

Epidemiemodellierung mit Kompartimentmodellen

am Beispiel der COVID-19-Pandemie in Deutschland

Mohamad Al Farhan, Lars Torbjørn Stutzer, Torben Sunkel, Gerold Weber

Betreuer: Prof. Dr. Peter Sollich, Institut für Theoretische Physik

März - Oktober 2021



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN



12.10.2021

- 1 Einleitung und Grundlagen
- 2 Netzwerk
- 3 Erweiterung und Analyse
- 4 Optimierung
- 5 Ergebnisse
- 6 Qualität des Modells
- 7 Fazit

1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

7 Fazit

- Ausgangspunkt: COVID-19-Pandemie
- Aufbau eines Kompartimentmodells
- Beitrag der Bevölkerungsbewegung?
- Kontinuumsmodell mit Diffusion
- Netzwerkmodell mit Pendlereffekten

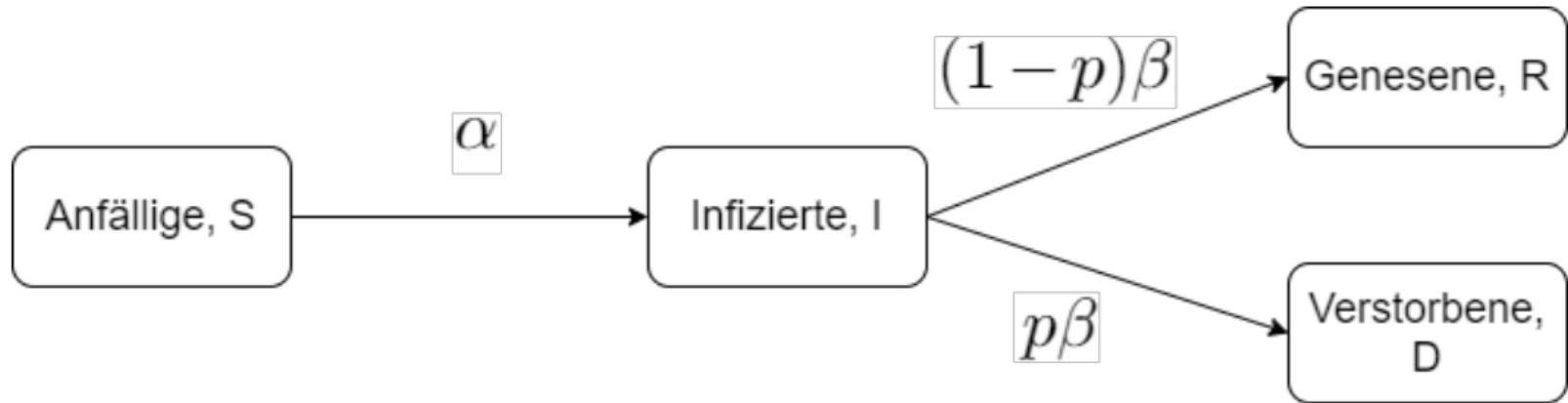
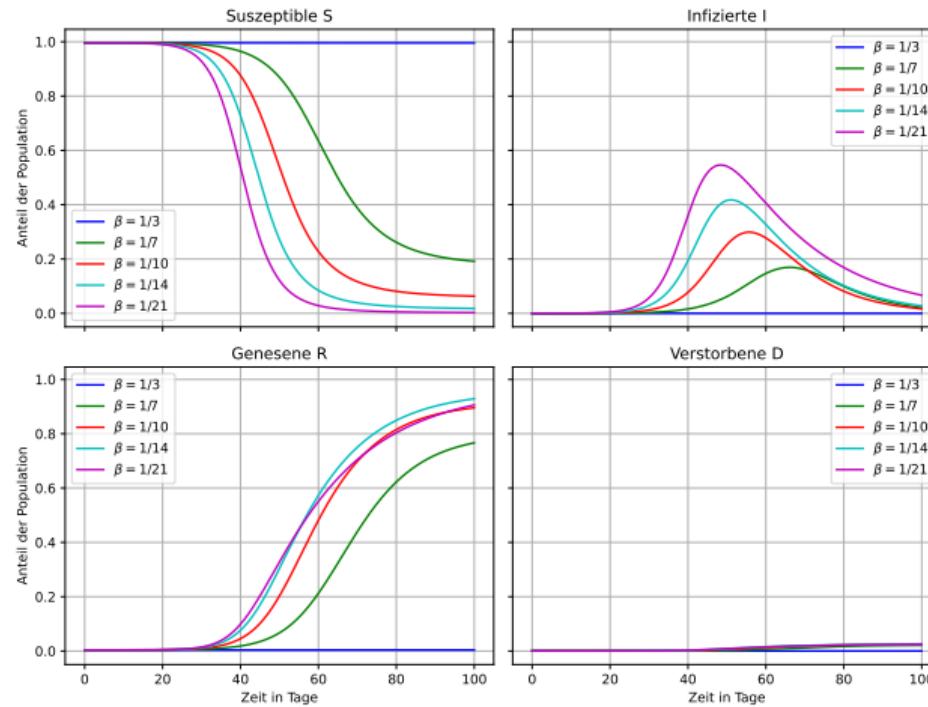


Abbildung 1: Verlauf des SIRD-Modells

Zeitentwicklung in Knoten 5 für verschiedene β , $\alpha = 0.3$, $p = 0.0264$, ohne PendlerdynamikAbbildung 2: Beispielsimulation des Modells für verschiedene β

1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

7 Fazit

Feldtheorie

- Stetige Verteilungen
- Diffusion

Problem

- Datenlage

Netzwerktheorie

- soziale Vernetzung von einzelnen Menschen
- Vernetzung von Gruppierungen
- geographische Vernetzungen

Aufbau des Netzwerkmodells mit Pendlerdaten

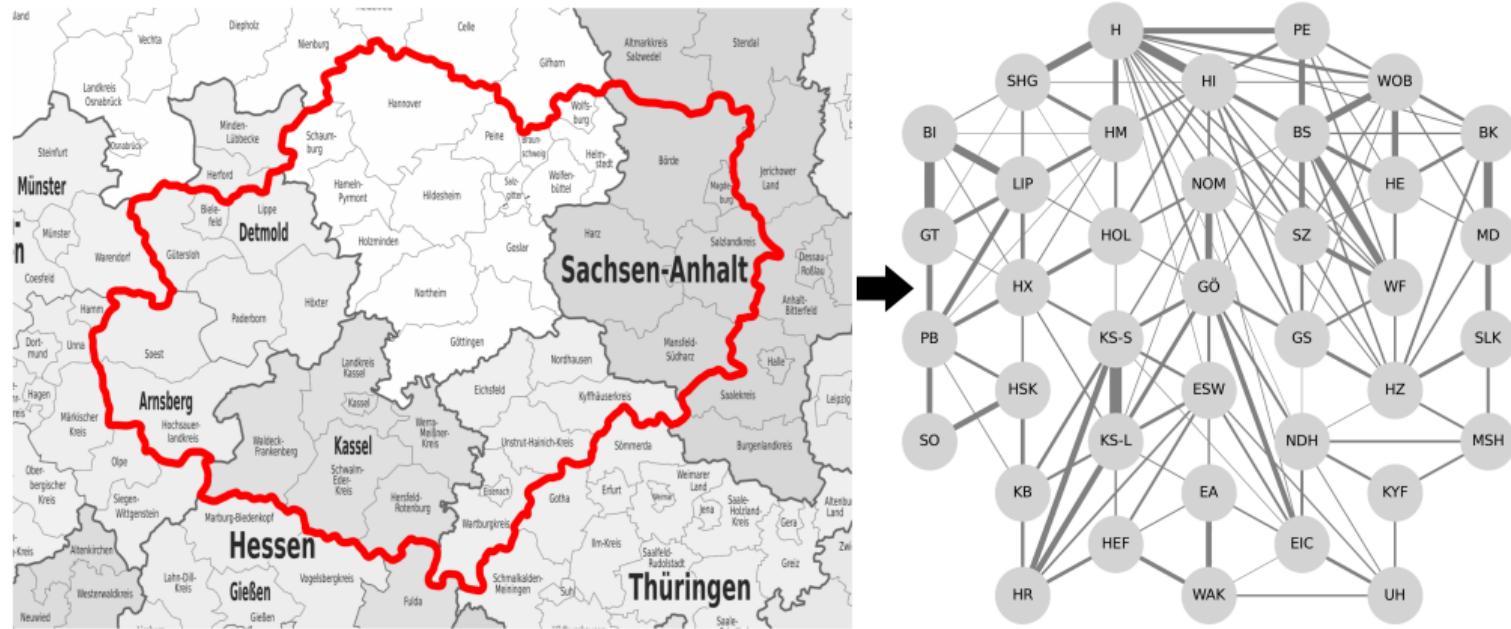


Abbildung 3: Von der Karte zum Netzwerkmodell mit gewichteten Adjazzenzen

Import: Corona Datenhub

- RKI AdmUnit
- RKI Corona Landkreise
- RKI COVID-19
- RKI History

Aufbereitung

- Summationen, Anpassungen
- Berücksichtigung der Einwohnerzahlen

Resultat

Zeitreihe der relativen Kompartimentverteilung

1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

7 Fazit

Die Bewegung zwischen Knoten

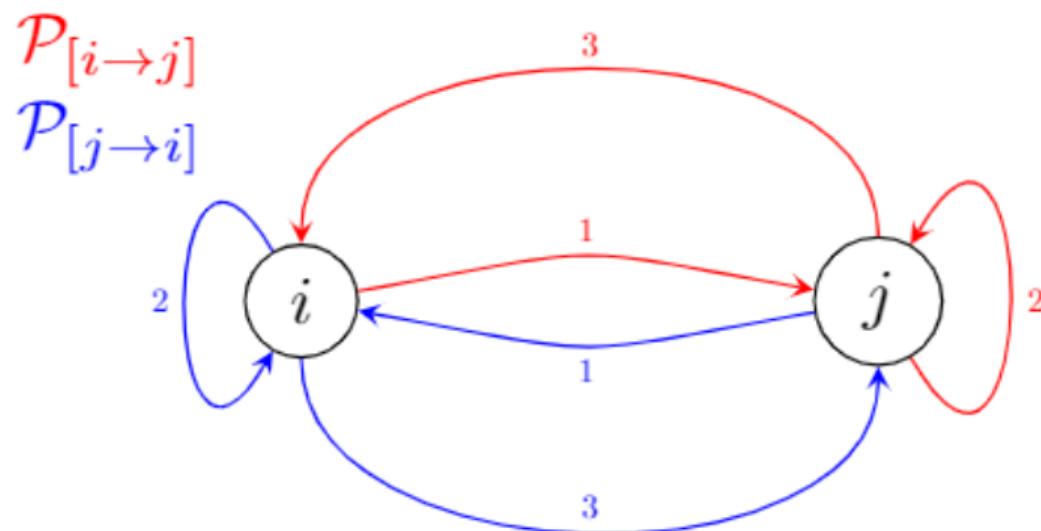


Abbildung 4: Darstellung der Pendlerbewegung zwischen zwei Knoten.

Konstanter Ansatz

- Gewichteter Mittelwert
- Kleine Änderungen am Tag

Stufenansatz

- Periodische charakteristische Funktion
- Relevante Änderung am Tag

Zwei Ansätze

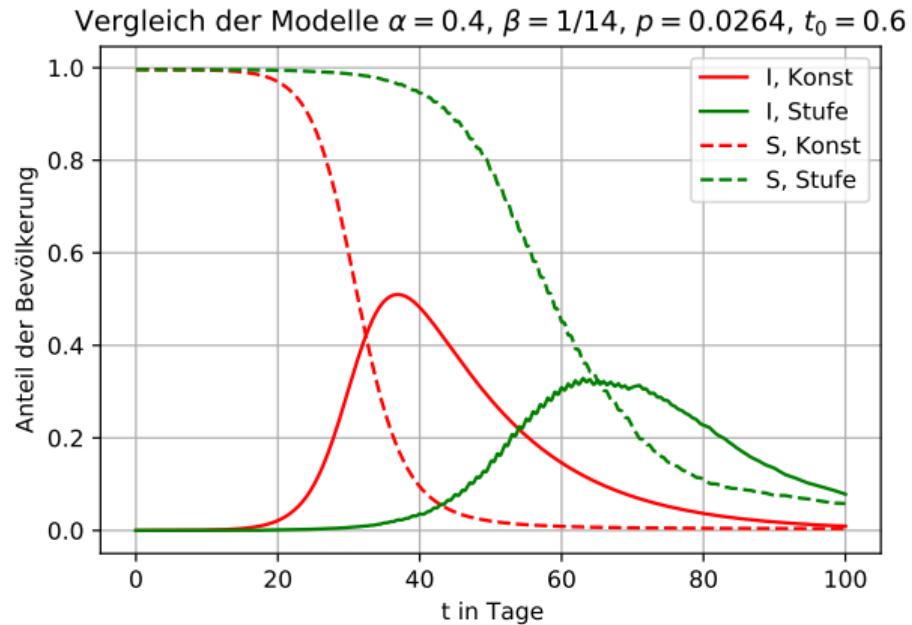


Abbildung 5: Vergleich der Modelle.

Kleine Parameter

- Kleine Infizierte erlauben Linearisierung.
 $\frac{dI}{dt} = MI$
- Modelle fallen zusammen.

Vergleich der zwei Modelle für $\alpha = 0.001$, $\beta = 1/14$, $t_0 = 0.6$

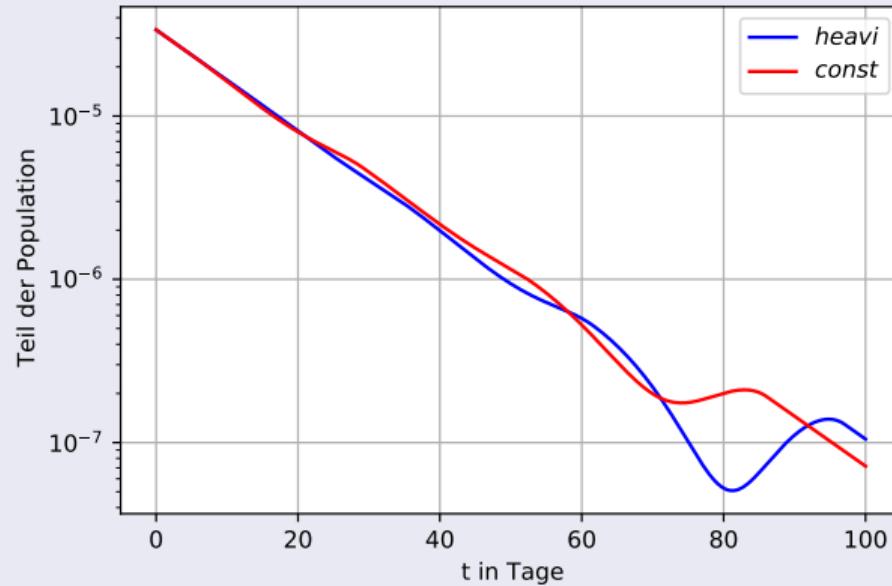


Abbildung 6: Plot der Infizierten für kleines α .

1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

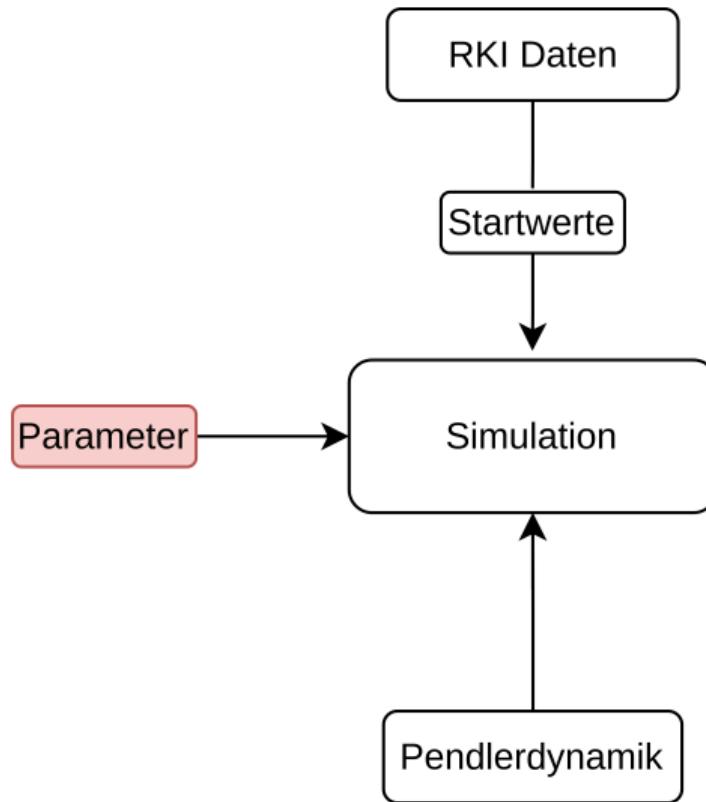
3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

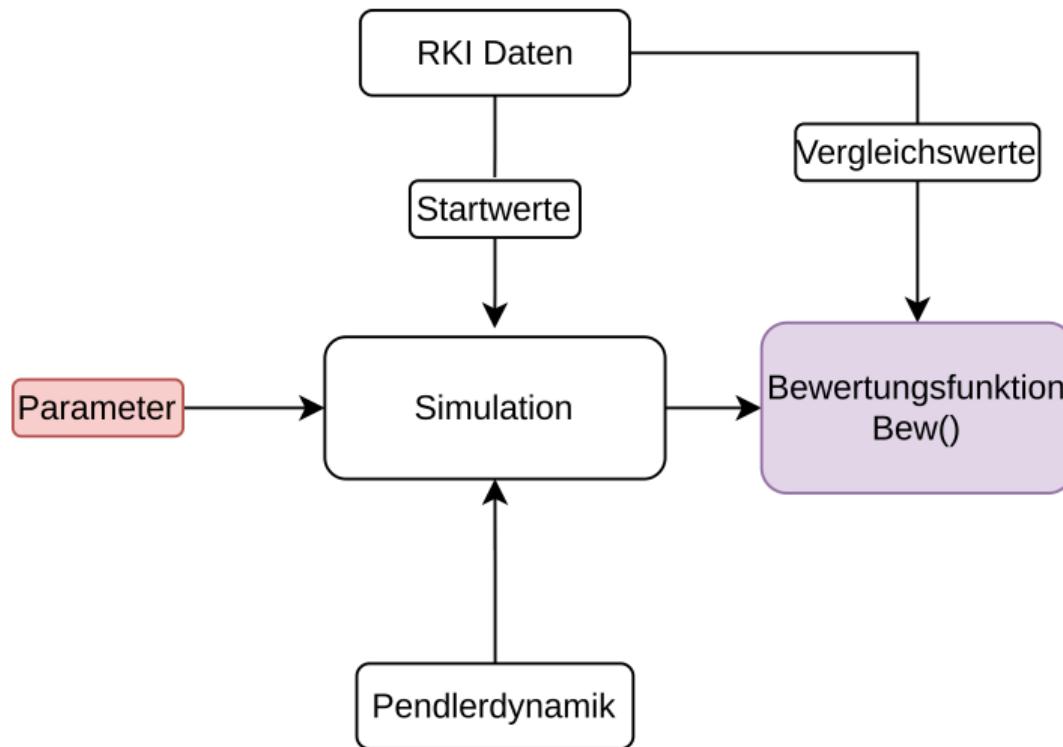
5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

7 Fazit



Optimierung: Bewertungsfunktion



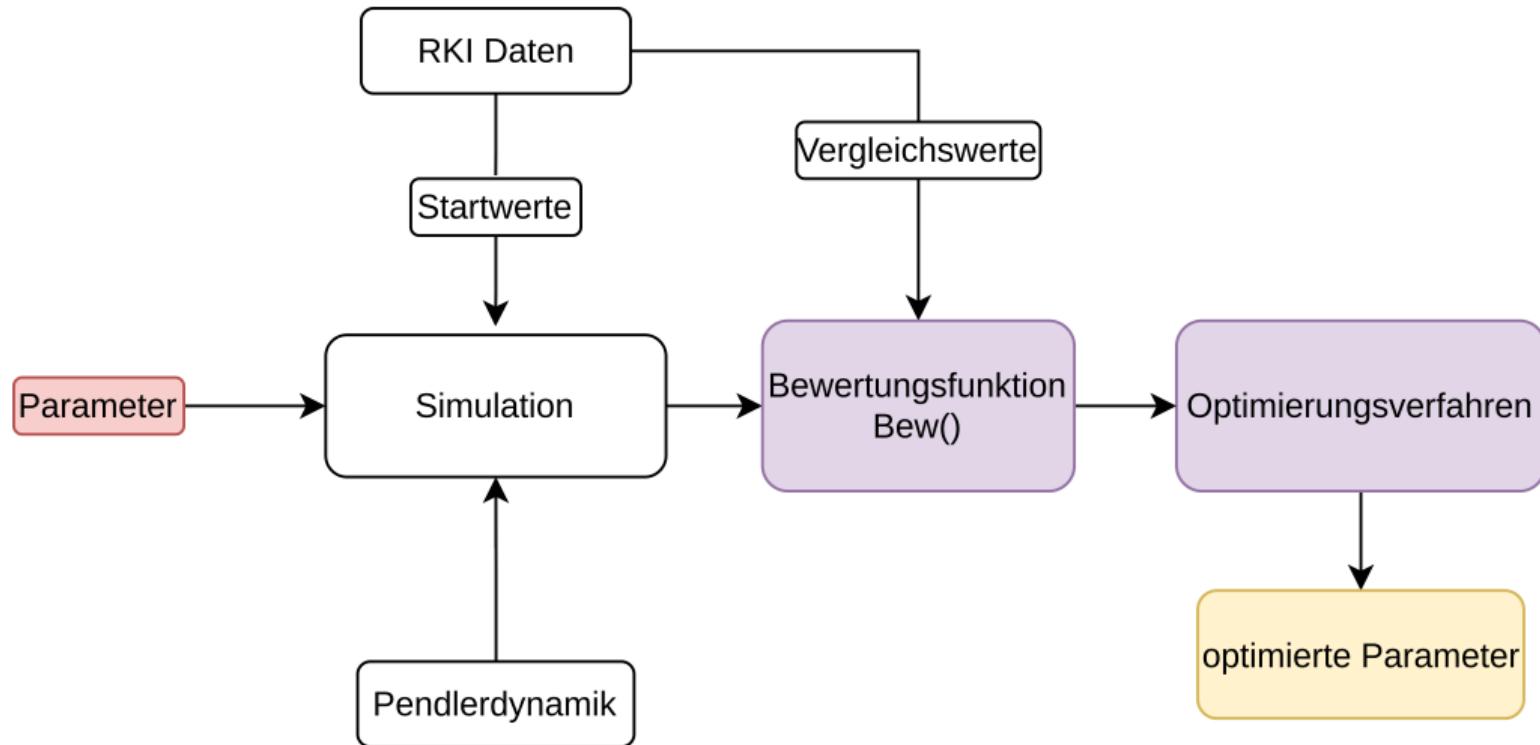
Bewertungsfunktion

- Maß für die Abweichung zwischen Modell und tatsächlichem Verlauf.
- Für die Optimalen Parameter θ_{\min} liegt ein globales Minimum der Bewertungsfunktion.

Definition

$$\text{Bew}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sum_{k \in K} N_k} \sum_{d \in D} \sum_{k \in K} |I_{\text{RKI}}(d, k) - I_{\text{sim.}}(d, k, \boldsymbol{\theta})| N_k.$$

Optimierung



Optimierung: Bewertungsfunktion

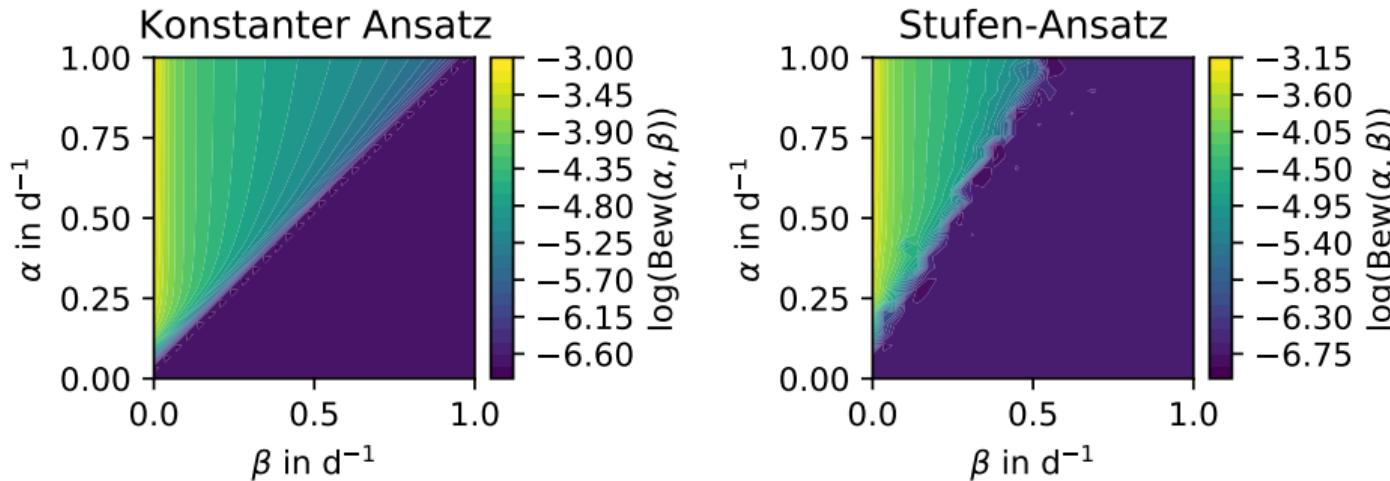
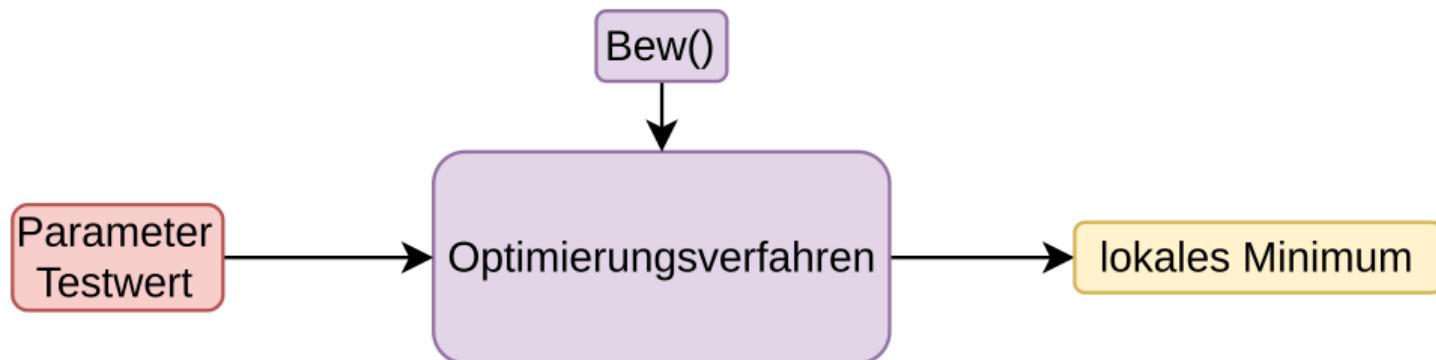


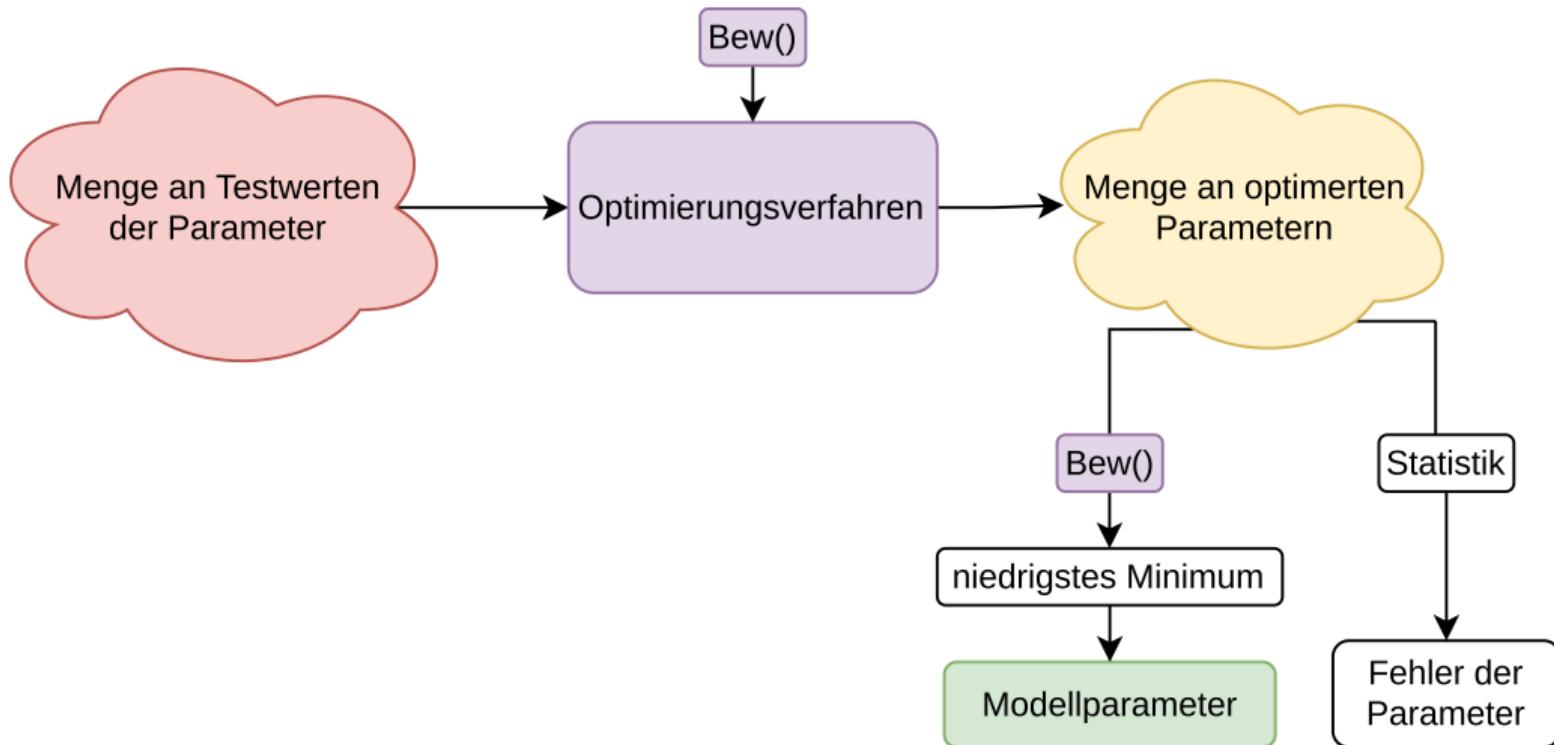
Abbildung 7: Logarithmische Darstellung des Verlaufs der Bewertungsfunktion in Abhängigkeit der Parameter α und β für das Modell des konstanten Ansatzes (links) und des Stufen-Ansatzes (rechts).

Problematik

- gefundenes Minimum hängt vom Parameter Testwert ab
- $\text{Bew}(\theta)$ hat kein ausgezeichnetes globales Minimum.



Optimierung



Optimale Parameter

$$\boldsymbol{\theta}_{\min} = \min (\{\text{Bew}(\boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \text{Opt}\})$$

Fehler der optimalen Parameter

$$\sigma_{\boldsymbol{\theta}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{s \in \text{Opt}} (\boldsymbol{\theta}_i^s - \langle \boldsymbol{\theta}_i \rangle)^2}{(n-1)}} \quad \text{mit} \quad \langle \boldsymbol{\theta}_i \rangle = \sum_{s \in \text{Opt}} \frac{\boldsymbol{\theta}_i^s}{n}$$

1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

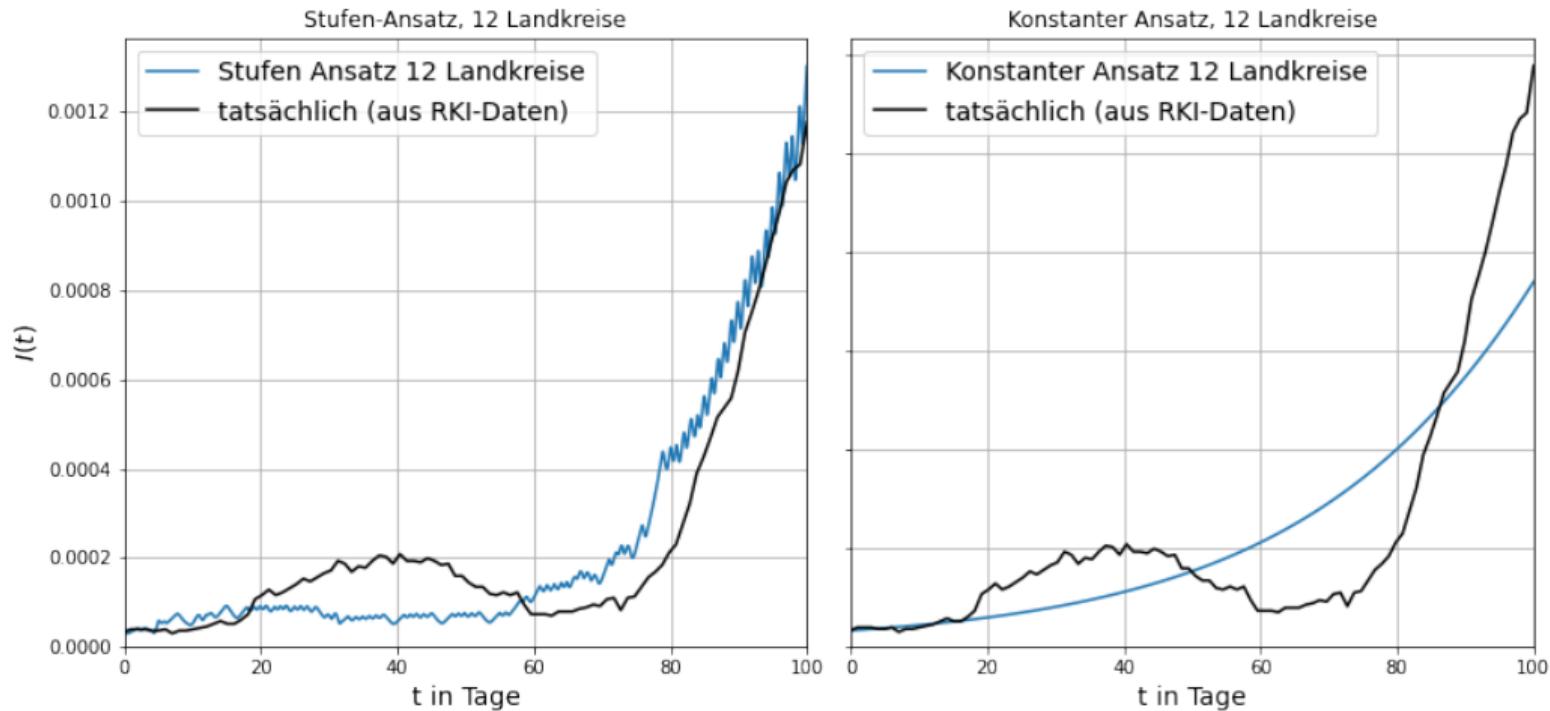
5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

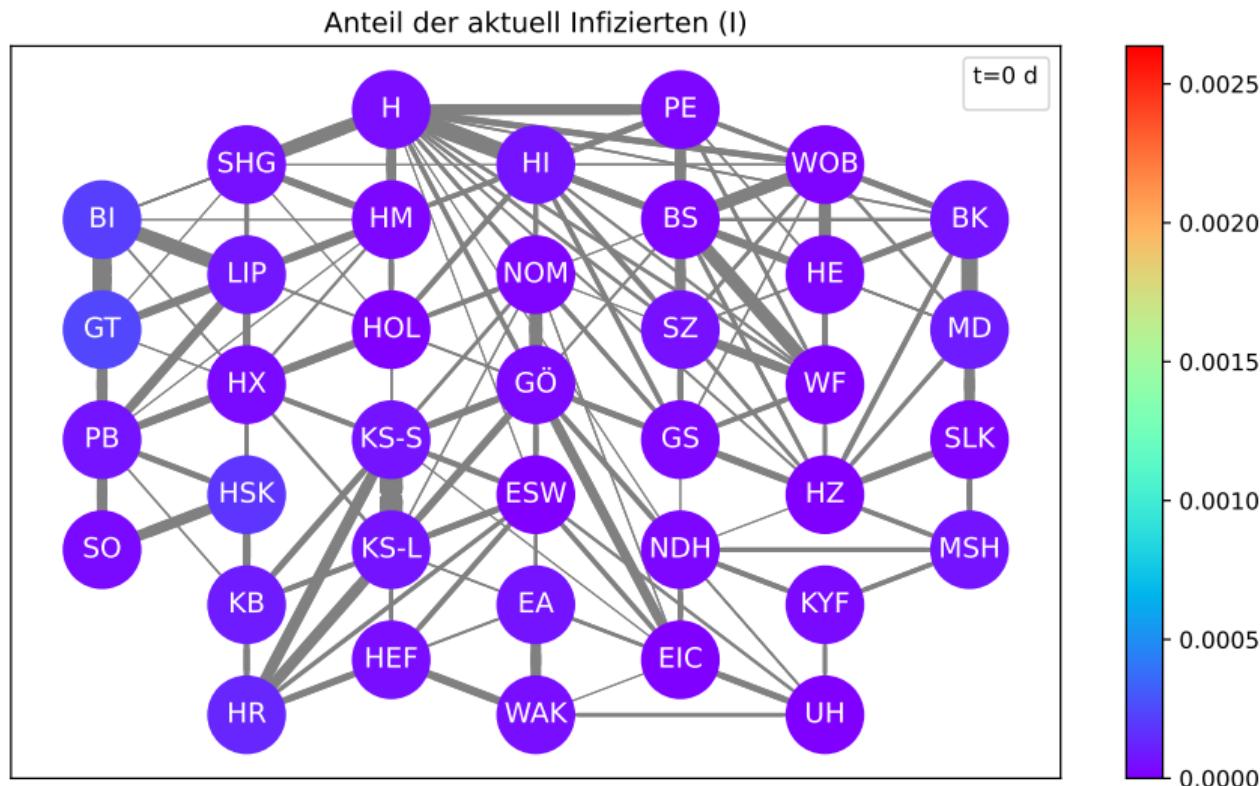
7 Fazit

Ergebnisse

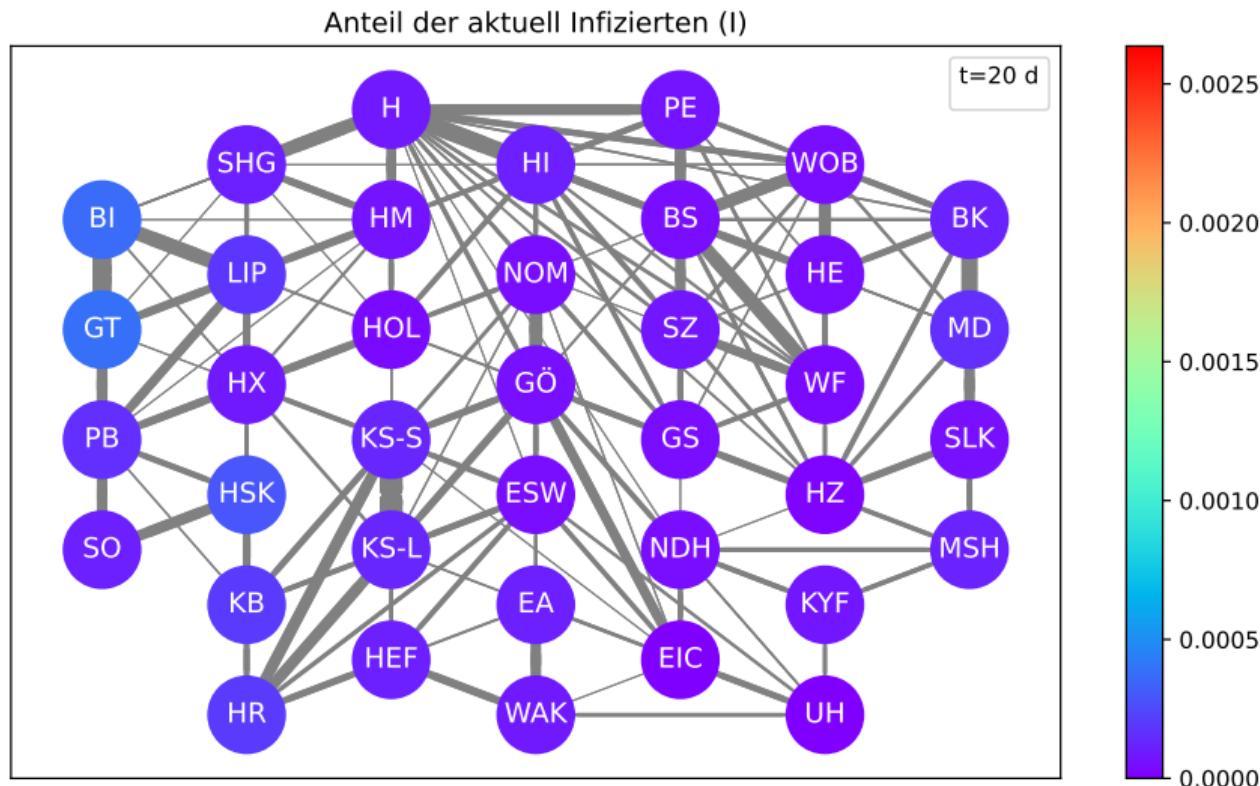
Infizierte in Abhängigkeit der Zeit



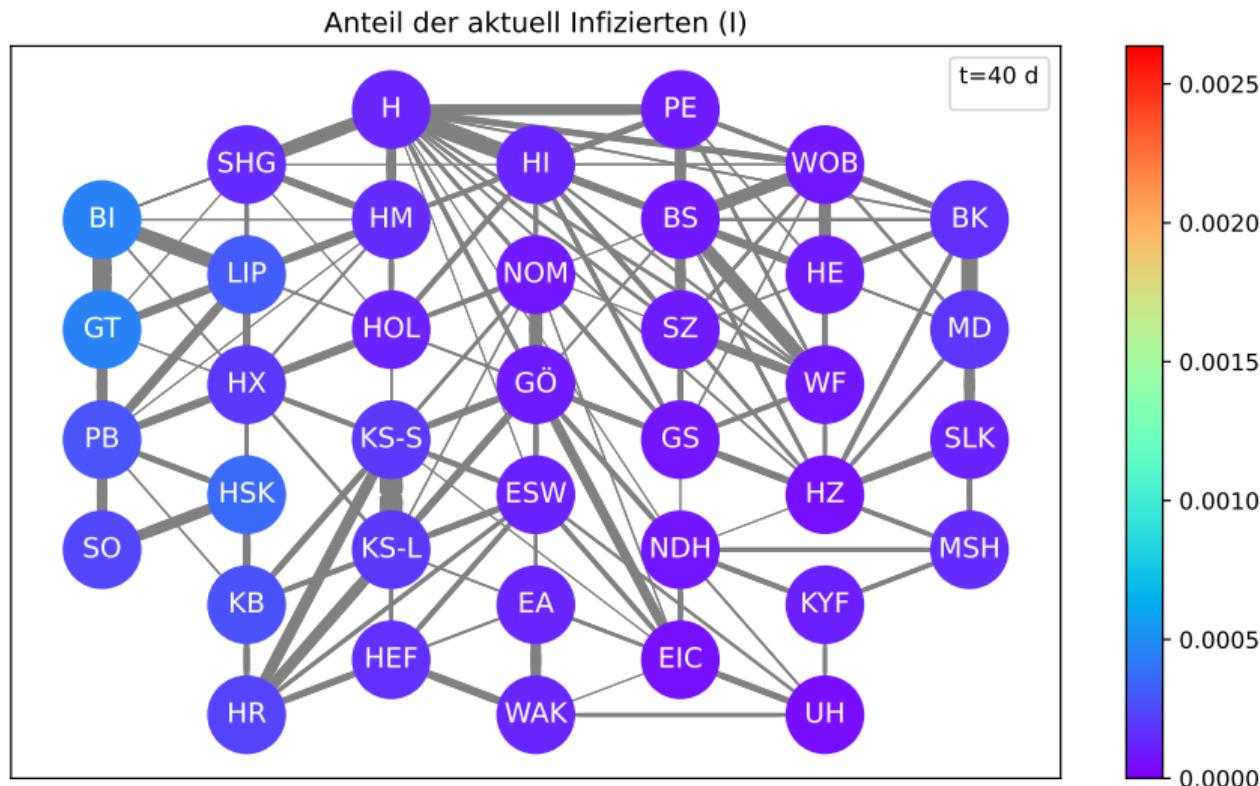
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



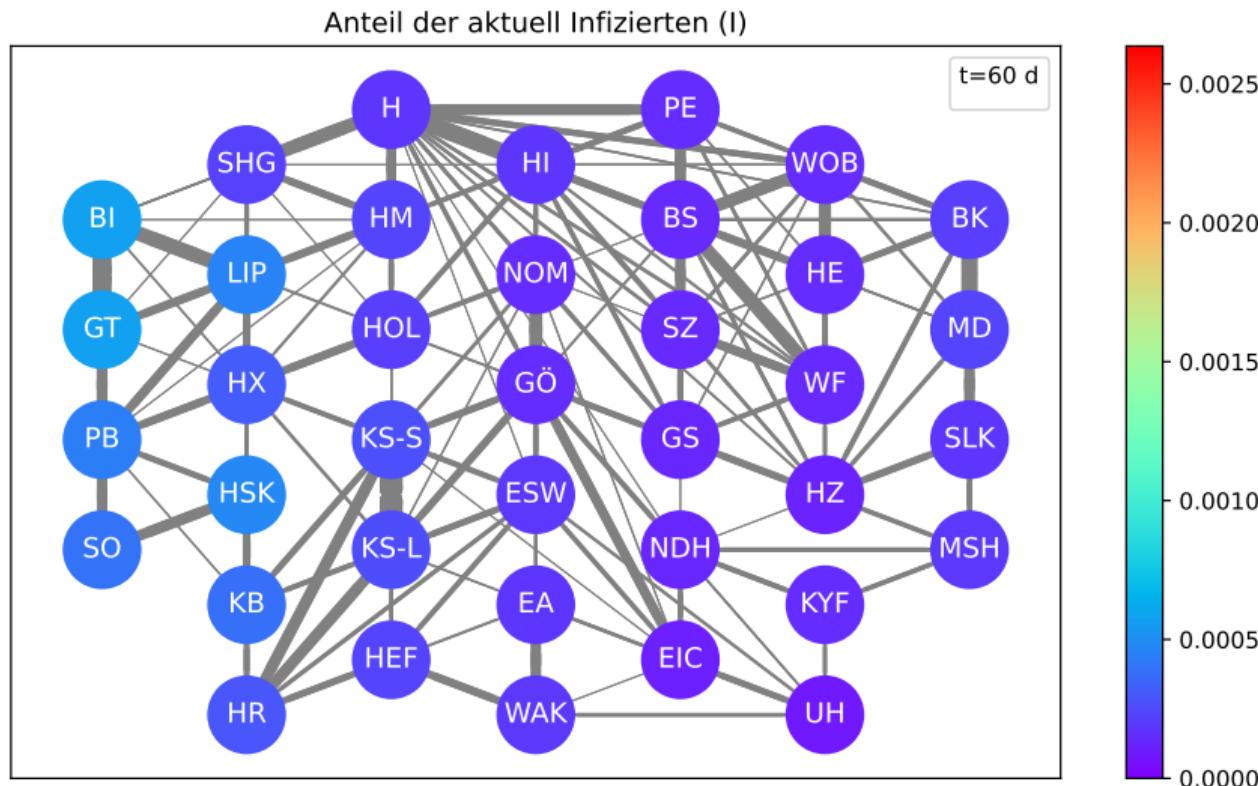
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



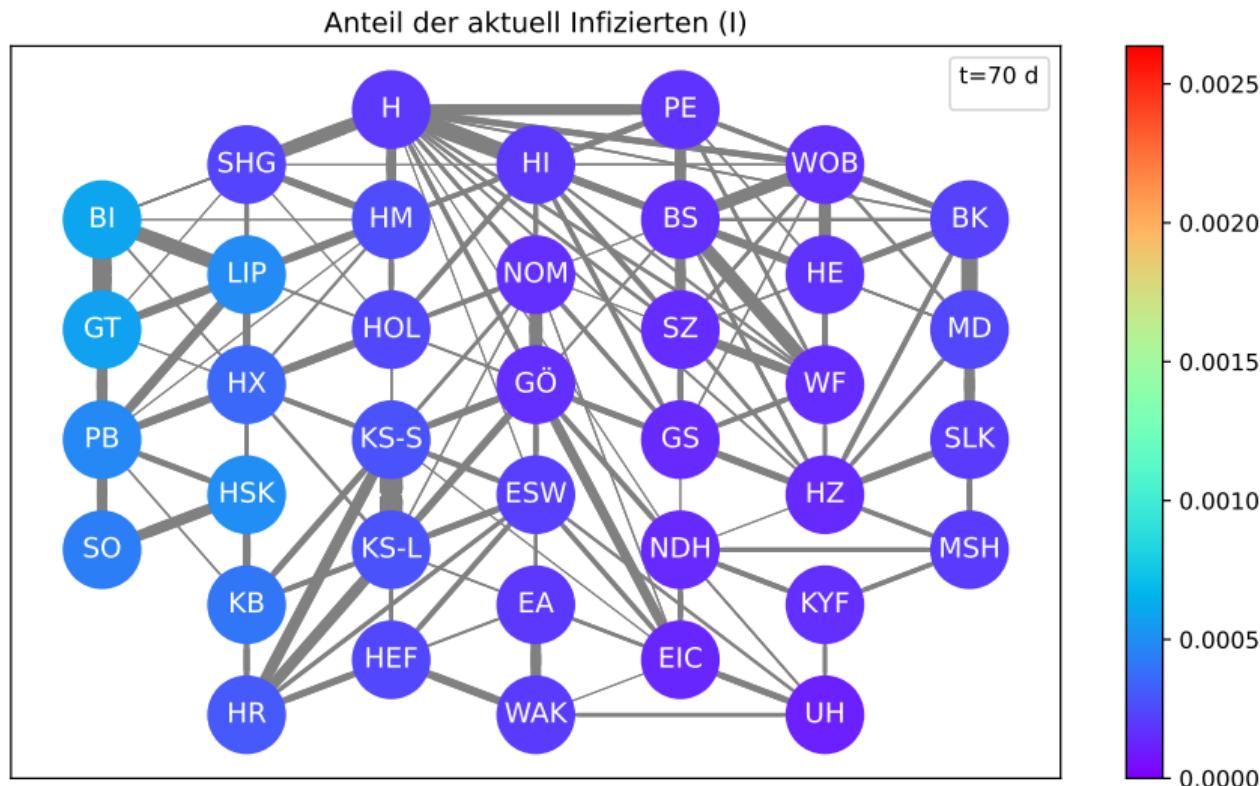
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



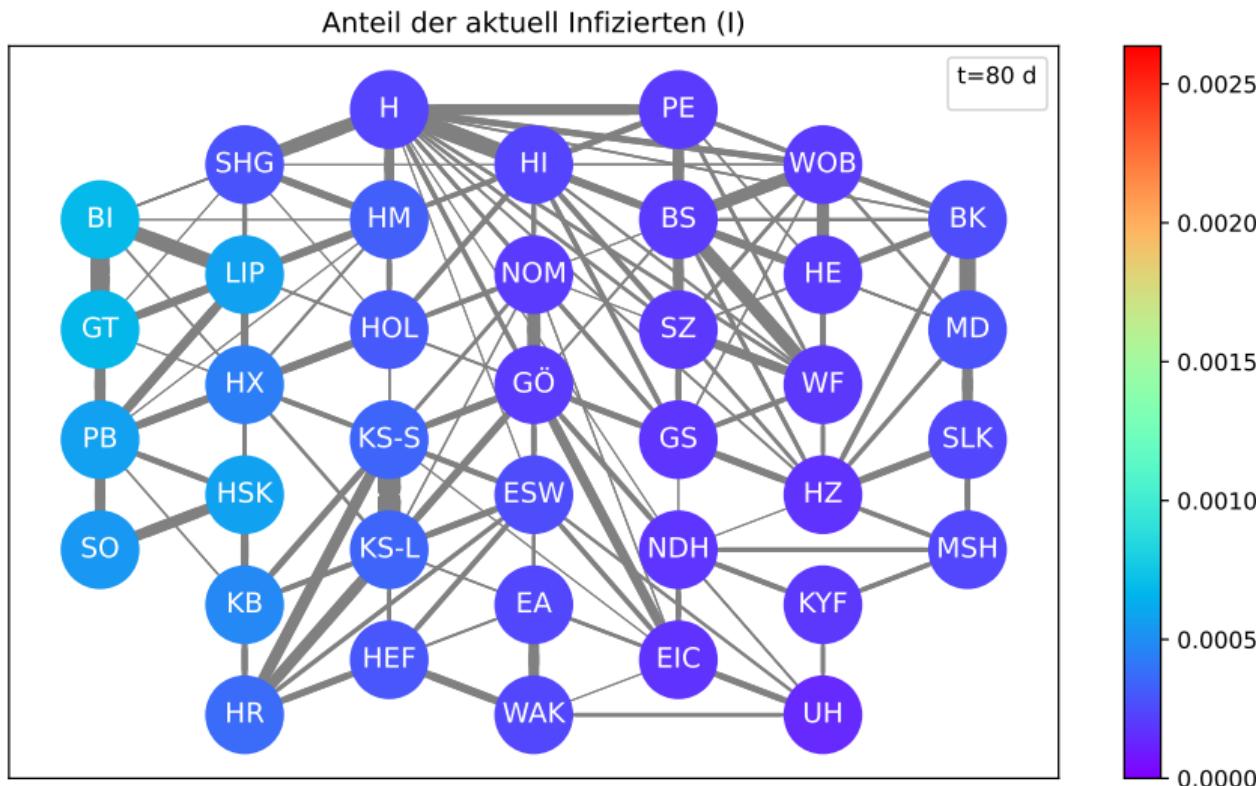
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



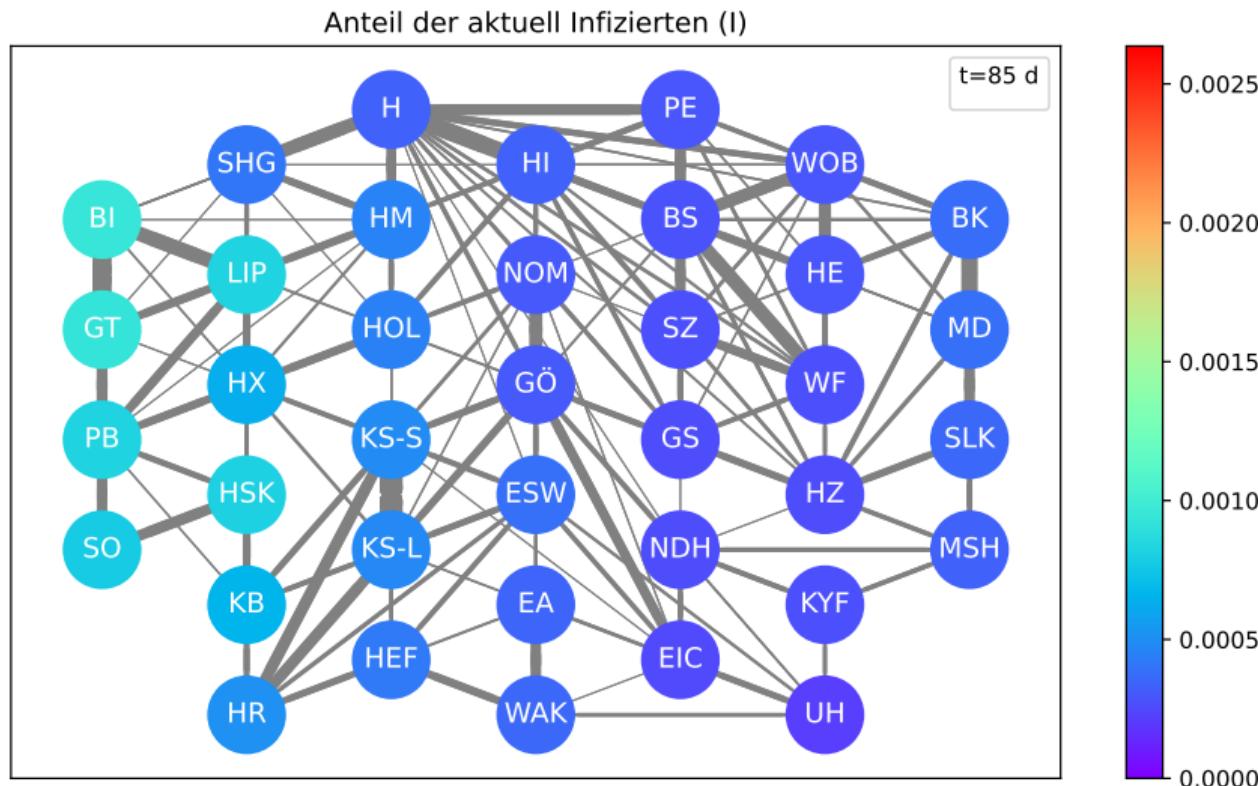
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



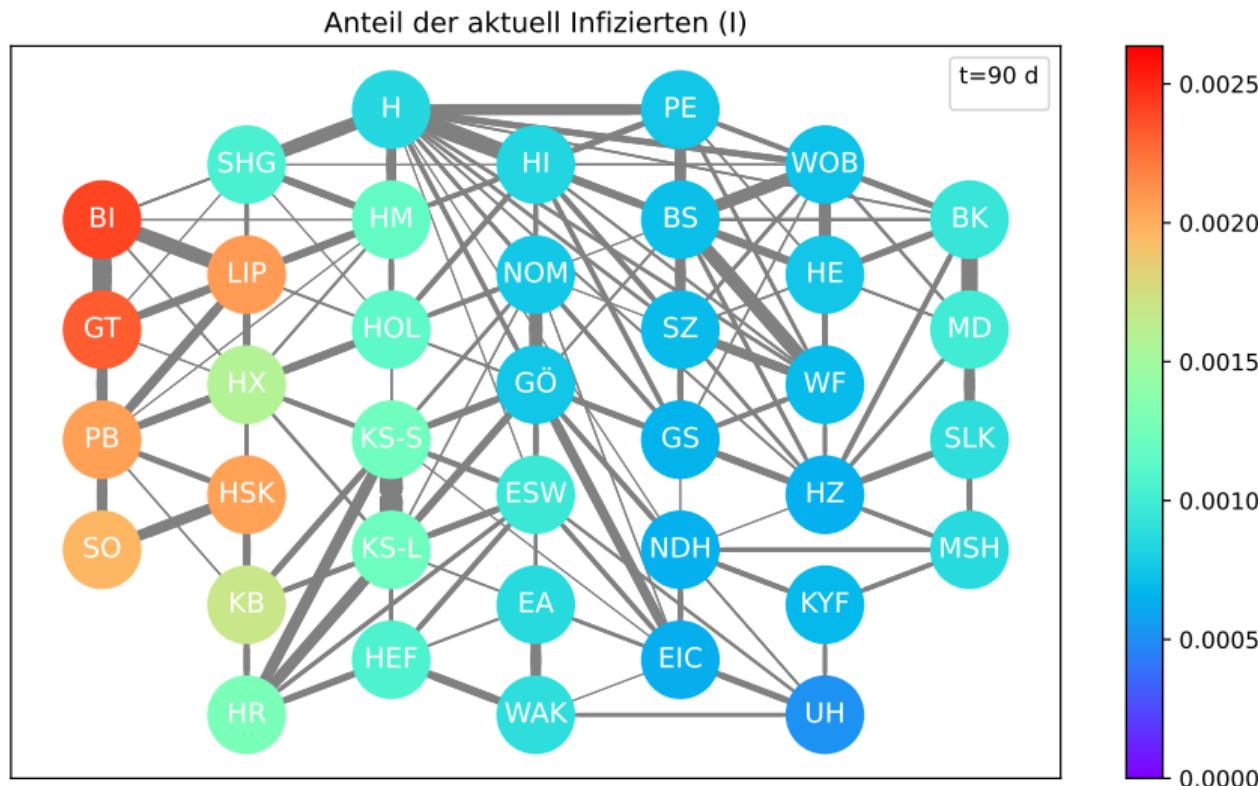
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



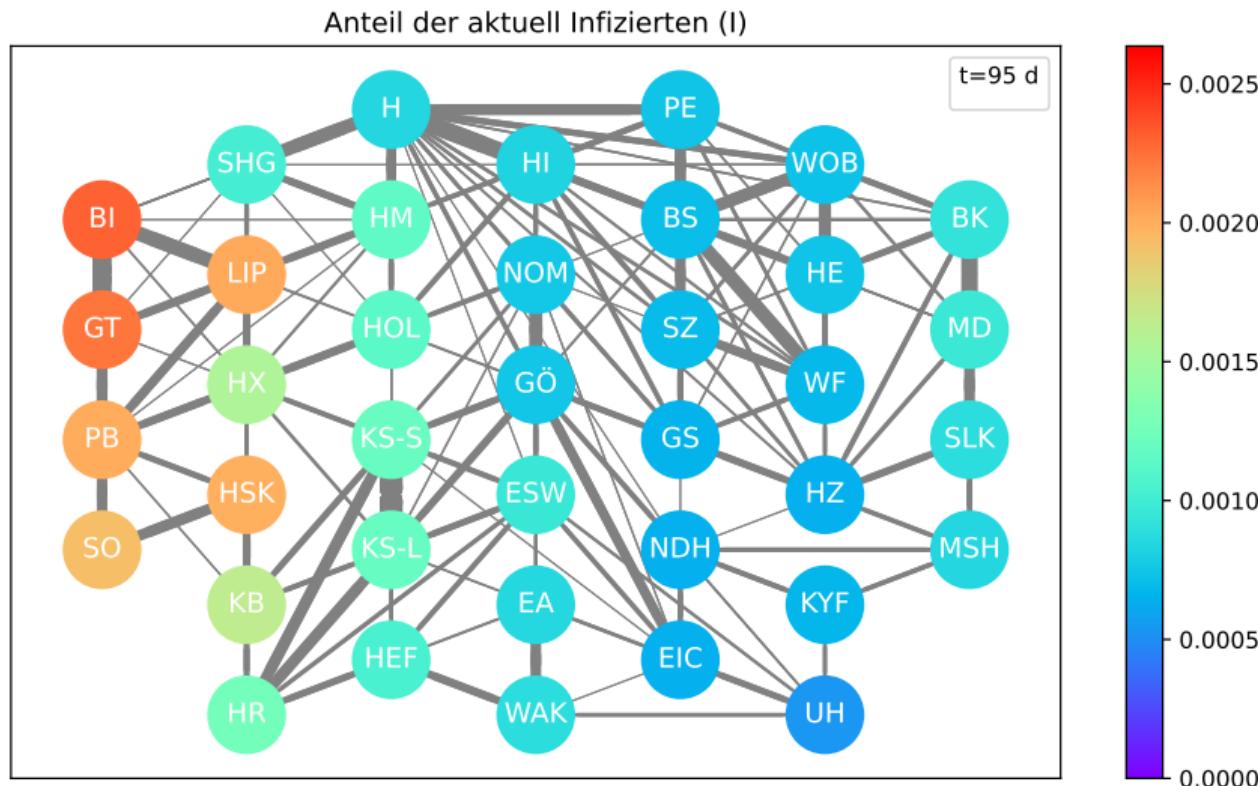
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



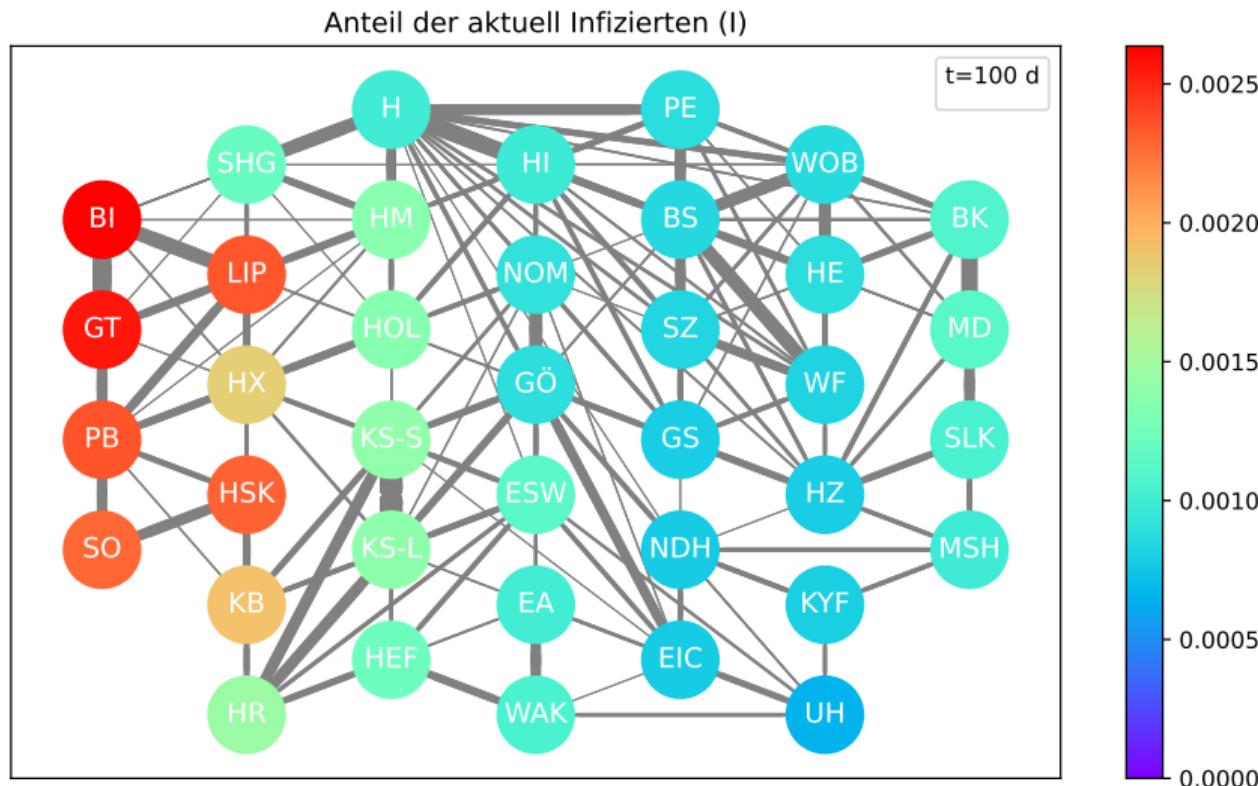
Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



Ergebnisse: Darstellung im Netzwerk



1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

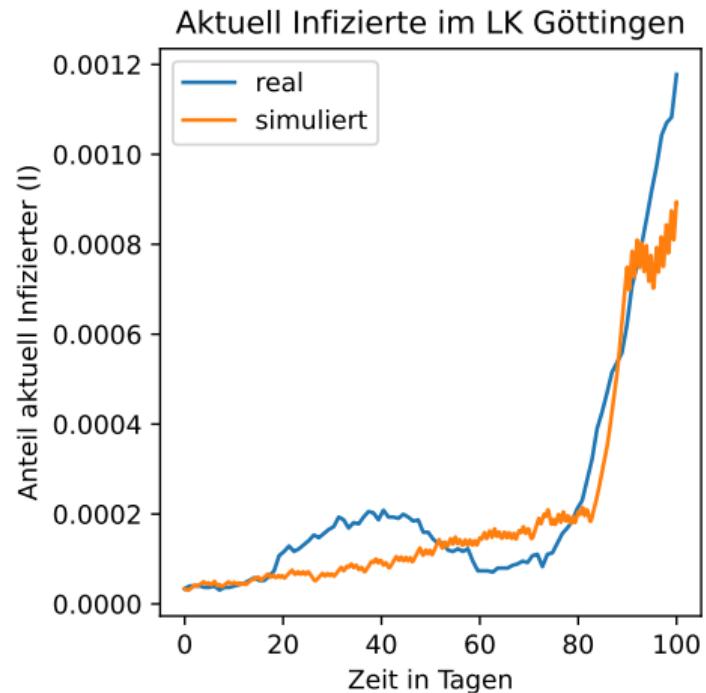
7 Fazit

Definition der Qualität

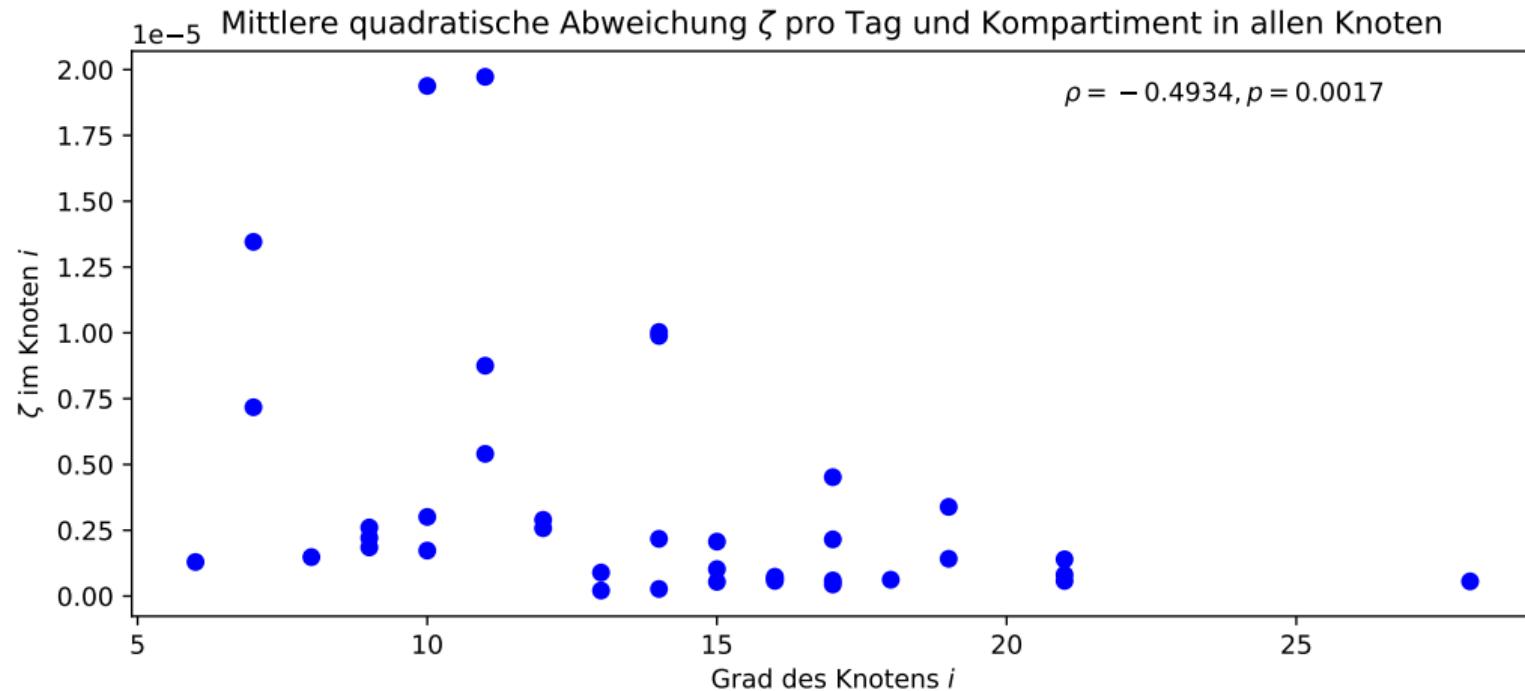
- Untersuchung des Verlaufs in einzelnen Knoten i
- Vergleiche tatsächlichen Verlauf mit optimiertem Modellverlauf
- Kontrollgröße ζ_i : mittlere quadratische Abweichung

$$\zeta_i = \frac{\sum_{C=S,I,R,D} \sum_{t=0}^{100} (\Delta C_i(t))^2}{100 \text{ Tage} \cdot 4 \text{ Kompartimente}}$$

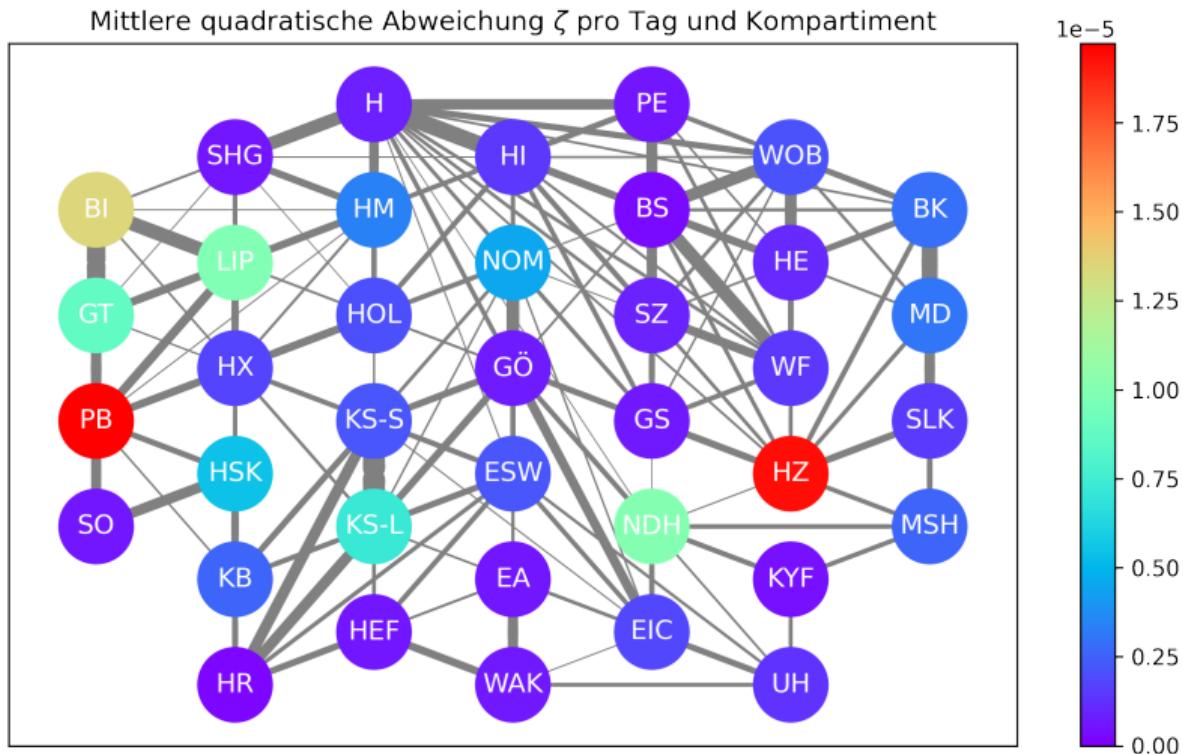
- je niedriger ζ_i , desto besser ist das Modell in Knoten i



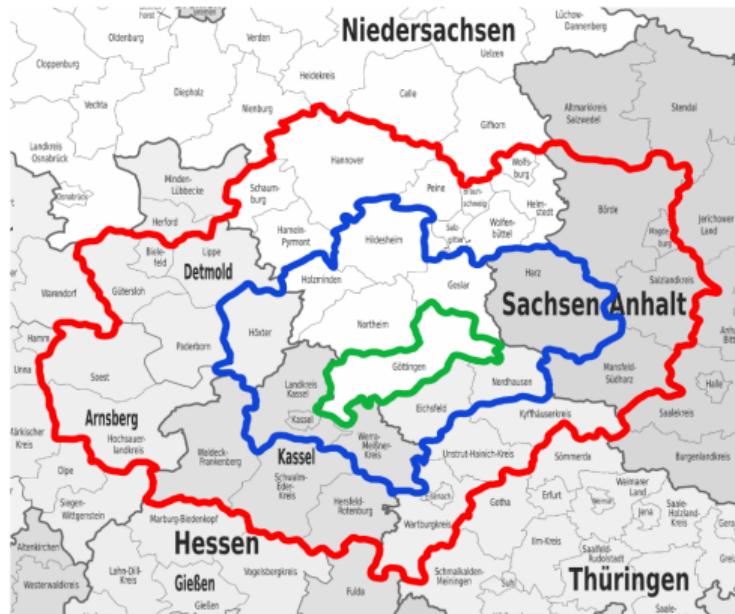
Qualität des Modells: Methode I (Grad der Knoten)



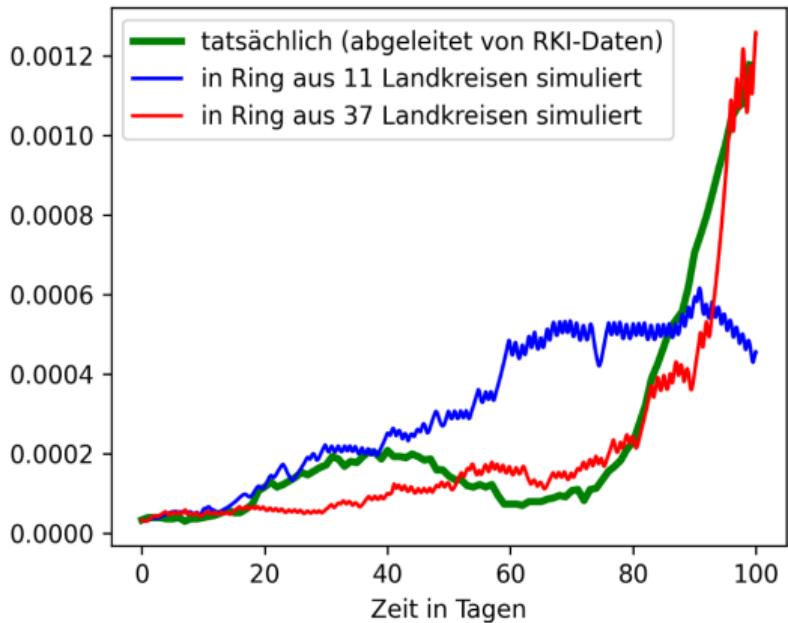
Qualität des Modells: Methode II (optisch im Netzwerk)



Qualität des Modells: Methode III (verschieden breite Ränder)



Zeitreihe aktiver Infektionen im Landkreis Göttingen



1 Einleitung und Grundlagen

2 Netzwerk

3 Erweiterung und Analyse

4 Optimierung

5 Ergebnisse

6 Qualität des Modells

7 Fazit

- Reproduktion möglich
 - *Stufen-Ansatz* klar besser als *konstanter Ansatz*
 - Vernetzung ↔ Qualität
- Netzwerkmodell erfüllt Ziel

- flexiblere Optimierung
- Komplexität (Kompartimente, Zeitabhängigkeit...)
- größeres Gebiet
- größerer Zeitraum

Ende der Präsentation

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.