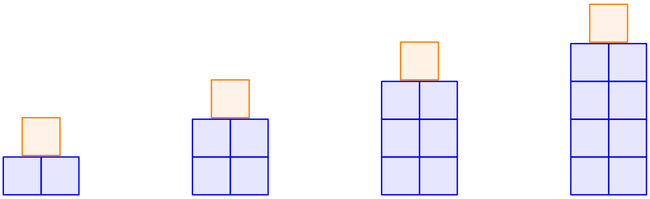
0.1 Introduksjon

Variabler er verdier som forandrar seg. En verdi som forandrar seg i takt med at en variabel forandrar seg, kaller vi en *funksjon*.



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4*

I figurene over forandrer antallet ruter seg etter et bestemt mønster. Matematisk kan vi skildre dette mønsteret slik:

$$\begin{aligned}\text{Antal ruter i } \textit{Figur 1} &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ \text{Antal ruter i } \textit{Figur 2} &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ \text{Antal ruter i } \textit{Figur 3} &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ \text{Antal ruter i } \textit{Figur 4} &= 2 \cdot 4 + 1 = 9\end{aligned}$$

For en figur med et vilkårlig nummer x har vi at

$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } x = 2x + 1$$

Antall ruter forandrar seg altså i takt med at x forandrer seg, og da sier vi at

> ”Antall ruter i *Figur* x” er en funksjon av x

> $2x + 1$ er *funksjonsuttrykket* til funksjonen ”Antall ruter i *Figur* x”

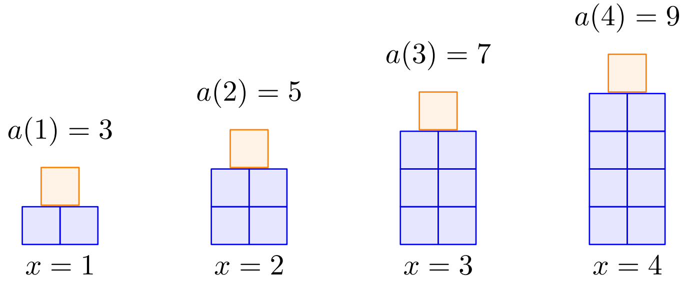
Generelle uttrykk

Skulle vi jobbet videre med funskjonen vi akkurat har sett på, ville det blitt tungvint å heile tiden måtte skrive ”Antall ruter i *Figur* x”. Det er vanleg å kalle også funksjoner bare for en bokstav, og i tillegg skrive variabelen funskjonen er avhengig av i parentes. La oss nå omdøpe funksjonen ”Antal ruter i *Figur* x” til $a(x)$. Da har vi at

$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur } x = a(x) = 2x + 1$$

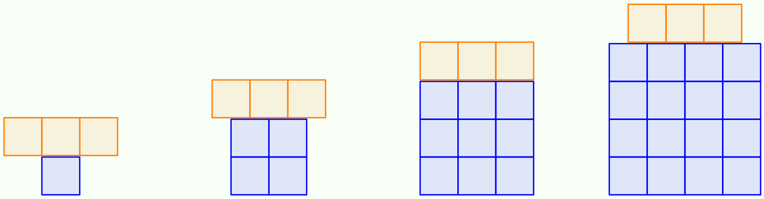
Hvis vi skriver $a(x)$, men erstatter x med et bestemt tall, betyr det at vi skal erstatte x med dette tallet i funksjonsuttrykket vårt:

$$\begin{aligned} a({\color{blue}1}) &= 2 \cdot {\color{blue}1} + 1 = 3 \\ a({\color{blue}2}) &= 2 \cdot {\color{blue}2} + 1 = 5 \\ a({\color{blue}3}) &= 2 \cdot {\color{blue}3} + 1 = 7 \\ a({\color{blue}4}) &= 2 \cdot {\color{blue}4} + 1 = 9 \end{aligned}$$



Eksempel

La antall ruter i mønsteret under være gitt av funksjonen $a(x)$.



a) Finn uttrykket for $a(x)$.

b) Hvor mange ruter er det når $x = 10$?

c) Hva er verdien til x når $a(x) = 628$?

Svar:

a) Vi legger merke til at

- Når $x = 1$, er det $1 \cdot 1 + 3 = 4$ ruter.
- Når $x = 2$, er det $2 \cdot 2 + 3 = 7$ ruter.
- Når $x = 3$, er det $3 \cdot 3 + 3 = 12$ ruter.
- Når $x = 4$, er det $4 \cdot 4 + 3 = 17$ ruter.

Altså er

$$a(x) = x \cdot x + 3 = x^2 + 3$$

b)

$$a(10) = 10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$$

Når $x = 10$, er det 103 ruter.

c) Vi har likningen

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 628 \\ x^2 &= 625 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = 15 \qquad \vee \qquad x = -15$$

Siden vi søker en positiv verdi for x, er $x = 15$.

0.2 Lineære funksjoner og grafer

Når vi har en variabel x og en funksjon $f(x)$, har vi to verdier; verdien til x og den tilhørende verdien til $f(x)$. Disse parene av verdier kan vi sette inn i et koordinatsystem[1], og da får vi *grafen* til $f(x)$.

La oss bruke funksjonen

$$f(x) = 2x - 1$$

som eksempel. Vi har at

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Disse parene av verdiar kan vi sette opp i en tabell:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	3	5

Tabellen over gir punkta

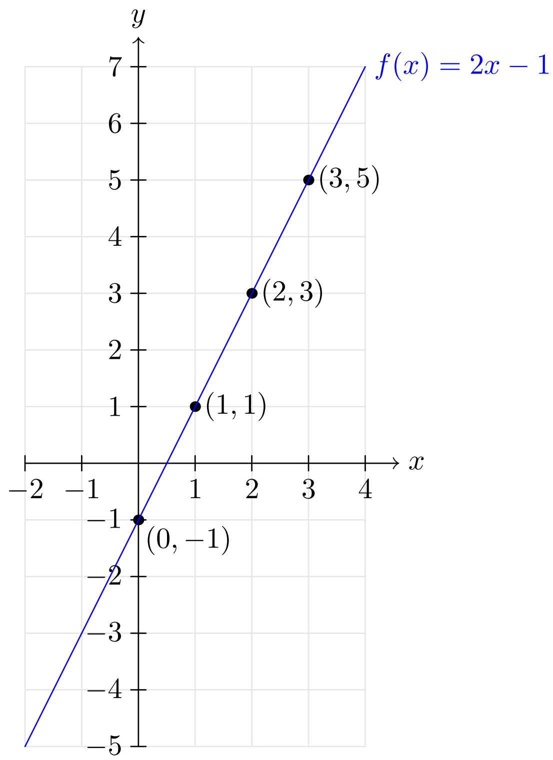
$$(0, -1) \qquad (1, 1) \qquad (2, 3) \qquad (3, 5)$$

Vi plasserer nå punktene i et koordinatsystem (se figur på side 5). I samband med funksjoner er det vanlig å kalle horisontalaksen og vertikalaksen for henholdsvis x-aksen og y-aksen. Grafen til $f(x)$ er nå en tenkt strek som går gjennom alle de uendelig mange punktene vi kan lage av x-verdier og de tilhørende $f(x)$-verdiane. Vår funksjon er en *lineær* funksjon, noe som betyr at grafen er ei rett linje. Altså kan grafen tegnes ved å tegne linja som går gjennom punktene vi har funnet.

Som vi har vært inne på før, kan vi aldri tegne ei hel linje, bare et utklipp av henne. Dette gjelder som regel også for grafer. I figuren på side 5 har vi tegnet grafen til $f(x)$ for x-verdiar mellom -2 og 4. At x er i dette *intervallet* kan vi skrive som[2] $-2 \leq x \leq 4$ eller $x \in [-2, 4]$.

[1] Se *seksjon* **??**.

[2] Se symbolforklaringer på side **??**.


y
x
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−2
−1
1
2
3
4
$f(x) = 2x - 1$
$(3, 5)$
$(2, 3)$
$(1, 1)$
$(0, -1)$

0.1 Lineære funksjoner

En funksjon på formen

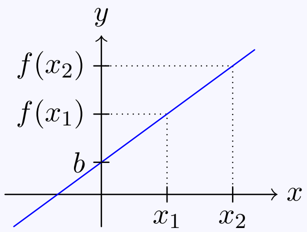
$$f(x) = ax + b$$

der a og b er konstanter, er en *lineær* funksjon med *stigningstall* a og *konstantledd* b.

Grafen til en lineær funksjon er ei rett linje som går gjennom punktet $(0, b)$.

For to forskjellige x-verdier, x_1 og x_2, er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Eksempel 1

Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonene.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = -3 + \frac{7}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$j(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

Svar:

- $f(x)$ har stigningstall 2 og konstantledd 1.
- $g(x)$ har stigningstall -3 og konstantledd $\frac{7}{2}$.
- $h(x)$ har stigningstall $\frac{1}{4}$ og konstantledd $-\frac{5}{6}$.
- $j(x)$ har stigningstall $-\frac{1}{2}$ og konstantledd 4.

Eksempel 2

Tegn grafen til

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

for $x \in [-5, 6]$.

Svar:

For å tegne grafen til en lineær funksjon trenger vi bare å finne to punkt som ligger på grafen. Hvilke to punkt dette er, er det fritt å velge, så for enklest mulig utregning starter vi med å finne punktet der $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$$

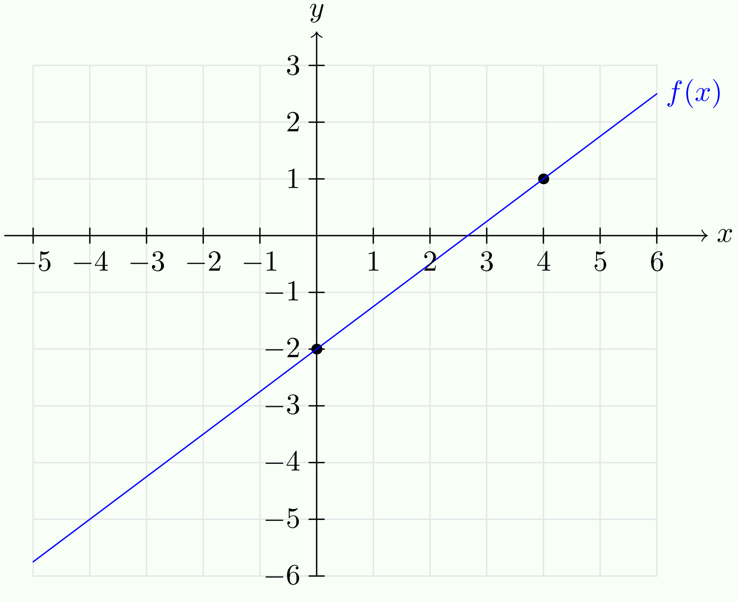
Videre velger vi $x = 4$, siden dette også gir oss en enkel utregning:

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$$

Nå har vi informasjonen vi trenger, og for ordens skyld setter vi den inn i en tabell:

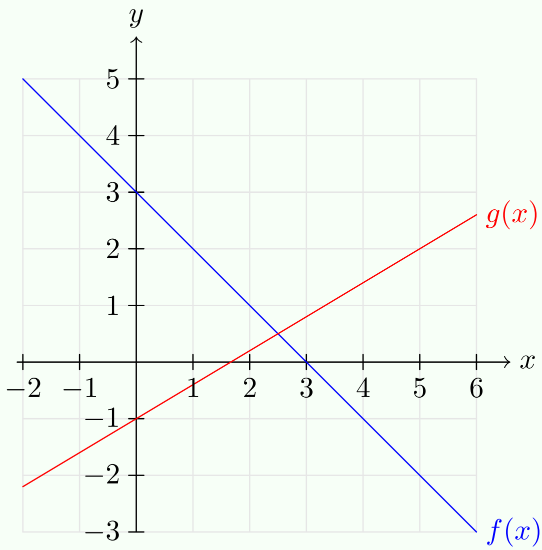
x	0	4
$f(x)$	-2	1

Vi tegner punktene og trekker ei linje gjennom dem:



Eksempel 3

Finn funksjonsuttrykka til $f(x)$ og $g(x)$.



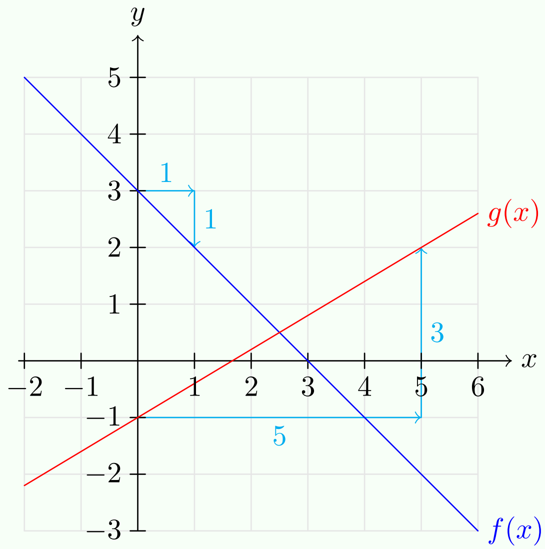
Svar:

Vi starter med å finne funksjonsuttrykket til $f(x)$. Punktet $(0, 3)$ ligger på grafen til $f(x)$ (se også figur på neste side). Da vet vi at $f(0) = 3$, og dette må bety at 3 er konstantleddet til $f(x)$. Videre ser vi at punktet $(1, 2)$ også ligger på grafen til $f(x)$. Stigningstallet til $f(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2-3}{1-0} = -1$$

Altså er

$$f(x) = -x + 3$$



Vi går så over til å finne uttrykket til $g(x)$. Punktet $(0, -1)$ ligger på grafen til $g(x)$. Da vet vi at $f(0) = -1$, og dette må bety at -1 er konstantleddet til $g(x)$. Videre ser vi at punktet $(5, 2)$ også ligger på grafen til $g(x)$. Stigningstallet til $g(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2 - (-1)}{5 - 0} = \frac{3}{5}$$

Altså er

$$g(x) = \frac{3}{5}x + 1$$

0.1 Lineære funksjoner (forklaring)

Uttrykk for a

Gitt en lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

For to forskjellige x-verdier, x_1 og x_2, har vi at

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{1}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b \tag{2}$$

Vi trekker (1) fra (2), og får at

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

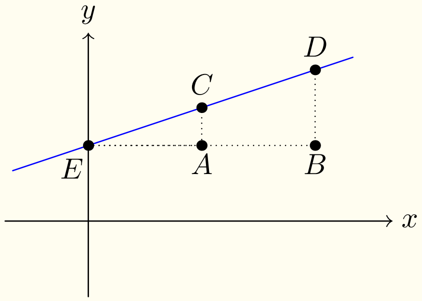
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \tag{3}$$

Grafen til en lineær funksjon er ei rett linje

Gitt en lineær funksjon $f(x) = ax + b$ og to forskjellige x-verdiar x_1 og x_2. Vi setter $A = (x_1, b)$, $B = (x_2, b)$, $C = (b, f(x_1))$, $D = (0, f(x_2))$ og $E = (0, b)$.



Av (3) har vi at

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = a$$

$$\frac{ax_1 + b - b}{x_1} = a$$

$$\frac{ax_1}{x_1} = a \tag{4}$$

Tilsvarende er

$$\frac{ax_2}{x_2} = a \tag{5}$$

Videre har vi at

$$AC = f(x_1) - b = ax_1$$

$$BD = f(x_2) - b = ax_2$$

$$EA = x_1$$

$$EB = x_2$$

Av (4) og (5) har vi at

$$\frac{ax_1}{x_1} = \frac{ax_2}{x_2}$$

Dette betyr at

$$\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB}$$

I tillegg er $\angle A = \angle B$, altså oppfyller $\triangle EAC$ og $\triangle EBD$ vilkår iii fra *Regel* **??**, og dermed er trekantane formlike. Dette betyr at C og D ligger på linje, og denne linja må vere grafen til $f(x)$.