Pensando Problemas

Conceptos Económicos con Dinosaurios

Selecciona un concepto:

Inducción matemática

Inducción matemática

Notación matemática:

$$\text{Inducción} \tag{9}$$

Explicación con dinosaurios:

La inducción matemática es como enseñar a los dinosaurios a formar una fila. Primero, le enseñas al primer dinosaurio a ponerse en fila. Luego, le enseñas a cada dinosaurio a ponerse detrás del dinosaurio anterior. Al final, ¡todos los dinosaurios están en fila!

¿Tienes preguntas sobre este concepto?

Tu pregunta:

Cómo pruebo por inducción la formula de la suma de los primeros n números naturales?

Preguntar

Respuesta:

Para responder sobre ***Inducción matemática***, usaré la información disponible.

¡Excelente pregunta, futuro economista! Probar fórmulas puede sonar a algo que haría un viejo Brontosaurio con pergaminos, pero con la `Inducción` es mucho más fácil y divertido, ¡como encontrar el camino al mejor charco de agua!

La `Inducción` matemática es como una cadena de descubrimientos fósiles. Si sabes dónde está el primer fósil, y sabes que cada vez que encuentras uno, ¡el siguiente está **justo** al lado!, entonces puedes estar seguro de que puedes encontrar **todos** los fósiles de esa cadena.

Queremos probar que la suma de los primeros n números naturales (imagine que son el número de hojas que come un Triceratops cada día, empezando con 1 el primer día, 2 el segundo, y así hasta el día n) siempre sigue esta fórmula genial:

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

¡Vamos a usar la `Inducción` para demostrar que esta fórmula no es solo un invento de un Pterodáctilo loco, sino una verdad para cualquier n (cualquier número de días)!

El proceso de `Inducción` tiene dos pasos principales, como dos huellas gigantes que debes seguir:

Paso 1: El Paso Base (La Primera Huella)

Tenemos que demostrar que la fórmula funciona para el número más pequeño de días en nuestro caso, que es $n = 1$.

Si $n = 1$, la suma de los primeros 1 número natural es simplemente 1.

Nuestra fórmula dice que debe ser $\frac{1(1+1)}{2}$.

Vamos a calcularlo: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

¡Genial! La fórmula funciona para $n = 1$. El primer fósil está encontrado. La primera huella es correcta. ¡Podemos seguir!

Paso 2: El Paso de `Inducción` (Seguir las Huellas)

Aquí es donde nos ponemos un poco astutos, como un Velociraptor planeando. Vamos a hacer una ***Hipótesis de*** `Inducción` .

Hipótesis de `Inducción` : Suponemos que la fórmula funciona para algún número arbitrario **de días al que llamaremos k. O sea,** suponemos* que para k días, la suma de hojas es:

```
$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

(Imagina que asumimos que la fórmula es cierta para $k$ fósiles encontrados. N
```

Ahora, usando esta suposición, ¡tenemos que demostrar que la fórmula **también** funciona para el **siguiente** número de días, es decir, para $k+1$ días! Si podemos demostrar que si funciona para k, **entonces** funciona para $k+1$, ¡habremos probado la cadena!

Queremos demostrar que la suma de los primeros $k+1$ números es $\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$, que simplificando es $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Empecemos con la suma de los primeros $k+1$ números:

$1+2+\cdots+k+(k+1)$

Mira la primera parte de la suma: $1+2+\cdots+k$. ¡Esa es exactamente la suma para k días! Y por nuestra ***Hipótesis de*** `Inducción` , sabemos (o suponemos) que esa parte es igual a $\frac{k(k+1)}{2}$.

Entonces, podemos sustituir la suma de los primeros k términos por nuestra fórmula supuesta:

$(1+2+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

Ahora, nuestro trabajo es hacer un poco de álgebra jurásica para que la expresión de la derecha $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$ se vea **exactamente** como la fórmula para $n=k+1$, que es $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

Podemos sacar $(k+1)$ como factor común (como si encontraras dos huesos de pata de Triceratops iguales):

$(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$

Ahora, sumamos lo que está dentro del paréntesis. Para sumar $\frac{k}{2}$ y 1, convertimos 1 en $\frac{2}{2}$:

$(k+1)\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{2}\right)$

Sumamos las fracciones dentro del paréntesis:

$(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$

¡Y reorganizando un poco, obtenemos exactamente lo que queríamos!

$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

¡Lo hicimos! Hemos demostrado que si la fórmula funciona para k días (nuestra Hipótesis de `Inducción`), ¡entonces **siempre** funcionará para el día siguiente, $k+1$! Hemos demostrado cómo ir de una huella a la siguiente.

Conclusión (¡El Tesoro Enterrado!)

Hemos probado dos cosas fundamentales:

1. La fórmula funciona para $n=1$ (La Primera Huella).
2. Si la fórmula funciona para cualquier k, ¡entonces funciona para $k+1$ (Seguir las Huellas una por una)!

Como la fórmula funciona para $n=1$, entonces, por el paso 2, funciona para $n=1+1=2$. Como funciona para $n=2$, por el paso 2, funciona para $n=2+1=3$. Y así sucesivamente, como una fila interminable de pequeños dinosaurios marchando.

¡Por el principio de `Inducción` matemática, hemos demostrado que la fórmula $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ es verdadera para **todos** los números naturales n!

Así es como Terry el Pterodáctilo probó que su atajo para contar huevos fósiles funciona, ¡usando la lógica poderosa de la `Inducción`! Es una herramienta muy útil, no solo para contar fósiles, sino también en economía para demostrar propiedades sobre series, secuencias o algoritmos. ¡Rugido de victoria!