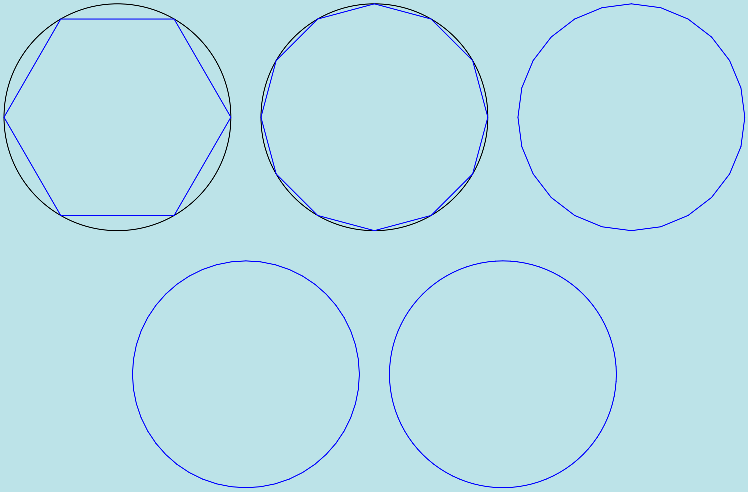
Matematikkens byggesteiner



Sindre Sogge Heggen

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"*

*"Det er ikke å vite, men å lære,
ikke å eie, men å tilegne seg,
ikke å være til stede, men å komme dit,
som gir den største gleden."*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i LaTeX og figurane er lagd vha. Asymptote.

07.04.2021

Forord

Matematikk har et enormt omfang av forgreninger og anvendelser, men det aller meste bygger på en overkommeleg mengde med grunnprinsipper, og det er disse jeg ønsker å presentere i denne boka. Et prinsipp i oppsummert form har jeg valgt å kalle en *regel*. Regler finn du i blå tekstboksar, som oftest etterfulgt av et eksempel på bruk av regelen. Ett av hovudmålene til denne boka er å gi leseren en forståelse av hvorfor reglene er som de er. I kapittel 1 - 5 vil du finne forklaringer[1] i forkant av hver regel, mens i kapittel 6 finner du forklaringer enten i forkant av eller direkte etter en regel (og eventuelle eksempel). Fra og med kapittel 7 er noen forklaringer lagt til den avsluttande seksjonen *Forklaringer*, dette indikerer at de kan vere noe krevende å forstå og/eller at regelen er så intuitiv at mange vil oppleve det som overflødig å få den forklart.

Boka si oppbygging

Boka er delt inn i en *Del I* og en *Del II*. *Del I* handler i stor grad om å bygge en grunnleggende forståelse av tallene våre, og hvordan vi regner med dem. *Del II* introduserer konseptet algebra og de nært beslektede temaene potenser, likninger og funskjoner. I tillegg har både *Del I* og *Del II* avsluttende kapittel som handler om geometri.

Obs! Denne boka er fri for både oppgaver og eksempler på praktiske anvendelser av matematikk. Dette er to viktige element som med tiden vil komme, enten integrert i denne boka eller som en frittstående bok.

[1] Å *forklare* reglene i steden for å *bevise* dem er et bevisst valg. Et bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må defineres både på forhand og underveis i en utledning av en regel, noe som kan føre til at forståelsen av hovudpoenget drukner i smådetaljer. Noen av forklaringene vil likevel være gyldige som bevis.

Kjære leser.

Denne boka er i utgangspunktet gratis å bruke, men jeg håper du forstår hvor mye tid og ressurser jeg har brukt på å lage den. Jeg ønsker å fortsette arbeidet med å lage lærebøker som er med på å gjøre matematikk lett tilgjengeleg for alle, men det kan bli vanskelig med mindre arbeidet gir en viss inntekt. Hvis du ender opp med å like boka, håper jeg derfor du kan donere 50 kr via Vipps til 90559730 eller via PayPal. Vær vennlig å markere donasjonen med "Mattebok" ved bruk av Vipps. På forhand takk!

Boka blir oppdatert så snart som råd etter at skrivefeil og lignende blir oppdaget. Jeg vil derfor råde alle til å laste ned en ny versjon i ny og ne ved å følge denne linken.

Nynorskversjonen av boka finner du her.

For spørsmål, ta kontakt på mail: `sindre.heggen@gmail.com`

Takk til

Anne Jordal Myrset

Charlotte Merete Dahl

For mange gode innspel og kommentarar.

Symbol

$=$	”er lik”
$<$	”er mindre enn”
$>$	”er større enn”
$\leq$	”er mindre enn eller lik”
$\geq$	”er større enn eller lik”
$\in$	”er inneholdt i”
$\vee$	”eller”
$\wedge$	”og”
$[a, b]$	lukket intervall fra og med a til og med b
$\lvert a \rvert$	lengden/tallverdien til a
$\perp$	”vinkelrett på”
$\parallel$	”parallell med”
$\triangle$	”trekant”
$\square$	”firkant”

Innhold

Del I

Tall, regning og geometri

Kapittel 1

Tallene våre

1.1 Likhetstegnet, mengder og tallinjer

Likhetstegnet

Som navnet tilsier, viser *likhetstegnet* $=$ til at noe er likt. I hvilken grad og når man kan si at noe er likt er en filosofisk diskusjon, og innledningsvis er vi bare prisgitt dette: Hvilken likhet $=$ sikter til må bli forstått ut ifra konteksten tegnet blir brukt i. Med denne forstelsen av $=$ kan vi studere noen grunnleggende egenskaper for tallene våre, og så komme tilbake til mer presise betydninger av tegnet.

> **Språkboksen**
>
> Vanlige måter å sei $=$ på er
>
> - ”er lik”
> - ”er det samme som”

Mengder og tallinjer

Tall kan representere så mangt. I denne boka skal vi holde oss til to måter å tolke tallene på; tall som en *mengde* og tall som en *plassering på ei linje*. Alle representasjoner av tall tar egentleg utganspunkt i hva forståelsen er av tallene 0 og 1.

Tall som mengde

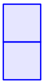
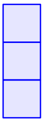
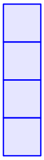
Når vi snakkar om en mengde, vil tallet 0 vere[1] knytt til ”ingenting”. En figur der det ikke er noe til stade vil slik vere det samme som 0:

$$= 0$$

1 vil vi tegne som en rute:

 $= 1$

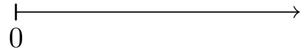
Andre tall vil da vere definert ut ifra hvor mange enerruter (enere) man har:

 $= 2$  $= 3$  $= 4$

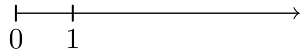
[1] I *kapittel 2* skal vi se at det også er andre tolkninger av 0.

Tall som plassering på ei linje

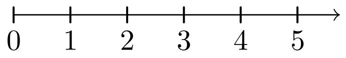
Når vi plasserer tall på ei linje, vil 0 vere utgangspunktet vårt:



Så plasserer vi 1 en viss lengde til høyre for 0:



Andre tall vil da vere definert ut ifra hvor mange enerlengder (enere) vi er unna 0:



Positive heiltal

Vi skal straks se at tall ikke nødvendigvis trenger å være *hele* antal enere, men tallene som *er* det har et eget navn:

1.1 Positive heiltal

Tall som er et helt antall enere kalles *positive*[1] *heltall*. De positive heltallene er

$$1, 2, 3, 4, 5 \text{ og så videre.}$$

Positive heltal blir også kalt *naturlige tal*.

Hva med 0?

Noen forfattare inkluderer også 0 i begrepet naturlige tal. I noen sammenhenger vil dette lønne seg, i andre ikke.

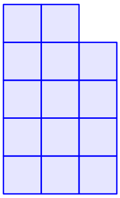
[1]Hva ordet positiv innebærer skal vi gjøre greie for i *kapittel 5*.

1.2 Tall, siffer og verdi

Tallene våre er bygd opp av *sifrene* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9, og *plasseringen* av dem. Sifrene og deres plassering definerer[1] *verdien* til tallet.

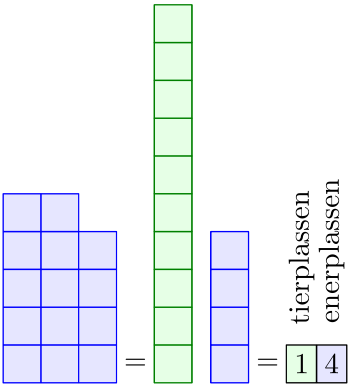
Heiltal større enn 10

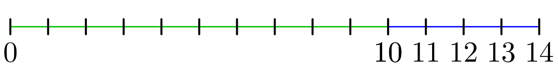
La oss som et eksempel skrive tallet *fjorten* ved hjelp av sifrene våre.

fjorten = 

Vi kan nå lage en gruppe med 10 enere, i tillegg har vi da 4 enere. Da skriver vi fjorten slik:

$$\text{fjorten} = 14$$

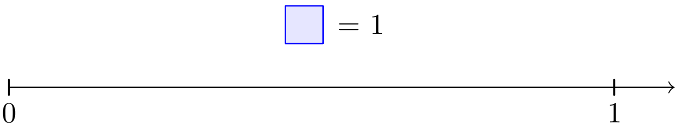




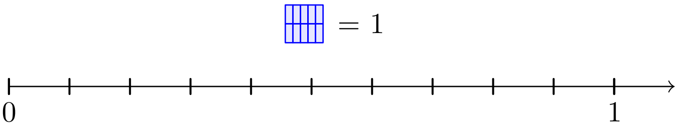
[1] Etter hvert skal vi også se at *fortegn* er med på å definere verdien til tallet (se *kapittel 5*).

Desimaltall

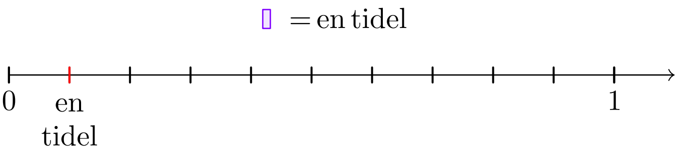
I mange tilfeller har vi ikke et helt antall enere, og da vil det vere behov for å dele 1 inn i mindre biter. La oss starte med å tegne en ener:



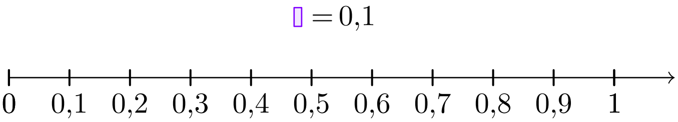
Så deler vi eneren vår inn i 10 mindre biter:



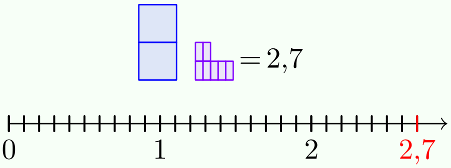
Siden vi har delt 1 inn i 10 biter, kaller vi en slik bit for *en tidel*:



Tideler skriver vi ved hjelp av *desimaltegnet* , :



Eksempel



Språkboksen

På engelsk bruker man punktum . som desimaltegn i staden for komma , :

$$3{,}5 \quad (norsk)$$

$$3.5 \quad (english)$$

Titallssystemet

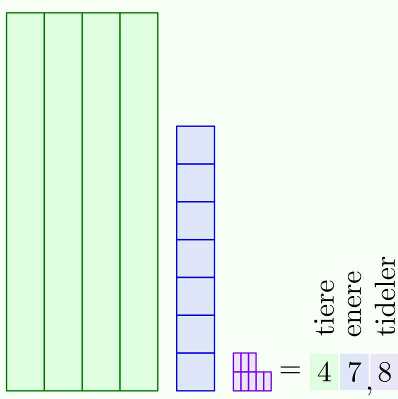
Vi har nå sett hvordan vi kan uttrykke verdien til tall ved å plassere siffer etter antall tiere, enere og tideler, og det stopper selvsagt ikke der:

1.2 Titalssystemet

Verdien til et tall er gitt av siffera $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9, og plasseringen av dem. Med sifferet som angir enere som utgangspunkt vil

- siffer til venstre (i rekkefølge) indikere antall tiere, hundrere, tusener osv.
- siffer til høyre (i rekkefølge) indikere antall tideler, hundredeler, tusendeler osv.

Eksempel 1



Eksempel 2

tusener hundrere tiere enere tideler hundredeler

3805,72

1.3 Koordinatsystem

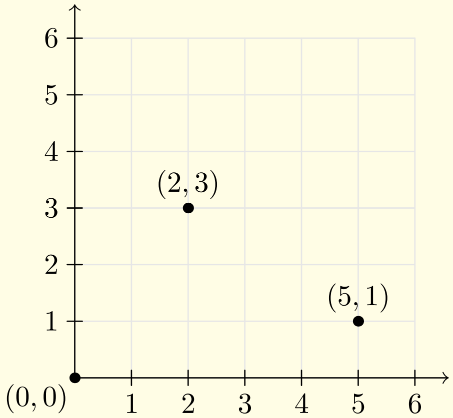
I mange tilfeller er det nyttig å bruke to tallinjer samtidig. Dette kaller vi et *koordinatsystem*. Vi plasserer da én tallinje som går *horisontalt* og én som går *vertikalt*. En plassering i et koordinatsystem kaller vi et *punkt*.

Strengt tatt finnes det mange typer koordinatsystem, men i denne boka bruker vi ordet om bare én sort, nemlig det *kartesiske koordinatsystem*. Det er oppkalt etter den franske filosofen og matematikeren René Descartes.

Et punkt skriver vi som to tall inni en parentes. De to tallene blir kalt *førstekoordinaten* og *andrekoordinaten*.

- Førstekoordinaten forteller oss hvor langt vi skal gå langs horisontalaksen.
- Andrekoordinaten forteller oss hvor langt vi skal gå langs vertikalaksen.

I figuren ser vi punktene $(2, 3)$, $(5, 1)$ og $(0, 0)$. Punktet der aksene møtes, altså $(0, 0)$, kalles *origo*.



Kapittel 2

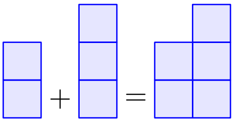
De fire regneartene

2.1 Addisjon

Addisjon med mengder: Å legge til

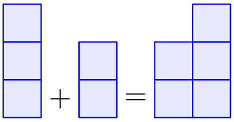
Når vi har en mengde og skal legge til mer, bruker vi symbolet $+$. Har vi 2 og skal legge til 3, skriver vi

$$2 + 3 = 5$$



Rekkefølgen vi legger sammen tallene på har ikke noe å si; å starte med 2 og så legge til 3 er det samme som å starte med 3 og så legge til 2:

$$3 + 2 = 5$$



Språkboksen

Eit addisjonsstykke består av to eller flere *ledd* og én *sum*. I regnestykket

$$2 + 3 = 5$$

er både 2 og 3 ledd, mens 5 er summen.

Vanlige måter å si $2 + 3$ på er

- "2 pluss 3"
- "2 addert med 3"
- "2 og 3 lagt sammen"

2.1 Addisjon er kommutativ

Summen er den samme uansett rekkefølge på leddene.

Eksempel

$$2 + 5 = 7 = 5 + 2$$

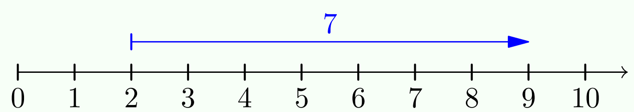
$$6 + 3 = 9 = 3 + 6$$

Addisjon på tallinja: Vandring mot høyre

På en tallinje vil addisjon med positive tall innebære vandring *mot høyre*:

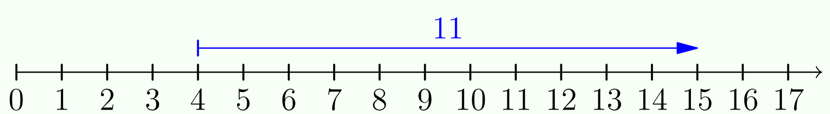
Eksempel 1

$$2 + 7 = 9$$



Eksempel 2

$$4 + 11 = 15$$



Betydningen av $=$

$+$ gir oss muligheten til å uttrykke tall på mange forskjellige måter, for eksempel er $5 = 2 + 3$ og $5 = 1 + 4$. I denne sammenhengen vil $=$ bety "har samme verdi som". Dette gjelder også ved subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, som vi skal se på i de neste tre seksjonene.

2.2 Subtraksjon

Subtraksjon med mengder: Å trekke ifra

Når vi har ei mengde og tar bort en del av den, bruker vi symbolet $-$:

$$5 - 3 = 2$$

Språkboksen

Et subtraksjonsstykke består av to eller flere *ledd* og én *differanse*. I subtraksjonsstykket

$$5 - 3 = 2$$

er både 5 og 3 ledd og 2 er differansen.

Vanlige måter å si $5 - 3$ på er

- ”5 minus 3”
- ”5 fratrekt 3”
- ”3 subtrahert fra 5”

En ny tolkning av 0

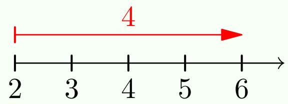
Innledningsvis i denne boka nevnte vi at 0 kan tolkes som ”ingenting”. Subtraksjon gir oss muligheten til å uttrykke 0 via andre tal. For eksempel er $7 - 7 = 0$ og $19 - 19 = 0$. I praktiske sammenhenger vil 0 ofte innebere en form for likevekt, for eksempel som at en kraft og en motkraft er like store.

Subtraksjon på tallinja: Vandring mot venstre

I *seksjon 2.1* har vi sett at $+$ (med positive tal) innebærer at vi skal gå *mot høyre* langs tallinja. Med $-$ gjør vi omvendt, vi går *mot venstre*[1]:

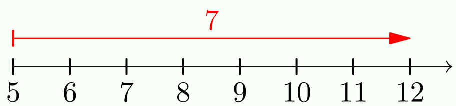
Eksempel 1

$$6 - 4 = 2$$



Eksempel 2

$$12 - 7 = 5$$



Merk

Med det første kan det kanskje virke litt rart at man i *Eksempel 1* og *2* over skal gå i motsatt vei av retningen pila peker i, men spesielt i *Kapittel 5* vil det lønne seg å tenke slik.

[1] I figurer med tallinjer vil rødfargede piler indikere at man starter ved pilspissen og vandrer til andre enden.

2.3 Multiplikasjon (Gonging)

Ganging med heltall: Innleidende definisjon

Når vi legger sammen like tall, kan vi bruke gange-symbolet $\cdot$ for å skrive regnestykken våre kortere:

Eksempel

$$4+4+4=4\cdot 3$$

$$8+8=8\cdot 2$$

$$1+1+1+1+1=1\cdot 5$$

Språkboksen

Et gangestykke består av to eller flere *faktorer* og ett *produkt*. I gangestykket

$$4\cdot 3=12$$

er 4 og 3 faktorer, mens 12 er produktet.

Vanlige måter å si $4\cdot 3$ på er

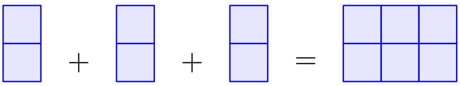
- "4 ganger 3"
- "4 ganget med 3"
- "4 multiplisert med 3"

Mange nettsteder og bøker på engelsk bruker symbolet $\times$ i steden for $\cdot$. I di fleste programmeringsspråk er $*$ symbolet for multiplikasjon.

Ganging av mengder

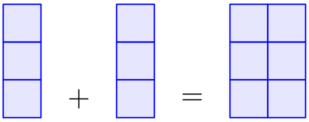
La oss nå bruke en figur for å se for oss gangestykket $2\cdot 3$:

$2\cdot 3 =$



Og så kan vi legge merke produktet til på $3\cdot 2$:

$3\cdot 2 =$



2.2 Multiplikasjon er kommutativ

Produktet er det samme uansett rekkefølge på faktorene.

Eksempel

$$3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$6 \cdot 7 = 42 = 7 \cdot 6$$

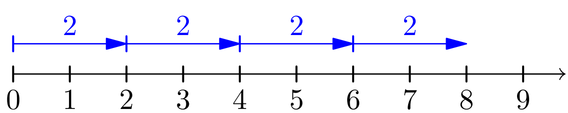
$$8 \cdot 9 = 72 = 9 \cdot 8$$

Ganging på tallinja

Vi kan også bruke tallinja for å regne ut gangestykker. For eksempel kan vi finne hva $2 \cdot 4$ er ved å tenke slik:

"$2 \cdot 4$ betyr å vandre 2 plasser mot høyre, 4 ganger."

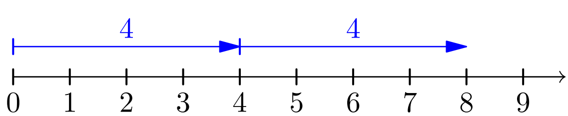
$$2 \cdot 4 = 8$$



Også tallinja kan vi bruke for å overbevise oss om at rekkefølgen i et gangestykke ikke har noe å si:

"$4 \cdot 2$ betyr å vandre 4 plasser mot høyre, 2 ganger."

$$4 \cdot 2 = 8$$



Endelig definisjon av ganging med positive heltall

Det ligger kanskje nærmest å tolke "2 ganger 3" som "3, 2 ganger". Da er

$$\text{"2 ganger 3"} = 3 + 3$$

Innledningsvis presenterete vi $2 \cdot 3$, altså "2 ganger 3", som $2 + 2 + 2$. Med denne tolkningen vil $3 + 3$ svare til $3 \cdot 2$, men nettopp det at multiplikasjon er en kommutativ operasjon (*Regel 2.2*) gjør at den ene tolkningen ikke utelukker den andre; $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$ og $2 \cdot 3 = 3 + 3$ er to uttrykk med samme verdi.

2.3 Ganging som gjentatt addisjon

Ganging med et positivt heltal kan uttrykkes som gjentatt addisjon.

Eksempel 1

$$4+4+4 = 4\cdot 3 = 3+3+3+3$$

$$8+8 = 8\cdot 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2$$

$$1+1+1+1+1 = 1\cdot 5 = 5$$

Merk

At ganging med positive heltal kan uttrykkes som gjentatt addisjon, utelukker ikke andre uttrykk. Det er ikke feil å skrive at $2\cdot 3 = 1+5$.

2.4 Ganging med 0

Hvis 0 er en faktor, er produktet lik 0.

Eksempel 1

$$7\cdot 0 = 0$$

$$0\cdot 219 = 0$$

2.4 Divisjon (deling)

: er tegnet for divisjon. I praksis har divisjon tre forskjellige betydninger, her eksemplifisert ved regnestykket $12 : 3$:

2.5 Divisjon sine tre betydninger

- **Inndeling av mengder**

  $12 : 3 =$ "Antallet i hver gruppe når 12 deles inn i 3 like store grupper"

- **Antall ganger**

  $12 : 3 =$ "Antall ganger 3 går på 12"

- **Omvendt operasjon av multiplikasjon**

  $12 : 3 =$ "Tallet man må gange 3 med for å få 12"

Språkboksen

Et divisjonsstykke består av en *dividend*, en *divisor* og en *kvotient*. I divisjonstykket

$$12 : 3 = 4$$

er 12 dividenden, 3 er divisoren og 4 er kvotienten.

Vanlege måtar å uttale $12 : 3$ på er

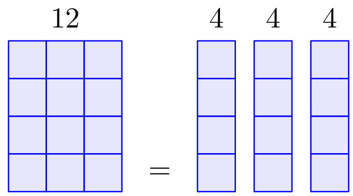
- "12 delt med 3"
- "12 dividert med 3"
- "12 på 3"

I noen samanhenger blir $12 : 3$ kalt "*forholdet* mellom 12 og 3". Da er 4 *forholdstallet*.

Ofte brukes / i steden for :, spesielt i programmeringsspråk.

Divisjon av mengder

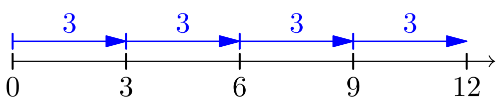
Regnestykket 12 : 3 forteller oss at vi skal dele 12 inn i 3 like store grupper:



Vi ser at hver gruppe inneholder 4 ruter, dette betyr at

$$12 : 3 = 4$$

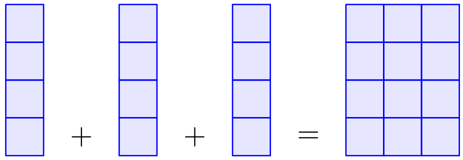
Antal ganger



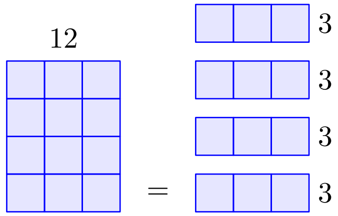
3 går 4 ganger på 12, altså er $12 : 3 = 4$.

Omvendt operasjon av multiplikasjon

Vi har nylig sett at hvis vi deler 12 inn i 3 like grupper, får vi 4 i hver gruppe. Altså er $12 : 3 = 4$. Og om vi legger sammen igjen disse gruppene, får vi 12:



Men dette er det samme som å gange 4 med 3, med andre ord: Om vi vet at $4 \cdot 3 = 12$, så vet vi at $12 : 3 = 4$. I tillegg vet vi da at $12 : 4 = 3$.



Eksempel 1

Siden $6 \cdot 3 = 18$, er

$$18 : 6 = 3$$

$$18 : 3 = 6$$

Eksempel 2

Siden $5 \cdot 7 = 35$, er

$$35 : 5 = 7$$

$$35 : 7 = 5$$

Kapittel 3

Faktorisering og regnerekkefølge

3.1 Faktorisering

Når en heltalls dividend og en heiltalls divisor resulterer i en heltalls kvotient, sier vi at dividenden er *delelig* med divisoren. For eksempel er 6 delelig med 3 fordi $6 : 3 = 2$, og 40 er delelig med 10 fordi $40 : 10 = 4$. Begrepet deleleg er med på å definere *primtall*:

3.1 Primtall

Et naturlig tall som er større enn 1, og som bare er delelig med seg selv og 1, er et primtall.

Eksempel

De fem første primtallene er $2, 3, 5, 7$ og 11.

3.2 Faktorisering

Faktorisering innebærer å skrive et tall som et produkt av andre tall.

Eksempel

Faktoriser 24 på tre forskjellige måter.

Svar:

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

3.3 Primtallsfaktorisering

Faktorisering med bare primtal som faktorer kalles primtallsfaktorisering.

Eksempel

Skriv 12 på primtallsfaktorisert form.

Svar:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

3.2 Regnerekkefølge

Prioriteringen av rekneartene

Se på følgende regnestykke:

$$2 + 3 \cdot 4$$

Et slikt regnestykke *kunne* man tolket på to måter:

1. ”2 pluss 3 er 5. 5 ganget med 4 er 20. Svaret er 20.”

2. ”3 ganget med 4 er 12. 2 pluss 12 er 14. Svaret er 14.”

Men svarene blir ikke like! Det er altså behov for å ha noen regler om hva vi skal regne ut først. Den ene regelen er at vi må regne ut ganging eller deling *før* vi legger sammen eller trekker ifra, dette betyr at

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 4 &= \text{”Regn ut } 3 \cdot 4\text{, og legg sammen med 2”} \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Men hva om vi ønsket å legge saman 2 og 3 først, og så gange summen med 4? Å fortelle at noe skal regnes ut først gjør vi ved hjelp av parenteser:

$$\begin{aligned} (2 + 3) \cdot 4 &= \text{”Legg sammen 2 og 3, og gang med 4 etterpå”} \\ &= 5 \cdot 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

3.4 Regnerekkefølge

1. Uttrykk med parentes

2. Multiplikasjon eller divisjon

3. Addisjon eller subtraksjon

Eksempel 1

Regn ut

$$23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7$$

Svar:

$$\begin{aligned} 23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7 &= 23 - 12 + 4 \cdot 7 && \text{Parentes} \\ &= 23 - 12 + 28 && \text{Ganging} \\ &= 39 && \text{Addisjon og subtraksjon} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Regn ut

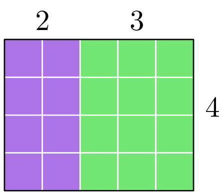
$$18 : (7 - 5) - 3$$

Svar:

$$\begin{aligned} 18 : (7 - 5) - 3 &= 18 : 2 - 3 && \text{Parentes} \\ &= 9 - 3 && \text{Deling} \\ &= 6 && \text{Addisjon og subtraksjon} \end{aligned}$$

Ganging med parentes

Hvor mange ruter ser vi i figuren under?



To måter man kan tenke på er disse:

1. Det er $2 \cdot 4 = 8$ lilla ruter og $3 \cdot 4 = 12$ grønne ruter. Til sammen er det $8 + 12 = 20$ ruter. Dette kan vi skrive som

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$$

2. Det er $2 + 3 = 5$ ruter bortover og 4 ruter oppover. Altså er det $5 \cdot 4 = 20$ ruter totalt. Dette kan vi skrive som

$$(2 + 3) \cdot 4 = 20$$

Av disse to utregningene har vi at

$$(2+3)\cdot 4 = 2\cdot 4 + 3\cdot 4$$

3.5 Ganging med parentes (distributiv lov)

Når et parentesuttrykk er en faktor, kan vi gange de andre faktorene med hvert enkelt ledd i parentesuttrykket.

Eksempel 1

$$(4+7)\cdot 8 = 4\cdot 8 + 7\cdot 8$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(10-7)\cdot 2 &= 10\cdot 2 - 7\cdot 2\\ &= 20-14\\ &= 6\end{aligned}$$

Merk: Her vil det selvsagt være raskere å regne slik:

$$(10-7)\cdot 2 = 3\cdot 2 = 6$$

Eksempel 2

Regn ut $12\cdot 3$.

Svar:

$$\begin{aligned}12\cdot 3 &= (10+2)\cdot 3\\ &= 10\cdot 3 + 2\cdot 3\\ &= 30+6\\ &= 36\end{aligned}$$

Obs!

Vi introduserte parenteser som en indikator på hva som skulle regnes ut først, men *Regel 3.5* gir en alternativ og likeverdig betydning av parenteser. Regelen kommer spesielt til nytte i algebraregning (sjå *Del II*).

Å gange med 0

Vi har tidligere sett at 0 kan skrives som en differanse mellom to tall, og dette kan vi nå utnytte til å finne produktet når vi ganger med 0. La oss se på regnestykket

$$(2-2)\cdot 3$$

Av *Regel 3.5* har vi at

$$\begin{aligned}(2-2)\cdot 3 &= 2\cdot 3 - 2\cdot 3\\ &= 6-6\\ &= 0\end{aligned}$$

Sidan $0 = 2-2$, må dette bety at

$$0\cdot 3 = 0$$

3.6 Gonging med 0

Viss 0 er en faktor, er produktet lik 0.

Eksempel 1

$$7\cdot 0 = 0$$

$$0\cdot 219 = 0$$

Assosiative lover

3.7 Assosiativ lov ved addisjon

Plasseringen av parenteser mellom ledd har ingen påvirkning på summen.

Eksempel

$$(2+3)+4 = 5+3 = 9$$

$$2+(3+4) = 2+7 = 9$$

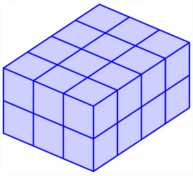
3.8 Assosiativ lov ved multiplikasjon

Plasseringen av parenteser mellom faktorer har ingen påvirkning på produktet.

Eksempel

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$



I motsetning til addisjon og multiplikasjon, er hverken subtraksjon eller divisjon assosiative:

$$(12 - 5) - 4 = 7 - 4 = 3$$
$$12 - (5 - 4) = 12 - 1 = 11$$

$$(80 : 10) : 2 = 8 : 2 = 4$$
$$80 : (10 : 2) = 80 : 5 = 16$$

Vi har sett at parentesene hjelper oss med å si noeo om *prioriteringen* av regneartene, men det at subtraksjon og divisjon er ikke-assosiative fører til at vi også må ha en regel for hvilken *retning* vi skal regne i.

3.9 Retning på utregninger

Regnearter som ut ifra *Regel 3.4* har lik prioritet, skal regnes fra venstre mot høyre.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 12 - 5 - 4 &= (12 - 5) - 4 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$
\begin{aligned}
80 : 10 : 2 &= (80 : 10) : 2 \\
&= 8 : 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Eksempel 3

$$
\begin{aligned}
6 : 3 \cdot 4 &= (6 : 3) \cdot 4 \\
&= 2 \cdot 4 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Kapittel 4

Brøk

4.1 Introduksjon

4.1 Brøk som omskriving av delestykke

En brøk er en annen måte å skrive et delestykke på. I en brøk kaller vi dividenden for *teller* og divisoren for *nevner*.

$$1 : 4 = \frac{1}{4} \begin{matrix} \longleftarrow \text{Teller} \\ \longleftarrow \text{Nevner} \end{matrix}$$

Språkboksen

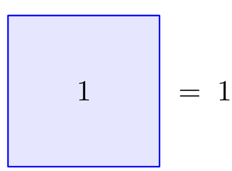
Vanlige måter å si $\frac{1}{4}$ på er[1]

- ”én firedel”
- ”1 av 4”
- ”1 over 4”

[1] I tillegg har vi utsagnene fra språkboksen på side 23.

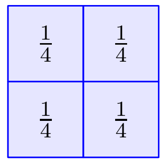
Brøk som mengde

La oss se på brøken $\frac{1}{4}$ som en mengde. Vi starter da med å tenke på tallet 1 som en rute[1]:



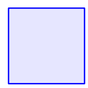
[1] Av praktiske årsaker velger vi oss her en enerrute som er større enn den vi brukte i *Kapittel 1*.

Så deler vi denne ruten inn i fire mindre ruter som er like store. Hver av disse rutene blir da $\frac{1}{4}$ (1 av 4):



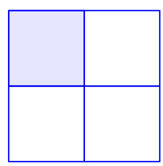
$$= 1$$

Har vi én slik rute, har vi altså 1 firedel:



$$= \frac{1}{4}$$

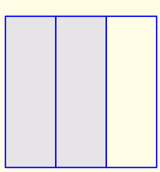
Men skal man bare ut ifra en figur kunne se hvor stor en brøk er, må man vite hvor stor 1 er, og for å få dette lettere til syne skal vi også ta med de "tomme" rutene:



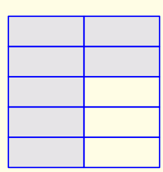
$$= \frac{1}{4}$$

Slik vil de blå og de tomme rutene fortelle oss hvor mange biter 1 er delt inn i, mens de blå rutene alene forteller oss hvor mange slike biter det *egentlig* er. Slik kan vi seie at

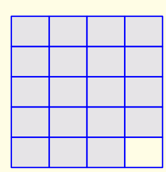
$$\text{antall blå ruter} = \text{teller}$$
$$\text{antall blå ruter} + \text{antall tommme ruter} = \text{nevner}$$



$$= \frac{2}{3}$$



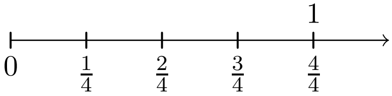
$$= \frac{7}{10}$$



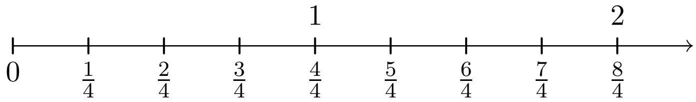
$$= \frac{19}{20}$$

Brøk på tallinja

På tallinja deler vi lengden mellom 0 og 1 inn i like mange lengder som nevneren angir. Har vi en brøk med 4 i nevner, deler vi lengden mellom 0 og 1 inn i 4 like lengder:



Tallinja er også fin å bruke for å tegne inn brøker som er større enn 1:



Teller og nevner oppsummert

Selv om vi har vært innom det allerede, er det så avgjørende å forstå hva telleren og nevneren sier oss at vi tar en kort oppsummering:

- Nevneren forteller hvor mange biter 1 er delt inn i.
- Telleren forteller hvor mange slike biter det er.

4.2 Verdi, utviding og forkorting av brøk

4.2 Verdien til en brøk

Verdien til en brøk finn vi ved å dele telleren med nevneren.

Eksempel

Finn verdien til $\frac{1}{4}$.

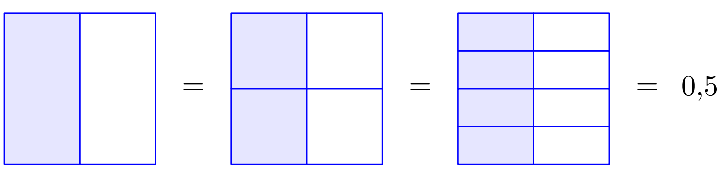
Svar:

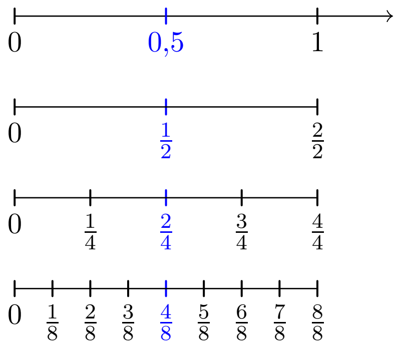
$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

Brøker med samme verdi

Brøker kan ha samme verdi selv om de ser forskjellige ut. Hvis du regner ut $1 : 2$, $2 : 4$ og $4 : 8$, får du i alle tilfeller 0,5 som svar. Dette betyr at

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$





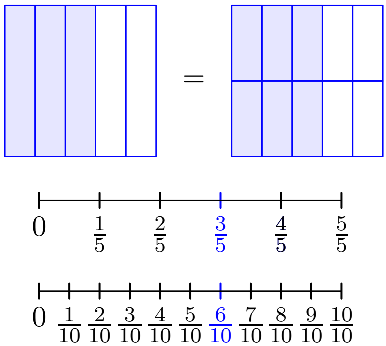
Utviding

At brøker kan se forskjellige ut, men ha samme verdi betyr at vi kan endre på utseendet til en brøk uten å endre verdien. La oss som eksempel gjøre om $\frac{3}{5}$ til en brøk med samme verdi, men med 10 som nevner:

- $\frac{3}{5}$ kan vi gjøre om til en brøk med 10 i nevner om vi deler hver femdel inn i 2 like biter, for da blir 1 til sammen delt inn i $5 \cdot 2 = 10$ biter.

- Telleren i $\frac{3}{5}$ forteller at der er 3 femdeler. Når disse blir delt i to, blir de totalt til $3 \cdot 2 = 6$ tidelar. Altså har $\frac{3}{5}$ samme verdi som $\frac{6}{10}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$



Forkorting

Legg nå merke til at vi også kan gå ”andre veien”. $\frac{6}{10}$ kan vi gjøre om til en brøk med 5 i nevner ved å dele både teller og nevner med 2:

$$\frac{6}{10} = \frac{6 : 2}{10 : 2} = \frac{3}{5}$$

4.3 Utviding og forkorting av brøk

Vi kan gange eller dele teller og nevner med det samme tallet uten at brøken endrer verdi.

Å gange med et tall større enn 1 kalles å *utvide* brøken. Å dele med et tall større enn 1 kalles å *forkorte* brøken.

Eksempel 1

Utvid $\frac{3}{5}$ til en brøk med 20 som nevner.

Svar:

Da $5 \cdot 4 = 20$, ganger vi både teller og nevner med 4:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{12}{20}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Utvid $\frac{150}{50}$ til en brøk med 100 som nevner.

Svar:

Da $50 \cdot 2 = 100$, ganger vi både teller og nevner med 2:

$$\begin{aligned}\frac{150}{50} &= \frac{150 \cdot 2}{50 \cdot 2} \\ &= \frac{300}{100}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Forkort $\frac{18}{30}$ til en brøk med 5 som nevner.

Svar:

Da $30 : 6 = 5$, deler vi både teller og nevner med 6:

$$\begin{aligned}\frac{18}{30} &= \frac{18 : 6}{30 : 6} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

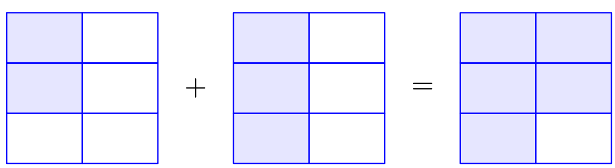
4.3 Addisjon og subtraksjon

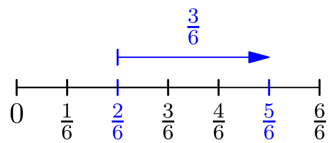
Addisjon og subtraksjon av brøker handlar i stor grad om nevnerne. Husk nå at nevnerne forteller oss om inndelingen av 1. Hvis brøker har lik nevner, representerer de et antal biter med lik størrelse. Da gir det mening å regne addisjon eller subtraksjon mellom tellerene. Hvis brøker har ulike nevnere, representerer de et antall biter med ulik størrelse, og da gir ikkje addisjon eller subtraksjon mellom tellerene direkte mening.

Lik nevner

Om vi for eksempel har 2 seksdeler og adderer 3 seksdeler, ender vi opp med 5 seksdeler:

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$





4.4 Addisjon/subtraksjon av brøkar med lik nevner

Når vi regner addisjon/subtraksjon mellom brøker med lik nevner, finner vi summen/differansen av tellerene og beholder nevneren.

Eksempel 1

$$\frac{2}{7} + \frac{8}{7} = \frac{2+8}{7}$$
$$= \frac{10}{7}$$

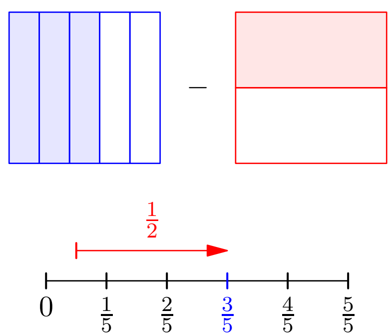
Eksempel 2

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9}$$
$$= \frac{2}{9}$$

Ulike nevnere

La oss se på regnestykket[1]

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$$

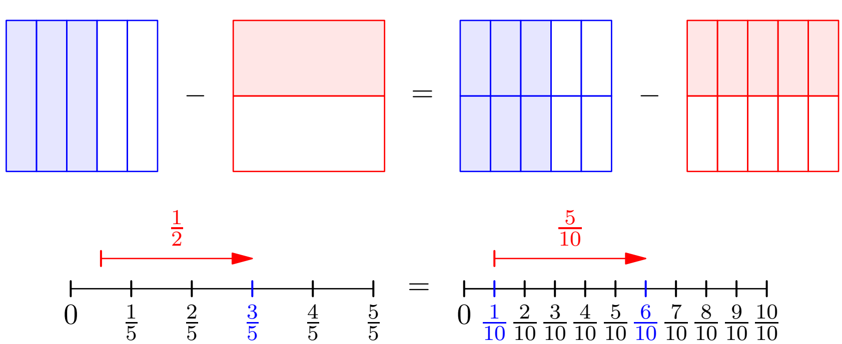


Skal vi skrive differansen som en brøk, må vi sørge for at brøkene har samme nevner. De to brøkene våre kan begge ha 10 som nevner:

$$\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{6}{10} \qquad\qquad \frac{1}{2} = \frac{1\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Dette betyr at

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$$



[1] Vi minner om at rødfargen på pila indikerer at man skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Det vi har gjort, er å utvide begge brøkene slik at de har samme nevner, nemlig 10. Når nevnerne i brøkene er like, kan vi regne ut subtraksjonsstykket for tellerene:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}-\frac{1}{2}&=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

4.5 Addisjon/subtraksjon av brøkar med ulik nevner

Når vi regner addisjon/subtraksjon mellom brøker med ulik nevner, må vi utvide brøkene slik at de har lik nevner, for så å bruke *Regel 4.4*.

Eksempel 1

Regn ut

$$\frac{2}{9}+\frac{6}{7}$$

Begge nevnerne kan bli 63 hvis vi ganger med rett heltal. Vi utvider derfor til brøker med 63 i nevner:

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 7}{9\cdot 7}+\frac{6\cdot 9}{7\cdot 9}&=\frac{14}{63}+\frac{54}{63}\\&=\frac{68}{63}\end{aligned}$$

Fellesnevner

I *Eksempel 1* over blir 63 kalt en *fellesnevner*. Dette fordi det finnes heltall vi kan gange nevnerne med som gir oss tallet 63:

$$9 \cdot 7 = 63$$
$$7 \cdot 9 = 63$$

Hvis vi ganger sammen alle nevnerene i et regnestykke, finner vi alltid en fellesnevner, men vi sparer oss for store tall om vi finner den *minste* fellesnevneren. Ta for eksempel regnestykket

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3}$$

Her kan vi bruke fellesnevneren $6 \cdot 3 = 18$, men det er bedre å merke seg at $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ også er en fellesnevner. Altså er

$$\begin{aligned}\frac{7}{6} + \frac{5}{3} &= \frac{7}{6} + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{17}{6}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Regn ut

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4}$$

Svar:

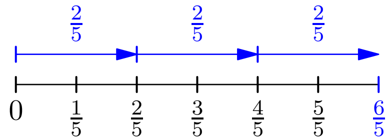
Alle nevnerne kan bli 8 hvis vi ganger med rett heltall. Vi utvider derfor til brøker med 8 i nevner:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4} &= \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{5}{8} + \frac{10 \cdot 2}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{12}{8} - \frac{5}{8} + \frac{20}{8} \\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

4.4 Brøk ganget med heltall

I *seksjon 2.3* så vi at ganging med heltall er det samme som gjentatt addisjon. Skal vi for eksempel regne ut $\frac{2}{5} \cdot 3$, kan vi derfor regne slik:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{2+2+2}{5} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$



Men vi vet også at $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3$, og derfor kan vi forenkle regnestykket vårt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2 \cdot 3}{5} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Multiplikasjon mellom heltall og brøk er også kommutativ[1]:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{2}{5} &= 3 \cdot 2 : 5 \\ &= 6 : 5 \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

4.6 Brøk ganget med heltal

Når vi ganger en brøk med et heltall, ganger vi heltallet med telleren i brøken.

[1]Husk at $\frac{2}{5}$ bare er en omskriving av $2 : 5$.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\cdot 4 &= \frac{1\cdot 4}{3}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}3\cdot\frac{2}{5} &= \frac{3\cdot 2}{5}\\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

En tolkning av ganging med brøk

Av *Regel 4.6* kan vi også danne en tolkning av hva å gange med en brøk innebærer. For eksempel, å gange 3 med $\frac{2}{5}$ kan tolkes på disse to måtene:

- Vi ganger 3 med 2, og deler produktet med 5:

$$3\cdot 2 = 6 \quad , \quad 6:5 = \frac{6}{5}$$

- Vi deler 3 med 5, og ganger kvotienten med 2:

$$3:5 = \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

4.5 Brøk delt med heltall

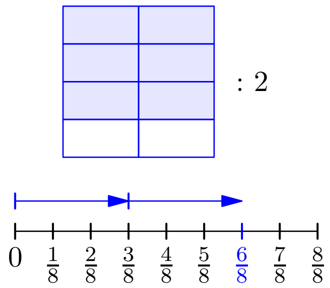
Det er nå viktig å huske på to ting:

- Deling kan man se på som en lik fordeling av et antal
- I en brøk er det telleren som forteller noe om antallet (nevneren forteller om inndelingen av 1)

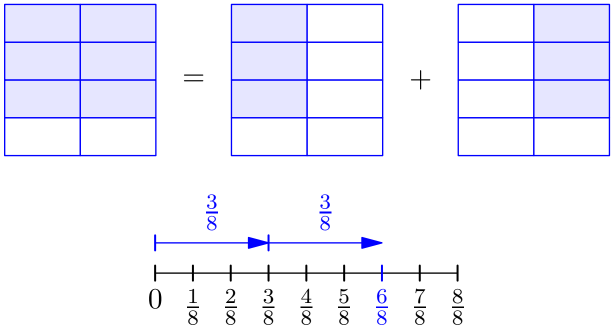
Tilfellet der telleren er delelig med divisoren

La oss regne ut

$$\frac{6}{8} : 2$$



Vi har her 6 åttedeler som vi skal fordele likt på 2. Dette blir 4 : 2 = 3 åttedeler.



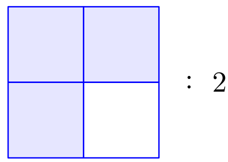
Altså er

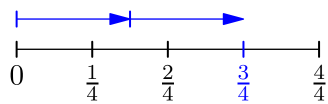
$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$$

Tilfellet der telleren ikke er delelig med divisoren

Hva nå om vi skal dele $\frac{3}{4}$ på 2?

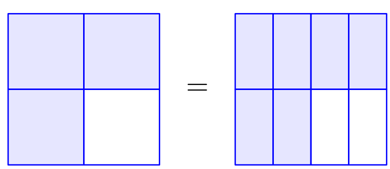
$$\frac{3}{4} : 2$$

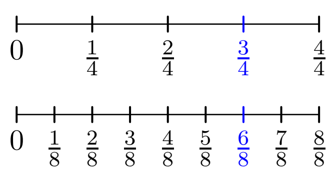




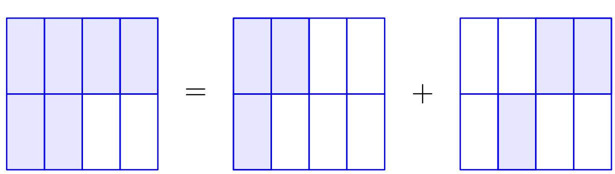
Saken er at vi alltid kan utivde brøken vår slik at telleren blir delelig med divisoren. Siden vi skal dele med 2, utvider vi altså brøken vår med 2:

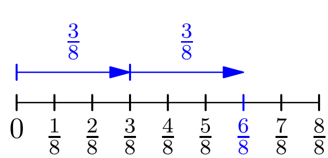
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$





Nå har vi 6 åttedeler. 6 åttedeler delt på 2 blir 3 åttedeler:





Altså er

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

Rent matematisk har vi rett og slett ganget nevneren til $\frac{3}{4}$ med 2:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2}$$
$$= \frac{3}{8}$$

4.7 Brøk delt med heltal

Når vi deler en brøk med et heltall, ganger vi nevneren med heltallet.

Eksempel 1

$$\frac{5}{3} : 6 = \frac{5}{3 \cdot 6}$$
$$= \frac{5}{18}$$

Unntak

Innledningsvis av denne seksjonen fant vi at

$$\frac{4}{8} : 2 = \frac{2}{8}$$

Da ganget vi ikke nevneren med 2, slik *Regel 4.7* tilsier. Om vi gjør det, får vi

$$\frac{4}{8} : 2 = \frac{4}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

Men

$$\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$$

De to svarene har altså samme verdi. Saken er at skal vi dele en brøk på et heltall, og telleren er delelig med heltallet, kan vi direkte dele telleren på heltallet. I slike tilfeller er det altså ikke feil, men heller ikke nødvendig å bruke *Regel 4.7*.

4.6 Brøk ganget med brøk

Vi har sett[1] hvordan å gange med en brøk innebærer å gange det andre tallet med telleren, og så dele produktet med nevneren. La oss bruke dette til å regne ut

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Med tolkningen akkurat nevnt, skal vi nå gange $\frac{5}{4}$ først med 3, og så dele produktet med 2. Av *Regel 4.6* er

$$\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{4}$$

Og av *Regel 4.7* er

$$\frac{5 \cdot 3}{4} : 2 = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

Altså er

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

4.8 Brøk ganget med brøk

Når vi ganger to brøker med hverandre, ganger vi teller med teller og nevner med nevner.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} &= \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9} \\ &= \frac{24}{63} \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} &= \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 10} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

[1]Sjå tekstboksen med tittelen *En tolkning av ganging med brøk* på s. 46.

4.7 Kansellering av faktorer

Når telleren og nevneren har lik verdi, er verdien til brøken alltid 1. For eksempel er $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{25}{25} = 1$ osv. Dette kan vi utnytte for å forenkle brøkuttrykk.

La oss forenkle brøkuttrykket

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8}$$

Da $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$, kan vi skrive

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8}$$

Og som vi nylig har sett (*Regel 4.8*) er

$$\frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8}$$

Siden $\frac{8}{8} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} &= \frac{5}{9} \cdot 1 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Når bare ganging er til stede i brøker, kan man alltid omrokkere slik vi har gjort over, men når man har forstått hva omrokkeringen ender med, er det bedre å bruke *kansellering*. Man setter da en strek over to og to like faktorer for å indikere at de utgjør en brøk med verdien 1. Tilfellet vi akkurat så på skriver vi da som

$$\frac{\cancel{8} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$$

4.9 Kansellering av faktorar

Når bare ganging er til stede i en brøk, kan vi kansellere par av like faktorer i teller og nevner.

Eksempel 1

Kanseller så mange faktorer som mulig i brøken

$$\frac{3 \cdot 12 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 12}$$

Svar:

$$\frac{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 4 \cdot \cancel{12}} = \frac{3}{4}$$

Eksempel 1

Forkort brøken $\frac{12}{42}$.

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{12}{42} &= \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 7} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Forkort brøken $\frac{48}{16}$.

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{48}{16} &= \frac{3 \cdot \cancel{16}}{\cancel{16}} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Merk: Hvis alle faktorer er kansellert i teller eller nevner, er dette det samme som at tallet 1 står der.

Brøker forenkler utregninger

Desmialtallet 0,125 kan vi skrive som brøken $\frac{1}{8}$. Regnestykket

$$0{,}125 \cdot 16$$

vil for de fleste av oss ta en stund å løse for hand med vanlige multiplikasjonsregler. Men bruker vi brøkuttrykket får vi at

$$\begin{aligned} 0{,}125 \cdot 16 &= \frac{1}{8} \cdot 16 \\ &= \frac{2 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

"Å stryke nuller"

Et tall som 3000 kan vi skrive som $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, mens 700 kan vi skrive som $7 \cdot 10 \cdot 10$. Brøken $\frac{3000}{700}$ kan vi derfor forkorte slik:

$$\begin{aligned} \frac{3000}{700} &= \frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot 10}{7 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{7} \\ &= \frac{30}{7} \end{aligned}$$

I praksis er dette det samme som "å stryke nuller":

$$\frac{30\cancel{00}}{7\cancel{00}} = \frac{30}{7}$$

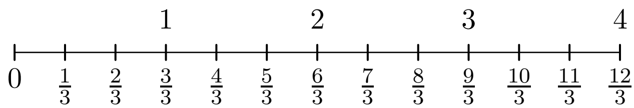
Obs! Nuller er de eneste sifrene vi kan "stryke" på denne måten, for eksempel kan vi ikke forkorte $\frac{123}{13}$ på nokon som helst måte. I tillegg kan vi bare "stryke" nuller som står som bakerste siffer, for eksempel kan vi ikke "stryke" nuller i brøken $\frac{101}{10}$.

4.8 Deling med brøk

Deling ved å se på tallinja

La oss regne ut $4 : \frac{2}{3}$. Siden brøken vi deler 4 på har 3 i nevner, kan det være en idé å gjøre om også 4 til en brøk med 3 i nevner. Vi har at

$$4 = \frac{12}{3}$$

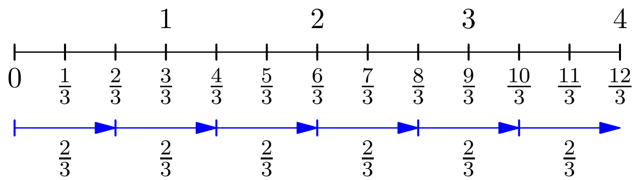


Husk nå at en betydning av $4 : \frac{2}{3}$ er

"Hvor mange ganger $\frac{2}{3}$ går på 4."

Ved å se på tallinja, finner vi at $\frac{2}{3}$ går 6 ganger på 4. Altså er

$$4 : \frac{2}{3} = 6$$



En generell metode

Vi kan ikke se på en tallinje hver gang vi skal dele med brøker, så nå skal vi komme fram til en generell regnemetode ved igjen å bruke $4 : \frac{2}{3}$ som eksempel. For denne metoden bruker vi denne betydningen av divisjon:

$$4 : \frac{2}{3} = \text{"Tallet vi må gange } \tfrac{2}{3} \text{ med for å få 4."}$$

For å finne dette tallet starter vi med å gange $\frac{2}{3}$ med tallet som gjør at produktet blir 1. Dette tallet er *den omvendte brøken* av $\frac{2}{3}$, som er $\frac{3}{2}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Nå gjenstår det bare å gange med 4 for å få 4:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 4$$

For å få 4, må vi altså gange $\dfrac{2}{3}$ med $\dfrac{3}{2} \cdot 4$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} 4 : \frac{2}{3} &= \frac{3}{2} \cdot 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

4.10 Brøk delt på brøk

Når vi deler et tall med en brøk, ganger vi tallet med den omvendte brøken.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 6 : \frac{2}{9} &= 6 \cdot \frac{9}{2} \\ &= 27 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} : \frac{5}{8} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5} \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} : \frac{3}{10} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} \\ &= \frac{30}{15}\end{aligned}$$

Her bør vi også se at brøken kan forkortes:

$$\begin{aligned}\frac{30}{15} &= \frac{2 \cdot \cancel{15}}{\cancel{15}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Merk: Vi kan spare oss for store tall hvis vi kansellerer faktorer underveis i utregninger:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} &= \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{3}} \\ &= 2\end{aligned}$$

4.9 Rasjonale tall

4.11 Rasjonale tall

Et hvert tall som kan bli skrevet som en brøk med heltalls teller og nevner, er et *rasjonalt tall*.

Merk

Rasjonale tall gir oss en samlebetegnelse for

- **Heltall**

  For eksempel $4 = \frac{4}{1}$.

- **Desimaltall med endelig antall desimaler**

  For eksempel $0{,}2 = \frac{1}{5}$.

- **Desimaltall med repeterende desimalmønster**

  For eksempel [1] $0{,}08\overline{3} = \frac{1}{12}$.

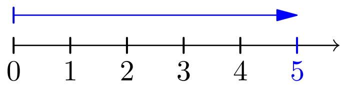
[1] $\overline{3}$ indikerer at 3 fortsetter i det uendelige. En annen måte å indikere dette på er å bruke symbolet ... . Altså er $0{,}08\overline{3} = 0{,}08333333...$

Kapittel 5

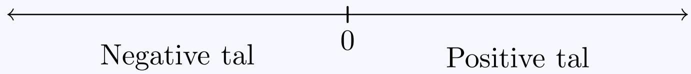
Negative tall

5.1 Introduksjon

Vi har tidligere sett at (for eksempel) tallet 5 på ei tallinje ligger 5 enerlengder til høyre for 0.

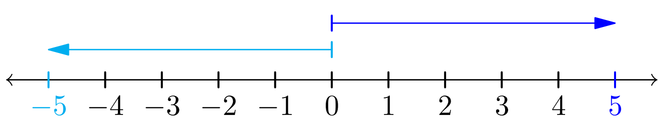


Men hva om vi går andre veien, altså mot venstre? Dette spørsmålet svarer vi på ved å innføre *negative tall*.

> **5.1 Positive og negative tal**
>
> På en talinje gjelder følgende:
>
> - Tall plassert *til høyre* for 0 er positive tall.
> - Tall plassert *til venstre* for 0 er negative tal.
>
> 
>

I praksis kan vi ikke hele tiden bruke en tallinje for å avgjøre om et tall er negativt eller positivt, og derfor bruker vi et symbol for å vise at tall er negative. Dette symbolet er rett og slett $-$, altså det samme symbolet som vi bruker ved subtraksjon. 5 er med dét et positivt tall, mens -5 er et negativt tall. På tallinja er det slik at

- 5 ligg 5 enerlengder *til høyre* for 0.
- -5 ligg 5 enerlengder *til venstre* for 0.



Den store forskjellen på 5 og -5 er altså på hvilken side av 0 tallene ligger. Da 5 og -5 har samme avstand til 0, sier vi at 5 og -5 har samme *lengde*.

5.2 Lengde (tallverdi/absoluttverdi)

Lengden til et tall skrives ved symbolet $|\,|$.

Lengden til et positivt tall er verdien til tallet.

Lengden til et negativt tall er verdien til det positive tallet med samme siffer.

Eksempel 1

$$|27| = 27$$

Eksempel 2

$$|-27| = 27$$

Fortegn

Fortegn er en samlebetegnelse for $+$ og $-$. 5 har $+$ som fortegn og -5 har $-$ som fortegn.

5.2 De fire regneartane med negative tall

Ved innføringen av negative tall får de fire regneartene nye sider som vi må se på trinnvis. Når vi adderer, subtraherer, multipliserer eller dividerer med negative tall vil vi ofte, for tydeligheten sin skyld, skrive negative tall med parentes rundt. Da skriver vi for eksempel -4 som (-4).

Addisjon

Når vi adderte i *seksjon 2.1* så vi på $+$ som vandring *mot høyre*. Negative tall gjør at vi må utvide begrepet for $+$:

$+$ ”Like langt og i *samme* retning som”

La oss se på regnestykket

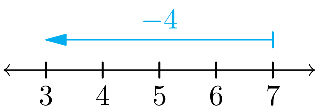
$$7 + (-4)$$

Vår utvidede definisjon av $+$ sier oss nå at

$$7 + (-4) = \text{”7 og like langt og i \textit{samme} retning som } (-4)\text{”}$$

(-4) har lengde 4 og retning *mot venstre*. Vårt regnestykke sier altså at vi skal starte på 7, og deretter gå lengden 4 *mot venstre*.

$$7 + (-4) = 3$$



5.3 Addisjon med negative tall

Å addere et negativt tall er det samme som å subtrahere tallet med samme tallverdi.

Eksempel 1

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

Eksempel 2

$$-8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$

Merk

Regel 2.1 erklærer at addisjon er kommutativ. Dette er gjeldende også ved innføringen av negative tall, for eksempel er

$$7 + (-3) = 4 = -3 + 7$$

Subtraksjon

I *seksjon 2.2* så vi på $-$ som vandring *mot venstre*. Også betydningen av $-$ må utvides når vi jobber med negative tall:

$-$ "Like langt og i *motsatt* retning som"

La oss se på regnestykket

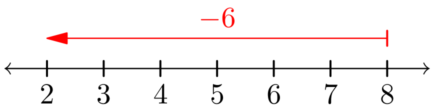
$$2 - (-6)$$

Med vår utvidede betydning av $-$, kan vi skrive

$$2 - (-6) = \text{"2 og like langt og i } \textit{motsatt} \text{ retning som } (-6)\text{"}$$

-6 har lengde 6 og retning *mot venstre*. Når vi skal gå samme lengde, men i *motsatt* retning, må vi altså gå lengden 6 *mot høyre*[1]. Dette er det samme som å addere 6:

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$



5.4 Subtraksjon med negative tall

Å subtrahere et negativt tall er det samme som å addere det positive tallet med samme tallverdi.

Eksempel 1

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20$$

[1]Vi minner enda en gang om at rødfargen på pila indikerer at man skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Eksempel 2

$$-3-(-7)=-3+7=4$$

Multiplikasjon

I *seksjon 2.3* introduserte vi ganging med positive heltall som gjentatt addisjon. Med våre utvidede begrep av addisjon og subtraksjon, kan vi nå også utvide begrepet multiplikasjon:

5.5 Multiplikasjon med positive og negative tall

- Ganging med et positivt heltall er det samme som gjentatt addisjon.
- Ganging med et negativt heltal er det samme som gjentatt subtraksjon.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}2\cdot 3 &= \text{"Like langt og i \textit{samme} retning som 2, 3 ganger"}\\ &= 2+2+2\\ &= 6\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(-2)\cdot 3 &= \text{"Like langt og i \textit{samme} retning som } (-2)\text{, 3 ganger"}\\ &= -2-2-2\\ &= -6\end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}2\cdot(-3) &= \text{"Like langt og i \textit{motsatt} retning som 2, 3 ganger"}\\ &= -2-2-2\\ &= -6\end{aligned}$$

Eksempel 4

$$\begin{aligned}(-3)\cdot(-4) &= \text{"Like langt og i \textit{motsatt} retning som } -3\text{, 4 ganger"}\\ &= 3+3+3+3\\ &= 12\end{aligned}$$

Multiplikasjon er kommutativ

Eksempel 2 og *Eksempel 3* på side 63 illustrerer at *Regel 2.2* også er gjeldende ved innføringen av negative tall:

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$$

Det blir tungvint å regne ganging som gjentatt addisjon/subtraksjon hver gang vi har et negativt tall involvert, men som en direkte konsekvens av *Regel 5.5* kan vi lage oss følgende to regler:

5.6 Ganging med negative tall I

Produktet av et negativt og et positivt tall er et negativt tall.

Tallverdien til faktorene ganget sammen gir tallverdien til produktet.

Eksempel 1

Regn ut $(-7) \cdot 8$

Svar:

Siden $7 \cdot 8 = 56$, er $(-7) \cdot 8 = -56$

Eksempel 2

Regn ut $3 \cdot (-9)$.

Svar:

Siden $3 \cdot 9 = 27$, er $3 \cdot (-9) = -27$

5.7 Ganging med negative tall II

Produktet av to negative tall er et positivt tall.

Tallverdien til faktorene ganget sammen gir verdien til produktet.

Eksempel 1

$$(-5) \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50$$

Eksempel 2

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8 = 16$$

Divisjon

Definisjon av divisjon (se *seksjon 2.4*), kombinert med det vi vet om multiplikasjon med negative tall, gir oss nå dette:

$$-18 : 6 = \text{"Tallet jeg må gange 6 med for å få } -18\text{"}$$

$$6 \cdot (-3) = -18, \text{ altså er } -18 : 6 = -3$$

$$42 : (-7) = \text{"Tallet jeg må gange } -7 \text{ med for å få 42"}$$

$$(-7) \cdot (-8) = 42, \text{ altså er } 42 : (-7) = -8$$

$$-45 : (-5) = \text{"Tallet jeg må gange } -5 \text{ med for å få } -45\text{"}$$

$$(-5) \cdot 9 = -45, \text{ altså er } -45 : (-5) = 9$$

5.8 Divisjon med negative tal

Divisjon mellom et positivt og et negativt tall gir et negativt tal.

Divisjon mellom to negative tall gir et positivt tall.

Tallverdien til dividenden delt med tallverdien til divisoren gir tallverdien til kvotienten.

Eksempel 1

$$-24 : 6 = -4$$

Eksempel 2

$$24 : (-2) = -12$$

Eksempel 3

$$-24 : (-3) = 8$$

Eksempel 4

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Eksempel 5

$$\frac{-10}{7} = -\frac{10}{7}$$

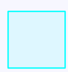
5.3 Negative tall som mengde

Obs! Denne tolkningen av negative tall blir først brukt i seksjon 8.2, som er en seksjon noen lesere uten tap av forståelse kan hoppe over.

Så langt har vi sett på negative tall ved hjelp av tallinjer. Å se på negative tall ved hjelp av mengder er i første omgang vanskelig, fordi vi har likestilt mengder med antall, og negative antall gir ikke mening! For å skape en forståelse av negative tall ut ifra et mengdeperspektiv, bruker vi det vi skal kalle *vektprinsippet*. Dette innebærer at vi ser på tallene som krefter. De positive tallene er antall krefter som virker nedover og de negative tallene er antall krefter som virker oppover[1]. Svarene på regnestykker med positive og negative tall kan man da se på som resultatet av en veiing av de forskjellige mengdene. Slik vil altså et positivt tall og et negativt tall med samme tallverdi *utligne* hverandre.

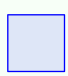
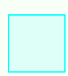
5.9 Negative tall som mengde

Negative tall vil vi indikere som en lyseblå mengde:

 $= -1$

Eksempel

$$1 + (-1) = 0$$

 $+$  $= 0$

[1] Fra virkeligheten kan man se på de positive og negative tallene som ballonger fylt med henholdsvis luft og helium. Ballonger fylt med luft virker med en kraft nedover (de faller), mens heliumballonger virker med en kraft oppover (de stiger).

Kapittel 6

Geometri

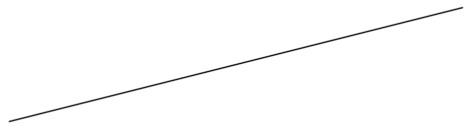
6.1 Begrep

Punkt

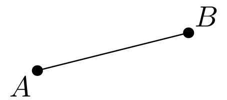
En bestemt plassering kalles et[1] *punkt*. Et punkt markerer vi ved å tegne en prikk, som vi gjerne setter navn på med en bokstav. Under har vi tegnet punktene A og B.

Linje og linjestykke

En rett strek som er uendeleg lang (!) kaller vi ei *linje*. At linja er uendelig lang, gjør at vi aldri kan *tegne* ei linje, vi kan bare *tenke* oss ei linje. Å tenke seg ei linje kan man gjøre ved å lage en rett strek, og så forestille seg at endene til streken vandrer ut i hver sin retning.



En rett strek som går mellom to punkt kaller vi et *linjestykke*.



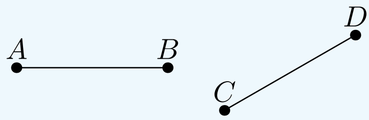
Linjestykket mellom punktene A og B skriver vi som AB.

Merk

Et linjestykke er et utklipp (et stykke) av ei linje, derfor har ei linje og et linjestykke mange felles egenskaper. Når vi skriver om linjer, vil det bli opp til leseren å avgjøre om det samme gjelder for linjestykker, slik sparer vi oss for hele tiden å skrive "linjer/linjestykker".

[1]Se også *seksjon 1.3*

Linjestykke eller lengde?

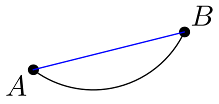


Linjestykkene AB og CD har lik lengde, men de er ikke det samme linjestykket. Likevel kommer vi til å skrive $AB = CD$. Vi bruker altså de samme navnene på linjestykker og lengdene deres (det samme gjelder for vinkler og vinkelverdier, se side 72 - 74). Dette gjør vi av følgende grunner:

- Til hvilken tid vi snakkar om et linjestykke og hvilken tid vi snakker om en lengde vil komme tydelig fram av sammenhengen begrepet blir brukt i.
- Å hele tiden måtte ha skrevet "lengden til AB" o.l. ville gitt mindre leservennlige setninger.

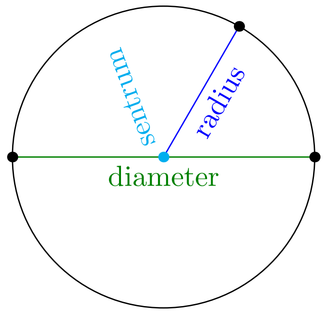
Avstand

Det er uendelig med veier man kan gå fra ett punkt til et annet, og noen veier vil vere lengre enn andre. Når vi snakkar om avstand i geometri, mener vi helst den *korteste* avstanden. For geometrier vi skal ha om i denne boka, vil den korteste avstanden mellom to punkt alltid være lengden til linjestykket (blått i figuren under) som går mellom punktene.



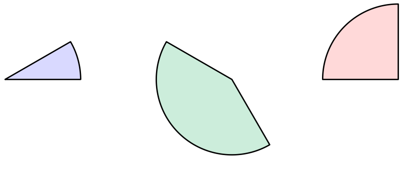
Sirkel; sentrum, radius og diameter

Om vi lager en lukket bue der alle punktene på buen har samme avstand til et punkt, har vi en *sirkel*. Punktet som alle punktene på buen har lik avstand til er *sentrum* i sirkelen. Et linjestykke mellom sentrum og et punkt på buen kaller vi en *radius*. Et linjestykke mellom to punkt på buen, og som går via sentrum, kaller vi en *diameter*[1].



Sektor

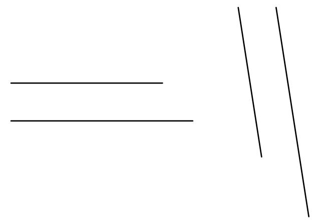
En bit som består av en sirkelbue og to tilhørende radier kalles en *sektor*. Bildet under viser tre forskjellige sektorer.



[1]Som vi har vært inne på kan *radius* og *diameter* like gjerne bli brukt om lengden til linjestykkene.

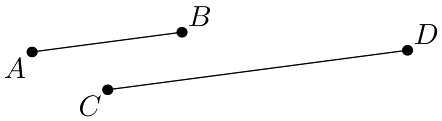
Parallelle linjer

Når linjer går i samme retning, er de *parallelle*. I figuren under vises to par med parallelle linjer.



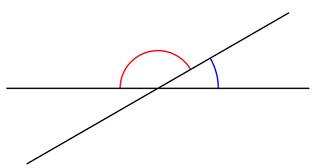
Vi bruker symbolet $\parallel$ for å vise til at to linjer er parallelle.

$$AB \parallel CD$$



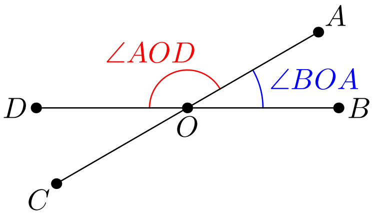
Vinklar

To linjer som ikke er parallelle, vil før eller siden krysse hverandre. Gapet to linjer danner seg imellom kalles en *vinkel*. Vinkler tegner vi som små sirkelbuer:



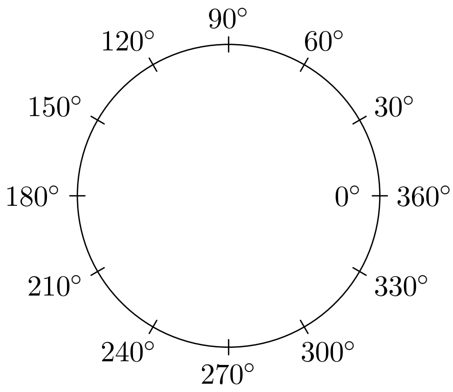
Linjene som dannar en vinkel kaller vi *vinkelbein*. Punktet der linjene møtes kaller vi *toppunktet* til vinkelen. Ofte bruker vi punktnavn og vinkelsymbolet $\angle$ for å tydeliggjøre hvilken vinkel vi mener. I figuren under er det slik at

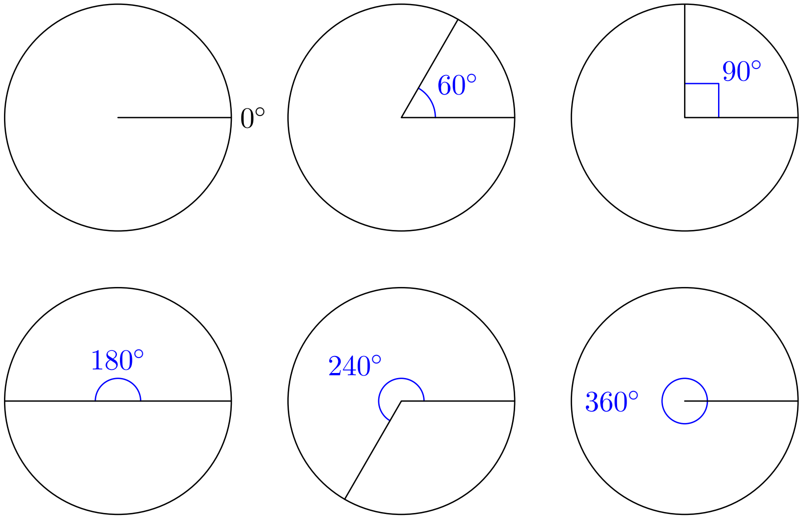
- vinkelen $\angle BOA$ har vinkelbein OB og OA og toppunkt O.
- vinkelen $\angle AOD$ har vinkelbein OA og OD og toppunkt O.



Mål av vinklar i grader

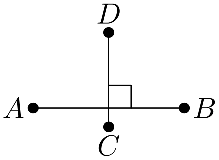
Når vi skal måle en vinkel i grader, tenker vi oss at en sirkelbue er delt inn i 360 like lange biter. En slik bit kaller vi en *grad*, som vi skriv med symbolet $^\circ$.





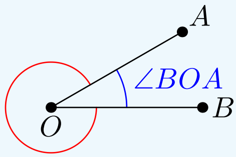
Legg merke til at en 90° vinkel markeres med symbolet $\square$. En vinkel som måler 90° kalles en *rett* vinkel. Linjer/linjestykker som danner rette vinkler sier vi står *vinkelrette* på hverandre. Dette indikerer vi med symbolet $\perp$.

$$AB \perp CD$$

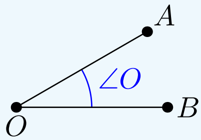


Hvilken vinkel?

Når to linjestykker møtes i et felles punkt, danner de strengt tatt to vinklar; den ene større eller lik 180°, den andre mindre eller lik 180°. I de aller fleste sammenhenger er det den minste vinkelen vi ønsker å studere, og derfor er det vanlig å definere $\angle AOB$ som den *minste* vinkelen dannet av linjestykkene OA og OB.

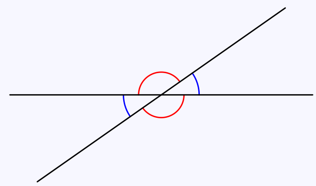


Så lenge det bare er to linjestykker/linjer tilstede, er det også vanlig å bruke bare én bokstav for å vise til vinkelen:

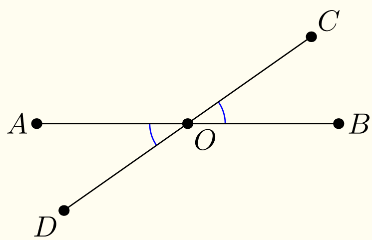


6.1 Toppvinkler

To motstående vinkler med felles toppunkt kalles *toppvinkler*. Toppvinklar er like store.



6.1 Toppvinkler (forklaring)



Vi har at

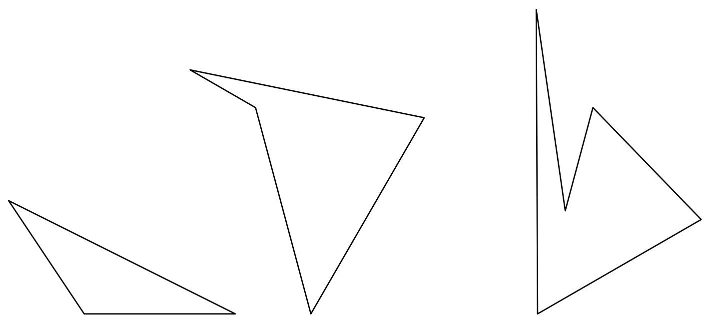
$$\angle BOC + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$$

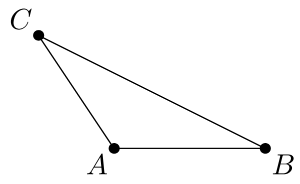
Dette må bety at $\angle BOC = \angle AOD$. Tilsvarande er $\angle COA = \angle DOB$.

Kanter og hjørner

Når linjestykker danner en lukket form, har vi en *mangekant*. Under ser du (fra venstre mot høyre) en trekant, en firkant og en femkant.

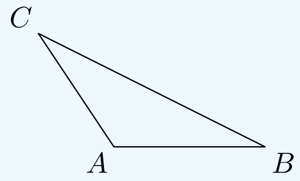


Linjestykkene en mangekant består av kalles *kanter* eller *sider*. Punktene der kantene møtes kaller vi *hjørner*. Trekanten under har altså hjørnene A, B og C og sidene (kantene) AB, BC og AC.



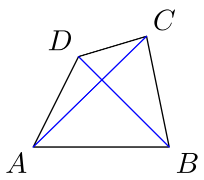
Merk

Ofte kommer vi til å skrive bare en bokstav for å markere et hjørne i en mangekant.



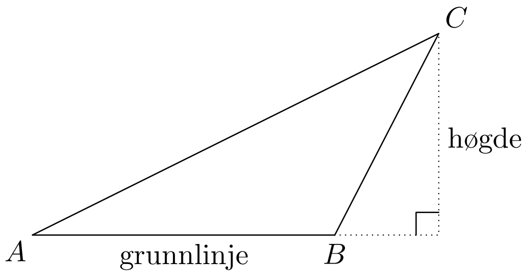
Diagonaler

Et linjestykke som går mellom to hjørner som ikke hører til samme side av en mangekant kalles en *diagonal*. I figuren under ser vi diagonalene AC og BD.

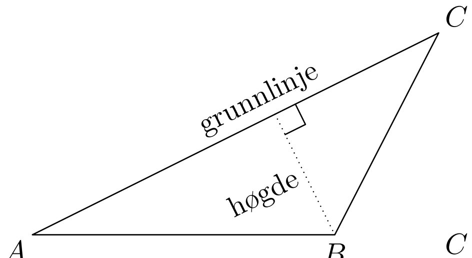


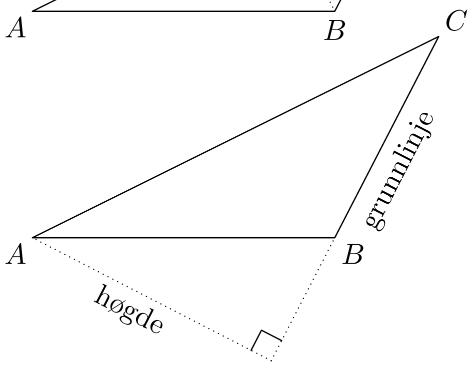
Høgde og grunnlinje

Når vi i *seksjon 6.4* skal finne areal, vil begrepene *grunnlinje* og *høgde* være viktige. For å finne en høgde i en trekant, tar vi utgangspunkt i en av sidene. Siden vi velger kaller vi *grunnlinja*. La oss starte med AB i figuren under som grunnlinje. Da er *høgda* linjestykket som går fra AB (eventuelt, som her, forlengelsen av AB) til C, og som står vinkelrett på AB.



Da det er tre sider vi kan velge som grunnlinje, har en trekant tre høgder.





Merk

Høgde og grunnlinje kan også på liknende vis bli brukt i forbindelse med andre mangekantar.

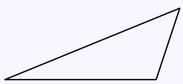
6.2 Egenskaper for trekanter og firkanter

I tillegg til å ha et bestemt antal sider og hjørner, kan mangekantar også ha andre egenskaper, som for eksempel sider eller vinkler av lik størrelse, eller sider som er parallelle. Vi har egne navn på mangekanter med spesielle egenskaper, og disse kan vi sette opp i en oversikt der noen "arver"[1] egenskaper fra andre.

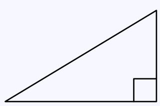
6.2 Trekanter

Trekant → Rettvinklet trekant

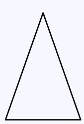
Trekant → Likebeint trekant → Likesidet trekant



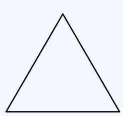
Trekant
Har tre sider og tre hjørner.



Rettvinklet trekant
Har en vinkel som er 90°.



Likebeint trekant
Minst to sider er like lange.
Minst to vinklar er like store.



Likesida trekant
Sidene er like lange.
Vinklane er 60°.

Eksempel

Da en likesidet trekant har tre sider som er like lange og tre vinkler som er 60°, er den også en likebeint trekant.

Språkboksen

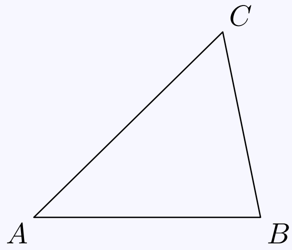
Den lengste siden i en rettvinklet trekant blir gjerne kalt *hypotenus*. De korteste sidene blir gjerne kalt *kateter*.

[1] I *Regel 6.2* og *Regel 6.4* er dette indikert med piler.

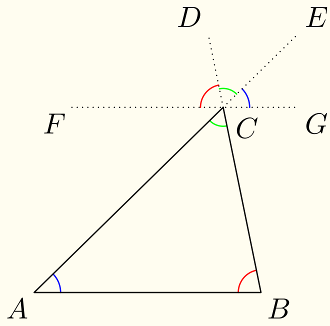
6.3 Summen av vinklene i en trekant

I en trekant er summen av vinkelverdiene 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



6.3 Summen av vinklene i en trekant (forklaring)



Vi tegner et linjestykke FG som går gjennom C og som er parallell med AB. Videre setter vi punktet E og D på forlengelsen av henholdsvis AC og BC. Da er $\angle A = \angle GCE$ og $\angle B = \angle DCF$. $\angle ACB = \angle ECD$ fordi de er toppvinkler. Vi har at

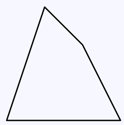
$$\angle DCF + \angle ECD = \angle GCE = 180^\circ$$

Altså er

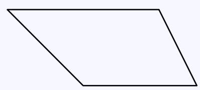
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

6.4 Firkantar

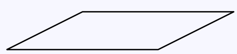
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Rombe} & & \\ \text{Firkant} & \longrightarrow & \text{Trapes} & \longrightarrow \text{Parallellogram} \nearrow\searrow & & \searrow\nearrow & \text{Kvadrat} \\ & & & & \text{Rektangel} & & \end{array}$$



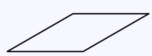
Firkant
Har fire sider og fire hjørner.



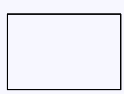
Trapes
Har minst to sider som er parallelle.



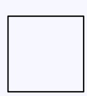
Parallellogram
Har to par med parallelle sider.
Har to par med like vinkler.



Rombe
Sidene er like lange.



Rektangel
Alle vinklene er 90°.



Kvadrat

Eksempel

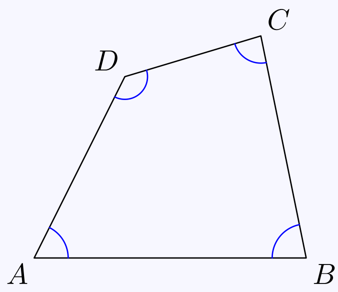
Kvadratet er både en rombe og et rektangel, og "arver" derfor egenskapene til disse. Dette betyr at i et kvadratet er

- alle sidene like lange
- alle vinklene 90°.

6.5 Summen av vinklene i en firkant

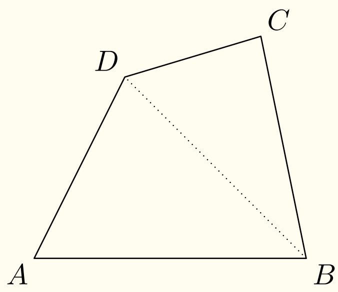
I en firkant er summen av vinkelverdiene 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



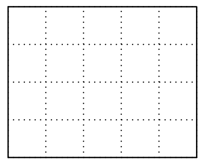
6.5 Summen av vinklene i en firkant (forklaring)

Den samlede vinkelsummen i $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ utgjør vinkelsummen i $\square ABCD$. Av *Regel 6.3* vet vi at vinkelsummen i alle trekanter er 180°, altså er vinkelsummen i $\square ABCD$ lik $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

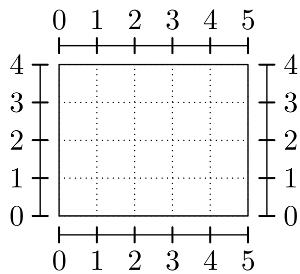


6.3 Omkrets

Når vi måler hvor langt det er rundt en lukket form, finner vi *omkretsen* til figuren. La oss starte med å finne omkretsen til dette rektangelet:



Rektangelet har to sider med lengde 4 og to sider med lengde 5:



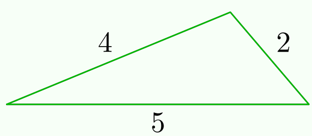
Dette betyr at

$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 4+4+5+5\\ &= 18\end{aligned}$$

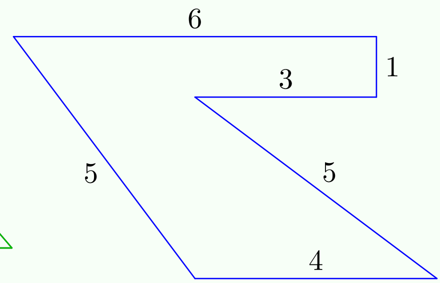
6.6 Omkrets

Omkrets er lengden rundt en lukket figur.

Eksempel



(a)



(b)

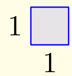
I figur *(a)* er omkretsen $5+2+4=11$.

I figur *(b)* er omkretsen $4+5+3+1+6+5=24$.

6.4 Areal

Overalt rundt oss kan vi se *overflater*, for eksempel på et gulv eller et ark. Når vi ønsker å si noe om hvor store overflater er, må vi finne *arealet* deres. Idéen bak begrepet areal er denne:

Vi tenker oss et kvadrat med sidelengder 1. Dette kaller vi *enerkvadradet*.

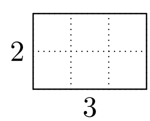


Så ser vi på overflaten vi ønsker å finne arealet til, og spør:

"Hvor mange enerkvadrat er det plass til på denne overflata?"

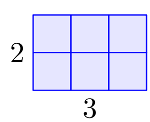
Arealet til et rektangel

La oss finne arealet til et rektangel som har grunnlinje 3 og høgde 2.



Vi kan da telle oss fram til at rektangelet har plass til 6 enerkvadrat:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 6$$

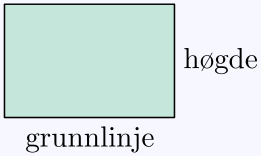


Ser vi tilbake til *seksjon 2.3*, legger vi merke til at

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 3 \cdot 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

6.7 Arealet til eit rektangel

$$\text{Areal} = \text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}$$

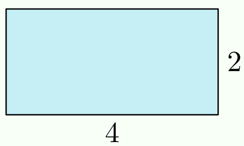


Bredde og lengde

Ofte blir ordene *bredde* og *lengde* brukt om grunnlinja og høgda i et rektangel.

Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet[1].

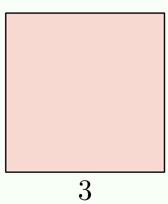


Svar:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 4 \cdot 2 = 8$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar:

$$\text{Arealet til kvadratet} = 3 \cdot 3 = 9$$

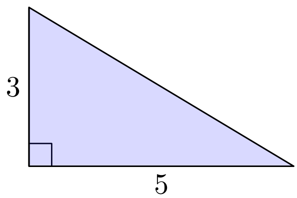
[1] *Merk*: Lengdene vi bruker som eksempel i en figur vil ikke nødvendigvis samsvare med lengdene i en annen figur. En sidelengde lik 1 i en figur kan altså vere kortere enn en sidelengde lik 1 i en annen figur.

Arealet til en trekant

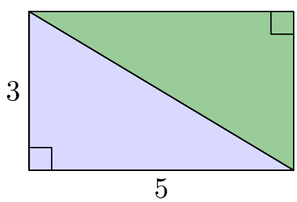
For trekanter er det tre forskjellige tilfeller vi må se på:

1) Tilfellet der grunnlinja og høgda har et felles endepunkt

La oss finne arealet til en rettvinklet trekant med grunnlinje 5 og høgde 3.



Vi kan nå lage et rektangel ved å ta en kopi av trekanten vår, og så legge langsidene til de to trekantene sammen:



Av *Regel 6.7* vet vi at arealet til rektangelet er $5 \cdot 3$. Arealet til én av trekantane må utgjøre halvparten av arealet til rektangelet, altså er

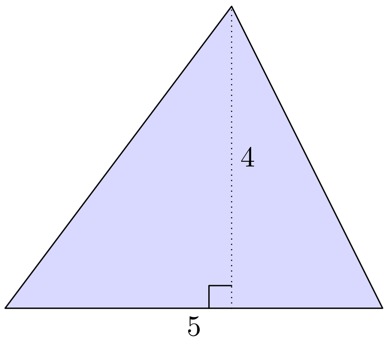
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 3}{2}$$

For den blå trekanten er

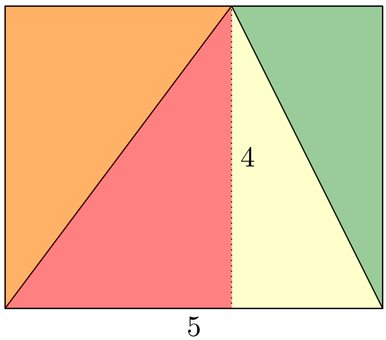
$$\frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

2) Tilfellet der høgda ligger inni trekanten, men ikke har felles endepunkt med grunnlinja

Trekanten under har grunnlinje 5 og høgde 4.



Med denne trekanten (og høgda) som utgangspunkt, danner vi denne figuren:



Vi legger nå merke til at

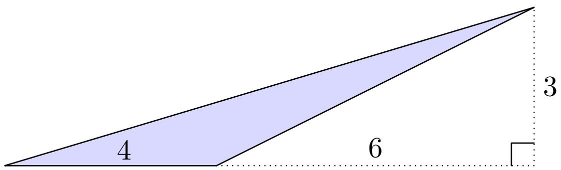
- arealet til den røde trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den røde og den gule trekanten.
- arealet til den gule trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den gule og den grønne trekanten.

Summen av arealene til den gule og den røde trekanten utgjør altså halvparten av arealet til rektangelet som består av alle de fire fargede trekantene. Arealet til dette rektangelet er $5 \cdot 4$, og da vår opprinnelige trekant (den blå) består av den røde og den oransje trekanten, har vi at

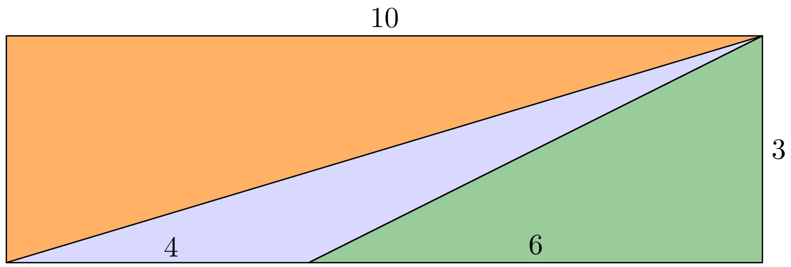
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

3) Tilfellet der høgda ligg utenfor trekanten

Trekanten under har grunnlinje 4 og høgde 3.



Med denne trekanten som utgangspunkt, danner vi et rektangel:



Vi gir nå arealene følgende navn:

$$
\begin{aligned}
\text{Arealet til rektangelet} &= R \\
\text{Arealet til den blå trekanten} &= B \\
\text{Arealet til den oransje trekanten} &= O \\
\text{Arealet til den grønne trekanten} &= G
\end{aligned}
$$

Da har vi at (både den oransje og den grønne trekanten er rettvinklet)

$$R = 3 \cdot 10 = 30$$

$$O = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

$$G = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Videre er

$$
\begin{aligned}
B &= R - O - G \\
&= 30 - 15 - 9 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Legg nå merke til at vi kan skrive

$$6 = \frac{4 \cdot 4}{3}$$

I den blå trekanten gjenkjenner vi dette som

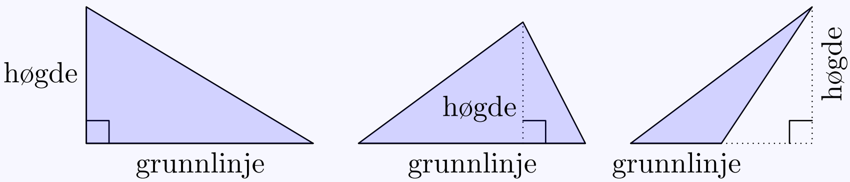
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

Alle tilfellene oppsummert

En av de tre tilfellene vi har studert vil alltid gjelde for ei valgt grunnlinje i en trekant, og alle tilfellene resulterte i det samme uttrykket.

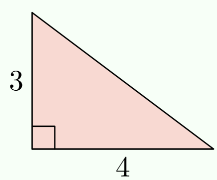
6.8 Arealet til en trekant

$$\text{Areal} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$



Eksempel 1

Finn arealet til trekanten.

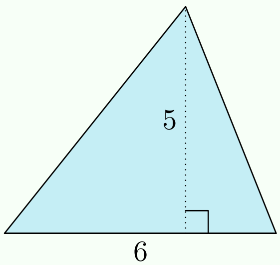


Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$= 6$$

Eksempel 2

Finn arealet til trekanten.

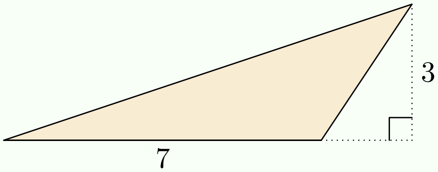


Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Eksempel 3

Finn arealet til trekanten.



Svar:

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

Del II

Algebra og geometri

Kapittel 7

Algebra

7.1 Introduksjon

Algebra er kort og godt matematikk der bokstaver representerer tall. Dette gjør at vi lettere kan jobbe med *generelle* tilfeller. For eksempel er $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ og $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$, men disse er bare to av de uendelig mange eksemplene på at multiplikasjon er kommutativ! En av hensiktene med algebra er at vi ønsker å gi *ett* eksempel som forklarer *alle* tilfeller, og siden sifrene våre (0-9) er uløselig knyttet til bestemte tall, bruker vi bokstaver for å nå dette målet.

Verdien til tallene som er representert ved bokstaver vil ofte variere ut ifra en sammenheng, og da kaller vi disse bokstavtallene for *variabler*. Hvis bokstavtallene derimot har en bestemt verdi, kaller vi dem for *konstanter*.

I *Del I* av boka har vi sett på regning med konkrete tal, likevel er de fleste reglene vi har utledet *generelle*; de gjelder for alle tall. På side 92 - 95 har vi gjengitt mange av disse reglene på en mer generell form. En fin introduksjon til algebra er å sammenligne reglene du finner her med slik du finner dem[1] i *Del I*.

7.1 Addisjon er kommutativ (2.1)

$$a + b = b + a$$

Eksempel

$$7 + 5 = 5 + 7$$

7.2 Multiplikasjon er kommutativ (2.2)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Eksempel 1

$$9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$$

Eksempel 2

$$8 \cdot a = a \cdot 8$$

[1] Reglene sine nummer i *Del I* står i parentes.

Ganging med bokstavuttrykk

Når man ganger sammen bokstaver, er det vanlig å utelate gangetegnet. Og om man ganger sammen en bokstav og et konkret tal, skriver man det konkrete tallet først. Dette betyr for eksempel at

$$a \cdot b = ab$$

og at

$$a \cdot 8 = 8a$$

I tillegg skriver vi også

$$1 \cdot a = a$$

Det er også vanlig å utelate gangetegn der parentesuttrykk er en faktor:

$$3 \cdot (a + b) = 3(a + b)$$

7.3 Brøk som omskriving av delestykke (4.1)

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Eksempel

$$a : 2 = \frac{a}{2}$$

7.4 Brøk ganget med brøk (4.8)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Eksempel 1

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 21} = \frac{26}{231}$$

Eksempel 2

$$\frac{3}{b} \cdot \frac{a}{7} = \frac{3a}{7b}$$

7.5 Deling med brøk (4.10)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Eksempel 1

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{a}{13} : \frac{b}{3} &= \frac{a}{13} \cdot \frac{3}{b} \\ &= \frac{3a}{13b} \end{aligned}$$

7.6 Ganging med parentes (distributiv lov) (3.5)

$$(a+b)c = ac + bc$$

Eksempel 1

$$(2+a)b = 2b + ab$$

Eksempel 2

$$a(5b-3) = 5ab - 3a$$

7.7 Ganging med negative tall I (5.6)

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) &= -(3 \cdot 4) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(-a)\cdot 7 &= -(a\cdot 7)\\ &= -7a\end{aligned}$$

7.8 Ganging med negative tall II (5.7)

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(-2)\cdot(-8) &= 2\cdot 8\\ &= 16\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(-a)\cdot(-15) = 15a$$

Utvidelser av reglene

Noe av styrken til algebra er at vi kan lage oss kompakte regler som det er lett å utvide også til andre tilfeller. La oss som et eksempel finne et annet uttrykk for

$$(a+b+c)d$$

Regel 7.6 forteller oss ikke direkte hvordan vi kan regne mellom parentesuttrykket og d, men det er ingenting som hindrer oss i å omdøpe $a+b$ til k:

$$a+b=k$$

Da er

$$(a+b+c)d = (k+c)d$$

Av *Regel 7.6* har vi nå at

$$(k+c)d = kd+cd$$

Om vi setter inn igjen uttrykket for k, får vi

$$kd+cd = (a+b)d+cd$$

Ved å utnytte *Regel 7.6* enda en gang kan vi skrive

$$(a+b)d+cd = ad+bc+cd$$

Altså er

$$(a+b+c)d = ad+bc+cd$$

Obs! Dette eksempelet er ikke ment for å vise hvordan man skal gå fram når man har uttrykk som ikke direkte er omfattet av Regel *7.1 - 7.8, men for å vise hvorfor det alltid er nok å skrive regler med færrest mulige ledd, faktorar og lignende. Oftest vil man bruke utvidelser av reglene uten engang å tenke over det, og i alle fall langt ifra så pertentlig som det vi gjorde her.*

7.2 Potenser

$$\text{grunntal} \longrightarrow 2^{3 \longleftarrow \text{eksponent}}$$

En potens består av et *grunntall* og en *eksponent*. For eksempel er 2^3 en potens med grunntall 2 og eksponent 3. En positiv, heltalls eksponent sier hvor mange eksemplar av grunntallet som skal ganges sammen, altså er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

7.9 Potenstall

a^n er et potenstall med grunntall a og eksponent n.

Hvis n er et naturlig tall, vil a^n svare til n eksemplar av a multiplisert med hverandre.

Merk: $a^1 = a$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} (-7)^2 &= (-7) \cdot (-7) \\ &= 49 \end{aligned}$$

Språkboksen

Vanlige måter å si 2^3 på er

- ”2 i tredje”
- ”2 opphøyd i 3”

I programmeringsspråk brukes gjerne symbolet `^` eller symbolene `**` mellom grunntall og eksponent.

Merk

De kommende sidene vil inneholde regler for potenser med tilhørende forklaringer. Selv om det er ønskelig at de har en så generell form som mulig, har vi i forklaringene valgt å bruke eksempel der eksponentene ikke er variabler. Å bruke variabler som eksponenter ville gitt mye mindre leservennlige uttrykk, og vi vil påstå at de generelle tilfellene kommer godt til synes også ved å studere konkrete tilfeller.

7.10 Ganging med potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 3^2 &= 3^{5+2} \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} b^4 \cdot b^{11} &= b^{3+11} \\ &= b^{14} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^{-7} &= a^{5-7} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

(Se *Regel 7.13* for hvordan potens med negativ eksponent kan tolkes.)

7.10 Ganging med potenser (forklaring)

La oss se på tilfellet

$$a^2 \cdot a^3$$

Vi har at

$$a^2 = 2 \cdot 2$$

$$a^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Med andre ord kan vi skrive

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= \overbrace{a \cdot a}^{a^2} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{a^3} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

7.11 Divisjon med potenser

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Eksempel 1

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{2^4 \cdot a^7}{a^6 \cdot 2^2} &= 2^{4-2} \cdot a^{7-6} \\ &= 2^2 a \\ &= 4a \end{aligned}$$

7.11 Divisjon med potenser (forklaring)

La oss undersøke brøken

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Vi skriver ut potensene i teller og nevner:

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} \\ &= \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} \\ &= a \cdot a \cdot a \\ &= a^3\end{aligned}$$

Dette kunne vi ha skrevet som

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= a^{5-2} \\ &= a^3\end{aligned}$$

7.12 Spesialtilfellet a^0

$$a^0 = 1$$

Eksempel 1

$$1000^0 = 1$$

Eksempel 2

$$(-b)^0 = 1$$

7.12 Spesialtilfellet a^0 (forklaring)

Et tall delt på seg selv er alltid lik 1, derfor er

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Av dette, og *Regel 7.11*, har vi at

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a^n}{a^n} \\ &= a^{n-n} \\ &= a^0\end{aligned}$$

7.13 Potens med negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel 1

$$a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Eksempel 2

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

7.13 Potens med negativ eksponent (forklaring)

Av *Regel 7.12* har vi at $a^0 = 1$. Altså er

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$

Av *Regel 7.11* er

$$\begin{aligned}\frac{a^0}{a^n} &= a^{0-n}\\ &= a^{-n}\end{aligned}$$

7.14 Brøk som grunntall

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Eksempel 1

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Eksempel 2

$$\left(\frac{a}{7}\right)^3 = \frac{a^3}{7^3} = \frac{a^3}{343}$$

7.14 Brøk som grunntall (forklaring)

La oss studere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} \\ &= \frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b} \\ &= \frac{a^3}{b^3}\end{aligned}$$

7.15 Faktorer som grunntall

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(3a)^5 &= 3^5 a^5 \\ &= 243a^5\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(ab)^4 = a^4 b^4$$

7.15 Faktorer som grunntall (forklaring)

La oss bruke $(a\cdot b)^3$ som eksempel. Vi har at

$$\begin{aligned}(a\cdot b)^3 &= (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b) \\ &= a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b \\ &= a^3 b^3\end{aligned}$$

7.16 Potens som grunntall

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\left(c^4\right)^5 &= c^{4\cdot 5}\\ &= c^{20}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^8 &= 3^{\frac{5}{4}\cdot 8}\\ &= 3^{10}\end{aligned}$$

7.16 Potens som grunntall (forklaring)

La oss bruke $(a^3)^4$ som eksempel. Vi har at

$$\left(a^3\right)^4 = a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3$$

Av *Regel 7.10* er

$$\begin{aligned}a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3 &= a^{3+3+3+3}\\ &= a^{3\cdot 4}\\ &= a^{12}\end{aligned}$$

7.17 *n*-rot

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Symbolet $\sqrt{}$ kalles et *rottegn*. For eksponenten $\frac{1}{2}$ er det vanlig å utelate 2 i rottegnet:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Eksempel

Av *Regel 7.16* har vi at

$$\begin{aligned}\left(a^b\right)^{\frac{1}{b}} &= a^{b\cdot\frac{1}{b}} \\ &= a\end{aligned}$$

For eksempel er

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \text{ siden } 3^2 = 9$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \text{ siden } 5^3 = 125$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ siden } 2^4 = 16$$

Språkboksen

$\sqrt{9}$ kalles "kvadratrota til 9"

$\sqrt[5]{9}$ kalles "femterota til 9".

7.3 Irrasjonale tall

7.18 Irrasjonale tall

Et tall som *ikke* er et rasjonalt tall, er et irrasjonalt tal[1].

Verdien til et irrasjonalt tall har uendelig mange desimaler med et ikke-repeterende mønster.

Eksempel 1

$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373...$$

[1]Strengt tatt er irrasjonale tall alle *reelle* tall som ikke er rasjonale tall. Men for å forklare hva *reelle* tall er, må vi forklare hva *imaginære* tall er, og det har vi valgt å ikke gjøre i denne boka.

Kommentar (for den spesielt interesserte)

Matematikk er såkalt *aksiomatisk* oppbygd. Dette betyr at vi erklærer noen[1] påstander for å vere sanne, og disse kaller vi for *aksiom* eller *postulat*. I regning har man omtrent 12 aksiom[2], men i denne boka har vi holdt oss til å nevne disse 6:

Aksiom

For tallene a, b og c har vi at

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{A1}$$

$$a + b = b + a \tag{A2}$$

$$a(bc) = (ab)c \tag{A3}$$

$$ab = ba \tag{A4}$$

$$a(b + c) = ab + ac \tag{A5}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad (a \neq 0) \tag{A6}$$

(A1) Assosiativ lov ved addisjon
(A2) Kommutativ lov ved addisjon
(A3) Assosiativ lov ved multiplikasjon
(A4) Kommutativ lov ved multiplikasjon
(A5) Distributiv lov
(A6) Eksistens av multiplikativ identitet

Aksiomene legger selve fundamentet i et matematisk system. Ved hjelp av dem finner vi flere og mer komplekse sannheter som vi kaller *teorem*. I denne boka har vi valgt å kalle både aksiom, definisjoner og teorem for *regler*. Dette fordi aksiom, definisjoner og teorem alle i praksis gir føringer (regler) for handlingsrommet vi har innenfor det matematiske systemet vi opererer i.

[1] Helst så få som mulig.

[2] Tallet avhenger litt av hvordan man formulerer påstandene.

I *Del I* har vi forsøkt å presentere *motivasjonen* bak aksiomene, for de er selvsagt ikke tilfeldig utvalgte. Tankerekken som leder oss fram til de nevnte aksiomene kan da oppsummeres slik:

1. Vi definerer positive tall som representasjoner av enten en mengde eller en plassering på en tallinje.

2. Vi definerer hva addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon innebærer for positive heltall (og 0).

3. Ut ifra punktene over tilsier all fornuft at (A1) - (A6) må gjelde for alle positive heltall.

4. Vi definerer også brøker som representasjoner av en mengde eller som en plassering på en tallinje. Hva de fire regneartene innebærer for brøker bygger vi på det som gjelder for positive heltall.

5. Ut ifra punktene over finner vi at (A1) - (A6) gjelder for alle positive, rasjonale tall.

6. Vi innfører negative heltall, og utvider tolkningen av addisjon og subtraksjon. Dette gir så en tolkning av multiplikasjon og divisjon med negative heltall.

7. (A1) - (A6) gjelder også etter innføringen av negative heltall. Å vise at de også gjelder for negative, rasjonale tall er da en ren formalitet.

8. Vi kan aldri skrive verdien til et irrasjonalt tall helt eksakt, men verdien kan tilnærmes ved et rasjonalt tall[1]. Alle utregninger som innebærer irrasjonale tall er derfor i *praksis* utregninger som inneberærer rasjonale tall, og slik kan vi si at[2] (A1) - (A6) gjelder også for irrasjonale tall.

En lignende tankerekke kan brukes for å argumentere for potensreglene vi fant i *seksjon 7.2*.

[1]For eksempel kan man skrive $\sqrt{2} = 1.414213562373... \approx \frac{1414213562373}{1000000000000}$

[2] *Obs!* Denne forklaringen er god nok for boka sitt formål, men er en ekstrem forenkling. Irrasjonale tall er et komplisert tema som mange bøker for avansert matematikk bruker mange kapittel for å forklare i full dybde.

Kapittel 8

Likninger

8.1 Introduksjon

Ethvert matematisk uttrykk som inneholder $=$ er en *likning*, likevel er ordet likning tradisjonelt knytt til at vi har et *ukjent* tall.

Si at vi ønsker å finne et tall som er slik at hvis vi legger til 4, så får vi 7. Dette tallet kan vi kalle for hva som helst, men det vanligste er å kalle det for x, som altså er det ukjente tallet vårt. Likningen vår kan nå skrives slik:

$$x + 4 = 7$$

x-verdien[1] som gjør at det blir samme verdi på begge sider av likhetstegnet kalles *løsningen* av likningen. Det er alltids lov til å se eller prøve seg fram for å finne verdien til x. Kanskje har du allerede merket at $x = 3$ er løningen av likningen, siden

$$3 + 4 = 7$$

Men de fleste likninger er det vanskelig å se eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til mer generelle løsningsmetoder. Egentlig er det bare ett prinsipp vi følger:

> Vi kan alltid utføre en matematisk operasjon på den ene siden av likhetstegnet, så lenge vi utfører den også på den andre siden.

De matematiske operasjonene vi har presentert i denne boka er de fire rekneartene. Med disse lyder prinsippet slik:

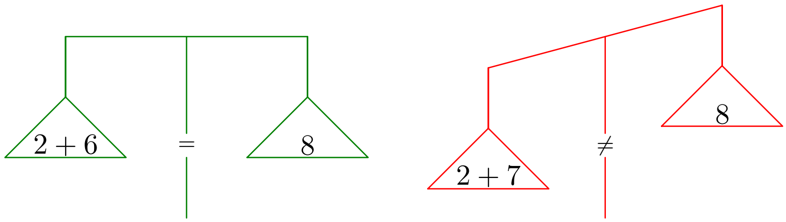
> Vi kan alltid legge til, trekke ifra, gange eller dele med et tall på den ene siden av likhetstegnet, så lenge vi gjør det også på den andre siden.

Prinsippet følger av betydningen til $=$. Når to uttrykk har samme verdi, må de nødvendigvis fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører de samme matematiske operasjonane på dem. I kommende seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for hver enkelt rekneoperasjon, men hvis du føler dette allerede gir god mening kan du med fordel hoppe til *seksjon 8.3*.

[1]I andre tilfeller kan det være flere verdier.

8.2 Løsing ved de fire regneartene

I figurene til denne seksjonen skal vi forstå likninger ut ifra et vekt-prinsipp. $=$ *vil da indikere*[1] *at det er like mye vekt (lik verdi) på venstre side som på høyre side.*

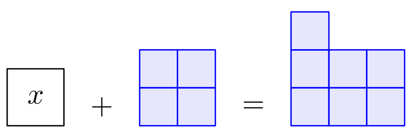


Addisjon og subtraksjon; tall som skifter side

Første eksempel

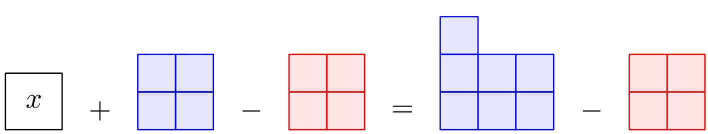
Vi har allerede funnet løsningen på denne likningen, men la oss løse den på en annen måte[2]:

$$x + 4 = 7$$



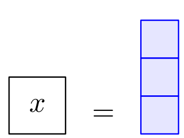
Det blir tydelig hva verdien til x er hvis x står alene på en av sidene, og x blir isolert på venstresiden hvis vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresiden, må vi ta bort 4 fra høyresiden også, skal begge sidene ha samme verdi.

$$x + 4 - {\color{red}4} = 7 - {\color{red}4}$$



Siden $4 - {\color{red}4} = 0$ og $7 - {\color{red}4} = 3$, får vi at

$$x = 3$$



---

[1] $\neq$ er symbolet for "er *ikkje* lik".

[2] *Merk:* I tidligere figurer har det vært samsvar mellom størrelsen på rutene og (tall)verdien til tallet de symboliserer. Dette gjelder ikke rutene som representerer x.

Dette kunne vi ha skrevet noe mer kortfattet slik:

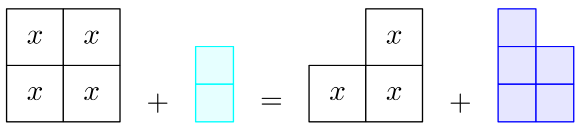
$$
\begin{aligned}
x + 4 &= 7 \\
x &= 7 - 4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Mellom første og andre linje er det vanlig å si at *4 har skiftet side, og derfor også fortegn (fra + til −).*

Andre eksempel

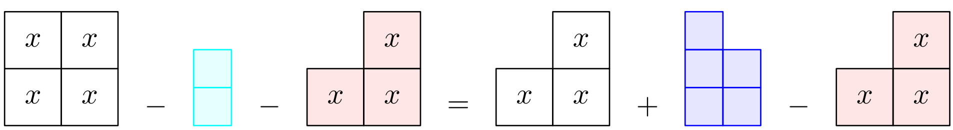
La oss gå videre til å se på en litt vanskeligere likning[1]:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



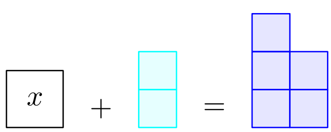
For å skaffe et uttrykk med x bare på én side, tar vi vekk $3x$ på begge sider:

$$4x - 2 - {\color{red}3x} = 3x + 5 - {\color{red}3x}$$



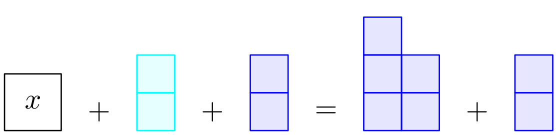
Da får vi at

$$x - 2 = 5$$



For å isolere x, legger vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høyre side:

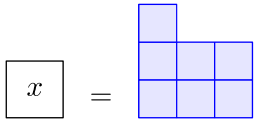
$$x - 2 + {\color{blue}2} = 5 + {\color{blue}2}$$



[1]Legg merke til at figuren illustrerer $4x + (-2)$ (se *seksjon 5.3*) på venstre side. Men $4x + (-2)$ er det samme som $4x - 2$ (se *seksjon 5.2*).

Da får vi at

$$x = 7$$



Stegene vi har tatt kan oppsummeres slik:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. figur} \\ 4x - 3x - 2 &= 3x - 3x + 5 && \text{2. figur} \\ x - 2 &= 5 && \text{3. figur} \\ x - 2 + 2 &= 5 + 2 && \text{4. figur} \\ x &= 7 && \text{5. figur} \end{aligned}$$

Dette kan vi på en forenklet måte skrive slik:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 3x + 5 \\ 4x - 3x &= 5 + 2 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

8.1 Flytting av tall over likhetstegnet

I en likning ønsker vi å samle alle x-ledd og alle kjente ledd på hver sin side av likhetstegnet. Skifter et ledd side, skifter det fortegn.

Eksempel 1

Løs likningen

$$3x + 3 = 2x + 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 5 - 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Svar:

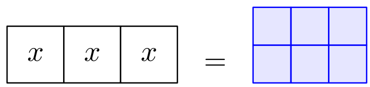
$$\begin{aligned} -4x + 5x &= 12 + 3 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Ganging og deling

Deling

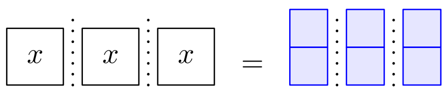
Hittil har vi sett på likninger der vi endte opp med én x på den ene siden av likhetstegnet. Ofte har vi flere x-er, som for eksempel i likningen

$$3x = 6$$



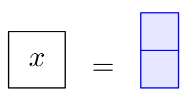
Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi én x i hver gruppe. Deler vi også høyresiden inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den samme verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$



Altså er

$$x = 2$$



La oss oppsummere utregningen vår:

$$\begin{aligned} 3x &= 6 && \text{1. figur} \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} && \text{2. figur} \\ x &= 2 && \text{3. figur} \end{aligned}$$

Du husker kanskje at vi gjerne skriver

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$$

8.2 Deling på begge sider av en likning

Vi kan dele begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$4x = 20$$

Svar:

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$2x + 6 = 3x - 2$$

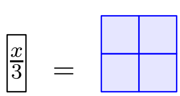
Svar:

$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad (-x = -1x)$$
$$x = 8$$

Ganging

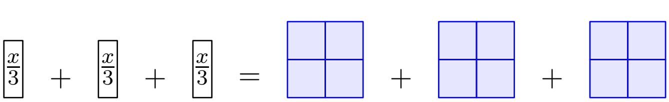
Det siste tilfellet vi skal se på er når likninger inneholder brøkdeler av den ukjente, som for eksempel i likningen

$$\frac{x}{3} = 4$$



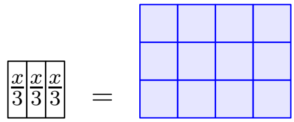
Vi kan få én x på venstresiden hvis vi legger til to eksemplar av $\frac{x}{3}$. Likningen forteller oss at $\frac{x}{3}$ har samme verdi som 4. Dette betyr at for hver $\frac{x}{3}$ vi legger til på venstresiden, må vi legge til 4 på høyresiden, skal sidene ha samme verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$



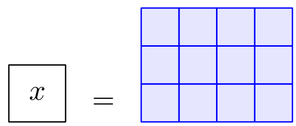
Vi legger nå merke til at $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{x}{3}\cdot 3$ og at $4+4+4=4\cdot 3$:

$$\frac{x}{3}\cdot 3 = 4\cdot 3$$



Og da $\frac{x}{3}\cdot 3 = x$ og $4\cdot 3 = 12$, har vi at

$$x = 12$$



En oppsummering av stegene våre kan vi skrive slik:

$$\frac{x}{3} = 4 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3} = 4+4+4 \qquad \text{2. figur}$$

$$\frac{x}{3}\cdot 3 = 4\cdot 3 \qquad \text{3. figur}$$

$$x = 12 \qquad \text{4. figur}$$

Dette kan vi kortere skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3} = 4\cdot 3$$

$$x = 12$$

8.3 Ganging på begge sider av en likning

Vi kan gange begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar:

$$\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 2 \cdot 5$$

$$x = 10$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Svar:

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$

$$\frac{6x}{10} = 18$$

$$\frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 18 \cdot 10$$

$$6x = 180$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

8.3 Løsingsmetodene oppsummert

8.4 Løysningsmetoder for likninger

Vi kan alltid

- addere eller subtrahere begge sider av en likning med det samme tallet. Dette er ekvivalent til å flytte et ledd fra den ene siden av likningen til den andre, så lenge vi også skifter fortegn på leddet.
- gange eller dele begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 6 + 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$9 - 7x = 8x + 3$$

Svar:

$$\begin{aligned} 9 - 7x &= -8x + 3 \\ 8x - 7x &= 3 - 9 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 10x - 20 &= 7x - 5 \\ 10x - 7x &= 20 - 5 \\ 3x &= 15 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Eksempel 4

Løy likningen

$$15 - 4x = x + 5$$

Svar:

$$\begin{aligned} 15 - 5 &= x + 4x \\ 10 &= 5x \\ \frac{10}{5} &= \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Eksempel 5

Løs likningen

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} &= 20 + 8 \\ \frac{\cancel{7}x}{9 \cdot \cancel{7}} &= \frac{28}{7} \\ \frac{x}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} &= 4 \cdot 9 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Eksempel 6

Løs likningen

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Svar:

Får å unngå brøker, ganger vi begge sider med fellesnevneren 12:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 &= \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12 \\
\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 &= \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \\
4x + 2 &= 5x + 24 \\
4x - 5x &= 24 - 2 \\
-x &= 22 \\
\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} &= \frac{22}{-1} \\
x &= -22
\end{aligned}$$

Tips

Mange liker å lage seg en regel om at "vi kan gange eller dele alle ledd med det samme tallet". I eksempelet over kunne vi da hoppet direkte til andre linje i utrekningen.

Eksempel 7

Løs likningen

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Svar:

Vi ganger begge sider med fellesnevneren $2x$:

$$\begin{aligned}
2x\left(3 - \frac{6}{x}\right) &= 2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right) \\
6x - 12 &= 4x + 5 \\
6x - 4x &= 5 + 12 \\
2x &= 17 \\
x &= \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

8.4 Potenslikninger

La oss løse likningen

$$x^2 = 9$$

Dette kalles en *potenslikning*. Potenlikninger er vanligvis vanskelige å løse bare ved hjelp av de fire regneartane, så her må vi også nytte oss av potensregler. Vi opphøyer begge sidene av likningen med den omvendte brøken[1] til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av *Regel 7.16* er

$$x^{2\cdot\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$
$$x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Siden $3^2 = 9$, er $9^{\frac{1}{2}} = 3$. Nå legger vi merke til dette:

Prinsippet erklært på side **??** *sier at vi kan, som vi nå gjorde, utføre en matematisk operasjon på begge sider av likningen. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikke at alle løsninger er funnet.*

Angående vår likning, er $x = 3$ en løsning. For ordens skyld kan vi bekrefte dette med utregningen

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også en løsning av likningen vi startet med!

8.5 Potenslikninger

En likning som kan bli skrevet som

$$x^a = b$$

der a og b er konstanter, er en *potenslikning*.

Likningen har a forskjellige løsninger.

[1] Husk at $2 = \frac{2}{1}$.

Eksempel 1

Løs likningen

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Siden $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$, har vi at

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = -4$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$3x^2 + 1 = 7$$

Svar:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 - 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad x = -\sqrt{2}$$

Merk

Selv om likningen

$$x^a = b$$

har a løsningar, er ikke alle nødvendigvis *reelle*[1]. I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tall som løser likningen. For eksempel har likning,

$$x^3 = 8$$

3 løsninger, men vi nøyer oss med å finne at $x = 2$ er en løsning.

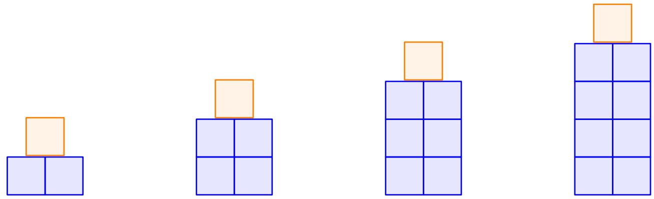
[1] Som vi tidligere har vært inne på, er *reelle* og *imaginære* tall noe vi ikke går nærmere inn på i denne boka

Kapittel 9

Funksjonar

9.1 Introduksjon

Variabler er verdier som forandrar seg. En verdi som forandrar seg i takt med at en variabel forandrar seg, kaller vi en *funksjon*.



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4*

I figurene over forandrer antallet ruter seg etter et bestemt mønster. Matematisk kan vi skildre dette mønsteret slik:

$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } \color{blue}{\textit{1}} \color{black} = 2 \cdot \color{blue}{1} \color{black} + 1 = 3$$
$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } \color{blue}{\textit{2}} \color{black} = 2 \cdot \color{blue}{2} \color{black} + 1 = 5$$
$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } \color{blue}{\textit{3}} \color{black} = 2 \cdot \color{blue}{3} \color{black} + 1 = 7$$
$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } \color{blue}{\textit{4}} \color{black} = 2 \cdot \color{blue}{4} \color{black} + 1 = 9$$

For en figur med et vilkårlig nummer x har vi at

$$\text{Antal ruter i } \textit{Figur } \color{blue}{x} \color{black} = 2\color{blue}{x} \color{black} + 1$$

Antall ruter forandrar seg altså i takt med at x forandrer seg, og da sier vi at

> ”Antall ruter i *Figur* x” er en funksjon av x

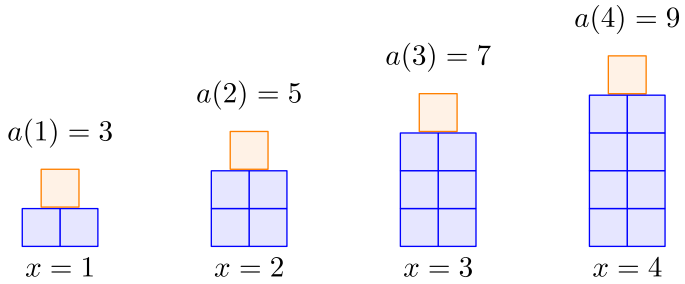
> $2x + 1$ er *funksjonsuttrykket* til funksjonen ”Antall ruter i *Figur* x”

Generelle uttrykk
Skulle vi jobbet videre med funskjonen vi akkurat har sett på, ville det blitt tungvint å heile tiden måtte skrive "Antall ruter i *Figur* x". Det er vanleg å kalle også funksjoner bare for en bokstav, og i tillegg skrive variabelen funskjonen er avhengig av i parentes. La oss nå omdøpe funksjonen "Antal ruter i *Figur* x" til $a(x)$. Da har vi at

$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur } x = a(x) = 2x + 1$$

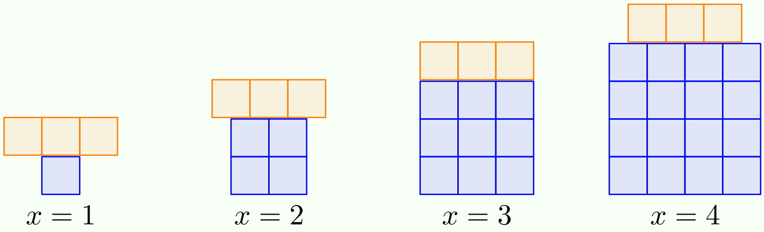
Hvis vi skriver $a(x)$, men erstatter x med et bestemt tall, betyr det at vi skal erstatte x med dette tallet i funksjonsuttrykket vårt:

$$\begin{aligned} a(1) &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a(2) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ a(3) &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a(4) &= 2 \cdot 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$



Eksempel

La antall ruter i mønsteret under være gitt av funksjonen $a(x)$.



a) Finn uttrykket for $a(x)$.

b) Hvor mange ruter er det når $x = 10$?

c) Hva er verdien til x når $a(x) = 628$?

Svar:

a) Vi legger merke til at

- Når $x = 1$, er det $1 \cdot 1 + 3 = 4$ ruter.
- Når $x = 2$, er det $2 \cdot 2 + 3 = 7$ ruter.
- Når $x = 3$, er det $3 \cdot 3 + 3 = 12$ ruter.
- Når $x = 4$, er det $4 \cdot 4 + 3 = 17$ ruter.

Altså er

$$a(x) = x \cdot x + 3 = x^2 + 3$$

b)

$$a(10) = 10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$$

Når $x = 10$, er det 103 ruter.

c) Vi har likningen

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 628 \\ x^2 &= 625 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = 15 \qquad \vee \qquad x = -15$$

Siden vi søker en positiv verdi for x, er $x = 15$.

9.2 Lineære funksjoner og grafer

Når vi har en variabel x og en funksjon $f(x)$, har vi to verdier; verdien til x og den tilhørende verdien til $f(x)$. Disse parene av verdier kan vi sette inn i et koordinatsystem[1], og da får vi *grafen* til $f(x)$.

La oss bruke funksjonen

$$f(x) = 2x - 1$$

som eksempel. Vi har at

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Disse parene av verdiar kan vi sette opp i en tabell:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	3	5

Tabellen over gir punkta

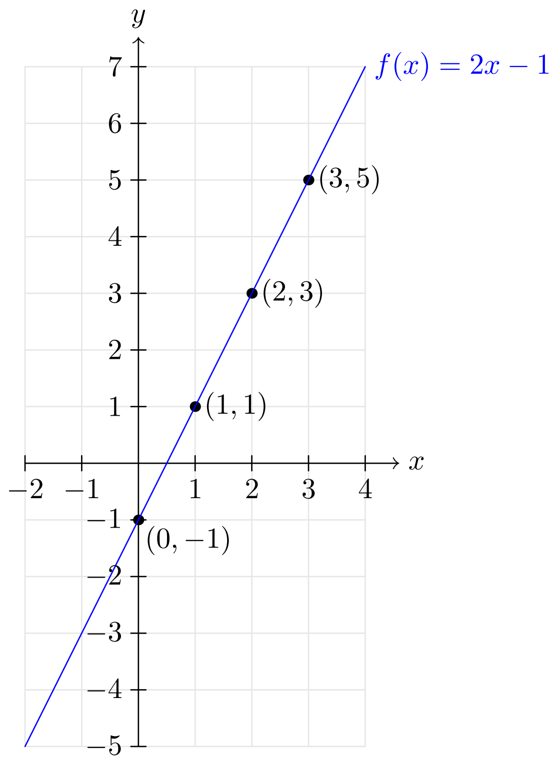
$$(0, -1) \qquad (1, 1) \qquad (2, 3) \qquad (3, 5)$$

Vi plasserer nå punktene i et koordinatsystem (se figur på side 127). I samband med funksjoner er det vanlig å kalle horisontalaksen og vertikalaksen for henholdsvis x-aksen og y-aksen. Grafen til $f(x)$ er nå en tenkt strek som går gjennom alle de uendelig mange punktene vi kan lage av x-verdier og de tilhørende $f(x)$-verdiane. Vår funksjon er en *lineær* funksjon, noe som betyr at grafen er ei rett linje. Altså kan grafen tegnes ved å tegne linja som går gjennom punktene vi har funnet.

Som vi har vært inne på før, kan vi aldri tegne ei hel linje, bare et utklipp av henne. Dette gjelder som regel også for grafer. I figuren på side 127 har vi tegnet grafen til $f(x)$ for x-verdiar mellom -2 og 4. At x er i dette *intervallet* kan vi skrive som[2] $-2 \leq x \leq 4$ eller $x \in [-2, 4]$.

[1] Se *seksjon 1.3*.

[2] Se symbolforklaringer på side 4.


y
x
$f(x) = 2x - 1$
$(3, 5)$
$(2, 3)$
$(1, 1)$
$(0, -1)$
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−2
−1
1
2
3
4

9.1 Lineære funksjoner

En funksjon på formen

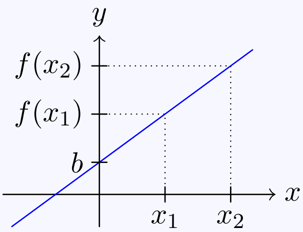
$$f(x) = ax + b$$

der a og b er konstanter, er en *lineær* funksjon med *stigningstall* a og *konstantledd* b.

Grafen til en lineær funksjon er ei rett linje som går gjennom punktet $(0, b)$.

For to forskjellige x-verdier, x_1 og x_2, er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Eksempel 1

Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonene.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = -3 + \frac{7}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$j(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

Svar:

- $f(x)$ har stigningstall 2 og konstantledd 1.
- $g(x)$ har stigningstall -3 og konstantledd $\frac{7}{2}$.
- $h(x)$ har stigningstall $\frac{1}{4}$ og konstantledd $-\frac{5}{6}$.
- $j(x)$ har stigningstall $-\frac{1}{2}$ og konstantledd 4.

Eksempel 2

Tegn grafen til

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

for $x \in [-5, 6]$.

Svar:

For å tegne grafen til en lineær funksjon trenger vi bare å finne to punkt som ligger på grafen. Hvilke to punkt dette er, er det fritt å velge, så for enklest mulig utregning starter vi med å finne punktet der $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$$

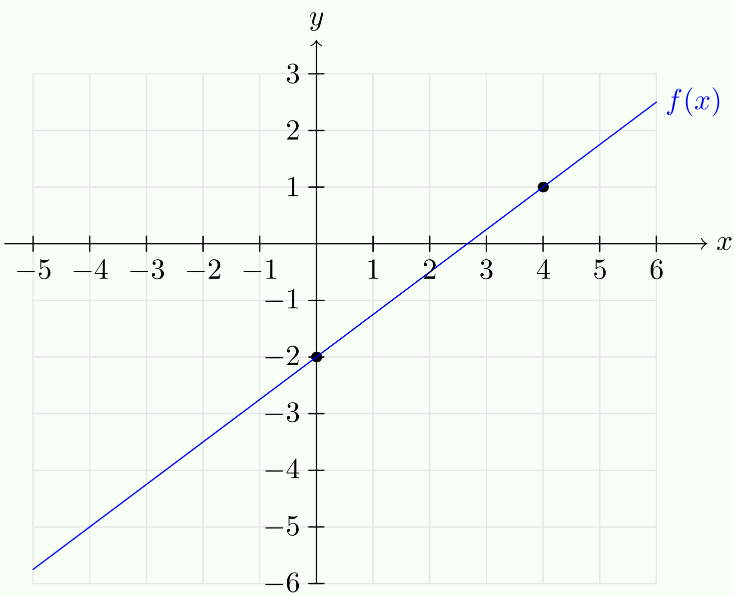
Videre velger vi $x = 4$, siden dette også gir oss en enkel utregning:

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$$

Nå har vi informasjonen vi trenger, og for ordens skyld setter vi den inn i en tabell:

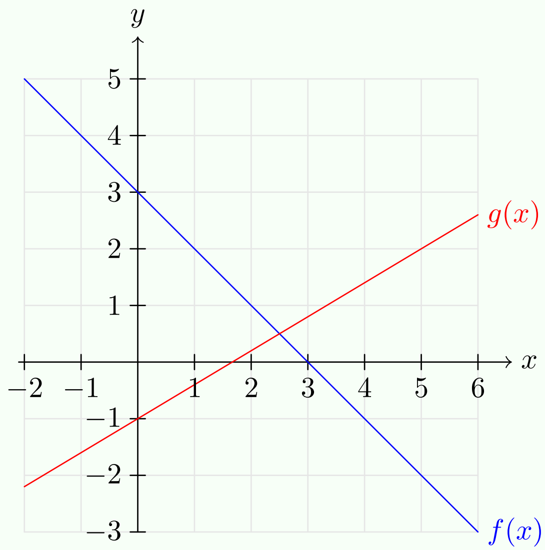
x	0	4
$f(x)$	-2	1

Vi tegner punktene og trekker ei linje gjennom dem:



Eksempel 3

Finn funksjonsuttrykka til $f(x)$ og $g(x)$.



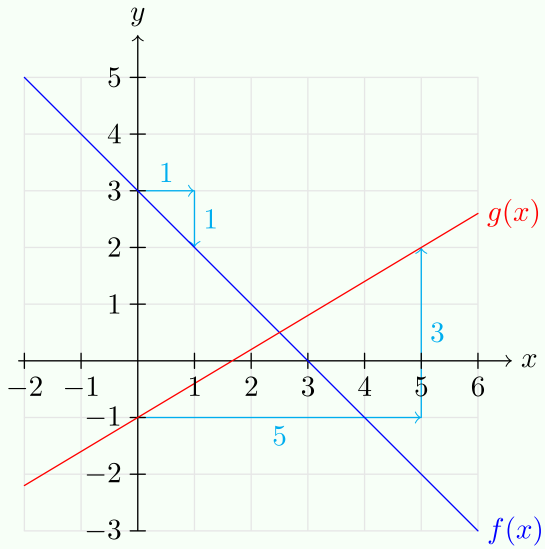
Svar:

Vi starter med å finne funksjonsuttrykket til $f(x)$. Punktet $(0, 3)$ ligger på grafen til $f(x)$ (se også figur på neste side). Da vet vi at $f(0) = 3$, og dette må bety at 3 er konstantleddet til $f(x)$. Videre ser vi at punktet $(1, 2)$ også ligger på grafen til $f(x)$. Stigningstallet til $f(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2-3}{1-0} = -1$$

Altså er

$$f(x) = -x + 3$$



Vi går så over til å finne uttrykket til $g(x)$. Punktet $(0, -1)$ ligger på grafen til $g(x)$. Da vet vi at $f(0) = -1$, og dette må bety at -1 er konstantleddet til $g(x)$. Videre ser vi at punktet $(5, 2)$ også ligger på grafen til $g(x)$. Stigningstallet til $g(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2-(-1)}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Altså er

$$g(x) = \frac{3}{5}x + 1$$

9.1 Lineære funksjoner (forklaring)

Uttrykk for *a*

Gitt en lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

For to forskjellige x-verdier, x_1 og x_2, har vi at

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{9.16}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b \tag{9.17}$$

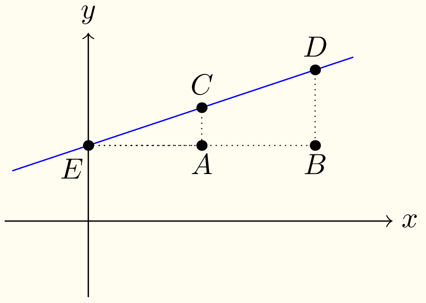
Vi trekker (9.2) fra (9.17), og får at

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$
$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \tag{9.18}$$

Grafen til en lineær funksjon er ei rett linje

Gitt en lineær funksjon $f(x) = ax + b$ og to forskjellige x-verdiar x_1 og x_2. Vi setter $A = (x_1, b)$, $B = (x_2, b)$, $C = (b, f(x_1))$, $D = (0, f(x_2))$ og $E = (0, b)$.



Av (9.18) har vi at

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = a$$

$$\frac{ax_1 + b - b}{x_1} = a$$

$$\frac{ax_1}{x_1} = a \tag{9.19}$$

Tilsvarende er
$$\frac{ax_2}{x_2} = a \tag{9.20}$$
Videre har vi at
$$AC = f(x_1) - b = ax_1$$
$$BD = f(x_2) - b = ax_2$$
$$EA = x_1$$
$$EB = x_2$$
Av (9.19) og (9.20) har vi at
$$\frac{ax_1}{x_1} = \frac{ax_2}{x_2}$$
Dette betyr at
$$\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB}$$
I tillegg er $\angle A = \angle B$, altså oppfyller $\triangle EAC$ og $\triangle EBD$ vilkår iii fra *Regel 10.12*, og dermed er trekantane formlike. Dette betyr at C og D ligger på linje, og denne linja må vere grafen til $f(x)$.

Kapittel 10

Geometri

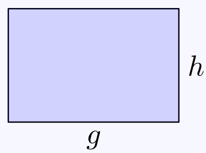
10.1 Formler for areal og omkrets

En *formel* er en likning der en variabel (som oftest) står alene på én side av likhetstegnet. I *seksjon 6.4* har vi allerede sett på formler for arealet til rektangel og trekantar, men der brukte vi ord i steden for symboler. Her skal vi gjengi desse to formlene i en mer algebraisk form, etterfulgt av andre klassiske formler for areal og omkrets.

10.1 Arealet til et rektangel (6.4)

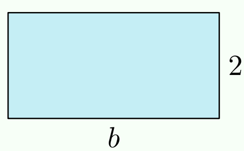
Arealet A til et rektangel med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet.



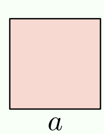
Svar:

Arealet A til rektangelet er

$$A = b \cdot 2 = 2b$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar:

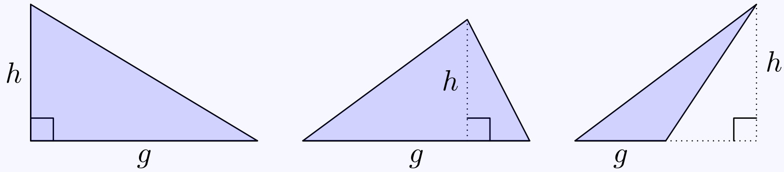
Arealet A til kvadratet er

$$A = a \cdot a = a^2$$

10.2 Arealet til en trekant (6.4)

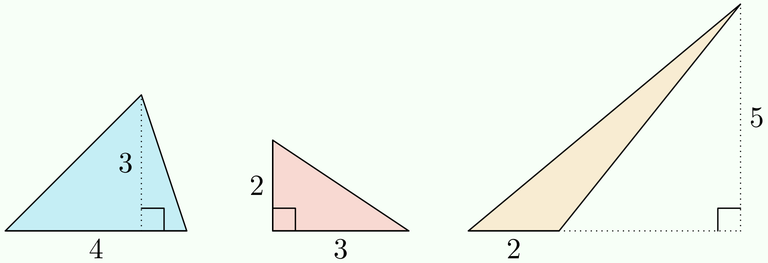
Arealet A til en trekant med grunnlinje g og høyde h er

$$A = \frac{gh}{2}$$



Eksempel

Hvilken av trekantane har størst areal?



Svar:

Vi lar A_1, A_2 og A_3 være arealene til henholdsvis trekanten til venstre, i midten og til høyre. Da har vi at

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

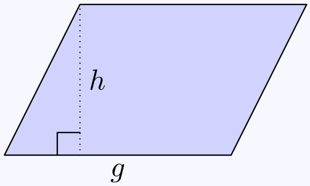
$$A_3 = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Altså er det trekanten til venstre som har størst areal.

10.3 Arealet til et parallellogram

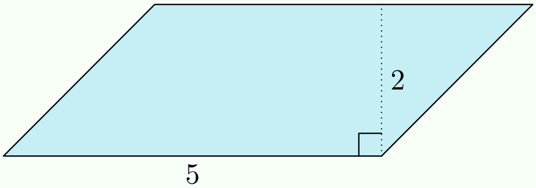
Arealet A til eit parallellogram med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel

Finn arealet til parallellogrammet



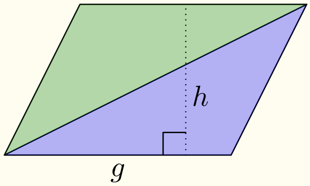
Svar:

Arealet A til parallellogrammet er

$$A = 5 \cdot 2 = 10$$

10.3 Arealet til et parallellogram (forklaring)

Av et parallellogram kan vi alltid lage oss to trekantar ved å tegne inn en av diagonalene:



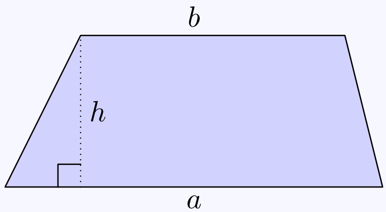
De fargede trekantene på figuren over har begge grunnlinje g og høgde h. Da vet vi at begge har areal lik $\frac{gh}{2}$. Arealet A til parallelogrammet blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2} \\ &= g \cdot h \end{aligned}$$

10.4 Arealet til et trapes

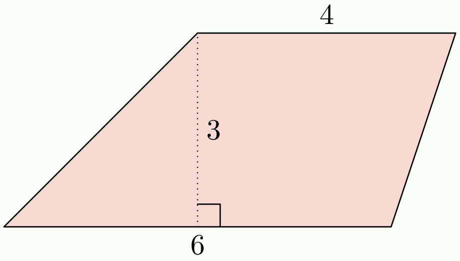
Arealet A til et trapes med parallelle sider a og b og høgde h er

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Eksempel

Finn arealet til trapeset.



Svar:

Arealet A til trapeset er

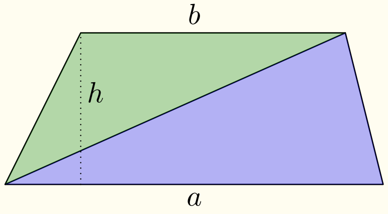
$$\begin{aligned} A &= \frac{3(6+4)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Merk

Når man tar utgangspunkt i ei grunnlinje og ei høgde, er arealformlene for et parallellogram og et rektangel identiske. Å anvende *Regel 10.4* på et parallellogram vil også resultere i et uttrykk tilsvarande gh. Dette er fordi et parallellogram bare er et spesialtilfelle av et trapes (og et rektangel er bare et spesialtilfelle av et parallellogram).

10.4 Arealet til et trapes (forklaring)

Også for et trapes får vi to trekanter viss vi tegner en av diagonalene:



I figuren over er

$$\text{Arealet til den blå trekantet} = \frac{ah}{2}$$

$$\text{Arealet til den grønne trekanten} = \frac{bh}{2}$$

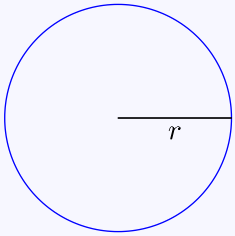
Arealet A til trapeset blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \\ &= \frac{h(a+b)}{2} \end{aligned}$$

10.5 Omkretsen til en sirkel (og π)

Omkretsen O til en sirkel med radius r er

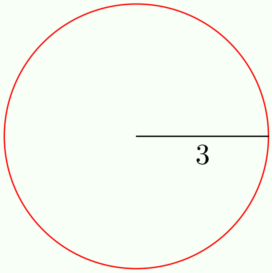
$$O = 2\pi r$$



$\pi = 3.141592653589793....$

Eksempel 1

Finn omkretsen til sirkelen.



Svar:

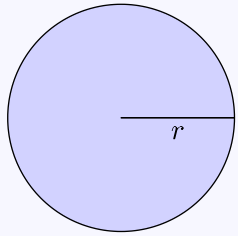
Omkretsen O er

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \cdot 3 \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

10.6 Arealet til en sirkel

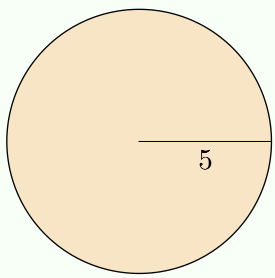
Arealet A til en sirkel med radius r er

$$A = \pi r^2$$



Eksempel

Finn arealet til sirkelen.



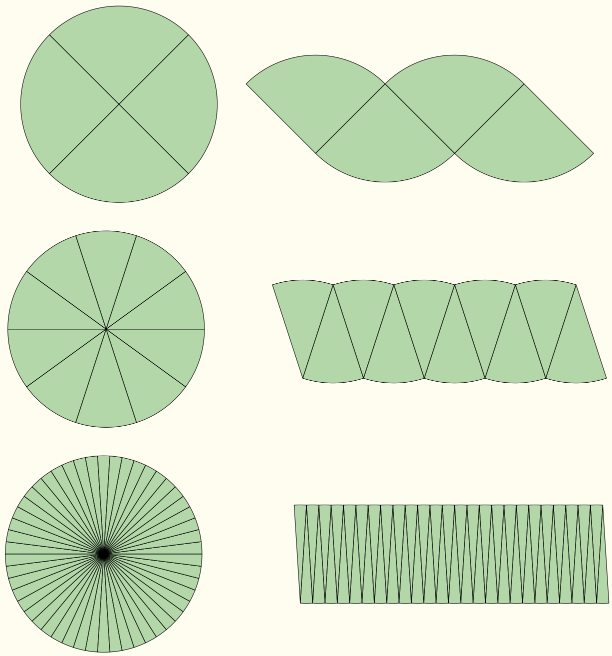
Svar:

Arealet A til sirkelen er

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

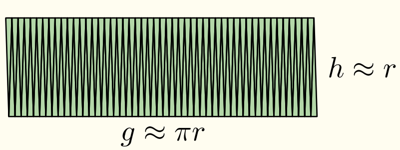
10.6 Arealet til en sirkel (forklaring)

I figuren under har vi delt opp en sirkel i 4, 10 og 50 (like store) sektorer, og lagt disse bitene etter hverandre.



I hvert tilfelle må de små sirkelbuene til sammen utgjøre hele buen, altså omkretsen, til sirkelen. Hvis sirkelen har radius r, betyr dette at summen av buene er $2\pi r$. Og når vi har like mange sektorer med buen vendt opp som sektorer med buen vendt ned, må totallengden av buene være πr både oppe og nede.

Men jo flere sektorer vi deler sirkelen inn i, jo mer ligner sammensetningen av dem på et rektangel (i figuren under har vi 100 sektorer). Grunnlinja g til dette "rektangelet" vil være tilnærmet lik πr, mens høgda vil være tilnærmet lik r.



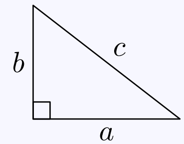
Arealet A til "rektangelet", altså sirkelen, blir da

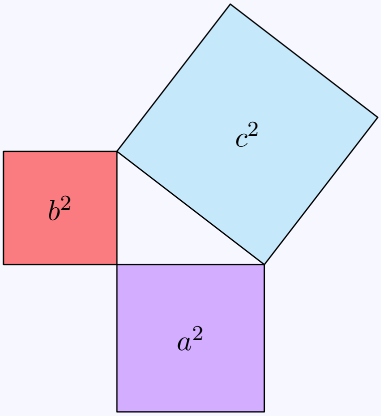
$$A \approx gh \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$$

10.7 Pytagoras' setning

I en rettvinklet trekant er arealet til kvadratet dannet av hypotenusen lik summen av arealene til kvadratene dannet av katetene.

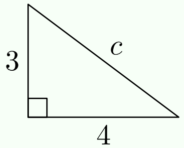
$$a^2 + b^2 = c^2$$





Eksempel 1

Finn lengden til c.



Svar:

Vi vet at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

der a og b er lengdene til de korteste sidene i trekanten. Dermed er

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

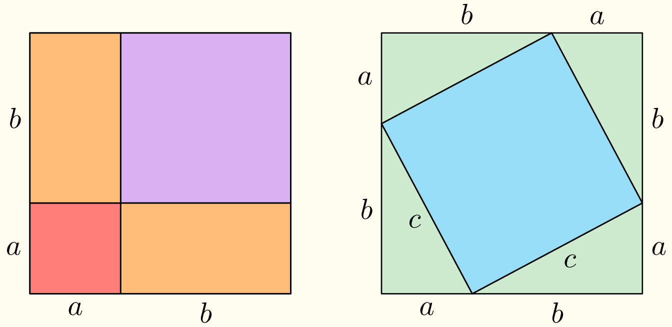
Altså har vi at

$$c = 5 \qquad \vee \qquad c = -5$$

Da c er en lengde, er $c = 5$.

10.7 Pytagoras' setning (forklaring)

Under har vi tegnet to kvadrat som er like store, men som er inndelt i forskjellige former.

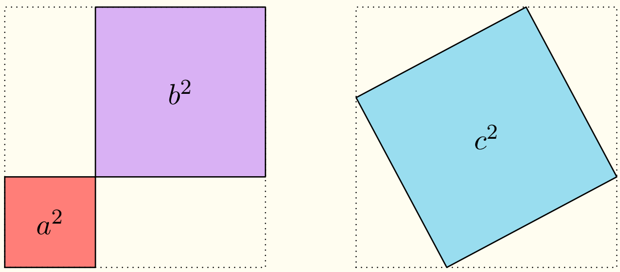


Vi observerer nå følgende:

1. Arealet til det røde kvadratet er a^2, arealet til det lilla kvadratet er b^2 og arealet til det blå kvadratet er c^2.

2. Arealet til et oransje rektangel er ab og arealet til en grønn trekant er $\frac{ab}{2}$.

3. Om vi tar bort de to oransje rektanglene og de fire grønne trekantane, er det igjen (av pkt. 2) et like stort areal til venstre som til høyre.



Dette betyr at

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{10.1}$$

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c, der c er den lengste sidelengden. Så lenge trekanten er rettvinklet, kan vi alltid lage to kvadrat med sidelengder $a + b$, slik som i første figur. (10.1) gjelder dermed for alle rettvinklede trekanter.

10.2 Kongruente og formlike trekanter

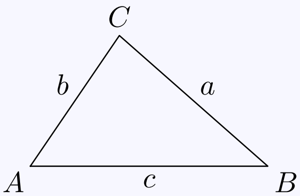
10.8 Konstruksjon av trekanter

En trekant $\triangle ABC$, som vist i figuren under, kan bli unikt konstruert hvis en av følgende kriterium er oppfylt:

i) c, $\angle A$ og $\angle B$ er kjente.

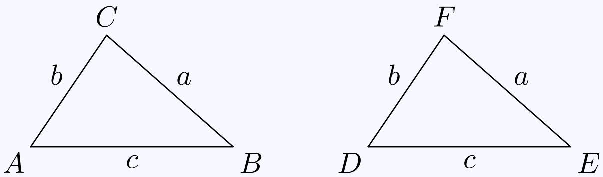
ii) a, b og c er kjente.

iii) b, c og $\angle A$ er kjente.



10.9 Kongruente trekanter

To trekanter som har samme form og størrelse er kongruente.

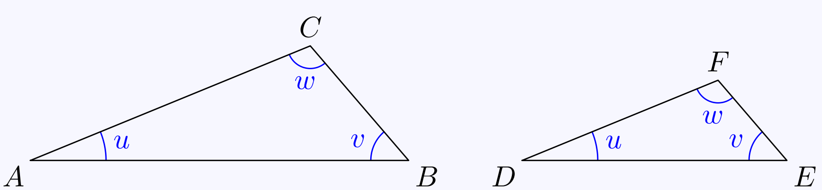


At trekantane i figuren over er kongruente skrives

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

10.10 Formlike trekantar

Formlike trekanter har tre vinkler som er parvis like store.

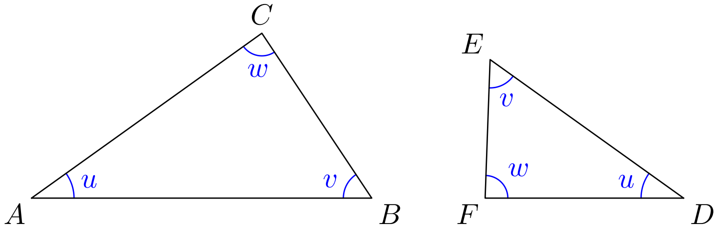


At trekantane i figuren over er formlike skrives

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Samsvarende sider

Når vi studerer formlike trekantar er *samsvarende sider* et viktig begrep. Samsvarende sider er sider som i formlike trekantar står *motstående* den samme vinkelen.



For de formlike trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ har vi at

I $\triangle ABC$ er

- BC motstående til u.
- AC motstående til v
- AB motstående til w.

I $\triangle DEF$ er

- FE motstående til u.
- FD motstående til v
- ED motstående til w.

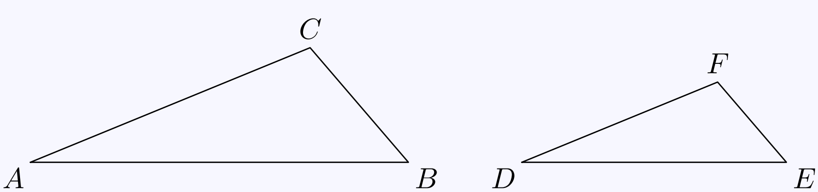
Dette betyr at disse er samsvarende sider:

- BC og FE
- AC og FD
- AB og ED

10.11 Forhold i formlike trekanter

Når to trekantar er formlike, er forholdet mellom samsvarende[1] sider det samme.

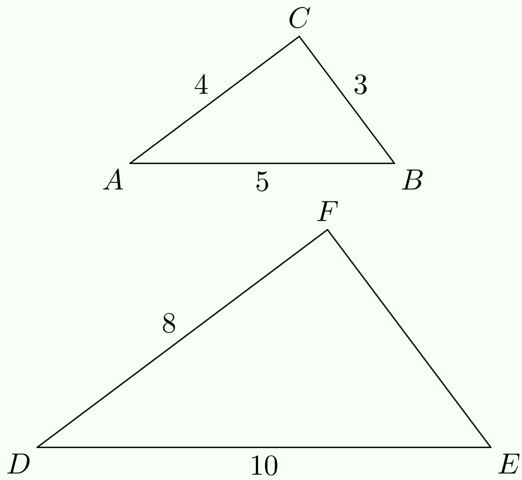
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



[1] Vi tar det her for gitt at hvilke sider som er samsvarande kommer fram av figuren.

Eksempel

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengden til EF.



Svar:

Vi observerer at AB samsvarer med DE, BC med EF og AC med DF. Det betyr at

$$\begin{aligned} \frac{DE}{AB} &= \frac{EF}{BC} \\ \frac{10}{5} &= \frac{EF}{3} \\ 2 \cdot 3 &= \frac{EF}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \\ 6 &= EF \end{aligned}$$

Merk

Av *Regel 10.11* har vi at for to formlike trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

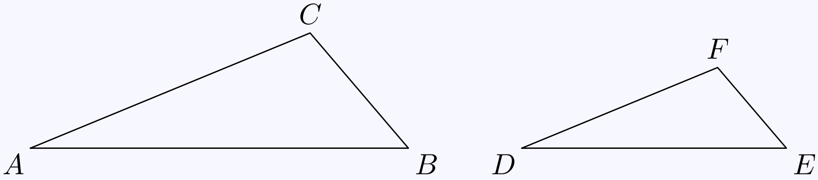
10.12 Vilkår i formlike trekanter

To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike hvis en av disse vilkårene er oppfylt:

i) To vinkler i trekantane er parvis like store.

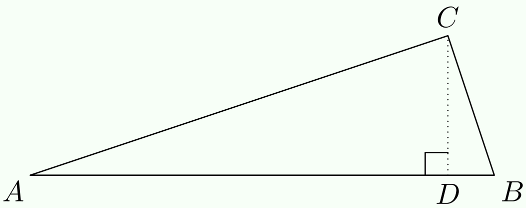
ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

iii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ og $\angle A = \angle D$.



Eksempel 1

$\angle ACB = 90°$. Vis at $\triangle ABC \sim ACD$.



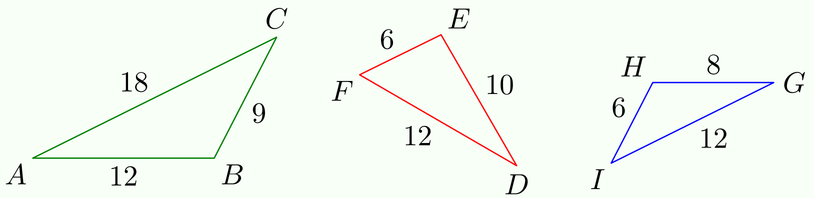
Svar:

$\triangle ABC$ og $\triangle ACD$ er begge rettvinklede og de har $\angle DAC$ felles. Dermed er vilkår *i* fra *Regel 10.12* oppfylt, og trekantene er da formlike.

Merk: På en tilsvarende måte kan det vises at $\triangle ABC \sim CBD$.

Eksempel 2

Undersøk om trekantane er formlike.



Svar:

Vi har at

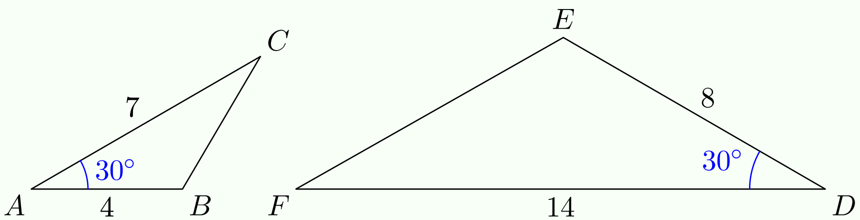
$$\frac{AC}{FD}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{BC}{FE}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{AB}{DE}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{AC}{IG}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{BC}{IH}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\quad,\quad\frac{AC}{IG}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

Dermed oppfyller $\triangle ABC$ og $\triangle GHI$ vilkår *ii* fra *Regel 10.12*, og trekantene er da formlike.

Eksempel 3

Undersøk om trekantane er formlike.



Svar:

Vi har at $\angle BAC = \angle EDF$ og at

$$\frac{ED}{AB}=\frac{8}{4}=2\quad,\quad\frac{FD}{AC}=\frac{14}{7}=2$$

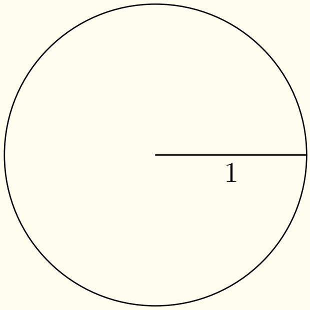
Altså er vilkår *iii* fra *Regel 10.12* oppfylt, og da er trekantene formlike.

10.3 Forklaringar

10.5 Omkretsen til en sirkel (og π) (forklaring)

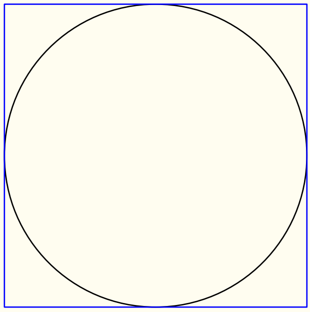
Vi skal her bruke regulære mangekanter langs veien til ønsket resultat. I regulære mangekanter har alle sidene lik lengde. Da det er utelukkande regulære mangekanter vi kommer til å bruke, vil de bli omtalt bare som mangekanter.

Vi skal starte med se på tilnærminger for å finne omkretsen O_1 av en sirkel med radius 1.



Øvre og nedre grense

En god vane når man skal prøve å finne en størrelse, er å spørre seg om man kan vite noe om hvor stor eller liten man *forventer* at den er. Vi starter derfor med å omslutte sirkelen med et kvadrat med sidelengder 2:

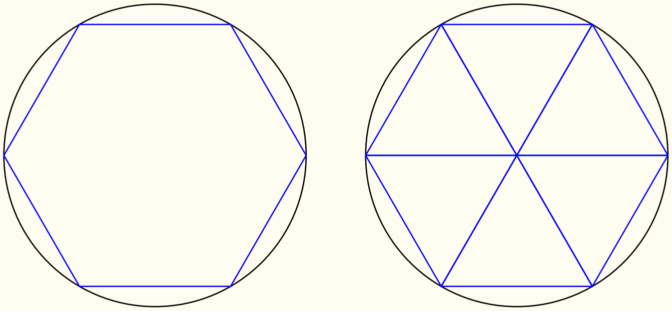


Omkretsen til sirkelen må vere mindre enn omkretsen til kvadratet, derfor vet vi at

$$\begin{aligned} O_1 &< 2 \cdot 4 \\ &< 8 \end{aligned}$$

Videre innskriver vi en sekskant. Sekskanten kan deles inn i 6 likesidede trekantar som alle må ha sidelengder 1. Omkretsen til sirkelen må være større enn omkretsen til sekskanten, noe som gir at

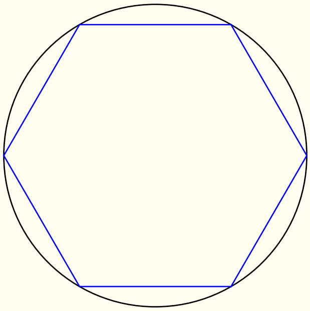
$$\begin{aligned} O_1 &> 6 \cdot 1 \\ &> 6 \end{aligned}$$



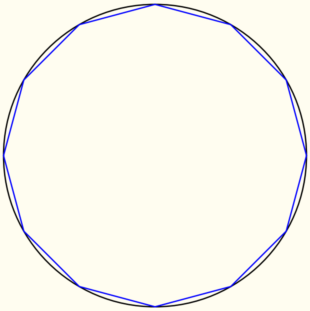
Når vi nå skal gå over til en mye mer nøyaktig jakt etter omkretsen, vet vi altså at vi søker en verdi mellom 6 og 8.

Stadig bedre tilnærminger

Vi fortsetter med tanken om å innskrive en mangekant.
Av figurane under lar vi oss overbevise om at dess flere sider mangekanten har, dess bedre estimat vil omkretsen til mangekanten være for omkretsen til sirkelen.

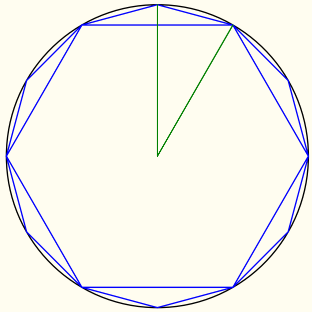


(a) 6-kant

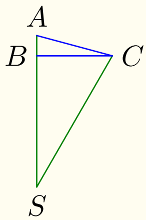


(b) 12-kant

Da vi vet at sidelengden til en 6-kant er 1, er det fristende å undersøke om vi kan bruke denne kunnskapen til å finne sidelengden til andre mangekanter. Om vi innskriver også en 12-kant i sirkelen vår (og i tillegg tegner en trekant) får vi en figur som denne:



(a) En 6-kant og en 12-kant i lag med en trekant dannet av sentrum i sirkelen og en av sidene i 12-kanten.



(b) Utklipp av trekant fra figur *(a)*.

La oss kalle sidelengden til 12-kanten for s_{12} og sidelengden til 6-kanten for s_6. Videre legger vi merke til at punktene A og C ligger på sirkelbuen og at både $\triangle ABC$ og $\triangle BSC$ er rettvinklede trekantar (forklar for deg selv hvorfor!). Vi har at

$$\begin{aligned}
SC &= 1 \\
BC &= \frac{s_6}{2} \\
SB &= \sqrt{SC^2 - BC^2} \\
BA &= 1 - SB \\
AC &= s_{12} \\
s_{12}^2 &= BA^2 + BC^2
\end{aligned}$$

For å finne s_{12} må vi finne BA, og for å finne BA må vi finne SB. Vi starter derfor med å finne SB. Da $SC = 1$ og $BC = \frac{s_6}{2}$, er

$$\begin{aligned}
SB &= \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}}
\end{aligned}$$

Vi går så videre til å finne s_{12}:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= (1 - SB)^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 \\
&= 1^2 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4}
\end{aligned}$$

Ved første øyekast ser det ut som vi ikke kan komme særlig lengre i å forenkle uttrykket på høyre side, men en liten operasjon vil endre på dette. Hadde vi bare hatt -1 som et ledd kunne vi slått saman -1 og $\frac{s_6^2}{4}$ til å bli $-SB^2$. Derfor "skaffer" vi oss -1 ved å både addere og subtrahere 1 på høgresiden:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= 1 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4} - 1 + 1 \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - \left(1 - \frac{s_6^2}{4}\right) \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - SB^2 \\
&= 2 - 2SB \\
&= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4}\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4 - s_6^2}
\end{aligned}$$

Altså er

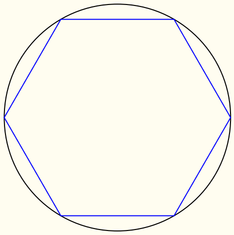
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

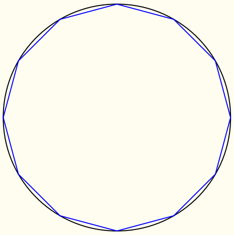
Selv om vi her har utledet relasjonen mellom sidelengdene s_{12} og s_6, er dette en relasjon vi kunne vist for alle par av sidelengder der den ene er sidelengden til en mangekant med dobbelt så mange sider som den andre. La s_n og s_{2n} respektivt være sidelengden til en mangekant og en mangekant med dobbelt så mange sider. Da er

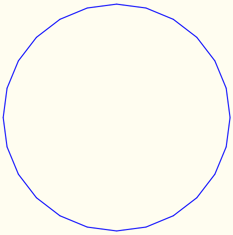
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \tag{10.2}$$

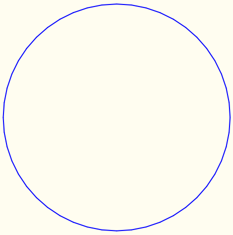
Når vi kjenner sidelengden til en innskrevet mangekant, vil tilnærmingen til omkretsen til sirkelen være denne sidelengden ganget med antall sidelengder i mangekanten. Ved hjelp av (10.2) kan vi stadig finne sidelengden til en mangekant med dobbelt så mange sider som den forrige, og i tabellen under har vi funnet sidelengden og tilnærmingen til omkretsen til sirkelen opp til en 96-kant:

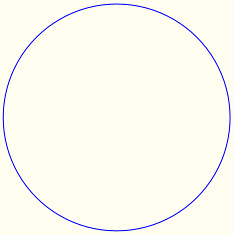
Formel for sidelengde	*Sidelengde*	*Tilnærming for omkrets*
	$s_6 = 1$	$6 \cdot s_6 \ = 6$
$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$	$s_{12} = 0.517...$	$12 \cdot s_{12} = 6.211...$
$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$	$s_{24} = 0.261...$	$24 \cdot s_{24} = 6.265...$
$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$	$s_{48} = 0.130...$	$48 \cdot s_{48} = 6.278...$
$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$	$s_{96} = 0.065...$	$96 \cdot s_{96} = 6.282...$


(a) 6-kant


(b) 12-kant


(c) 24-kant


(d) 48-kant


(e) 96-kant

Utregningene over er faktisk like langt som matematikeren Arkimedes kom allerede ca 250 f. kr!

For en datamaskin er det ingen problem å regne ut[1] dette for en mangekant med ekstremt mange sider. Regner vi oss fram til en 201 326 592-kant finner vi at

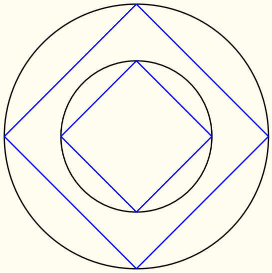
$$\text{Omkrins av sirkel med radius } 1 = 6.283185307179586...$$

(Ved hjelp av mer avansert matematikk kan det vises at omkretsen til en sirkel med radius 1 er et irrasjonalt tal, men at alle desimalane vist over er korrekte, derav likhetstegnet.)

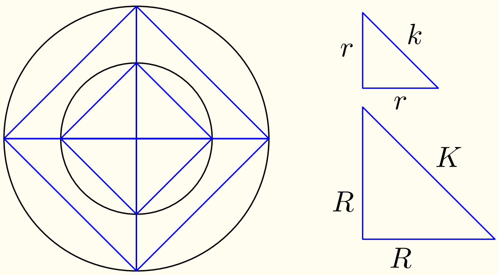
Den endelige formelen og π

Vi skal nå komme fram til den kjente formelen for omkretsen til en sirkel. Også her skal vi ta for gitt at summen av sidelengdene til en innskrevet mangekant er en tilnærming til omkrinsen som blir bedre og bedre dess flere sidelengder det er.

For enkelhets skyld skal vi bruke innskrevne firkantar for å få fram poenget vårt. Vi tegner to sirkler som er vilkårleg store, men der den ene er større enn den andre, og innskriver en firkant (eit kvadrat) i begge. Vi lar R og r være radien til henholdsvis den største og den minste sirkelen, og K og k vere sidelengden til henholdsvis den største og den minste firkanten.



Begge firkantene kan deles inn i fire likebeinte trekanter:



Da trekantane er formlike, har vi at

$$\frac{K}{R} = \frac{k}{r} \tag{10.3}$$

Vi lar $\tilde{O} = 4K$ og $\tilde{o} = 4k$ være tilnærmingen av omkretsen til henholdsvis den største og den minste sirkelen. Ved å gange med 4 på begge sider av (10.3) får vi at

$$\frac{4A}{R} = \frac{4a}{r}$$

$$\frac{\tilde{O}}{R} = \frac{\tilde{o}}{r} \tag{10.4}$$

Og nå merker vi oss dette:

Selv om vi i hver av de to sirklene innskriver en mangekant med 4, 100 eller hvor mange sider det skulle vere, vil mangekantane alltid kunne deles inn i trekantar som oppfyller (10.3)*. Og på samme måte som vi har gjort i eksempelet over kan vi omskrive* (10.3) *til* (10.4) *i stedet.*

La oss derfor tenke oss mangekanter med så mange sider at vi godtar omkretsene deres som lik omkretsene til sirklene. Om vi da skriver omkretsen den største og den minste sirkelen henholdsvis O og o, får vi at

$$\frac{O}{R} = \frac{o}{r}$$

Da de to sirklene våre er helt vilkårlig valgt, har vi nå kommet fram til at *alle sirkler har det samme forholdet mellom omkretsen og radiusen.* En enda vanligere formulering er at *alle sirkler har det samme forholdet mellom omkretsen og diameteren.* Vi lar D og d være diameteren til henholdsvis sirkelen med radius R og r. Da har vi at

$$\frac{O}{2R} = \frac{o}{2r}$$

$$\frac{O}{D} = \frac{o}{d}$$

Forholdstalet mellom omkretsen og diameteren i en sirkel blir kalt π (uttales ”pi”):

$$\frac{O}{D} = \pi$$

Likningen over fører oss til formelen for omkretsen til en sirkel:

$$\begin{aligned} O &= \pi D \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

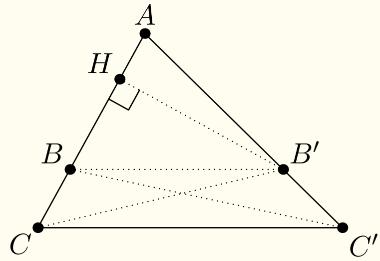
Tidligere fant vi at omkretsen til en sirkel med radius 1 (og diameter 2) er 6.283185307179586... . Dette betyr at

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{6.283185307179586...}{2} \\ &= 3.141592653589793... \end{aligned}$$

[1]For den datainteresserte skal det sies at iterasjonsalgoritmen må skrives om for å unngå instabiliteter i utregningene når antall sider blir mange.

10.11 Forhold i formlike trekanter (forklaring)

I figuren under er $BB'||CC'$. Arealet til en trekant $\triangle ABC$ skriver vi her som ABC.



Med BB' som grunnlinje har både $\triangle CBB'$ og $\triangle CBB'$ HB' som høyde, derfor er

$$CBB' = C'BB' \tag{10.5}$$

Videre har vi at

$$ABB' = AB \cdot HB'$$

$$CBB' = BC \cdot HB'$$

Altså er

$$\frac{ABB'}{CBB'} = \frac{AB}{BC} \tag{10.6}$$

På lignende vis er

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{10.7}$$

Av (10.5), (10.6) og (10.7) følger det at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'}\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{10.8}$$

For de formlike trekantene $\triangle ACC'$ og $\triangle ABB'$ er

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{AB+BC}{AB} \\ &= 1 + \frac{BC}{AB}\end{aligned}$$

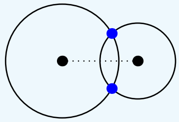
$$\begin{aligned}\frac{AC'}{AB'} &= \frac{AB'+B'C'}{AB'} \\ &= 1 + \frac{B'C'}{AB'}\end{aligned}$$

Av (10.8) er dermed forholdet mellom de samsvarande sidene like.

Merk

I de kommnde forklaringene av vilkårene *ii* og *iii* fra *Regel 10.8* tar man utgangspunkt i følgende:

- To sirkler skjærer kvarandre i maksimalt to punkt.
- Gitt at et koordinatsystem blir plassert med origo i senteret til den ene sirkelen, og slik at horisontalaksen går gjennom begge sirkelsentrene. Viss (a, b) er det ene skjæringspunktet, er $(a, -b)$ det andre skjæringspunktet.

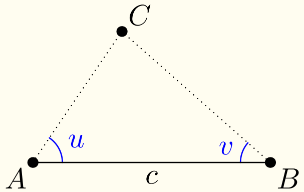


Punktene over kan enkelt vises, men er såpass intuitivt sanne at vi tar dem for gitt. Punktene forteller oss at trekanten som består av de to sentrene og det ene skjæringspunktet er kongruent med trekanten som består av de to sentrene og det andre skjæringspunktet. Med dette kan vi studere egenskaper til trekanter ved hjelp av halvsirkler.

10.8 Konstruksjon av trekanter (forklaring)

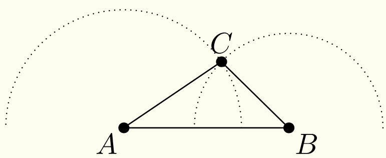
Vilkår i

Gitt en lengde c og to vinkler u og v. Vi lager et linjestykke AB med lengde c. Så stipler vi to vinkelbein slik at $\angle A = u$ og $B = v$. Så lenge disse vinkelbeina ikke er parallelle, må de nødvendigvis skjære hverandre i ett, og bare ett, punkt (C i figuren). I lag med A og B vil dette punktet danne en trekant som er unikt gitt av c, u og v.



Vilkår ii

Gitt tre lengder a, b og c. Vi lager et linjestykket AB med lengde c. Så lager vi to halvsirkler med henholdsvis radius a og b og sentrum B og A. Skal nå en trekant $\triangle ABC$ ha sidelengder a, b og c, må C ligge på begge sirkelbuene. Da buene bare kan møtes i ett punkt, er formen og størrelsen til $\triangle ABC$ unikt gitt av a, b og c.

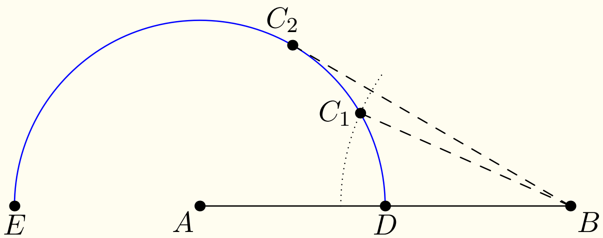


Vilkår iii

Gitt to lengder b og c og en vinkel u. Vi starter med følgende:

1. Vi lager et linjestykke AB med lengde c.
2. I A tegner vi en halvsirkel med radius b.

Ved å la C vere plassert hvor som helst på denne sirkelbuen, har vi alle mulige varianter av en trekant $\triangle ABC$ med sidelengdene $AB = c$ og $AC = b$. Å plassere C langs bogen til halvsirkelen er det samme som å gi $\angle A$ en bestemt verdi. Det gjenstår nå å vise at hver plassering av C gir en unik lengde av BC.



Vi lar C_1 og C_2 være to potensielle plasseringer av C, der C_2, langs halvsirkelen, ligger nærmere E enn C_1. Videre stipler vi en sirkelbue med radius BC_1 og sentrum i B. Da den stiplede sirkelbuen og halvsirkelen bare kan skjære hverandre i C_1, vil alle andre punkt på halvsirkelen ligge enten innenfor eller utenfor den stiplede sirkelbuen. Slik vi har definert C_2, må dette punktet ligge utenfor den stiplede sirkelbuen, og dermed er BC_2 lengre enn BC_1. Av dette kan vi konkludere med at BC blir lengre dess nærmere C beveger seg mot E langs halvsirkelen. Å sette $\angle A = u$ vil altså gi en unik verdi for BC, og da en unik trekant $\triangle ABC$ der $AC = b$, $c = AB$ og $\angle BAC = u$.

10.12 Vilkår i formlike trekanter (forklaring)

Vilkår i

Gitt to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$. Av *Regel 6.3* har vi at

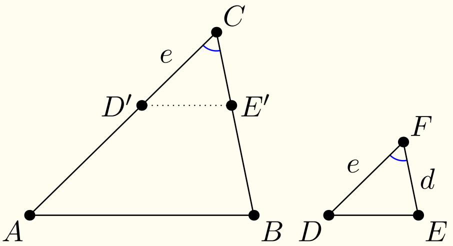
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

Hvis $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$, følger det at $\angle C = \angle E$.

Vilkår ii

Vi tar utgangspunkt i trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad , \quad \angle C = \angle F \tag{10.9}$$



Vi setter $a = BC$, $b = AC$, $d = EF$ og $e = DF$. Vi plasserer D' og E' på henholdsvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $AB \parallel D'E'$. Da er $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$, altså har vi at

$$\frac{E'C}{BC} = \frac{D'C}{AC}$$

$$E'C = \frac{ae}{b}$$

Av (10.9) har vi at

$$EF = \frac{ae}{b}$$

Altså er $E'C = EF$. Nå har vi av vilkår *ii* fra *Regel 10.9* at $\triangle D'E'C \cong \triangle DEF$. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Vilkår iii

Vi tar utgangspunkt i to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \tag{10.10}$$

Vi plasserer D' og E' på henholdsvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $E'C = d$. Av vilkår i fra *Regel 10.12* har vi da at $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$. Altså er

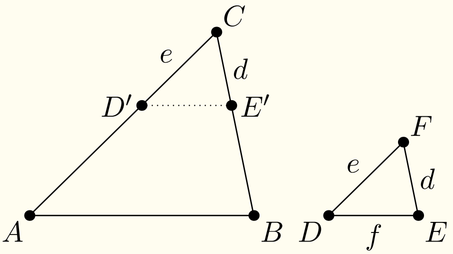
$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{D'C}{AC}$$

$$D'E' = \frac{ae}{c}$$

Av (10.10) har vi at

$$f = \frac{ae}{c}$$

Altså har $\triangle D'E'C$ og $\triangle DEF$ parvis like sidelengder, og av vilkår i fra *Regel 10.9* er de da kongruente. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Kommentar (for den spesielt interesserte)

Også i geometri har vi aksiom (se kommentar på side 106) som legger grunnlaget for det matematiske systemet vi skaper, men den aksiomatiske oppbyggingen av geometri er mye mer omstendelig og uoversiktlig enn den vi har innenfor regning. I tillegg er noen teorem innenfor geometri så intuitivt sanne, at det i ei bok som dette ville blitt mer forvirrende enn oppklarende å skulle forklart alt i detalj.

Det som likevel bør nevnes, er at vi i *Regel 10.8* opplyser om tre vilkår for å unikt konstruere en trekant, og i *Regel 10.9* gir et vilkår for kongruens. I mer avanserte geometritekster vil man helst finne igjen innholdet i disse to reglane som aksiom og teorem for kongruens:

Kongruens

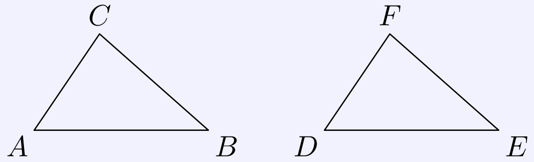
To trekanterr $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente hvis en av disse vilkårene er oppfylt:

i) $AB = DE$, $BC = EF$ og $\angle A = \angle D$.

ii) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $AB = DE$.

iii) $AB = DE$, $BC = EF$ og $AC = FD$.

iv) $\angle A = \angle D$ and $\angle B = \angle E$, i tillegg er $AB = DE$ eller $BC = EF$ eller $AC = FD$.



---

i) Side-vinkel-side (SAS) aksiomet
ii) Vinkel-side-vinkel (ASA) teoremet
iii) Side-side-side (SSS) teoremet
iv) Side-vinkel-vinkel (SAA) teoremet

Merk: Forkortingene over er gitt ut ifra de engelske navnene for henholdsvis side og vinkel; *side* og *angle*.

I tekstboksen på forrige side gir også vilkår *i* - *iii* tilstrekkeleg informasjon om når en trekant kan bli unikt konstruert, men i denne boka har vi valgt å skille unik konstruksjon og kongruens fra hverandre. Dette er gjort i den tru om at de fleste vil ha en intuitiv tanke om hvilke trekantar som er kongruente eller ikke, men ha større problem med å svare på hva som må til for å unikt konstruere en trekant – og det er ikke nødvendigvis så lett å se dette direkte ut ifra kongruensvilkårene.

Legg også merke til at vilkår *iv* bare er en mer generell form av vilkår *ii*, men altså ikke kan brukes som et vilkår for unik konstruksjon. Dette vilkåret finner man derfor ikke igjen i hverken *Regel 10.8* eller *Regel 10.9*.

Litteratur

Kiselev, A. (2006). *Kiselev's Geometry: Book 1. Planimetry* (A. Givental, Overs.). Sumizdat. (Opprinnelig utgitt 1892).

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press

Notis: Teksten, i alle fall en veldig lignende en, om Pytagoras' setning på side 144 stod første gang på trykk i Skage Hansens bok Tempelgeometri (2020).

Indeks

Om forfattaren

Sindre Sogge Heggen har en mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo og en årsenhet i praktisk-pedagogisk utdanning fra NTNU. I tillegg har han flere års erfaring med undervisning i både grunnskole og videregående skole.