## 0.1 Potensar

$$\text{grunntal} \longrightarrow 2^{3 \longleftarrow \text{eksponent}}$$

En potens består av et *grunntall* og en *eksponent*. For eksempel er $2^3$ en potens med grunntall 2 og eksponent 3. En positiv, heltalls eksponent sier hvor mange eksemplar av grunntallet som skal ganges sammen, altså er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

**0.1 Potenstall**

$a^n$ er et potenstall med grunntall $a$ og eksponent $n$.

Hvis $n$ er et naturlig tall, vil $a^n$ svare til $n$ eksemplar av $a$ multiplisert med hverandre.

*Merk:* $a^1 = a$

**Eksempel 1**

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

**Eksempel 2**

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

**Eksempel 3**

$$\begin{aligned} (-7)^2 &= (-7) \cdot (-7) \\ &= 49 \end{aligned}$$

**Språkboksen**

Vanlige måter å si $2^3$ på er

- "2 i tredje"
- "2 opphøyd i 3"

I programmeringsspråk brukes gjerne symbolet `^` eller symbola `**` mellom grunntall og eksponent.

**Merk**

De kommende sidene vil inneholde regler for potenser med tilhørende forklaringer. Selv om det er ønskelig at de har en så generell form som mulig, har vi i forklaringene valgt å bruke eksempel der eksponentene ikke er variabler. Å bruke variabler som eksponenter ville gitt mye mindre leservennlige uttrykk, og vi vil påstå at de generelle tilfellene kommer godt til synes også ved å studere konkrete tilfeller.

## 0.2 Multiplikasjon av potensar

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

**Eksempel 1**

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 3^2 &= 3^{5+2} \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

**Eksempel 2**

$$\begin{aligned} b^4 \cdot b^{11} &= b^{3+11} \\ &= b^{14} \end{aligned}$$

**Eksempel 3**

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^{-7} &= a^{5-7} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

(Se *Regel 0.5* for hvordan potens med negativ eksponent kan tolkes.)

## 0.2 Multiplikasjon av potensar (forklaring)

La oss se på tilfellet

$$a^2 \cdot a^3$$

Vi har at

$$a^2 = 2 \cdot 2$$

$$a^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Med andre ord kan vi skrive

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= \overbrace{a \cdot a}^{a^2} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{a^3} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

## 0.3 Divisjon med potensar

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

**Eksempel 1**

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

**Eksempel 2**

$$\begin{aligned} \frac{2^4 \cdot a^3}{a^2 \cdot 2^2} &= 2^{4-2} \cdot a^{3-2} \\ &= 2^2 a \\ &= 4a \end{aligned}$$

### 0.3 Divisjon med potensar (forklaring)

La oss undersøke brøken

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Vi skriver ut potensene i teller og nevner:

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} \\ &= \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} \\ &= a \cdot a \cdot a \\ &= a^3\end{aligned}$$

Dette kunne vi ha skrevet som

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= a^{5-2} \\ &= a^3\end{aligned}$$

### 0.4 Spesialtilfellet $a^0$

$$a^0 = 1$$

**Eksempel 1**

$$1000^0 = 1$$

**Eksempel 2**

$$(-b)^0 = 1$$

### 0.4 Spesialtilfellet $a^0$ (forklaring)

Et tall delt på seg sjølv er alltid lik 1, derfor er

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Av dette, og *Regel 0.3*, har vi at

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a^n}{a^n} \\ &= a^{n-n} \\ &= a^0\end{aligned}$$

### 0.5 Potens med negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

**Eksempel 1**

$$a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

**Eksempel 2**

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

### 0.5 Potens med negativ eksponent (forklaring)

Av *Regel 0.4* har vi at $a^0 = 1$. Altså er

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$

Av *Regel 0.3* er

$$\begin{aligned}\frac{a^0}{a^n} &= a^{0-n} \\ &= a^{-n}\end{aligned}$$

### 0.6 Brøk som grunntal

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

**Eksempel 1**

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

**Eksempel 2**

$$\left(\frac{a}{7}\right)^3 = \frac{a^3}{7^3} = \frac{a^3}{343}$$

### 0.6 Brøk som grunntal (forklaring)

La oss studere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} \\ &= \frac{a^3}{b^3}\end{aligned}$$

### 0.7 Faktorar som grunntal

$$(ab)^m = a^m b^m$$

**Eksempel 1**

$$\begin{aligned}(3a)^5 &= 3^5 a^5 \\ &= 243a^5\end{aligned}$$

**Eksempel 2**

$$(ab)^4 = a^4 b^4$$

### 0.7 Faktorar som grunntal (forklaring)

La oss bruke $(a \cdot b)^3$ som eksempel. Vi har at

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^3 &= (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \\ &= a^3 b^3\end{aligned}$$

### 0.8 Potens som grunntal

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

### Eksempel 1

$$\begin{aligned}\left(c^4\right)^5 &= c^{4\cdot 5}\\ &= c^{20}\end{aligned}$$

### Eksempel 2

$$\begin{aligned}\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^8 &= 3^{\frac{5}{4}\cdot 8}\\ &= 3^{10}\end{aligned}$$

### 0.8 Potens som grunntal (forklaring)

La oss bruke $(a^3)^4$ som eksempel. Vi har at

$$\left(a^3\right)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$

Av *Regel 0.2* er

$$\begin{aligned}a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 &= a^{3+3+3+3}\\ &= a^{3\cdot 4}\\ &= a^{12}\end{aligned}$$

## 0.9 *n*-rot

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Symbolet $\sqrt{\phantom{a}}$ kalles et *rottegn*. For eksponenten $\frac{1}{2}$ er det vanlig å utelate 2 i rottegnet:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

### Eksempel

Av *Regel 0.8* har vi at

$$\begin{aligned}\left(a^b\right)^{\frac{1}{b}} &= a^{b\cdot\frac{1}{b}} \\ &= a\end{aligned}$$

For eksempel er

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \text{ siden } 3^2 = 9$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \text{ siden } 5^3 = 125$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ siden } 2^4 = 16$$

### Språkboksen

$\sqrt{9}$ kalles ”kvadratrota til 9”

$\sqrt[5]{9}$ kalles ”femterota til 9”.

## 0.2 Irrasjonale tal

### 0.10 Irrasjonale tall

Et tall som *ikke* er et rasjonalt tall, er et irrasjonalt tal[1].

Verdien til et irrasjonalt tall har uendelig mange desimaler med et ikke-repeterende mønster.

### Eksempel 1

$\sqrt{2}$ er et irrasjonelt tall.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373...$$

[1]Strengt tatt er irrasjonale tall alle *reelle* tall som ikke er rasjonale tall. Men for å forklare hva *reelle* tall er, må vi forklare hva *imaginære* tall er, og det har vi valgt å ikke gjøre i denne boka.