i IMAX2021 Forside vår 2022

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i IMAA2021/IMAG2021/IMAT2021 Matematiske metoder 2

Eksamensdato: 13. mai 2022

Eksamenstid (fra-til): 09:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A

Faglig kontakt under eksamen:
Andrey Chesnokov **Tlf.: 464 20 404**
Hans Jakob Rivertz **Tlf.: 938 32 172**

ANNEN INFORMASJON:

Skaff deg overblikk over oppgavesettet før du begynner på besvarelsen din.

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet. Henvend deg til en eksamensvakt hvis du ønsker å kontakte faglærer. Noter gjerne spørsmålet ditt på forhånd.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspera. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst til høyre.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din i arkivet i Inspera. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige i arkivet.

1 Regning med komplekse tall

La u=2+3i og v=1-2i.
Regn ut $u+v$, uv og u/v. Skriv svaret på standard (kartesisk) form.

a) $u+v=$

b) $uv=$

c) $u/v=$

Maks poeng: 3

2 Komplekse tall algebra

Faktoriser utrykket z^2-4z+5. Svaret må være på formen $(z-z_1)(z-z_2)$, der z_1 og z_2 er komplekse tall på kartesisk form.

Maks poeng: 4

3 Partielle deriverte

Finn alle partielle deriverte av første og andre orden til funksjonen
$f(x, y) = x^2y^2 - 9x^2 - y^3/9 + 27y.$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$

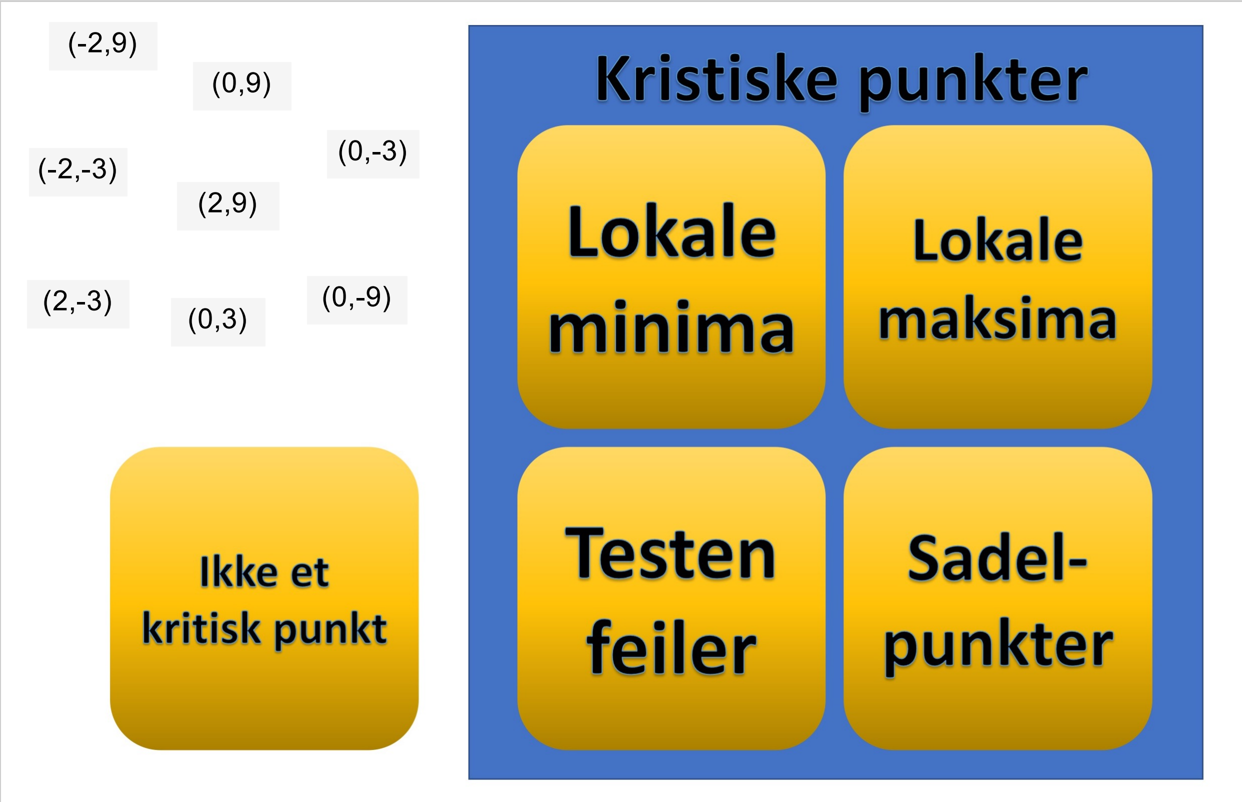
Maks poeng: 6

4 Kritiske punkter

Finn og klassifiser alle kritiske punkter til funksjonen $f(x,y) = x^2y^2 - 9x^2 - y^3/9 + 27y$. (Funksjonen er den samme som i forrige oppgave).

I bildet under skal du flytte punktene til riktig gult område. Du må også svare på hvilke punkter som ikke er kritiske punkter. (Det vil si at alle de 8 punktene må flyttes til et av de fem gule områdene).

Flytt punktene (tallparene) til riktig gult område. Sadelpunktene flyttes til området merket med **Sadelpunkter**, osv. Du får poeng for hvert riktig svar.



Maks poeng: 8

5 Egenverdier

Matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ har tre forskjellige eigenverdier.

To av egenvektorene til A er gitt ved $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a) Finn egenverdiene λ_1 og λ_2 som hører til egenvektorene v_1 og v_2.

Egenverdien λ_1 som hører til egenvektoren v_1 er ☐.

Egenverdien λ_2 som hører til egenvektoren v_2 er ☐.

b) Finn den siste egenverdien til A .

Den siste egenverdien til A er $\lambda_3 =$ ☐.

c) Finn en egenvektor v_3 til A som tilhører egenverdien λ_3.

Den siste egenvektoren til A er $v_3 =$ ☐.

Skriv svaret på formen [x , y , z], der tallene x, y og z er heltall.

Maks poeng: 4

6 IMAx-2021-V2022 Taylor

La $f(x) = \frac{1}{5-x}$

a) Finn de tre første leddene i Taylorrekken til f(x) om x=2.

b) Hva er konvergenssenteret til Taylorrekken i oppgave a?

c) Hva er konvergensradiusen til Taylorrekken i oppgave a?

d) Hva er riktig for endepunktene til konvergensintervalet til Taylorrekken i oppgave a?

Velg ett alternativ

- Taylorrekken i oppgave a konvergerer i høyre og venstre endepunkt av konvergensintervallet.
- Taylorrekken i oppgave a konvergerer i høyre endepunkt og divergerer i venstre endepunkt av konvergensintervallet.
- Taylorrekken i oppgave a divergerer i høyre endepunkt og konvergerer i venstre endepunkt av konvergensintervallet.
- Taylorrekken i oppgave a divergerer i høyre og venstre endepunkt av konvergensintervallet.

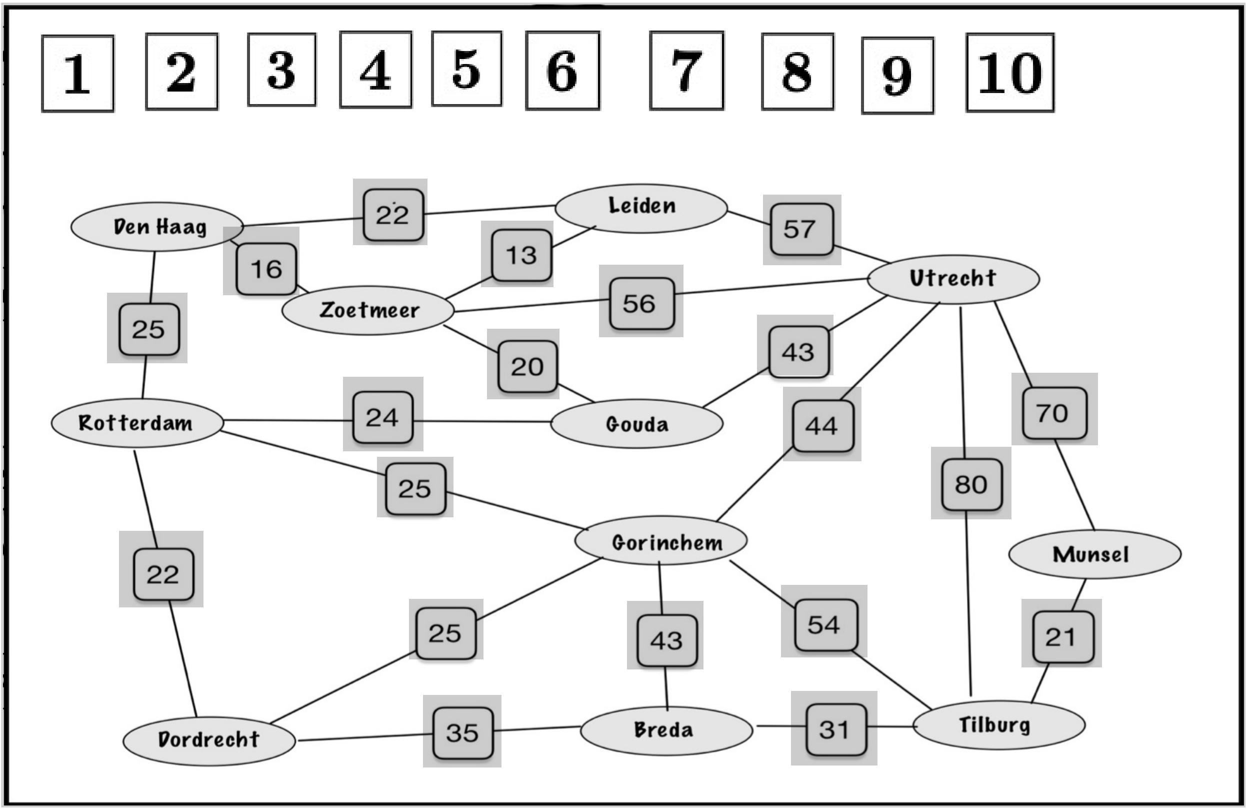
Maks poeng: 4

7 Prims algoritme

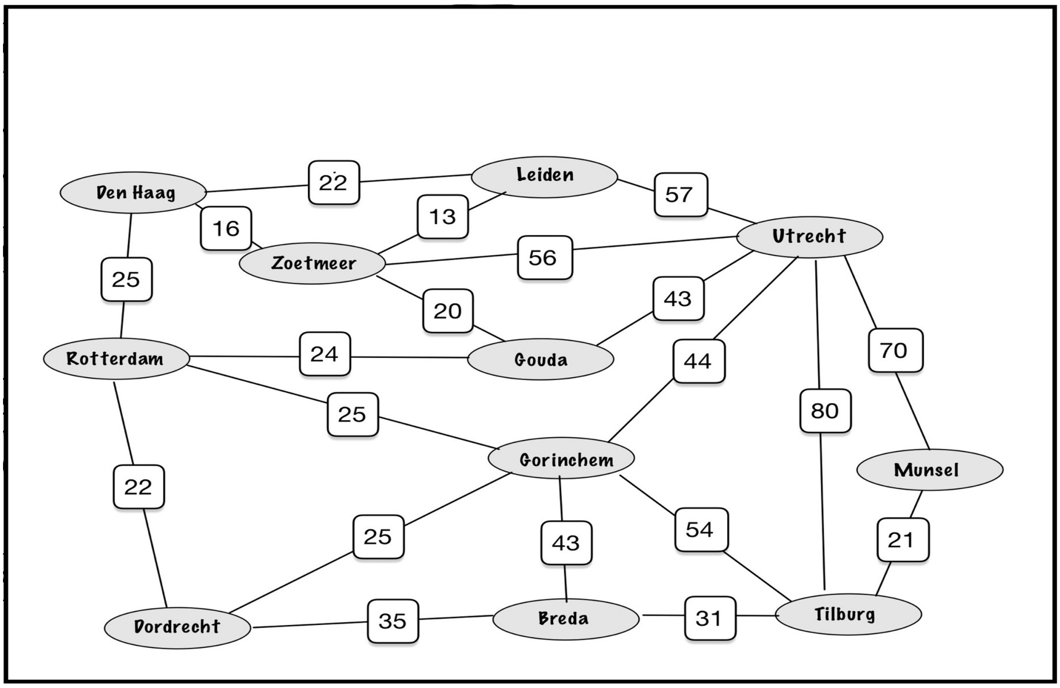
Du skal benytte Prims algoritme til å finne det minimale utspennende treet.

Du skal starte i **Den Haag.** Om du har to muligheter for valg av neste kant så kan du velge den du vil.

Plasser tallene øverst i bildet nedenfor på kantene i den rekkefølgen du velger kantene.



Ekstra bilde så du kan se avstandene etter at du har besvart



Maks poeng: 10

8 Komplement til tregrafer

Tegn alle ikke-isomorfe grafer med fem noder som er komplementær til et tre.

- Du kan tegne grafene ved å trykke på blyant-ikonen.
- I tillegg skal du skrive en forklaring av fremgangsmåten der du blant annet forklarer hvorfor du mener at det ikke finnes flere slike grafer enn de du har tegnet.

Skriv ditt svar her

Format

Words: 0

Maks poeng: 10

9 Logikk

i.) Gitt følgende pseudokode:

```
if(a){
        if(b){
                run();
        }
        else if(not c){
                run();
        }
}
```

Hvilke logiske utsagn korresponderer til de tilfellene der funksjonen run() blir kjørt? Finn alle riktige svaralternativer.

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ $a \land \neg(\neg b \land c)$
- ☐ $(a \lor b) \land (a \lor \neg c)$
- ☐ $a \land (b \lor \neg c)$
- ☐ $a \to (b \lor \neg c)$
- ☐ $a \lor (b \land \neg c)$
- ☐ $(a \land b) \lor (a \land \neg c)$

ii.) La P, Q og R være mengder med universalmengde U. Gitt følgende pseudokode der vi bruker mengdeoperasjoner og P, Q, R og U er av datatype *set* (mengde):

```
clear(R);            // fjern alle elementene fra R
for u in U{          // for alle elementene u i U:
        add(R, u);   // legg til element u i R
}
for p in P{
        remove(R, p); // fjern element p fra R
}
for q in Q{
        add(R, q);
}
```

Hvilke sammensatte mengder korresponderer til mengde R etter at denne koden er kjørt? Finn alle riktige svaralternativer.

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ $U - (P \cup Q)$
- ☐ $\overline{P} \cup Q$
- ☐ $\overline{P \cap \overline{Q}}$
- ☐ $\overline{P \cup \overline{Q}}$
- ☐ $\overline{P} \cap Q$
- ☐ $(U - P) \cup Q$

Maks poeng: 6

10 Nagasjoner av Universale utsagn

Hvilke utsagn er negasjoner av følgende utsagn?
$\forall n \in \mathbb{Z}, n|36 \rightarrow (n|4 \vee n|9)$
Angi alle riktige alternativer.
Velg ett eller flere alternativer

- $\exists n \in \mathbb{Z}, \neg\big(n|36 \rightarrow (n|4 \vee n|9)\big)$
- $\exists n \in \mathbb{Z}, \neg\big(\neg(n|36) \vee (n|4 \vee n|9)\big)$
- $\exists n \in \mathbb{Z}, n|36 \wedge \neg(n|4 \vee n|9)$
- $\exists n \in \mathbb{Z}, n|36 \wedge \big(\neg(n|4) \wedge \neg(n|9)\big)$
- $\exists n \in \mathbb{Z}, n|36 \wedge \neg(n|4) \wedge \neg(n|9)$

Maks poeng: 5

11 Mengdelære

La universalmengden være S={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Skriv følgende på formen $\{a_1, \cdots, a_n\}$ der $a_i, i = 1 \cdots n$ er elementene i mengden. F. eks.: Mengden som inneholder elementene 2 og 3 kan noteres som $\{2, 3\}$

$\{x \in S | 5x \in S\} =$

$\{x \in S | (x-3)^2 \in S\} =$

$\{x \in S | (x-1)/3 \in \mathbb{Z}\} =$

$\{x \in S | \exists y \in S \ (x = \sqrt{2y})\} =$

$\{x \in S | \exists y \in S \forall z \in S \ (x = yz)\} =$

Maks poeng: 5

12 Kombinatorikk

Haakon, Olav og Harald er i en iskrembar og skal velge is. På menyen er det 8 smaker kuleis.

a) Haakon vil bestille 3 kuler med 3 forskjellige smaker stablet i høyden. Kulenes plassering har betydning for Haakon da han gjerne vil spise dem i en gitt rekkefølge.

i) Hva slags problem er dette?

- Uten tilbakelegging, ordnet utvalg.
- Med tilbakelegging, ordnet utvalg.
- Uten tilbakelegging, uordnet utvalg.
- Med tilbakelegging, uordnet utvalg.

ii) Hvilken utregning er riktig?

- $3!$
- 8^3
- $8C3 = \binom{8}{3}$
- $8!$
- $8P3 = \frac{8!}{3!}$

iii) Hvor mange valgmuligheter har Haakon?

b) Olav vil bestille is i beger. Han vil ha 4 iskuler med 4 forskjellige smaker. Han er ikke opptatt av hvordan isen ligger i skålen. Det er tilfeldig i hvilken rekkefølge han bestiller iskulene.

i) Hva slags problem er dette?

- Med tilbakelegging, ordnet utvalg.
- Uten tilbakelegging, ordnet utvalg.
- Uten tilbakelegging, uordnet utvalg.
- Med tilbakelegging, uordnet utvalg.

ii) Hvilken utregning er riktig?

- ○ $8C4 = \binom{10}{4}$
- ○ 8^4
- ○ $8P4 = \frac{8!}{4!}$
- ○ 4^8
- ○ $4!$

iii) Hvor mange valgmuligheter har Olav?

[ ]

c) Harald har oppdaget at han kan velge samme smak flere ganger. Han vil kjøpe 5 iskuler. Rekkefølgen har ikke noe å si og iskulene kan ha samme smak.

i) Hva slags problem er dette?

- ○ Med tilbakelegging, uordnet utvalg.
- ○ Uten tilbakelegging, ordnet utvalg.
- ○ Med tilbakelegging, ordnet utvalg.
- ○ Uten tilbakelegging, uordnet utvalg.

ii) Hvilken utregning er riktig?

- ○ $14C5 = \binom{14}{5}$
- ○ 10^5
- ○ 5^{10}
- ○ $14P5 = \frac{14!}{5!}$
- ○ $\frac{10!}{5!}$

iii) Hvor mange valgmuligheter har Harald?

[ ]

Maks poeng: 9

13 IMAX2021 Funkjoner Vår 2022

a) Hvor mange forskjellige injektive funksjoner er det fra mengden {A,B,C,D} til mengden {1,2,3,4,5}?

b) Hvor mange forskjellige funksjoner er det fra mengden {A,B,C,D} til mengden {0,1,2}?

c) Hvor mange forskjellige bijektive funksjoner er det fra mengden {A,B,C,D} til mengden {0,1,2,3}?

d) Hvor mange forskjellige surjektive funksjoner er det fra mengden {1,2,3,4,5} til mengden {A,B,C,D}?

Maks poeng: 4

14 Tallteori - kryptografi 2022

Gitt primtallene $p = 29$ og $q = 149$, og produktet $n = pq = 4321.$

a) Finn $\phi(4321)$ (ϕ er Eulers totientfunksjon) [ ]

Du vil bruke RSA med offentlig krypteringsnøkkel $(n, e) = (4321, 25)$.

b) Du kan bruke dette som offentlig nøkkel fordi:

Velg ett alternativ

- 4321 og 25 er relativt primiske
- 25 er hemmelig
- 25 er et kvadrattall
- 25 og $\phi(4321)$ er relativt primiske.
- 25 er kjent.

c) Krypter meldingen 42 med nøkkelen ovenfor. Svar: [ ]

d) Finn den private dekrypteringsnøkkelen (n, d) tilhørende den offentlige nøkkelen (n, e) ovenfor.

$d =$ [ ]

Maks poeng: 8

15 Eventuelle merknader

Eventuelle merknader

Dette er ikke en oppgave, og du som regel vil ikke få poeng (eller trekk) for det du skriver her.

Du kan skrive i tekstfeltet nederst i tilfelle du har merknader. For eksempel, om du har gjort vesentlige antagelser for å kunne løse én av oppgavene, eller om du opplevde tekniske problemer som ikke eksamensvaktene kunne hjelpe med.

Om du bare legger ved mellomregninger for noen oppgaver vil du i utgangspunkt ikke få uttelling for det.

Skriv ditt svar her

Maks poeng: 0