0.1 Introduksjon

Eit kvart matematisk uttrykk som inneheld $=$ er ei *likning*, likevel er ordet likning tradisjonelt knytt til at vi har eit *ukjend* tal.

Sei at vi ønsker å finne eit tal som er slik at viss vi legg til 4, så får vi 7. Dette talet kan vi kalle for kva som helst, men det vanlegaste er å kalle det for x, som altså er det ukjende talet vårt. Likninga vår kan no skrivast slik:

$$x + 4 = 7$$

x-verdien[1] som gjer at det blir same verdi på begge sider av likskapsteiknet kallast *løysinga* av likninga. Det er alltids lov til å sjå eller prøve seg fram for å finne verdien til x. Kanskje har du allereie merka at $x = 3$ er løysinga av likninga, sidan

$$3 + 4 = 7$$

Men dei fleste likningar er det vanskelig å sjå eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til meir generelle løysingsmetodar. Eigentleg er det berre eitt prinsipp vi følg:

> Vi kan alltid utføre ein matematisk operasjon på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi utfører den også på den andre sida.

Dei matematiske operasjonane vi har presentert i denne boka er dei fire rekneartane. Med desse lyd prinsippet slik:

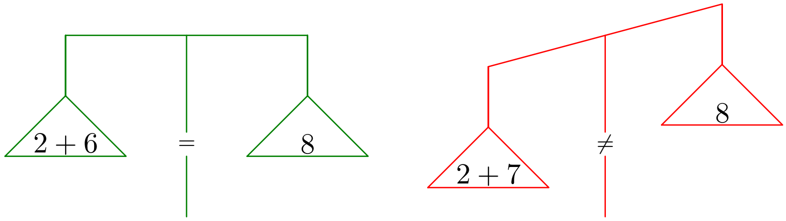
> Vi kan alltid legge til, trekke ifrå, gonge eller dele med eit tal på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi gjer det også på den andre sida.

Prinsippet følg av tydinga til $=$. Når to uttrykk har same verdi, må dei naudsynleg fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører dei same matematiske operasjonane på dei. I komande seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for kvar enkelt rekneoperasjon, men viss du føler dette allereie gir god meining kan du med fordel hoppe til *seksjon 0.3*.

[1] I andre tilfelle kan det vere fleire verdiar.

0.2 Løysing ved dei fire rekneartane

I figurane til denne seksjonen skal vi forstå likningar ut ifrå eit vektprinsipp. $=$ *vil da indikere*[1] *at det er like mykje vekt (lik verdi) på venstre side som på høgre side.*

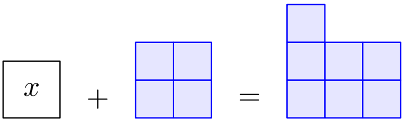


Addisjon og subtraksjon; tal som skifter side

Første eksempel

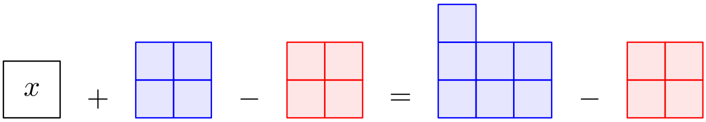
Vi har allereie funne løysinga på denne likninga, men lat oss løyse den på ein annan måte[2]:

$$x + 4 = 7$$



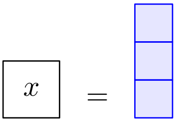
Det blir tydeleg kva verdien til x er viss x står aleine på ei av sidene, og x blir isolert på venstresida viss vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresida, må vi ta bort 4 fra høgresida òg, skal begge sidene ha same verdi.

$$x + 4 - 4 = 7 - 4$$



Da $4 - 4 = 0$ og $7 - 4 = 3$, får vi at

$$x = 3$$



---

[1] $\neq$ er symbolet for "er *ikkje* lik".

[2] *Merk:* I tidlegare figurar har det vore samsvar mellom størrelsen på rutene og (tal)verdien til talet dei symboliserer. Dette gjeld ikkje rutene som representerer x.

Dette kunne vi ha skrive noko meir kortfatta slik:

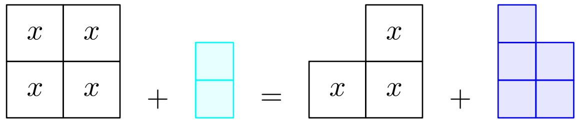
$$
\begin{aligned}
x + 4 &= 7 \\
x &= 7 - 4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Mellom første og andre linje er det vanleg å seie at *4 har skifta side, og derfor også fortegn (fra + til −).*

Andre eksempel

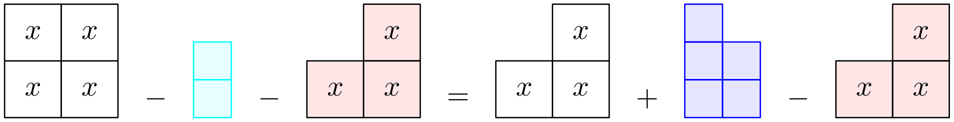
Lat oss gå videre til å sjå på ei litt vanskelegare likning[1]:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



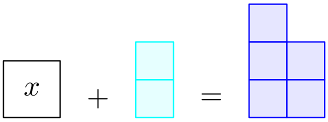
For å skaffe eit uttrykk med x berre på éi side, tar vi vekk $3x$ på begge sider:

$$4x - 2 - {\color{red}3x} = 3x + 5 - {\color{red}3x}$$



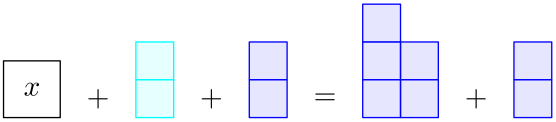
Da får vi at

$$x - 2 = 5$$



For å isolere x, legg vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høgre side:

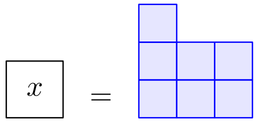
$$x - 2 + {\color{blue}2} = 5 + {\color{blue}2}$$



[1] Legg merke til at figuren illustrerer $4x + (-2)$ (sjå *seksjon* **??**) på venstre side. Men $4x + (-2)$ er det same som $4x - 2$ (sjå *seksjon* **??**).

Da får vi at

$$x = 7$$



Stega vi har tatt kan oppsummerast slik:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. figur} \\ 4x - 3x - 2 &= 3x - 3x + 5 && \text{2. figur} \\ x - 2 &= 5 && \text{3. figur} \\ x - 2 + 2 &= 5 + 2 && \text{4. figur} \\ x &= 7 && \text{5. figur} \end{aligned}$$

Dette kan vi på ein forenkla måte skrive slik:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 3x + 5 \\ 4x - 3x &= 5 + 2 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

0.1 Flytting av tal over likskapsteiknet

I ei likning ønsker vi å samle alle x-ledd og alle kjente ledd på kvar si side av likskapsteiknet. Skifter eit ledd side, skifter det forteikn.

Eksempel 1

Løys likninga

$$3x + 3 = 2x + 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 5 - 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Svar:

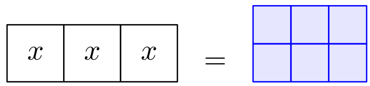
$$\begin{aligned} -4x + 5x &= 12 + 3 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Gonging og deling

Deling

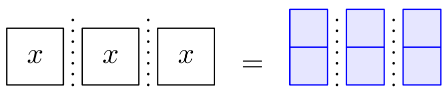
Hittil har vi sett på likningar der vi endte opp med éin x på den eine sida av likhetsteiknet. Ofte har vi fleire x-ar, som for eksempel i likninga

$$3x = 6$$



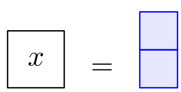
Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi éin x i kvar gruppe. Deler vi også høgresida inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den same verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$



Altså er

$$x = 2$$



Lat oss oppsummere utrekninga vår:

$$3x = 6 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \qquad \text{2. figur}$$

$$x = 2 \qquad \text{3. figur}$$

Du huskar kanskje at vi gjerne skriv

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$$

0.2 Deling på begge sider av ei likning

Vi kan dele begge sider av ei likning med det same talet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$4x = 20$$

Svar:

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$2x + 6 = 3x - 2$$

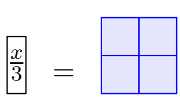
Svar:

$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad (-x = -1x)$$
$$x = 8$$

Gonging

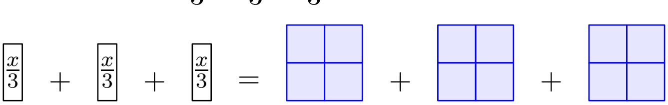
Det siste tilfellet vi skal sjå på er når likningar inneheld brøkdelar av den ukjende, som for eksempel i likninga

$$\frac{x}{3} = 4$$



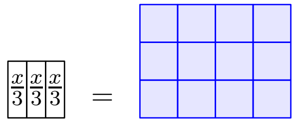
Vi kan få éin x på venstresida viss vi legg til to eksemplar av $\frac{x}{3}$. Likninga fortel oss at $\frac{x}{3}$ har same verdi som 4. Dette betyr at for kvar $\frac{x}{3}$ vi legg til på venstresida, må vi legge til 4 på høgresida, skal sidene ha same verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$



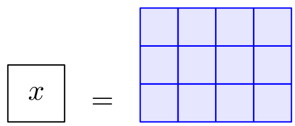
Vi legger no merke til at $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$ og at $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$:

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$



Og da $\frac{x}{3} \cdot 3 = x$ og $4 \cdot 3 = 12$, har vi at

$$x = 12$$



Ei oppsummering av stega våre kan vi skrive slik:

$$\frac{x}{3} = 4 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4 \qquad \text{2. figur}$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3 \qquad \text{3. figur}$$

$$x = 12 \qquad \text{4. figur}$$

Dette kan vi kortare skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

0.3 Gonging på begge sider av ei likning

Vi kan gonge begge sider av ei likning med det same talet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} &= 2 \cdot 5 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{7x}{10} - \frac{x}{10} &= 13 + 5 \\ \frac{6x}{10} &= 18 \\ \frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} &= 18 \cdot 10 \\ 6x &= 180 \\ \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} &= \frac{180}{6} \\ x &= 30 \end{aligned}$$

0.3 Løysingsmetodane oppsummert

0.4 Løysingsmetodar for likningar

Vi kan alltid

- addere eller subtrahere begge sider av ei likning med det same talet. Dette er ekvivalent til å flytte eit ledd fra den eine sida av likninga til den andre, så lenge vi også skiftar forteikn på leddet.
- gonge eller dele begge sider av ei likning med det same tallet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 6 + 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$9 - 7x = 8x + 3$$

Svar:

$$\begin{aligned} 9 - 7x &= -8x + 3 \\ 8x - 7x &= 3 - 9 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Løys likninga

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 10x - 20 &= 7x - 5 \\ 10x - 7x &= 20 - 5 \\ 3x &= 15 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Eksempel 4

Løys likninga

$$15 - 4x = x + 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 15 - 5 &= x + 4x \\ 10 &= 5x \\ \frac{10}{5} &= \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Eksempel 5

Løys likninga

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} &= 20 + 8 \\ \frac{\cancel{7}x}{9 \cdot \cancel{7}} &= \frac{28}{7} \\ \frac{x}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} &= 4 \cdot 9 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Eksempel 6

Løys likninga

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Svar:

Får å unngå brøkar, gongar vi begge sider med fellesnemnaren 12:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 &= \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12 \\ \frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 &= \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \\ 4x + 2 &= 5x + 24 \\ 4x - 5x &= 24 - 2 \\ -x &= 22 \\ \frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} &= \frac{22}{-1} \\ x &= -22\end{aligned}$$

Tips

Mange liker å lage seg ein regel om at ”vi kan gonge eller dele alle ledd med det same talet”. I eksempelet over kunne vi da hoppa direkte til andre linje i utrekninga.

Eksempel 7

Løys likninga

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Svar:

Vi gongar begge sider med fellesnemnaren $2x$:

$$\begin{aligned}2x\left(3 - \frac{6}{x}\right) &= 2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right) \\ 6x - 12 &= 4x + 5 \\ 6x - 4x &= 5 + 12 \\ 2x &= 17 \\ x &= \frac{17}{2}\end{aligned}$$

0.4 Potenslikningar

Lat oss løyse likninga

$$x^2 = 9$$

Dette kallast ei *potenslikning*. Potenslikningar er vanlegvis vanskelege å løyse berre ved hjelp av dei fire rekneartane, så her må vi også nytte oss av potensreglar. Vi opphøg begge sidene av likninga med den omvende brøken[1] til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av *Regel* **??** er

$$\begin{aligned} x^{2\cdot\frac{1}{2}} &= 9^{\frac{1}{2}} \\ x &= 9^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Sidan $3^2 = 9$, er $9^{\frac{1}{2}} = 3$. No legg vi merke til dette:

Prinsippet erklært på side 1 seier at vi kan, som vi no gjorde, utføre ein matematisk operasjon på begge sider av likninga. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikkje at alle løysingar er funne.

Når det kjem til vår likning, er $x = 3$ ei løysing. For orden si skuld kan vi bekrefte dette med utrekninga

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også ei løysing av likninga vi starta med!

0.5 Potenslikningar

Ei likning som kan bli skriven som

$$x^a = b$$

der a og b er konstantar, er ei *potenslikning*.

Likninga har a forskjellige løysingar.

[1]Hugs at $2 = \frac{2}{1}$.

Eksempel 1

Løys likninga

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Sidan $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$, har vi at

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = -4$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$3x^2 + 1 = 7$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 - 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad x = -\sqrt{2}$$

Merk

Sjølv om likninga

$$x^a = b$$

har a løysingar, er ikkje alle naudsynleg *reelle*[1]. I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tal som løyser likninga. For eksempel har likninga

$$x^3 = 8$$

3 løysingar, men vi nøyer oss med å finne at $x = 2$ er ei løysing.

---

[1] Som tidlegare nemnd, *reelle* og *imaginære* tal er noko vi ikkje går nærare inn på i denne boka

0.5 Ulikskapar

0.5.1 Introduksjon

Mens ei likning viser to uttrykk som er like, vil ein *ulikskap* vise to uttrykk som er ulike. For å skrive ulikskapar har vi desse symbola:

$<$	"er mindre enn"
$>$	"er større enn"
$\leq$	"er mindre enn eller lik"
$\geq$	"er større enn eller lik"

Ein ulikskap mellom to tal er avgjort av verdien og forteiknet til tala:

0.6 Uliskapar

- Eit positivt tal er større enn eit negativt tal.
- For tal med same forteikn, er det talet med størst verdi som er størst.
- 0 er større enn eit kvart negativt tal og mindre enn eit kvart positivt tal.

Eksempel 1

$$9 > 8$$

Eksempel 2

$$-9 < -8$$

Eksempel 3

$$-7 < 1$$

Eksempel 4

$$a - 3 \geq 1$$

Undersøk om ulikskapen er sann viss

a) $a = 5$

b) $a = 4$

c) $a = 3$

Svar:

a) Når $a = 5$, har vi at

$$\begin{aligned} 5 - 3 &\geq 1 \\ 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Sidan $2 < 1$, er ulikskapen sann.

b) Når $a = 4$, har vi at

$$\begin{aligned} 4 - 3 &\geq 1 \\ 1 &\geq 1 \end{aligned}$$

Sidan $1 = 1$, er ulikskapen sann.

c) Når $a = 5$, har vi at

$$\begin{aligned} 5 - 3 &\geq 1 \\ 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Sidan $2 < 1$, er ulikskapen sann.

d) Når $a = 5$, har vi at

$$\begin{aligned} 5 - 3 &\geq 1 \\ 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Sidan $2 < 1$, er ulikskapen sann.

0.5.2 Løysing av ulikskapar

Vi kan løyse ulikskapar ved å bruke metodane fra *Regel 0.4*, men med eitt unntak; *om vi gongar eller deler med negative tal, skiftar ulikskapen symbol*. For å forklare kva som skjer, lat oss bruke den enkle ulikskapen

$$9 > 8$$

Om vi gongar begge sider av ulikskapen med -1, får vi -9 på venstre side og -8 på høgre side. Men $-9 < -8$. Symbolet fra vår opprinnelege ulikskap har altså endra seg frå $>$ til $<$

0.7 Løysing av ulikskapar

Når ein gongar eller deler begge sider av ein ulikskap med eit negativt tal, vil $>$ endre seg til $<$, og omvend.