Norges teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for Informatikk og e-Læring

1 a) Dette er usant. Hvis mengder M og N ikke overlapper, vil $M - N = M$, så hvis $M \neq \emptyset$, vil $M - N \neq \emptyset$.

b) Funksjonen er ikke injektiv fordi $f(1) = f(-1)$ selv om $1 \neq -1$. Den er ikke surjektiv fordi absoluttverdien til et reelt tall alltid er ikke-negativ, så det finnes for eksempel ingen reelle tall som sendes på -1.

c) Denne funksjonen er injektiv fordi $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$. Den er ikke surjektiv fordi det for eksempel ikke finnes noe heltall n slik at $f(n) = 2$ (det ville krevd at $n = 3/2$, som ikke er et heltall). Det er jo faktisk slik at "$2n - 1$ for et heltall n" er en måte å beskrive alle oddetall på, så denne funksjonen treffer aldri partall. Altså er påstanden "injektiv eller surjektiv" sann (som vi kunne konkludert allerede etter å ha funnet at den er injektiv).

d) Denne påstanden er sann for endelige mengder. Dette er fordi for alle elementer $a \in A$ vil $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$, og i tillegg har vi at $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$. Altså fins det minst et element mer i $\mathcal{P}(A)$ enn i A. Det går også an å argumentere ut fra resultatet i pensum om at hvis A er endelig og har n elementer, har potensmengden til A 2^n elementer. Merk: Den vanligste feilen her var å si at påstanden ikke er sann for $A = \emptyset$. Men $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, som har 1 element mer enn $\emptyset$, så det er ingen motsigelse.

Påstanden er mer komplisert å undersøke for uendelige mengder, men siden vi hovedsakelig har jobbet med potensmengder til endelige mengder, gir det full uttelling å argumentere kun ut fra det. Det var egentlig tenkt som forutsetning for oppgaven.

2 a) Gitt at vi har tre mengder A, B og C slik at $A \subseteq B$.

i) Det vil ikke stemme at $A^c \cap C \subseteq B$ alltid er sant. Her er et mulig moteksempel: $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{2, 3\}$ og $C = \{3, 4, 5\}$. Da er $A \subseteq B$ oppfylt, men $A^c \cap C = \{4, 5\}$ som ikke er inneholdt i B.

ii) Dette er en sann påstand. Her er et bevis:
Anta at $x \in A \cap C^c$. Da er $x \in A$ og $x \in C^c$. Siden $A \subseteq B$ vil alle elementer i A også være i B, så $x \in B$ og vi får at $A \cap C^c \subseteq B$.

b) Anta at $f : A \to B$ og $g : B \to C$ er to injektive funksjoner. Da er $g \circ f$ en funksjon fra A til C. Skal vise at den er injektiv.

Anta at $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Det betyr at $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Siden g er injektiv, må da $f(a_1) = f(a_2)$. Videre, siden f også er injektiv, må $a_1 = a_2$, så sammensetningen blir injektiv.

3 a) Bruker Euklids algoritme:

$$
\begin{aligned}
321 &= 117 \cdot 2 + 87 \\
117 &= 87 \cdot 1 + 30 \\
87 &= 30 \cdot 2 + 27 \\
30 &= 27 \cdot 1 + 3 \\
27 &= 3 \cdot 9
\end{aligned}
$$

Altså er $\gcd(321, 117) = 3$. Det betyr at 117 ikke har en multiplikativ invers modulo 321, for det er tilfellet hvis og bare hvis $\gcd(321, 117) = 1$.

b) Hvis vi ønsker å bruke kongruensregning til å finne siste siffer i et tall, kan vi redusere det modulo 10:

$$\begin{aligned} 11^{11} + 22^{22} + 33^{33} &\equiv 1^{11} + 2^{22} + 3^{33} \pmod{10} \\ &\equiv 1 + 2^{22} + 3^{33} \pmod{10} \end{aligned}$$

For å komme videre kan vi bruke at $2^5 \equiv 2 \pmod{10}$ og $3^4 = 9^3 == \equiv 1 \pmod{10}$. (Et annet alternativ er å bruke square-and-multiply.)

$$\begin{aligned} 11^{11} + 22^{22} + 33^{33} &\equiv 1 + 2^{22} + 3^{33} \pmod{10} \\ &\equiv 1 + 2^{5\cdot 4+2} + 3^{4\cdot 8+1} \pmod{10} \\ &\equiv 1 + (2^5)^4 \cdot 2^2 + (3^4)^8 \cdot 3 \pmod{10} \\ &\equiv 1 + 2^4 \cdot 2^2 + 1^8 \cdot 3 \pmod{10} \\ &\equiv 1 + 2^6 + 3 \pmod{10} \\ &\equiv 1 + 4 + 3 \equiv 8 \pmod{10} \end{aligned}$$

Altså er siste siffer 8.

c) Her formulerer vi et kort induksjonsbevis. Først basissteg: $a_1 = 2 = 2 \cdot 1$ og $a_2 = 8 = 2 \cdot 4$, så begge "unntakstilfellene" er partall.

Induktivt steg: Antar at $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ alle er partall. Det betyr spesielt at $a_{k-2} = 2r$ og $a_{k-1} = 2s$ for heltall r og s (siden de er partall). Da blir

$$a_k = a_{k-1} + 3a_{k-2} = 2s + 3 \cdot 2r = 2(s + 3r)$$

også et partall, og a_k er derfor også et partall.

Altså er alle a_n partall for $n \geq 1$ ved (sterk) matematisk induksjon.

$\boxed{4}$ La funksjonen f være definert ved $f(x, y) = x^2 y + y^3 - 2y$.

a) Gradienten er gitt ved

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\hat{\mathbf{i}} + f_y(x, y)\,\hat{\mathbf{j}} = 2xy\,\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + 3y^2 - 2)\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Vi finner de kritiske punktene ved å løse likningen $\nabla f = \mathbf{0}$ eller på komponentform

$$\begin{aligned} 2xy &= 0 \\ x^2 + 3y^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Første likning har løsningen 1) $x = 0$ eller 2) $y = 0$. Vi tar for oss hvert tilfelle separat.

1) Vi setter inn $x = 0$ i andre likning:

$$3y^2 - 2 = 0$$

Denne likningen har løsningen $y = \pm\sqrt{2/3}$.

2) Vi setter inn $y = 0$ i andre likning:

$$x^2 - 2 = 0$$

Denne har løsningen $x = \pm\sqrt{2}$.

De kritiske punktene er $(0, \pm\sqrt{2/3})$ og $(\pm\sqrt{2}, 0)$ Vi regner ut de andre deriverte av $f(x, y)$.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2y \\ f_{xy}(x, y) &= 2x \\ f_{yy}(x, y) &= 6y \end{aligned}$$

Diskriminanten er

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = 12y^2 - 4x^2.$$

Vi klassifiserer de kritiske punktene

(x, y)	$D(x, y)$	$f_{xx}(x, y)$	Type	$f(x, y)$
$(0, \sqrt{2/3})$	8	$2\sqrt{2/3}$	Lokalt minimum	$-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$
$(0, -\sqrt{2/3})$	8	$-2\sqrt{2/3}$	Lokalt maksimum	$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$
$(\sqrt{2}, 0)$	-8		Sadelpunkt	0
$(-\sqrt{2}, 0)$	-8		Sadelpunkt	0

$f(0, y) = 0 + \sqrt{\frac{2}{3}}(-4/3)$ $f(0, y) = 0 - \sqrt{\frac{2}{3}}(-4/3)$

b) Vi benytter oss av at området er lukket og begrenset. Da vil vi finne maks og min i det indre av området $x^2 + y^2 < 4$ eller på randen $x^2 + y^2 = 4$. De kritiske punktene for det indre av området har vi fra punkt a).

Vi setter opp Lagrange multiplikator likningerne for å løse problemet for randen $x^2 + y^2 = 4$.

$$\begin{aligned} 2xy &= 2\lambda x \\ x^2 + 3y^2 - 2 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Første likning har løsningen 1) $x = 0$ eller 2) $y = \lambda$. Vi tar for oss hvert tilfelle separat.

1) Vi setter inn $x = 0$ tredje likning og får $y^2 = 4$ som gir $y = \pm 2$. Kritiske punkter $(0, 2)$ og $(0, -2)$.
2) Vi setter inn $\lambda = y$ i likning 2. $x^2 + 3y^2 - 4y = 2y^2$. Etter oppryddning får vi. $x^2 + y^2 = 2$. Vi bruker tredje likning til å eliminere x^2 fra likningen og får løsningen $2 = 0$ som er en selvmotsigelse.

Vi regner ut verdien til $f(x, y)$ i alle kritiske punkter.

$$\begin{aligned} f(0, 2) &= 0 + 8 - 4 = 4 \\ f(0, -2) &= 0 - 8 + 4 = -4 \\ f\left(0, \sqrt{2/3}\right) &\approx -1.08866 \\ f\left(0, -\sqrt{2/3}\right) &\approx 1.08866 \end{aligned}$$

De to siste er lokale ekstrempunkter i det indre av området. Vi finner største og minste verdi av disse fire. <u>Maksverdi er 4 og minverdi er -4.</u>

$\boxed{5}$ En funksjon er gitt ved $h(x,y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$.

a) Finn den største mulige definisjonsmengden til den flervariable funksjonen.

Kvadratroten har mening hvis og bare hvis at $49 - x^2 - y^2 \geq 0$. Det gir største mulige definisjonsmengde

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \left| x^2 + y^2 \leq 7^2 \right.\right\}.$$

Det vil si den lukkede sirkelskiven med radius 7 og sentrum i origo.

b) Regn ut de partielle førstederiverte til $h(x,y)$. Hva er gradienten til $h(x,y)$ i punktet $(2,3)$?

Vi partiell deriverer der vi bruker kjerneregelen på $f(x,y) = \sqrt{g(x,y)}$ med kjerne $g(x,y) = 49 - x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{-x}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}} \\ f_y(x,y) &= \frac{-y}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Gradienten i punktet $(2,3)$ er

$$\nabla f(2,3) = f_x(2,3)\hat{\mathbf{i}} + f_y(2,3)\hat{\mathbf{j}} = -\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}.$$

c) Finn en likning for tangentplanet til $z = h(x,y)$ i punktet $(2,3)$.

Likningen for tanfentplanent er

$$z = f(2,3) + f_x(2,3)(x-2) + f_y(2,3)(y-3)$$

som gir

$$z = 6 - \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{2}(y-3).$$

d) I hvilken retning er den retningsderiverte størst i punktet $(2,3)$.

Den retningsderiverte er størst i retningen til tangenten som er $-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}$.

Hvilken verdi har den retningsderiverte i denne retningen?

Verdien til den retningsderiverte i denne retningen er lik lengden til gradienten

$$|-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{6}.$$