Matte-repetisjon. Først noen oppgaver (2-5 minutter med litt trening)

$F = ma$	$a =$
$PV = nRT$	$\frac{n}{V} =$
$C = \frac{n}{V}$	$V =$
$\cdot$	$2^3 \times 2^{-4} =$
$y = Ae^x$	$x =$
$y = Ae^{-kx}$	$x =$
$y = Ae^{-\frac{E}{kT}}$	$E =$
$y = \ln x$	$x =$
$\cdot$	$\ln e^x =$
(anta $x > 0$)	$e^{\ln x} =$
$\cdot$	$e^a e^b =$
$\cdot$	$\ln x^3 - 3\ln x =$
$\cdot$	$\ln(AB/C) - (\ln A + \ln B - \ln C) =$
$\cdot$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-kt}\right) =$
(konstant y)	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + \tan(\ln y)\right) =$
$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) =$
$(a > 0\,, b > 0)$	$\int_a^b 1/x^2\,dx =$
$(a > 0\,, b > 0)$	$\int_a^b 1/x\,dx =$

	Noen mulige svar
$F = ma$	$a = F/m$
$PV = nRT$	$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT}$
$C = \frac{n}{V}$	$V = \frac{n}{C}$
$\cdot$	$2^3 \times 2^{-4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = 1/2$
$y = Ae^x$	$x = \ln(y/A)$
$y = Ae^{-kx}$	$x = -\ln(y/A)/k \quad (\text{eller } \ln(A/y)/k)$
$y = Ae^{-\frac{E}{kT}}$	$E = -kT\ln(y/A)$
$y = \ln x$	$x = e^y$
$\cdot$	$\ln e^x = x$
(anta $x > 0$)	$e^{\ln x} = x$
$\cdot$	$e^a e^b = e^{a+b}$
$\cdot$	$\ln x^3 - 3\ln x = 0$
$\cdot$	$\ln(AB/C) - (\ln A + \ln B - \ln C) = 0$
$\cdot$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-kt}\right) = -Ake^{-kt}$
(konstant y)	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + \tan(\ln y)\right) = 2xy$
$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}x^{-1}}{\mathrm{d}x} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$(a > 0\,, b > 0)$	$\int_a^b 1/x^2\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$
$(a > 0\,, b > 0)$	$\int_a^b 1/x\,dx = [\ln(x)]_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a)$

Matte

Her er litt uformell repetisjon av ting det vil være en stor fordel å kunne godt. Skriv ned noen ganger det du har glemt.

1 Logaritmer

Per definisjon er $\ln(x)$, den naturlige logaritmen av x, det tallet e må opphøyes i for å gi x.

$$x = e^{\ln(x)}$$

Så logaritmen til et tall *er eksponenten*, dersom tallet skrives som e opphøyd i en eksponent.

Så hvis (og bare hvis)

$$x = e^y$$

har vi at

$$y = \ln(x)$$

Eksponent-funksjonen og logaritmen er invers-funksjoner ("undo"-funksjoner) for hverandre: $e^{\ln(x)} = x$ og $\ln(e^x) = x$.

Vi må også kunne at

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

så

$$e^{b+\ln(a)} = e^b e^{\ln a} = ae^b$$

Av samme grunn gjør logaritmen mulitiplikasjon til addisjon, og divisjon til subtraksjon

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Relevant oppgave: Ta logaritmen på begge sider av:

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

og

$$sC = C_0 e^{-kt}$$

Lag noen oppgaver selv hvis dette er uklart, eller test med tall i Python, R, regneark eller på kalkulatoren. Husk at det er forskjell på $\log_{10}$ og ln (som er $\log_e$). I de fleste programmeringsspråk kalles ln log.

2 Partiellderiverte

Det er mye partiellderivering i termodynamikken. Her er en enkel måte å forstå partiellderiverte og vanlige deriverte på.

dx betyr "en bitte liten endring" [1] av x.

$\frac{dy}{dx}$ er den deriverte, en liten endring av y delt på en liten endring av x. Her er y en funksjon av x, så hvis x endres litt så endres y litt [2], og så deler man endringen av y på endringen av x.

Hvis vi nå tenker oss at energien U til et system (for eksempel en flaske farris eller en ballong) er en funksjon av temperaturen T, ønsker vi kanskje å vite hvor raskt energien stiger når temperaturen stiger. Så da kan det være interessant å studere

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\,.$$

Men hvis U også er avhengig av andre variable som ikke nødvendigvis endrer seg når T endrer seg, da må man ha en mer presis notasjon. Derfor angir man helt eksplisitt hvilke variable som holdes konstant. Man bytter ut d med ∂ og skriver f.eks.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{P,n}$$

Dette kalles partiellderivering, men er ikke vanskelig. Det betyr bare at P og n holdes konstant. Ellers er det fortsatt bare "en bitte liten endring av U delt på en (tilsvarende) bitte liten endring av T", gitt at U kan beskrives som som en funksjon av T, P og n (antall mol). Om du velger å tenke på endringen som en faktisk liten fysisk endring i et begerglass, eller om du bare tenker på egenskapene til matematiske variabler og funksjoner, er opp til deg.

(Når det sies at U er en funksjon av T og P menes det forresten ikke nødvendigvis at denne funksjonen er et matematisk uttrykk som kan skrives ned på papir, bare at U er gitt dersom T og P er gitt for systemet.)

Vær klar over at samme symbol ofte brukes både om en fysisk størrelse og om funksjonen for størrelsen, som når det står $U = U(T, V)$. U brukes da både for indre energi og for en funksjon for indre energi. Fra matematikken er dere kanskje vant med $z = f(x, y)$. Noen likninger dere vil se er ikke fysiske lover, bare beviste matematiske regler, av typen

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy\,. \tag{1}$$

(sml likning 3E.2 på side 104 Atkins 11. utgave eller 3D.2 s 140 10. utgave)

[1]"... a little bit of x"; Thompson, Calculus Made Easy. Egentlig er jo den deriverte definert som en grenseverdi, men det går som regel fint å tenke på infinitesimale dx etc.

[2]med mindre den deriverte er null

3 Dobbeltderiverte

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

Eksempel:

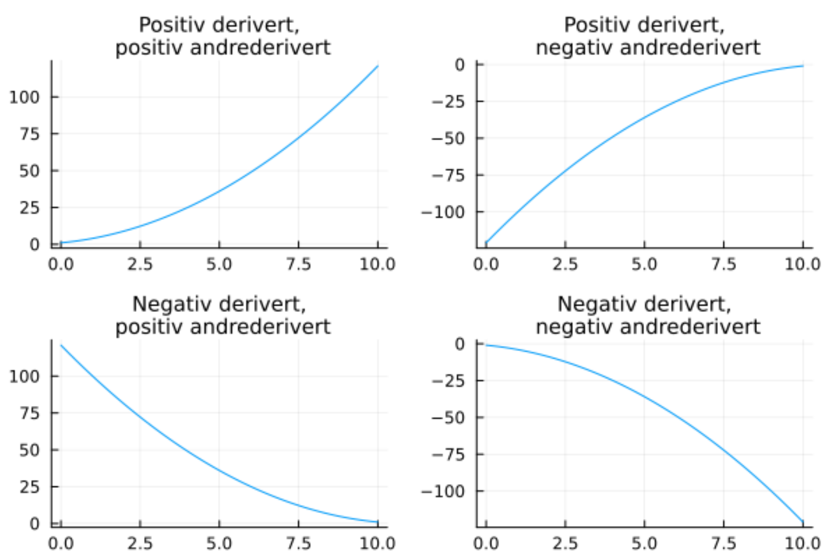
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x^3\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3x^2\right) = 6x \tag{3}$$

For partiellderiverte gjelder følgende regel[3]: Det er det samme om du deriverer først med hensyn på x og deretter med hensyn på y eller først med hensyn på y og deretter med hensyn på x.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \tag{4}$$

Dvs egentlig bør jeg skrive:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y}{\partial y}\right)_x \tag{5}$$



Figur 1: Deriverte og andrederiverte. Positiv derivert betyr at kurven stiger, positiv andrederivert betyr at den deriverte stiger.

[3]Hvis du lurer på hvorfor:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}.$$

Dette blir det samme som

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}}{\Delta x}.$$

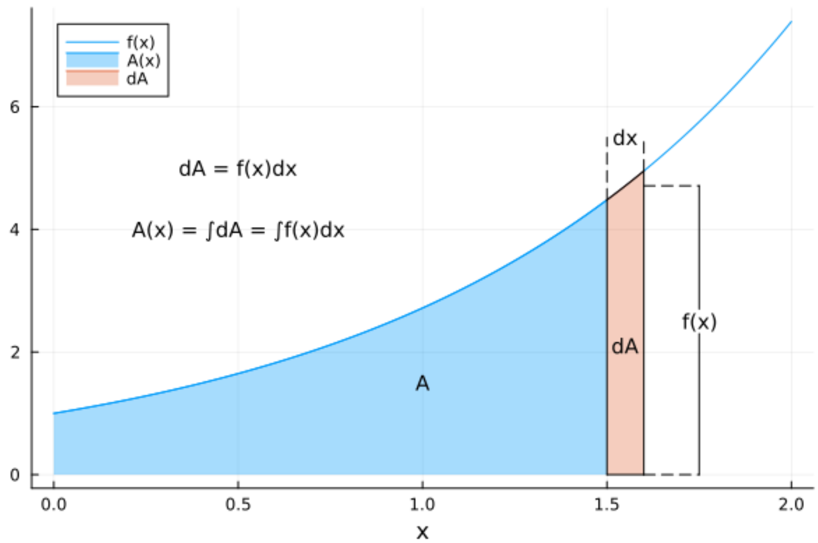
4 Integraler

Et integral er en sum over mange bittesmå ledd.

De som kan litt fysikk vet at “arbeid er lik kraft ganger strekning”, og måles i Joule (J). 1J = 1Nm (Newton meter). For eksempel gjør man et arbeid på 100 J dersom man løfter en vekt med masse 1.02kg 10 meter opp. (En vekt på 1.02kg veier ca 10N, og 10N ganger 10m er 100J). Så $W = Fs$, hvor F er kraften og s strekningen, hvis F er konstant. Men hvis F varierer må man integrere. Da blir

$$W = \int_0^s F(x)dx\,. \tag{6}$$

Dette er relevant for stålfjærer, molekyler og gasser som komprimeres eller utvides.



Figur 2: Illustrasjon av integral, her representert som et areal A. Prøv å forstå at $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x)$. (Egentlig skal dx gå mot null).

Et viktig resultat; med $F = ma$ kan vi med $\int F dx$ regne ut endring av kinetisk energi:

$$W = \int F dx = \int ma dx = \int m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} dx = \int m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} v dt = \int mv dv = \frac{1}{2} mv^2 + C \tag{7}$$