

Matte-repetisjon. Først noen oppgaver (2-5 minutter etter litt øvelse). Svar neste side.

---

$$F = ma \quad a =$$

$$PV = nRT \quad \frac{n}{V} =$$

$$C = \frac{n}{V} \quad V =$$

$$\cdot \quad 2^3 \times 2^{-4} =$$

$$y = Ae^x \quad x =$$

$$y = Ae^{-kx} \quad x =$$

$$y = Ae^{-\frac{E}{kT}} \quad E =$$

$$y = \ln x \quad x =$$

$$\cdot \quad \ln e^x =$$

$$(\text{anta } x > 0) \quad e^{\ln x} =$$

$$\cdot \quad e^a e^b =$$

$$\cdot \quad \ln x^3 - 3 \ln x =$$

$$\cdot \quad \ln(AB/C) - (\ln A + \ln B - \ln C) =$$

$$\cdot \quad \frac{d}{dt} (Ae^{-kt}) =$$

$$(\text{konstant } y) \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \tan(\ln y)) =$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) =$$

$$(a > 0, b > 0) \quad \int_a^b 1/x^2 dx =$$

$$(a > 0, b > 0) \quad \int_a^b 1/x dx =$$

$$F = ma \qquad a = F/m$$

$$PV = nRT \qquad \frac{n}{V} = \frac{P}{RT}$$

$$C = \frac{n}{V} \qquad V = \frac{n}{C}$$

$$\cdot \qquad 2^3 \times 2^{-4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = 1/2$$

$$y = Ae^x \qquad x = \ln(y/A)$$

$$y = Ae^{-kx} \qquad x = -\ln(y/A)/k \quad (\text{eller } \ln(A/y)/k)$$

$$y = Ae^{-\frac{E}{kT}} \qquad E = -kT \ln(y/A)$$

$$y = \ln x \qquad x = e^y$$

$$\cdot \qquad \ln e^x = x$$

$$(\text{anta } x > 0) \qquad e^{\ln x} = x$$

$$\cdot \qquad e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\cdot \qquad \ln x^3 - 3 \ln x = 0$$

$$\cdot \qquad \ln(AB/C) - (\ln A + \ln B - \ln C) = 0$$

$$\cdot \qquad \frac{d}{dt} (Ae^{-kt}) = -Ake^{-kt}$$

$$(\text{konstant } y) \qquad \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \tan(\ln y)) = 2xy$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(a > 0, b > 0) \qquad \int_a^b 1/x^2 dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^b = -\left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$(a > 0, b > 0) \qquad \int_a^b 1/x dx = [\ln(x)]_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a)$$

# Matte

Her er litt uformell repetisjon av ting det vil være en stor fordel å kunne godt. Skriv ned noen ganger det du har glemt.

## 1 Logaritmer

Per definisjon er  $\ln(x)$ , den naturlige logaritmen av  $x$ , det tallet  $e$  må opphøyes i for å gi  $x$ .

$$x = e^{\ln(x)}$$

Så logaritmen til et tall *er eksponenten*, dersom tallet skrives som  $e$  opphøyd i en eksponent.

Så hvis (og bare hvis)

$$x = e^y$$

har vi at

$$y = \ln(x)$$

Eksponent-funksjonen og logaritmen er invers-funksjoner (“undo”-funksjoner) for hverandre:  $e^{\ln(x)} = x$  og  $\ln(e^x) = x$ .

Vi må også kunne at

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

så

$$e^{b+\ln(a)} = e^b e^{\ln a} = a e^b$$

Av samme grunn gjør logaritmen multiplikasjon til addisjon, og divisjon til subtraksjon.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Relevant oppgave: Ta logaritmen på begge sider av:

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

og

$$C = C_0 e^{-kt}$$

Lag noen oppgaver selv hvis dette er uklart, eller test med tall i Python, R, regneark eller på kalkulatoren. Husk at det er forskjell på  $\log_{10}$  og  $\ln$  (som er  $\log_e$ ). I de fleste programmeringsspråk kalles  $\ln$  log.

## 2 Partiellderiverte

Det er mye partiellderivering i fysikalsk kjemi. Her er en enkel og uformell måte å forstå partiellderiverte og vanlige deriverte på.

$dx$  betyr “en bitte liten endring”<sup>1</sup> av  $x$ .

$\frac{dy}{dx}$  er den deriverte, en liten endring av  $y$  delt på en liten endring av  $x$ . Her er  $y$  en funksjon av  $x$ , slik at hvis  $x$  endres litt så endres også  $y$  litt<sup>2</sup>, og så deler man endringen av  $y$  på endringen av  $x$ .

Hvis vi nå tenker oss at energien  $U$  til et system (for eksempel en flaske farris eller en ballong) er en funksjon av temperaturen  $T$ , ønsker vi kanskje å vite hvor raskt energien stiger når temperaturen stiger. Så da kan det være interessant å studere

$$\frac{dU}{dT}.$$

Men hvis  $U$  også er avhengig av andre variable som ikke nødvendigvis endrer seg når  $T$  endrer seg, da må man ha en mer presis notasjon. Derfor angir man helt eksplisitt hvilke variable som holdes konstant. Man bytter ut  $d$  med  $\partial$  og skriver f.eks.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{P,n}$$

Dette kalles partiellderivering, men er ikke vanskelig. Det betyr bare at  $P$  og  $n$  holdes konstant. Ellers er det fortsatt bare “en bitte liten endring av  $U$  delt på en (tilsvarende) bitte liten endring av  $T$ ”, gitt at  $U$  kan beskrives som en funksjon av  $T$ ,  $P$  og  $n$  (antall mol). Om du velger å tenke på endringen som en faktisk liten fysisk endring i et begerglass, eller om du bare tenker på egenskapene til matematiske variabler og funksjoner, er opp til deg.

(Når det sies at  $U$  er en funksjon av  $T$  og  $P$  menes det forresten ikke nødvendigvis at denne funksjonen er et matematisk uttrykk som kan skrives ned på papir, bare at  $U$  er gitt dersom  $T$  og  $P$  er gitt for systemet.)

Vær klar over at samme symbol ofte brukes både om en fysisk størrelse og om funksjonen for størrelsen, som når det står  $U = U(T, V)$ .  $U$  brukes da både for indre energi og for en funksjon for indre energi. Fra matematikken er dere kanskje vant med  $z = f(x, y)$ . Noen likninger dere vil se er ikke fysiske lover, bare beviste matematiske regler, av typen

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy. \quad (1)$$

(sml likning 3E.2 på side 104 Atkins 11. utgave eller 3D.2 s 140 10. utgave)

---

<sup>1</sup>“... a little bit of  $x$ ”; Thompson, Calculus Made Easy. <https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf>. Egentlig er jo den deriverte definert som en grenseverdi, men det går som regel fint å tenke på infinitesimale  $dx$  etc.

<sup>2</sup>med mindre den deriverte er null

### 3 Dobbellderiverte

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df(x)}{dx} \quad (2)$$

Eksempel:

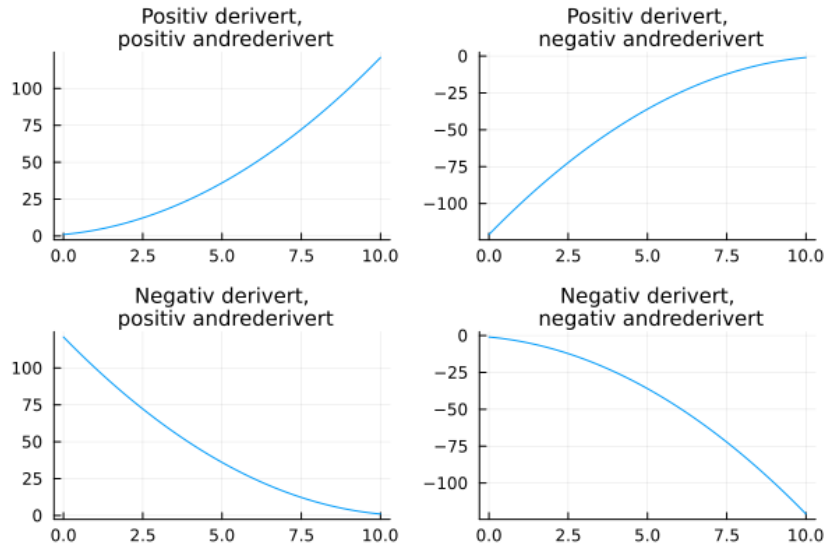
$$\frac{d^2}{dx^2} (x^3) = \frac{d}{dx} (3x^2) = 6x \quad (3)$$

For partiellderiverte gjelder følgende regel<sup>3</sup>: Det er det samme om du deriverer først med hensyn på x og deretter med hensyn på y eller først med hensyn på y og deretter med hensyn på x.

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \quad (4)$$

Dvs egentlig bør jeg skrive:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)}{\partial x} \right)_y = \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)}{\partial y} \right)_x \quad (5)$$



Figur 1: Deriverte og andrederiverte. Positiv derivert betyr at kurven stiger, positiv andrederivert betyr at den deriverte stiger.

<sup>3</sup>Hvis du lurer på hvorfor:

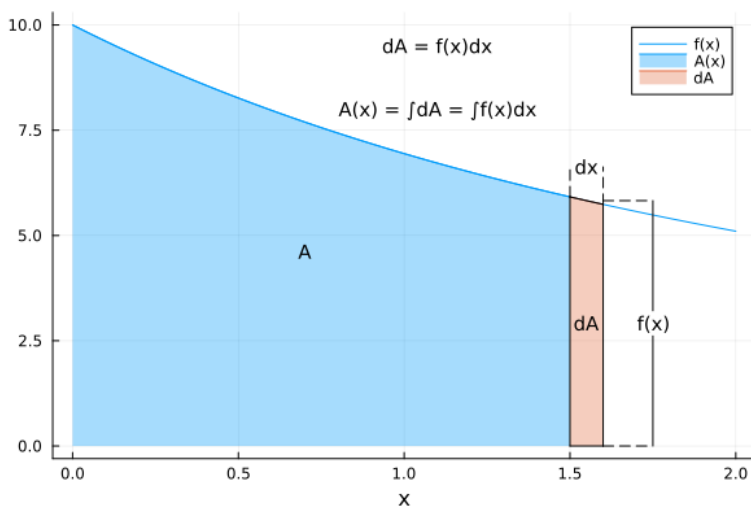
$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y}.$$

Dette blir det samme som

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}{\Delta x}.$$

## 4 Integraler

Et integral er en sum over mange bittesmå ledd.

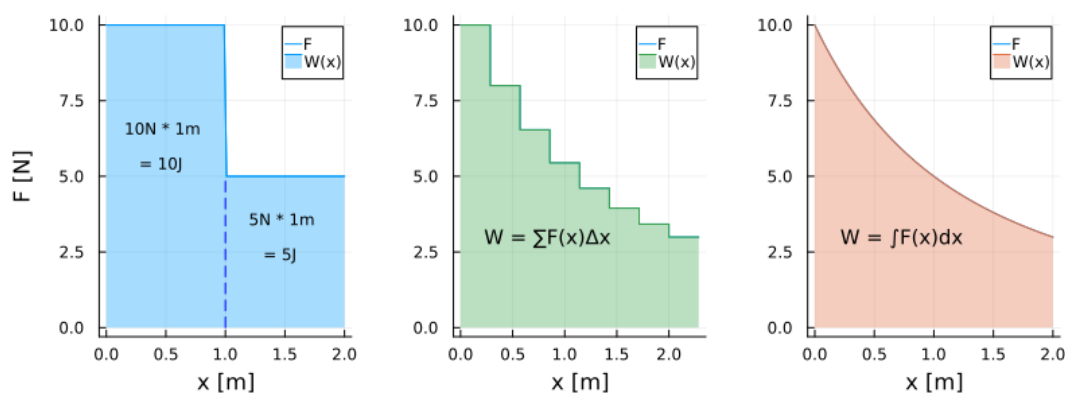


Figur 2: Illustrasjon av integral, her representert som et areal  $A$ . Prøv å forstå at  $\frac{dA}{dx} = f(x)$ . (Egentlig skal  $dx$  gå mot null).

Vi vet at “arbeid er lik kraft ganger strekning”, og måles i Joule (J).  $1J = 1Nm$  (Newton meter). Eksempel: En vekt på 1.02 kg veier 10N; for å løfte denne vekten 10 meter opp må det gjøres et arbeid på  $10N \times 10m = 100J$ . Så arbeidet  $W = Fs$ , hvor  $F$  er kraften og  $s$  strekningen. Men hvis vi løfter vekten noen hundre km opp, er ikke lenger  $F$  konstant, og da må vi integrere:

$$W = \int_0^s F(x)dx.$$

(Dette er også relevant for krefter mellom molekyler og for gasser som komprimeres eller utvides.)



Figur 3: Arbeid (energi) er kraft ganger strekning, summert.

(Ett viktig resultat; med  $F = ma$  kan vi med  $\int Fdx$  regne ut endring av kinetisk energi:  $W = \int Fdx = \int madx = \int m \frac{dv}{dt} dx = \int m \frac{dv}{dt} v dt = \int mv dv = \frac{1}{2}mv^2 + C$ )