Pensando Problemas

Conceptos Económicos con Dinosaurios

Selecciona un concepto:

Integral

Integral

Notación matemática:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{10}$$

Explicación con dinosaurios:

Una integral es como calcular cuánta comida come un dinosaurio durante todo el día. Si sabemos cuánto come cada hora (a veces más, a veces menos), podemos sumar todo para saber cuánto comió en total desde la mañana hasta la noche.

¿Tienes preguntas sobre este concepto?

Tu pregunta:

Cómo pruebo el teorema fundamental del cálculo?

Preguntar

Respuesta:

Para responder sobre ***Integral***, usaré la información disponible.
¡Hola, futuro gran economista prehistórico! Entender el Teorema Fundamental del Cálculo es como descubrir el secreto de cómo los grandes saurópodos medían cuántas hojas comían o qué tan rápido caminaban los velociraptores. Es la pieza que une dos mundos: la suma de infinitas cosas pequeñas (la integración) y el ritmo de cambio instantáneo (la derivación).
Vamos a intentar "probarlo" (o, más bien, entender la lógica detrás de la prueba) con una historia de dinosaurios. Imagina a un amigable Triceratops llamado Tito paseando por una sabana prehistórica. Tito está muy interesado en coleccionar unas bayas jugosas que crecen por ahí.
La densidad de bayas varía a lo largo del camino. Llamemos a la posición de Tito en el camino x, medida en pasos de Triceratops desde un punto de inicio. La cantidad de bayas por paso en un punto x la representamos con una función $f(x)$. Si $f(x)$ es alta, hay muchas bayas; si es baja, hay pocas.
Parte 1: El vínculo Mágico (La Derivada de una Integral)
Primero, pensemos en la cantidad total de bayas que Tito ha recogido desde su punto de inicio (llamémoslo posición a) hasta su posición actual x. Esta cantidad total acumulada es la "integral" de la densidad de bayas desde a hasta x. La llamaremos $A(x)$, la función de "bayas acumuladas":
$A(x) = \int_a^x f(t)dt$
Aquí usamos t como una variable "muda" o temporal dentro de la integral, para no confundirla con el punto final x. Piensa en $\int_a^x f(t)dt$ como la suma de (bayas por paso) $\times$ (un pedacito de paso) a lo largo de todo el camino desde a hasta x.
Ahora, la gran pregunta: ¿A qué ritmo cambia la cantidad de bayas que Tito tiene si se mueve un poquitín? Es decir, ¿cuál es la derivada de $A(x)$ con respecto a x? $\frac{d}{dx}A(x)$
Si Tito se mueve un pequeñísimo paso extra, de x a $x + h$ (donde h es un número muy muy pequeño, casi como una vibración de la cola de un Compsognathus), la cantidad extra de bayas que recoge es $A(x + h) - A(x)$.

Este extra de bayas es lo que recogió en el pequeño tramo entre x y $x + h$. Como el tramo es tan pequeño, la densidad de bayas $f(x)$ no cambia mucho en ese pedacito. Es casi constante. Así que, el número de bayas extras en ese tramo es, aproximadamente, la densidad en x multiplicada por la longitud del tramo h:

$A(x + h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$

Para encontrar el **ritmo** de cambio (bayas extra por cada paso extra), dividimos las bayas extra por la longitud del paso extra h:

$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$

Ahora, el truco de magia del cálculo: ¿Qué pasa cuando hacemos que ese pequeño paso extra h se haga infinitamente pequeño? Esto es lo que significa tomar el límite cuando $h \to 0$.

$\frac{d}{dx}A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$

A medida que h se acerca a cero, nuestra aproximación $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x)$ se vuelve ¡exacta! La densidad de bayas en ese punto x es precisamente el ritmo al que la cantidad total de bayas recogidas está aumentando si te mueves un poquitín más allá de x.

¡Y ahí tienes la primera parte del teorema! Nos dice que el ritmo de cambio de la integral acumulada ($A(x)$) es la función original ($f(x)$):

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

Esto es enorme. Significa que la derivación y la integración son procesos inversos, como poner y quitar las huellas de dinosaurio. La integral "acumula" a un ritmo dado por $f(x)$, y la derivada "deshace" esa acumulación para devolvernos el ritmo original $f(x)$.

Parte 2: Calculando la Integral Definida (El Enlace con las Antiderivadas)

Ahora usemos esta idea para calcular cuántas bayas recogió Tito **entre dos puntos específicos**, digamos desde la posición a hasta la posición b. Esto es $\int_a^b f(x)dx$.

Sabemos por la Parte 1 que nuestra función $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una **antiderivada** de $f(x)$, porque su derivada es $f(x)$.

Una "antiderivada" de una función $f(x)$ es cualquier función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Piensa en ella como una función que "deshace" la derivación.

Si $F(x)$ es **cualquier** antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x)$ y $A(x)$ deben ser muy parecidas. De hecho, la única diferencia entre dos antiderivadas de la misma función es una constante (imagina que Tito pudo haber tenido ya algunas bayas en su bolsa antes de empezar a contar en el punto a - esa sería la constante extra). Así que:

$A(x) = F(x) + C$

Donde C es una constante. Podemos encontrar C usando nuestro punto de inicio a.

Sabemos que $A(a)$ es la cantidad de bayas recogidas desde a hasta a, que es ¡cero!

$A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

Usando nuestra relación $A(x) = F(x) + C$ en el punto $x = a$:

$A(a) = F(a) + C$

$0 = F(a) + C$

Esto nos dice que $C = -F(a)$.

Ahora sustituimos C de nuevo en la ecuación para $A(x)$:

$A(x) = F(x) - F(a)$

¡Fantástico! Esta ecuación nos dice que la cantidad total de bayas recogidas desde a hasta cualquier punto x es igual a la antiderivada evaluada en x menos la antiderivada evaluada en el punto de inicio a.

Finalmente, queremos saber la cantidad total de bayas recogidas desde a hasta b. Esto es simplemente $A(b)$. Usando la fórmula que acabamos de encontrar, con $x = b$:

$A(b) = F(b) - F(a)$

Y como $A(b) = \int_a^b f(t)dt$, obtenemos la segunda parte (y quizás la más usada) del Teorema Fundamental del Cálculo:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Donde $F'(x) = f(x)$.

En Resumen Prehistórico:

El Teorema Fundamental del Cálculo es como el gran manual de reglas del Jurásico para sumar y restar cantidades que cambian constantemente.

1. ***Parte 1:*** Demuestra que la tasa a la que se acumula una cantidad (la derivada de la integral) es exactamente la tasa instantánea de esa cantidad (la función original). $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$. La acumulación y la tasa son caras de la misma moneda.
2. ***Parte 2:*** Usa esta conexión para darnos una forma súper fácil de calcular la acumulación total entre dos puntos ($\int_a^b f(x)dx$). ¡Solo necesitas encontrar una antiderivada ($F(x)$) y restarla evaluada en los puntos finales! $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. No necesitas sumar infinitos rectangulitos; solo necesitas una función cuya tasa de cambio sea la original.

Así, el T-Rex no necesita contar cada baya individual; si sabe la función de densidad $f(x)$ y puede encontrar una función de bayas totales acumuladas $F(x)$ (una antiderivada), ¡puede saber cuántas bayas hay entre cualquier par de árboles evaluando $F(x)$!

Espero que esta aventura con Tito el Triceratops y las bayas prehistóricas te ayude a entender la poderosa conexión que revela el Teorema Fundamental del Cálculo.

¡Rugidos de éxito en tu estudio de economía!