Oppgave 1 (20%)

a) La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\emptyset, \{1\}, 2, 3\}$ og $C = \{0, 1\}$ være mengder. Oppgaven var å avgjøre om påstandene under er sanne eller usanne:

(i) $A \cup C = A$ er usann fordi $A \neq A \cup C = \{0, 1, 2, 3\}$

(ii) $A - C = \{2, 3\}$ er sann fordi $\{2, 3\}$ er de elementene i A som ikke er med i C

(iii) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ er usann fordi 1 ikke er med i B.

(iv) A og C er komplementære mengder. Usann fordi både A og C inneholder 1

(v) $(A - B) \cap C \subseteq B$ er usann fordi venstresiden er lik $\{1\}$ og 1 er ikke med i B. $\{1\}$ er element i B, men det er noe annet.

(vi) $\emptyset \subseteq B$ er sant da alle mengder inneholder den tomme mengden.

(vii) $\emptyset \in B$ er usant fordi den tomme mengden ikke er et **element** i B.

(viii) $\{\emptyset\} \subseteq B$ er usann av samme grunn som i (vii).

(ix) $A - B = A \cap B^c$ er sant da det er en generell setning som gjelder for alle mengder A og B.

(x) $\mathcal{P}(C) \cap B = \emptyset$ er usann fordi $\{1\}$ er med i både $\mathcal{P}(C)$ og $\cap B$

b) Oppgaven var å beskrive funksjoner fra A til C (der A og C er mengdene i a)) som har følgende egenskaper:

(i) Surjektiv men ikke injektiv. Et eksempel er $f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$.

(ii) Injektiv men ikke surjektiv. Er ikke mulig fordi A har ett element mer enn C.

(iii) Verken injektiv eller surjektiv. Et eksempel er $f(1) = 0,\ f(2) = 0,\ f(3) = 0$.

Oppgave 2 (20%)

a) La A og B være mengder inneholdt i en universalmengde $\mathcal{U}$.

(i) Oppgaven er å vise eller motbevise at uansett hva A og B er, er mengdene

$$A - B,\ B - A \text{ og } A \cap B$$

parvis disjunkte (det vil si at hvert par av dem er disjunkte). Det viser seg at dette er riktig og må bevise dette.
Først har vi at $A - B$ og $B - A$ er disjunkte fordi om $a \in A - B$ så er $a \in A$ som igjen betyr at $a \notin B - A$. På samme måte, hvis $b \in B - A$ så er $b \in B$ men da er ikke b med i $A - B$.
Så har vi at $A - B$ og $A \cap B$ er disjunkte fordi om $a \in A - B$ så er a ikke med i B som igjen betyr at $a \notin A \cap B$. På samme måte, hvis $b \in A \cap B$ så er $b \in B$ men da er ikke b med i $A - B$.
Sist har vi at $B - A$ og $A \cap B$ er disjunkte fordi om $b \in B - A$ så er b ikke med i A som igjen betyr at $b \notin A \cap B$. På samme måte, hvis $a \in A \cap B$ så er $a \in A$ men da er ikke a med i $B - A$.

(ii) Oppgaven er å vise eller motbevise at $A - B$, $B - A$ og $A \cap B$ gir en oppdeling av $A \cup B$.
Vi vet allerede at mengdene er disjunkte. Vi trenger kun å sjekke om $A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$. Oppgave 1a(ix) gir $(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)$. Distributiv lov, negasjonslov og identitetslov gir $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B) = (A \cap (B^c \cup B)) \cup (B \cap A^c) = (A \cap U) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$.

b) Oppgaven er å vise at for alle heltall n har vi at 3 *ikke* deler $n^2 + 1$.

Et heltall kan alltid skrives på en av formene $n = 3k$, $n = 3k + 1$ eller $3k + 2$. I disse tre tilfellene har vi

- $n^2 + 1 = 9k^2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$
- $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$
- $n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 4 + 1 \equiv 2 \pmod 3$

Ingen av disse er ekvivalent med 0 mod 3.

Oppgave 3 (20%)

a) Oppgaven er å finne

$$17^{35} + 676^7 \cdot 3 \pmod{39}.$$

Vi har $676 \equiv 13 \pmod{39}$ så

$$17^{35} + 676^7 \cdot 3 \equiv 17^{35} + 13^7 \cdot 3 \equiv 17^{35} + 13^6 \cdot 39 \equiv 17^{35} + 0 \pmod{39}$$

Vi har at $17^2 = 289 \equiv 16 \pmod{39}$ $17^3 = 4913 \equiv -1 \pmod{39}$ og $35 = 3 \cdot 11 + 2$. Derfor er

$$17^{35} + 676^7 \cdot 3 \equiv 17^{35} + 0 \equiv (17^3)^1 1 \cdot 17^2 \equiv (-1)^1 1 \cdot 16 \equiv (-1) \cdot 16 \equiv (-16) \equiv 23 \pmod{39}$$

b) Oppgaven er å gi et induksjonsbevis for følgende kongruensregningsregel:

For alle heltall $n \geq 1$ har vi at hvis $a \equiv c \pmod m$, så er

$$a^n \equiv c^n \pmod m,$$

der m er et heltall større enn 1.

For $n = 1$ er setningen sann fordi $a^1 = a \equiv c = c^1 \pmod m$.

Vi antar at setningen er sann for $n = k$, dvs $a^k \equiv c^k \pmod m$ og skal vise at den er sann for $n = k + 1$. Nå er $a = c + rm$ og $a^k = c^k + sm$ der r og s er heltall fordi $a \equiv c \pmod m$ og $a^k \equiv c^k \pmod m$. Da er $a^{k+1} = aa^k = (c + rm)(c^k + sm) = cc^k + csm + rmc^k + srm^2 = c^{k+1} + (cs + rc^k + srm)m$.

$$a^{k+1} = c^{k+1} + (cs + rc^k + srm)m$$

betyr at $a^{k+1} \equiv c^{k+1} \pmod m$.

Oppgave 4 (25%) Vi definerer funksjonen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$.

a) Oppgaven er å regne ut de første ordens og andre ordens partiellderiverte til f. og skrive ned gradienten ∇f.

$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 3$, $f_y = 6xy$, $f_{xx} = 6x$, $f_{yx} = 6y$, $f_{yy} = 6x$. Gradienten er $\nabla f = (3x^2 + 3y^2 - 3, 6xy)$.

b) Oppgaven er å besteme de kritiske punktene til $f(x, y)$.

Vi starter med $f_y = 6xy = 0$. Dvs $x = 0$ eller $y = 0$. Vi setter inn i $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 3 = 0$. $(x = 0) \Rightarrow y = \pm 1$ og $(y = 0) \Rightarrow x = \pm 1$. De kritiske punktene er (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1).

c) Oppgaven er å regne ut diskriminanten $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ for alle de kritiske punktene og besteme hvilke typer disse er (sadelpunkt, lokalt minimum, lokalt maksimum.)

Kritiske punkter	$D = 36(x^2 - y^2)$	f_{xx}	type
$(-1, 0)$	36	-6	lokalt maks
$(1, 0)$	36	6	lokalt min
$(0, -1)$	-36		sadel
$(0, 1)$	-36		sadel

d) La C være sirkelen med radius $\sqrt{3}$ og senter i origo. ($g(x, y) = x^2 + y^2 = 3$.) Oppgaven er å vise med hjelp av Lagrange multiplikator at på sirkelen C har $f(x, y)$ seks kritiske punkter $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$.

Lagrangelikningene er: $\nabla f = \lambda \nabla g$ og $g(x, y) = 3$. Vi skriver dette ut:

(i) $3x^2 + 3y^2 - 3 = 2\lambda x$

(ii) $6xy = 2\lambda y$

(iii) $x^2 + y^2 = 3$

Vi tar tak likning (ii) $6xy = 2\lambda y \Leftrightarrow y = 0 \vee \lambda = 3x$ Vi sjekker begge tilfeller

1) $y = 0 \overset{(iii)}{\Rightarrow} x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$, som gir $(x, y) = (\pm\sqrt{3}, 0)$.

2) $\lambda = 3x \overset{(i)}{\Rightarrow} 3x^2 + 3y^2 - 3 = 6x^2 \overset{(iii)}{\Rightarrow} 3x^2 + 3(3 - x^2) - 3 = 6x^2 \Leftrightarrow 6 = 6x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \overset{(iii)}{\Rightarrow} y^2 = 2$

Det gir $(x, y) = (\pm 1, \pm\sqrt{2})$.

e) Oppgaven er å finne ligningen til tangentplanet til grafen $z = f(x, y)$ i punktet $(1, 1, 1)$.

Vi har fra punkt a) at $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 3$ og $f_y = 6xy$.

Likningen til tangenplanet er $z = L(x, y)$, der $L(x, y)$ er lineariseringen til $f(x, y)$ i punktet $(1, 1)$.

$$L(x, y) = f(1, 1) + f_x(1, 1)\,(x - 1) + f_y(1, 1)\,(y - 1) = 1 + 3(x - 1) + 6(y - 1)$$

Oppgave 5 (15%)

a) Oppgaven er å finne gradienten til $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$.

Vi regner ut og får $f_x(x, y, z) = y + 3z$, $f_y(x, y, z) = x + 2z$ og $f_z(x, y, z) = 2y + 3x$. Det gir $\nabla f = (y + 3z, x + 2z, 2y + 3x)$

b) Oppgaven er å finne den retningsderiverte til $f(x, y, z)$ i retningen $\mathbf{u} = (1/3, 2/3, 2/3)$ i punktet $(1, 1, 1)$.

Vi ser at lengden til $\mathbf{u}$ er $|\mathbf{u}| = \sqrt{1/9 + 4/9 + 4/9} = \sqrt{1} = 1$. Da har vi at den retningsderiverte til f i punktet $(1, 1, 1)$ er

$$D_{\mathbf{u}}f\Big|_{(1,1,1)} = \mathbf{u}\cdot\nabla f(1, 1, 1) = (1/3, 2/3, 2/3)\cdot(1{+}3, 1{+}2, 2{+}3) = (1/3, 2/3, 2/3)\cdot(4, 3, 5) = 4/3{+}6/3{+}10/3 = 20/3 = 6$$

c) Oppgaven er å besvare i hvilken retning øker $f(x, y, z)$ mest i punktet $(1, 1, 1)$.

Det vil si vi vil finne den største verdien av den retningsderiverte. Den retningsderiverte i retningen $\mathbf{v}$,(der $|v| = 1$), kan skrives som

$$D_{\mathbf{v}}f\Big|_{(1,1,1)} = \mathbf{v}\cdot\nabla f(1, 1, 1) = 1\cdot|\nabla f(1, 1, 1)|\cos\theta,$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\nabla f(1, 1, 1)$. Det betyr at $D_{\mathbf{v}}f\Big|_{(1,1,1)}$ er størst når $\cos\theta = 1$, dvs at $\mathbf{v}$ peker i samme retning som $\nabla f(1, 1, 1) = (4, 3, 5)$.

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}}(4, 3, 5) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(4, 3, 5)$$