ℹ **Varslingar**: Dersom det oppstår behov for å gje beskjedar til kandidatane medan eksamen er i gong (f.eks. ved feil i oppgåvesettet), vil dette bli gjort via varslingar i Inspera. Eit varsel vil dukke opp som ein dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne att varselet ved å klikke på bjølla i øvre høgre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidatar for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din innan rekkevidde.

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i IMAA2021, IMAG2021 og IMAT2021 Matematiske metodar 2 for Dataingeniør

Eksamensdato: 14. mai 2020

Eksamenstid (frå-til): 09:00-14:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: A / Alle hjelpemiddel tillatne. Eksamen skal vera eit individuelt arbeid.

Fagleg kontakt under eksamen: (Ring berre hvis det er feil i oppgåva.)
Tlf.: 938 32 172, 920 50 951 (Trondheim)
Tlf.: 988 01 068 (Ålesund)
Tlf.: 464 20 404 (Gjøvik)

Teknisk hjelp under eksamen: NTNU Orakel
Tlf: 73 59 16 00

ANNAN INFORMASJON:

Gjer deg opp dine eigne meiningar og nytt sunn fornuft. Fagleg kontaktperson skal vera kontakta berre dersom det er direkte feil eller manglar i oppgåvesettet.

Lagring: Svara dine i Inspera Assessment vert lagra automatisk. Jobbar du i andre program – hugs å lagre undervegs.

Juks/plagiat: Eksamen skal vere eit individuelt, sjølvstendig arbeid. Det er tillate å bruke hjelpemiddel. Alle svar vert kontrollert for plagiat. *Du kan lese meir om juks og plagiering på eksamen her.*

Vekting av oppgåvene: Korleis oppgåvene er vekta står i innhaldslista og under kvar oppgåve i oppgåvesettet.

Trekk av poeng i fleirvalsoppgåvene med fleire riktige alternativ:
Du får poeng for kvart riktige svar. For feil svar blir du trekt like mange poeng.
Du kan ikkje få negative totalpoeng på ei oppgåve.

OM LEVERING:

Svara dine vert levert automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger, under føresetnad av at du har svart på minst ei oppgåve. Dette skjer sjølv om du ikkje har klikka «Lever og gå tilbake til Dashboard» på siste side i oppgåvesettet. Du kan opne og redigere svara dine så lenge prøven er open. Dersom du ikkje har svart på nokon av oppgåvene ved prøveslutt, blir ingenting levert.

Trekk frå eksamen: Ønskjer du å levere blankt/trekkje deg, gå til menyen i øvre høgre hjørne og vel «Lever blankt». Dette kan ikkje vert angra sjølv om prøven framleis er open.

Tilgang til svara dine: Du finn svara dine i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.h

1 Betrakt følgande argument.

P_1 *Viss du eter mykje søtpotetar får kroppen din nok C-vitamin.*
P_2 *Du senkar blodtrykket eller kroppen din får ikkje nok C-vitamin.*
P_3 *Du eter mykje søtpotetar.*

$\therefore$ *Du senkar blodtrykket.*

Definer følgjande logiske variablar
$p =$ "Du eter mykje søtpotetar."
$q =$ "Du senkar blodtrykket."
$r =$ "Kroppen din får nok C-vitamin."

Gitt følgjande logiske former.
$A = \sim(\sim q \vee r)$
$B = q \wedge \sim r$
$C = \sim(q \wedge r)$
$D = q \vee \sim r$
$E = \sim(r \vee q)$

i) Premiss P_2 er på forma (Alternativ A, Alternativ B, Alternativ C, Alternativ D, Alternativ E)

ii) Velg riktig grunngjeving for at argumentet er gyldig eller ugyldig. Eitt eller fleire svar kan vere sanne.
Vel eitt eller fleire alternativ

- ☐ Argumentet er ugyldig fordi konklusjonen kan vere gal sjølv om alle premissane er sanne.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi WHO har forska på at C-vitaminar gjev lågare blodtrykk.
- ☐ Argumentet er ugyldig fordi du kan ete appelsinar i staden for søtpotetar og få nok C-vitamin.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi den logiske forma til argumentet $[(p \to r) \wedge (q \vee \sim r) \wedge p] \to q$ er ein tautologi.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi konklusjonen om at du senkar blodtrykket ikkje er galt samtidig som at alle premissar er sanne.
- ☐ Argumentet er gyldig fordi konklusjonen er riktig selv om maksimalt eitt av premissane er gale.

(NB! Du blir trekt for kvart svar som er feil. Samla poengsum på oppgåvane i) og ii) vil ikkje vere negativ.)

Maks poeng: 6

2 Vi skal finne ei tilnærming til $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ med feil mindre enn 0,001. Først finner vi ein rekkje-representasjon for e^{-x^2}. Siden $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, følgjer det at

Vel eitt alternativ

- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{2n}}{n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

Difor $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$.

Dette er ein alternerande rekkje $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ med $b_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$. Av kunnskapen vår om alternerande rekkjer vet vi at om vi estimerer $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!}$ med $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!}$, vil feilen vere mindre enn

Vel eitt alternativ

- $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(n+1)!}$
- $b_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$
- $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$
- $b_n = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$

Det betyr at vi må finne *n* slik at $\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 0,001.$

Når vi prøver nokon verdiar av *n* finner vi at for $n = 3, \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} =$ ____ og for $n = 4, \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} =$ ____. Difor gir

Vel eitt alternativ

- $\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \frac{1}{(2i+3)(i+1)!} =$
- $\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!} =$
- $\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \frac{1}{(2i+3)(i+1)!} =$
- $\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!} =$

____ oss tilnærminga vi er på jakt etter.

Maks poeng: 10

3 I staten Vekslemania nyttes pengeeininga "U". Dei har mynter med følgjande valørar i eininga U:

15, 21, 35, 39, 65, 105.

Dei vil fjerna alle valørar bortsett frå to, slik at betalingar av alle heiltalige transaksjonar kan gjennomførast ved å nytte veksling.

a) Kva for to valørar vil ein kunne nytte til å få til dette? Det er to løysningar. Den eine er å nytte valørane 21U og 65U. Kva er den andre?

Løysning 2: Minste valør: ☐ , største valør: ☐ .

b) Kva er det minste talet på myntar ein treng (betaling og veksel til saman) for å betale eit beløp på 1U, viss ein nyttar valørane 21U og 65U ?

Talet på mynter totalt: ☐

Maks poeng: 6

4 **a)** Finn alle kritiske punktar til funksjonen
$f(x,y) = x^2\,y + 2\,x\,y - y^3 + 6\,y^2 - 8\,y$.

b) Klassifiser dei kritiske punkta du fann i **a)**.

Kritisk punkt	Type
((0,-4), (2,1), (0,0), Ingen av disse er kritiske punkter., (-1,3))	(Ingen av alternativene er kritiske punkter., Sadelpunkt, Ikke mulig å si, Lokalt minimum, Lokalt maksimum)
(Ingen av disse er kritiske punkter., (1,-1), (1,1), (0,2), (-4,0))	(Ingen av alternativene er kritiske punkter., Sadelpunkt, Lokalt maksimum, Ikke mulig å si, Lokalt minimum)
((-2,0), (-1,1), Ingen av disse er kritiske punkter., (1,3), (4,0))	(Lokalt maksimum, Ingen av alternativene er kritiske punkter., Lokalt minimum, Ikke mulig å si, Sadelpunkt)
((2,0), Ingen av disse er kritiske punkter., (2,3), (-4,2), (4,1))	(Ikke mulig å si, Ingen av alternativene er kritiske punkter., Lokalt minimum, Sadelpunkt, Lokalt maksimum)

Maks poeng: 8

5 I denne oppgåva definerer vi sprettkoeffisienten $0 < r < 1$ til ein ball på følgjande måte: Når ballen vert sleppe fri frå høgde h, spretter den tilbake til høgde $r \cdot h$.

Ein ball med sprettkoeffisient r = 0,58 vert sleppe fri frå starthøgde 0,9 meter og så sprett den uendelig mange gongar.

a) Nytt ein geometrisk rekkje for å finne den totale opp-og-ned avstanden som ballen legg tilbake i løpet av denne prosessen. (Ta summen av alle avstandane oppover og nedover, og hugs at ballen berre går den første avstanden ein gong (nedover) og alle andre avstandar to gongar).

Du står fritt til å løyse denne oppgåva med algebraiske eller numeriske metodar, men du skal gi svaret numerisk med fire desimalar etter kommaet.

Svar: ☐ meter

Tiden *t* det tar for ballen å falle ein avstand *s* (fra stillstand) er $\sqrt{\frac{2s}{g}}$ der $g = 9,81\ \frac{m}{s^2}$ er gravitasjonskonstanten. (Å sprette opp fra bakken til høgde *s* tar like lang tid).

b) Kor lang tid tar det før ballen med sprettkoeffisient *r* = 0,58 er ferdig med å sprette når den vert sleppe frå høygda *h*=0,9 meter? Gi svaret numerisk med fire desimalar etter kommaet.

SVAR: ☐ sekunder

Maks poeng: 10

6 La A vere mengda av alle heiltala mellom 1 og 1000 som kan dividerast på 3. La B vere mengda av alle heiltala mellom 1 og 1000 som kan dividerast på 7.

a. Bestem $|A|$. (det vil si, talet på element i mengde A)

svar: ☐

b. Bestem $|B|$.

svar: ☐

c. Bestem $|A \cup B|$.

svar: ☐

Maks poeng: 5

7 Kor mange bijeksjonar finns det frå ei mengd med 2 element til ei mengd med 4 element?

Svar: ☐

Kor mange injeksjoner finnes det fra ei mengd med 2 element til ei mengd med 3 element?

Svar: ☐

Maks poeng: 2

8 **Kva for av desse påstandane er sanne?**
Vel eitt eller fleire alternativ

- ☐ Om forholdet mellom leddene til to rekkjer har grenseverdi 1, konvergerer eller divergerer begge rekkjene samtidig.
- ☐ Om ledda til ei uendeleg rekkje ikkje konvergerer mot 0, konvergerer ikkje rekkja.
- ☐ Om ledda til ei alternerande rekkje minkar i absoluttverdi, konvergerer rekkja.
- ☐ Om ei uendeleg rekkje ikkje divergerer mot uendeleg eller minus uendeleg, konvergerer den.

Maks poeng: 4

9 Gitt mengdene

$A = \{1, 2\} \cap \{3, 4\}$

$B = \{1, 2, 5\}$

$C = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$

$D = B \cup C$

$E = A \cup (B \cap C)$

$F = A \cap B \cap C$

Kor mange element inneheld mengdene D, E og F?

Talet på element i D: ☐

Talet på element i E: ☐

Talet på element i F: ☐

Maks poeng: 5

10 La Z_n vere mengda av alle n-te-røter av 1 i det komplekse planet.

Teorem. *La m og n vere positive heltall. $Z_m \subseteq Z_n$ viss og berre viss $m|n$.*

Vi har laga eit bevis av teoremet og tatt ut nokon delar.

a) Din oppgåve er å fylle inn bokstavar som svarar til det som manglar. Alle bokstavane må nyttes minst ein gong og ein bokstav må nyttes to gongar.

A: $z^n = z^{km} = z^{mk} = (z^m)^k = 1^k = 1$
B: $m|n$
C: $z \in Z_n$
D: $z \in Z_m$
E: $n = km$
F: $z^m = 1$
G: alle element i Z_m også er element i Z_n
I: n-te-rot av 1
H: m-te-rot av 1

Bevis: Anta at m og n er positive heiltal og at ☐. Siden ☐ så finns det eit heltall k slik at ☐. La ☐. Da er z ein ☐. Det betyr at ☐. Da er ☐ og derfor er z også ein ☐. Difor er ☐. Vi kan difor slutte at ☐. Vi har difor at $Z_m \subseteq Z_n$.

b) Er beviset over eit bevis av ***heile*** teoremet, ***viss***-delen eller ***berre-viss***-delen? ☐ (Viss delen, Berre viss delen, Heile teoremet)

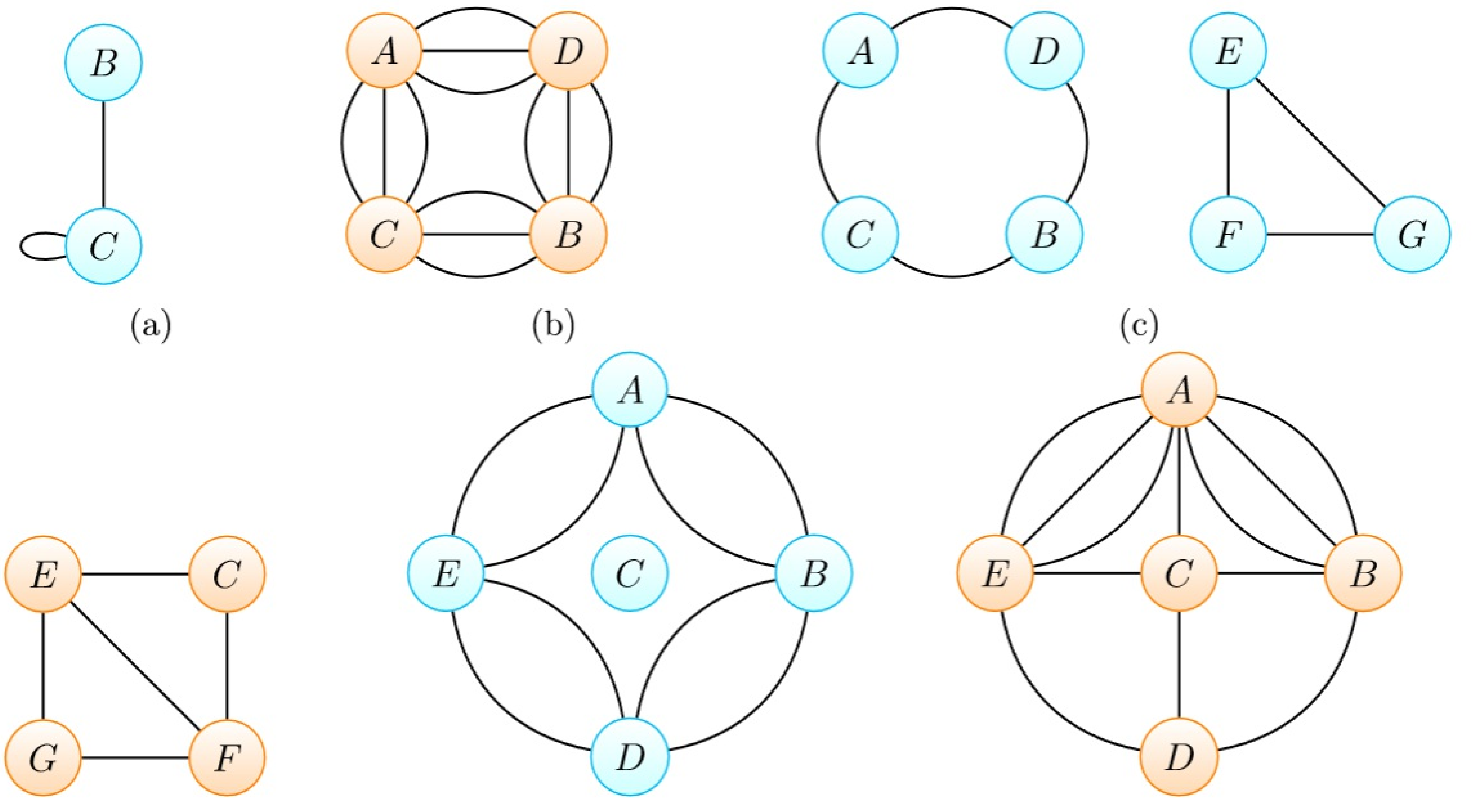
c) Kva passer **dårlegast** om dette beviset?

Vel eitt alternativ

- Bevis med sjølmotsigelse
- Direkte bevis
- Elementargument

Maks poeng: 12

11 Svar på spørsmål 1-6 om desse grafane:



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

1. Kva grafar er IKKJE enkle (engelsk: NÓT simple)? Vel alle passande alternativ

- [ ] a
- [ ] b
- [ ] c
- [ ] e
- [ ] d
- [ ] f

2. Kva grafar er samanhengande (engelsk: connected)? Vel alle passande alternativ

- [ ] f
- [ ] delgraf EFG i graf (c) (engelsk: subgraph)
- [ ] c
- [ ] b
- [ ] e
- [ ] a
- [ ] d

3. Kva grafar er todelte (engelsk: bipartite)? Vel alle passande alternativ

- [ ] d
- [ ] a
- [ ] f
- [ ] e
- [ ] b
- [ ] c

4. Kva grafar er IKKJE eulerske? (Ein eulersk graf er ein graf som inneheld ein eulerkrets (engelsk: Eulerian cycle)). Vel alle passande alternativ

- [ ] b
- [ ] a
- [ ] f
- [ ] e
- [ ] c
- [ ] d

5. Kva grafar er ikkje eulerske, men inneheld ein eulersti (engelsk: Eulerian path)? Vel alle passande alternativ

- [ ] f
- [ ] e
- [ ] b
- [ ] a
- [ ] d
- [ ] c

6. Kva grafar har minst to ikke-isomorfe utspennende tre (engelsk: spanning trees)? Vel alle passande alternativ

- [ ] f
- [ ] b
- [ ] c
- [ ] e
- [ ] a
- [ ] d

Maks poeng: 10

12 I denne oppgåva skal du undersøkja følgja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, B \in \mathbb{R}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(2a_n + \frac{B}{a_n^2}\right).$$

Finn svar på følgjande spørsmål. Det trengst ikkje å bevisa noko formelt, men du må vera rimeleg sikker i svaret. Du bestemmer val av ein løysingsmetode sjølv (til dømes, ein numerisk metode, analytisk metode eller begge metodar).

La $a_1 = 3, B = 5$.

Har følgja nokon av desse eigenskapane?

Vel eitt alternativ som er FEIL

- begrensa ovanifrå
- alternerande
- monoton fra eit visst n
- positiv
- konvergerande
- begrensa nedenifrå

Finn grenseverdien med 4 riktige desimalar dersom den finns. Skriv inn 0 dersom grenseverdien ikkje eksisterer:

Skriv inn nummeret til det første elementet i følgja som tilnærmar grenseverdien med 4 riktige desimalar. Skriv inn 0 dersom grenseverdien ikkje eksisterer:

Dersom du ikkje kjenner til verken $a_1 \neq 0$ eller B, men veit at grenseverdien eksisterer, kan du finna han? Skriv svaret som ein funksjon av B og a_1.

Maks poeng: 8

13 Anta at ein 5×5-matrise A har fem ulike eigenverdiar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ med tilhøyrande eigenvektorar $v_1, v_2, \ldots, v_5$. Anta at $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ og $B = x \cdot A$. Vel mellom alltid riktig/aldri riktig/kan vera både riktig og feil for kvar av påstandane nede.
Du må avgrensa deg til matrisar A og tal x som oppfyller vilkår nemnde ovanfor når du vurderer sanninga.

- Alltid riktig betyr at påstanden er riktig for alle tillatne 5×5 matrisane A og tala x.
- Aldri riktig betyr at det ikkje finns enten matrisar A og/eller tal x slik at påstanden blir riktig,
- Både riktig og feil betyr at for noen matrisar A og/eller tal x er påstanden riktig og for nokon andre matrisar og/eller tal er påstanden feil.

Riktig svar gjev 1,6 poeng, feil svar gjev -0,5 poeng.

1) $v_i, i = 1, \ldots, 5$, er eigenvektorane til B

Vel eitt alternativ

- Aldri riktig
- Alltid riktig
- Både riktig og feil

2) $\lambda_i, i = 1, \ldots, 5$ er eigenverdiane til B

Vel eitt alternativ

- Alltid riktig
- Aldri riktig
- Både riktig og feil

3) $x \cdot v_i, i = 1, \ldots, 5$ er eigenvektorane til B

Vel eitt alternativ

- Både riktig og feil
- Alltid riktig
- Aldri riktig

4) B har eigenvektorar som er ulike frå både v_i og $x \cdot v_i, i = 1, \ldots, 5.$

Vel eitt alternativ

- Aldri riktig
- Alltid riktig
- Både riktig og feil

5) B har eigenverdiar som er ulike frå både λ_i og $x \cdot \lambda_i, i = 1, \ldots, 5.$

Vel eitt alternativ

- Både riktig og feil
- Alltid riktig
- Aldri riktig

Maks poeng: 8

14 Ein klubb har 13 medlemmar. Det er fem arbeidsoppgåver som skal fordelast på medlemmane.
Angje kor mange måtar som oppgavene kan fordelast på dersom

a) Alle oppgåvene er forskjellige, og kvart medlem får høyst ei oppgåve kvar?

Svar:

b) Alle oppgåvane er like, og kvart medlem får høyst ei oppgåve kvar?

Svar:

c) Alle oppgåvene er like, og kvart medlem kan få fleire oppgåver?

Svar:

Maks poeng: 3

15 Ein klubb har 12 medlemmar. Det er fire arbeidsoppgåver som skal fordelast på medlemmane.

La N stå for antall måtar som oppgåvene kan fordelast på, viss alle arbeidsoppgåvene er like, og det er inga avgrensning på kor mange oppgåver eit medlem kan få.

Kva for av følgjande nedenfor har N som løysning ?

Vel eitt eller fleire alternativ

- Talet på måtar å velje 11 oppgåver frå ei samling på 15 oppgåver (utan å bry oss om rekkefølgja på oppgåvene).
- Talet på ikkje-negative heiltalsløysningar til likninga
  $x_1+x_2+x_3+x_4 = 12$
- Talet på ikkje-negative heiltallsløysningar til likninga
  $x_1+x_2+...+x_{12} = 4$
- Talet på positive heiltallsløysningar til likninga
  $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$
- Talet på funksjonar frå mengda {1,2,3,4} til mengda {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.
- Talet på surjektive funksjonar frå mengda {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} til mengda {1,2,3,4}

Maks poeng: 3