1. Regneregler potenser og røtter

Potenser og røtter for reelle tall

For reelle tall, hvor $a > 0$ og $b > 0$:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

2. Komplekse tall

Komplekse tall

z komplekst tall, x, y, a, b, c, d reelle

$$i^2 = -1 \quad \text{normalform: } z = x + iy$$

$$(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

Polarform $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

$$r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \ n \in \mathbb{N}$$

3. Lineær algebra

Matriseoperasjoner

Gitt matrisene $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ og $\mathbf{B} = [b_{ij}]$.

Sum:	$\mathbf{A} + \mathbf{B}$	$=$	$[a_{ij} + b_{ij}]$
Multipli kasjon med skalar:	$k \cdot \mathbf{A}$	$=$	$[k\, a_{ij}]$
Produkt	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$=$	$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$
Transponert	$\mathbf{A}^\top$	$=$	$[a_{ji}]$
	$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top$	$=$	$\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top$

Lineære transformasjoner

En transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles lineær hvis og bare hvis

(1) $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$, for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og alle $c \in \mathbb{R}$.
(2) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Transformasjonsmatrisen til T er matrisen

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

Speiling om 1. akse	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Speiling om 2. akse	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Speiling om linjen $x_1 = x_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Rotasjon om origo	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Skalering	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

Gauss-eliminering

Gauss-eliminering har som mål å omforme en matrise $\mathbf{A}$ til en trappematrise $\mathbf{U}$. Til det brukes tre operasjoner

(1) Addere multiplum av rad i til rad j.
(2) Bytte om på radene i og j.
(3) Multiplisere rad i med ikke-negativ skalar.

Invers matrise

Anta at A er en kvadratisk matrise av orden n. A^{-1} eksisterer $\Leftrightarrow$ $rang(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$.
For $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Underrom / lineært spenn

En vektormengde V i $\mathbb{R}^n$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis

(1) $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vilkårlige vektorer i V, så er $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en vektor i V,

(2) c er et vilkårlig tall og $\mathbf{u}$ er en vilkårlig vektor i V, så er $c\mathbf{u}$ en vektor i V.

Vektormengden S er et **generatormengde** for V hvis og bare hvis enhver vektor i V kan skrives som en lineærkombinasjon over S.

$V = \operatorname{Linspan} S$ (det **lineære spennet** til S).

En **basis** for V er en l.u. generatormengde for V.

Elementære linjeoperasjoner på en matrise bevarer eventuelle lineære sammenhenger mellom søylene i matrisen.

Egenverdier og egenvektorer

For lineær transformasjon/matrise A, så er en egenvektor en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en egenvektor dersom det finnes tall λ slik at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
Karakteristisk likning: $\det(A - \lambda I) = 0$
Hvis en kvadratisk matrise M har basis av egenvektorer $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, og

$$P = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|...|\mathbf{v}_n]$$
$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

så er $AP = PD$ og $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Systemer

Et system kalles
konsistent: hvis det har en eller flere løsninger.
inkonsistent: hvis det har ingen løsninger.

4. Flervariabel kalkulus

Funksjoner av flere variable

Den partielle deriverte til $f(x, y)$ mhp x er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Høyere ordens deriverte noteres f.eks. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$. (Her deriveres først mhp y, deretter mhp x).

Andrederivert-testen

La f ha kontinuerlige partielle andrederiverte på en liten disk som inneholder et kritisk punkt (a, b). Diskriminanten er gitt ved

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2.$$

Hvis $D > 0$ og $f_{xx} > 0$, så er $f(a, b)$ lokalt minimum. Hvis $D > 0$ og $f_{xx} < 0$, så er $f(a, b)$ lokalt maximum. Hvis $D < 0$, så er $f(a, b)$ sadelpunkt.

Tangentplan

Planet gjennom punkt (a,b,c) med normalvektor $\mathbf{n}$ er gitt ved $\mathbf{n} \cdot [x-a,\ y-b,\ z-c] = \mathbf{0}$.
Tangentplanet til $f(x, y)$ i $(a, b, f(a, b))$ har normalvektor $\mathbf{n} = [-f_x(a, b),\ -f_y(a, b),\ 1]$.

5. Følger, Rekker og Taylorpolynom

Konvergens

Følgen $a_1, a_2, ...$ konvergerer mot L dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $|a_n - L| < \epsilon$ for alle $n > N$
Følgen divergerer mot ∞ dersom det for all M finnes N slik at $a_n > M$ for alle $n > N$
Rekken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer mot S dersom følgen av delsummer $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergerer mot S.

Noen rekker

Geometrisk rekke $\sum c_n$ hvor $\frac{c_{n+1}}{c_n} = r$ for alle n. Geometrisk rekke kan skrives $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ hvor a er første ledd. Rekken konvergerer når $r < 1$ med sum $\frac{a}{1-r}$ og divergerer når $r \geq 1$
p-rekke $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer for $p > 1$ og divergerer ellers. Når $p = 1$ får vi den harmoniske rekka $\sum \frac{1}{n}$ som divergerer, selv om leddene går mot null.

Konvergenstester for rekker

Gitt rekken $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, o

- n**te-leddstest** Hvis følgen (c_k) ikke går mot 0, så divergerer rekken $\sum c_k$
- **Sammenligningstest** Gitt at $0 \leq c_k \leq b_k$ for alle $k > N$ så
  Hvis $\sum b_k$ konvergerer, så konvergerer $\sum c_k$
  Hvis $\sum c_k$ divergerer, så divergerer $\sum b_k$
- **Grenseammenligningstest** Gitt at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = L$, hvor $0 \leq L \leq \infty$
  Hvis $0 \leq L < \infty$, så vil enten begge rekkene konvergere, eller begge divergere.
  Hvis $\sum c_n$ konvergerer og $L < \infty$, så konvergerer $\sum b_n$
  Hvis $\sum c_n$ divergerer, og $0 < L$, så divergerer $\sum b_n$
- **Forholdstesten** Hvis $\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| < 1$, så konvergerer $\sum c_n$

Potensrekker Taylorrekker og Taylorpolynom

Potensrekken om $x = a$ er $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. For den gjelder:

- Det finnes $r > 0$ slik at rekken konvergerer for alle x med $|x-a| < r$ og divergerer når $|x-a| > r$. r kalles konvergensradiusen til rekka
- Rekken konvergerer for alle x
- Rekken konvergerer kun når $x = 0$

Potensrekken $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$ kalles for Taylorrekken til funksjonen f om a.
Taylorpolynom av grad n om $x = a$ (her er $f^{(k)}$ den k'te deriverte til f)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Det finnes c mellom a og x slik at restleddet $E_n(x)$ (feilen) er gitt ved

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

6. Mengdelære

Mengdelovene

Alle mengder er inneholdt i en universalmengde U. Komplementer noteres med strek $\bar{A} = A^c$

Kommutative lover:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assosiative lover:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributive lover:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Identitetslover:	$A \cap U = A$	$A \cup \emptyset = A$
Negasjonslover:	$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Dobbel negativ-lov:	$\overline{(\bar{A})} = A$	
Idempotente lover:	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Universalgrenselover:	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
DeMorgans lover:	$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Absorpsjonslover:	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Komplement av U og $\emptyset$:	$\bar{U} = \emptyset$	$\bar{\emptyset} = U$
Mengdedifferensloven:	$A - B = A \setminus B = A \cap \bar{B}$	

Noen mengde-konstruksjoner

Kartesisk produkt: $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A,\, b \in B\}$ Skrivemåten (a, b) brukes også for ordnete par $\langle a, b\rangle$
Potensmengde: Mengden av alle delmengder, $\mathcal{P}(A) = \{U \mid U \subseteq A\}$

Tallmengder

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$: De naturlige tallene
$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ..\}$: De positive naturlige tallene.
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Heltallene.
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_+$ De rasjonale tallene
$\mathbb{R}$ De reelle tall (definisjon ikke pensum)

7. Funksjoner

Funksjoner

En funksjon f er gitt ved et definisjonsområde X og en verdiområde Y, og en regel som til hvert element $x \in X$ tilordner ett element $f(x) = y \in Y$
En funksjon er

- **injektiv** dersom $x_1 \neq x_2$ impliserer at $f(x_1) \neq f(x_2)$
- **surjektiv** dersom det for alle $y \in Y$, eksisterer $x \in X$ slik at $f(x) = y$
- **bijektiv** dersom den er både injektiv og surjektiv.

8. Logikk

Logiske operatorer

Symbol	**Mening**
$\neg p$ (eller $\sim p$)	ikke p
$p \wedge q$	p og q
$p \vee q$	p eller q
$P \equiv Q$	P er ekvivalent med Q
$p \to q$	p impliserer q
$p \leftrightarrow q$	p hvis og bare hvis q
$\therefore$ (eller $\models$)	Derfor

Predikater og kvantorer

Symbol	**Mening**
$P(x)$	Predikat i x: parametrisert utsagn med x som parameter
$P(x) \Rightarrow Q(x)$	Sannhetsmengden til $P(x)$ er inneholdt i sannhetsmengden til $Q(x)$.
$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$	Sannhetsmengden til $P(x)$ er lik sannhetsmengden til $Q(x)$.
$\forall$	For alle
$\exists$	Det eksisterer

Logikklovene

Kommutative lover:	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Assosiative lover:	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Distributive lover:	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identitetslover:	$p \wedge \mathbf{t} \equiv p$	$p \vee \mathbf{c} \equiv p$
Negasjonslover:	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{c}$
Dobbel negativ-lov:	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotente lover:	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
Universalgrenselover:	$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$
DeMorgans lover:	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Absorpsjonslover:	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negasjon av **t** og **c**:	$\neg\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$	$\neg\mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$
	$\mathbf{t} = 1 = \top =$ «tautologi»	$\mathbf{c} = 0 = \bot =$ «selvmotsigelse»

Bevis

Et *bevis* er en rekke logiske slutninger som viser at *konklusjonen* i et logisk argument (dvs. det vi vil vise) er en *logisk konsekvens* av *premissene* (dvs. det vi antar i en formodning).

Vis: $p \Rightarrow q$ eller $<$ `kvantor` $>:\ P(x)$

- **Direkte bevis:** «$p \to q_1 \to q_2 \to \cdots \to q$»
- **Kontrapositive bevis:** «$\neg q \to \neg p$»
- **Bevis ved tilfeller:** «$p = (p_1 \vee p_2),\ p_1 \to q,\ p_2 \to q$»

- **Motsigelsesbevis:** «$\neg(P(x)) \implies \bot$»
- **Eksistensbevis:** «Her er den! $P(42)$ fungerer! :-)» (liksom: moteksempel)

Inferens-regler

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore\ q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore\ \neg p$
Generalisering	p $\therefore\ p \vee q$
Spesialisering	$p \wedge q$ / $\therefore\ p$ $p \wedge q$ / $\therefore\ q$
Konjunksjon	p q $\therefore\ p \wedge q$

Eliminasjon	$p \vee q$ / $\neg q$ / $\therefore\ p$ $p \vee q$ / $\neg p$ / $\therefore\ q$
Transitivitet	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore\ p \to r$
Oppdeling i tilfeller	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore\ r$
Motsigelse	$\neg p \to \mathbf{c}$ $\therefore\ p$

9. Kombinatorikk

Formler for kombinatorikk

	Ordnet utvalg	Uordnet utvalg
Med tilbakelegging	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$
Uten tilbakelegging	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Antall elementer i en union

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

10. Tallteori

Symboler

Symbol	**Mening**
$d \mid n$	Det finnes et heltall k slik at $n = dk$.
$d \nmid n$	d deler ikke n
$\gcd(a, b)$	Største felles divisor av a og b
$a \equiv b \pmod n$	$n \mid (a - b)$

Aritmetikkens fundamentalteorem

Gitt et heltall n eksisterer det et positivt heltall k, forskjellige primtall $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ og positive heltall $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ slik at

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}.$$

Videre er denne måten å skrive n som et produkt av primtall på unik bortsett fra rekkefølgen på faktorene.

Euklids algoritme

Euklids algoritme brukes til å bestemme $\gcd(A, B)$ for to heltall A og B, der vi antar at $A > B \geq 0$.

1. Hvis $B = 0$, er $\gcd(A, B) = A$.
2. Hvis ikke, finn q og r slik at
$$A = Bq + r \text{ slik at } 0 \leq r < B.$$
Da er $\gcd(A, B) = \gcd(B, r)$.
3. Sett $A := B$ og $B := r$ og gå tilbake til trinn 1.

Lineære diofantiske ligninger

En lineær diofantisk likning er på formen $ax + by = c$, der a, b, c er gitte heltall, og vi vil finne heltallsløsninger for x og y. En slik likning har heltallsløsninger hvis og bare hvis $\gcd(a, b) \mid c$.

Regneregler for kongruenser

La a, b, c, d, n være heltall slik at $n > 1$, og anta at $a \equiv c \pmod n$ og $b \equiv d \pmod n$. Da har vi at

a) $(a + b) \equiv (c + d) \pmod n$
b) $(a - b) \equiv (c - d) \pmod n$
c) $ab \equiv cd \pmod n$
d) $a^m \equiv c^m \pmod n$ for alle positive heltall m.

Tips for å regne ut a%n

Tips for å regne ut $a\%n$.

(1) Tast inn a inn på kalkulator.
(2) Tast minustast.
(3) Tast inn n
(4) Trykk $=$-tasten inntil tallet er mindre enn n.

11. RSA

RSA er offentlig nøkkel-kryptografi. Et RSA-kryptosystem er basert på to (helst veldig store) primtall p og q.

Prosedyre for å finne nøkler

1. Finn et tall e som er relativt primisk med $(p-1)(q-1)$ og finn så en positiv invers d til dette tallet modulo $(p-1)(q-1)$.
2. La $n = pq$. Da blir (n, e) *offentlig nøkkel* og
3. (n, d) *privat nøkkel.*

Kryptering og dekryptering

Du ønsker å sende en melding M. Du må da kjenne mottakerens offentlige nøkkel (n, e).

- Den krypterte meldingen C er gitt ved
$$C \equiv M^e \pmod{n}.$$
- C dekrypteres av mottakerenved å beregne
$$M \equiv C^d \pmod{n}.$$

12. Grafer

Veier i grafer (uten parallele kanter)

vei: Sekvens av kanter (eller kanter og hjørner, viktig er insidensen) $(v_1v_2), (v_2v_3), (v_3v_4), \ldots, (v_{n-1}v_n)$.
lukket: En vei er lukket om den starter og stopper i samme hjørne. $(v_1 = v_n)$
spor: Vei som ikke gjentar kanter.
sti: Vei som ikke gjentar hjørner.
krets: Et lukket spor.
sykel: En krets som ikke gjentar noe hjørne bortsett fra start og slutt
Eulervei: Er et spor som inneholder alle hjørner og kanter i G.
Eulerkrets: Er en Eulervei som også er en krets.
Hamiltonsti: Er en sti som inneholder hver node nøyaktig en gang.
Hamiltonsykel: Er en sykel som inneholder alle hjørner i G.

Begreper

Graden: til en node er antall tilstøtende kanter
Totalgraden: til en graf er summen av gradene over alle nodene i grafen.
sammenhengende: En urettet graf er sammenhengende hvis det for hvert par av hjørner a og b finnes en vei som forbinder a med b.
komponent: en ikke-sammenhengende graf består av noen sammenhengende komponenter. Enhver komponent er da en maksimal sammenhengende delgraf (delgraf hvor det ikke er mulig å legge til flere noder slik at den forblir sammenhengende)
isomorfi: En 1-1 avbilding av hjørnene i en graf G_1 til hjørnene i en annen graf G_2 er en isomorfi hvis den er 1-1 på kantene også.
isomorfi-invariant: En egenskap som ikke endres ved isomorfier.

- Antall hjørner
- Antall kanter
- Ei rekke med gradene til alle hjørnene
- Antall komponenter
- $\vdots$

Induktivt definerte mengder og rekursivt definerte funksjoner

En **induktivt definert mengde** M er den minste mengden som inneholder en gitt *basismengde* M_0 og som er lukket under et gitt sett med operasjoner på elementer i mengden.

(1) (Basissteget) $M_0 \subseteq M$
(2) (Indukskjonsstedet) Alle elementer konstruert fra elementer i M ved de gitte operasjonene, er også med i M.

En **rekursivt definert funksjon** f med definisjonsmengde M som er definert induktivt, er definert på følgende måte:

(1) (Basissteget) Spesifiser en verdi $f(x)$ for hver x i basismengden M_0.
(2) (Rekursjonssteget) For hver $x \in M$ som fremkommer fra et induksjonssteg fra elementer $x_1, ..., x_k$ og en operasjon, så er $f(x)$ definert fra verdiene $f(x_1), ..., f(x_k)$ og operasjonen, (og avhenger kun av disse).

Prims algoritme

Prims algoritme For en vektet (urettet) graf $G = (V, E, w)$ med n noder, og med vekter $w(e)$ for kanter $e \in E$, så bygges et utspenntre med minste totale vekt w ved følgende induktive algoritme:

(1) (Basistilfelle) Initialiser treet med en vilkårlig valgt node, $V(T_1) = \{v_1\}$
(2) (Induktive trinn) Gitt at vi har tre T_{k-1}. Velg en kant e_k med lavest mulig vekt w_k, som har en node $u \in V(T_{k-1})$ og en node $v_k \notin V(T_{k-1})$. T_k får vi ved å legge noden v_k og kanten e_k til T_{k-1}.
(3) Algoritmen avsluttes når $n = k$, dvs. når alle nodene i grafen er med i T_k.

Da vil T_n være et minimalt utspenntre, med totalvekt

$$w = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

Søke-algoritmer

Dybde først søk (DFS) For en graf $G = (V, E)$, så traverseres nodene ved følgende rekursive algoritme. **Visited** er nodene som er besøkt.

```
DFS(G,n,Visited):
  add n to Visited
  for each neighbour node v of n:
    if v not in Visited:
      DFS(G,v,Visited)
```

Dette vil besøke alle nodene hvis grafen er sammenhengende.

Bredde først søk (BFS) For en graf $G = (V, E)$, så traverseres nodene ved følgende algoritme.

- Besøk startnoden, $V_0 = \{\text{startnode}\}$
- Så lengde det er ubesøkte noder:
  - Besøk alle nabo-noder til V_k som ikke allerede er besøkt
  - La V_{k+1} være unionen av V_k og de nylig besøkte.

Nodene i V_k utgjør *lag* k.