Egenvektormatrise: (Diagonaliseringsmatrise)

$$K = \begin{bmatrix}\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \cdots & \mathbf{k}_n\end{bmatrix},$$

der $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$ er l.u. og egenvektorer.

Egenverdimatrise: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$

C. Potenser og logaritmer

1. Derivasjon

- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- $(\ln x)' = 1/x$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

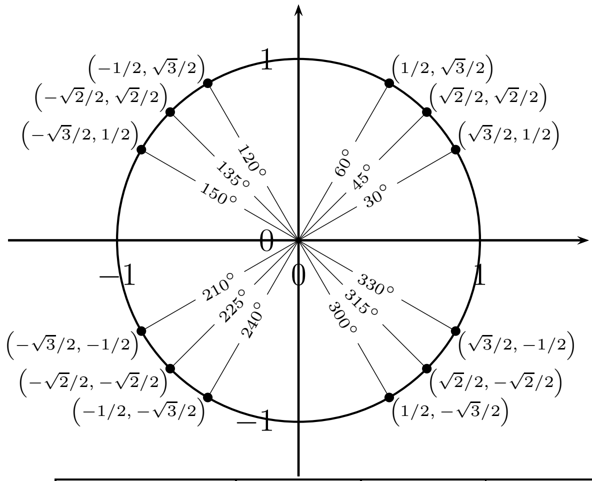
2. Regneregler for potenser

- $a^p a^q = a^{p+q}$
- $a^p / a^q = a^{p-q}$
- $a^{-p} = 1/a^p$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
- $a^p b^p = (ab)^p$
- $a^p / b^p = (a/b)^p$

3. Regneregler for logaritmer

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^q) = q \ln a$
- $\log_a(b) = \ln b / \ln a$

D. Trigonometriske funksjoner



x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{10} = 18°$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{1-2\frac{\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{5} = 36°$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{10} = 54°$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{1+2\frac{\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{5} = 72°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	0	1	∞

E. Derivasjonsregler

La u og v være funksjoner og la k være en konstant.

$$\begin{aligned}
(u+v)' &= u' + v' \\
(u-v)' &= u' - v' \\
(ku)' &= ku' \\
k' &= 0 \\
(uv)' &= u'v + uv' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
(x^n)' &= n\, x^{n-1}
\end{aligned}$$

F. Numerikk

1. Newtons metode:

$$f(x) = 0$$

Nummerisk skjema

1. Gjett en løsning x_1.
2. Bruk så newtons iterasjonsformel for å finne x_2, x_3, etc:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
3. Stopp når ønsket antall desimaler har stabilisert seg.

2. Ordinære systemer.

Eulers metode

$$\begin{aligned} w_0 &= y(t_0) \\ w_{n+1} &= w_n + h\, f(t_n, w_n) \end{aligned}$$

Trapesmetoden

$$\begin{aligned} w_0 &= y(t_0) \\ s_1 &= f(t_n, w_n) \\ s_2 &= f(t_n + h, w_n + hs_1) \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{h}{2}(s_1 + s_2) \end{aligned}$$

Midtpunktsmetoden

$$\begin{aligned} w_0 &= y(t_0) \\ s_1 &= f(t_n, w_n) \\ s_2 &= f(t_n + h/2, w_n + (h/2)s_1) \\ w_{n+1} &= w_n + hs_2 \end{aligned}$$

Runge Kutta RK4

$$\begin{aligned} w_0 &= y(t_0) \\ s_1 &= f(t_n, w_n) \\ s_2 &= f(t_n + h/2, w_n + (h/2)s_1) \\ s_3 &= f(t_n + h/2, w_n + (h/2)s_2) \\ s_4 &= f(t_n + h, w_n + h\, s_3) \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \end{aligned}$$

3. Nummerisk derivasjon.

Foroverdifferanse for førstederivert

$$u_t(x,t) \approx \frac{1}{k}\big(u(x, t+k) - u(x,t)\big)$$

Bakoverdifferanse for førstederivert

$$u_t(x,t) \approx \frac{1}{k}\big(u(x,t) - u(x, t-k)\big)$$

Sentrert differanse for andrederivert

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}\big(u(x+h, t) - 2u(x,t) + u(x-h, t)\big)$$

FASIT PÅ OPPGAVER

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 1

1: $11 - 10i$, **3:** $0.2 - 0.4i$, **5:** $-4 + 0i$ eller -4, **7:** $-1 + i$, **9:** $2(\cos(\pi/3) + i \sin \pi/3)$, $z^3 = -8$, **11:** $\sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4))$, $z^3 = 2\sqrt{2}(\cos(-9\pi/4) + i \sin -9\pi/4))$, **13:** Ikke tilgjengelig fasit, **15:** $z_1/z_2 = \frac{1}{2}e^{\pi i/8}$ og $z_1 z_2 = 8e^{3\pi i/8}$, **17:** $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$, **19:** $z_1 = 2 - i$,$z_2 = -2 - i$, **21:** $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -2 - i$,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 2

1: a) $(x, y) = (2, 1)$ b) $(x, y) = (2, 1)$, **3:** a) Bestemt for $a \neq -4$ og selvmotsigende for $a = -4$. b) Ubestemt for $a = 1$, selvmotsigende for $a = -1$ og bestemt for alle andre verdier for a. c) Bestemt for $a \neq -1$ og ubestemt for $a = -1$. , **5:** Ikke tilgjengelig fasit, **7:** Ikke tilgjengelig fasit, **9:** $x = -1, y = -1$ og $z = -3$, **11:** Ikke tilgjengelig fasit, **13:** $x^2 - 3x + 3$, **15:** $T_1 = 32$,$T_2 = 20$,$T_3 = 32$,$T_4 = 18$,$T_5 = 32$ og $T_6 = 20$.,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 3

1: a) Ikke på trappeform, b) På redusert trappeform, c) På redusert trappeform, d) På trappeform, e) På trappeform, f) På trappeform, g) Ikke på trappeform. , **3:** a) 2, b) 3, c) 2, d) 2, e) 3, f) 3 , **5:** Ikke tilgjengelig fasit, **7:** a) $L = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1 = 1 - t, x_2 = 1 - t, x_3 = t\}$, b) $L = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1 = 7/3 + t, x_2 = -2/3 - t, x_3 = t\}$, c) $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 = 1 - s - t, x_2 = -s - 2t, x_3 = s, x_4 = t\}$, d)-f) Fasit ikke tilgjengelig , **9:** a) $0 = c - a - b$ b) ingen lineær sammenheng., **11:** $(a, b, c, d) = (1, -1, 0, 2)$, **13:** Ikke tilgjengelig fasit, **15:** Ikke tilgjengelig fasit, **17:** Ikke tilgjengelig fasit,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 4

1: a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 14 & -9 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, c) umulig, d) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, **3:** a) $AB = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, b) AB ikke mulig, $BA = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 22 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, c) $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \end{bmatrix}$, $BA = 19$, d) $AB = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, BA ikke mulig, e) Ingen mulig. , **5:** a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -6 & 5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/12 & 1/3 & -1/12 \\ -5/12 & 2/3 & 7/12 \end{bmatrix}$, **7:** Ingen fasit, **9:** $X = B^T A^{-1}$, **11:** $X = B^T$, **13:** $A = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ -2t_2 & t_1 \end{bmatrix}$, **15:** a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, b) $x = 1, y = -1, z = -2$, c) $x = 2, y = 1, z = 1$, **17:** Ingen fasit, **19:** Ingen fasit, **21:** Ingen fasit, **23:** Ingen fasit,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 5

1: a) $(4,4)$, b) $(0,4)$, c) $(5,5)$, d) $(4,2,3)$, e) $(2,6,4)$ f) $(2.1, 0.9, 0.9)$, **3:** a) $(x_1, x_2) = (1,1)$, b) $(x_1, x_2) = (2,1)$, c) $(x_1, x_2) = (1,-2)$, d) Ingen løsning , **5:** a) L.U., b) L.U., c) L.A., **7:** a) Ikke underrom, b) Underrom, c) Ikke underrom, d) Underrom, e) Ikke underrom, **7:** Ingen fasit, **9:** Forslag: a) $\{\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$ b) $\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}\}$ c) $\{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, **11:** Ingen fasit tilgjengelig, **13:** a) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$, dim=3 b) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$, dim=3 c) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$, dim=2, **15:** a) Ja, med i radrommet b) Ja, c) Nei, d) Ja, f) Ja, g) Nei, h) Ja , **17:** Ingen fasit,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 6

1: a) Nei, b) Ja, c) Ja, d) Nei, e) Ja, f) Nei, g) Nei, h) Ja, **3:** $(0, 5/3), (1, 2/3)$, **5:** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **7:** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **9:** a) (3,-1,2), (1,1,2), (1,0,1) b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) finnes ikke. , **11:** a) $x + 2y = 0$, b) $2x + 3y = 0$ c) Ingen fasit, d) Ingen fasit , **13:** Ingen fasit,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 7

1: a) 1, b) 5, c)-1, d) 4, e) 0, **3:** Ikke tilgjengelig fasit, **5:** a) $\lambda = -1$, b) ikke egenvektor, c) $\lambda = 2$, d) $\lambda = -2$, e) ikke egenvektor , **7:** Ikke tilgjengelig fasit, **9:** Ikke tilgjengelig fasit, **13:** Ikke tilgjengelig fasit, **17:** Hint: $\det(-A) = (-1)^n \det A$, **19:** a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -0.1$, b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.3$, c) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.2$,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 8

1: a) 15, b) -23, c) -3, d) 0, e) -3, f) -13, **3:** a) $[\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}]$, b) $[\frac{1}{2}, -\frac{7}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}]$, c) $[\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9}]$, d) $[\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}]$, e) $[\frac{7}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{2}{11}]$, f) $[\frac{2}{13}, -\frac{10}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{6}{13}]$, **5:** a) $\text{Linspan}\{(-20, 4, 11, 0), (-12, -2, 0, 11)\}$, b) $\text{Linspan}\{(1, 2, 0), (-5, 0, 2)\}$, **7:** a) $\mathbf{u}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, b) $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, -\frac{7}{10})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{4}{11}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{2}{11}, -\frac{10}{11}, 0)$,

Fasit på odde oppgaver fra kapittel 9

1: a) Hint: Regn ut $c(\mathbf{0} + \mathbf{0})$ på to måter. b) Hint: Regn ut $((-1) + 1)\mathbf{v})$ på to måter., **3:** Hint: La $p(x) = c_1\,(1-t)^3 + c_2\,3t(1-t)^2 + c_3\,3t^2(1-t) + c_4\,t^3$. Sett inn fire forskjellige verdier for x inn i likningen $p(x) = 0$ og løs det lineære likningssettet du får i de ukjente c_1, c_2, c_3 og c_4.,

BIBLIOGRAFI

[1] H. Anton. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 4 edition, 1984.

[2] Hans Jakob Rivertz. FraXplorer. https://apps.apple.com/us/app/id1471062379.

[3] Ladis D. Kovach. *Advanced Engineering Mathematics*. Addison-Wesley, 1982.

[4] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, 10 edition, 2011.

[5] D. Lay. *Linear Algebra and its applications*. Pearson, Boston, 2011.

[6] Benoit B. Mandelbrot". *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freedman and Co., New York, 1983.

[7] Heinz-Otto Peitgen and Peter Richter. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.

[8] Timothy Sauer. *Numerical Analysis*. Pearson, 2014.

[9] John R. Søyland. *Lineær Algebra*. Søyland, 3 edition, 2002.

REGISTER

— R —

— S —

— T —

— U —

— V —