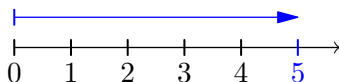


0.1 Introduksjon

Vi har tidligere sett at (for eksempel) tallet 5 på ei tallinje ligger 5 enerlengder til høyre for 0.

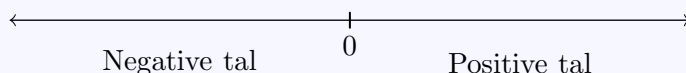


Men hva om vi går andre veien, altså mot venstre? Dette spørsmålet svarer vi på ved å innføre *negative tall*.

0.1 Positive og negative tal

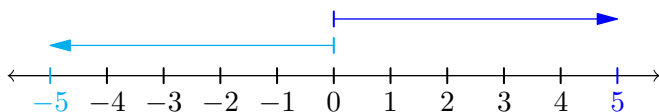
På en talinje gjelder følgende:

- Tall plassert *til høyre* for 0 er positive tall.
- Tall plassert *til venstre* for 0 er negative tal.



I praksis kan vi ikke hele tiden bruke en tallinje for å avgjøre om et tall er negativt eller positivt, og derfor bruker vi et symbol for å vise at tall er negative. Dette symbolet er rett og slett $-$, altså det samme symbolet som vi bruker ved subtraksjon. 5 er med dét et positivt tall, mens -5 er et negativt tall. På tallinja er det slik at

- 5 ligg 5 enerlengder *til høyre* for 0.
- -5 ligg 5 enerlengder *til venstre* for 0.



Den store forskjellen på 5 og -5 er altså på hvilken side av 0 tallene ligger. Da 5 og -5 har samme avstand til 0, sier vi at 5 og -5 har samme *lengde*.

0.2 Lengde (tallverdi/absoluttverdi)

Lengden til et tall skrives ved symbolet $||$.

Lengden til et positivt tall er verdien til tallet.

Lengden til et negativt tall er verdien til det positive tallet med samme siffer.

Eksempel 1

$$|27| = 27$$

Eksempel 2

$$|-27| = 27$$

Fortegn

Fortegn er en samlebetegnelse for $+$ og $-$. 5 har $+$ som fortegn og -5 har $-$ som fortegn.

0.2 Dei fire rekneartane med negative tal

Ved innføringen av negative tall får de fire regneartene nye sider som vi må se på trinnvis. Når vi adderer, subtraherer, multipliserer eller dividerer med negative tall vil vi ofte, for tydeligheten sin skyld, skrive negative tall med parentes rundt. Da skriver vi for eksempel -4 som (-4) .

Addisjon

Når vi adderte i [seksjon ??](#) så vi på $+$ som vandring *mot høyre*. Negative tall gjør at vi må utvide begrepet for $+$:

$+$ "Like langt og i *samme* retning som"

La oss se på regnestykket

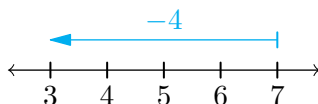
$$7 + (-4)$$

Vår utvidede definisjon av $+$ sier oss nå at

$$7 + (-4) = \text{"7 og like langt og i samme retning som } (-4)\text{"}$$

(-4) har lengde 4 og retning *mot venstre*. Vårt regnestykke sier altså at vi skal starte på 7, og deretter gå lengden 4 *mot venstre*.

$$7 + (-4) = 3$$



0.3 Addisjon med negative tall

Å addere et negativt tall er det samme som å subtrahere tallet med samme tallverdi.

Eksempel 1

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

Eksempel 2

$$-8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$

Merk

Regel ?? erklærer at addisjon er kommutativ. Dette er gjeldende også ved innføringen av negative tall, for eksempel er

$$7 + (-3) = 4 = -3 + 7$$

Subtraksjon

I *seksjon ??* så vi på $-$ som vandring *mot venstre*. Også betydningen av $-$ må utvides når vi jobber med negative tall:

$-$ "Like langt og i *motsatt* retning som"

La oss se på regnestykket

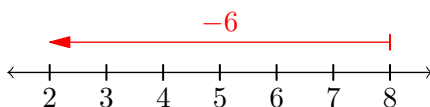
$$2 - (-6)$$

Med vår utvidede betydning av $-$, kan vi skrive

$$2 - (-6) = \text{"2 og like langt og i } \textit{motsatt} \text{ retning som } (-6)\text{"}$$

-6 har lengde 6 og retning *mot venstre*. Når vi skal gå samme lengde, men i *motsatt* retning, må vi altså gå lengden 6 *mot høyre*¹. Dette er det samme som å addere 6:

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$



0.4 Subtraksjon med negative tall

Å subtrahere et negativt tall er det samme som å addere tallet med samme tallverdi.

Eksempel 1

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20$$

¹Vi minner enda en gang om at rødfargen på pila indikerer at man skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Eksempel 2

$$-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$$

Multiplikasjon

I [seksjon ??](#) introduserte vi ganging med positive heltall som gjentatt addisjon. Med våre utvidede begrep av addisjon og subtraksjon, kan vi nå også utvide begrepet multiplikasjon:

0.5 Multiplikasjon med positive og negative tall

- Ganging med et positivt heltall er det samme som gjentatt addisjon.
- Ganging med et negativt heltall er det samme som gjentatt subtraksjon.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= \text{"Like langt og i samme retning som 2, 3 ganger"} \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 3 &= \text{"Like langt og i samme retning som } (-2), 3 \text{ ganger"} \\ &= -2 - 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-3) &= \text{"Like langt og i motsatt retning som 2, 3 ganger"} \\ &= -2 - 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 4

$$\begin{aligned}
 (-3) \cdot (-4) &= \text{”Like langt og i } \textit{motsatt} \text{ retning som } -3, 4 \text{ ganger”} \\
 &= 3 + 3 + 3 + 3 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

Multiplikasjon er kommutativ

Eksempel 2 og *Eksempel 3* på side 5 illustrerer at *Regel ??* også er gjeldende ved innføringen av negative tall:

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$$

Det blir tungvint å regne ganging som gjentatt addisjon/subtraksjon kvar gang vi har et negativt tall involvert, men som en direkte konsekvens at *Regel 0.5* kan vi lage oss følgende to regler:

0.6 Multiplikasjon med negative tal I

Produktet av et negativt og et positivt tall er et negativt tall.

Tallverdien til faktorene ganget sammen gir tallverdien til produktet.

Eksempel 1

Regn ut $(-7) \cdot 8$

Svar:

Siden $7 \cdot 8 = 56$, er $(-7) \cdot 8 = -56$

Eksempel 2

Regn ut $3 \cdot (-9)$.

Svar:

Siden $3 \cdot 9 = 27$, er $3 \cdot (-9) = -27$

0.7 Multiplikasjon med negative tal II

Produktet av to negative tall er et positivt tall.

Tallverdien til faktorene ganget sammen gir verdien til produktet.

Eksempel 1

$$(-5) \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50$$

Eksempel 2

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8 = 16$$

Divisjon

Definisjon av divisjon (se [seksjon ??](#)), kombinert med det vi vet om multiplikasjon med negative tall, gir oss nå dette:

$$-18 : 6 = \text{”Tallet jeg må gange 6 med for å få } -18\text{”}$$

$$6 \cdot (-3) = -18, \text{ altså er } -18 : 6 = -3$$

$$42 : (-7) = \text{”Tallet jeg må gange } -7 \text{ med for å få } 42\text{”}$$

$$(-7) \cdot (-8) = 42, \text{ altså er } 42 : (-7) = -8$$

$$-45 : (-5) = \text{”Tallet jeg må gange } -5 \text{ med for å få } -45\text{”}$$

$$(-5) \cdot 9 = -45, \text{ altså er } -45 : (-5) = 9$$

0.8 Divisjon med negative tal

Divisjon mellom et positivt og et negativt tall gir et negativt tal.

Divisjon mellom to negative tall gir et positivt tall.

Tallverdien til dividenden delt med tallverdien til divisoren gir tallverdien til kvotienten.

Eksempel 1

$$-24 : 6 = -4$$

Eksempel 2

$$24 : (-2) = -12$$

Eksempel 3

$$-24 : (-3) = 8$$

Eksempel 4

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Eksempel 5

$$\frac{-10}{7} = -\frac{10}{7}$$

0.3 Negative tal som mengde

Obs! Denne tolkningen av negative tall blir først brukt i [seksjon ??](#), som er en seksjon noen lesere uten tap av forståelse kan hoppe over.

Så langt har vi sett på negative tall ved hjelp av tallinjer. Å se på negative tall ved hjelp av mengder er i første omgang vanskelig, fordi vi har likestilt mengder med antall, og negative antall gir ikke mening! For å skape en forståelse av negative tall ut ifra et mengdeperspektiv, bruker vi det vi skal kalle *vektprinsippet*. Dette innebærer at vi ser på tallene som krefter. De positive tallene er antall krefter som virker nedover og de negative tallene er antall krefter som virker oppover¹. Svarene på regnestykker med positive og negative tall kan man da se på som resultatet av en veiing av de forskjellige mengdene. Slik vil altså et positivt tall og et negativt tall med samme tallverdi *utligne* hverandre.

0.9 Negative tall som mengde

Negative tall vil vi indikere som en lyseblå mengde:

$$\boxed{} = -1$$

Eksempel

$$1 + (-1) = 0$$

$$\boxed{} + \boxed{} = 0$$

¹Fra virkeligheten kan man se på de positive og negative tallene som ballonger fylt med henholdsvis luft og helium. Ballonger fylt med luft virker med en kraft nedover (de faller), mens heliumballonger virker med en kraft oppover (de stiger).