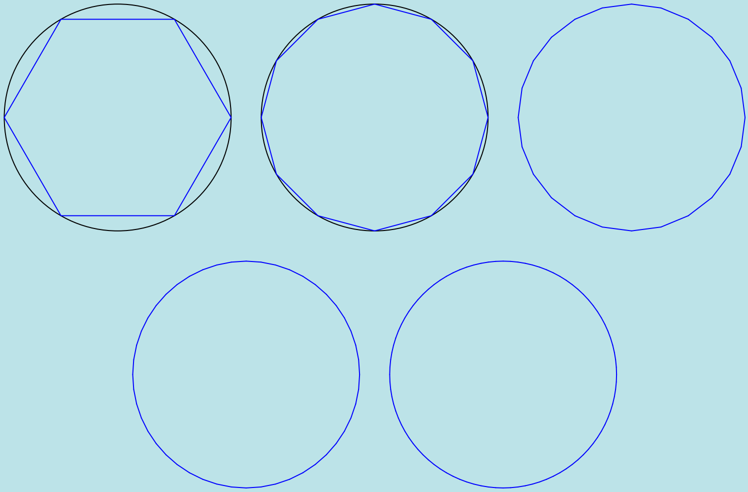
Matematikken sine byggesteinar



Sindre Sogge Heggen

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"*

*"Det er ikkje å vite, men å lære,
ikkje å eige, men å eigne til seg,
ikkje å vere til stades, men å komme dit,
som gjev den største gleda."*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laga av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skriven i LaTeX og figurane er lagd vha. Asymptote.

07.04.2021

Forord

Matematikk har eit enormt omfang av forgreiningar og anvendingar, men det aller meste bygger på ei overkommeleg mengde med grunnprinsipp, og det er desse eg ønsker å presentere i denne boka. Eit prinsipp i oppsummert form har eg valgt å kalle ein *regel*. Reglar finn du i blå tekstboksar, som oftast etterfulgt av eit eksempel på bruk av regelen. Eitt av hovudmåla til denne boka er å gi lesaren ei forståing av kvifor reglane er som dei er. I kapittel 1 - 5 vil du finne forklaringar[1] i forkant av kvar regel, mens i kapittel 6 finn du forklaringar enten i forkant av eller direkte etter ein regel (og eventuelle eksempel). Fra og med kapittel 7 er nokre forklaringar lagt til den avsluttande seksjonen *Forklaringar*, dette indikerer at dei kan vere noko krevande å forstå og/eller at regelen er så intuitiv at mange vil oppleve det som overflødig å få den forklart.

Boka si oppbygging

Boka er delt inn i ein *Del I* og ein *Del II*. *Del I* handlar i stor grad om å bygge ei grunnleggande forståing av tala våre, og korleis vi rekner med dei. *Del II* introduserer konseptet algebra og dei nært slekta temaa potensar, likningar og funskjonar. I tillegg har både *Del I* og *Del II* avsluttande kapittel som handlar om geometri.

Obs! Denne boka er fri for både oppgåver og eksempler på praktiske anvendingar av matematikk. Dette er to viktige element som med tida vil komme, enten integrert i denne boka eller som ei frittståande bok.

[1] Å *forklare* reglane i staden for å *bevise* dei er eit bevisst valg. Eit bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må definerast både på førehand og undervegs i ei utleiing av ein regel, noko som kan føre til at forståinga av hovudpoenget drukner i smådetaljar. Nokon av forklaringene vil likevel vere gyldige som bevis.

Kjære lesar.

Denne boka er i utgangspunktet gratis å bruke, men eg håper du forstår kor mykje tid og ressursar eg har brukt på å lage ho. Eg ønsker å fortsette arbeidet med å lage lærebøker som er med på å gjere matematikk lett tilgjengeleg for alle, men det kan bli vanskeleg med mindre arbeidet gir ei viss inntekt. Viss du ender opp med å like boka, håper eg derfor du kan donere 50 kr via Vipps til 90559730 eller via PayPal. Ver venleg å markere donasjonen med "Mattebok" ved bruk av Vipps. På førehand takk!

Boka blir oppdatert så snart som råd etter at skrivefeil og liknande blir oppdaga, eg vil derfor råde alle til å laste ned ein ny versjon i ny og ne ved å følgje denne lenka.

Bokmålsversjonen av boka finn du .

For spørsmål, ta kontakt på mail: `sindre.heggen@gmail.com`

Takk til dei som har komme med gode innspel og korreksjonar

Anne Jordal Myrset

Charlotte Merete Dahl

Symbol

$=$	"er lik"
$<$	"er mindre enn"
$>$	"er større enn"
$\leq$	"er mindre enn eller lik"
$\geq$	"er større enn eller lik"
$\in$	"er inneheld i"
$\vee$	"eller"
$\wedge$	"og"
$[a, b]$	lukka intervall fra og med a til og med b
$\|a\|$	lengda/talverdien til a
$\perp$	"vinkelrett på"
$\parallel$	"parallell med"
$\triangle$	"trekant"
$\square$	"firkant"

Innhald

I Tal, rekning og geometri 7

1 Tala våre **8**
1.1 Likskapsteiknet, mengder og tallinjer 9
1.2 Tal, siffer og verdi 11
1.3 Koordinatsystem 14

2 Dei fire rekneartane **15**
2.1 Addisjon 16
2.2 Subtraksjon 18
2.3 Multiplikasjon (Gonging) 20
2.4 Divisjon (deling) 23

3 Faktorisering og reknerekkefølge **26**
3.1 Faktorisering 27
3.2 Reknerekkefølge 28

4 Brøk **34**
4.1 Introduksjon 35
4.2 Verdi, utviding og forkorting av brøk 38
4.3 Addisjon og subtraksjon 41
4.4 Brøk gonga med heiltal 45
4.5 Brøk delt med heiltal 47
4.6 Brøk gonga med brøk 50
4.7 Kansellering av faktorer 51
4.8 Deling med brøk 54
4.9 Rasjonale tal 57

5 Negative tal **58**
5.1 Introduksjon 59
5.2 Dei fire rekneartane med negative tal 61
5.3 Negative tal som mengde 67

6 Geometri **68**
6.1 Omgrep 69
6.2 Eigenskapar for trekantar og firkantar 78
6.3 Omkrins 82
6.4 Areal 83

II Algebra og geometri **90**

7 Algebra **91**
7.1 Introduksjon . . . 92
7.2 Potensar . . . 97
7.3 Irrasjonale tal . . . 105

8 Likningar **108**
8.1 Introduksjon . . . 109
8.2 Løysing ved dei fire rekneartane . . . 110
8.3 Løysingsmetodane oppsummert . . . 117
8.4 Potenslikningar . . . 120

9 Funksjonar **122**
9.1 Introduksjon . . . 123
9.2 Lineære funksjonar og grafar . . . 126

10 Geometri **134**
10.1 Formlar for areal og omkrins . . . 135
10.2 Kongruente og formlike trekantar . . . 145
10.3 Forklaringar . . . 150

Indeks **166**

Del I

Tal, rekning og geometri

Kapittel 1

Tala våre

1.1 Likskapsteiknet, mengder og tallinjer

Likskapsteiknet

Som namnet tilseier, viser *likskapsteiknet* $=$ til at noko er likt. I kva grad og når ein kan seie at noko er likt er ein filosofisk diskusjon, og innleiingsvis er vi berre prisgitt dette: Kva likskap $=$ sikter til må bli forstått ut ifrå konteksten teiknet blir brukt i. Med denne forståinga av $=$ kan vi studere nokre grunnleggande eigenskaper for tala våre, og så komme tilbake til meir presise tydingar av teiknet.

> **Språkboksen**
>
> Vanlege måtar å seie $=$ på er
>
> - "er lik"
> - "er det same som"

Mengder og tallinjer

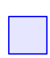
Tal kan representere så mangt. I denne boka skal vi halde oss til to måtar å tolke tala på; tal som ei *mengde* og tal som ei *plassering på ei linje*. Alle representasjonar av tal tek eigentleg utganspunkt i kva forståinga er av tala 0 og 1.

Tal som mengde

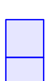
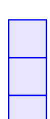
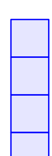
Når vi snakkar om ei mengde, vil talet 0 vere[1] knytt til "ingenting". Ein figur der det ikkje er noko til stades vil slik vere det same som 0:

$$= 0$$

1 vil vi teikne som ei rute:

 $= 1$

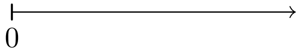
Andre tal vil da vere definert ut ifrå kor mange einarruter (einarar) ein har:

 $= 2$  $= 3$  $= 4$

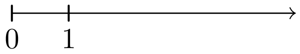
[1] I *kapittel 2* skal vi sjå at det også er andre tolkingar av 0.

Tal som plassering på ei linje

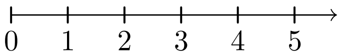
Når vi plasserer tal på ei linje, vil 0 vere utgangspunket vårt:



Så plasserer vi 1 ei viss lengde til høgre for 0:



Andre tal vil da vere definert ut ifrå kor mange einarlengder (einarar) vi er unna 0:



Positive heiltal

Vi skal straks sjå at tal ikkje naudsynleg treng å vere *heile* antal einarar, men tala som *er* det har eit eige namn:

1.1 Positive heiltal

Tal som er eit heilt antal einarar kallast *positive*[1] *heiltal*. Dei positive heiltala er

$$1, 2, 3, 4, 5 \text{ og så vidare.}$$

Positive heiltal blir også kalla *naturlege tal*.

Kva med 0?

Nokre forfattarar inkluderer også 0 i omgrepet naturlege tal. I nokre samanhengar vil dette lønne seg, i andre ikkje.

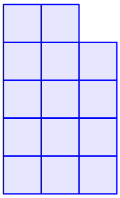
[1] Kva ordet positiv inneber skal vi gjere greie for i *kapittel 5*.

1.2 Tal, siffer og verdi

Tala våre er bygd opp av *siffera* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9, og *plasseringa* av dei. Siffera og deira plassering definerer[1] *verdien* til talet.

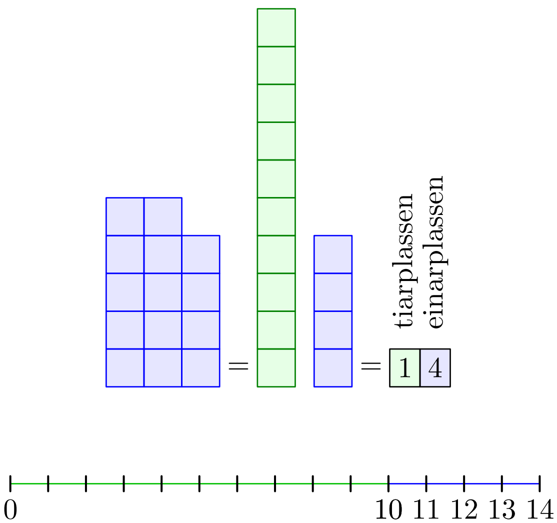
Heiltal større enn 10

Lat oss som eit eksempel skrive talet *fjorten* ved hjelp av sifra våre.

fjorten = 

Vi kan no lage ei gruppe med 10 einarar, i tillegg har vi da 4 einarar. Da skriv vi fjorten slik:

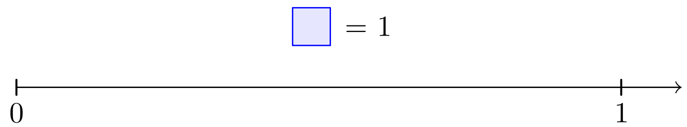
$$\text{fjorten} = 14$$



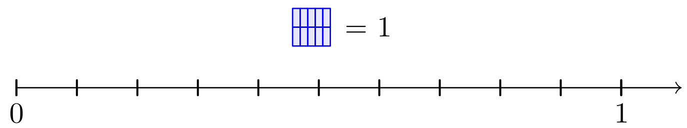
[1]Etterkvart skal vi også sjå at *forteikn* er med på å definere verdien til talet (sjå *kapittel 5*).

Desimaltal

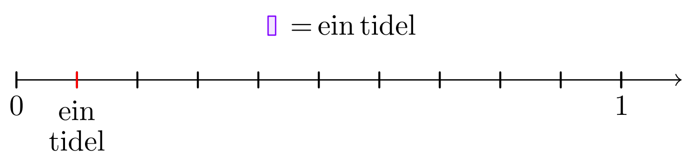
I mange tilfelle har vi ikkje eit heilt antal einarar, og da vil det vere behov for å dele 1 inn i mindre bitar. Lat oss starte med å teikne ein einar:



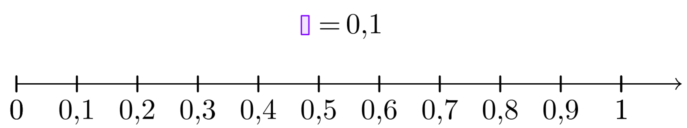
Så deler vi einaren vår inn i 10 mindre bitar:



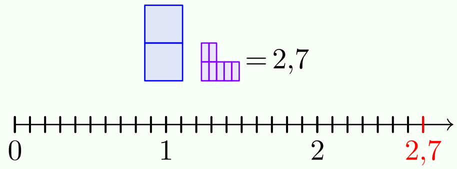
Sidan vi har delt 1 inn i 10 bitar, kallar vi ein slik bit for *ein tidel*:



Tidelar skriv vi ved hjelp av *desimalteiknet* , :



Eksempel



Språkboksen

På engelsk bruker ein punktum . som desimalteikn i staden for komma , :

$$3{,}5 \quad (norsk)$$
$$3.5 \quad (english)$$

Titalssystemet

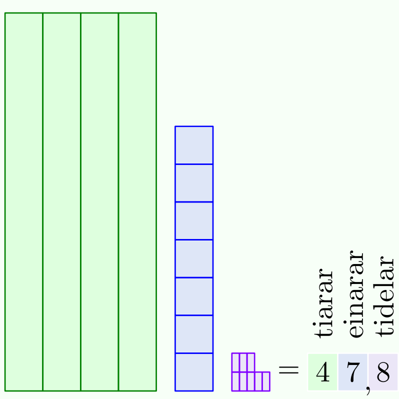
Vi har no sett korleis vi kan uttrykke verdien til tal ved å plassere siffer etter antal tiarar, einarar og tidelar, og det stoppar sjølvsagt ikkje der:

1.2 Titalssystemet

Verdien til eit tal er gitt av siffera $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9, og plasseringa av dei. Med sifferet som angir einarar som utgangspunkt vil

- siffer til venstre (i rekkefølgje) indikere antal tiarar, hundrarar, tusenar osv.
- siffer til høgre (i rekkefølgje) indikere antal tidelar, hundredelar, tusendelar osv.

Eksempel 1



Eksempel 2

tusenar hundrarar tiarar einarar tidelar hundredelar

3805,72

1.3 Koordinatsystem

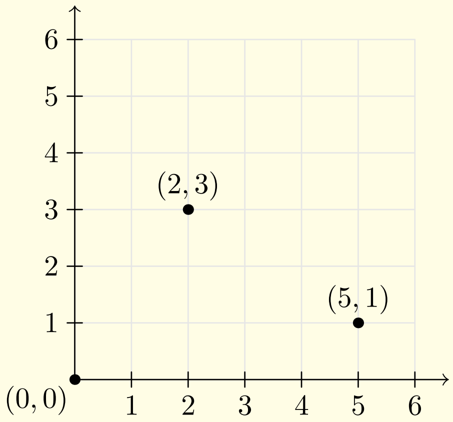
I mange tilfelle er det nyttig å bruke to tallinjer samtidig. Dette kallar vi eit *koordinatsystem*. Vi plasserer da éi tallinje som går *horisontalt* og éi som går *vertikalt*. Ei plassering i eit koordinatsystem kallar vi eit *punkt*.

Strengt tatt fins det mange typar koordinatsystem, men i denne boka bruker vi ordet om berre éin sort, nemleg det *kartesiske koordinatsystem*. Det er oppkalt etter den franske filosofen og matematikaren René Descartes.

Eit punkt skriv vi som to tal inni ein parentes. Dei to tala blir kalla *førstekoordinaten* og *andrekoordinaten*.

- Førstekoordinaten fortel oss kor langt vi skal gå langs horisontalaksen.
- Andrekoordinaten fortel oss kor langt vi skal gå langs vertikalaksen.

I figuren ser vi punkta $(2, 3)$, $(5, 1)$ og $(0, 0)$. Punktet der aksane møtast, altså $(0, 0)$, kallast *origo*.



Kapittel 2

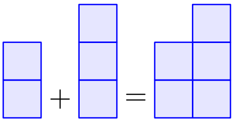
Dei fire rekneartane

2.1 Addisjon

Addisjon med mengder: Å legge til

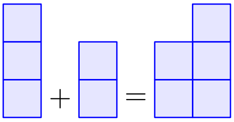
Når vi har ei mengde og skal legge til meir, bruker vi symbolet $+$. Har vi 2 og skal legge til 3, skriv vi

$$2+3=5$$



Rekkefølga vi legg saman tala på har ikkje noko å seie; å starte med 2 og så legge til 3 er det same som å starte med 3 og så legge til 2:

$$3+2=5$$



Språkboksen

Eit addisjonsstykke består av to eller fleire *ledd* og éin *sum*. I reknestykket

$$2+3=5$$

er både 2 og 3 ledd, mens 5 er summen.

Vanlege måtar å seie $2+3$ på er

- ”2 pluss 3”
- ”2 addert med 3”
- ”2 og 3 lagt saman”

2.1 Addisjon er kommutativ

Summen er den same uansett rekkefølge på ledda.

Eksempel

$$2 + 5 = 7 = 5 + 2$$

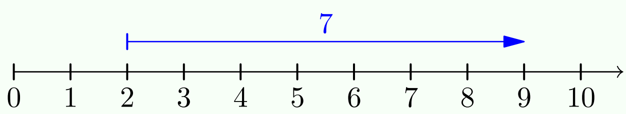
$$6 + 3 = 9 = 3 + 6$$

Addisjon på tallinja: Vandring mot høgre

På ei tallinje vil addisjon med positive tal innebere vandring *mot høgre*:

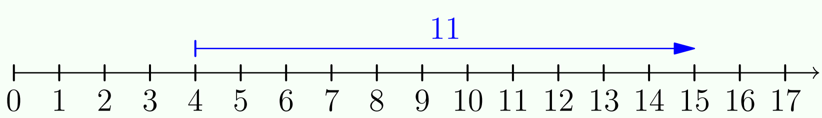
Eksempel 1

$$2 + 7 = 9$$



Eksempel 2

$$4 + 11 = 15$$



Tydinga av $=$

$+$ gir oss moglegheiten til å uttrykke tal på mange forskjellige måtar, for eksempel er $5 = 2 + 3$ og $5 = 1 + 4$. I denne samanhengen vil $=$ bety ”har same verdi som”. Dette gjeld også ved subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, som vi skal sjå på i dei neste tre seksjonane.

2.2 Subtraksjon

Subtraksjon med mengder: Å trekke ifrå

Når vi har ei mengde og tar bort ein del av den, bruker vi symbolet $-$:

$$5 - {\color{red}3} = 2$$

Språkboksen

Eit subtraksjonsstykke består av to eller fleire *ledd* og éin *differanse*. I subtraksjonsstykket

$$5 - 3 = 2$$

er både 5 og 3 ledd og 2 er differansen.

Vanlege måtar å seie $5 - 3$ på er

- ”5 minus 3”
- ”5 fratrekt 3”
- ”3 subtrahert fra 5”

Ei ny tolking av 0

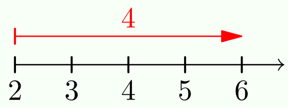
Innleiingsvis i denne boka nemnde vi at 0 kan tolkast som ”ingenting”. Subtraksjon gir oss moglegheiten til å uttrykke 0 via andre tal. For eksempel er $7 - 7 = 0$ og $19 - 19 = 0$. I praktiske samanhengar vil 0 ofte innebere ei form for likevekt, for eksempel som at ei kraft og ei motkraft er like store.

Subtraksjon på tallinja: Vandring mot venstre

I *seksjon 2.1* har vi sett at $+$ (med positive tal) inneber at vi skal gå *mot høgre* langs tallinja. Med $-$ gjer vi omvend, vi går *mot venstre*[1]:

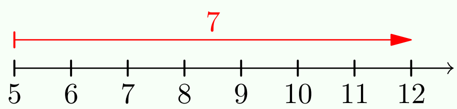
Eksempel 1

$$6 - 4 = 2$$



Eksempel 2

$$12 - 7 = 5$$



Merk

Med det første kan det kanskje verke litt rart at ein i *Eksempel 1* og *2* over skal gå i motsatt veg av retninga pila peiker i, men spesielt i *Kapittel 5* vil det lønne seg å tenke slik.

[1]I figurar med tallinjer vil raudfarga piler indikere at ein startar ved pilspissen og vandrar til andre enden.

2.3 Multiplikasjon (Gonging)

Gonging med heiltal: Innleiiande definisjon

Når vi legg saman like tall, kan vi bruke gonge-symbolet $\cdot$ for å skrive reknestykka våre kortare:

Eksempel

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$$
$$8 + 8 = 8 \cdot 2$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 5$$

Språkboksen

Eit gongestykke består av to eller fleire *faktorar* og eitt *produkt*. I gongestykket

$$4 \cdot 3 = 12$$

er 4 og 3 faktorar, mens 12 er produktet.

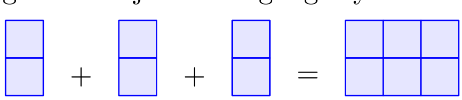
Vanlege måtar å seie $4 \cdot 3$ på er

- "4 gonger 3"
- "4 gonga med 3"
- "4 multiplisert med 3"

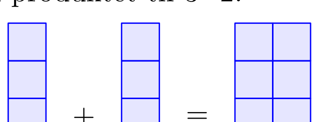
Mange nettstader og bøker på engelsk brukar symbolet $\times$ i staden for $\cdot$. I dei fleste programmeringsspråk er $*$ symbolet for multiplikasjon.

Gonging av mengder

Lat oss no bruke ein figur for å sjå for oss gongestykket $2 \cdot 3$:

$2 \cdot 3 =$ 

Og så kan vi legge merke til produktet til $3 \cdot 2$:

$3 \cdot 2 =$ 

2.2 Multiplikasjon er kommutativ

Produktet er det same uansett rekkefølge på faktorane.

Eksempel

$$3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$6 \cdot 7 = 42 = 7 \cdot 6$$

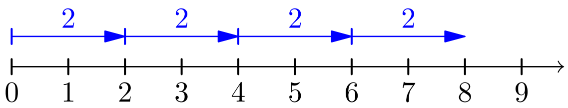
$$8 \cdot 9 = 72 = 9 \cdot 8$$

Gonging på tallinja

Vi kan også bruke tallinja for å rekne ut gongestykker. For eksempel kan vi finne kva $2 \cdot 4$ er ved å tenke slik:

"$2 \cdot 4$ betyr å vandre 2 plassar mot høgre, 4 gonger."

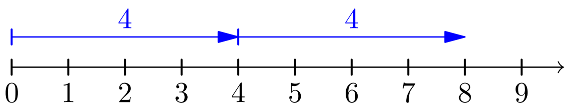
$$2 \cdot 4 = 8$$



Også tallinja kan vi bruke for å overbevise oss om at rekkefølga i eit gongestykke ikkje har noko å seie:

"$4 \cdot 2$ betyr å vandre 4 plassar mot høgre, 2 gonger."

$$4 \cdot 2 = 8$$



Endeleg definisjon av gonging med positive heiltal

Det ligg kanskje nærast å tolke "2 gonger 3" som "3, 2 gonger". Da er

$$\text{"2 gonger 3"} = 3 + 3$$

Innleiingsvis presenterete vi $2 \cdot 3$, altså "2 gonger 3", som $2 + 2 + 2$. Med denne tolkinga vil $3 + 3$ svare til $3 \cdot 2$, men nettopp det at multiplikasjon er ein kommutativ operasjon (*Regel 2.2*) gjer at den eine tolkinga ikkje utelukkar den andre; $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$ og $2 \cdot 3 = 3 + 3$ er to uttrykk med same verdi.

2.3 Gonging som gjentatt addisjon

Gonging med eit positivt heiltal kan uttrykkast som gjentatt addisjon.

Eksempel 1

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 5 = 5$$

Merk

At gonging med positive heiltal kan uttrykkast som gjentatt addisjon, utelukkar ikkje andre uttrykk. Det er ikkje feil å skrive at $2 \cdot 3 = 1 + 5$.

2.4 Divisjon (deling)

$:$ er teiknet for divisjon. I praksis har divisjon tre forskjellige tydingar, her eksemplifisert ved reknestykket $12 : 3$:

2.4 Divisjon sine tre tydingar

- **Inndeling av mengder**

  $12 : 3 =$ "Antalet i kvar gruppe når 12 delast inn i 3 like store grupper"

- **Antal gonger**

  $12 : 3 =$ "Antal gonger 3 går på 12"

- **Omvend operasjon av multiplikasjon**

  $12 : 3 =$ "Talet ein må gonge 3 med for å få 12"

Språkboksen

Eit divisjonsstykke består av ein *dividend*, ein *divisor* og ein *kvotient*. I divisjonstykket

$$12 : 3 = 4$$

er 12 dividenden, 3 er divisoren og 4 er kvotienten.

Vanlege måtar å seie $12 : 3$ på er

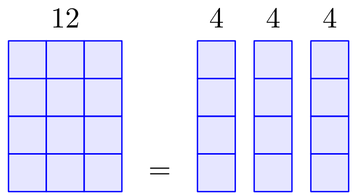
- "12 delt med 3"
- "12 dividert med 3"
- "12 på 3"

I nokre samanhengar blir $12 : 3$ kalla "*forholdet* mellom 12 og 3". Da er 4 *forholdstalet*.

Ofte brukast $/$ i staden for $:$, spesielt i programmeringsspråk.

Divisjon av mengder

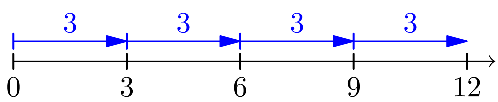
Reknestykket $12 : 3$ fortel oss at vi skal dele 12 inn i 3 like store grupper:



Vi ser at kvar gruppe inneheld 4 ruter, dette betyr at

$$12 : 3 = 4$$

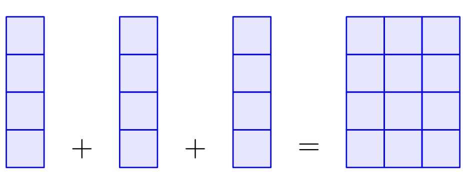
Antal gonger



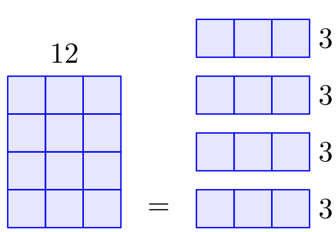
3 går 4 gonger på 12, altså er $12 : 3 = 4$.

Omvend operasjon av multiplikasjon

Vi har nyleg sett at viss vi deler 12 inn i 3 like grupper, får vi 4 i kvar gruppe. Altså er $12 : 3 = 4$. Og om vi legg saman igjen desse gruppene, får vi 12:



Men dette er det same som å gonge 4 med 3, med andre ord: Om vi veit at $4 \cdot 3 = 12$, så veit vi at $12 : 3 = 4$. I tillegg veit vi da at $12 : 4 = 3$.



Eksempel 1

Sidan $6 \cdot 3 = 18$, er

$$18 : 6 = 3$$

$$18 : 3 = 6$$

Eksempel 2

Sidan $5 \cdot 7 = 35$, er

$$35 : 5 = 7$$

$$35 : 7 = 5$$

Kapittel 3

Faktorisering og reknerekkefølge

3.1 Faktorisering

Når ein heiltalls dividend og ein heiltals divisor resulterer i ein heiltals kvotient, seier vi at dividenden er *deleleg* med divisoren. For eksempel er 6 deleleg med 3 fordi $6 : 3 = 2$, og 40 er deleleg med 10 fordi $40 : 10 = 4$. Omgrepet deleleg er med på å definere *primtal*:

3.1 Primtal

Eit naturleg tal som er større enn 1, og som berre er deleleg med seg sjølv og 1, er eit primtal.

Eksempel

Dei fem første primtala er $2, 3, 5, 7$ og 11.

3.2 Faktorisering

Faktorisering inneber å skrive eit tal som eit produkt av andre tal.

Eksempel

Faktoriser 24 på tre forskjellige måtar.

Svar:

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

3.3 Primtalsfaktorisering

Faktorisering med berre primtal som faktorar kallast primtalsfaktorisering.

Eksempel

Skriv 12 på primtalsfaktorisert form.

Svar:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

3.2 Reknerekkefølge

Prioriteringa av rekneartane

Sjå på følgande reknestykke:

$$2 + 3 \cdot 4$$

Eit slikt reknestykke *kunne* ein tolka på to måtar:

1. ”2 pluss 3 er 5. 5 gonga med 4 er 20. Svaret er 20.”

2. ”3 gonga med 4 er 12. 2 pluss 12 er 14. Svaret er 14.”

Men svara blir ikkje like! Det er altså behov for å ha nokre reglar om kva vi skal rekne ut først. Den eine regelen er at vi må rekne ut gonging eller deling *før* vi legg saman eller trekk ifrå, dette betyr at

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 4 &= \text{”Rekn ut } 3 \cdot 4\text{, og legg saman med 2”} \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Men kva om vi ønska å legge saman 2 og 3 først, og så gonge summen med 4? Å fortelle at noko skal reknast ut først gjer vi ved hjelp av parentesar:

$$\begin{aligned} (2 + 3) \cdot 4 &= \text{”Legg saman 2 og 3, og gong med 4 etterpå”} \\ &= 5 \cdot 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

3.4 Reknerekkefølge

1. Uttrykk med parentes

2. Multiplikasjon eller divisjon

3. Addisjon eller subtraksjon

Eksempel 1

Rekn ut

$$23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7$$

Svar:

$$\begin{aligned} 23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7 &= 23 - 12 + 4 \cdot 7 && \text{Parentes} \\ &= 23 - 12 + 28 && \text{Gonging} \\ &= 39 && \text{Addisjon og subtraksjon} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Rekn ut

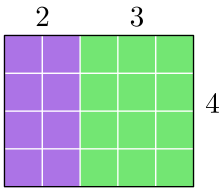
$$18 : (7 - 5) - 3$$

Svar:

$$\begin{aligned} 18 : (7 - 5) - 3 &= 18 : 2 - 3 && \text{Parentes} \\ &= 9 - 3 && \text{Deling} \\ &= 6 && \text{Addisjon og subtraksjon} \end{aligned}$$

Gonging med parentes

Kvor mange ruter ser vi i figuren under?



To måter ein kan tenke på er desse:

1. Det er $2 \cdot 4 = 8$ lilla ruter og $3 \cdot 4 = 12$ grøne ruter. Til saman er det $8 + 12 = 20$ ruter. Dette kan vi skrive som

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$$

2. Det er $2 + 3 = 5$ ruter bortover og 4 ruter oppover. Altså er det $5 \cdot 4 = 20$ ruter totalt. Dette kan vi skrive som

$$(2 + 3) \cdot 4 = 20$$

Av desse to utrekningane har vi at

$$(2+3)\cdot 4 = 2\cdot 4 + 3\cdot 4$$

3.5 Gonging med parentes (distributiv lov)

Når eit parentesuttrykk er ein faktor, kan vi gonge dei andre faktorane med kvart enkelt ledd i parentesuttrykket.

Eksempel 1

$$(4+7)\cdot 8 = 4\cdot 8 + 7\cdot 8$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(10-7)\cdot 2 &= 10\cdot 2 - 7\cdot 2\\ &= 20-14\\ &= 6\end{aligned}$$

Merk: Her vil det sjølvsagt vere raskare å rekne slik:

$$(10-7)\cdot 2 = 3\cdot 2 = 6$$

Eksempel 2

Rekn ut $12\cdot 3$.

Svar:

$$\begin{aligned}12\cdot 3 &= (10+2)\cdot 3\\ &= 10\cdot 3 + 2\cdot 3\\ &= 30+6\\ &= 36\end{aligned}$$

Obs!

Vi introduserte parentesar som ein indikator på kva som skulle reknast ut først, men *Regel 3.5* gir ei alternativ og likeverdig tyding av parentesar. Regelen kjem spesielt til nytte i algebrarekning (sjå *Del II*).

Å gonge med 0

Vi har tidlegare sett at 0 kan skrivast som ein differanse mellom to tal, og dette kan vi no utnytte til å finne produktet når vi gongar med 0. Lat oss sjå på reknestykket

$$(2-2)\cdot 3$$

Av *Regel 3.5* har vi at

$$\begin{aligned}(2-2)\cdot 3 &= 2\cdot 3 - 2\cdot 3\\ &= 6-6\\ &= 0\end{aligned}$$

Sidan $0 = 2-2$, må dette bety at

$$0\cdot 3 = 0$$

3.6 Gonging med 0

Viss 0 er ein faktor, er produktet lik 0.

Eksempel 1

$$7\cdot 0 = 0$$

$$0\cdot 219 = 0$$

Assosiative lover

3.7 Assosiativ lov ved addisjon

Plasseringa av parentesar mellom ledd har inga påverknad på summen.

Eksempel

$$(2+3)+4 = 5+4 = 9$$

$$2+(3+4) = 2+7 = 9$$

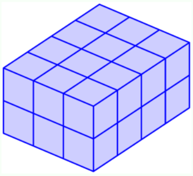
3.8 Assosiativ lov ved multiplikasjon

Plasseringa av parentesar mellom faktorar har inga påverknad på produktet.

Eksempel

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$



I motsetnad til addisjon og multiplikasjon, er verken subtraksjon eller divisjon assosiative:

$$(12 - 5) - 4 = 7 - 4 = 3$$
$$12 - (5 - 4) = 12 - 1 = 11$$

$$(80 : 10) : 2 = 8 : 2 = 4$$
$$80 : (10 : 2) = 80 : 5 = 16$$

Vi har sett at parentesane hjelp oss med å seie noko om *prioriteringa* av rekneartane, men det at subtraksjon og divisjon er ikkje-assosiative fører til at vi også må ha ein regel for kva *retning* vi skal rekne i.

3.9 Retning på utrekningar

Rekneartar som ut ifrå *Regel 3.4* har lik prioritet, skal reknast frå venstre mot høgre.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 12 - 5 - 4 &= (12 - 5) - 4 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} 80:10:2 &= (80:10):2 \\ &= 8:2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} 6:3\cdot 4 &= (6:3)\cdot 4 \\ &= 2\cdot 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Kapittel 4

Brøk

4.1 Introduksjon

4.1 Brøk som omskriving av delestykke

Ein brøk er ein annan måte å skrive eit delestykke på. I ein brøk kallar vi dividenden for *tellar* og divisoren for nemnar.

$$1 : 4 = \frac{1 \longleftarrow \text{Tellar}}{4 \longleftarrow \text{Nemnar}}$$

Språkboksen

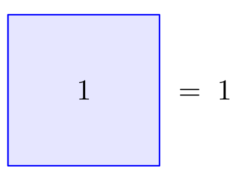
Vanlege måtar å seie $\frac{1}{4}$ på er[1]

- ”éin firedel”
- ”1 av 4”
- ”1 over 4”

[1] I tillegg har vi utsegna fra språkboksen på side 23.

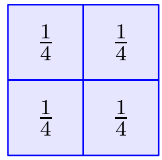
Brøk som mengde

Lat oss sjå for på brøken $\frac{1}{4}$ som ei mengde. Vi startar da med å tenke på talet 1 som ei rute[1]:



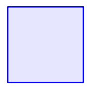
[1] Av praktiske årsakar velg vi oss her ei einarrute som er større enn den vi brukte i *Kapittel 1*.

Så deler vi denne ruta inn i fire mindre ruter som er like store. Kvar av desse rutene blir da $\frac{1}{4}$ (1 av 4):



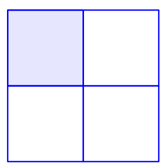
$$= 1$$

Har vi éi slik rute, har vi altså 1 firedel:



$$= \frac{1}{4}$$

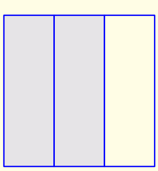
Men skal ein berre ut ifrå ein figur kunne sjå kor stor ein brøk er, må ein vite kor stor 1 er, og for å få dette lettare til syne skal vi også ta med dei ”tomme” rutene:



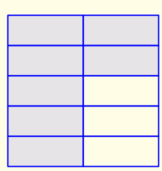
$$= \frac{1}{4}$$

Slik vil dei blå og dei tomme rutene fortelje oss kor mange bitar 1 er delt inn i, mens dei blå rutene aleine fortel oss kor mange slike bitar det *eigentleg* er. Slik kan vi seie at

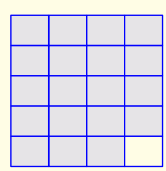
$$\text{antal blå ruter} = \text{tellar}$$
$$\text{antal blå ruter} + \text{antal tommme ruter} = \text{nemnar}$$



$$= \frac{2}{3}$$



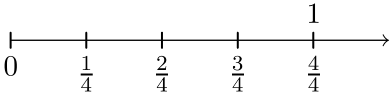
$$= \frac{7}{10}$$



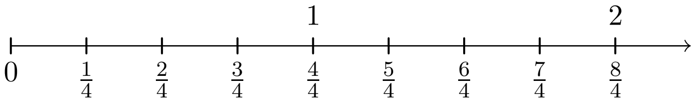
$$= \frac{19}{20}$$

Brøk på tallinja

På tallinja deler vi lengda mellom 0 og 1 inn i like mange lengder som nemnaren angir. Har vi ein brøk med 4 i nemnar, deler vi lengda mellom 0 og 1 inn i 4 like lengder:



Tallinja er også fin å bruke for å teikne inn brøkar som er større enn 1:



Tellar og nemnar oppsummert

Sjølv om vi har vore innom det allereie, er det så avgjerande å forstå kva tellaren og nemnaren seier oss at vi tek ei kort oppsummering:

- Nemnaren fortel kor mange bitar 1 er delt inn i.
- Tellaren fortel kor mange slike bitar det er.

4.2 Verdi, utviding og forkorting av brøk

4.2 Verdien til ein brøk

Verdien til ein brøk finn vi ved å dele tellaren med nemnaren.

Eksempel

Finn verdien til $\frac{1}{4}$.

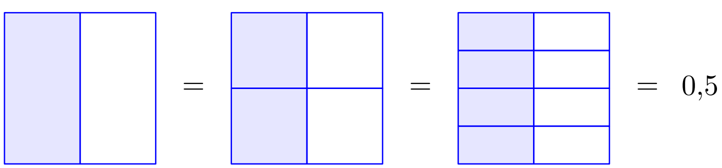
Svar:

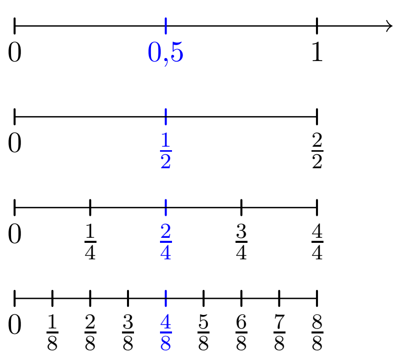
$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

Brøkar med same verdi

Brøkar kan ha same verdi sjølv om dei ser forskjellige ut. Viss du reknar ut 1 : 2, 2 : 4 og 4 : 8, får du i alle tilfelle 0,5 som svar. Dette betyr at

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$





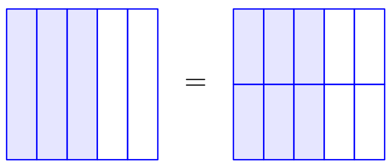
Utviding

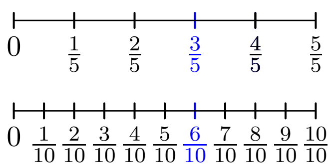
At brøkar kan sjå forskjellige ut, men ha same verdi betyr at vi kan endre på utsjånaden til ein brøk utan å endre verdien. Lat oss som eksempel gjere om $\frac{3}{5}$ til ein brøk med same verdi, men med 10 som nemnar:

- $\frac{3}{5}$ kan vi gjere om til ein brøk med 10 i nemnar om vi deler kvar femdel inn i 2 like bitar, for da blir 1 til saman delt inn i $5 \cdot 2 = 10$ bitar.

- Tellaren i $\frac{3}{5}$ fortel at der er 3 femdelar. Når desse blir delt i to, blir dei totalt til $3 \cdot 2 = 6$ tidelar. Altså har $\frac{3}{5}$ same verdi som $\frac{6}{10}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$





Forkorting

Legg no merke til at vi også kan gå ”andre vegen”. $\frac{6}{10}$ kan vi gjere om til ein brøk med 5 i nemnar ved å dele både tellar og nemnar med 2:

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$$

> **4.3 Utviding og forkorting av brøk**
>
> Vi kan gonge eller dele tellar og nemnar med det same talet utan at brøken endrar verdi.
>
> Å gonge med eit tal større enn 1 kallast å *utvide* brøken. Å dele med eit tal større enn 1 kallast å *forkorte* brøken.

Eksempel 1

Utvid $\frac{3}{5}$ til ein brøk med 20 som nemnar.

Svar:

Da $5 \cdot 4 = 20$, gongar vi både tellar og nemnar med 4:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{12}{20}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Utvid $\frac{150}{50}$ til ein brøk med 100 som nemnar.

Svar:

Da $50 \cdot 2 = 100$, gongar vi både tellar og nemnar med 2:

$$\begin{aligned}\frac{150}{50} &= \frac{150 \cdot 2}{50 \cdot 2} \\ &= \frac{300}{100}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Forkort $\frac{18}{30}$ til ein brøk med 5 som nemnar.

Svar:

Da $30 : 6 = 5$, deler vi både tellar og nemnar med 6:

$$\begin{aligned}\frac{18}{30} &= \frac{18 : 6}{30 : 6} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

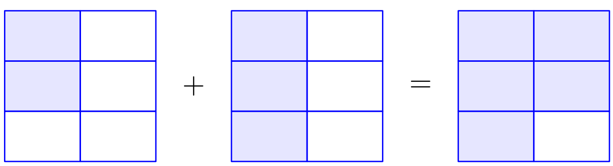
4.3 Addisjon og subtraksjon

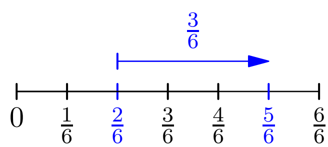
Addisjon og subtraksjon av brøkar handlar i stor grad om nemnarane. Husk no at nemnarane fortel oss om inndelinga av 1. Viss brøkar har lik nemnar, representerer dei eit antal bitar med lik størrelse. Da gir det meining å rekne addisjon eller subtraksjon mellom tellarane. Viss brøkar har ulike nemnarar, representerer dei eit antal bitar med ulik størrelse, og da gir ikkje addisjon eller subtraksjon mellom tellerane direkte meining.

Lik nemnar

Om vi for eksempel har 2 seksdelar og adderer 3 seksdelar, endar vi opp med 5 seksdelar:

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$





4.4 Addisjon/subtraksjon av brøkar med lik nemnar

Når vi reknar addisjon/subtraksjon mellom brøkar med lik nemnar, finn vi summen/differansen av tellarane og beheld nemnaren.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{2}{7}+\frac{8}{7}&=\frac{2+8}{7}\\&=\frac{10}{7}\end{aligned}$$

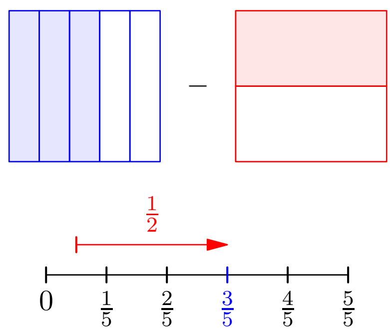
Eksempel 2

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}$$
$$=\frac{2}{9}$$

Ulike nemnarar

Lat oss sjå på reknestykket[1]

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$$

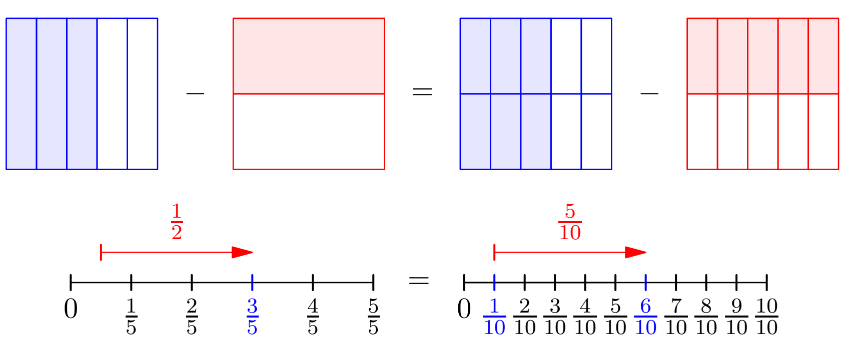


Skal vi skrive differansen som ein brøk, må vi sørge for at brøkane har same nemnar. Dei to brøkane våre kan begge ha 10 som nemnar:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10} \qquad\qquad \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}$$

Dette betyr at

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}$$



[1]Vi minner om at raudfarga på pila indikerer at ein skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Det vi har gjort, er å utvide begge brøkane slik at dei har same nemnar, nemleg 10. Når nemnarene i brøkane er like, kan vi rekne ut subtraksjonsstykket for tellarane:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}-\frac{1}{2}&=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

4.5 Addisjon/subtraksjon av brøkar med ulik nemnar

Når vi reknar addisjon/subtraksjon mellom brøkar med ulik nemnar, må vi utvide brøkane slik at dei har lik nemnar, for så å bruke *Regel 4.4*.

Eksempel 1

Rekn ut

$$\frac{2}{9}+\frac{6}{7}$$

Begge nemnarane kan bli 63 viss vi gongar med rett heiltal. Vi utvider derfor til brøkar med 63 i nemnar:

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 7}{9\cdot 7}+\frac{6\cdot 9}{7\cdot 9}&=\frac{14}{63}+\frac{54}{63}\\&=\frac{68}{63}\end{aligned}$$

Fellesnemnar

I *Eksempel 1* over blir 63 kalla ein *fellesnemnar*. Dette fordi det finst heiltal vi kan gonge nemnarane med som gir oss talet 63:

$$9 \cdot 7 = 63$$
$$7 \cdot 9 = 63$$

Viss vi gongar saman alle nemnarane i et reknestykke, finn vi alltid ein fellesnemnar, men vi sparer oss for store tal om vi finn den *minste* fellesnemnaren. Ta for eksempel reknestykket

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3}$$

Her kan vi bruke fellesnemnaren $6 \cdot 3 = 18$, men det er betre å merke seg at $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ også er ein fellesnemnar. Altså er

$$\begin{aligned} \frac{7}{6} + \frac{5}{3} &= \frac{7}{6} + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Rekn ut

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4}$$

Svar:

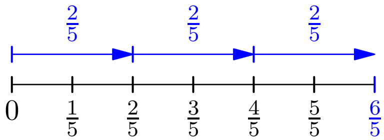
Alle nemnarane kan bli 8 viss vi gongar med rett heiltall. Vi utvider derfor til brøkar med 8 i nemnar:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4} &= \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{5}{8} + \frac{10 \cdot 2}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{12}{8} - \frac{5}{8} + \frac{20}{8} \\ &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

4.4 Brøk gonga med heiltal

I *seksjon 2.3* såg vi at gonging med heiltal er det same som gjentatt addisjon. Skal vi for eksempel rekne ut $\frac{2}{5} \cdot 3$, kan vi derfor rekne slik:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{2+2+2}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$



Men vi veit også at $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3$, og derfor kan vi forenkle reknestykket vårt:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2 \cdot 3}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Multiplikasjon mellom heiltal og brøk er også kommutativ[1]:

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{2}{5} &= 3 \cdot 2 : 5 \\ &= 6 : 5 \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

4.6 Brøk gonga med heiltal

Når vi gongar ein brøk med eit heiltal, gongar vi heiltalet med tellaren i brøken.

[1] Hugs at $\frac{2}{5}$ berre er ei omskriving av $2 : 5$.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\cdot 4 &= \frac{1\cdot 4}{3}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}3\cdot\frac{2}{5} &= \frac{3\cdot 2}{5}\\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Ei tolking av gonging med brøk

Av *Regel 4.6* kan vi også danne ei tolking av kva å gonge med ein brøk inneber. For eksempel, å gonge 3 med $\frac{2}{5}$ kan tolkast på desse to måtane:

- Vi gongar 3 med 2, og deler produktet med 5:

$$3\cdot 2 = 6 \quad , \quad 6:5 = \frac{6}{5}$$

- Vi deler 3 med 5, og gongar kvotienten med 2:

$$3:5 = \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

4.5 Brøk delt med heiltal

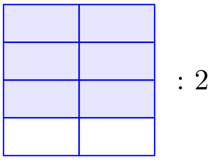
Det er no viktig å huske på to ting:

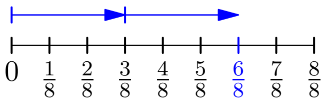
- Deling kan ein sjå på som ei lik fordeling av eit antal
- I ein brøk er det tellaren som fortel noko om antalet (nemnaren fortel om inndelinga av 1)

Tilfellet der tellaren er deleleg med divisoren

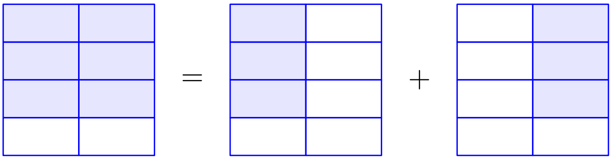
Lat oss rekne ut

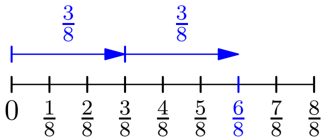
$$\frac{6}{8} : 2$$





Vi har her 6 åttedelar som vi skal fordele likt på 2. Dette blir $6 : 2 = 2$ åttedelar.





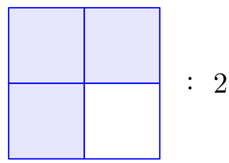
Altså er

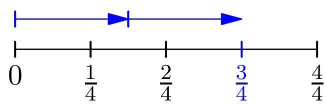
$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$$

Tilfellet der tellaren ikkje er deleleg divisoren

Kva no om vi skal dele $\frac{3}{4}$ på 2?

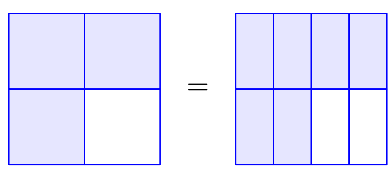
$$\frac{3}{4} : 2$$

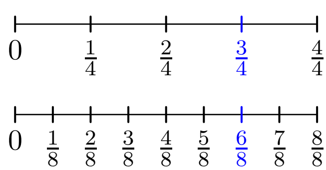




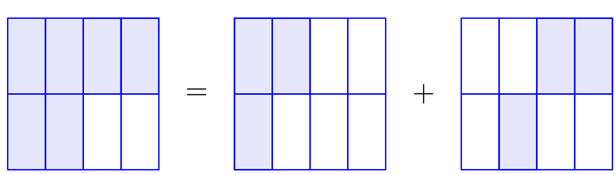
Saka er at vi alltid kan utivde brøken vår slik at tellaren blir deleleg med divisoren. Sidan vi skal dele med 2, utvidar vi altså brøken vår med 2:

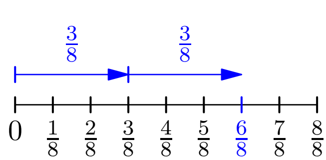
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$





No har vi 6 åttedelar. 6 åttedelar delt på 2 blir 3 åttedelar:





Altså er

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

Reint matematisk har vi rett og slett gonga nemnaren til $\frac{3}{4}$ med 2:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} : 2 &= \frac{3}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

4.7 Brøk delt med heiltal

Når vi delar ein brøk med eit heiltal, gongar vi nemnaren med heiltalet.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} : 6 &= \frac{5}{3 \cdot 6} \\ &= \frac{5}{18}\end{aligned}$$

Unntak

Innleiingsvis av denne seksjonen fann vi at

$$\frac{4}{8} : 2 = \frac{2}{8}$$

Da gonga vi ikkje nemnaren med 2, slik *Regel 4.7* tilseier. Om vi gjer det, får vi

$$\frac{4}{8} : 2 = \frac{4}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Men

$$\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Dei to svara har altså same verdi. Saka er at skal vi dele ein brøk på eit heiltal, og tellaren er deleleg med heiltalet, kan vi direkte dele tellaren på heiltalet. I slike tilfelle er det altså ikkje feil, men heller ikkje naudsynt å bruke *Regel 4.7*.

4.6 Brøk gonga med brøk

Vi har sett[1] korleis å gonge med ein brøk inneber å gonge det andre talet med tellaren, og så dele produktet med nemnaren. Lat oss bruke dette til å rekne ut

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Med tolkinga akkurat nemnt, skal vi no gonge $\frac{5}{4}$ først med 3, og så dele produktet med 2. Av *Regel 4.6* er

$$\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{4}$$

Og av *Regel 4.7* er

$$\frac{5 \cdot 3}{4} : 2 = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

Altså er

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

4.8 Brøk gonga med brøk

Når vi gongar to brøkar med kvarandre, gongar vi tellar med tellar og nemnar med nemnar.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} &= \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9} \\ &= \frac{24}{63} \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} &= \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 10} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

[1] Sjå tekstboksen med tittelen *Ei tolking av gonging med brøk* på s. 46.

4.7 Kansellering av faktorer

Når tellaren og nemnaren har lik verdi, er verdien til brøken alltid 1. For eksempel er $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{25}{25} = 1$ osv. Dette kan vi utnytte for å forenkle brøkuttrykk.

Lat oss forenkle brøkuttrykket

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8}$$

Da $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$, kan vi skrive

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8}$$

Og som vi nylig har sett (*Regel 4.8*) er

$$\frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8}$$

Sidan $\frac{8}{8} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} &= \frac{5}{9} \cdot 1 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Når berre gonging er til stades i brøkar, kan ein alltid omrokkere slik vi har gjort over, men når ein har forstått kva omrokkeringa ender med, er det betre å bruke *kansellering*. Ein set da ein strek over to og to like faktorar for å indikere at dei utgjer ein brøk med verdien 1. Tilfellet vi akkurat såg på skriv vi da som

$$\frac{\cancel{8} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$$

4.9 Kansellering av faktorar

Når berre gonging er til stades i ein brøk, kan vi kansellere par av like faktorar i tellar og nemnar.

Eksempel 1

Kanseller så mange faktorar som mogleg i brøken

$$\frac{3 \cdot 12 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 12}$$

Svar:

$$\frac{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 4 \cdot \cancel{12}} = \frac{3}{4}$$

Eksempel 1

Forkort brøken $\frac{12}{42}$.

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{12}{42} &= \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 7} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Forkort brøken $\frac{48}{16}$.

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{48}{16} &= \frac{3 \cdot \cancel{16}}{\cancel{16}} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Merk: Viss alle faktorar er kansellert i tellar eller nemnar, er dette det same som at talet 1 står der.

Brøkar forenklar utrekningar

Desmialtalet 0,125 kan vi skrive som brøken $\frac{1}{8}$. Reknestykket

$$0{,}125 \cdot 16$$

vil for dei fleste av oss ta ei stund å løyse for hand med vanlege multiplikasjonsreglar. Men bruker vi brøkuttrykket får vi at

$$\begin{aligned} 0{,}125 \cdot 16 &= \frac{1}{8} \cdot 16 \\ &= \frac{2 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

"Å stryke nullar"

Eit tal som 3000 kan vi skrive som $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, mens 700 kan vi skrive som $7 \cdot 10 \cdot 10$. Brøken $\frac{3000}{700}$ kan vi derfor forkorte slik:

$$\begin{aligned} \frac{3000}{700} &= \frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot 10}{7 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{7} \\ &= \frac{30}{7} \end{aligned}$$

I praksis er dette det same som "å stryke nullar":

$$\frac{30\cancel{00}}{7\cancel{00}} = \frac{30}{7}$$

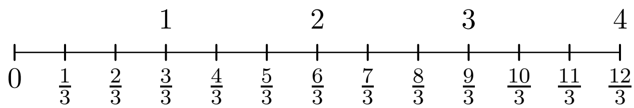
Obs! Nullar er dei einaste sifra vi kan "stryke" på denne måten, for eksempel kan vi ikkje forkorte $\frac{123}{13}$ på nokon som helst måte. I tillegg kan vi berre "stryke" nullar som står som bakerste siffer, for eksempel kan vi ikkje "stryke" nullar i brøken $\frac{101}{10}$.

4.8 Deling med brøk

Deling ved å sjå på tallinja

Lat oss rekne ut $4 : \frac{2}{3}$. Sidan brøken vi deler 4 på har 3 i nemnar, kan det vere ein idé å gjere om også 4 til ein brøk med 3 i nemnar. Vi har at

$$4 = \frac{12}{3}$$

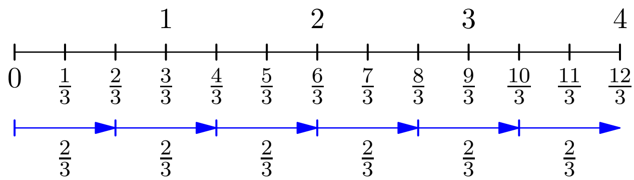


Husk no at ei tyding av $4 : \frac{2}{3}$ er

"Kor mange gonger $\frac{2}{3}$ går på 4."

Ved å sjå på tallinja, finn vi at $\frac{2}{3}$ går 6 gongar på 4. Altså er

$$4 : \frac{2}{3} = 6$$



Ein generell metode

Vi kan ikkje sjå på ei tallinje kvar gong vi skal dele med brøkar, så no skal vi komme fram til ein generell reknemetode ved igjen å bruke $4 : \frac{2}{3}$ som eksempel. For denne metoden bruker vi denne tydinga av divisjon:

$$4 : \frac{2}{3} = \text{"Talet vi må gonge } \tfrac{2}{3} \text{ med for å få 4."}$$

For å finne dette talet startar vi med å gonge $\frac{2}{3}$ med talet som gjer at produktet blir 1. Dette talet er *den omvende brøken* av $\frac{2}{3}$, som er $\frac{3}{2}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

No gjenstår det berre å gonge med 4 for å få 4:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 4$$

For å få 4, må vi altså gonge $\dfrac{2}{3}$ med $\dfrac{3}{2} \cdot 4$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} 4 : \frac{2}{3} &= \frac{3}{2} \cdot 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

4.10 Brøk delt på brøk

Når vi deler eit tal med ein brøk, gongar vi talet med den omvende brøken.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 6 : \frac{2}{9} &= 6 \cdot \frac{9}{2} \\ &= 27 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} : \frac{5}{8} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5} \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} : \frac{3}{10} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} \\ &= \frac{30}{15}\end{aligned}$$

Her bør vi også sjå at brøken kan forkortast:

$$\begin{aligned}\frac{30}{15} &= \frac{2 \cdot \cancel{15}}{\cancel{15}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Merk: Vi kan spare oss for store tal viss vi kansellerer faktorar undervegs i utrekningar:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} &= \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{3}} \\ &= 2\end{aligned}$$

4.9 Rasjonale tal

4.11 Rasjonale tal

Eit kvart tal som kan bli skriven som ein brøk med heiltals tellar og nemnar, er eit *rasjonalt tal*.

Merk

Rasjonale tal gir oss ei samlenemning for

- **Heiltal**

  For eksempel $4 = \frac{4}{1}$.

- **Desimaltal med endeleg antal desimalar**

  For eksempel $0{,}2 = \frac{1}{5}$.

- **Desimaltal med repeterande desimalmønster**

  For eksempel [1] $0{,}08\overline{3} = \frac{1}{12}$.

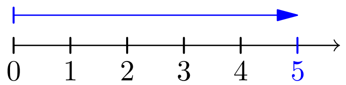
[1] $\overline{3}$ indikerer at 3 fortsett i det uendelege. Ein annan måte å indikere dette på er å bruke symbolet ... . Altså er $0{,}08\overline{3} = 0{,}08333333...$

Kapittel 5

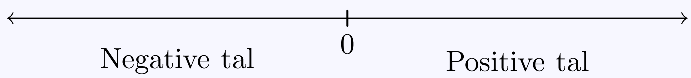
Negative tal

5.1 Introduksjon

Vi har tidlegare sett at (for eksempel) talet 5 på ei tallinje ligg 5 einarlengder til høgre for 0.

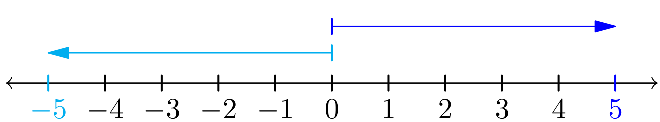


Men kva om vi går andre veien, altså mot venstre? Dette spørsmålet svarer vi på ved å innføre *negative tal*.

> **5.1 Positive og negative tal**
>
> På ei tallinje gjeld følgande:
>
> - Tal plassert *til høgre* for 0 er positive tal.
> - Tal plassert *til venstre* for 0 er negative tal.
>
> 
>

I praksis kan vi ikkje heile tida bruke ei tallinje for å avgjere om eit tal er negativt eller positivt, og derfor bruker vi eit symbol for å vise at tal er negative. Dette symbolet er rett og slett $-$, altså det same symbolet som vi bruker ved subtraksjon. 5 er med dét eit positivt tal, mens -5 er eit negativt tal. På tallinja er det slik at

- 5 ligg 5 einarlengder *til høgre* for 0.
- -5 ligg 5 einarlengder *til venstre* for 0.



Den store forskjellen på 5 og -5 er altså på kva side av 0 tala ligg. Da 5 og -5 har same avstand til 0, seier vi at 5 og -5 har same *lengde*.

5.2 Lengde (talverdi/absoluttverdi)

Lengda til eit tal skrivast ved symbolet $|\,|$.

Lengda til eit positivt tal er verdien til talet.

Lengda til eit negativt tal er verdien til det positive talet med same siffer.

Eksempel 1

$$|27| = 27$$

Eksempel 2

$$|-27| = 27$$

Forteikn

Forteikn er ei samlenemning for $+$ og $-$. 5 har $+$ som forteikn og -5 har $-$ som forteikn.

5.2 Dei fire rekneartane med negative tal

Ved innføringa av negative tal får dei fire rekneartane nye sider som vi må sjå på trinnvis. Når vi adderer, subtraherer, multipliserer eller dividerer med negative tal vil vi ofte, for å gjere det meir tydeleg, skrive negative tal med parentes rundt. Da skriv vi for eksempel -4 som (-4).

Addisjon

Når vi adderte i *seksjon 2.1* såg vi på $+$ som vandring *mot høgre*. Negative tal gjer at vi må utvide omgrepet for $+$:

$+$ "Like langt og i *same* retning som"

Lat oss sjå på reknestykket

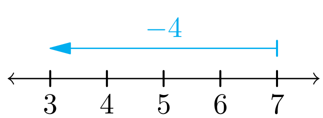
$$7 + (-4)$$

Vår utvida definisjon av $+$ seier oss no at

$$7 + (-4) = \text{"7 og like langt og i } \textit{same} \text{ retning som } (-4)\text{"}$$

(-4) har lengde 4 og retning *mot venstre*. Vårt reknestykke seier altså at vi skal starte på 7, og deretter gå lengda 4 *mot venstre*.

$$7 + (-4) = 3$$



5.3 Addisjon med negative tal

Å addere eit negativt tal er det same som å subtrahere talet med same talverdi.

Eksempel 1

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

Eksempel 2

$$-8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$

Merk

Regel 2.1 erklærer at addisjon er kommutativ. Dette er gjeldande også ved innføringa av negative tal, for eksempel er

$$7 + (-3) = 4 = -3 + 7$$

Subtraksjon

I *seksjon 2.2* såg vi på $-$ som vandring *mot venstre*. Også tydinga av $-$ må utvidast når vi jobbar med negative tal:

$-$ ”Like langt og i *motsett* retning som”

Lat oss sjå på reknestykket

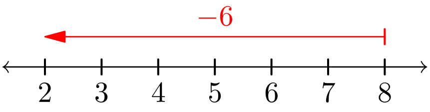
$$2 - (-6)$$

Med vår utvida tyding av $-$, kan vi skrive

$$2 - (-6) = \text{”2 og like langt og i } \textit{motsett} \text{ retning som } (-6)\text{”}$$

-6 har lengde 6 og retning *mot venstre*. Når vi skal gå same lengde, men i *motsett* retning, må vi altså gå lengda 6 *mot høgre*[1]. Dette er det same som å addere 6:

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$



5.4 Subtraksjon med negative tal

Å subtrahere eit negativt tal er det same som å addere det positive talet med same talverdi.

Eksempel 1

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20$$

[1] Vi minner enda ein gong om at raudfarga på pila indikerer at ein skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Eksempel 2

$$-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$$

Multiplikasjon

I *seksjon 2.3* introduserte vi gonging med positive heiltal som gjentatt addisjon. Med våre utvida omgrep av addisjon og subtraksjon, kan vi no også utvide omgrepet multiplikasjon:

5.5 Multiplikasjon med positive og negative tal

- Gonging med eit positivt heiltal er det same som gjentatt addisjon.
- Gonging med eit negativt heiltal er det same som gjentatt subtraksjon.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= \text{"Like langt og i \textit{same} retning som 2, 3 gonger"} \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 3 &= \text{"Like langt og i \textit{same} retning som } (-2)\text{, 3 gonger"} \\ &= -2 - 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-3) &= \text{"Like langt og i \textit{motsett} retning som 2, 3 gonger"} \\ &= -2 - 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 4

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-4) &= \text{"Like langt og i \textit{motsett} retning som } -3\text{, 4 gonger"} \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Multiplikasjon er kommutativ

Eksempel 2 og *Eksempel 3* på side 63 illustrerer at *Regel 2.2* også er gjeldande ved innføringa av negative tal:

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$$

Det blir tungvint å rekne gonging som gjentatt addisjon/subtraksjon kvar gong vi har eit negativt tal involvert, men som ein direkte konsekvens av *Regel 5.5* kan vi lage oss følgande to reglar:

5.6 Gonging med negative tal I

Produktet av eit negativt og eit positivt tal er eit negativt tal.

Talverdien til faktorane gonga saman gir talverdien til produktet.

Eksempel 1

Rekn ut $(-7) \cdot 8$

Svar:

Sidan $7 \cdot 8 = 56$, er $(-7) \cdot 8 = -56$

Eksempel 2

Rekn ut $3 \cdot (-9)$.

Svar:

Sidan $3 \cdot 9 = 27$, er $3 \cdot (-9) = -27$

5.7 Gonging med negative tal II

Produktet av to negative tal er eit positivt tal.

Talverdien til faktorane gonga saman gir verdien til produktet.

Eksempel 1

$$(-5) \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50$$

Eksempel 2

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8 = 16$$

Divisjon

Definisjon av divisjon (sjå *seksjon 2.4*), kombinert med det vi veit om multiplikasjon med negative tal, gir oss no dette:

$$-18 : 6 = \text{"Talet eg må gonge 6 med for å få } -18\text{"}$$

$$6 \cdot (-3) = -18, \text{ altså er } -18 : 6 = -3$$

$$42 : (-7) = \text{"Talet eg må gonge } -7 \text{ med for å få 42"}$$

$$(-7) \cdot (-8) = 42, \text{ altså er } 42 : (-7) = -8$$

$$-45 : (-5) = \text{"Talet eg må gonge } -5 \text{ med for å få } -45\text{"}$$

$$(-5) \cdot 9 = -45, \text{ altså er } -45 : (-5) = 9$$

5.8 Divisjon med negative tal

Divisjon mellom eit positivt og eit negativt tal gir eit negativt tal.

Divisjon mellom to negative tal gir eit positivt tal.

Talverdien til dividenden delt med talverdien til divisoren gir talverdien til kvotienten.

Eksempel 1

$$-24 : 6 = -4$$

Eksempel 2

$$24 : (-2) = -12$$

Eksempel 3

$$-24 : (-3) = 8$$

Eksempel 4

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Eksempel 5

$$\frac{-10}{7} = -\frac{10}{7}$$

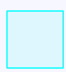
5.3 Negative tal som mengde

Obs! Denne tolkinga av negative tal blir først brukt i seksjon 8.2, som er ein seksjon nokre leserar utan tap av forståing kan hoppe over.

Så langt har vi sett på negative tal ved hjelp av tallinjer. Å sjå på negative tal ved hjelp av mengder er i første omgang vanskeleg, fordi vi har likestilt mengder med antal, og negative antal gir ikkje meining! For å skape ei forståing av negative tal ut ifrå eit mengdeperspektiv, nyttar vi det vi skal kalle *vektprinsippet*. Dette inneber at vi ser på tala som krefter. Dei positive tala er antal krefter som verkar nedover og dei negative tala er antal krefter som verkar oppover[1]. Svara på reknestykker med positive og negative tal kan ein da sjå på som resultatet av ei veiing av dei forskjellige mengdene. Slik vil altså eit positivt tal og eit negativt tal med same talverdi *utlikne* kvarandre.

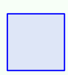
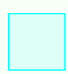
5.9 Negative tal som mengde

Negative tal vil vi indikere som ei lyseblå mengde:

 $= -1$

Eksempel

$$1 + (-1) = 0$$

 $+$  $= 0$

[1]Frå verkelegheita kan ein sjå på dei positive og negative tala som ballongar fylt med høvesvis luft og helium. Ballongar fylt med luft verkar med ei kraft nedover (dei dett), mens heliumbalongar verkar med ei kraft oppover (dei stig).

Kapittel 6

Geometri

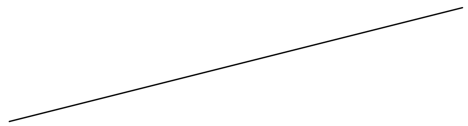
6.1 Omgrep

Punkt

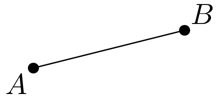
Ei bestemt plassering kallast eit[1] *punkt*. Eit punkt markerer vi ved å teikne ein prikk, som vi gjerne set namn på med ein bokstav. Under har vi teikna punkta A og B.

Linje og linjestykke

Ein rett strek som er uendeleg lang (!) kallar vi ei *linje*. At linja er uendeleg lang, gjer at vi aldri kan *teikne* ei linje, vi kan berre *tenke* oss ei linje. Å tenke seg ei linje kan ein gjere ved å lage ein rett strek, og så forestille seg at endane til streken vandrar ut i kvar si retning.



Ein rett strek som går mellom to punkt kallar vi eit *linjestykke*.

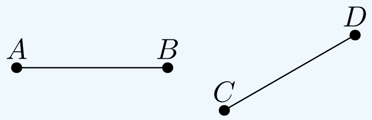


Linjestykket mellom punkta A og B skriv vi som AB.

> **Merk**
>
> Eit linjestykke er eit utklipp (eit stykke) av ei linje, derfor har ei linje og eit linjestykke mange felles eigenskapar. Når vi skriv om linjer, vil det bli opp til lesaren å avgjere om det same gjeld for linjestykker, slik sparar vi oss for heile tida å skrive ”linjer/ linjestykker”.

[1] Sjå også *seksjon 1.3*.

Linjestykke eller lengde?

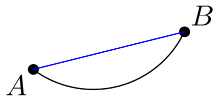


Linjestykka AB og CD har lik lengde, men dei er ikkje det same linjestykket. Likevel kjem vi til å skrive $AB = CD$. Vi bruker altså dei same namna på linjestykker og lengdene deira (det same gjeld for vinklar og vinkelverdiar, sjå side 72 - 74). Dette gjer vi av følgande grunnar:

- Kva tid vi snakkar om eit linjestykke og kva tid vi snakkar om ei lengde vil komme tydeleg fram av samanhengen omgrepet blir brukt i.
- Å heile tida måtte ha skrive "lengda til AB" o.l. ville gitt mindre leservenlege setningar.

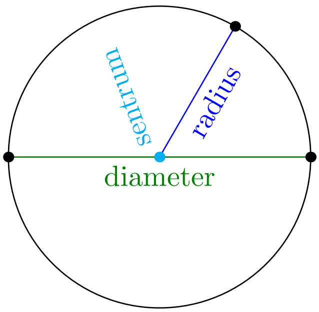
Avstand

Det er uendeleg med vegar ein kan gå frå eitt punkt til eit anna, og nokre vegar vil vere lengre enn andre. Når vi snakkar om avstand i geometri, meiner vi helst den *kortaste* avstanden. For geometriar vi skal ha om i denne boka, vil den kortaste avstanden mellom to punkt alltid vere lengda til linjestykket (blått i figuren under) som går mellom punkta.



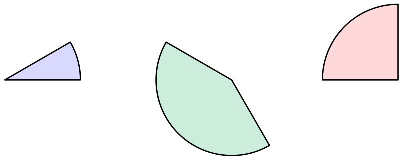
Sirkel; sentrum, radius og diameter

Om vi lagar ein lukka boge der alle punkta på bogen har same avstand til eit punkt, har vi ein *sirkel*. Punktet som alle punkta på bogen har lik avstand til er *sentrum* i sirkelen. Eit linjestykke mellom sentrum og eit punkt på bogen kallar vi ein *radius*. Eit linjestykke mellom to punkt på bogen, og som går via sentrum, kallar vi ein *diameter*[1].



Sektor

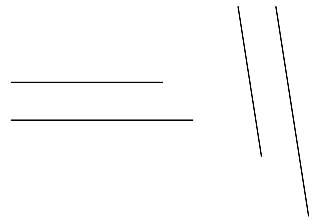
Ein bit som består av ein sirkelboge og to tilhøyrande radier kallast ein *sektor*. Bildet under viser tre forskjellige sektorar.



[1] Som vi har vore inne på kan *radius* og *diameter* like gjerne bli brukt om lengda til linjestykka.

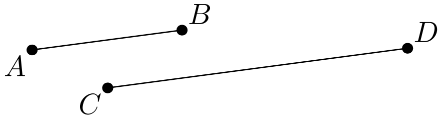
Parallelle linjer

Når linjer går i same retning, er dei *parallelle*. I figuren under visast to par med parallelle linjer.



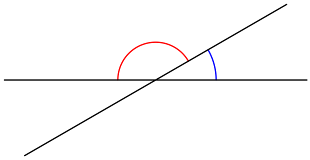
Vi bruker symbolet $\parallel$ for å vise til at to linjer er parallelle.

$$AB \parallel CD$$



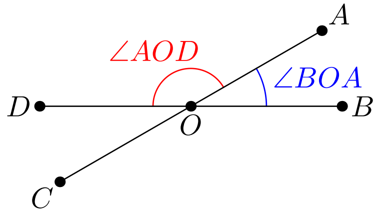
Vinklar

To linjer som ikkje er parallelle, vil før eller sidan krysse kvarandre. Gapet to linjer dannar seg imellom kallast ein *vinkel*. Vinklar teiknar vi som små sirkelboger:



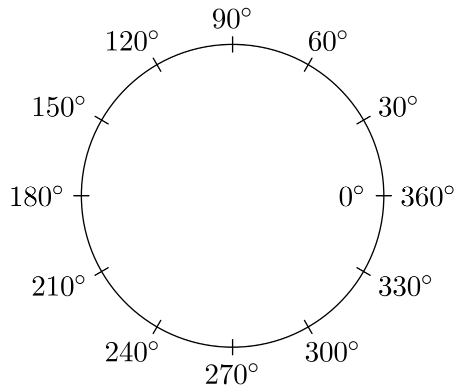
Linjene som dannar ein vinkel kallar vi *vinkelbein*. Punktet der linjene møtast kallar vi *toppunktet* til vinkelen. Ofte bruker vi punktnamn og vinkelsymbolet $\angle$ for å gjere tydeleg kva vinkel vi meiner. I figuren under er det slik at

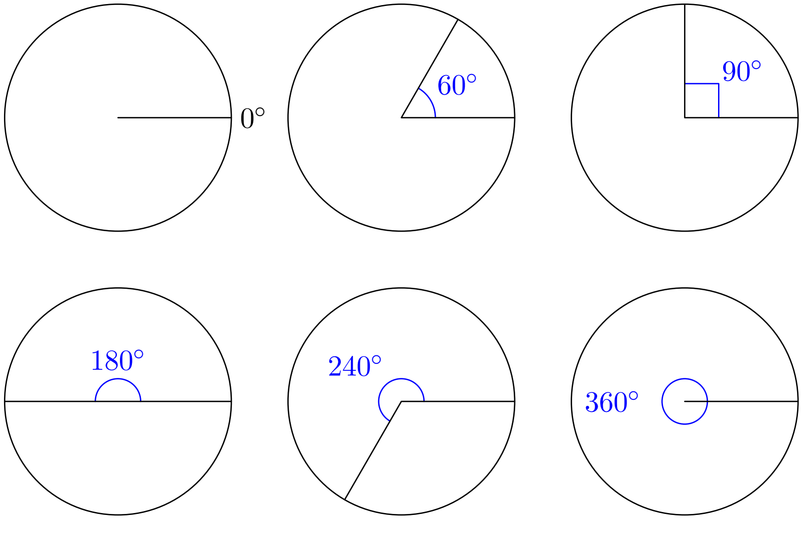
- vinkelen $\angle BOA$ har vinkelbein OB og OA og toppunkt O.
- vinkelen $\angle AOD$ har vinkelbein OA og OD og toppunkt O.



Mål av vinklar i grader

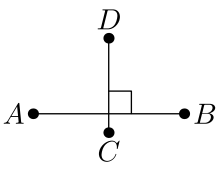
Når vi skal måle ein vinkel i grader, tenker vi oss at ein sirkelboge er delt inn i 360 like lange bitar. Ein slik bit kallar vi ein *grad*, som vi skriv med symbolet $\circ$.





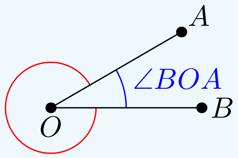
Legg merke til at ein 90° vinkel markerast med symbolet $\square$. Ein vinkel som måler 90° kallast ein *rett* vinkel. Linjer/linjestykker som dannar rette vinklar seier vi står *vinkelrett* på kvarandre. Dette indikerer vi med symbolet $\perp$.

$$AB \perp CD$$

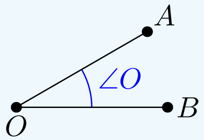


Kva vinkel?

Når to linjestykker møtast i eit felles punkt, dannar dei strengt tatt to vinklar; den eine større eller lik 180°, den andre mindre eller lik 180°. I dei aller fleste samanhengar er det den minste vinkelen vi ønsker å studere, og derfor er det vanleg å definere $\angle AOB$ som den *minste* vinkelen danna av linjestykka OA og OB.

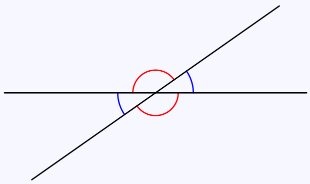


Så lenge det berre er to linjestykker/linjer til stades, er det også vanleg å bruke berre éin bokstav for å vise til vinkelen:

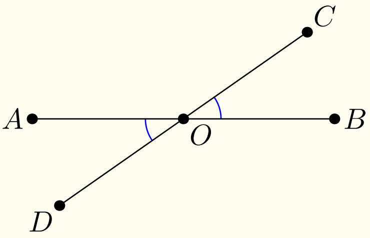


6.1 Toppvinklar

To motstående vinklar med felles toppunkt kallast *toppvinklar*. Toppvinklar er like store.



6.1 Toppvinklar (forklaring)



Vi har at

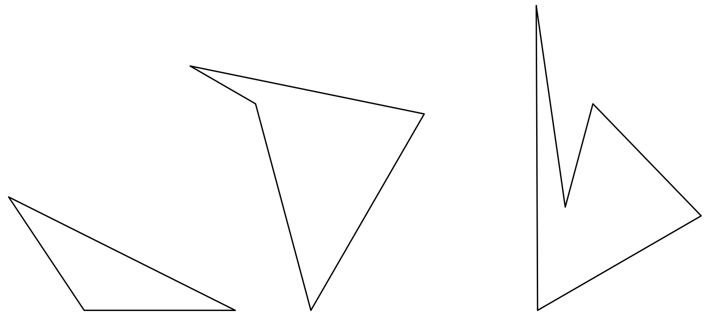
$$\angle BOC + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$$

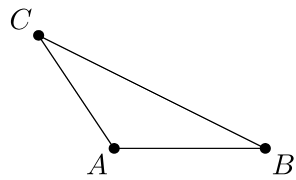
Dette må bety at $\angle BOC = \angle AOD$. Tilsvarande er $\angle COA = \angle DOB$.

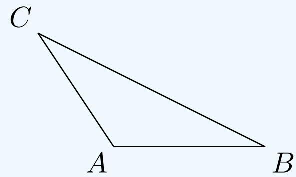
Kantar og hjørner

Når linjestykker dannar ei lukka form, har vi ein *mangekant*. Under ser du (fra venstre mot høgre) ein trekant, ein firkant og ein femkant.



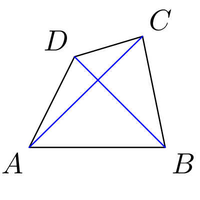
Linjestykka ein mangekant består av kallast *kantar* eller *sider*. Punkta der kantane møtast kallar vi *hjørner*. Trekanten under har altså hjørna A, B og C og sidene (kantane) AB, BC og AC.



> **Merk**
>
> Ofte kjem vi til å skrive berre ein bokstav for å markere eit hjørne i ein mangekant.
>
> 
>

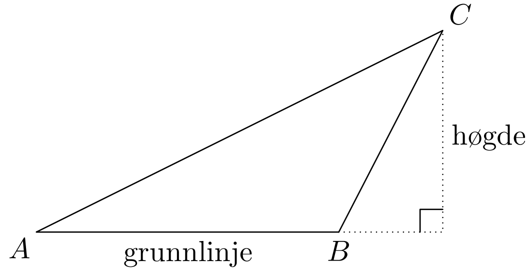
Diagonalar

Eit linjestykke som går mellom to hjørner som ikkje høyrer til same side av ein mangekant kallast ein *diagonal*. I figuren under ser vi diagonalane AC og BD.

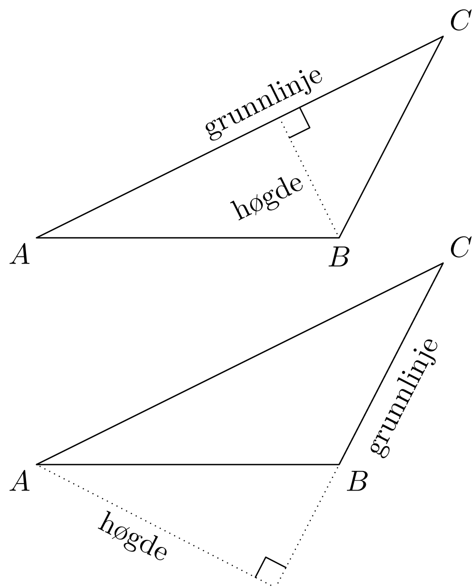


Høgde og grunnlinje

Når vi i *seksjon 6.4* skal finne areal, vil omgrepa *grunnlinje* og *høgde* vere viktige. For å finne ei høgde i ein trekant, tar vi utgangspunkt i ei av sidene. Sida vi velg kallar vi *grunnlinja*. Lat oss starte med AB i figuren under som grunnlinje. Da er *høgda* linjestykket som går fra AB (eventuelt, som her, forlengelsen av AB) til C, og som står vinkelrett på AB.



Da det er tre sider vi kan velge som grunnlinje, har ein trekant tre høgder.



> **Merk**
>
> Høgde og grunnlinje kan også på liknande vis bli brukt i samband med andre mangekantar.

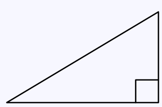
6.2 Eigenskapar for trekantar og firkantar

I tillegg til å ha eit bestemt antal sider og hjørner, kan mangekantar også ha andre eigenskaper, som for eksempel sider eller vinklar av lik størrelse, eller sider som er parallelle. Vi har eigne namn på mangekantar med spesielle eigenskaper, og desse kan vi sette opp i ei oversikt der nokre "arvar"[1] eigenskaper fra andre.

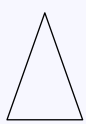
6.2 Trekantar

Trekant → Rettvinkla trekant
Trekant → Likebeint trekant → Likesida trekant

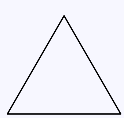
Trekant
Har tre sider og tre hjørner.



Rettvinkla trekant
Har ein vinkel som er 90°.



Likebeint trekant
Minst to sider er like lange.
Minst to vinklar er like store.



Likesida trekant
Sidene er like lange.
Vinklane er 60°.

Eksempel

Da ein likesida trekant har tre sider som er like lange og tre vinklar som er 60°, er den også ein likebeint trekant.

Språkboksen

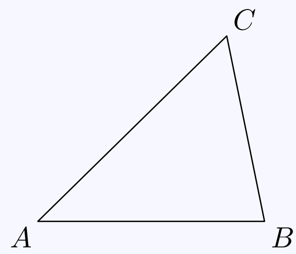
Den lengste sida i ein rettvinkla trekant blir gjerne kalla *hypotenus*. Dei kortaste sidene blir gjerne kalla *katetar*.

[1] I *Regel 6.2* og *Regel 6.4* er dette indikert med piler.

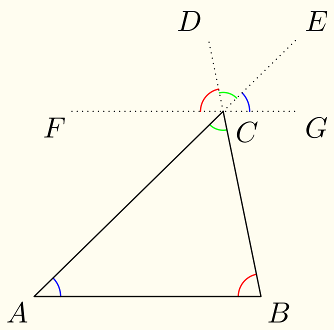
6.3 Summen av vinklane i ein trekant

I ein trekant er summen av vinkelverdiane 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



6.3 Summen av vinklane i ein trekant (forklaring)



Vi teiknar eit linjestykke FG som går gjennom C og som er parallell med AB. Vidare sett vi punktet E og D på forlengelsen av høvesvis AC og BC. Da er $\angle A = \angle GCE$ og $\angle B = \angle DCF$. $\angle ACB = \angle ECD$ fordi dei er toppvinklar. Vi har at

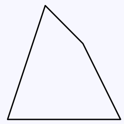
$$\angle DCF + \angle ECD = \angle GCE = 180^\circ$$

Altså er

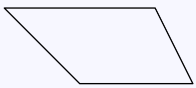
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

6.4 Firkantar

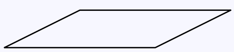
$$\begin{tikzcd} \text{Firkant} \arrow[r] & \text{Trapes} \arrow[r] & \text{Parallellogram} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Rombe} \arrow[r] & \text{Kvadrat} \\ & & & \text{Rektangel} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$



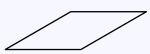
Firkant
Har fire sider og fire hjørner.



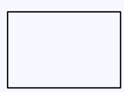
Trapes
Har minst to sider som er parallelle.



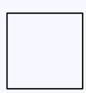
Parallellogram
Har to par med parallelle sider.
Har to par med like vinklar.



Rombe
Sidene er like lange.



Rektangel
Alle vinklane er 90°.



Kvadrat

Eksempel

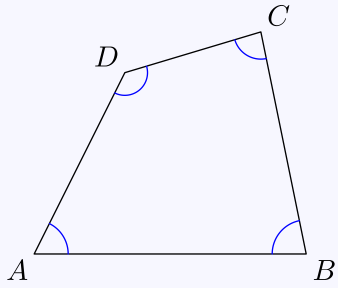
Kvadratet er både ei rombe og eit rektangel, og ”arvar” derfor eigenskapane til desse. Dette betyr at i eit kvadratet er

- alle sidene like lange
- alle vinklane 90°.

6.5 Summen av vinklane i ein firkant

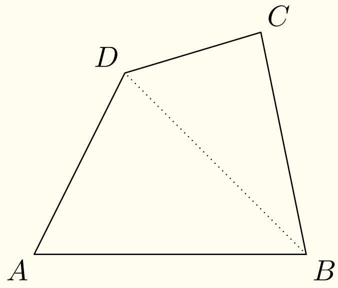
I ein firkant er summen av vinkelverdiane 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



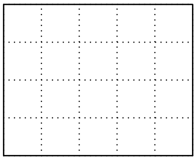
6.5 Summen av vinklane i ein firkant (forklaring)

Den samla vinkelsummen i $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ utgjer vinkelsummen i $\square ABCD$. Av *Regel 6.3* veit vi at vinkelsummen i alle trekantar er 180°, altså er vinkelsummen i $\square ABCD$ lik $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

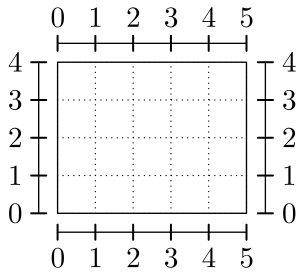


6.3 Omkrins

Når vi måler kor langt det er rundt ei lukka form, finn vi *omkrinsen* til figuren. Lat oss starte med å finne omkrinsen til dette rektangelet:



Rektangelet har to sider med lengde 4 og to sider med lengde 5:



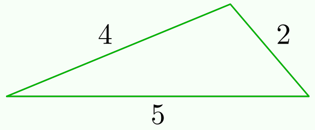
Dette betyr at

$$\begin{aligned}\text{Omkrinsen til rektangelet} &= 4+4+5+5\\ &= 18\end{aligned}$$

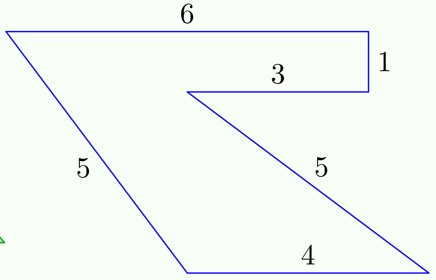
6.6 Omkrins

Omkrins er lengda rundt ein lukka figur.

Eksempel



(a)



(b)

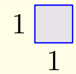
I figur *(a)* er omkrinsen $5+2+4=11$.

I figur *(b)* er omkrinsen $4+5+3+1+6+5=24$.

6.4 Areal

Overalt rundt oss kan vi sjå *overflater*, for eksempel på eit golv eller eit ark. Når vi ønsker å seie noko om kor store overflater er, må vi finne *arealet* deira. Idéen bak omgrepet areal er denne:

Vi tenker oss eit kvadrat med sidelengder 1. Dette kallar vi *einarkvadradet*.

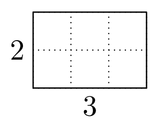


Så ser vi på overflata vi ønsker å finne arealet til, og spør:

"Kor mange eninarkvadrat er det plass til på denne overflata?"

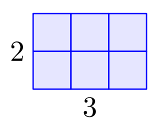
Arealet til eit rektangel

Lat oss finne arealet til eit rektangel som har grunnlinje 3 og høgde 2.



Vi kan da telle oss fram til at rektangelet har plass til 6 einarkvadrat:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 6$$

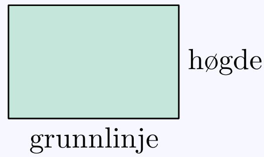


Ser vi tilbake til *seksjon 2.3*, legg vi merke til at

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 3 \cdot 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

6.7 Arealet til eit rektangel

$$\text{Areal} = \text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}$$

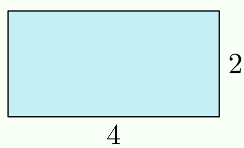


Breidde og lengde

Ofte blir orda *breidde* og *lengde* brukt om grunnlinja og høgda i eit rektangel.

Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet[1].

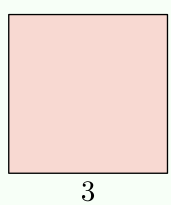


Svar:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 4 \cdot 2 = 8$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar:

$$\text{Arealet til kvadratet} = 3 \cdot 3 = 9$$

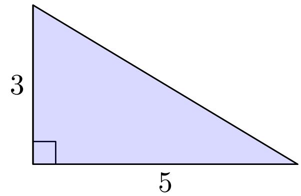
[1] *Merk*: Lengdene vi bruker som eksempel i ein figur vil ikkje naudsynleg samsvare med lengdene i ein anna figur. Ei sidelengde lik 1 i ein figur kan altså vere kortare enn ei sidelengde lik 1 i ein anna figur.

Arealet til ein trekant

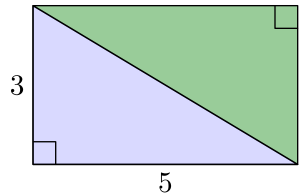
For trekantar er det tre forskjellige tilfelle vi må sjå på:

1) Tilfellet der grunnlinja og høgda har eit felles endepunkt

Lat oss finne arealet til ein rettvinkla trekant med grunnlinje 5 og høgde 3.



Vi kan no lage eit rektangel ved å ta ein kopi av trekanten vår, og så legge langsidene til dei to trekantane saman:



Av *Regel 6.7* veit vi at arealet til rektangelet er $5 \cdot 3$. Arealet til éin av trekantane må utgjere halvparten av arealet til rektangelet, altså er

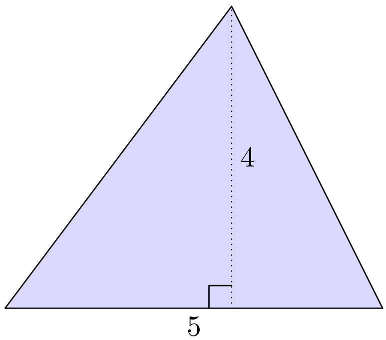
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 3}{2}$$

For den blå trekanten er

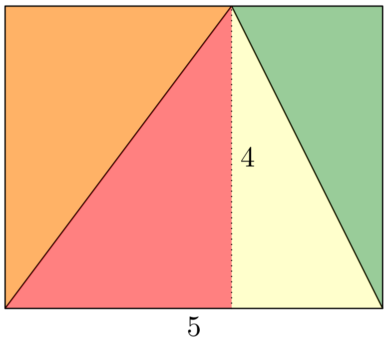
$$\frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

2) Tilfellet der høgda ligg inni trekanten, men ikkje har felles endepunkt med grunnlinja

Trekanten under har grunnlinje 5 og høgde 4.



Med denne trekanten (og høgda) som utgangspunkt, dannar vi denne figuren:



Vi legg no merke til at

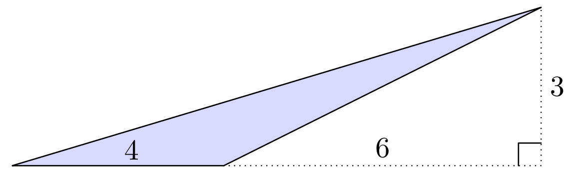
- arealet til den raude trekanten utgjer halve arealet til rektangelet som består av den raude og den gule trekanten.
- arealet til den gule trekanten utgjer halve arealet til rektangelet som består av den gule og den grøne trekanten.

Summen av areala til den gule og den raude trekanten utgjer altså halvparten av arealet til rektangelet som består av alle dei fire farga trekantane. Arealet til dette rektangelet er $5 \cdot 4$, og da vår opprinnelige trekant (den blå) består av den raude og den oransje trekanten, har vi at

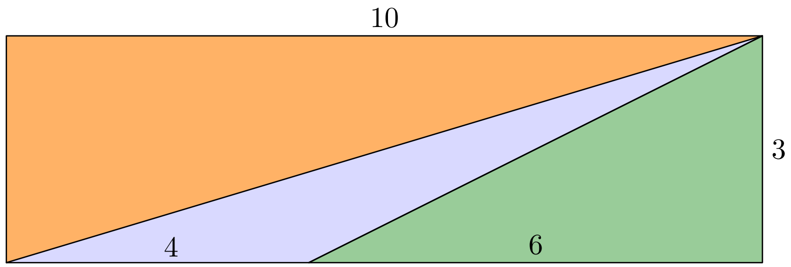
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

3) Tilfellet der høgda ligg utanfor trekanten

Trekanten under har grunnlinje 4 og høgde 3.



Med denne trekanten som utgangspunkt, dannar vi eit rektangel:



Vi gir no areala følgande namn:

$$\begin{aligned}
\text{Arealet til rektangelet} &= R \\
\text{Arealet til den blå trekanten} &= B \\
\text{Arealet til den oransje trekanten} &= O \\
\text{Arealet til den grøne trekanten} &= G
\end{aligned}$$

Da har vi at (både den oransje og den grøne trekanten er rettvinkla)

$$R = 3 \cdot 10 = 30$$

$$O = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

$$G = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Vidare er

$$\begin{aligned}
B &= R - O - G \\
&= 30 - 15 - 9 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Legg no merke til at vi kan skrive

$$6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

I den blå trekanten gjenkjenner vi dette som

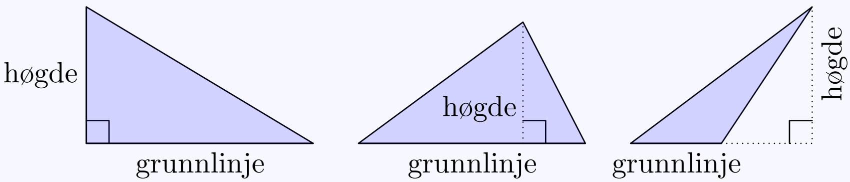
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

Alle tilfella oppsummert

Ein av dei tre tilfella vi har studert vil alltid gjelde for ei valgt grunnlinje i ein trekant, og alle tilfella resulterte i det same uttrykket.

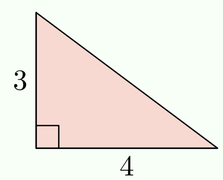
6.8 Arealet til ein trekant

$$\text{Areal} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$



Eksempel 1

Finn arealet til trekanten.

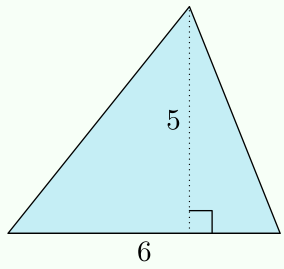


Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$= 6$$

Eksempel 2

Finn arealet til trekanten.

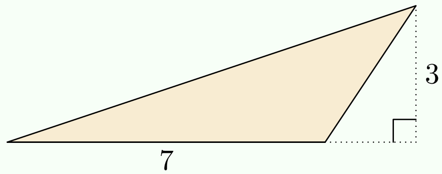


Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Eksempel 3

Finn arealet til trekanten.



Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

Del II

Algebra og geometri

Kapittel 7

Algebra

7.1 Introduksjon

Algebra er kort og godt matematikk der bokstavar representerer tal. Dette gjer at vi lettare kan jobbe med *generelle* tilfelle. For eksempel er $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ og $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$, men desse er berre to av dei uendeleg mange eksempla på at multiplikasjon er kommutativ! Ei av hensiktene med algebra er at vi ønsker å gi *eitt* eksempel som forklarer *alle* tilfelle, og sidan sifra våre (0-9) er uløseleg knytta til bestemde tal, bruker vi bokstavar for å nå dette målet.

Verdien til tala som er representert ved bokstavar vil ofte variere ut ifrå ein samanheng, og da kallar vi desse bokstavtala for *variablar*. Viss bokstavtala derimot har ein bestemd verdi, kallar vi dei for *konstantar*.

I *Del I* av boka har vi sett på rekning med konkrete tal, likevel er dei fleste reglane vi har utleda *generelle*; dei gjeld for alle tal. På side 92-95 har vi gjengitt mange av desse reglane på ei meir generell form. Ein fin introduksjon til algebra er å samanlikne reglane du finn her med slik du finn dei[1] i *Del I*.

7.1 Addisjon er kommutativ (2.1)

$$a + b = b + a$$

Eksempel

$$7 + 5 = 5 + 7$$

7.2 Multiplikasjon er kommutativ (2.2)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Eksempel 1

$$9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$$

Eksempel 2

$$8 \cdot a = a \cdot 8$$

[1] Reglane sine nummer i *Del I* står i parentes.

Gonging med bokstavuttrykk

Når ein gongar saman bokstavar, er det vanleg å utelate gongeteiknet. Og om ein gongar saman ein bokstav og eit konkret tal, skriv ein det konkrete talet først. Dette betyr for eksempel at

$$a \cdot b = ab$$

og at

$$a \cdot 8 = 8a$$

I tillegg skriv vi også

$$1 \cdot a = a$$

Det er også vanleg å utelate gongeteikn der parentesuttrykk er ein faktor:

$$3 \cdot (a + b) = 3(a + b)$$

7.3 Brøk som omskriving av delestykke (4.1)

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Eksempel

$$a : 2 = \frac{a}{2}$$

7.4 Brøk gonga med brøk (4.8)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Eksempel 1

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 21} = \frac{26}{231}$$

Eksempel 2

$$\frac{3}{b} \cdot \frac{a}{7} = \frac{3a}{7b}$$

7.5 Deling med brøk (4.10)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Eksempel 1

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{a}{13} : \frac{b}{3} &= \frac{a}{13} \cdot \frac{3}{b} \\ &= \frac{3a}{13b} \end{aligned}$$

7.6 Gonging med parentes (distributiv lov) (3.5)

$$(a+b)c = ac + bc$$

Eksempel 1

$$(2+a)b = 2b + ab$$

Eksempel 2

$$a(5b-3) = 5ab - 3a$$

7.7 Gonging med negative tal I (5.6)

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) &= -(3 \cdot 4) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(-a)\cdot 7 &= -(a\cdot 7)\\ &= -7a\end{aligned}$$

7.8 Gonging med negative tal II (5.7)

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(-2)\cdot(-8) &= 2\cdot 8\\ &= 16\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(-a)\cdot(-15) = 15a$$

Utvidingar av reglane

Noko av styrken til algebra er at vi kan lage oss kompakte reglar som det er lett å utvide også til andre tilfelle. Lat oss som eit eksempel finne eit anna uttrykk for

$$(a+b+c)d$$

Regel 7.6 fortel oss ikkje direkte korleis vi kan rekne mellom parentesuttrykket og d, men det er ingenting som hindrar oss i å omdøpe $a+b$ til k:

$$a+b=k$$

Da er

$$(a+b+c)d = (k+c)d$$

Av *Regel 7.6* har vi no at

$$(k+c)d = kd+cd$$

Om vi sett inn att uttrykket for k, får vi

$$kd+cd = (a+b)d+cd$$

Ved å utnytte *Regel 7.6* enda ein gong kan vi skrive

$$(a+b)d+cd = ad+bc+cd$$

Altså er

$$(a+b+c)d = ad+bc+cd$$

Obs! Dette eksempelet er ikkje meint for å vise korleis ein skal gå fram når ein har uttrykk som ikkje direkte er omfatta av Regel *7.1 - 7.8, men for å vise kvifor det alltid er nok å skrive reglar med færrast moglege ledd, faktorar og liknande. Oftast vil ein bruke utvidingar av reglane utan eingong å tenke over det, og i alle fall langt ifrå så pertentleg som det vi gjorde her.*

7.2 Potensar

$$\text{grunntal} \longrightarrow 2^{3 \longleftarrow \text{eksponent}}$$

Ein potens består av eit *grunntal* og ein *eksponent*. For eksempel er 2^3 ein potens med grunntal 2 og eksponent 3. Ein positiv, heiltals eksponent seier kor mange eksemplar av grunntalet som skal gongast saman, altså er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

7.9 Potenstall

a^n er eit potenstal med grunntal a og eksponent n.

Viss n er eit naturleg tal, vil a^n svare til n eksemplar av a multiplisert med kvarandre.

Merk: $a^1 = a$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} (-7)^2 &= (-7) \cdot (-7) \\ &= 49 \end{aligned}$$

Språkboksen

Vanlege måtar å seie 2^3 på er

- "2 i tredje"
- "2 opphøgd i 3"

I programmeringsspråk brukast gjerne symbolet `^` eller symbola `**` mellom grunntall og eksponent.

Merk

Dei komande sidene vil innehalde reglar for potensar med tilhøyrande forklaringar. Sjølv om det er ønskeleg at dei har ei så generell form som mogleg, har vi i forklaringane valgt å bruke eksempel der eksponentane ikkje er variablar. Å bruke variablar som eksponentar ville gitt mykje mindre leservenlege uttrykk, og vi vil påstå at dei generelle tilfella kjem godt til synes også ved å studere konkrete tilfelle.

7.10 Gonging med potensar

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 3^2 &= 3^{5+2} \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} b^4 \cdot b^{11} &= b^{3+11} \\ &= b^{14} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^{-7} &= a^{5-7} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

(Sjå *Regel 7.13* for korleis potens med negativ eksponent kan tolkast.)

7.10 Gonging med potensar (forklaring)

Lat oss sjå på tilfellet

$$a^2 \cdot a^3$$

Vi har at

$$a^2 = 2 \cdot 2$$

$$a^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Med andre ord kan vi skrive

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= \overbrace{a \cdot a}^{a^2} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{a^3} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

7.11 Divisjon med potensar

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Eksempel 1

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{2^4 \cdot a^7}{a^6 \cdot 2^2} &= 2^{4-2} \cdot a^{7-6} \\ &= 2^2 a \\ &= 4a \end{aligned}$$

7.11 Divisjon med potensar (forklaring)

Lat oss undersøke brøken

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Vi skriv ut potensane i tellar og nemnar:

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}\\ &= \frac{\cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot a\cdot a\cdot a}{\cancel{a}\cdot \cancel{a}}\\ &= a\cdot a\cdot a\\ &= a^3\end{aligned}$$

Dette kunne vi ha skrive som

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= a^{5-2}\\ &= a^3\end{aligned}$$

7.12 Spesialtilfellet a^0

$$a^0 = 1$$

Eksempel 1

$$1000^0 = 1$$

Eksempel 2

$$(-b)^0 = 1$$

7.12 Spesialtilfellet a^0 (forklaring)

Eit tal delt på seg sjølv er alltid lik 1, derfor er

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Av dette, og *Regel 7.11*, har vi at

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a^n}{a^n}\\ &= a^{n-n}\\ &= a^0\end{aligned}$$

7.13 Potens med negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel 1

$$a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Eksempel 2

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

7.13 Potens med negativ eksponent (forklaring)

Av *Regel 7.12* har vi at $a^0 = 1$. Altså er

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$

Av *Regel 7.11* er

$$\begin{aligned} \frac{a^0}{a^n} &= a^{0-n} \\ &= a^{-n} \end{aligned}$$

7.14 Brøk som grunntal

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Eksempel 1

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Eksempel 2

$$\left(\frac{a}{7}\right)^3 = \frac{a^3}{7^3} = \frac{a^3}{343}$$

7.14 Brøk som grunntal (forklaring)

Lat oss studere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\\ &= \frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}\\ &= \frac{a^3}{b^3}\end{aligned}$$

7.15 Faktorar som grunntal

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(3a)^5 &= 3^5a^5\\ &= 243a^5\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(ab)^4 = a^4b^4$$

7.15 Faktorar som grunntal (forklaring)

Lat oss bruke $(a\cdot b)^3$ som eksempel. Vi har at

$$\begin{aligned}(a\cdot b)^3 &= (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\\ &= a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\\ &= a^3b^3\end{aligned}$$

7.16 Potens som grunntal

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\left(c^4\right)^5 &= c^{4\cdot 5} \\ &= c^{20}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^8 &= 3^{\frac{5}{4}\cdot 8} \\ &= 3^{10}\end{aligned}$$

7.16 Potens som grunntal (forklaring)

Lat oss bruke $\left(a^3\right)^4$ som eksempel. Vi har at

$$\left(a^3\right)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$

Av *Regel 7.10* er

$$\begin{aligned}a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 &= a^{3+3+3+3} \\ &= a^{3\cdot 4} \\ &= a^{12}\end{aligned}$$

7.17 n-rot

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Symbolet $\sqrt{}$ kallast eit *rotteikn*. For eksponenten $\frac{1}{2}$ er det vanleg å utelate 2 i rotteiknet:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Eksempel

Av *Regel 7.16* har vi at

$$\begin{aligned}\left(a^b\right)^{\frac{1}{b}} &= a^{b\cdot\frac{1}{b}} \\ &= a\end{aligned}$$

For eksempel er

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \text{ sidan } 3^2 = 9$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \text{ sidan } 5^3 = 125$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ sidan } 2^4 = 16$$

Språkboksen

$\sqrt{9}$ kallast ”kvadratrota til 9”

$\sqrt[5]{9}$ kallast ”femterota til 9”.

7.3 Irrasjonale tal

7.18 Irrasjonale tal

Eit tal som *ikkje* er eit rasjonalt tal, er eit irrasjonalt tal[1].

Verdien til eit irrasjonalt tal har uendeleg mange desimalar med eit ikkje-repeterande mønster.

Eksempel 1

$\sqrt{2}$ er eit irrasjonalt tal.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373...$$

[1]Strengt tatt er irrasjonale tal alle *reelle* tal som ikkje er rasjonale tal. Men for å forklare kva *reelle* tal er, må vi forklare kva *imaginære* tal er, og det har vi valgt å ikkje gjere i denne boka.

Kommentar (for den spesielt interesserte)

Matematikk er såkalla *aksiomatisk* oppbygd. Dette betyr at vi erklærer nokre[1] påstandar for å vere sanne, og desse kallar vi for *aksiom* eller *postulat*. I rekning har ein om lag 12 aksiom[2], men i denne boka har vi holdt oss til å nemne desse 6:

Aksiom

For tala a, b og c har vi at

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{A1}$$

$$a + b = b + a \tag{A2}$$

$$a(bc) = (ab)c \tag{A3}$$

$$ab = ba \tag{A4}$$

$$a(b + c) = ab + ac \tag{A5}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad (a \neq 0) \tag{A6}$$

(A1) Assosiativ lov ved addisjon
(A2) Kommutativ lov ved addisjon
(A3) Assosiativ lov ved multiplikasjon
(A4) Kommutativ lov ved multiplikasjon
(A5) Distributiv lov
(A6) Eksistens av multiplikativ identitet

Aksioma legg sjølve fundamentet i eit matematisk system. Ved hjelp av dei finn vi fleire og meir komplekse sanningar som vi kallar *teorem*. I denne boka har vi valgt å kalle både aksiom, definisjonar og teorem for *reglar*. Dette fordi aksiom, definisjonar og teorem alle i praksis gir føringar (reglar) for handlingsrommet vi har innanfor det matematiske systemet vi opererer i.

[1] Helst så få som mogleg.

[2] Talet avheng litt av korleis ein formulerer påstandane.

I *Del I* har vi forsøkt å presentere *motivasjonen* bak aksioma, for dei er sjølvsagt ikkje tilfeldig utvalde. Tankerekka som leder oss fram til dei nemnde aksioma kan oppsummerast slik:

1. Vi definerer positive tal som representasjonar av enten ei mengde eller ei plassering på ei tallinje.

2. Vi definerer kva addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon inneber for positive heiltal (og 0).

3. Ut ifrå punkta over tilseier all fornuft at (A1) - (A6) må gjelde for alle positive heiltal.

4. Vi definerer også brøk som representasjonar av ei mengde eller som ei plassering på ei tallinje. Kva dei fire rekneartane inneber for brøkar bygger vi på det som gjeld for positive heiltal.

5. Ut ifrå punkta over finn vi at (A1) - (A6) gjeld for alle positive, rasjonale tal.

6. Vi innfører negative heiltal, og utvider tolkinga av addisjon og subtraksjon. Dette gir så ei tolking av multiplikasjon og divisjon med negative heiltal.

7. (A1) - (A6) gjeld også etter innføringa av negative heiltal. Å vise at dei også gjeld for negative, rasjonale tal er da ein rein formalitet.

8. Vi kan aldri skrive verdien til eit irrasjonalt tal heilt eksakt, men verdien kan tilnærmast ved eit rasjonalt tal[1]. Alle utrekningar som inneber irrasjonale tal er derfor i *praksis* utrekningar som inneber rasjonale tal, og slik kan vi seie at[2] (A1) - (A6) gjeld også for irrasjonale tal.

Ei liknande tankerekke kan nyttast for å argumentere for potensreglane vi fann i *seksjon 7.2*.

[1] For eksempel kan ein skrive $\sqrt{2} = 1.414213562373... \approx \frac{1414213562373}{1000000000000}$

[2] *Obs!* Denne forklaringa er god nok for boka sitt formål, men er ei ekstrem forenkling. Irrasjonale tal er eit komplisert tema som mange bøker for avansert matematikk bruker mange kapittel for å forklare i full dybde.

Kapittel 8

Likningar

8.1 Introduksjon

Eit kvart matematisk uttrykk som inneheld $=$ er ei *likning*, likevel er ordet likning tradisjonelt knytt til at vi har eit *ukjend* tal.

Sei at vi ønsker å finne eit tal som er slik at viss vi legg til 4, så får vi 7. Dette talet kan vi kalle for kva som helst, men det vanlegaste er å kalle det for x, som altså er det ukjende talet vårt. Likninga vår kan no skrivast slik:

$$x + 4 = 7$$

x-verdien[1] som gjer at det blir same verdi på begge sider av likskapsteiknet kallast *løysinga* av likninga. Det er alltids lov til å sjå eller prøve seg fram for å finne verdien til x. Kanskje har du allereie merka at $x = 3$ er løysinga av likninga, sidan

$$3 + 4 = 7$$

Men dei fleste likningar er det vanskelig å sjå eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til meir generelle løysingsmetodar. Eigentleg er det berre eitt prinsipp vi følg:

> Vi kan alltid utføre ein matematisk operasjon på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi utfører den også på den andre sida.

Dei matematiske operasjonane vi har presentert i denne boka er dei fire rekneartane. Med desse lyd prinsippet slik:

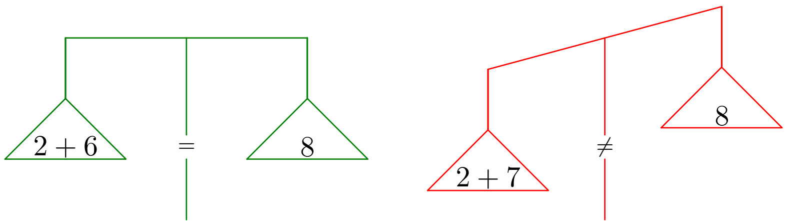
> Vi kan alltid legge til, trekke ifrå, gonge eller dele med eit tal på den eine sida av likskapsteiknet, så lenge vi gjer det også på den andre sida.

Prinsippet følg av tydinga til $=$. Når to uttrykk har same verdi, må dei naudsynleg fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører dei same matematiske operasjonane på dei. I komande seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for kvar enkelt rekneoperasjon, men viss du føler dette allereie gir god meining kan du med fordel hoppe til *seksjon 8.3*.

[1] I andre tilfelle kan det vere fleire verdiar.

8.2 Løysing ved dei fire rekneartane

I figurane til denne seksjonen skal vi forstå likningar ut ifrå eit vektprinsipp. $=$ *vil da indikere*[1] *at det er like mykje vekt (lik verdi) på venstre side som på høgre side.*

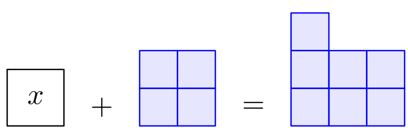


Addisjon og subtraksjon; tal som skifter side

Første eksempel

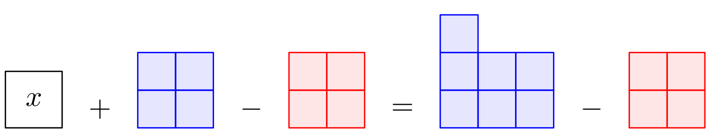
Vi har allereie funne løysinga på denne likninga, men lat oss løyse den på ein annan måte[2]:

$$x + 4 = 7$$



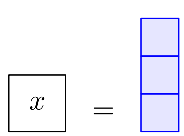
Det blir tydeleg kva verdien til x er viss x står aleine på ei av sidene, og x blir isolert på venstresida viss vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresida, må vi ta bort 4 fra høgresida òg, skal begge sidene ha same verdi.

$$x + 4 - {\color{red}4} = 7 - {\color{red}4}$$



Da $4 - {\color{red}4} = 0$ og $7 - {\color{red}4} = 3$, får vi at

$$x = 3$$



[1] $\neq$ er symbolet for ”er *ikkje* lik”.

[2] *Merk:* I tidlegare figurar har det vore samsvar mellom størrelsen på rutene og (tal)verdien til talet dei symboliserer. Dette gjeld ikkje rutene som representerer x.

Dette kunne vi ha skrive noko meir kortfatta slik:

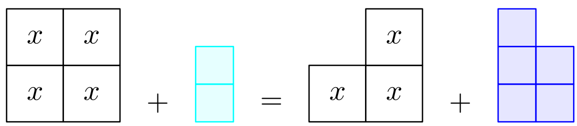
$$\begin{aligned} x + 4 &= 7 \\ x &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Mellom første og andre linje er det vanleg å seie at *4 har skifta side, og derfor også fortegn (fra + til −).*

Andre eksempel

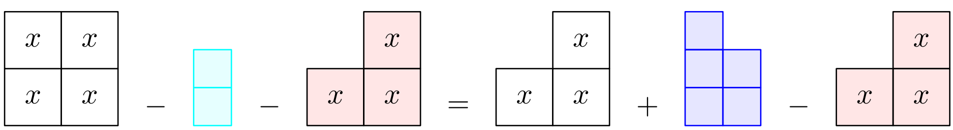
Lat oss gå videre til å sjå på ei litt vanskelegare likning[1]:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



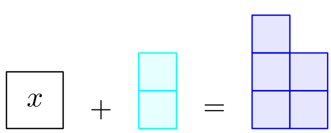
For å skaffe eit uttrykk med x berre på éi side, tar vi vekk $3x$ på begge sider:

$$4x - 2 - {\color{red}3x} = 3x + 5 - {\color{red}3x}$$



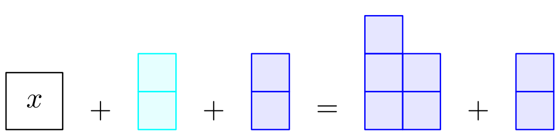
Da får vi at

$$x - 2 = 5$$



For å isolere x, legg vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høgre side:

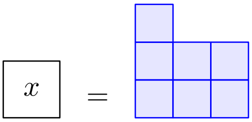
$$x - 2 + {\color{blue}2} = 5 + {\color{blue}2}$$



[1]Legg merke til at figuren illustrerer $4x + (-2)$ (sjå *seksjon 5.3*) på venstre side. Men $4x + (-2)$ er det same som $4x - 2$ (sjå *seksjon 5.2*).

Da får vi at

$$x = 7$$



Stega vi har tatt kan oppsummerast slik:

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. figur}\\
4x - 3x - 2 &= 3x - 3x + 5 && \text{2. figur}\\
x - 2 &= 5 && \text{3. figur}\\
x - 2 + 2 &= 5 + 2 && \text{4. figur}\\
x &= 7 && \text{5. figur}
\end{aligned}
$$

Dette kan vi på ein forenkla måte skrive slik:

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5\\
4x - 3x &= 5 + 2\\
x &= 7
\end{aligned}
$$

8.1 Flytting av tal over likskapsteiknet

I ei likning ønsker vi å samle alle x-ledd og alle kjente ledd på kvar si side av likskapsteiknet. Skifter eit ledd side, skifter det forteikn.

Eksempel 1

Løys likninga

$$3x + 3 = 2x + 5$$

Svar:

$$
\begin{aligned}
3x - 2x &= 5 - 3\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Svar:

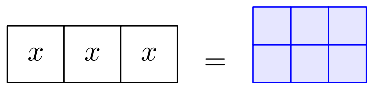
$$
\begin{aligned}
-4x + 5x &= 12 + 3\\
x &= 15
\end{aligned}
$$

Gonging og deling

Deling

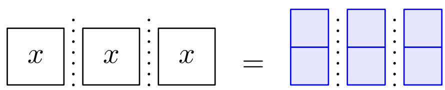
Hittil har vi sett på likningar der vi endte opp med éin x på den eine sida av likhetsteiknet. Ofte har vi fleire x-ar, som for eksempel i likninga

$$3x = 6$$



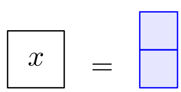
Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi éin x i kvar gruppe. Deler vi også høgresida inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den same verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$



Altså er

$$x = 2$$



Lat oss oppsummere utrekninga vår:

$$3x = 6 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \qquad \text{2. figur}$$

$$x = 2 \qquad \text{3. figur}$$

Du huskar kanskje at vi gjerne skriv

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$$

8.2 Deling på begge sider av ei likning

Vi kan dele begge sider av ei likning med det same talet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$4x = 20$$

Svar:

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$2x + 6 = 3x - 2$$

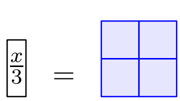
Svar:

$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad (-x = -1x)$$
$$x = 8$$

Gonging

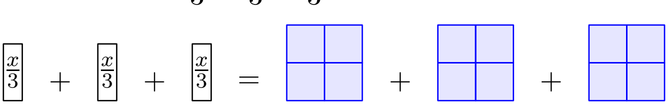
Det siste tilfellet vi skal sjå på er når likningar inneheld brøkdelar av den ukjende, som for eksempel i likninga

$$\frac{x}{3} = 4$$



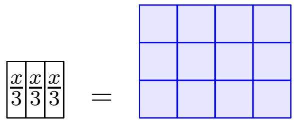
Vi kan få éin x på venstresida viss vi legg til to eksemplar av $\frac{x}{3}$. Likninga fortel oss at $\frac{x}{3}$ har same verdi som 4. Dette betyr at for kvar $\frac{x}{3}$ vi legg til på venstresida, må vi legge til 4 på høgresida, skal sidene ha same verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$



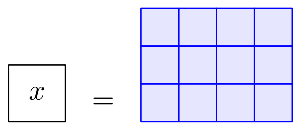
Vi legger no merke til at $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{x}{3}\cdot 3$ og at $4+4+4=4\cdot 3$:

$$\frac{x}{3}\cdot 3 = 4\cdot 3$$



Og da $\frac{x}{3}\cdot 3 = x$ og $4\cdot 3 = 12$, har vi at

$$x = 12$$



Ei oppsummering av stega våre kan vi skrive slik:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= 4 && \text{1. figur} \\ \frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3} &= 4+4+4 && \text{2. figur} \\ \frac{x}{3}\cdot 3 &= 4\cdot 3 && \text{3. figur} \\ x &= 12 && \text{4. figur} \end{aligned}$$

Dette kan vi kortare skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3} = 4\cdot 3$$

$$x = 12$$

8.3 Gonging på begge sider av ei likning

Vi kan gonge begge sider av ei likning med det same talet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar:

$$\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 2 \cdot 5$$

$$x = 10$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Svar:

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$

$$\frac{6x}{10} = 18$$

$$\frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 18 \cdot 10$$

$$6x = 180$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

8.3 Løysingsmetodane oppsummert

8.4 Løysingsmetodar for likningar

Vi kan alltid

- addere eller subtrahere begge sider av ei likning med det same talet. Dette er ekvivalent til å flytte eit ledd fra den eine sida av likninga til den andre, så lenge vi også skiftar forteikn på leddet.
- gonge eller dele begge sider av ei likning med det same tallet.

Eksempel 1

Løys likninga

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 6 + 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$9 - 7x = 8x + 3$$

Svar:

$$\begin{aligned} 9 - 7x &= -8x + 3 \\ 8x - 7x &= 3 - 9 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Løys likninga

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 10x - 20 &= 7x - 5 \\ 10x - 7x &= 20 - 5 \\ 3x &= 15 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Eksempel 4

Løys likninga

$$15 - 4x = x + 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 15 - 5 &= x + 4x \\ 10 &= 5x \\ \frac{10}{5} &= \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Eksempel 5

Løys likninga

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} &= 20 + 8 \\ \frac{\cancel{7}x}{9 \cdot \cancel{7}} &= \frac{28}{7} \\ \frac{x}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} &= 4 \cdot 9 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Eksempel 6

Løys likninga

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Svar:

Får å unngå brøkar, gongar vi begge sider med fellesnemnaren 12:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 = \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12$$

$$\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12$$

$$4x + 2 = 5x + 24$$

$$4x - 5x = 24 - 2$$

$$-x = 22$$

$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{22}{-1}$$

$$x = -22$$

Tips

Mange liker å lage seg ein regel om at "vi kan gonge eller dele alle ledd med det same talet". I eksempelet over kunne vi da hoppa direkte til andre linje i utrekninga.

Eksempel 7

Løys likninga

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Svar:

Vi gongar begge sider med fellesnemnaren $2x$:

$$2x\left(3 - \frac{6}{x}\right) = 2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right)$$

$$6x - 12 = 4x + 5$$

$$6x - 4x = 5 + 12$$

$$2x = 17$$

$$x = \frac{17}{2}$$

8.4 Potenslikningar

Lat oss løyse likninga

$$x^2 = 9$$

Dette kallast ei *potenslikning*. Potenlikningar er vanlegvis vanskelege å løyse berre ved hjelp av dei fire rekneartane, så her må vi også nytte oss av potensreglar. Vi opphøg begge sidene av likninga med den omvende brøken[1] til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av *Regel 7.16* er

$$x^{2\cdot\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$
$$x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Sidan $3^2 = 9$, er $9^{\frac{1}{2}} = 3$. No legg vi merke til dette:

Prinsippet erklært på side **??** *sier at vi kan, som vi no gjorde, utføre ein matematisk operasjon på begge sider av likninga. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikkje at alle løysingar er funne.*

Når det kjem til vår likning, er $x = 3$ ei løysing. For orden si skuld kan vi bekrefte dette med utrekninga

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også ei løysing av likninga vi starta med!

8.5 Potenslikningar

Ei likning som kan bli skriven som

$$x^a = b$$

der a og b er konstantar, er ei *potenslikning*.

Likninga har a forskjellige løysingar.

[1]Hugs at $2 = \frac{2}{1}$.

Eksempel 1

Løys likninga

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Sidan $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$, har vi at

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = -4$$

Eksempel 2

Løys likninga

$$3x^2 + 1 = 7$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 - 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad x = -\sqrt{2}$$

Merk

Sjølv om likninga

$$x^a = b$$

har a løysingar, er ikkje alle naudsynleg *reelle*[1]. I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tal som løyser likninga. For eksempel har likning,

$$x^3 = 8$$

3 løysingar, men vi nøyer oss med å finne at $x = 2$ er ei løysing.

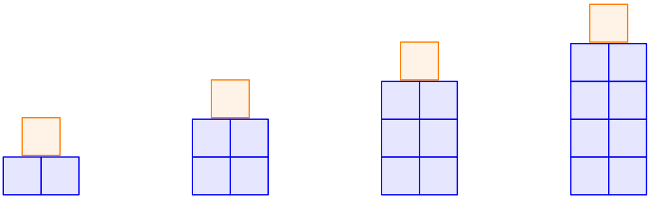
[1]Som vi tidlegare har vore inne på, er *reelle* og *imaginære* tal noko vi ikkje går nærare inn på i denne boka

Kapittel 9

Funksjonar

9.1 Introduksjon

Variablar er verdiar som forandrar seg. Ein verdi som forandrar seg i takt med at ein variabel forandrar seg, kallar vi ein *funksjon*.



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4*

I figurane over forandrar antalet ruter seg etter eit bestemt mønster. Matematisk kan vi skildre dette mønsteret slik:

$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur 1} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur 2} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur 3} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur 4} = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

For ein figur med eit vilkårleg nummer x har vi at

$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } x = 2x + 1$$

Antal ruter forandrar seg altså i takt med at x forandrar seg, og da seier vi at

> ”Antal ruter i *Figur* x” er ein funksjon av x

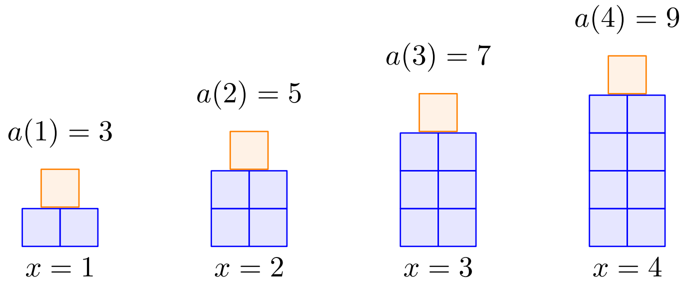
> $2x + 1$ er *funksjonsuttrykket* til funksjonen ”Antal ruter i *Figur* x”

Generelle uttrykk
Skulle vi jobba vidare med funskjonen vi akkurat har sett på, ville det blitt tungvint å heile tida måtte skrive ”Antal ruter i *Figur* x”. Det er vanleg å kalle også funksjonar berre for ein bokstav, og i tillegg skrive variabelen funskjonen er avhengig av i parentes. Lat oss no omdøpe funksjonen ”Antal ruter i *Figur* x” til $a(x)$. Da har vi at

$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } x = a(x) = 2x + 1$$

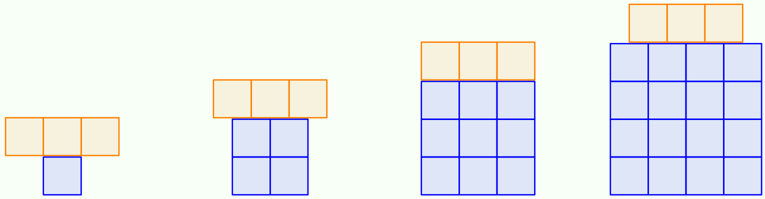
Viss vi skriv $a(x)$, men erstattar x med eit bestemt tal, betyr det at vi skal erstatte x med dette talet i funksjonsuttrykket vårt:

$$\begin{aligned} a(1) &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a(2) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ a(3) &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a(4) &= 2 \cdot 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$



Eksempel

Lat antal ruter i mønsteret under vere gitt av funksjonen $a(x)$.



a) Finn uttrykket for $a(x)$.

b) Kor mange ruter er det når $x = 10$?

c) Kva er verdien til x når $a(x) = 628$?

Svar:

a) Vi legg merke til at

- Når $x = 1$, er det $1 \cdot 1 + 3 = 4$ ruter.
- Når $x = 2$, er det $2 \cdot 2 + 3 = 7$ ruter.
- Når $x = 3$, er det $3 \cdot 3 + 3 = 12$ ruter.
- Når $x = 4$, er det $4 \cdot 4 + 3 = 17$ ruter.

Altså er

$$a(x) = x \cdot x + 3 = x^2 + 3$$

b)

$$a(10) = 10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$$

Når $x = 10$, er det 103 ruter.

c) Vi har likninga

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 628 \\ x^2 &= 625 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = 15 \qquad \vee \qquad x = -15$$

Sidan vi søker ein positiv verdi for x, er $x = 15$.

9.2 Lineære funksjonar og grafar

Når vi har ein variabel x og ein funksjon $f(x)$, har vi to verdiar; verdien til x og den tilhøyrande verdien til $f(x)$. Desse para av verdiar kan vi sette inn i eit koordinatsystem[1], og da får vi *grafen* til $f(x)$.

Lat oss bruke funksjonen

$$f(x) = 2x - 1$$

som eksempel. Vi har at

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Desse para av verdiar kan vi sette opp i ein tabell:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	3	5

Tabellen over gir punkta

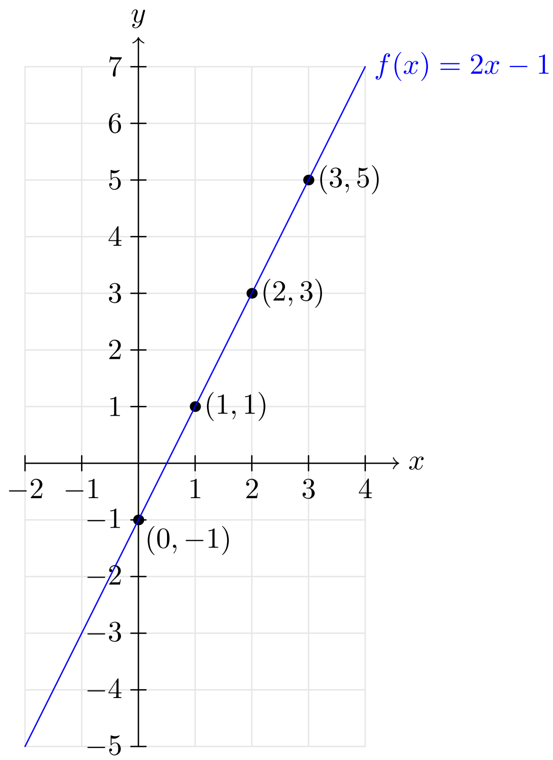
$$(0, -1) \qquad (1, 1) \qquad (2, 3) \qquad (3, 5)$$

Vi plasserer no punkta i eit koordinatsystem (sjå figur på side 127). I samband med funksjonar er det vanleg å kalle horisontalaksen og vertikalaksen for høvesvis x-aksen og y-aksen. Grafen til $f(x)$ er no ein tenkt strek som går gjennom alle dei uendeleg mange punkta vi kan lage av x-verdiar og dei tilhøyrande $f(x)$-verdiane. Vår funksjon er ein *lineær* funksjon, noko som betyr at grafen er ei rett linje. Altså kan grafen teiknast ved å teikne linja som går gjennom punkta vi har funne.

Som vi har vore inne på før, kan vi aldri teikne ei heil linje, berre eit utklipp av ho. Dette gjeld som regel også for grafar. I figuren på side 127 har vi teikna grafen til $f(x)$ for x-verdiar mellom -2 og 4. At x er i dette *intervallet* kan vi skrive som[2] $-2 \leq x \leq 4$ eller $x \in [-2, 4]$.

[1] Sjå *seksjon 1.3*.

[2] Sjå symbolforklaringar på side 4.



y
x
$f(x) = 2x - 1$
$(3, 5)$
$(2, 3)$
$(1, 1)$
$(0, -1)$
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−2
−1
1
2
3
4

9.1 Lineære funksjonar

Ein funksjon på forma

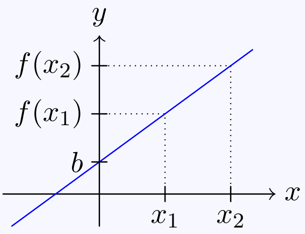
$$f(x) = ax + b$$

der a og b er konstantar, er ein *lineær* funksjon med *stigingstal* a og *konstantledd* b.

Grafen til ein lineær funksjon er ei rett linje som går gjennom punktet $(0, b)$.

For to forskjellige x-verdiar, x_1 og x_2, er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Eksempel 1

Finn stigingstalet og konstantleddet til funksjonane.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = -3 + \frac{7}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$j(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

Svar:

- $f(x)$ har stigingstal 2 og konstantledd 1.
- $g(x)$ har stigingstal -3 og konstantledd $\frac{7}{2}$.
- $h(x)$ har stigingstal $\frac{1}{4}$ og konstantledd $-\frac{5}{6}$.
- $j(x)$ har stigingstal $-\frac{1}{2}$ og konstantledd 4.

Eksempel 2

Teikn grafen til

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

for $x \in [-5, 6]$.

Svar:

For å teikne grafen til ein linjeær funksjon treng vi berre å finne to punkt som ligg på grafen. Kva to punkt dette er, er det fritt å velge, så for enklast mogleg utrekning startar vi med å finne punktet der $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$$

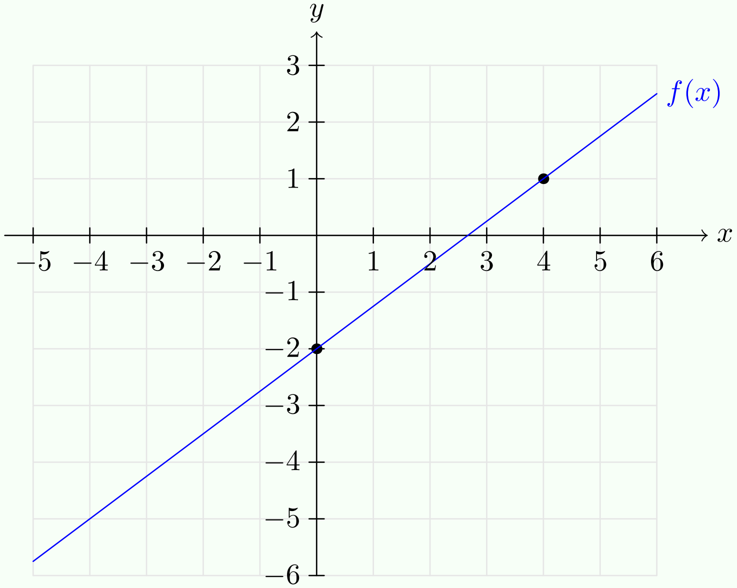
Vidare velg vi $x = 4$, sidan dette også gir oss ei enkel utrekning:

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$$

No har vi informasjonen vi treng, og for ordens skuld set vi han inn i ein tabell:

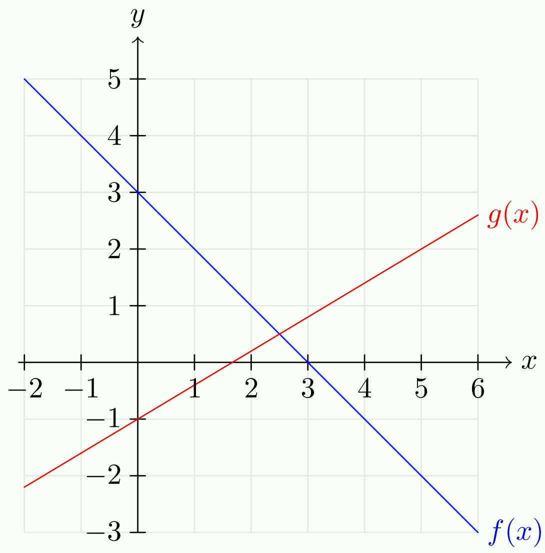
x	0	4
$f(x)$	-2	1

Vi teiknar punkta og trekk ei linje gjennom dei:



Eksempel 3

Finn funksjonsuttrykka til $f(x)$ og $g(x)$.



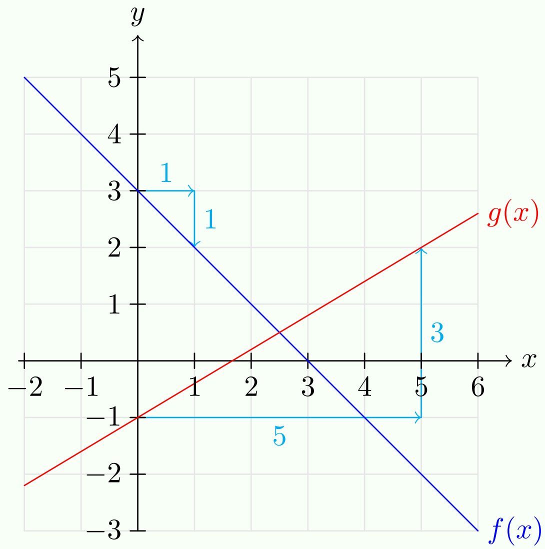
Svar:

Vi startar med å finne funksjonsuttrykket til $f(x)$. Punktet $(0,3)$ ligg på grafen til $f(x)$ (sjå også figur på neste side). Da veit vi at $f(0) = 3$, og dette må bety at 3 er konstantleddet til $f(x)$. Vidare ser vi at punktet $(1,2)$ også ligg på grafen til $f(x)$. Stigingstalet til $f(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2-3}{1-0} = -1$$

Altså er

$$f(x) = -x + 3$$



Vi går så over til å finne uttrykket til $g(x)$. Punktet $(0, -1)$ ligg på grafen til $g(x)$. Da veit vi at $f(0) = -1$, og dette må bety at -1 er konstantleddet til $g(x)$. Vidare ser vi at punktet $(5, 2)$ også ligg på grafen til $g(x)$. Stigingstalet til $g(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2-(-1)}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Altså er

$$g(x) = \frac{3}{5}x + 1$$

9.1 Lineære funksjonar (forklaring)

Uttrykk for a

Gitt ein lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

For to forskjellige x-verdiar, x_1 og x_2, har vi at

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{9.16}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b \tag{9.17}$$

Vi trekk (9.2) fra (9.17), og får at

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

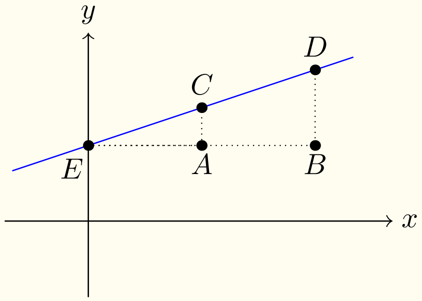
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \tag{9.18}$$

Grafen til ein lineær funksjon er ei rett linje

Gitt ein lineær funksjon $f(x) = ax + b$ og to forskjellige x-verdiar x_1 og x_2. Vi set $A = (x_1, b)$, $B = (x_2, b)$, $C = (b, f(x_1))$, $D = (0, f(x_2))$ og $E = (0, b)$.



Av (9.18) har vi at

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = a$$

$$\frac{ax_1 + b - b}{x_1} = a$$

$$\frac{ax_1}{x_1} = a \tag{9.19}$$

Tilsvarande er

$$\frac{ax_2}{x_2} = a \tag{9.20}$$

Vidare har vi at

$$AC = f(x_1) - b = ax_1$$

$$BD = f(x_2) - b = ax_2$$

$$EA = x_1$$

$$EB = x_2$$

Av (9.19) og (9.20) har vi at

$$\frac{ax_1}{x_1} = \frac{ax_2}{x_2}$$

Dette betyr at

$$\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB}$$

I tillegg er $\angle A = \angle B$, altså oppfyller $\triangle EAC$ og $\triangle EBD$ vilkår iii fra *Regel 10.12*, og dermed er trekantane formlike. Dette betyr at C og D ligg på linje, og denne linja må vere grafen til $f(x)$.

Kapittel 10

Geometri

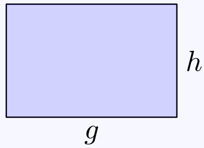
10.1 Formlar for areal og omkrins

Ein *formel* er ei likning der ein variabel (som oftast) står aleine på éi side av likskapsteiknet. I *seksjon 6.4* har vi allereie sett på formlar for arealet til rektangel og trekantar, men der brukte vi ord i staden for symbol. Her skal vi gjengi desse to formlane i ei meir algebraisk form, etterfulgt av andre klassiske formlar for areal og omkrins.

10.1 Arealet til eit rektangel (6.4)

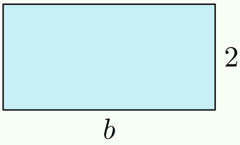
Arealet A til eit rektangel med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet.



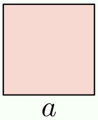
Svar:

Arealet A til rektangelet er

$$A = b \cdot 2 = 2b$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar:

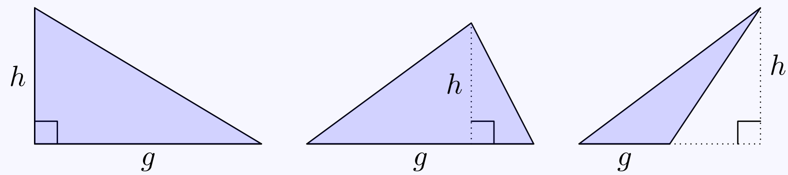
Arealet A til kvadratet er

$$A = a \cdot a = a^2$$

10.2 Arealet til ein trekant (6.4)

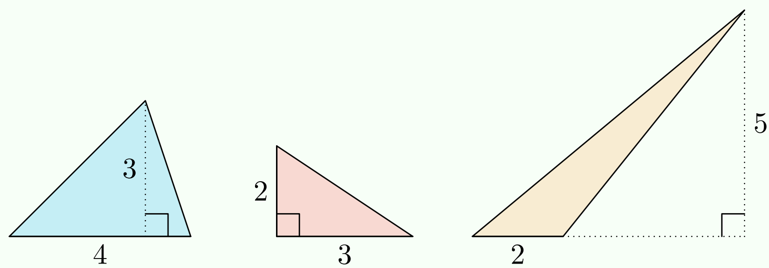
Arealet A til ein trekant med grunnlinje g og høyde h er

$$A = \frac{gh}{2}$$



Eksempel

Kven av trekantane har størst areal?



Svar:

Vi let A_1, A_2 og A_3 vere areala til høvesvis trekanten til venstre, i midten og til høgre. Da har vi at

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

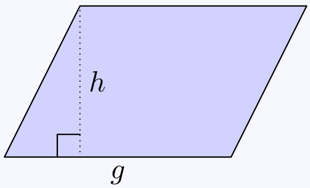
$$A_3 = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Altså er det trekanten til venstre som har størst areal.

10.3 Arealet til eit parallellogram

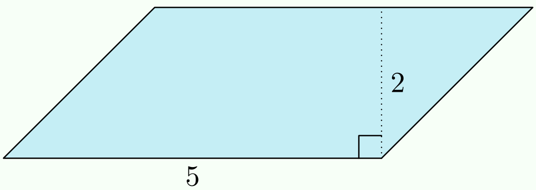
Arealet A til eit parallellogram med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel

Finn arealet til parallellogrammet



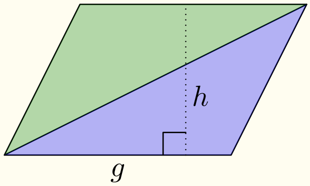
Svar:

Arealet A til parallellogrammet er

$$A = 5 \cdot 2 = 10$$

10.3 Arealet til eit parallellogram (forklaring)

Av eit parallellogram kan vi alltid lage oss to trekantar ved å teikne inn ein av diagonalane:



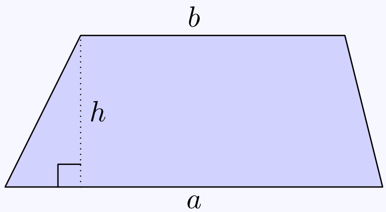
Dei farga trekantane på figuren over har begge grunnlinje g og høgde h. Da veit vi at begge har areal lik $\frac{gh}{2}$. Arealet A til parallellogrammet blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2} \\ &= g \cdot h \end{aligned}$$

10.4 Arealet til eit trapes

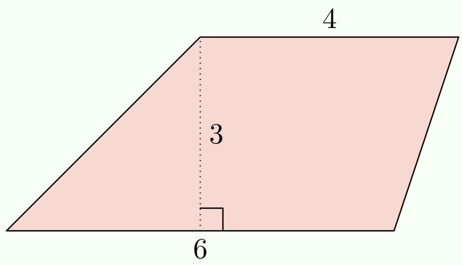
Arealet A til eit trapes med parallelle sider a og b og høgde h er

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Eksempel

Finn arealet til trapeset.



Svar:

Arealet A til trapeset er

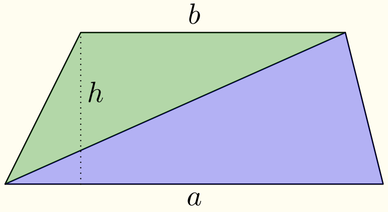
$$\begin{aligned} A &= \frac{3(6+4)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Merk

Når ein tek utgangspunkt i ei grunnlinje og ei høgde, er arealformlane for eit parallellogram og eit rektangel identiske. Å anvende Regel 10.4 på eit parallellogram vil også resultere i eit uttrykk tilsvarande gh. Dette er fordi eit parallellogram berre er eit spesialtilfelle av eit trapes (og eit rektangel er berre eit spesialtilfelle av eit parallellogram).

10.4 Arealet til eit trapes (forklaring)

Også for eit trapes får vi to trekanter viss vi teikner ein av diagonalene:



I figuren over er

$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{ah}{2}$$

$$\text{Arealet til den grøne trekanten} = \frac{bh}{2}$$

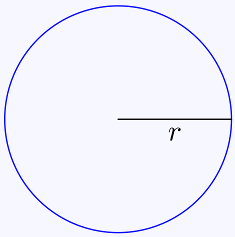
Arealet A til trapeset blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \\ &= \frac{h(a+b)}{2} \end{aligned}$$

10.5 Omkrinsen til ein sirkel (og π)

Omkrinsen O til ein sirkel med radius r er

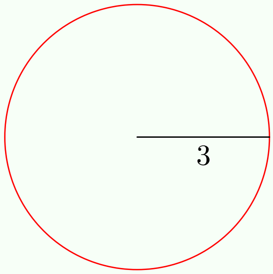
$$O = 2\pi r$$



$\pi = 3.141592653589793....$

Eksempel 1

Finn omkrinsen til sirkelen.



Svar:

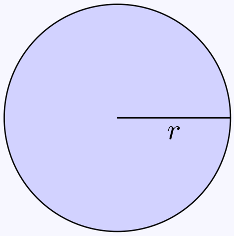
Omkrinsen O er

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \cdot 3 \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

10.6 Arealet til ein sirkel

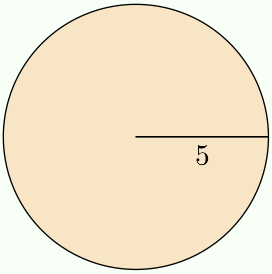
Arealet A til ein sirkel med radius r er

$$A = \pi r^2$$



Eksempel

Finn arealet til sirkelen.



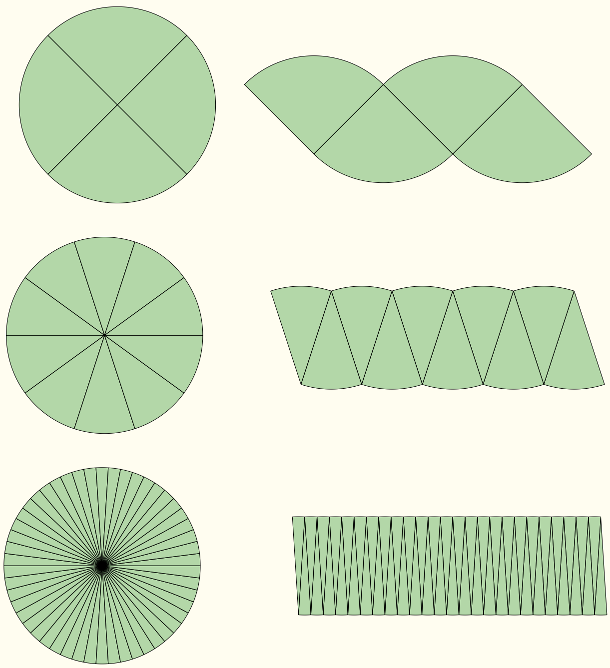
Svar:

Arealet A til sirkelen er

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

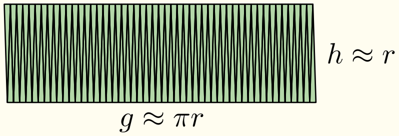
10.6 Arealet til ein sirkel (forklaring)

I figuren under har vi delt opp ein sirkel i 4, 10 og 50 (like store) sektorar, og lagt desse bitene etter kvarandre.



I kvart tilfelle må dei små sirkelbogene til saman utgjere heile boga, altså omkrinsen, til sirkelen. Viss sirkelen har radius r, betyr dette at summen av bogene er $2\pi r$. Og når vi har like mange sektorar med bogen vendt opp som sektorar med bogen vend ned, må totallengda av bogenene vere πr både oppe og nede.

Men jo fleire sektorar vi deler sirkelen inn i, jo meir liknar samansettinga av dei på eit rektangel (i figuren under har vi 100 sektorar). Grunnlinja g til dette "rektangelet" vil vere tilnærma lik πr, mens høgda vil vere tilnærma lik r.



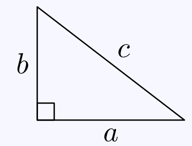
Arealet A til "rektangelet", altså sirkelen, blir da

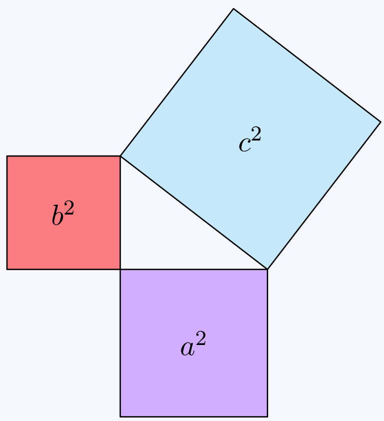
$$A \approx gh \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$$

10.7 Pytagoras' setning

I ein rettvinkla trekant er arealet til kvadratet danna av hypotenusen lik summen av areala til kvadrata danna av katetane.

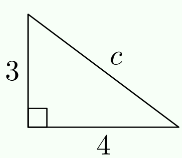
$$a^2 + b^2 = c^2$$





Eksempel 1

Finn lengda til c.



Svar:

Vi veit at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

der a og b er lengdene til dei kortaste sidene i trekanten. Dermed er

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

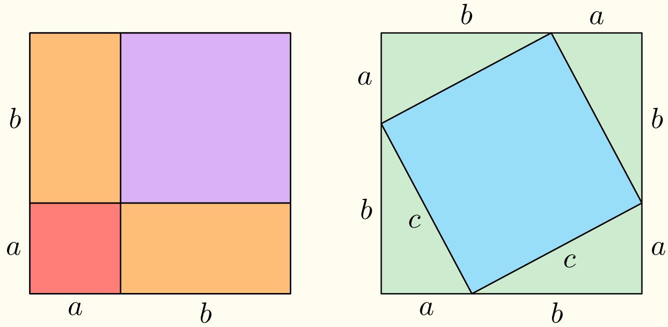
Altså har vi at

$$c = 5 \qquad \vee \qquad c = -5$$

Da c er ei lengde, er $c = 5$.

10.7 Pytagoras' setning (forklaring)

Under har vi teikna to kvadrat som er like store, men som er inndelt i forskjellige former.

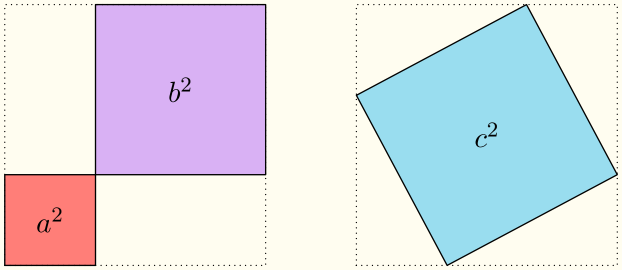


Vi observerer no følgande:

1. Arealet til det raude kvadratet er a^2, arealet til det lilla kvadratet er b^2 og arealet til det blå kvadratet er c^2.

2. Arealet til eit oransje rektangel er ab og arealet til ein grøn trekant er $\frac{ab}{2}$.

3. Om vi tek bort dei to oransje rektangla og dei fire grøne trekantane, er det igjen (av pkt. 2) eit like stort areal til venstre som til høgre.



Dette betyr at

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{10.1}$$

Gitt ein trekant med sidelengder a, b og c, der c er den lengste sidelengda. Så lenge trekanten er rettvinkla, kan vi alltid lage to kvadrat med sidelengder $a + b$, slik som i første figur. (10.1) gjeld dermed for alle rettvinkla trekanter.

10.2 Kongruente og formlike trekantar

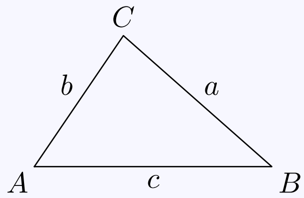
10.8 Konstruksjon av trekantar

Ein trekant $\triangle ABC$, som vist i figuren under, kan bli unikt konstruert viss ein av følgande kriterium er oppfylt:

i) c, $\angle A$ og $\angle B$ er kjende.

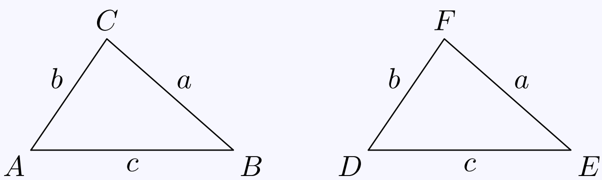
ii) a, b og c er kjende.

iii) b, c og $\angle A$ er kjende.



10.9 Kongruente trekantar

To trekantar som har same form og størrelse er kongruente.

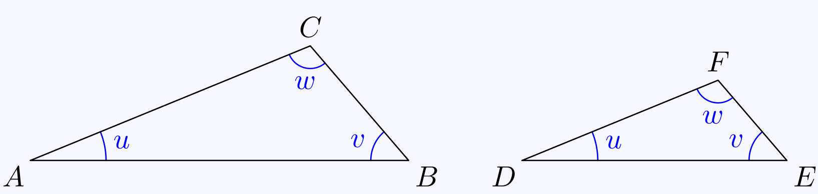


At trekantane i figuren over er kongruente skrivast

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

10.10 Formlike trekantar

Formlike trekantar har tre vinklar som er parvis like store.

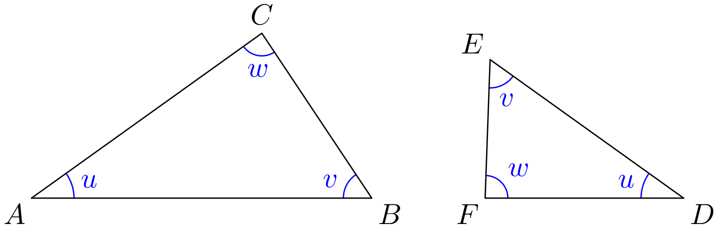


At trekantane i figuren over er formlike skrivast

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Samsvarande sider

Når vi studerer formlike trekantar er *samsvarande sider* eit viktig omgrep. Samsvarande sider er sider som i formlike trekantar står *motstående* den same vinkelen.



For dei formlike trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ har vi at

I $\triangle ABC$ er

- BC motstående til u.
- AC motstående til v
- AB motstående til w.

I $\triangle DEF$ er

- FE motstående til u.
- FD motstående til v
- ED motstående til w.

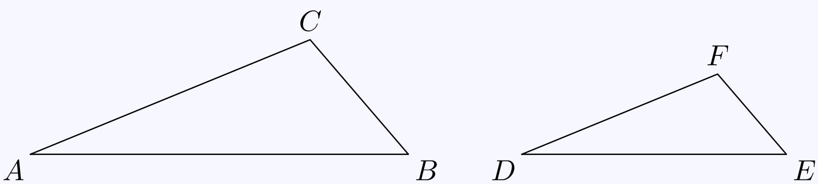
Dette betyr at desse er samsvarande sider:

- BC og FE
- AC og FD
- AB og ED

10.11 Forhold i formlike trekantar

Når to trekantar er formlike, er forholdet mellom samsvarande[1] sider det same.

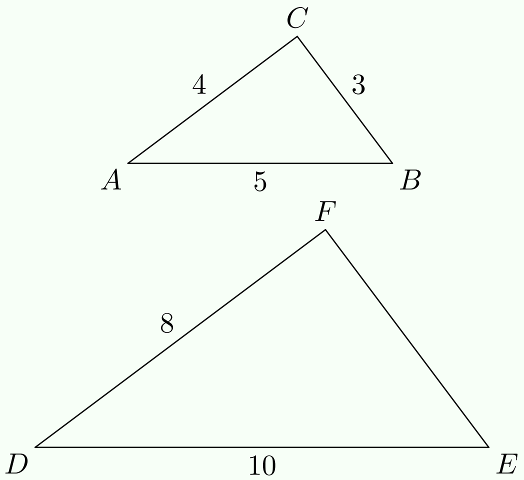
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



[1]Vi tek det her for gitt at kva sider som er samsvarande kjem fram av figuren.

Eksempel

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengda til EF.



Svar:

Vi observerer at AB samsvarer med DE, BC med EF og AC med DF. Det betyr at

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{EF}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{EF}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$$

$$6 = EF$$

Merk

Av *Regel 10.11* har vi at for to formlike trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

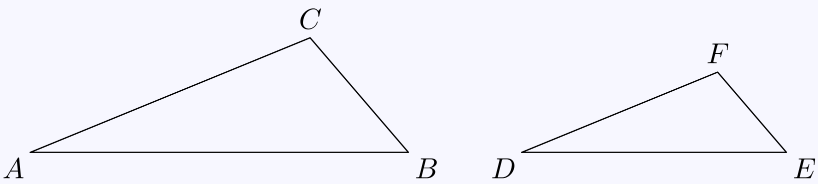
10.12 Vilkår i formlike trekantar

To trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

i) To vinklar i trekantane er parvis like store.

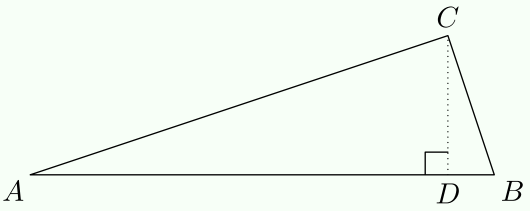
ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

iii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ og $\angle A = \angle D$.



Eksempel 1

$\angle ACB = 90°$. Vis at $\triangle ABC \sim ACD$.



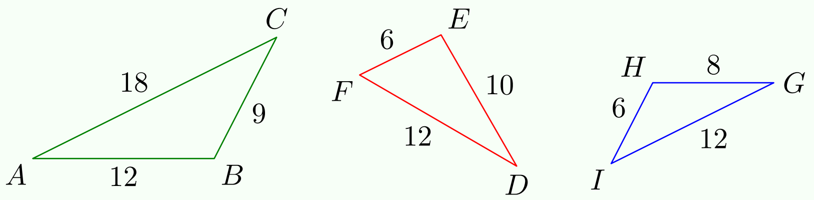
Svar:

$\triangle ABC$ og $\triangle ACD$ er begge rettvinkla og dei har $\angle DAC$ felles. Dermed er vilkår *i* fra *Regel 10.12* oppfylt, og trekantane er da formlike.

Merk: På ein tilsvarande måte kan ein vise at $\triangle ABC \sim CBD$.

Eksempel 2

Undersøk om trekantane er formlike.



Svar:

Vi har at

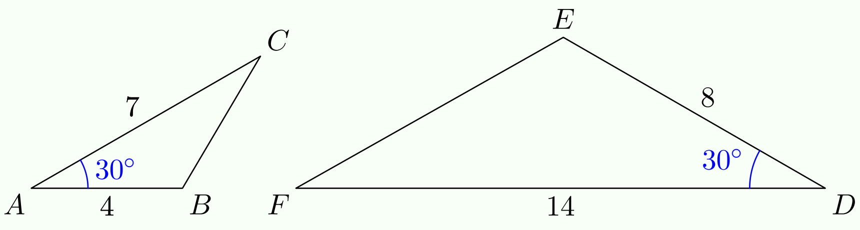
$$\frac{AC}{FD} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{BC}{FE} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{AB}{DE} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{BC}{IH} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Dermed oppfyller $\triangle ABC$ og $\triangle GHI$ vilkår *ii* fra *Regel 10.12*, og trekantane er da formlike.

Eksempel 3

Undersøk om trekantane er formlike.



Svar:

Vi har at $\angle BAC = \angle EDF$ og at

$$\frac{ED}{AB} = \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad \frac{FD}{AC} = \frac{14}{7} = 2$$

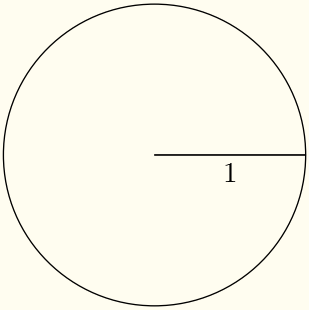
Altså er vilkår *iii* fra *Regel 10.12* oppfylt, og da er trekantane formlike.

10.3 Forklaringar

10.5 Omkrinsen til ein sirkel (og π) (forklaring)

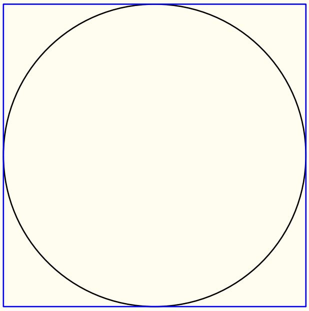
Vi skal her bruke regulære mangekantar langs vegen til ønska resultat. I regulære mangekantar har alle sidene lik lengde. Da det er utelukkande regulære mangekantar vi kjem til å bruke, vil dei bli omtala berre som mangekantar.

Vi skal starte med sjå på tilnærmingar for å finne omkrinsen O_1 av ein sirkel med radius 1.



Øvre og nedre grense

Ein god vane når ein skal prøve å finne ein størrelse, er å spørre seg om ein kan vite noko om kor stor eller liten ein *forventar* at han er. Vi startar derfor med å omslutte sirkelen med eit kvadrat med sidelengde 2:

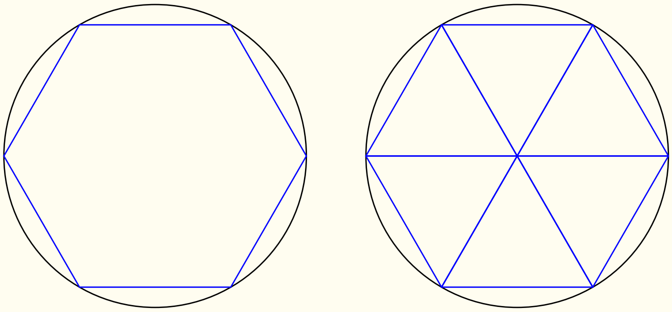


Omkrinsen til sirkelen må vere mindre enn omkrinsen til kvadratet, derfor veit vi at

$$\begin{aligned} O_1 &< 2 \cdot 4 \\ &< 8 \end{aligned}$$

Vidare innskriv vi ein sekskant. Sekskanten kan delast inn i 6 likesida trekantar som alle må ha sidelengder 1. Omkrinsen til sirkelen må vere større enn omkrinsen til sekskanten, noko som gir at

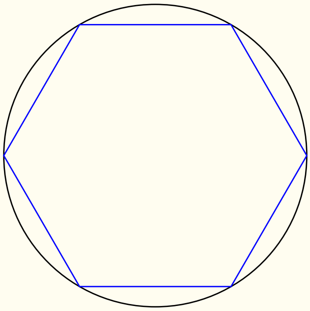
$$\begin{aligned} O_1 &> 6 \cdot 1 \\ &> 6 \end{aligned}$$



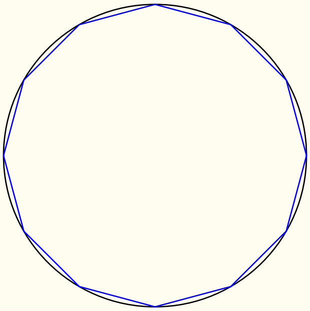
Når vi no skal gå over til ei mykje meir nøyaktig jakt etter omkrinsen, veit vi altså at vi søker ein verdi mellom 6 og 8.

Stadig betre tilnærmingar

Vi fortsett med tanken om å innskrive ein mangekant. Av figurane under let vi oss overbevise om at dess fleire sider mangekanten har, dess betre estimat vil omkretsen til mangekanten vere for omkrinsen til sirkelen.

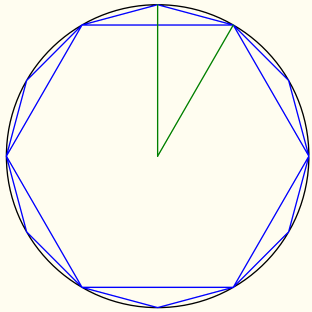


(a) 6-kant

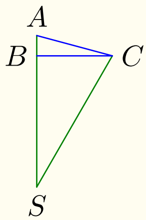


(b) 12-kant

Da vi veit at sidelengda til ein 6-kant er 1, er det fristande å undersøke om vi kan bruke denne kunna til å finne sidelengda til andre mangekantar. Om vi innskriv også ein 12-kant i sirkelen vår (og i tillegg ein trekant), får vi ein figur som denne:



(a) Ein 6-kant og ein 12-kant i lag med ein trekant danna av sentrum i sirkelen og ein av sidene i 12-kanten.



(b) Utklipp av trekant fra figur *(a)*.

Lat oss kalle sidelengda til 12-kanten for s_{12} og sidelengda til 6-kanten for s_6. Vidare legg vi merke til at punkta A og C ligg på sirkelbogen og at både $\triangle ABC$ og $\triangle BSC$ er rettvinkla trekantar (forklar for deg sjølv kvifor!). Vi har at

$$\begin{aligned}
SC &= 1 \\
BC &= \frac{s_6}{2} \\
SB &= \sqrt{SC^2 - BC^2} \\
BA &= 1 - SB \\
AC &= s_{12} \\
s_{12}^2 &= BA^2 + BC^2
\end{aligned}$$

For å finne s_{12} må vi finne BA, og for å finne BA må vi finne SB. Vi startar derfor med å finne SB. Da $SC = 1$ og $BC = \frac{s_6}{2}$, er

$$\begin{aligned}
SB &= \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}}
\end{aligned}$$

Vi går så vidare til å finne s_{12}:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= (1 - SB)^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 \\
&= 1^2 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4}
\end{aligned}$$

Ved første augekast ser det ut som vi ikkje kan komme særleg lengre i å forenkle uttrykket på høgre side, men ein liten operasjon vil endre på dette. Hadde vi berre hatt -1 som eit ledd kunne vi slått saman -1 og $\frac{s_6^2}{4}$ til å bli $-SB^2$. Derfor "skaffar" vi oss -1 ved å både addere og subtrahere 1 på høgresida:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= 1 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4} - 1 + 1 \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - \left(1 - \frac{s_6^2}{4}\right) \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - SB^2 \\
&= 2 - 2SB \\
&= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4}\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4 - s_6^2}
\end{aligned}$$

Altså er

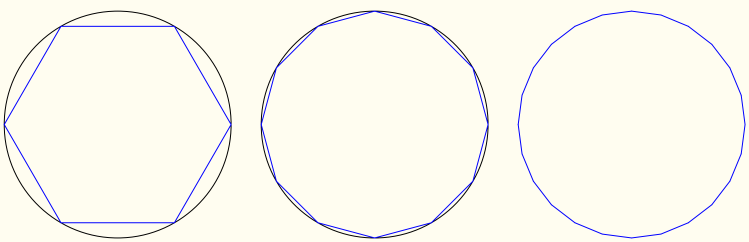
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

Sjølv om vi her har utleda relasjonen mellom sidelengdene s_{12} og s_6, er dette ein relasjon vi kunne vist for alle par av sidelengder der den eine er sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den andre. Lat s_n og s_{2n} høvesvis være sidelengda til ein mangekant og ein mangekant med dobbelt så mange sider. Da er

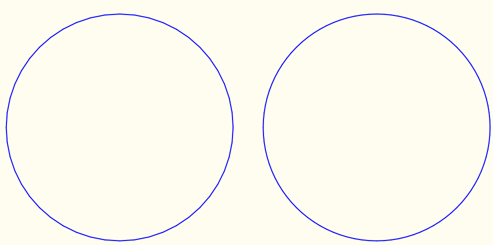
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \tag{10.2}$$

Når vi kjenner sidelengda til ein innskriven mangekant, vil tilnærminga til omkrinsen til sirkelen vere denne sidelengda gonga med antal sidelengder i mangekanten. Ved hjelp av (10.2) kan vi stadig finne sidelengda til ein mangekant med dobbelt så mange sider som den forrige, og i tabellen under har vi funne sidelengda og tilnærminga til omkrinsen til sirkelen opp til ein 96-kant:

Formel for sidelengde	*Sidelengde*	*Tilnærming for omkrins*
	$s_6 = 1$	$6 \cdot s_6 \;= 6$
$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$	$s_{12} = 0.517...$	$12 \cdot s_{12} = 6.211...$
$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$	$s_{24} = 0.261...$	$24 \cdot s_{24} = 6.265...$
$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$	$s_{48} = 0.130...$	$48 \cdot s_{48} = 6.278...$
$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$	$s_{96} = 0.065...$	$96 \cdot s_{96} = 6.282...$



(a) 6-kant *(b)* 12-kant *(c)* 24-kant



(d) 48-kant *(e)* 96-kant

Utrekningane over er faktisk like langt som matematikaren Arkimedes kom allereie ca 250 f. kr!

For ei datamaskin er det ingen problem å rekne ut[1] dette for ein mangekant med ekstremt mange sider. Reknar vi oss fram til ein 201 326 592-kant finn vi at

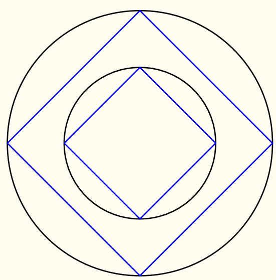
$$\text{Omkrins av sirkel med radius } 1 = 6.283185307179586...$$

(Ved hjelp av meir avansert matematikk kan det visast at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 er eit irrasjonalt tal, men at alle desimalane vist over er korrekte, derav likskapsteiknet.)

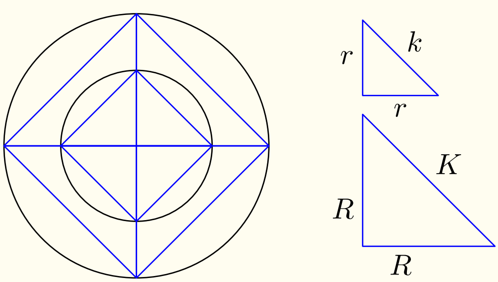
Den endelege formelen og π

Vi skal no komme fram til den kjende formelen for omkrinsen til ein sirkel. Også her skal vi ta for gitt at summen av sidelengdene til ein innskriven mangekant er ei tilnærming til omkrinsen som blir betre og betre dess fleire sidelengder det er.

For enkelheita si skuld skal vi bruke innskrivne firkantar for å få fram poenget vårt. Vi teiknar to sirklar som er vilkårleg store, men der den eine er større enn den andre, og innskriv ein firkant (eit kvadrat) i begge. Vi let R og r vere radien til høvesvis den største og den minste sirkelen, og K og k vere sidelengda til høvesvis den største og den minste firkanten.



Begge firkantane kan delast inn i fire likebeinte trekantar:



Da trekantane er formlike, har vi at

$$\frac{K}{R} = \frac{k}{r} \tag{10.3}$$

Vi let $\tilde{O} = 4K$ og $\tilde{o} = 4k$ vere tilnærminga av omkrinsen til høvesvis den største og den minste sirkelen. Ved å gonge med 4 på begge sider av (10.3) får vi at

$$\frac{4A}{R} = \frac{4a}{r}$$

$$\frac{\tilde{O}}{R} = \frac{\tilde{o}}{r} \tag{10.4}$$

Og no merker vi oss dette:

Sjølv om vi i kvar av dei to sirklane innskriv ein mangekant med 4, 100 eller kor mange sider det skulle vere, vil mangekantane alltid kunne delast inn i trekantar som oppfyller (10.3)*. Og på same måte som vi har gjort i eksempelet over kan vi omskrive* (10.3) *til* (10.4) *i staden.*

Lat oss derfor tenke oss mangekantar med så mange sider at vi godtek deira omkrins som lik omkrinsane til sirklane. Om vi da skriv omkrinsen til den største og den minste sirkelen som høvesvis O og o, får vi at

$$\frac{O}{R} = \frac{o}{r}$$

Da dei to sirklane våre er heilt vilkårleg valgt, har vi no komme fram til at *alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og radiusen.* Ei enda vanlegare formulering er at *alle sirklar har det same forholdet mellom omkrinsen og diameteren.* Vi let D og d vere diameteren til høvesvis sirkelen med radius R og r. Da har vi at

$$\frac{O}{2R} = \frac{o}{2r}$$

$$\frac{O}{D} = \frac{o}{d}$$

Forholdstalet mellom omkrinsen og diameteren i ein sirkel blir kalla π (uttalast "pi"):

$$\frac{O}{D} = \pi$$

Likninga over fører oss til formelen for omkrinsen til ein sirkel:

$$\begin{aligned} O &= \pi D \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Tidlegare fann vi at omkrinsen til ein sirkel med radius 1 (og diameter 2) er 6.283185307179586.... Dette betyr at

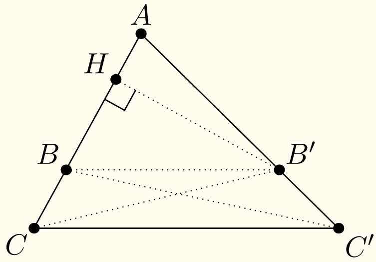
$$\begin{aligned} \pi &= \frac{6.283185307179586...}{2} \\ &= 3.141592653589793... \end{aligned}$$

---

[1] For den datainteresserte skal det seiast at iterasjonsalgoritma må skrivast om for å unngå instabilitetar i utrekningane når antal sider blir mange.

10.11 Forhold i formlike trekantar (forklaring)

I figuren under er $BB'||CC'$. Arealet til ein trekant $\triangle ABC$ skriv vi her som ABC.



Med BB' som grunnlinje er HB' høgda i både $\triangle CBB'$ og $\triangle CBB'$. Derfor er

$$CBB' = C'BB' \tag{10.5}$$

Vidare har vi at

$$ABB' = AB \cdot HB'$$

$$CBB' = BC \cdot HB'$$

Altså er

$$\frac{ABB'}{CBB'} = \frac{AB}{BC} \tag{10.6}$$

På liknande vis er

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{10.7}$$

Av (10.5), (10.6) og (10.7) følg det at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'}\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{10.8}$$

For dei formlike trekantane $\triangle ACC'$ og $\triangle ABB'$ er

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{AB+BC}{AB} \\ &= 1 + \frac{BC}{AB}\end{aligned}$$

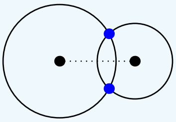
$$\begin{aligned}\frac{AC'}{AB'} &= \frac{AB'+B'C'}{AB'} \\ &= 1 + \frac{B'C'}{AB'}\end{aligned}$$

Av (10.8) er dermed forholdet mellom dei samsvarande sidene likt.

Merk

I dei komande forklaringane av vilkåra *ii* og *iii* fra *Regel 10.8* tek ein utgangspunkt i følgande:

- To sirklar skjær kvarandre i maksimalt to punkt.
- Gitt at eit koordinatsystem blir plassert med origo i senteret til den eine sirkelen, og slik at horisontalaksen går gjennom begge sirkelsentera. Viss (a, b) er det eine skjæringspunktet, er $(a, -b)$ det andre skjæringspunktet.

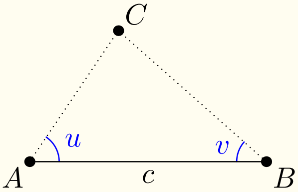


Punkta over kan enkelt visast, men er såpass intuitivt sanne at vi tek dei for gitt. Punkta fortel oss at trekanten som består av dei to sentera og det eine skjæringspunktet er kongruent med trekanten som består av dei to sentera og det andre skjæringspunktet. Med dette kan vi studere eigenskapar til trekantar ved hjelp av halvsirklar.

10.8 Konstruksjon av trekantar (forklaring)

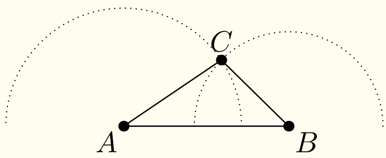
Vilkår i

Gitt ei lengde c og to vinklar u og v. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c. Så stiplar vi to vinkelbein slik at $\angle A = u$ og $B = v$. Så lenge desse vinkelbeina ikkje er parallelle, må dei naudsynleg skjære kvarandre i eitt, og berre eitt, punkt (C i figuren). I lag med A og B vil dette punktet danne ein trekant som er unikt gitt av c, u og v.



Vilkår ii

Gitt tre lengder a, b og c. Vi lagar eit linjestykket AB med lengde c. Så lagar vi to halvsirklar med høvesvis radius a og b og sentrum B og A. Skal no ein trekant $\triangle ABC$ ha sidelengder a, b og c, må C ligge på begge sirkelbogane. Da bogane berre kan møtast i eitt punkt, er forma og størrelsen til $\triangle ABC$ unikt gitt av a, b og c.



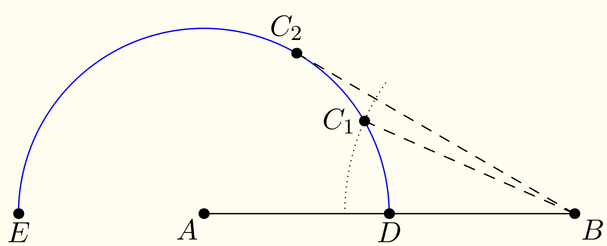
Vilkår iii

Gitt to lengder b og c og ein vinkel u. Vi startar med følgande:

1. Vi lagar eit linjestykke AB med lengde c.

2. I A teiknar vi ein halvsirkel med radius b.

Ved å la C vere plassert kor som helst på denne sirkelbua, har vi alle moglege variantar av ein trekant $\triangle ABC$ med sidelengdene $AB = c$ og $AC = b$. Å plassere C langs bogen til halvsirkelen er det same som å gi $\angle A$ ein bestemt verdi. Det gjenstår no å vise at kvar plassering av C gir ei unik lengde av BC.



Vi let C_1 og C_2 vere to potensielle plasseringar av C, der C_2 langs halvsirkelen ligg nærare E enn C_1. Vidare stiplar vi ein sirkelboge med radius BC_1 og sentrum i B. Da den stipla sirkelbogen og halvsirkelen berre kan skjære kvarandre i C_1, vil alle andre punkt på halvsirkelen ligge enten innanfor eller utanfor den stipla sirkelbogen. Slik vi har definert C_2, må dette punktet ligge utanfor den stipla sirkelbogen, og dermed er BC_2 lengre enn BC_1. Av dette kan vi konkludere med at BC blir lengre dess nærare C beveger seg mot E langs halvsirkelen. Å sette $\angle A = u$ vil altså gi ein unik verdi for BC, og da ein unik trekant $\triangle ABC$ der $AC = b$, $c = AB$ og $\angle BAC = u$.

10.12 Vilkår i formlike trekantar (forklaring)

Vilkår i

Gitt to trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$. Av *Regel 6.3* har vi at

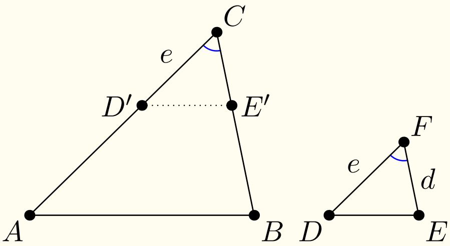
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

Viss $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$, følger det at $\angle C = \angle E$.

Vilkår ii

Vi tek utgangspunkt i trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \qquad , \qquad \angle C = \angle F \tag{10.9}$$



Vi sett $a = BC$, $b = AC$, $d = EF$ og $e = DF$. Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $AB \parallel D'E'$. Da er $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$, altså har vi at

$$\frac{E'C}{BC} = \frac{D'C}{AC}$$

$$E'C = \frac{ae}{b}$$

Av (10.9) har vi at

$$EF = \frac{ae}{b}$$

Altså er $E'C = EF$. No har vi av vilkår *ii* fra *Regel 10.9* at $\triangle D'E'C \cong \triangle DEF$. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Vilkår iii

Vi tek utgangspunkt i to trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \tag{10.10}$$

Vi plasserer D' og E' på høvesvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $E'C = d$. Av vilkår *i* fra Regel 10.12 har vi da at $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$. Altså er

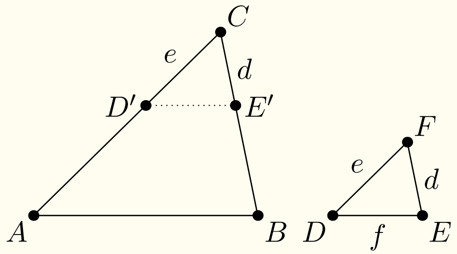
$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{D'C}{AC}$$

$$D'E' = \frac{ae}{c}$$

Av (10.10) har vi at

$$f = \frac{ae}{c}$$

Altså har $\triangle D'E'C$ og $\triangle DEF$ parvis like sidelengder, og av vilkår *i* fra Regel 10.9 er dei da kongruente. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Kommentar (for den spesielt interesserte)

Også i geometri har vi aksiom (sjå kommentar på side 106) som legg grunnlaget for det matematiske systemet vi skapar, men den aksiomatiske oppbygginga av geometri er mykje meir omstendeleg og uoversiktleg enn den vi har innanfor rekning. I tillegg er nokre teorem innanfor geometri så intuitivt sanne, at det i ei bok som dette ville blitt meir forvirrande enn oppklarande å skulle forklart alt i detalj.

Det som likevel bør nemnast, er at vi i *Regel 10.8* opplyser om tre vilkår for å unikt konstruere ein trekant, og i *Regel 10.9* gir eit vilkår for kongruens. I meir avanserte geometritekstar vil ein helst finne att innhaldet i desse to reglane som aksiom og teorem for kongruens:

Kongruens

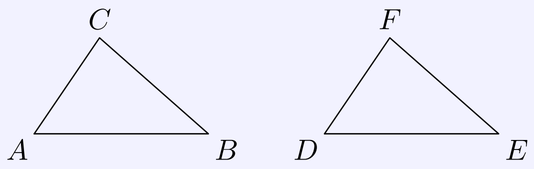
To trekantar $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente viss ein av desse vilkåra er oppfylt:

i) $AB = DE$, $BC = EF$ og $\angle A = \angle D$.

ii) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $AB = DE$.

iii) $AB = DE$, $BC = EF$ og $AC = FD$.

iv) $\angle A = \angle D$ and $\angle B = \angle E$, i tillegg er $AB = DE$ eller $BC = EF$ eller $AC = FD$.



---

i) Side-vinkel-side (SAS) aksiomet
ii) Vinkel-side-vinkel (ASA) teoremet
iii) Side-side-side (SSS) teoremet
iv) Side-vinkel-vinkel (SAA) teoremet

Merk: Forkortingane over er gitt ut ifrå dei engelske namna for høvesvis side og vinkel; *side* og *angle*.

I tekstboksen på førre side gir også vilkår i) - iii) tilstrekkeleg informasjon om når ein trekant kan bli unikt konstruert, men i denne boka har vi valgt å skille unik konstruksjon og kongruens fra kvarandre. Dette er gjort i den tru om at dei fleste vil ha ein intuitiv tanke om kva trekantar som er kongruente eller ikkje, men ha større problem med å svare på kva som må til for å unikt konstruere ein trekant – og det er ikkje naudsynleg så lett å sjå dette direkte ut ifrå kongruensvilkåra.

Legg også merke til at vilkår iv) berre er ei meir generell form av vilkår ii), men altså ikkje kan brukast som eit vilkår for unik konstruksjon. Dette vilkåret finn ein derfor ikkje att i korkje *Regel 10.8* eller *Regel 10.9*.

Litteratur

Kiselev, A. (2006). *Kiselev's Geometry: Book 1. Planimetry* (A. Givental, Overs.). Sumizdat. (Opprinnelig utgitt 1892).

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press

Notis: Teksten, i alle fall ein veldig liknande ein, om Pytagoras' setning på side 144 sto første gong på trykk i Skage Hansen si bok Tempelgeometri (2020).

Indeks

π, 156

absoluttverdi, 60
algebra, 92
areal, 83
    til rektangel, 135
    til sirkel, 141
    til trapes, 138

brøk, 35
    forkorting av, 39
    omvend, 55
    utviding av, 39
breidde, 84

diameter, 71
differanse, 18
dividend, 23
divisor, 23

eksponent, 97

faktor, 20
faktorisering, 27
fellesnemnar, 44
firkant, 76
forhold, 23
forholdstal, 23
formel, 135
forteikn, 60
funksjon, 123
    grafen til, 126
    lineær, 126
funksjonsuttrykk, 123

grad, 73
grunnlinje, 77
grunntal, 97

høgde, 77
hypotenus, 78

intervall, 126

kansellering, 51
kant, 76
katet, 78
konstant, 92
konstantledd, 128
koordinatsystem, 14
kvotient, 23

ledd, 16, 18
lengde, 59, 84
likning, 109
likskapsteiknet, 9
linje, 69
linjestykke, 69

mangekant, 76
    hjørner i, 76

nemnar, 35

omkrins, 82
    til sirkel, 140
overflate, 83

parallell, 72
positive heiltal, 10
potenslikning, 120

primtal, 27
primtalsfaktorisering, 27
produkt, 20
punkt, 14, 69

radius, 71
rotteikn, 104

sektor, 71
side
    i mangekant, 76
    samsvarande, 146
siffer, 11
sirkel, 71
    sentrum i, 71
stigingstal, 128
sum, 16

tal, 9
    irrasjonalt, 105
    naturlege, 10
    negativt, 59
    positivt, 59
    rasjonalt, 57
talverdi, 60
tellar, 35
til parallellogram, 137
til trekant, 136
toppvinkel, 75
trekant, 76
    formlik, 145
    kongruet, 145

variabel, 92
verdi, 11
vinkel, 72
    rett, 73
    toppunkt til, 72
vinkelbein, 72
vinkelrett, 73

Om forfattaren

Sindre Sogge Heggen har ein mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo og ei årseining i praktisk-pedagogisk utdanning fra NTNU. I tillegg har han fleire års erfaring med undervising i både grunnskule og vidaregåande skule.