0.1 Introduksjon

Ethvert matematisk uttrykk som inneholder $=$ er en *likning*, likevel er ordet likning tradisjonelt knytt til at vi har et *ukjent* tall.

Si at vi ønsker å finne et tall som er slik at hvis vi legger til 4, så får vi 7. Dette talet kan vi kalle for kva som helst, men det vanligste er å kalle det for x, som altså er det ukjente talet vårt. Likningen vår kan nå skrives slik:

$$x + 4 = 7$$

x-verdien[1] som gjør at det blir samme verdi på begge sider av likhetstegnet kalles *løsningen* av likningen. Det er alltids lov til å se eller prøve seg fram for å finne verdien til x. Kanskje har du allerede merket at $x = 3$ er løningen av likningen, siden

$$3 + 4 = 7$$

Men de fleste likninger er det vanskelig å se eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til mer generelle løsningsmetodar. Egentlig er det bare ett prinsipp vi følger:

> Vi kan alltid utføre en matematisk operasjon på den ene siden av likhetstegnet, så lenge vi utfører den også på den andre siden.

De matematiske operasjonane vi har presentert i denne boka er de fire rekneartene. Med disse lyder prinsippet slik:

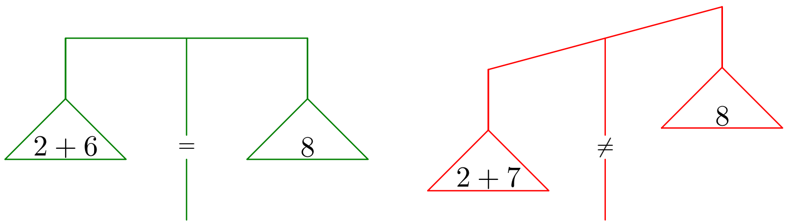
> Vi kan alltid legge til, trekke ifra, gange eller dele med et tall på den ene siden av likhetstegnet, så lenge vi gjør det også på den andre siden.

Prinsippet følger av betydningen til $=$. Når to uttrykk har samme verdi, må de nødvendigvis fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører de samme matematiske operasjonane på dem. I kommende seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for hver enkelt rekneoperasjon, men hvis du føler dette allerede gir god meining kan du med fordel hoppe til *seksjon 0.3*.

[1] I andre tilfeller kan det være flere verdier.

0.2 Løysing ved dei fire rekneartane

I figurene til denne seksjonen skal vi forstå likninger ut ifra et vekt-prinsipp. $=$ *vil da indikere*[1] *at det er like mykje vekt (lik verdi) på venstre side som på høyre side.*

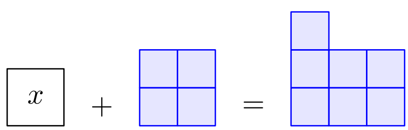


Addisjon og subtraksjon; tall som skifter side

Første eksempel

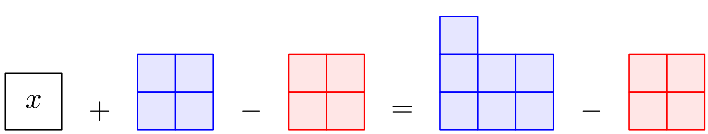
Vi har allerede funnet løsningen på denne likningen, men la oss løse den på en annen måte[2]:

$$x + 4 = 7$$



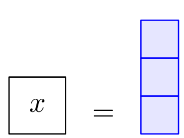
Det blir tydelig hva verdien til x er hvis x står alene på en av sidene, og x blir isolert på venstresiden hvis vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresiden, må vi ta bort 4 fra høyresiden også, skal begge sidene ha samme verdi.

$$x + 4 - \color{red}{4} = 7 - \color{red}{4}$$



Siden $4 - \color{red}{4} = 0$ og $7 - \color{red}{4} = 3$, får vi at

$$x = 3$$



[1] $\neq$ er symbolet for ”er *ikkje* lik”.

[2] *Merk:* I tidligere figurer har det vært samsvar mellom størrelsen på rutene og (tall)verdien til tallet de symboliserer. Dette gjelder ikke rutene som representerer x.

Dette kunne vi ha skrevet noe mer kortfattet slik:

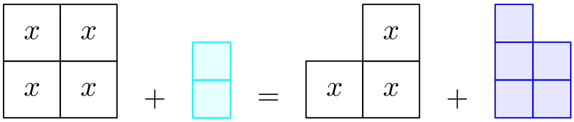
$$\begin{aligned} x + 4 &= 7 \\ x &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Mellom første og andre linje er det vanlig å si at *4 har skiftet side, og derfor også fortegn (fra + til −).*

Andre eksempel

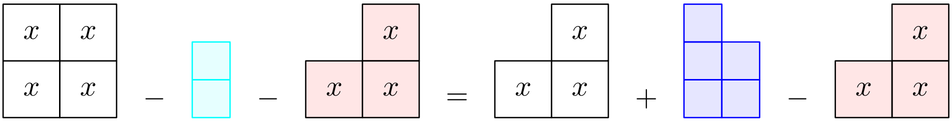
La oss gå videre til å se på en litt vanskeligere likning[1]:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



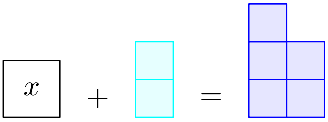
For å skaffe et uttrykk med x bare på én side, tar vi vekk $3x$ på begge sider:

$$4x - 2 - 3x = 3x + 5 - 3x$$



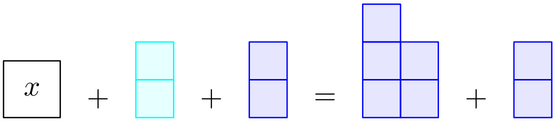
Da får vi at

$$x - 2 = 5$$



For å isolere x, legger vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høyre side:

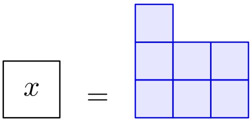
$$x - 2 + 2 = 5 + 2$$



[1]Legg merke til at figuren illustrerer $4x + (-2)$ (se *seksjon* **??**) på venstre side. Men $4x + (-2)$ er det samme som $4x - 2$ (se *seksjon* **??**).

Da får vi at

$$x = 7$$



Stegene vi har tatt kan oppsummeres slik:

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. figur} \\
4x - 3x - 2 &= 3x - 3x + 5 && \text{2. figur} \\
x - 2 &= 5 && \text{3. figur} \\
x - 2 + 2 &= 5 + 2 && \text{4. figur} \\
x &= 7 && \text{5. figur}
\end{aligned}
$$

Dette kan vi på en forenklet måte skrive slik:

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 \\
4x - 3x &= 5 + 2 \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

0.1 Flytting av tall over likhetstegnet

I en likning ønsker vi å samle alle x-ledd og alle kjente ledd på hver sin side av likhetstegnet. Skifter et ledd side, skifter det fortegn.

Eksempel 1

Løs likningen

$$3x + 3 = 2x + 5$$

Svar:

$$
\begin{aligned}
3x - 2x &= 5 - 3 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Svar:

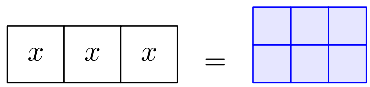
$$
\begin{aligned}
-4x + 5x &= 12 + 3 \\
x &= 15
\end{aligned}
$$

Ganging og deling

Deling

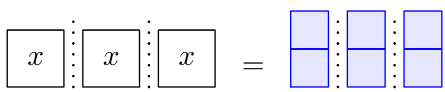
Hittil har vi sett på likninger der vi endte opp med én x på den ene siden av likhetstegnet. Ofte har vi flere x-er, som for eksempel i likningen

$$3x = 6$$



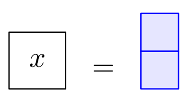
Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi én x i hver gruppe. Deler vi også høyresiden inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den samme verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$



Altså er

$$x = 2$$



La oss oppsummere utregningen vår:

$$3x = 6 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \qquad \text{2. figur}$$

$$x = 2 \qquad \text{3. figur}$$

Du husker kanskje at vi gjerne skriver

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$$

0.2 Deling på begge sider av en likning

Vi kan dele begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$4x = 20$$

Svar:

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$2x + 6 = 3x - 2$$

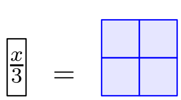
Svar:

$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad (-x = -1x)$$
$$x = 8$$

Ganging

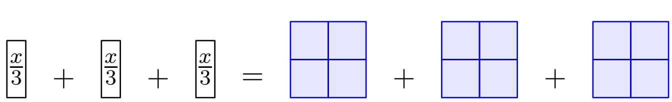
Det siste tilfellet vi skal se på er når likninger inneholder brøkdeler av den ukjente, som for eksempel i likningen

$$\frac{x}{3} = 4$$



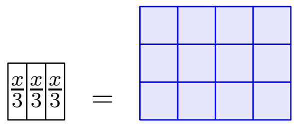
Vi kan få én x på venstresiden hvis vi legger til to eksemplar av $\frac{x}{3}$. Likningen forteller oss at $\frac{x}{3}$ har samme verdi som 4. Dette betyr at for hver $\frac{x}{3}$ vi legger til på venstresiden, må vi legge til 4 på høyresiden, skal sidene ha samme verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$



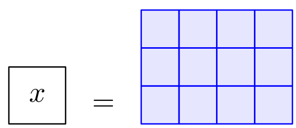
Vi legger nå merke til at $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$ og at $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$:

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$



Og da $\frac{x}{3} \cdot 3 = x$ og $4 \cdot 3 = 12$, har vi at

$$x = 12$$



En oppsummering av stegene våre kan vi skrive slik:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} &= 4 && \text{1. figur} \\
\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} &= 4 + 4 + 4 && \text{2. figur} \\
\frac{x}{3} \cdot 3 &= 4 \cdot 3 && \text{3. figur} \\
x &= 12 && \text{4. figur}
\end{aligned}$$

Dette kan vi kortere skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

0.3 Ganging på begge sider av en likning

Vi kan gange begge sider av en likning med det samme talet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar:

$$\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 2 \cdot 5$$
$$x = 10$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Svar:

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$
$$\frac{6x}{10} = 18$$
$$\frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 18 \cdot 10$$
$$6x = 180$$
$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$
$$x = 30$$

0.3 Løysingsmetodane oppsummert

0.4 Løysningsmetoder for likninger

Vi kan alltid

- addere eller subtrahere begge sider av en likning med det samme tallet. Dette er ekvivalent til å flytte et ledd fra den ene siden av likningen til den andre, så lenge vi også skifter fortegn på leddet.
- gange eller dele begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 6 + 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$9 - 7x = 8x + 3$$

Svar:

$$\begin{aligned} 9 - 7x &= -8x + 3 \\ 8x - 7x &= 3 - 9 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 10x - 20 &= 7x - 5 \\ 10x - 7x &= 20 - 5 \\ 3x &= 15 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Eksempel 4

Løy likningen

$$15 - 4x = x + 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 15 - 5 &= x + 4x \\ 10 &= 5x \\ \frac{10}{5} &= \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Eksempel 5

Løs likningen

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} &= 20 + 8 \\ \frac{\cancel{7}x}{9 \cdot \cancel{7}} &= \frac{28}{7} \\ \frac{x}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} &= 4 \cdot 9 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Eksempel 6

Løs likningen

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Svar:

Får å unngå brøker, ganger vi begge sider med fellesnevneren 12:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) 12 &= \left(\frac{5}{12}x + 2\right) 12 \\
\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 &= \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \\
4x + 2 &= 5x + 24 \\
4x - 5x &= 24 - 2 \\
-x &= 22 \\
\frac{\cancel{-1}\,x}{\cancel{-1}} &= \frac{22}{-1} \\
x &= -22
\end{aligned}$$

Tips

Mange liker å lage seg ein regel om at "vi kan gange eller dele alle ledd med det samme tallet". I eksempelet over kunne vi da hoppet direkte til andre linje i utrekningen.

Eksempel 7

Løs likningen

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Svar:

Vi ganger begge sider med fellesnevneren $2x$:

$$\begin{aligned}
2x\left(3 - \frac{6}{x}\right) &= 2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right) \\
6x - 12 &= 4x + 5 \\
6x - 4x &= 5 + 12 \\
2x &= 17 \\
x &= \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

0.4 Potenslikninger

La oss løse likningen

$$x^2 = 9$$

Dette kalles en *potenslikning*. Potenlikninger er vanligvis vanskelige å løse bare ved hjelp av de fire regneartane, så her må vi også nytte oss av potensregler. Vi opphøyer begge sidene av likningen med den omvendte brøken[1] til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av *Regel* **??** er

$$x^{2\cdot\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$
$$x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Siden $3^2 = 9$, er $9^{\frac{1}{2}} = 3$. Nå legger vi merke til dette:

Prinsippet erklært på side **??** *sier at vi kan, som vi nå gjorde, utføre en matematisk operasjon på begge sider av likningen. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikke at alle løsninger er funnet.*

Angående vår likning, er $x = 3$ en løsning. For ordens skyld kan vi bekrefte dette med utregningen

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også en løsning av likningen vi startet med!

0.5 Potenslikninger

En likning som kan bli skrevet som

$$x^a = b$$

der a og b er konstanter, er en *potenslikning.*

Likningen har a forskjellige løsninger.

[1]Husk at $2 = \frac{2}{1}$.

Eksempel 1

Løs likningen

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Siden $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$, har vi at

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = -4$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$3x^2 + 1 = 7$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 - 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad x = -\sqrt{2}$$

Merk

Selv om likningen

$$x^a = b$$

har a løsningar, er ikke alle nødvendigvis *reelle*[1]. I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tall som løser likningen. For eksempel har likning,

$$x^3 = 8$$

3 løsninger, men vi nøyer oss med å finne at $x = 2$ er en løsning.

[1]Som vi tidligere har vært inne på, er *reelle* og *imaginære* tall noe vi ikke går nærmere inn på i denne boka