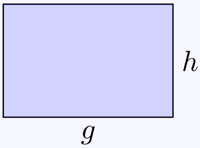
0.1 Formlar for areal og omkrins

Ein *formel* er ei likning der ein variabel (som oftast) står aleine på éi side av likskapsteiknet. I *seksjon* **??** såg vi på formlar for arealet til rektangel og trekantar, men da brukte vi ord i staden for symbol. Her skal vi gjengi desse to formlane i ei meir algebraisk form, etterfulgt av andre klassiske formlar for areal, omkrins og volum.

0.1 Arealet til eit rektangel (??)

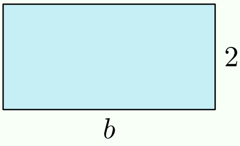
Arealet A til eit rektangel med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet.



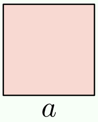
Svar:

Arealet A til rektangelet er

$$A = b \cdot 2 = 2b$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar:

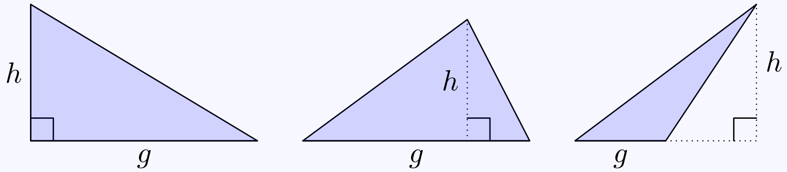
Arealet A til kvadratet er

$$A = a \cdot a = a^2$$

0.2 Arealet til ein trekant (??)

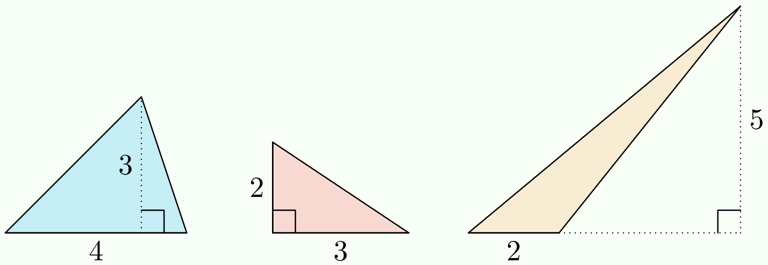
Arealet A til ein trekant med grunnlinje g og høyde h er

$$A = \frac{gh}{2}$$



Eksempel

Kven av trekantane har størst areal?



Svar:

Vi let A_1, A_2 og A_3 vere areala til høvesvis trekanten til venstre, i midten og til høgre. Da har vi at

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

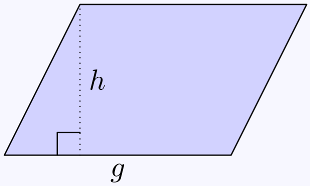
$$A_3 = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Altså er det trekanten til venstre som har størst areal.

0.3 Arealet til eit parallellogram

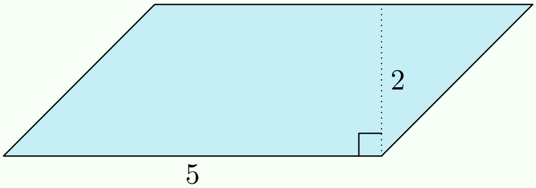
Arealet A til eit parallellogram med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel

Finn arealet til parallellogrammet



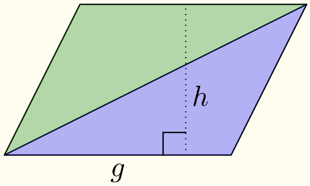
Svar:

Arealet A til parallellogrammet er

$$A = 5 \cdot 2 = 10$$

0.3 Arealet til eit parallellogram (forklaring)

Av eit parallellogram kan vi alltid lage oss to trekantar ved å teikne inn ein av diagonalane:



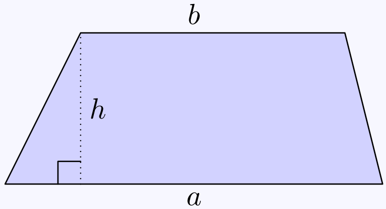
Dei farga trekantane på figuren over har begge grunnlinje g og høgde h. Da veit vi at begge har areal lik $\frac{gh}{2}$. Arealet A til parallellogrammet blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2} \\ &= g \cdot h \end{aligned}$$

0.4 Arealet til eit trapes

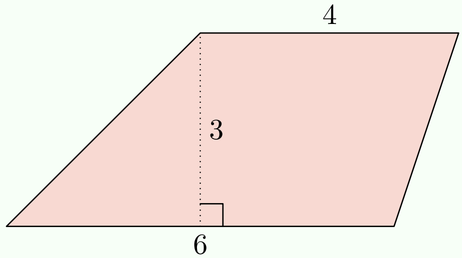
Arealet A til eit trapes med parallelle sider a og b og høgde h er

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Eksempel

Finn arealet til trapeset.



Svar:

Arealet A til trapeset er

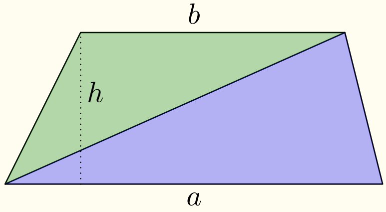
$$\begin{aligned} A &= \frac{3(6+4)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Merk

Når ein tek utgangspunkt i ei grunnlinje og ei høgde, er arealformlane for eit parallellogram og eit rektangel identiske. Å anvende *regel 0.4* på eit parallellogram vil også resultere i eit uttrykk tilsvarande gh. Dette er fordi eit parallellogram berre er eit spesialtilfelle av eit trapes (og eit rektangel er berre eit spesialtilfelle av eit parallellogram).

0.4 Arealet til eit trapes (forklaring)

Også for eit trapes får vi to trekanter viss vi teikner ein av diagonalene:



I figuren over er

$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{ah}{2}$$

$$\text{Arealet til den grøne trekanten} = \frac{bh}{2}$$

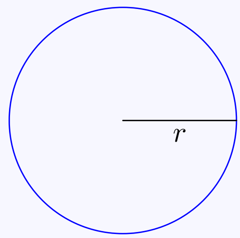
Arealet A til trapeset blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \\ &= \frac{h(a+b)}{2} \end{aligned}$$

0.5 Omkrinsen til ein sirkel (og π)

Omkrinsen O til ein sirkel med radius r er

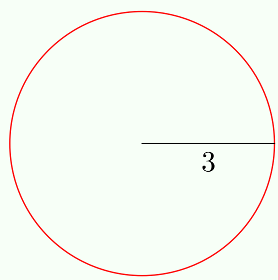
$$O = 2\pi r$$



$\pi = 3.141592653589793....$

Eksempel 1

Finn omkrinsen til sirkelen.



Svar:

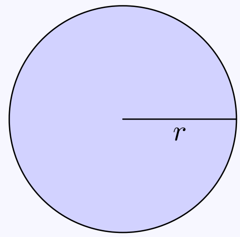
Omkrinsen O er

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \cdot 3 \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

0.6 Arealet til ein sirkel

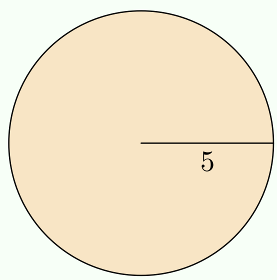
Arealet A til ein sirkel med radius r er

$$A = \pi r^2$$



Eksempel

Finn arealet til sirkelen.



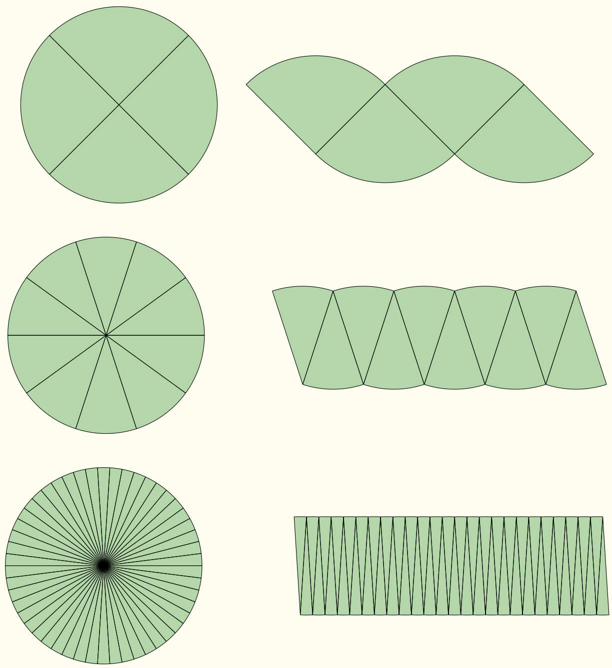
Svar:

Arealet A til sirkelen er

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

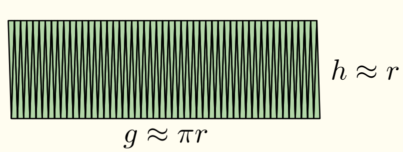
0.6 Arealet til ein sirkel (forklaring)

I figuren under har vi delt opp ein sirkel i 4, 10 og 50 (like store) sektorar, og lagt desse bitene etter kvarandre.



I kvart tilfelle må dei små sirkelbogene til saman utgjere heile boga, altså omkrinsen, til sirkelen. Viss sirkelen har radius r, betyr dette at summen av bogene er $2\pi r$. Og når vi har like mange sektorar med bogen vendt opp som sektorar med bogen vend ned, må totallengda av bogenene vere πr både oppe og nede.

Men jo fleire sektorar vi deler sirkelen inn i, jo meir liknar samansettinga av dei på eit rektangel (i figuren under har vi 100 sektorar). Grunnlinja g til dette "rektangelet" vil vere tilnærma lik πr, mens høgda vil vere tilnærma lik r.



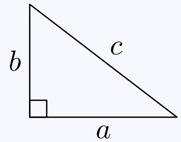
Arealet A til "rektangelet", altså sirkelen, blir da

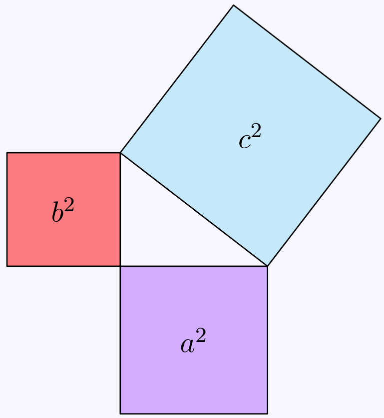
$$A \approx gh \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$$

0.7 Pytagoras' setning

I ein rettvinkla trekant er arealet til kvadratet danna av hypotenusen lik summen av areala til kvadrata danna av katetane.

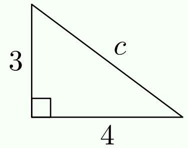
$$a^2 + b^2 = c^2$$





Eksempel 1

Finn lengda til c.



Svar:

Vi veit at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

der a og b er lengdene til dei kortaste sidene i trekanten. Dermed er

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

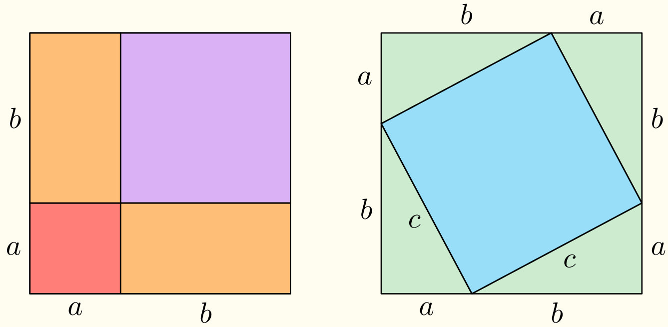
Altså har vi at

$$c = 5 \qquad \vee \qquad c = -5$$

Da c er ei lengde, er $c = 5$.

0.7 Pytagoras' setning (forklaring)

Under har vi teikna to kvadrat som er like store, men som er inndelt i forskjellige former.

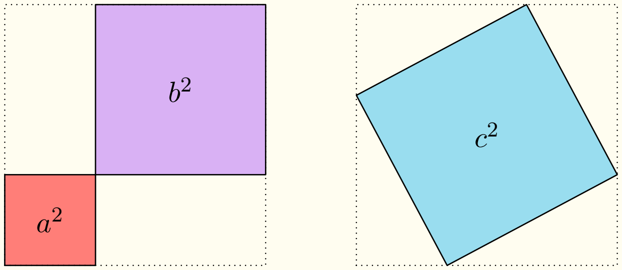


Vi observerer no følgande:

1. Arealet til det raude kvadratet er a^2, arealet til det lilla kvadratet er b^2 og arealet til det blå kvadratet er c^2.

2. Arealet til eit oransje rektangel er ab og arealet til ein grøn trekant er $\frac{ab}{2}$.

3. Om vi tek bort dei to oransje rektangla og dei fire grøne trekantane, er det igjen (av pkt. 2) eit like stort areal til venstre som til høgre.



Dette betyr at

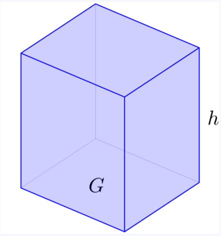
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Gitt ein trekant med sidelengder a, b og c, der c er den lengste sidelengda. Så lenge trekanten er rettvinkla, kan vi alltid lage to kvadrat med sidelengder $a + b$, slik som i første figur. (1) gjeld dermed for alle rettvinkla trekanter.

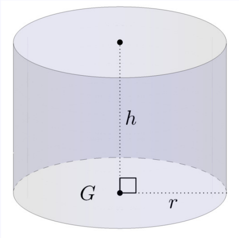
0.8 Volumet til tredimensjonale former

Volumet V til ei firkanta prisme eller ein sylinder med grunnflate G og høgde h er

$$V = G \cdot h$$



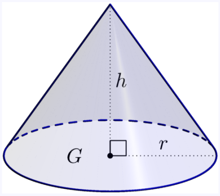
Firkanta prisme



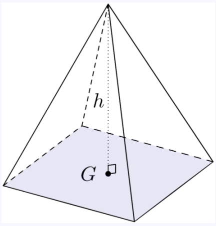
Sylinder

Volumet V til ei kjegle eller ei pyramide med grunnflate G og høgde h er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



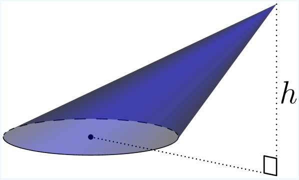
Kjegle



Firkanta pyramide

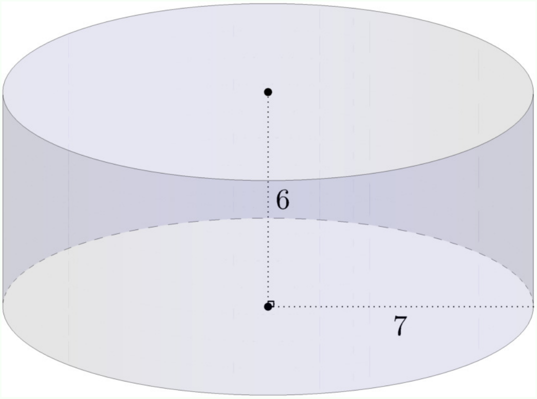
Merk

Formlane frå *regel 0.8* gjeld også for prismer, sylindrar, kjegler og pyramider som heller (er skeive). Vis grunnflata er plassert horisontalt, er høgda den vertikale avstanden mellom grunnflata og toppen til figuren.



(For spisse gjenstandar som kjegler og pyramider finst det sjølvsagt bare eitt valg av grunnflate.)

Eksempel 1



Ein sylinder har radius 7 og høgde 5.

a) Finn grunnflata til sylinderen.

b) Finn volumet til sylinderen.

Svar:

a) Vi har at[1]:

$$\begin{aligned} \text{grunnflate} &= \pi \cdot 7^2 \\ &= 49\pi \end{aligned}$$

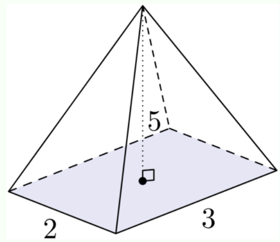
b) Dermed er

$$\begin{aligned} \text{volumet til sylinderen} &= 49\pi \cdot 6 \\ &= 294\pi \end{aligned}$$

[1]se ??, s. 140.

Eksempel 2

Ei firkanta pyramide har lengde 2, bredde 3 og høgde 5.



a) Finn grunnflata til pyramiden.

b) Finn volumet til pyramiden.

Svar:

a) Vi har at[1]

$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

b) Dermed er

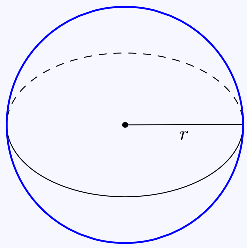
$$\begin{aligned}\text{volumet til pyramiden} &= 6 \cdot 5 \\ &= 30\end{aligned}$$

[1]se ??, s. 140.

0.9 Volumet til ei kule

Volumet V til ei kule med radius r er:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



0.2 Kongruente og formlike trekantar

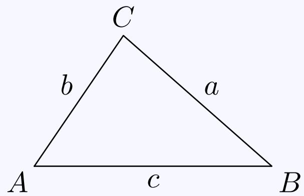
0.10 Konstruksjon av trekantar

Ein trekant $\triangle ABC$, som vist i figuren under, kan bli unikt konstruert viss ein av følgande kriterium er oppfylt:

i) c, $\angle A$ og $\angle B$ er kjende.

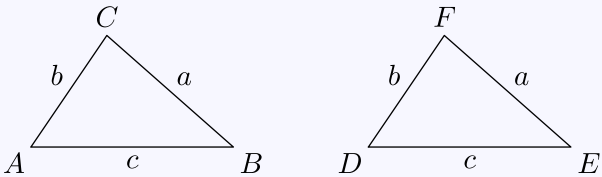
ii) a, b og c er kjende.

iii) b, c og $\angle A$ er kjende.



0.11 Kongruente trekantar

To trekantar som har same form og størrelse er kongruente.

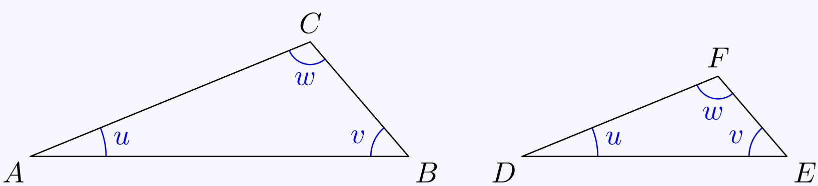


At trekantane i figuren over er kongruente skrivast

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

0.12 Formlike trekantar

Formlike trekantar har tre vinklar som er parvis like store.

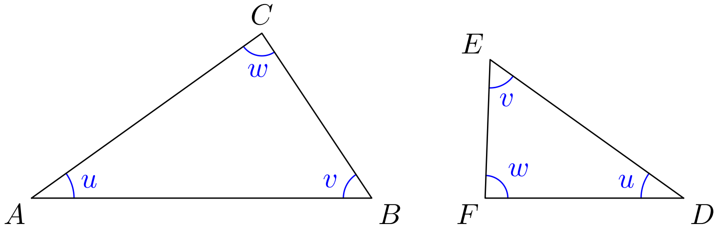


At trekantane i figuren over er formlike skrivast

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Samsvarande sider

Når vi studerer formlike trekantar er *samsvarande sider* eit viktig omgrep. Samsvarande sider er sider som i formlike trekantar står *motståande* den same vinkelen.



For dei formlike trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ har vi at

I $\triangle ABC$ er

- BC motstående til u.
- AC motstående til v
- AB motstående til w.

I $\triangle DEF$ er

- FE motstående til u.
- FD motstående til v
- ED motstående til w.

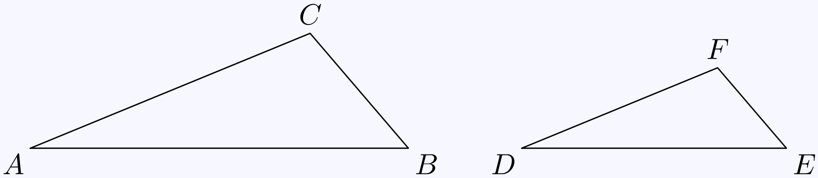
Dette betyr at desse er samsvarande sider:

- BC og FE
- AC og FD
- AB og ED

0.13 Forhold i formlike trekantar

Når to trekantar er formlike, er forholdet mellom samsvarande[1] sider det same.

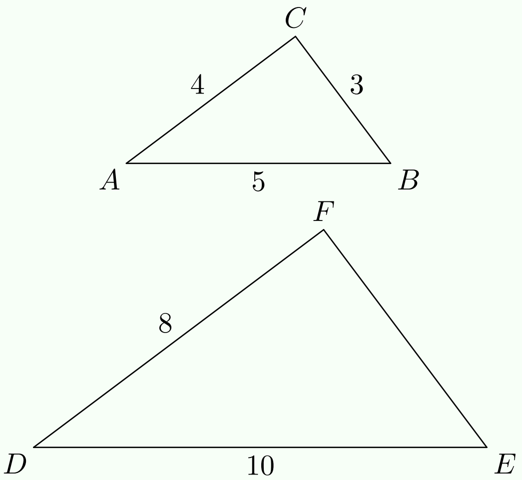
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



[1]Vi tek det her for gitt at kva sider som er samsvarande kjem fram av figuren.

Eksempel

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengda til EF.



Svar:

Vi observerer at AB samsvarer med DE, BC med EF og AC med DF. Det betyr at

$$\begin{aligned}\frac{DE}{AB} &= \frac{EF}{BC} \\ \frac{10}{5} &= \frac{EF}{3} \\ 2\cdot 3 &= \frac{EF}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3} \\ 6 &= EF\end{aligned}$$

Merk

Av *Regel 0.13* har vi at for to formlike trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

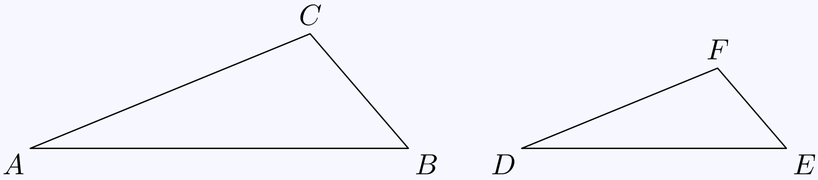
0.14 Vilkår i formlike trekantar

To trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

i) To vinklar i trekantane er parvis like store.

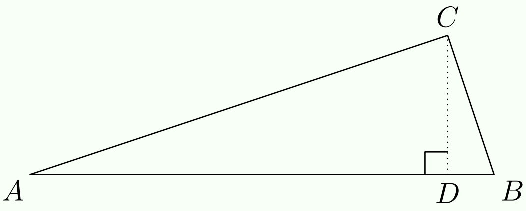
ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

iii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ og $\angle A = \angle D$.



Eksempel 1

$\angle ACB = 90°$. Vis at $\triangle ABC \sim ACD$.



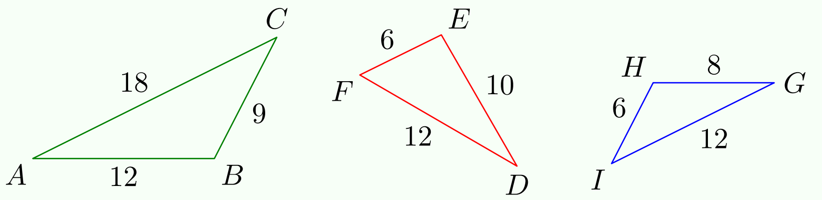
Svar:

$\triangle ABC$ og $\triangle ACD$ er begge rettvinkla og dei har $\angle DAC$ felles. Dermed er vilkår *i* fra *regel 0.14* oppfylt, og trekantane er da formlike.

Merk: På ein tilsvarande måte kan ein vise at $\triangle ABC \sim CBD$.

Eksempel 2

Undersøk om trekantane er formlike.



Svar:

Vi har at

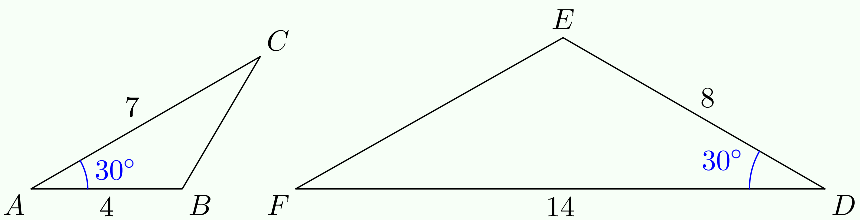
$$\frac{AC}{FD}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{BC}{FE}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{AB}{DE}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{AC}{IG}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{BC}{IH}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{AC}{IG}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

Dermed oppfyller $\triangle ABC$ og $\triangle GHI$ vilkår *ii* fra *regel 0.14*, og trekantane er da formlike.

Eksempel 3

Undersøk om trekantane er formlike.



Svar:

Vi har at $\angle BAC = \angle EDF$ og at

$$\frac{ED}{AB}=\frac{8}{4}=2\quad,\quad\frac{FD}{AC}=\frac{14}{7}=2$$

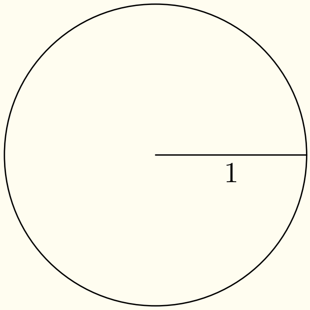
Altså er vilkår *iii* fra *regel 0.14* oppfylt, og da er trekantane formlike.

0.3 Forklaringar

0.5 Omkrinsen til ein sirkel (og π) (forklaring)

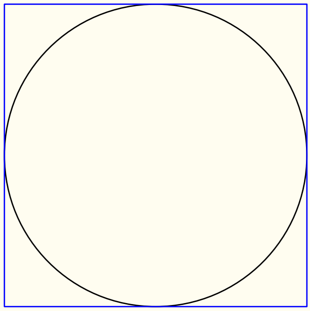
Vi skal her bruke regulære mangekantar langs vegen til ønska resultat. I regulære mangekantar har alle sidene lik lengde. Da det er utelukkande regulære mangekantar vi kjem til å bruke, vil dei bli omtala berre som mangekantar.

Vi skal starte med sjå på tilnærmingar for å finne omkrinsen O_1 av ein sirkel med radius 1.



Øvre og nedre grense

Ein god vane når ein skal prøve å finne ein størrelse, er å spørre seg om ein kan vite noko om kor stor eller liten ein *forventar* at han er. Vi startar derfor med å omslutte sirkelen med eit kvadrat med sidelengde 2:

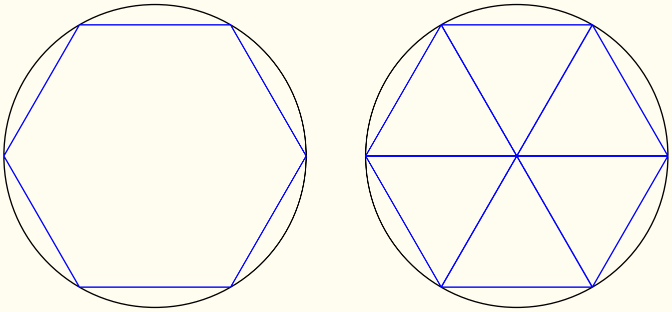


Omkrinsen til sirkelen må vere mindre enn omkrinsen til kvadratet, derfor veit vi at

$$\begin{aligned} O_1 &< 2 \cdot 4 \\ &< 8 \end{aligned}$$

Vidare innskriv vi ein sekskant. Sekskanten kan delast inn i 6 likesida trekantar som alle må ha sidelengder 1. Omkrinsen til sirkelen må vere større enn omkrinsen til sekskanten, noko som gir at

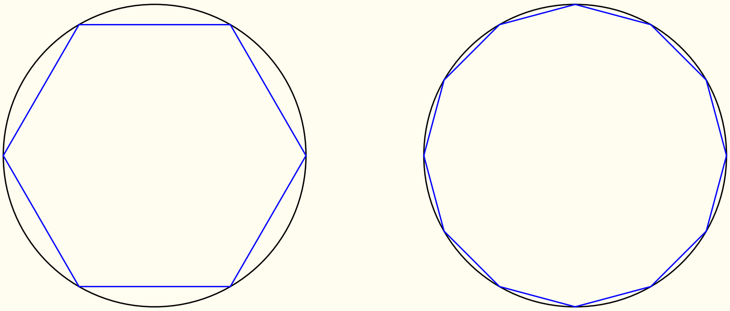
$$\begin{aligned} O_1 &> 6 \cdot 1 \\ &> 6 \end{aligned}$$



Når vi no skal gå over til ei mykje meir nøyaktig jakt etter omkrinsen, veit vi altså at vi søker ein verdi mellom 6 og 8.

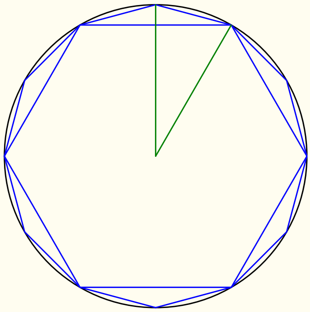
Stadig betre tilnærmingar

Vi fortsett med tanken om å innskrive ein mangekant. Av figurane under let vi oss overbevise om at dess fleire sider mangekanten har, dess betre estimat vil omkretsen til mangekanten vere for omkrinsen til sirkelen.

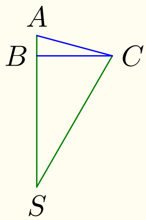


(a) 6-kant *(b)* 12-kant

Da vi veit at sidelengda til ein 6-kant er 1, er det fristande å undersøke om vi kan bruke denne kunna til å finne sidelengda til andre mangekantar. Om vi innskriv også ein 12-kant i sirkelen vår (og i tillegg ein trekant), får vi ein figur som denne:



(a) Ein 6-kant og ein 12-kant i lag med ein trekant danna av sentrum i sirkelen og ein av sidene i 12-kanten.



(b) Utklipp av trekant fra figur *(a)*.

La oss kalle sidelengda til 12-kanten for s_{12} og sidelengda til 6-kanten for s_6. Vidare legg vi merke til at punkta A og C ligg på sirkelbogen og at både $\triangle ABC$ og $\triangle BSC$ er rettvinkla trekantar (forklar for deg sjølv kvifor!). Vi har at

$$\begin{aligned}
SC &= 1 \\
BC &= \frac{s_6}{2} \\
SB &= \sqrt{SC^2 - BC^2} \\
BA &= 1 - SB \\
AC &= s_{12} \\
s_{12}^2 &= BA^2 + BC^2
\end{aligned}$$

For å finne s_{12} må vi finne BA, og for å finne BA må vi finne SB. Vi startar derfor med å finne SB. Da $SC = 1$ og $BC = \frac{s_6}{2}$, er

$$\begin{aligned}
SB &= \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}}
\end{aligned}$$

Vi går så vidare til å finne s_{12}:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= (1 - SB)^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 \\
&= 1^2 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4}
\end{aligned}$$

Ved første augekast ser det ut som vi ikkje kan komme særleg lengre i å forenkle uttrykket på høgre side, men ein liten operasjon vil endre på dette. Hadde vi berre hatt -1 som eit ledd kunne vi slått saman -1 og $\frac{s_6^2}{4}$ til å bli $-SB^2$. Derfor "skaffar" vi oss -1 ved å både addere og subtrahere 1 på høgresida:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= 1 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4} - 1 + 1 \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - \left(1 - \frac{s_6^2}{4}\right) \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - SB^2 \\
&= 2 - 2SB \\
&= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4}\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4 - s_6^2}
\end{aligned}$$

Altså er

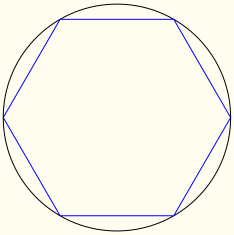
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

Sjølv om vi her har utleda relasjonen mellom sidelengdene s_{12} og s_6, er dette ein relasjon vi kunne vist for alle par av sidelengder der den eine er sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den andre. La s_n og s_{2n} høvesvis være sidelengda til ein mangekant og ein mangekant med dobbelt så mange sider. Da er

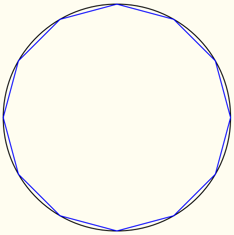
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \tag{2}$$

Når vi kjenner sidelengda til ein innskriven mangekant, vil tilnærminga til omkrinsen til sirkelen vere denne sidelengda gonga med antal sidelengder i mangekanten. Ved hjelp av (2) kan vi stadig finne sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den forrige, og i tabellen under har vi funne sidelengda og tilnærminga til omkrinsen til sirkelen opp til ein 96-kant:

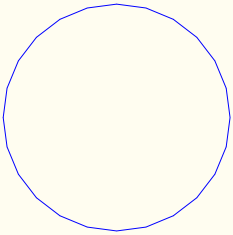
Formel for sidelengde	*Sidelengde*	*Tilnærming for omkrins*
	$s_6 = 1$	$6 \cdot s_6 \;\; = 6$
$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$	$s_{12} = 0.517...$	$12 \cdot s_{12} = 6.211...$
$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$	$s_{24} = 0.261...$	$24 \cdot s_{24} = 6.265...$
$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$	$s_{48} = 0.130...$	$48 \cdot s_{48} = 6.278...$
$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$	$s_{96} = 0.065...$	$96 \cdot s_{96} = 6.282...$



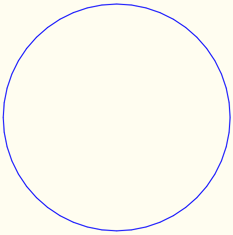
(a) 6-kant



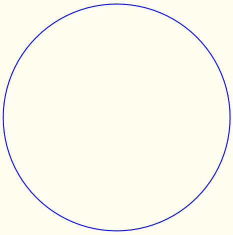
(b) 12-kant



(c) 24-kant



(d) 48-kant



(e) 96-kant

Utrekningane over er faktisk like langt som matematikaren Arkimedes kom allereie ca 250 f. kr!

For ei datamaskin er det ingen problem å rekne ut[1] dette for ein mangekant med ekstremt mange sider. Reknar vi oss fram til ein 201 326 592-kant finn vi at

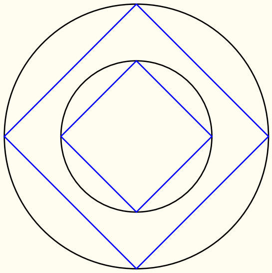
$$\text{Omkrins av sirkel med radius } 1 = 6.283185307179586...$$

(Ved hjelp av meir avansert matematikk kan det visast at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 er eit irrasjonalt tal, men at alle desimalane vist over er korrekte, derav likskapsteiknet.)

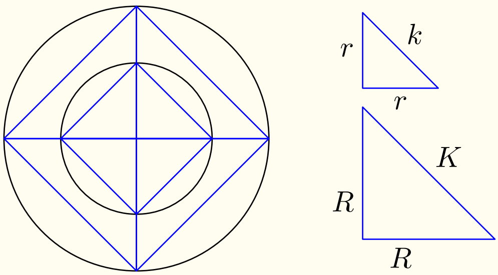
Den endelege formelen og π

Vi skal no komme fram til den kjende formelen for omkrinsen til ein sirkel. Også her skal vi ta for gitt at summen av sidelengdene til ein innskriven mangekant er ei tilnærming til omkrinsen som blir betre og betre dess fleire sidelengder det er.

For enkelheita si skuld skal vi bruke innskrivne firkantar for å få fram poenget vårt. Vi teiknar to sirklar som er vilkårleg store, men der den eine er større enn den andre, og innskriv ein firkant (eit kvadrat) i begge. Vi let R og r vere radien til høvesvis den største og den minste sirkelen, og K og k vere sidelengda til høvesvis den største og den minste firkanten.



Begge firkantane kan delast inn i fire likebeinte trekantar:



Da trekantane er formlike, har vi at

$$\frac{K}{R} = \frac{k}{r} \tag{3}$$

Vi let $\tilde{O} = 4K$ og $\tilde{o} = 4k$ vere tilnærminga av omkrinsen til høvesvis den største og den minste sirkelen. Ved å gonge med 4 på begge sider av (3) får vi at

$$\frac{4A}{R} = \frac{4a}{r}$$

$$\frac{\tilde{O}}{R} = \frac{\tilde{o}}{r} \tag{4}$$

Og no merker vi oss dette:

Sjølv om vi i kvar av dei to sirklane innskriv ein mangekant med 4, 100 eller kor mange sider det skulle vere, vil mangekantane alltid kunne delast inn i trekantar som oppfyller (3). *Og på same måte som vi har gjort i eksempelet over kan vi omskrive* (3) *til* (4) *i staden.*

La oss derfor tenke oss mangekantar med så mange sider at vi godtek deira omkrins som lik omkrinsane til sirklane. Om vi da skriv omkrinsen til den største og den minste sirkelen som høvesvis O og o, får vi at

$$\frac{O}{R} = \frac{o}{r}$$

Da dei to sirklane våre er heilt vilkårleg valgt, har vi no komme fram til at *alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og radiusen.* Ei enda vanlegare formulering er at *alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og diameteren.* Vi let D og d vere diameteren til høvesvis sirkelen med radius R og r. Da har vi at

$$\frac{O}{2R} = \frac{o}{2r}$$

$$\frac{O}{D} = \frac{o}{d}$$

Forholdstalet mellom omkrinsen og diameteren i ein sirkel blir kalla π (uttalast "pi"):

$$\frac{O}{D} = \pi$$

Likninga over fører oss til formelen for omkrinsen til ein sirkel:

$$\begin{aligned} O &= \pi D \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Tidlegare fann vi at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 (og diameter 2) er 6.283185307179586.... Dette betyr at

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{6.283185307179586...}{2} \\ &= 3.141592653589793... \end{aligned}$$

[1]For den datainteresserte skal det seiast at iterasjonsalgoritma må skrivast om for å unngå instabilitetar i utrekningane når antal sider blir mange.

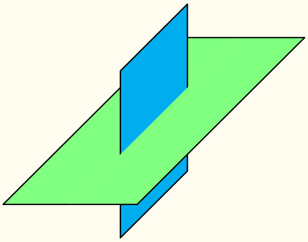
0.8 Volumet til tredimensjonale former (forklaring)

Kommer.

0.9 Volumet til ei kule (forklaring)

Førkunnskapar

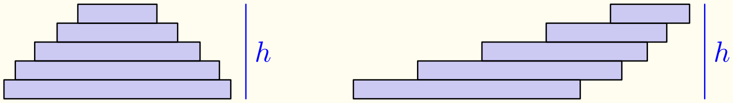
For å finne formelen for volumet til ei kule, introduserer vi tre omgrep: *vertikalt tverrsnitt*, *horisontalt tverrsnitt* og *Cavalieris prinsipp*. Eit vertikalt/horisontalt tverrsnitt er ei tenkt overflate som kjem til syne viss vi skjær ein tredimensjonal figur enten rett vertikalt eller rett horisontalt.



Cavalieris prinsipp lyd slik:

Viss tverrsnittsareala til to tredimensjonale former er dei same langs den same høgda, har formene same volum.

Dette prinsippet er illustrert i figuren under, som viser eit vertikalt tverrsnitt av to former bygd av fem prismer. Prismene i dei to formene er parvis like.

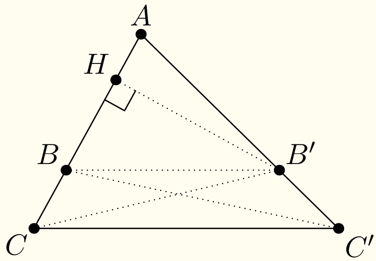


(a) (b)

Det er opplagt at viss ein startar med forma vist i *(a)*, så vil ikkje volumet endre seg om ein forskyv prismene mot høgre, slik som i *(b)*

0.13 Forhold i formlike trekantar (forklaring)

I figuren under er $BB'||CC'$. Arealet til ein trekant $\triangle ABC$ skriv vi her som ABC.



Med BB' som grunnlinje er HB' høgda i både $\triangle CBB'$ og $\triangle CBB'$. Derfor er

$$CBB' = C'BB' \tag{5}$$

Vidare har vi at

$$ABB' = AB \cdot HB'$$

$$CBB' = BC \cdot HB'$$

Altså er

$$\frac{ABB'}{CBB'} = \frac{AB}{BC} \tag{6}$$

På liknande vis er

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{7}$$

Av (5), (6) og (7) følg det at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'} \frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{8}$$

For dei formlike trekantane $\triangle ACC'$ og $\triangle ABB'$ er

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{AB + BC}{AB} \\ &= 1 + \frac{BC}{AB}\end{aligned}$$

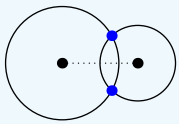
$$\begin{aligned}\frac{AC'}{AB'} &= \frac{AB' + B'C'}{AB'} \\ &= 1 + \frac{B'C'}{AB'}\end{aligned}$$

Av (8) er dermed forholdet mellom dei samsvarande sidene likt.

Merk

I dei komande forklaringane av vilkåra *ii* og *iii* fra *regel 0.10* tek ein utgangspunkt i følgande:

- To sirklar skjær kvarandre i maksimalt to punkt.
- Gitt at eit koordinatsystem blir plassert med origo i senteret til den eine sirkelen, og slik at horisontalaksen går gjennom begge sirkelsentera. Viss (a, b) er det eine skjæringspunktet, er $(a, -b)$ det andre skjæringspunktet.

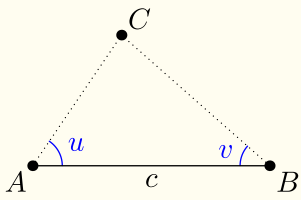


Punkta over kan enkelt visast, men er såpass intuitivt sanne at vi tek dei for gitt. Punkta fortel oss at trekanten som består av dei to sentera og det eine skjæringspunktet er kongruent med trekanten som består av dei to sentera og det andre skjæringspunktet. Med dette kan vi studere eigenskapar til trekantar ved hjelp av halvsirklar.

0.10 Konstruksjon av trekantar (forklaring)

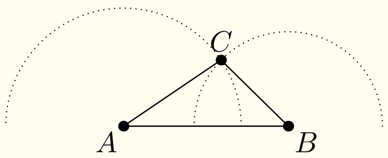
Vilkår i

Gitt ei lengde c og to vinklar u og v. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c. Så stiplar vi to vinkelbein slik at $\angle A = u$ og $B = v$. Så lenge desse vinkelbeina ikkje er parallelle, må dei naudsynleg skjære kvarandre i eitt, og berre eitt, punkt (C i figuren). I lag med A og B vil dette punktet danne ein trekant som er unikt gitt av c, u og v.



Vilkår ii

Gitt tre lengder a, b og c. Vi lagar eit linjestykket AB med lengde c. Så lagar vi to halvsirklar med høvesvis radius a og b og sentrum B og A. Skal no ein trekant $\triangle ABC$ ha sidelengder a, b og c, må C ligge på begge sirkelbogane. Da bogane berre kan møtast i eitt punkt, er forma og størrelsen til $\triangle ABC$ unikt gitt av a, b og c.



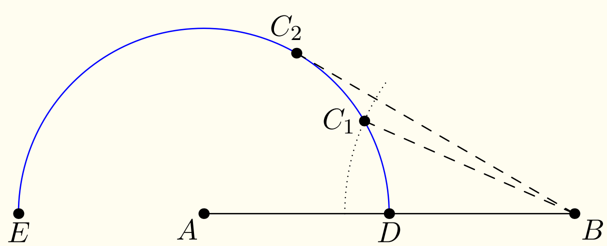
Vilkår iii

Gitt to lengder b og c og ein vinkel u. Vi startar med følgande:

1. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c.

2. I A teiknar vi ein halvsirkel med radius b.

Ved å la C vere plassert kor som helst på denne sirkelbua, har vi alle moglege variantar av ein trekant $\triangle ABC$ med sidelengdene $AB = c$ og $AC = b$. Å plassere C langs bogen til halvsirkelen er det same som å gi $\angle A$ ein bestemt verdi. Det gjenstår no å vise at kvar plassering av C gir ei unik lengde av BC.



Vi let C_1 og C_2 vere to potensielle plasseringar av C, der C_2 langs halvsirkelen ligg nærare E enn C_1. Vidare stiplar vi ein sirkelboge med radius BC_1 og sentrum i B. Da den stipla sirkelbogen og halvsirkelen berre kan skjære kvarandre i C_1, vil alle andre punkt på halvsirkelen ligge enten innanfor eller utanfor den stipla sirkelbogen. Slik vi har definert C_2, må dette punktet ligge utanfor den stipla sirkelbogen, og dermed er BC_2 lengre enn BC_1. Av dette kan vi konkludere med at BC blir lengre dess nærare C beveger seg mot E langs halvsirkelen. Å sette $\angle A = u$ vil altså gi ein unik verdi for BC, og da ein unik trekant $\triangle ABC$ der $AC = b$, $c = AB$ og $\angle BAC = u$.

0.14 Vilkår i formlike trekantar (forklaring)

Vilkår i

Gitt to trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$. Av *regel* **??** har vi at

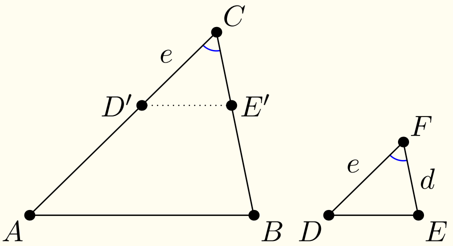
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

Viss $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$, følger det at $\angle C = \angle E$.

Vilkår ii

Vi tek utgangspunkt i trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \qquad , \qquad \angle C = \angle F \tag{9}$$



Vi sett $a = BC$, $b = AC$, $d = EF$ og $e = DF$. Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $AB \parallel D'E'$. Da er $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$, altså har vi at

$$\frac{E'C}{BC} = \frac{D'C}{AC}$$
$$E'C = \frac{ae}{b}$$

Av (9) har vi at

$$EF = \frac{ae}{b}$$

Altså er $E'C = EF$. No har vi av vilkår *ii* fra *regel 0.11* at $\triangle D'E'C \cong \triangle DEF$. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Vilkår iii

Vi tek utgangspunkt i to trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \tag{10}$$

Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $E'C = d$. Av vilkår *i* fra *regel 0.14* har vi da at $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$. Altså er

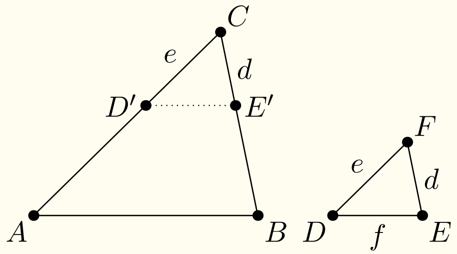
$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{D'C}{AC}$$

$$D'E' = \frac{ae}{c}$$

Av (10) har vi at

$$f = \frac{ae}{c}$$

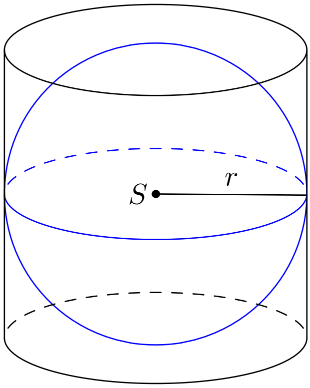
Altså har $\triangle D'E'C$ og $\triangle DEF$ parvis like sidelengder, og av vilkår *i* fra *regel 0.11* er dei da kongruente. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Vi skal nå vise hvorfor volumet V til en kule med radius r er gitt ved formelen:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Vi starter med å se for oss kula omgitt av en sylinder med radius r og høyde $2r$, som i bildet under:

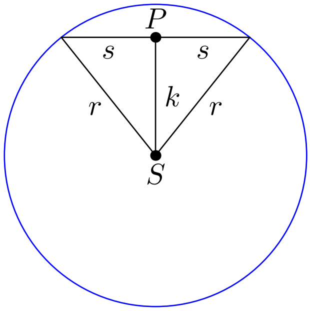


Figur 1

Volumet til en sylinder kan vi allerede formelen for, og hvis vi kan finne volumet som er inneklemt mellom sylinderen og kula, har vi det vi trenger. For da må jo volumet til kula være lik volumet til sylinderen minus det inneklemte volumet:

$$\text{volum til kule} = \text{volum til sylinder} - \text{inneklemt volum}$$

Tenk nå at vi kutter figuren i ??kule fra toppen og rett ned gjennom sentrum av kula. Dette kaller vi et *vertikalt tverrsnitt*. Hvis vi ser på dette tverrsnittet rett fra siden, vil sylinderen se ut som en firkant og kula som en sirkel:



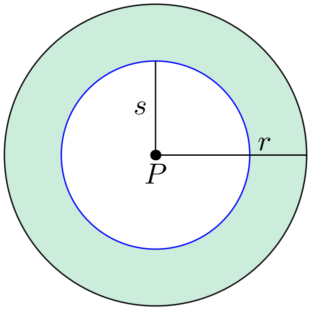
Figur 2

På dette tverrsnittet vandrer vi en lengde k rett opp fra sentrum til et punkt P. Den halve bredden til kula i dette punktet kaller vi for s.

Vi kan da lage oss to rettvinklede trekanter av k, r og s. Pytagoras' setning forteller oss da at:

$$s = \sqrt{r^2 - k^2}$$

Videre forestiller vi oss at vi igjen kutter figuren i ??kule, men denne gangen rett fra siden og gjennom punktet P. Det vi da får, kaller vi et *horisontalt tverrsnitt*. Studerer vi dette tverrsnittet ovenfra får vi en figur som dette:



Figur 3

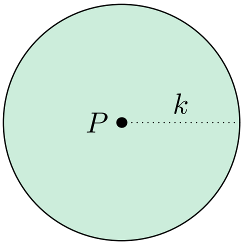
Tverrsnittsarealet klemt mellom kula og sylinderen har vi gitt en lys grønnfarge, dette arealet må være tverrsnittsarealet til sylinderen minus tverrsnittsarealet til kula (vi dropper "tverrsnitt" foran i ligningen):

$$\text{inneklemt areal} = \text{areal til sylinder} - \text{areal til kule}$$

Men radiusen til sylinderen er r overalt, dette må bety at arealet til alle tverrsnitt av sylinderen er πr^2. Når vi står i punktet P vil kula derimot ha bredden $2s$, noe som betyr at tverrsnittsarealet til kula må være lik πs^2. Vi er altså klare til å regne ut det inneklemte arealet (husk at $s = \sqrt{r^2 - k^2}$):

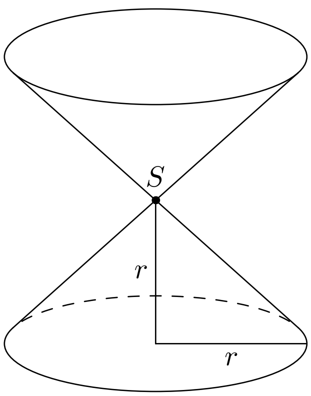
$$\begin{aligned}
\text{inneklemt areal} &= \pi r^2 - \pi s^2 \\
&= \pi r^2 - \pi \left(\sqrt{r^2 - k^2}\right)^2 \\
&= \pi r^2 - \pi(r^2 - k^2) \\
&= \pi r^2 - \pi r^2 + \pi k^2 \\
&= \pi k^2
\end{aligned}$$

Det inneklemte arealet i punktet P er altså det samme som arealet til en sirkel med radius k!



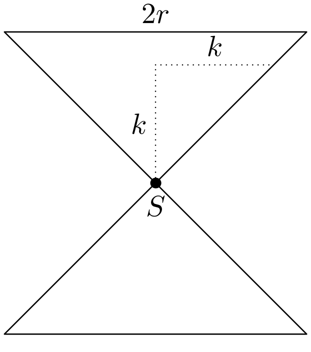
Figur 4: Samme areal som det grønne arealet i ??tverrar.

Og bedre blir det! Vi tenker oss nå to kjegler, begge med både høyde og radius lik r, satt med spissene mot hverandre i samme sentrum som i ??kule.



Figur 5

Det *vertikale tverrsnittet* av denne figuren blir seende slik ut:



Figur 6

Sett rett fra siden får vi to likebeinte trekanter, som igjen kan deles inn i fire likebeinte trekanter. Vi kan da bruke formlikhet til å vise at hvis vi går k rett opp eller ned fra sentrum, så er avstanden ut til siden også k.

Dette betyr at det *horisontale tverrsnittsarealet* til kjeglene er πk^2, akkurat som det inneklemte tverrsnittsarealet fra ??tverrar. Altså er det horisontale tverrsnittsarealet til figuren i ??kjegle og tverrsnittsarealet til den inneklemt figuren fra ??kule det samme overalt. Og siden de har samme høyde ($2r$), må dette bety at volumet også er det samme! Volumet til figuren fra ??kjegle blir enkelt og greit volumt til de to kjeglene:

$$
\begin{aligned}
\text{volumet til figuren i ??kjegle} &= \frac{\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^3}{3} \\
&= \frac{2\pi r^3}{3}
\end{aligned}
$$

Og da gjenstår det bare å trekke dette volumet fra volumet til sylinderen ($2\pi r^3$) for å finne volumet til kula:

$$
\begin{aligned}
\text{volumet til kula} &= 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^2}{3} \\
&= \frac{6\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3} \\
&= \frac{4\pi r^3}{3}
\end{aligned}
$$