NTNU

NTNU i Gjøvik
Institutt for matematiske fag

Oppgaver, eksamen
Matematiske metoder 2 (Data)
Vår 2020
IMAx2021

1 Logikk

Vi skal sjekke gyldigheten av følgende argument.

P_1	Hvis du spiser mye søtpoteter får kroppen din nok C-vitamin.
P_2	Du senker blodtrykket eller kroppen din får ikke nok C-vitamin.
P_3	Du spiser mye søtpoteter.
$\therefore$	Du senker blodtrykket.

Vi ble bedt om å definere følgende logiske variable

p = Du spiser mye søtpoteter."
q = Du senker blodtrykket."
r = Kroppen din får nok C-vitamin."

Argumentets logiske form er da

P_1	$p \to r$
P_2	$q \vee \sim r$
P_3	p
$\therefore$	q

i) Riktig svar på første spørsmål er D. $q \vee \sim r$ er logisk form til deg andre utsagnet.
At argumentet er gyldig kan vises på flere måter. Vi kan for eksempel vise at hvis alle premsissene er sanne så kan ikke konklusjonen være falsk. Vi kan for eksempel sette opp en tabell

p	q	r	$\sim r$	$P_1 = p \to r$	$P_2 = q \vee \sim r$	$P_3 = p$	q
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

Vi kunne også ha vist at argumentets form er en tautologi.
ii) Velg riktig begrunnelse for at argumentet er gyldig eller ugyldig. Ett eller flere svar kan være sanne. Begge disse alternativene er riktige:
Argumentet er gyldig fordi konklusjonen om at du senker blodtrykket ikke er galt samtidig som at alle premisser er sanne. Argumentet er gyldig fordi argumentets logiske form

$$[(p \to r) \wedge (q \vee \sim r) \wedge p] \to q$$

er en tautologi.

2 Gaussisk Integral

Vi skal finne en tilnærming til $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ med feil mindre enn 0,001. Først finner vi en rekke-representasjon for e^{-x^2}. Siden $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, følger det at

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Derfor

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

Dette er en alternerende rekke $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ med $b_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$. Av kunnskapen vår om alternerende rekker vet vi at om vi estimerer

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!}$$

med

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!},$$

vil feilen være mindre enn $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$.
Det betyr at vi må finne n slik at $\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 0,001$. Når vi prøver noen verdier av n finner vi at for $n = 3$, $\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} = 0.00463$ og for $n = 4$, $\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} = 0.00076$. Derfor gir

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)i!} = 7475$$

oss tilnærmingen vi er på jakt etter.

3 Tallteori - variant 1

I staten Vekslemania brukes pengenheten "U". De har mynter med følgende valører i enheten U: $15, 21, 35, 55, 77, 105$. De vil fjerne alle valører bortsett fra to, slik at betalinger av alle heltallige transaksjoner kan gjennomføres ved bruk av veksling.
a) Hvilke to valører vil en kunne bruke for å få til dette? Det er to løsninger. Den ene er å bruke valørene 15 og 77. Hva er den andre?

Løsning 2: Minste valør: 21, største valør: 55. Forklaring: tallene må være relatitivt prim. Om ikke, blir det bare mulig å lage multipler av $gcd(a, b)$ der a og b er valørene.

b) Hva er det minste antallet mynter en trenger (betaling og veksel tilsammen) for å betale et beløp på 1U, hvis en bruker valørene 15U og 77U?

Svar: Vi bruker den utvidete euklidske algoritmen:
$77 : 15 = 5$ rest 2
$15 : 2 = 7$ rest 1

Derfor:
$1 = 15 - 2 \cdot 7 =$
$15 - (77 - 5 \cdot 15) \cdot 7 =$
$36 \cdot 15 - 7 \cdot 77$

Antall mynter totalt: $36 + 7 = 43$

4 Tallteori - variant 2

I staten Vekslemania brukes pengenheten "U". De har mynter med følgende valører i enheten U: $15, 21, 35, 39, 65, 105$. De vil fjerne alle valører bortsett fra to, slik at betalinger av alle heltallige transaksjoner kan gjennomføres ved bruk av veksling.
a) Hvilke to valører vil en kunne bruke for å få til dette? Det er to løsninger. Den ene er å bruke valørene 21 og 65. Hva er den andre?

Løsning 2: Minste valør: 35, største valør: 39. Forklaring: tallene må være relatitivt prim. Om ikke, blir det bare mulig å lage multipler av $gcd(a, b)$ der a og b er valørene.

b) Hva er det minste antallet mynter en trenger (betaling og veksel tilsammen) for å betale et beløp på 1U, hvis en bruker valørene 21U og 65U?

Svar: Vi bruker den utvidete euklidske algoritmen:
$65 : 21 = 3$ rest 2
$21 : 2 = 10$ rest 1

Derfor:
$1 = 21 - 2 \cdot 10 =$
$21 - (65 - 3 \cdot 21) \cdot 10 =$
$31 \cdot 21 - 10 \cdot 65$

Antall mynter totalt: $31 + 10 = 41$

5 Analyse versjon 1

a) Finn alle kritiske punkter til funksjonen $f(x, y) = x^2\, y + 2\, x\, y + y^3 - 3\, y^2 - 8\, y$.

b) Klassifiser de kritiske punktene du fant i a).

Løsning: a) Først partiellderiverer vi $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f_x &= 2\, y\, (x + 1) \\ f_y &= x^2 + 2\, x + 3\, y^2 - 6\, y - 8 \end{aligned}$$

Vi løser $f_1(x, y) = 2\, y\, (x + 1) = 0$ og får $x = -1$ eller $y = 0$.

1. $x = -1 \wedge f_y = 0 \Rightarrow 3\,y^2 - 6\,y - 9 = 0$. Vi løser for y og får $y_1 = -1$ og $y_2 = 3$. Det gir de kritiske punktene $(-1,-1)$ og $(-1,3)$.

2. $y = 0 \wedge f_y = 0 \Rightarrow x^2 + 2\,x - 8 = 0$. Vi løser for x og får $x_1 = -4$ og $x_2 = 2$. Det gir de kritiske punktene $(-4,0)$ og $(2,0)$.

b) Vi finner de partielle andrederiverte

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\,y \\ f_{xy} &= 2\,x + 2 \\ f_{yy} &= 6\,y - 6 \end{aligned}$$

Vi lager følgende tabell for diskriminanten $D = f_{xx} f_{yy} - {f_{xy}}^2$

Kritisk punkt	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	**Type**
$(-1,-1)$	-2	-12	0	24	Lokalt maksimum
$(-1,3)$	6	12	0	72	Lokalt minimum
$(-4,0)$	0	-6	-6	-36	Sadelpunkt
$(2,0)$	0	-6	6	-36	Sadelpunkt

De andre versjonene er tilsvarende.

6 Sprettball

I denne oppgaven definerer vi sprettkoeffisienten $0 < r < 1$ til en ball på følgende måte: Når ballen slippes fri fra høyde h, spretter den tilbake til høyde $r \cdot h$.
En ball med sprettkoeffisient r slippes fri fra starthøyde h og så spretter den uendelig mange ganger.
a) Bruk en geometrisk rekke for å finne den totale opp-og-ned avstanden som ballen tilbakelegger i løpet av denne prosessen. (Ta summen av alle avstandene oppover og nedover, og husk at ballen bare avlegger den første avstanden én gang (nedover) og alle øvrige avstander to ganger).
Du står fritt til å løse denne oppgaven med algebraiske eller numeriske metoder, men du skal oppgi svaret numerisk med fire desimaler etter kommaet.

Svar: $h + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{\infty} h \cdot r^i = h + \frac{2 \cdot h \cdot r}{1-r}$
siden dette er en geometrisk rekke med $|r| < 1$.

Varianter:

r	h	Svar
0,59	0,9	3,4902
0,58	0,9	3,3857
0,56	0,8	2,8364

Tiden t det tar for ballen til å falle en avstand s (fra stillstand) er $\sqrt{\frac{2s}{g}}$ der $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ er gravitasjonskonstanten. (Å sprette opp fra bakken til høyde s tar like lang tid).

b) Hvor lang tid tar det før ballen er ferdig med å sprette? Gi svaret numerisk med fire desimaler etter kommaet.

Svar:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\Sigma_{i=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2(h \cdot r^i)}{g}} =$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\Sigma_{i=1}^{\infty}(\sqrt{r})^i =$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{r}\sqrt{\frac{h}{g}}}{1-\sqrt{r}}$$

siden dette er en geometrisk rekke med $|\sqrt{r}| < 1$.

Varianter:

r	h	Svar
0,59	0,9	3,2662
0,58	0,9	3,1649
0,56	0,8	2,8056

7 Antall elementer i union

La A være mengden av alle heltallene mellom 1 og 1000 som kan divideres på 3. La B være mengden av alle heltallene mellom 1 og 1000 som kan divideres på 7.

a. Bestem $|A|$. (det vil si, antall elementer i mengde A)

Svar:$A = \{3, 6, 9, \cdots 999\}$. Derfor:$|A| = 333$.
b. Bestem |B|.

Svar:$B = \{7, 14, 21, \cdots 994\}$. Derfor:$|B| = 142$.
c. Bestem $|A \cup B|$.

Svar: Vi finner først $A \cap B$. Denne mengden består av alle tallene mellom 1 og 1000 som er delbare på både 3 og 7, og derfor delbare på $7 \cdot 3 = 21$. Altså: $A \cap B = \{21, 42, 63, \cdots 987\}$. Derfor $|A \cap B| = 47$. Deretter bruker vi at $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ = 333+142-47=428.

8 Bi-, sur-, og injeksjoner (variant 1)

Hvor mange surjeksjoner finnes det fra en mengde med 3 elementer til en mengde med 2 elementer?

Svar: En surjeksjon er en funksjon f der det finnes minst ett element x i domenet for hvert element y i kodomenet slik at $f(x) = y$. Av de 2^3 mulige funksjoner fra den første til den andre mengden finnes det bare 2 som ikke er surjeksjoner: nemlig de som avbilder alle elementer på ett element i den andre mengden. Svaret er derfor 8-2=6.

Hvor mange injeksjoner finnes det fra en mengde med 3 elementer til en mengde med 2 elementer?

Svar: En injeksjon er en funksjon der alle elementene i domenet har forskjellige funksjonsverdier i kodomenet. Dette er umulig om domenet har 3 elementer og kodomenet bare 2. Svaret er derfor 0.

9 Bi-, sur-, og injeksjoner (variant 2)

Hvor mange bijeksjoner finnes det fra en mengde med 3 elementer til en mengde med 3 elementer?

Svar: Der er 3 mulige funksjonsverdier (i kodomenet) for det første elementet i domenet. Uavhengig av hvilket element vi velger er der 2 elementer igjen i kodomenet som kan være funksjonsverdien til det andre elementet i domenet. Til slutt er der eksakt ett element igjen i kodomenet. Svaret er derfor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Hvor mange surjeksjoner finnes det fra en mengde med 2 elementer til en mengde med 3 elementer?

Svar: En surjeksjon er en funksjon f der det finnes minst ett element x i domenet for hvert element y i kodomenet slik at $f(x) = y$. Dette er umulig om kodomenet har 3 elementer og domenet bare 2. Svaret er derfor 0.

10 Bi-, sur-, og injeksjoner (variant 3)

Hvor mange bijeksjoner finnes det fra en mengde med 2 elementer til en mengde med 4 elementer?

Svar: 0 Begge mengder må ha samme kardinalitet om der skal finnes en bijeksjon mellom dem.

Hvor mange injeksjoner finnes det fra en mengde med 2 elementer til en mengde med 3 elementer?

Svar: En injeksjon er en funksjon der alle elementene i domenet har forskjellige funksjonsverdier i kodomenet. Der er 3 mulige funsjonsverdier (i kodomenet) for det første elementet i domenet. Uavhengig av hvilken vi velger, er der 2 mulige funksjonsverdier igjen for det andre elementet i domenet. Svaret er derfor $3 \cdot 2 = 6$.

11 Sant eller usant - konvergens

Hvilke av disse påstandene er sanne? Velg ett eller flere alternativer.

Om leddene til en alternerende rekke minker i absoluttverdi, konvergerer rekken. (Usant)
Begrunnelse: Det er nødvendig at leddene konvergerer mot 0, ellers kan en uendelig rekke ikke konvergere.

Om leddene til en uendelig rekke ikke konvergerer mot 0, konvergerer ikke rekken. (Sant)

Om en uendelig rekke ikke divergerer mot uendelig eller minus uendelig, konvergerer den. (Usant) Begrunnelse: En rekke kan også være divergent uten at den divergerer mot $\pm$ uendelig. Eksempler er $\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ og $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-n)^n$.

Om forholdet mellom leddene til to rekker har grenseverdi 1, konvergerer eller divergerer begge rekkene samtidig. (Sant) Begrunnelse: Dette følger fra forholdstesten.

12 Antall elementer i mengde

Gitt mengdene $A = \{1, 2\} \cap \{3, 4\}$
$B = \{1, 2, 5\}$
$C = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$
$D = B \cup C$
$E = A \cup (B \cap C)$
$F = A \cap B \cap C$
Hvor mange elementer inneholder mengdene D, E og F?

Vi ser:// $A = \emptyset$
$C = \{1, 2, 3, 4\}$
$D = B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$(B \cap C) = \{1, 2\}$
$E = A \cup (B \cap C) = \{1, 2\}$
$F = A \cap B \cap C = \emptyset$
og derfor:
Svar: $|D| = 5$
Svar: $|E| = 2$
Svar: $|F| = 0$

13 Komplekse tall - Bevis

La Z_n vere mengden av alle n-te-røtter av 1 i det komplekse planet.
Teorem. *La m og n være positive heltall. $Z_m \subseteq Z_n$ hvis og bare hvis $m|n$.*
Vi har laget et bevis av teoremet og tatt ut noen deler.

a) Din oppgave er å fylle inn bokstaver som tilsvarer det som mangler. Alle bokstavene bør brukes minst en gang og en bokstav må brukes to ganger.

   A: $z^n = z^{km} = z^{mk} = (z^m)^k = 1^k = 1$

   B: $m|n$

   C: $z \in Z_n$

   D: $z \in Z_m$

   E: $n = km$

   F: $z^m = 1$

G: alle elementer i Z_m også er elementer i Z_n

I: n-te-rot av 1

H: m-te-rot av 1

Bevis: Anta at m og n er positive heltall og at **(B)** . Siden **(B)** så finnes det et heltall k slik at **(E)** . La **(D)** . Da er z en **(H)** . Det betyr at **(F)** . Da er **(A)** og derfor er z også en **(I)** . Derfor er **(C)** . Vi kan derfor slutte at **(G)** . Vi har derfor at $Z_m \subseteq Z_n$.

b) Er beviset over et bevis av hele teoremet, hvis-delen eller bare-hvis-delen?
Svar: hvis-delen

c) Hva passer dårligst om dette beviset?

Velg ett alternativ

- Bevis med selvmotsigelse **passer dårligst**.
- Elementargument
- Direkte bevis

14 Følger

Oppgave 1 (varierer a_1, B og antall desimaler for å få flere varianter)
I denne oppgaven skal du undersøke følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, hvor $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$ og $B \in \mathbb{R}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(2a_n + \frac{B}{a_n^2}\right).$$

Finn svar på følgende spørsmål. Det trengs ikke å bevise noe formelt, men du selv må være rimelig sikker i svaret. Du bestemmer valg av en løsningsmetode selv (for eksempel, en numerisk metode, analytisk metode eller begge metoder).

- Anta at $a_1 = 1$ og $B = 7$. Har følgen noen av disse egenskapene? Marker alt som passer: positiv, negativ, økende fra et visst n, avtagende fra et visst n, monoton fra et visst n, konvergerende, divergerende, alternerende, begrenset nedenifra, begrenset ovenifra. **Svar:** Plot følgen med bruk av Matlab-koden.

- Anta at $a_1 = 1$ og $B = 7$. Finn grenseverdien med 5 riktige desimaler dersom den finns. Skriv inn 0 dersom grenseverdien ikke eksisterer.

- Anta at $a_1 = 1$ og $B = 7$. Skriv inn nummeret til det første elementet i følgen som tilnærmer grenseverdien med 5 riktige desimaler. Skriv inn 0 dersom grenseverdien ikke eksisterer.

- Dersom du ikke kjenner til verken $a_1 \neq 0$ eller B, men veit at grenseverdien eksisterer, kan du finne den? Skriv svaret som en funksjon av B og a_1. **Svar:** hvis grenseverdien eksisterer, så er alle elementene i følgen veldig nær grenseverdien når n blir stor nok. Så bytter man a_n med L og får en ligning:

$$L = \frac{1}{3} \cdot \left(2L + \frac{B}{L^2}\right).$$

Ved å løse den kommer $L = \sqrt[3]{B}$. Svaret $L = B^{1/3}$ er også godkjent, samt svarene hvor man bytter bokstav B med tall fra aktuell variant.

Varianter:

a_1	B	grense	nr i følgen
1	7	1.91293	6
3	5	1.7099	5
-10	9	2.08008	15

Matlab-koden:

```
n=16;
x=zeros(1,n);
x(1)=1;
B=7;
for i=2:1:n
    x(i) = 1/3 * (2*x(i-1)+B/(x(i-1)*x(i-1)))
end
format long;
real_ans=nthroot(B,3);
err = (x-real_ans);
figure(1);
subplot(1,2,1);
semilogy(abs(err));
subplot(1,2,2);
plot(x, 'o');
hold off;
```

15 Egenverdier

Oppgave 3

Anta at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ er alle ulike egenverdiene til en 5×5-matrise A og vektorene $v_1, v_2, \ldots, v_5$ er tilsvarende egenvektorene. Anta at $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ og $B = x \cdot A$. Velg mellom alltid riktig/aldri riktig/kan være både riktig og feil for hver av påstandene nede. Du må begrense deg til matriser A og tall x som angitt i oppgaven når du vurderer sannheten:

- Alltid riktig betyr at påstanden er riktig for alle tillatte 5×5 matriser A og tall x.
- Aldri riktig betyr at det ikke finns enten matriser A og/eller tall x slik at påstanden blir riktig,
- Både riktig og feil betyr at for noen matriser A og/eller tall x påstanden er riktig og for noen andre matriser og/eller tall påstanden er feil.

1. v_i, $i = 1, \ldots, 5$ er egenvektorene til B
2. λ_i, $i = 1, \ldots, 5$ er egenverdiene til B
3. $x \cdot v_i$, $i = 1, \ldots, 5$ er egenvektorene til B
4. $x \cdot \lambda_i$, $i = 1, \ldots, 5$ er egenverdiene til B

5. B har egenvektorer som er forskjellige fra både v_i og $x \cdot v_i$, $i = 1, \ldots, 5$.
6. B har egenverdier som er forskjellige fra både λ_i og $x \cdot \lambda_i$, $i = 1, \ldots, 5$.

Likheten som definerer egenverdiene og egenvektorene er $Av = \lambda v$, hvor $v \neq 0$. Samme likheten ganget med x gir $(xA)v = (x\lambda)v$ (i) eller $A(xv) = \lambda(xv)$ (ii).

1. Ja, alltid riktig pga (ii)
2. Både riktig og feil: hvis $x = 1$, så er A og B den samme matrisa, ellers blir $x\lambda_i$ egenverdiene til B pga (i).
3. Ja, alltid riktig. Man får det ved å gange (i) med x en gang til.
4. Ja, alltid riktig pga (i).
5. Ja, alltid riktig. Man får det ved å gange (i) med et annet tall $y \neq 0$. Her er det viktig å ikke blande begrepene *forskjellig* og *lineært uavhengig.*
6. Nei, $x \cdot \lambda_i$ er alle mulige egenverdiene til matrise B. Matrisa B har maks 5 egenverdier, og alle tallene $x \cdot \lambda_i$ er egenverdiene, derfor finns det ikke flere.

16 Kombinatorikk 1, versjon 1

En klubb har 12 medlemmer. Det er fire arbeidsoppgaver som skal fordeles på medlemmene. Angi hvor mange måter som oppgavene kan fordeles på dersom

a) Alle oppgavene er forskjellige, og hvert medlem får høyst en oppgave hver?

Svar: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$
Der er 12 forskjellige personer som kan ta oppgave 1. Deretter er der 11 personer igjen som kan ta oppgave 2, osv.

b) Alle oppgavene er like, og hvert medlem får høyst en oppgave hver?

Svar: Nå må vi bare bestemme hvilke fire av de tolv personene som får tildelt en oppgave. Antall måter for å velge fire av 12 personer er $\binom{12}{4} = 495$

c) Alle oppgavene er like, og hvert medlem kan få flere oppgaver?

Svar: Vi kan bruke en bijeksjon mellom løsningene og binære strenger, der hvert ettall er et skilletegn mellom to personer og hver 0 representerer en oppgave. For eksempel, 000101111111111 indikerer løsningen der person 1 tar tre oppgaver, person 2 én oppgave og de øvrige personene ingen. Vi ser at hver mulig løsning er representert av en binær streng med 4 nuller og 12-1=11 enere. Antallet slike binærstrenger er $\binom{4+12-1}{4} = \binom{15}{4} = 1365$

17 Kombinatorikk 1, versjon 2

En klubb har 13 medlemmer. Det er fem arbeidsoppgaver som skal fordeles på medlemmene. Angi hvor mange måter som oppgavene kan fordeles på dersom

a) Alle oppgavene er forskjellige, og hvert medlem får høyst en oppgave hver?

Svar: $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 154440$
Der er 13 forskjellige personer som kan ta oppgave 1. Deretter er der 12 personer igjen som kan ta oppgave 2, osv.

b) Alle oppgavene er like, og hvert medlem får høyst en oppgave hver?

Svar: Nå må vi bare bestemme hvilke fem av de tolv personene som får tildelt en oppgave. Antallet måter for å velge fem av 13 personer er $\binom{13}{5} = 1287$

c) Alle oppgavene er like, og hvert medlem kan få flere oppgaver?

Svar: Vi kan bruke en bijeksjon mellom løsningene og binære strenger, der hvert ettall er et skilletegn mellom to personer og hver 0 representerer en oppgave. For eksempel, 00010011111111111 indikerer løsningen der person 1 tar tre oppgaver, person 2 to oppgaver og de øvrige personene ingen. Vi ser at hver mulig løsning er representert av en binær streng med 5 nuller og 13-1=12 enere. Antallet slike binærstrenger er $\binom{5+13-1}{5} = \binom{17}{5} = 6188$

18 Kombinatorikk 2, versjon 1

En klubb har 12 medlemmer. Det er fire arbeidsoppgaver som skal fordeles på medlemmene.

La N stå for antall måter som oppgavene kan fordeles på, hvis alle arbeidsoppgavene er like, og det er ingen begrensning på hvor mange oppgaver et medlem kan få.
Svar: Vi kan bruke en bijeksjon mellom løsningene og binære strenger, der hvert ettall er et skilletegn mellom to personer og hver 0 representerer en oppgave. For eksempel, 000101111111111 indikerer løsningen der person 1 tar tre oppgaver, person 2 én oppgave og de øvrige personene ingen. Vi ser at hver mulig løsning er representert av en binær streng med 4 nuller og 12-1=11 enere. Antallet slike binærstrenger er $\binom{4+12-1}{4} = \binom{15}{4}$

Hvilke av følgende nedenfor har N som løsning ?

Antall ikke-negative heltallsløsninger til likningen
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$

Svar: Vi skal fordele 12 poeng over 4 kategorier. Vi kan representere hver løsning som en binær streng med 3 ettall (skilletegn) og 12 nuller (poeng). Antallet løsninger er derfor $\binom{15}{12} = \binom{15}{3}$.

Antall ikke-negative heltallsløsninger til likningen
$x_1 + x_2 + ... + x_{12} = 4$

Svar: Vi skal fordele 4 poeng over 12 kategorier. Vi kan representere hver løsning som en binær streng med 11 ettall (skilletegn) og 4 nuller (poeng). Antallet løsninger er derfor $\binom{15}{4}$.

Antall positive heltallsløsninger til likningen
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

Svar: Vi skal fordele 8 poeng over 4 kategorier. slik at hver kategori har minst ett poeng. Siden hver kategori inneholder minst ett poeng, står det igjen fire poeng å fordele over fire kategorier. Vi kan representere hver løsning som en binær streng med 3 ettall (skilletegn) og 4 nuller (poeng). Antallet løsninger er derfor $\binom{7}{4}$.

Antall surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til mengden 1,2,3,4

Svar: Dette antallet er litt mer krevende å regne ut, men der er klart at der er ingen grunn til å tro at dette antallet skal være likt antallet fra hovedoppgaven. Det totale antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til mengden 1,2,3,4 er 4^{12}. Antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til en delmengde med tre elementer er $\binom{4}{3} \cdot 3^{12}$. Antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til en delmengde med to elementer er $\binom{4}{2} \cdot 2^{12}$, og antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til en delmengde med ett element er $\binom{4}{1} \cdot 1^{12}$. Derfor finner vi med inklusjon-eksklusjonsprinsippet at antallet surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til en delmengde med to elementer er $\binom{4}{2} \cdot 2^{12} - \binom{4}{1} \cdot 1^{12}$. Om vi fortsetter på samme måte finner vi at antallet surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til en delmengde med tre elementer er $\binom{4}{3} \cdot 3^{12} - \binom{4}{2} \cdot 2^{12} + \binom{4}{1} \cdot 1^{12}$. Til slutt er antallet surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 til en delmengde med fire elementer (mengden selv) lik $4^{12} - \binom{4}{3} \cdot 3^{12} + \binom{4}{2} \cdot 2^{12} - \binom{4}{1} \cdot 1^{12}$.

Antall funksjoner fra mengden 1,2,3,4 til mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.

Svar: Dette antallet er 12^4.

Antall måter å velge 11 oppgaver fra en samling på 15 oppgaver (uten å bry oss om rekkefølgen på oppgavene).

Svar: $\binom{15}{11} = \binom{15}{4}$

19 Kombinatorikk 2, versjon 2

En klubb har 13 medlemmer. Det er fem arbeidsoppgaver som skal fordeles på medlemmene.

La N stå for antall måter som oppgavene kan fordeles på, hvis alle arbeidsoppgavene er like, og det er ingen begrensning på hvor mange oppgaver et medlem kan få.

Svar: Vi kan bruke en bijeksjon mellom løsningene og binære strenger, der hvert ettall er et skilletegn mellom to personer og hver 0 representerer en oppgave. For eksempel, 00010011111111111 indikerer løsningen der person 1 tar tre oppgaver, person 2 to oppgaver og de øvrige personene ingen. Vi ser at hver mulig løsning er representert av en binær streng med 5 nuller og 13-1=12 enere. Antallet slike binærstrenger er $\binom{5+13-1}{5} = \binom{17}{5}$

Hvilke av følgende nedenfor har N som løsning ?

Antall ikke-negative heltallsløsninger til likningen
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$

Svar: Vi skal fordele 13 poeng over 4 kategorier. Vi kan representere hver løsning som en binær streng med 3 ettall (skilletegn) og 13 nuller (poeng). Antallet løsninger er derfor $\binom{16}{13} = \binom{16}{3}$.

Antall ikke-negative heltallsløsninger til likningen
$x_1 + x_2 + ... + x_{13} = 5$

Svar: Vi skal fordele 5 poeng over 13 kategorier. Vi kan representere hver løsning som en binær streng med 12 ettall (skilletegn) og 5 nuller (poeng). Antallet løsninger er derfor $\binom{17}{5}$.

Antall positive heltallsløsninger til likningen
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

Svar: Vi skal fordele 8 poeng over 4 kategorier. slik at hver kategori har minst ett poeng. Siden hver kategori inneholder minst ett poeng, står det igjen fire poeng å fordele over fire kategorier. Vi kan representere hver løsning som en binær streng med 3 ettall (skilletegn) og 4 nuller (poeng). Antallet løsninger er derfor $\binom{7}{4}$.

Antall surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, 13 til mengden 1,2,3,4,5

Svar: Dette antallet er litt mer krevende å regne ut, men der er klart at der er ingen grunn til å tro at dette antallet skal være likt antallet fra hovedoppgaven. Det totale antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 til mengden 1,2,3,4,5 er 5^{13}. Antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13 til en delmengde med fire elementer er $\binom{5}{4} \cdot 4^{13}$. Antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13 til en delmengde med tre elementer er $\binom{5}{3} \cdot 3^{13}$, antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 til en delmengde med to elementer er $\binom{5}{2} \cdot 2^{13}$, og antallet funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 til en delmengde med ett element er $\binom{5}{1} \cdot 1^{13}$. Derfor finner vi med inklusjon-eksklusjonsprinsippet at antallet surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 til en delmengde med to elementer er $\binom{5}{2} \cdot 2^{13} - \binom{5}{1} \cdot 1^{13}$. Om vi fortsetter på samme måte finner vi at antallet surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 til en delmengde med tre elementer er $\binom{5}{3} \cdot 3^{13} - \binom{5}{2} \cdot 2^{13} + \binom{5}{1} \cdot 1^{13}$. Vi finner til slutt at antallet surjektive funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 til en delmengde med fire elementer (mengden selv) er lik $5^{13} - \binom{5}{4} \cdot 4^{13} + \binom{5}{3} \cdot 3^{13} - \binom{5}{2} \cdot 2^{13} - \binom{5}{1} \cdot 1^{13}$.

Antall funksjoner fra mengden 1,2,3,4,5 til mengden 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13.

Svar: Dette antallet er 13^5.

Antall måter å velge 12 oppgaver fra en samling på 17 oppgaver (uten å bry oss om rekkefølgen på oppgavene).

Svar: $\binom{17}{12} = \binom{17}{5}$

20 Grunnleggende grafteori

Oppgave 5

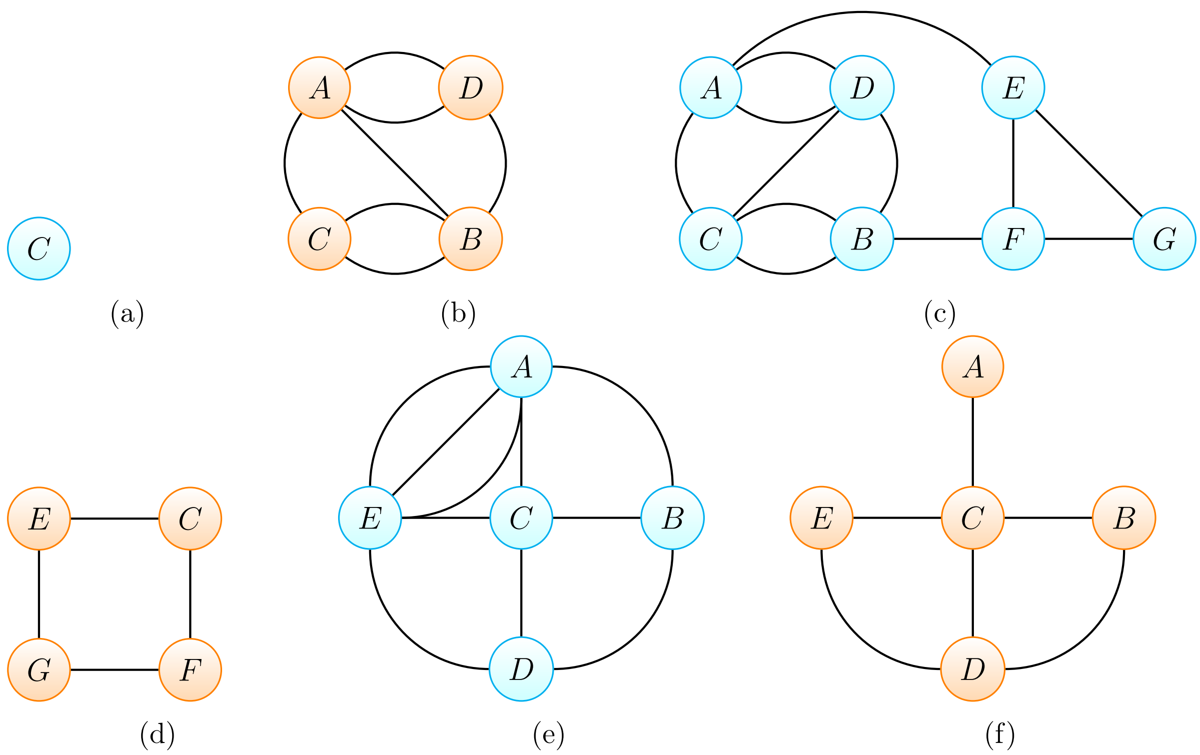
Vurder samling av grafer som er gitt på Fig.1 og svar på følgende spørsmål:

1. Hvilke grafer er enkle?
2. Hvilke grafer er sammenhengende?
3. Hvilke grafer er todelte?
4. Hvilke grafer er eulerske (altså det finns en eulerkrets i grafen)?
5. Hvilke grafer er ikke eulerske, men det finns en eulersti?
6. Hvilke grafer har minst to ikke-isomorfe utspennende trær?

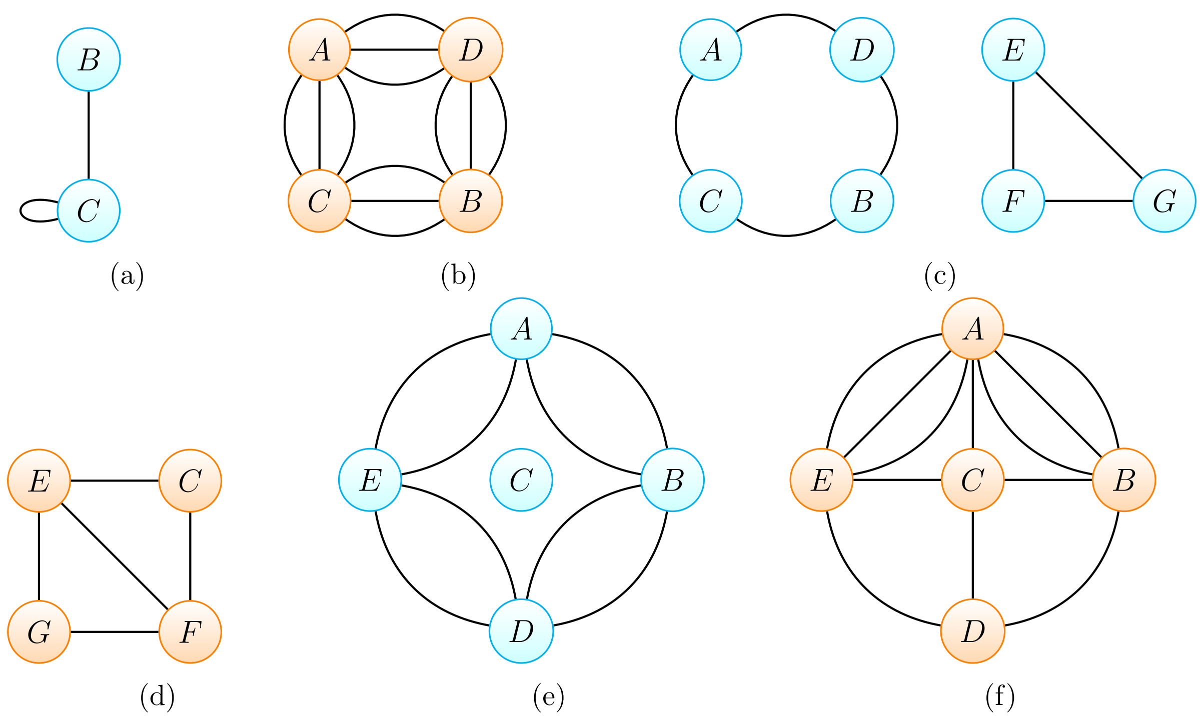
Svar:

1. Hvilke grafer er enkle? Enkle grafer har verken løkker eller parallelle kanter.
2. Hvilke grafer er sammenhengende? I en sammenhengende graf finnes det en sti mellom ethvert par av noder.
3. Hvilke grafer er todelte? En todelt graf betegner en graf hvor mengden av noder kan deles i to disjunkte mengder således at enhver kant har et endepunkt i hver mengde. Her er det viktig å ikke blande dette med en graf bestående av to sammenhengende komponenter, som fx 1.2c. Videre, en trekant ikke er en todelt graf. Dette kan brukes for å finne ikke-todelte grafer: hvis en graf har en trekant som en delgraf, så er grafen ikke-todelt.
4. Hvilke grafer er eulerske (altså det finns en eulerkrets i grafen)? Grafen skal være sammenhengende og alle nodene skal ha partallsgrad.
5. Hvilke grafer er ikke eulerske, men det finns en eulersti? Nesten det samme som i forrige punktet: sammehengende grafer hvor nøyaktig to noder har oddetallsgrad og alle andre har partallsgrad.
6. Hvilke grafer har minst to ikke-isomorfe utspennende trær? Et tre har bare ett utspennende tre – seg selv. Ikke-sammenhengende grafer har ikke et eneste utspennende tre. Disse kan dermed fint strykes. Deretter anbefales det å bruke følgende kriterium: isomorfe grafer skal ha like mange noder av enhver grad. Det vil si, for eksempel, at en graf som inneholder en node med grad 3 kan ikke være isomorf med grafen som ikke inneholder en node med grad 3. Alle lineære grafer med et likt antall noder er isomorfe.

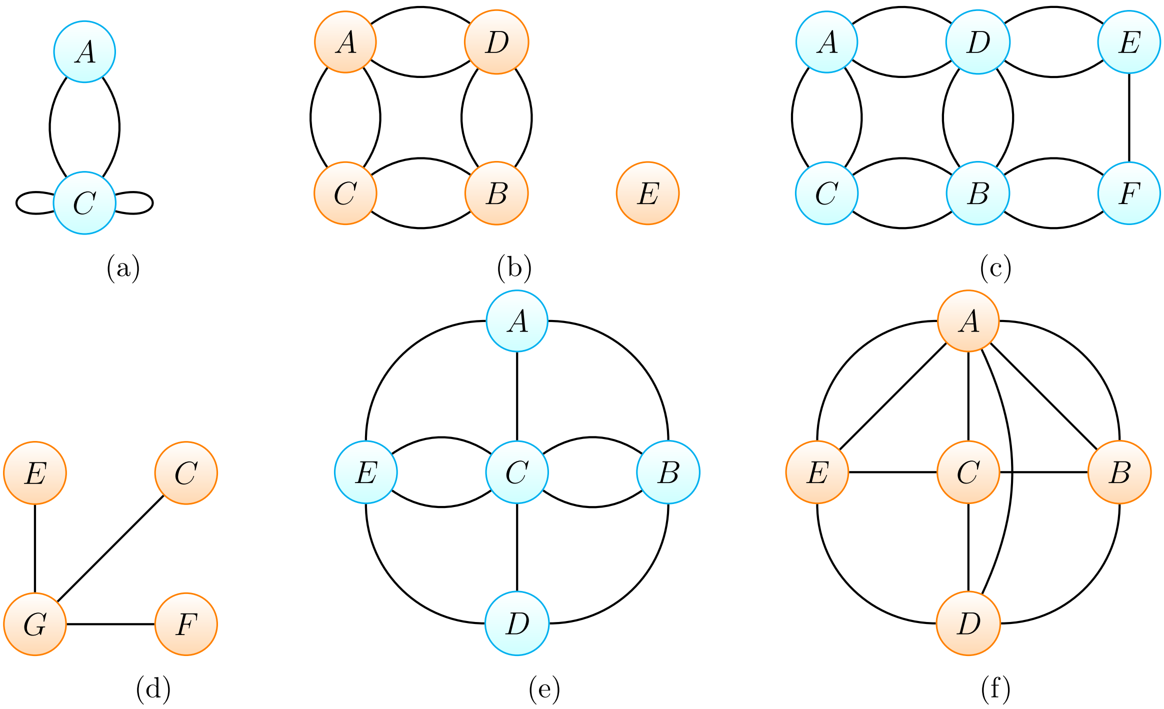
   En metode som man kan bruke tar utgangspunkt i dette: konstruer et utspennende tre som er lineær (altså maks grad 2) og et tre som er nærmest mulig et stjerne (begynn med noden som kan få størst mulig grad). Hvis du klarer det, så må grafen tas med i svaret.



Figur 1: Grafer til oppgave 1.1



Figur 2: Grafer til oppgave 1.2



Figur 3: Grafer til oppgave 1.3