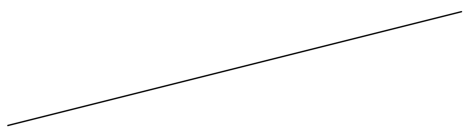
0.1 Begrep

Punkt

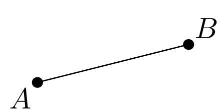
En bestemt plassering kalles et[1] *punkt*. Et punkt markerer vi ved å tegne en prikk, som vi gjerne setter navn på med en bokstav. Under har vi tegnet punktene A og B.

Linje og linjestykke

En rett strek som er uendeleg lang (!) kaller vi ei *linje*. At linja er uendelig lang, gjør at vi aldri kan *tegne* ei linje, vi kan bare *tenke* oss ei linje. Å tenke seg ei linje kan man gjøre ved å lage en rett strek, og så forestille seg at endene til streken vandrer ut i hver sin retning.



En rett strek som går mellom to punkt kaller vi et *linjestykke*.

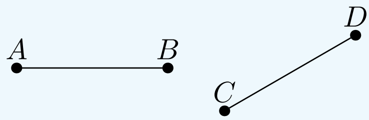


Linjestykket mellom punktene A og B skriver vi som AB.

> **Merk**
>
> Et linjestykke er et utklipp (et stykke) av ei linje, derfor har ei linje og et linjestykke mange felles egenskaper. Når vi skriver om linjer, vil det bli opp til leseren å avgjøre om det samme gjelder for linjestykker, slik sparer vi oss for hele tiden å skrive ”linjer/linjestykker”.

[1] Se også *seksjon* **??**

Linjestykke eller lengde?

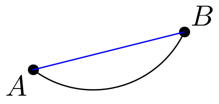


Linjestykkene AB og CD har lik lengde, men de er ikke det samme linjestykket. Likevel kommer vi til å skrive $AB = CD$. Vi bruker altså de samme navnene på linjestykker og lengdene deres (det samme gjelder for vinkler og vinkelverdier, se side 4 - 6). Dette gjør vi av følgende grunner:

- Til hvilken tid vi snakkar om et linjestykke og hvilken tid vi snakker om en lengde vil komme tydelig fram av sammenhengen begrepet blir brukt i.
- Å hele tiden måtte ha skrevet ”lengden til AB” o.l. ville gitt mindre leservennlige setninger.

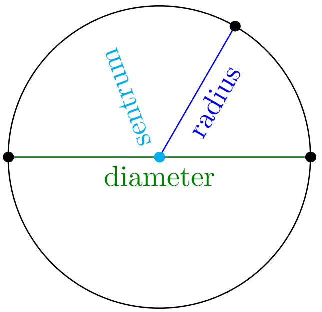
Avstand

Det er uendelig med veier man kan gå fra ett punkt til et annet, og noen veier vil vere lengre enn andre. Når vi snakkar om avstand i geometri, mener vi helst den *korteste* avstanden. For geometrier vi skal ha om i denne boka, vil den korteste avstanden mellom to punkt alltid være lengden til linjestykket (blått i figuren under) som går mellom punktene.



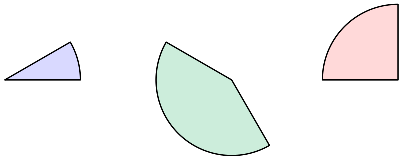
Sirkel; sentrum, radius og diameter

Om vi lager en lukket bue der alle punktene på buen har samme avstand til et punkt, har vi en *sirkel*. Punktet som alle punktene på buen har lik avstand til er *sentrum* i sirkelen. Et linjestykke mellom sentrum og et punkt på buen kaller vi en *radius*. Et linjestykke mellom to punkt på buen, og som går via sentrum, kaller vi en *diameter*[1].



Sektor

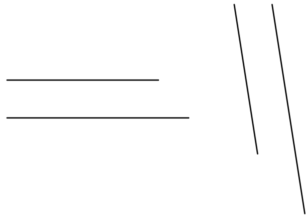
En bit som består av en sirkelbue og to tilhørende radier kalles en *sektor*. Bildet under viser tre forskjellige sektorer.



[1]Som vi har vært inne på kan *radius* og *diameter* like gjerne bli brukt om lengden til linjestykkene.

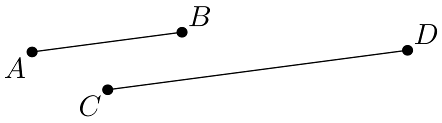
Parallelle linjer

Når linjer går i samme retning, er de *parallelle*. I figuren under vises to par med parallelle linjer.



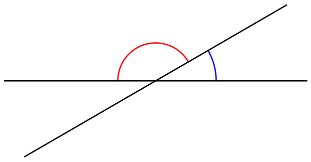
Vi bruker symbolet $\parallel$ for å vise til at to linjer er parallelle.

$$AB \parallel CD$$



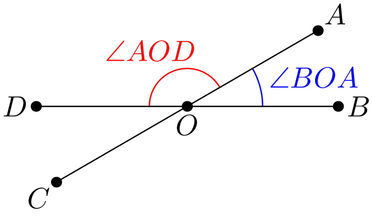
Vinklar

To linjer som ikke er parallelle, vil før eller siden krysse hverandre. Gapet to linjer danner seg imellom kalles en *vinkel*. Vinkler tegner vi som små sirkelbuer:



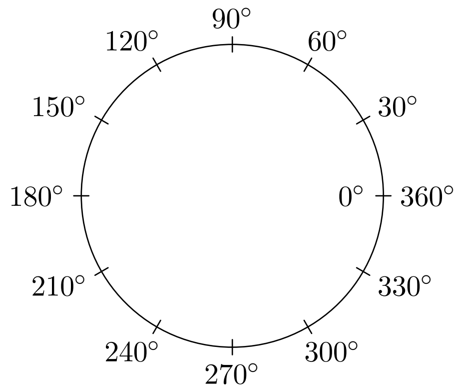
Linjene som danner en vinkel kaller vi *vinkelbein*. Punktet der linjene møtes kaller vi *toppunktet* til vinkelen. Ofte bruker vi punktnavn og vinkelsymbolet $\angle$ for å tydeliggjøre hvilken vinkel vi mener. I figuren under er det slik at

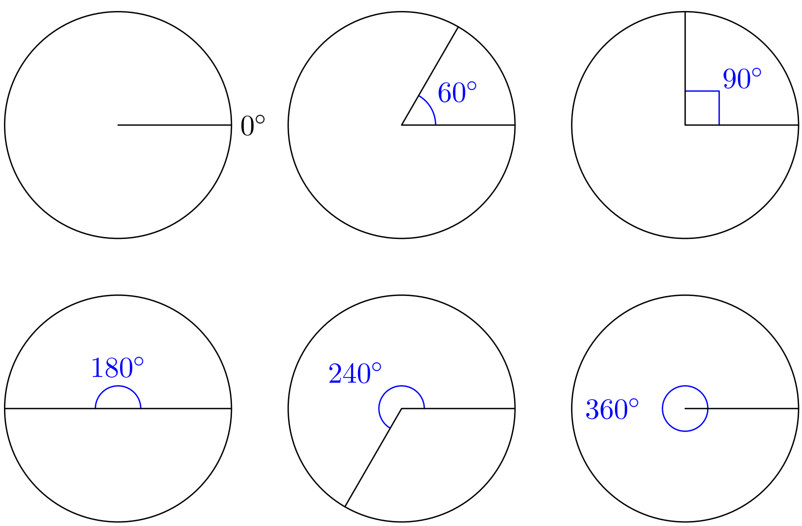
- vinkelen $\angle BOA$ har vinkelbein OB og OA og toppunkt O.
- vinkelen $\angle AOD$ har vinkelbein OA og OD og toppunkt O.



Mål av vinklar i grader

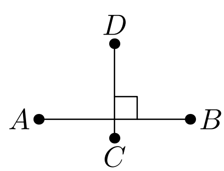
Når vi skal måle en vinkel i grader, tenker vi oss at en sirkelbue er delt inn i 360 like lange biter. En slik bit kaller vi en *grad*, som vi skriv med symbolet $^\circ$.





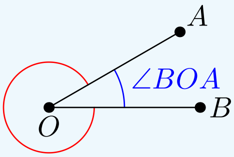
Legg merke til at en 90° vinkel markeres med symbolet $\square$. En vinkel som måler 90° kalles en *rett* vinkel. Linjer/linjestykker som danner rette vinkler sier vi står *vinkelrette* på hverandre. Dette indikerer vi med symbolet $\perp$.

$$AB \perp CD$$

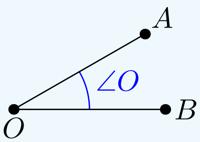


Hvilken vinkel?

Når to linjestykker møtes i et felles punkt, danner de strengt tatt to vinklar; den ene større eller lik 180°, den andre mindre eller lik 180°. I de aller fleste sammenhenger er det den minste vinkelen vi ønsker å studere, og derfor er det vanlig å definere $\angle AOB$ som den *minste* vinkelen dannet av linjestykkene OA og OB.

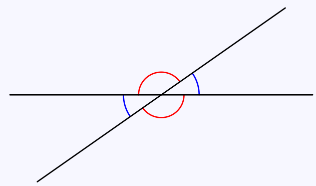


Så lenge det bare er to linjestykker/linjer tilstede, er det også vanlig å bruke bare én bokstav for å vise til vinkelen:

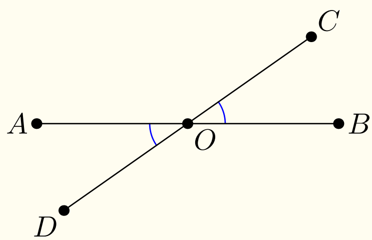


0.1 Toppvinkler

To motstående vinkler med felles toppunkt kalles *toppvinkler*. Toppvinklar er like store.



0.1 Toppvinkler (forklaring)



Vi har at

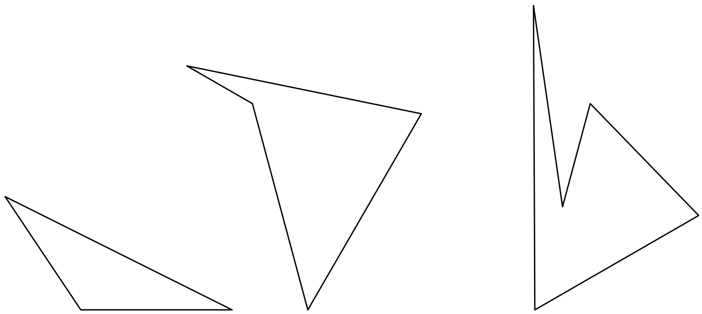
$$\angle BOC + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$$

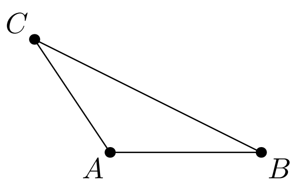
Dette må bety at $\angle BOC = \angle AOD$. Tilsvarande er $\angle COA = \angle DOB$.

Kanter og hjørner

Når linjestykker danner en lukket form, har vi en *mangekant*. Under ser du (fra venstre mot høyre) en trekant, en firkant og en femkant.

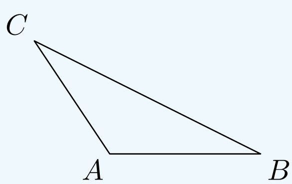


Linjestykkene en mangekant består av kalles *kanter* eller *sider*. Punktene der kantene møtes kaller vi *hjørner*. Trekanten under har altså hjørnene A, B og C og sidene (kantene) AB, BC og AC.



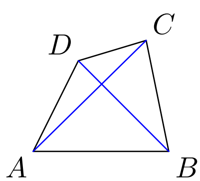
Merk

Ofte kommer vi til å skrive bare en bokstav for å markere et hjørne i en mangekant.



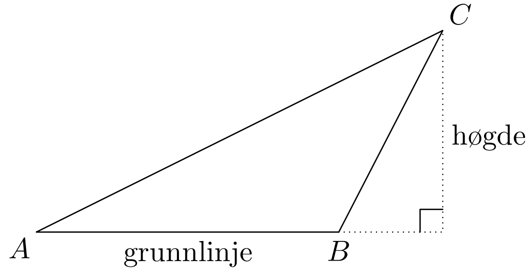
Diagonaler

Et linjestykke som går mellom to hjørner som ikke hører til samme side av en mangekant kalles en *diagonal*. I figuren under ser vi diagonalene AC og BD.

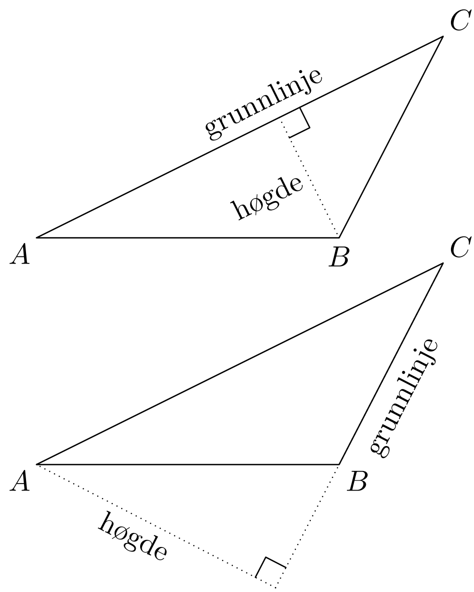


Høgde og grunnlinje

Når vi i *seksjon 0.4* skal finne areal, vil begrepene *grunnlinje* og *høgde* være viktige. For å finne en høgde i en trekant, tar vi utgangspunkt i en av sidene. Siden vi velger kaller vi *grunnlinja*. La oss starte med AB i figuren under som grunnlinje. Da er *høgda* linjestykket som går fra AB (eventuelt, som her, forlengelsen av AB) til C, og som står vinkelrett på AB.



Da det er tre sider vi kan velge som grunnlinje, har en trekant tre høgder.



Merk

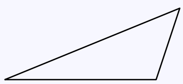
Høgde og grunnlinje kan også på liknende vis bli brukt i forbindelse med andre mangekantar.

0.2 Egenskaper for trekanter og firkanter

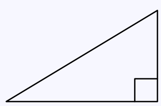
I tillegg til å ha et bestemt antal sider og hjørner, kan mangekantar også ha andre egenskaper, som for eksempel sider eller vinkler av lik størrelse, eller sider som er parallelle. Vi har egne navn på mangekanter med spesielle egenskaper, og disse kan vi sette opp i en oversikt der noen ”arver”[1] egenskaper fra andre.

0.2 Trekanter

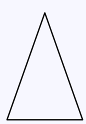
$$\begin{tikzcd} & \text{Rettvinklet trekant} & \\ \text{Trekant} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{Likebeint trekant} \arrow[r] & \text{Likesidet trekant} \end{tikzcd}$$



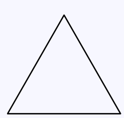
Trekant
Har tre sider og tre hjørner.



Rettvinklet trekant
Har en vinkel som er 90°.



Likebeint trekant
Minst to sider er like lange.
Minst to vinklar er like store.



Likesida trekant
Sidene er like lange.
Vinklane er 60°.

Eksempel

Da en likesidet trekant har tre sider som er like lange og tre vinkler som er 60°, er den også en likebeint trekant.

Språkboksen

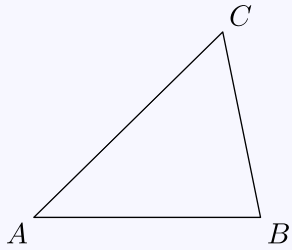
Den lengste siden i en rettvinklet trekant blir gjerne kalt *hypotenus*. De korteste sidene blir gjerne kalt *kateter*.

[1] I *Regel 0.2* og *Regel 0.4* er dette indikert med piler.

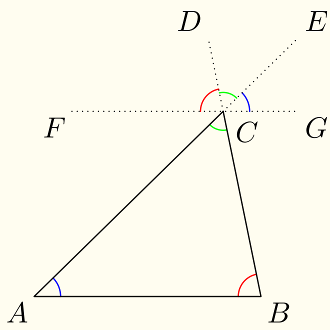
0.3 Summen av vinklene i en trekant

I en trekant er summen av vinkelverdiene 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



0.3 Summen av vinklene i en trekant (forklaring)



Vi tegner et linjestykke FG som går gjennom C og som er parallell med AB. Videre setter vi punktet E og D på forlengelsen av henholdsvis AC og BC. Da er $\angle A = \angle GCE$ og $\angle B = \angle DCF$. $\angle ACB = \angle ECD$ fordi de er toppvinkler. Vi har at

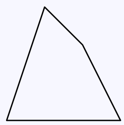
$$\angle DCF + \angle ECD = \angle GCE = 180^\circ$$

Altså er

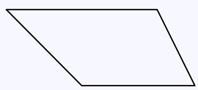
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

0.4 Firkantar

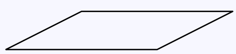
Firkant ⟶ Trapes ⟶ Parallellogram ⟶ Rombe / Rektangel ⟶ Kvadrat



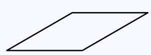
Firkant
Har fire sider og fire hjørner.



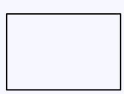
Trapes
Har minst to sider som er parallelle.



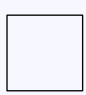
Parallellogram
Har to par med parallelle sider.
Har to par med like vinkler.



Rombe
Sidene er like lange.



Rektangel
Alle vinklene er $90°$.



Kvadrat

Eksempel

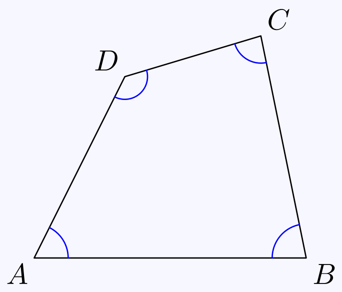
Kvadratet er både en rombe og et rektangel, og ”arver” derfor egenskapene til disse. Dette betyr at i et kvadratet er

- alle sidene like lange
- alle vinklene $90°$.

0.5 Summen av vinklene i en firkant

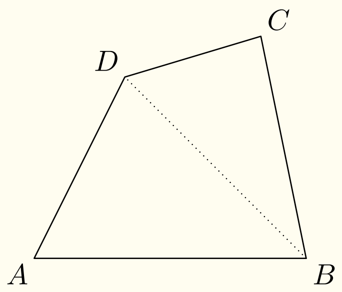
I en firkant er summen av vinkelverdiene 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



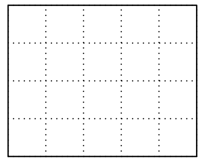
0.5 Summen av vinklene i en firkant (forklaring)

Den samlede vinkelsummen i $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ utgjør vinkelsummen i $\square ABCD$. Av *Regel 0.3* vet vi at vinkelsummen i alle trekanter er 180°, altså er vinkelsummen i $\square ABCD$ lik $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

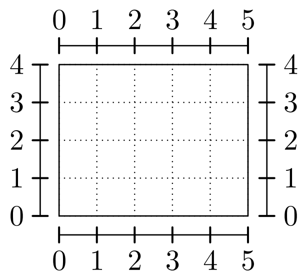


0.3 Omkrets

Når vi måler hvor langt det er rundt en lukket form, finner vi *omkretsen* til figuren. La oss starte med å finne omkretsen til dette rektangelet:



Rektangelet har to sider med lengde 4 og to sider med lengde 5:



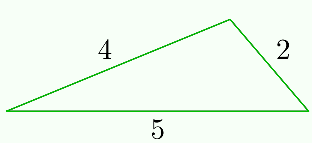
Dette betyr at

$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 4+4+5+5 \\ &= 18\end{aligned}$$

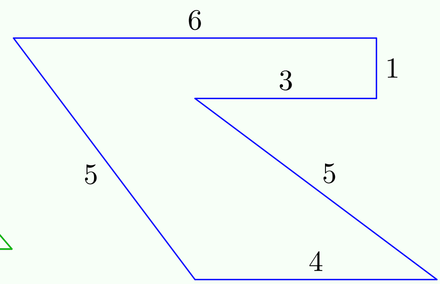
0.6 Omkrets

Omkrets er lengden rundt en lukket figur.

Eksempel



(a)



(b)

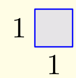
I figur *(a)* er omkretsen $5+2+4=11$.

I figur *(b)* er omkretsen $4+5+3+1+6+5=24$.

0.4 Areal

Overalt rundt oss kan vi se *overflater*, for eksempel på et gulv eller et ark. Når vi ønsker å si noe om hvor store overflater er, må vi finne *arealet* deres. Idéen bak begrepet areal er denne:

Vi tenker oss et kvadrat med sidelengder 1. Dette kaller vi *enerkvadradet*.

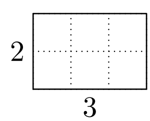


Så ser vi på overflaten vi ønsker å finne arealet til, og spør:

”Hvor mange enerkvadrat er det plass til på denne overflata?”

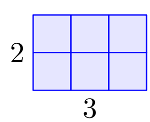
Arealet til et rektangel

La oss finne arealet til et rektangel som har grunnlinje 3 og høgde 2.



Vi kan da telle oss fram til at rektangelet har plass til 6 enerkvadrat:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 6$$

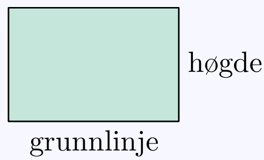


Ser vi tilbake til *seksjon* **??**, legger vi merke til at

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 3 \cdot 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

0.7 Arealet til eit rektangel

$$\text{Areal} = \text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}$$

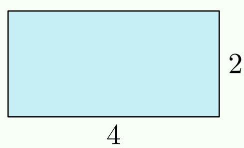


Bredde og lengde

Ofte blir ordene *bredde* og *lengde* brukt om grunnlinja og høgda i et rektangel.

Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet[1].

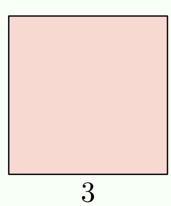


Svar:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 4 \cdot 2 = 8$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar:

$$\text{Arealet til kvadratet} = 3 \cdot 3 = 9$$

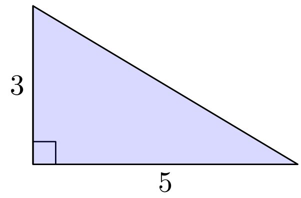
[1] *Merk*: Lengdene vi bruker som eksempel i en figur vil ikke nødvendigvis samsvare med lengdene i en annen figur. En sidelengde lik 1 i en figur kan altså vere kortere enn en sidelengde lik 1 i en annen figur.

Arealet til en trekant

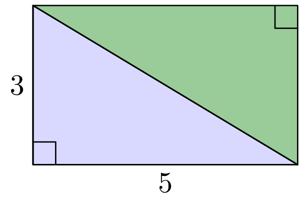
For trekanter er det tre forskjellige tilfeller vi må se på:

1) Tilfellet der grunnlinja og høgda har et felles endepunkt

La oss finne arealet til en rettvinklet trekant med grunnlinje 5 og høgde 3.



Vi kan nå lage et rektangel ved å ta en kopi av trekanten vår, og så legge langsidene til de to trekantene sammen:



Av *Regel 0.7* vet vi at arealet til rektangelet er $5 \cdot 3$. Arealet til én av trekantane må utgjøre halvparten av arealet til rektangelet, altså er

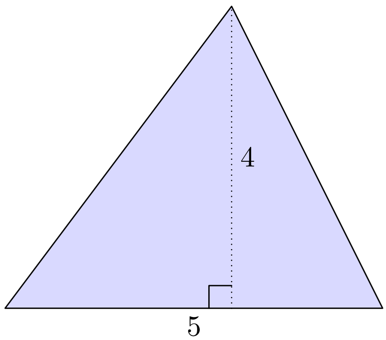
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 3}{2}$$

For den blå trekanten er

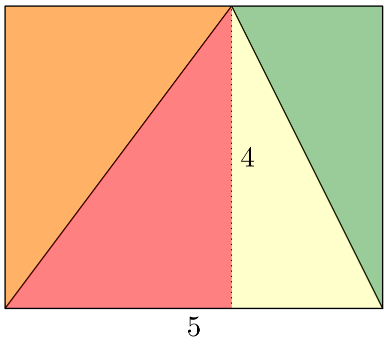
$$\frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

2) Tilfellet der høgda ligger inni trekanten, men ikke har felles endepunkt med grunnlinja

Trekanten under har grunnlinje 5 og høgde 4.



Med denne trekanten (og høgda) som utgangspunkt, danner vi denne figuren:



Vi legger nå merke til at

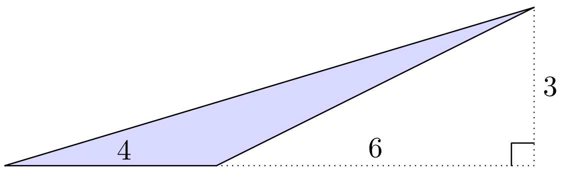
- arealet til den røde trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den røde og den gule trekanten.
- arealet til den gule trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den gule og den grønne trekanten.

Summen av arealene til den gule og den røde trekanten utgjør altså halvparten av arealet til rektangelet som består av alle de fire fargede trekantene. Arealet til dette rektangelet er $5 \cdot 4$, og da vår opprinnelige trekant (den blå) består av den røde og den oransje trekanten, har vi at

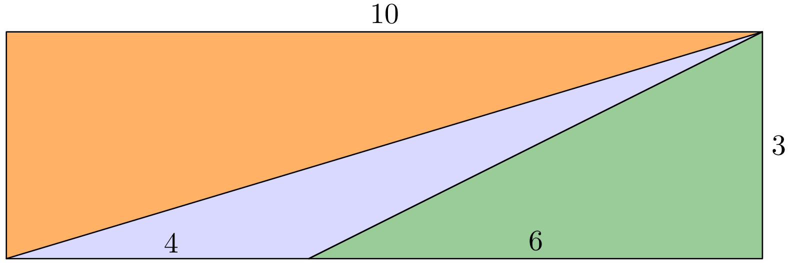
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

3) Tilfellet der høgda ligg utenfor trekanten

Trekanten under har grunnlinje 4 og høgde 3.



Med denne trekanten som utgangspunkt, danner vi et rektangel:



Vi gir nå arealene følgende navn:

$$
\begin{aligned}
\text{Arealet til rektangelet} &= R \\
\text{Arealet til den blå trekanten} &= B \\
\text{Arealet til den oransje trekanten} &= O \\
\text{Arealet til den grønne trekanten} &= G
\end{aligned}
$$

Da har vi at (både den oransje og den grønne trekanten er rettvinklet)

$$R = 3 \cdot 10 = 30$$

$$O = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

$$G = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Videre er

$$
\begin{aligned}
B &= R - O - G \\
&= 30 - 15 - 9 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Legg nå merke til at vi kan skrive

$$6 = \frac{4 \cdot 4}{3}$$

I den blå trekanten gjenkjenner vi dette som

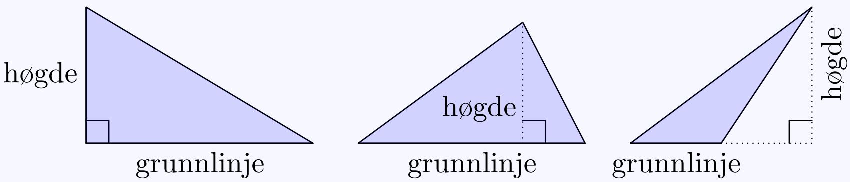
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

Alle tilfellene oppsummert

En av de tre tilfellene vi har studert vil alltid gjelde for ei valgt grunnlinje i en trekant, og alle tilfellene resulterte i det samme uttrykket.

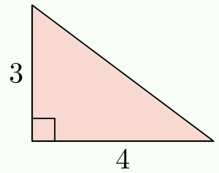
0.8 Arealet til en trekant

$$\text{Areal} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$



Eksempel 1

Finn arealet til trekanten.

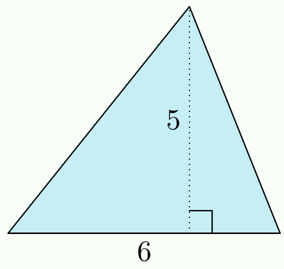


Svar:

$$\begin{aligned}\text{Arealet til trekanten} &= \frac{4 \cdot 3}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn arealet til trekanten.

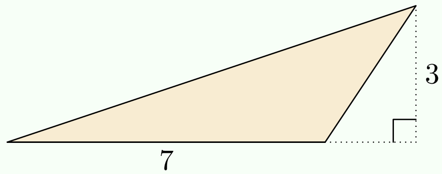


Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Eksempel 3

Finn arealet til trekanten.

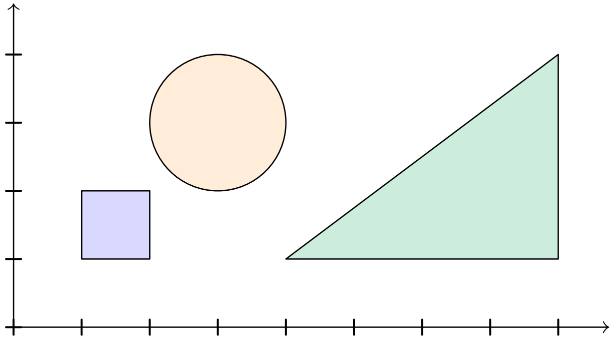


Svar:

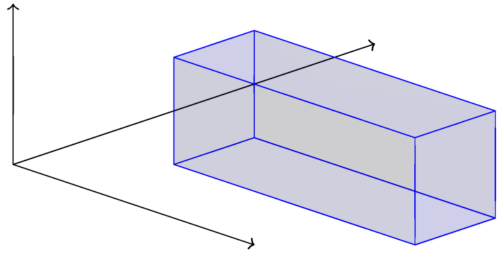
$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

0.5 Tredimensjonal geometri

Så langt har vi sett på todimensjonale figurer som trekanter, firkanter, sirkler o.l. Alle todimensjonale figurer kan tegnes inn i et koordinatsystem med to akser.



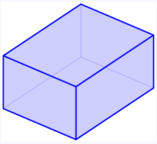
For å tegne *tredimensjonale* figurer trengs derimot tre akser:



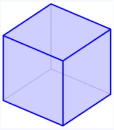
Mens et rektangel sies å ha en bredde og en høgde, kan vi si at boksen over har en bredde, en høgde *og* en lengde (dybde).

Området som "ligger utenpå" en tredimensjonal figur kaller vi *overflaten*. Overflaten til boksen over består av 6 rektangler. Mangekanter som er deler av en overflate kalles *sideflater*.

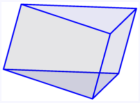
0.9 Tredimensjonale figurer



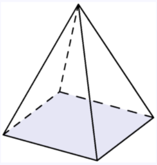
Firkantet prisme
Har to like og fire like rektangler som sideflater. Alle sideflatene som er i kontakt, står vinkelrette på hverandre.



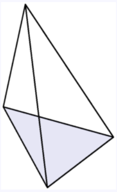
Kube
Firkantet prisme med kvadrater som sideflater.



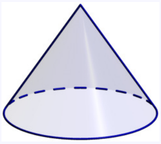
Trekantet prisme
To av sideflatene er like trekanter som er parallelle. Har tre sideflater som er trekanter.



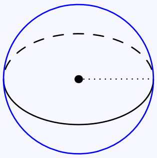
Firkantet pyramide
Har ett rektangel og fire trekanter som sideflater.



Trekantet pyramide
Har fire trekanter som sideflater.



Kjegle
En del av overflaten er en sirkel, den resterende delen er en sammenbrettet sektor.



Kule
Alle punkt på overflaten har lik avstand til sentrum.

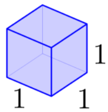
Tips

Det er ikke så lett å se for seg hva en *sammenbrettet sektor* er, men prøv dette:

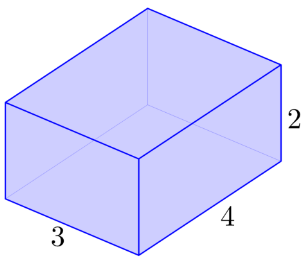
1. Tegn en sektor på et ark. Klipp ut sektoren, og føy sammen de to kantene på sektoren. Da har du en kjegle uten bunn.

0.6 Volum

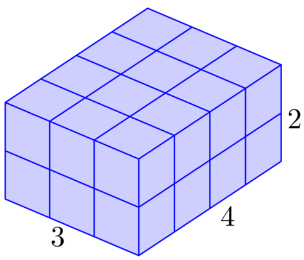
Når vi ønsker å seie noko om kor mykje det er plass til inni ein gjenstand, snakkar vi om *volumet* til den. Som eit mål på volum tenker vi oss ei kube med sidelengde 1.



Ei slik kube kan vi kalle 'einarkuba'. Sei vi har ei firkanta prisme med breidde 3, lengde 4 og høgde 2.



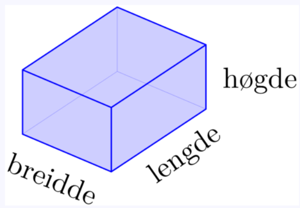
I denne er det plass til akkurat 24 einarkuber.



Dette kunne vi ha rekna slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

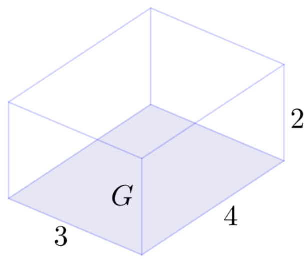
0.10 Volumet til ei firkanta prisme I



$$\text{volum} = \text{breidde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høgde}$$

Grunnflate

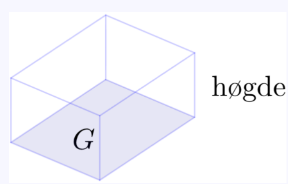
For å rekne ut volumet til de mest elementære formene vi har, er det lurt å bruke omgrepet *grunnflate*. Slik som for ei grunnlinje[1], er det vårt valg av grunnflate som avgjør hva som er høgda. For prisma fra forrige side er det naturlig å velge den flaten som ligger horisontalt til å vere grunnflata. For å indikere dette skriver man ofte bokstaven G:



Grunnflaten har arealet $3 \cdot 4 = 12$, mens høgda er 2. Volumet til hele prismen er grunnflaten sitt areal ganget med høgda:

$$\begin{aligned} V &= 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= G \cdot 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

0.11 Volumet til ei firkanta prisme II



$$\text{volum} = G \cdot \text{høgde}$$

Grunnflaten eller grunnflatearealet?

I teksten over har vi først kalt selve grunnflaten for G, og så brukt G for *grunnflatearealet*. I denne boka er begrepet *grunnflate* så sterkt knyttet til *grunnflatearealet* at vi ikke skiller mellom disse to.

[1]Se side 9.