16. Dérivabilité, méthodologie

I. Étude locale

I.1. Définition

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite. C'est la dérivée de f en a.

(m) Pour démontrer qu'une fonction est dérivable en a, il faut donc définir $x \neq a$ et étudier $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a, en essayant donc de simplifier la forme indéterminée.

Exercice d'application 1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors, si f est dérivable en a, elle est continue en a.

I.2. Dérivabilité à gauche et à droite

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est **dérivable à gauche en** a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note alors $f'_g(a)$ cette limite. C'est la dérivée à gauche de f en a.
- On dit que f est **dérivable à droite en** a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note alors $f'_d(a)$ cette limite. C'est la dérivée à droite de f en a.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

(m) L'étude de la dérivabilité à gauche/droite permet donc d'étudier la dérivabilité : si on trouve des limites différentes à gauche et à droite, alors la fonction n'est pas dérivable et si on trouve les mêmes limites, alors la fonction est dérivable et la valeur de la dérivée est cette valeur commune.

Exercice d'application 2. Étudier la dérivabilité à gauche et à droite en 0 de $f : x \mapsto (1 + |x|)^2$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

I.3. Fonction dérivée

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si $\forall a \in I$, f est dérivable en a. On note alors $f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a) \end{cases}$ la dérivée de f sur I.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors f est continue sur I (la réciproque étant fausse).

I.4. Opérations usuelles

Proposition. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a, alors :

- $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables en a et on a :
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \text{ et } (f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Proposition. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors, $g \circ f$ est dérivable en a et on a :
$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

(m) Ces deux résultats nous permettent d'affirmer qu'une somme/produit de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I, qu'un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable sur I et qu'une composée de fonctions dérivables est dérivable (à condition que g soit dérivable sur $f(I)$, l'ensemble des valeurs que prend la fonction f, si l'on étudie $g \circ f$).

(m) Avant de faire une étude de fonction et de la dériver, il faut démontrer que la fonction étudiée est dérivable ! C'est en général les résultats précédents que l'on utilise pour justifier que des fonctions construites à partir de fonctions usuelles sont dérivables.

Exercice d'application 3. Déterminer le domaine de définition et de dérivation des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.
2) $f_2 : x \mapsto \ln\left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right)$.
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)$.
4) $f_4 : x \mapsto x^{\frac{x}{x-1}}$.

Exercice d'application 4. On reprend la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ de l'exercice 1.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2) La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3) La fonction f' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposition. Soit $f : I \to J$ continue et bijective. On a alors $f^{-1} : J \to I$ bien définie. Soit $a \in I$. Alors, si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a :
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

II. Étude globale

II.1. Condition nécessaire d'extremum local

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que :

- f admet un maximum local en a si $\exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, \ f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum local en a si $\exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, \ f(x) \geq f(a)$.
- f admet un extremum local en a si elle y admet un minimum local ou un maximum local.

Proposition. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in]a,b[$. Alors, si f admet un extremum local en x_0, on a $f'(x_0) = 0$.

m Cette propriété n'est vraie que si x_0 n'est pas au bord de l'intervalle de définition de la fonction. Elle est en général utilisée pour trouver les extrema d'une fonction, qui sont à chercher parmi les valeurs où la dérivée s'annule ou aux bords de l'intervalle. Étudier les variations de la fonction (et donc le signe de la dérivée) permet de vérifier si un point est un extrema local ou non.

Exercice d'application 5. Déterminer les extrema de $f : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 6. Déterminer les extrema de $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\left]0, \dfrac{2}{\pi}\right]$.

II.2. Théorème de Rolle

Théorème. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

m Ce théorème est la plupart du temps utilisé pour construire des points où la dérivée s'annule. En particulier, si une fonction s'annule en a et b, alors (si la fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$), la dérivée s'annule sur $]a,b[$. Si on peut réappliquer le théorème de Rolle, alors entre deux valeurs où la dérivée s'annule, la dérivée seconde s'annule au moins une fois, etc.

Exercice d'application 7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $x \in]a,b[$ fixé dans tout l'exercice. On pose $g : t \mapsto f(t) - k(t-a)(t-b)$ où $k \in \mathbb{R}$ sera déterminée en question 1.

1) Déterminer la valeur de k pour que $g(x) = 0$.
2) En déduire qu'il existe $c, d \in]a,b[$ tels que $g'(c) = g'(d) = 0$ avec $c < d$.
3) En déduire qu'il existe $e \in]a,b[$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(e)$.

Exercice d'application 8. Donner un exemple de fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle mais où il n'y a pas unicité du point d'annulation de la dérivée sur l'intervalle ouvert.

II.3. Fonctions lipschitziennes

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne de rapport $K > 0$ (ou qu'elle est K-lipschitzienne) sur I si :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Définition. On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe $K > 0$ tel que f soit K-lipschitzienne.

Proposition. Si f est lipschitzienne sur I, alors f est continue (mais n'est pas forcément dérivable).

Exercice d'application 9. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lipschitzienne de rapport K avec $K \in]0,1[$.

1) Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$, c'est à dire que f admet un point fixe sur $[0,1]$.

2) On fixe $u_0 \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - x_0| \leq K|u_n - x_0|$. *On rappelle que* $f(x_0) = x_0$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - x_0| \leq K^n|u_0 - x_0|$.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

3) On suppose qu'il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = x_1$. Montrer que $x_1 = x_0$.

II.4. Théorèmes des accroissements finis

Théorème. Égalité des accroissements finis. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Théorème. Inégalité des accroissements finis.
- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in]a,b[,\ m \leq f'(x) \leq M$. Alors :
$$\forall x, y \in [a,b],\ x \neq y,\ \text{on a } m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M.$$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose f continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et que f' est bornée par K sur l'intérieur de I. Alors, f est K-lipschitzienne sur I, autrement dit on a :
$$\forall x, y \in I,\ |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|.$$

m L'égalité/inégalité des accroissements finis sont en général utilisées pour démontrer des inégalités portant sur une fonction f en connaissant un encadrement de f'. L'inégalité des accroissements finis est un peu moins précise que l'égalité des accroissements finis (elle ne donne qu'une inégalité avec des inégalités larges).

Exercice d'application 10. Soit $x > 1$. Montrer à l'aide des accroissements finis que $\dfrac{\ln(x)}{x-1} > \dfrac{1}{x}$.

Exercice d'application 11. Montrer à l'aide des accroissements finis que arctan est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $|f'|$ soit majorée par K, alors f est K-lipschitzienne sur I.

II.5. Fonctions monotones

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I (que l'on note $\mathring{I}$). Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I (que l'on note $\mathring{I}$). Alors :

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \\ f' \text{ ne s'annule sur aucun intervalle} \\ \text{non réduit à un point de } \mathring{I} \end{array}\right.$.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \\ f' \text{ ne s'annule sur aucun intervalle} \\ \text{non réduit à un point de } \mathring{I} \end{array}\right.$.

m La plupart du temps, on utilise ces résulats dans le sens indirect pour justifier qu'une fonction dérivable est monotone/strictement monotone. La seconde proposition nous permet de justifier la stricte monotonie d'une fonction à condition que la dérivée soit de signe constant et ne s'annule qu'en des valeurs isolées.

Exercice d'application 12. Montrer que $f : x \mapsto x - \arctan(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 13. La fonction $f : x \mapsto x - \cos(2x)$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

II.6. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose également que $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l$. Alors :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Théorème. De prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et dont la dérivée est continue). On suppose que $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_0 \\ \lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l_1 \end{array}\right.$. Alors, la fonction f prolongée par $f(a) = l_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $f'(a) = l_1$.

m Ce théorème est en général utilisé pour recoller les solutions d'une équation différentielle que l'on a résolu sur différents intervalles. Il permet en effet de ne pas avoir à calculer de taux d'accroissements mais uniquement des limites de fonctions et de leurs dérivées et de justifier que l'on a les mêmes limites à gauche et à droite pour arriver à prolonger une fonction en fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice d'application 14. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) \quad \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & a + bx \quad\quad \text{si } x > 0 \end{cases}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la valeur de a pour que f soit prolongeable en fonction continue sur $\mathbb{R}$. Que vaut alors $f(0)$?

2) On considère la fonction f ainsi prolongée (que l'on note encore f). Déterminer la valeur de b pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Que vaut alors $f'(0)$?

III. Dérivées d'ordre supérieur

III.1. Définition

Notation. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont n fois dérivables et telles que $f^{(n)}$ (la dérivée n-ième de f) soit continue sur I.

Définition. On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I (autrement dit l'ensemble des fonctions f telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$).

III.2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont de classes $\mathcal{C}^n$ sur I, alors $f + g$ et $f \times g$ sont de classes $\mathcal{C}^n$ sur I et on a :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \text{ et } (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

La seconde formule est la formule de Leibniz.

De plus, si g ne s'annule par sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur J. Alors, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

m Ces deux résultats nous permettent d'affirmer qu'une somme/produit de fonctions $\mathcal{C}^n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, qu'un quotient de fonctions $\mathcal{C}^n$ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas est $\mathcal{C}^n$ sur I et qu'une composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$ (à condition que g soit $\mathcal{C}^n$ sur $f(I)$, l'ensemble des valeurs que prend la fonction f, si l'on étudie $g \circ f$).

m C'est en général les résultats précédents que l'on utilise pour justifier que des fonctions construites à partir de fonctions usuelles sont de classes $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice d'application 15. On pose $f : x \mapsto x^2 e^{-3x}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^n$ et bijective. On a alors $f^{-1} : I \to J$ bien définie. Alors, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

III.3. Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lim\limits_{x \to a^-} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f^{(k)}(x) = l_k \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction f prolongée par $f(a) = l_0$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)}(a) = l_k$.

Remarque : Attention à un point quand on prolonge des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$: la seule valeur que l'on pose est la valeur de $f(a)$. Les valeurs de $f'(a)$, $f''(a)$, etc. sont calculées par le théorème mais elles ne sont pas « posées » ! En effet, on ne peut pas poser la valeur de $f'(a)$ puisque $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et une fois $f(a)$ fixé, elle est donc définie de manière unique !

Exercice d'application 16. On pose $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) \quad \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & a + bx + cx^2 \quad \text{si } x > 0 \end{array} \right.$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs de a, b, c pour que f se prolonge en fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2) f est-elle alors de classe $\mathcal{C}^3$?

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Soit $x \neq 0$. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x}{(1+|x|)x} = \frac{1}{1+|x|}.$$

On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$. La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

Exercice d'application 2. Pour $x>0$, on a $f(x)=(1+x)^2$ et pour $x<0$, on a $f(x)=(1-x)^2$. Ceci entraine que :

$$\forall x>0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^2-1}{x} = 2+x$$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$. La fonction f est donc dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=2$. De plus :

$$\forall x<0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1-x)^2-1}{x} = -2+x$$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$. La fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0)=-2$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 puisque les valeurs des dérivées à gauche et à droite en 0 de f ne sont pas les mêmes.

Exercice d'application 3.

1) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables). On a pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f_1'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

2) f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. En effet, ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $1+e^{-\frac{1}{x}}>0$. On a donc, pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f_2'(x) = \left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right) \times \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}.$$

3) Remarquons déjà que pour $x\in\mathbb{R}$, on a $1-\cos(x)\geq 0$ et $1+\cos(x)\geq 0$. Les valeurs à enlever sont donc celles pour lesquelles $\cos(x)=\pm 1$, c'est à dire quand $x\equiv 0\ [\pi]$. On en déduit que f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ comme composée de fonctions dérivables. Puisque pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, on a $f_3(x)=\frac{1}{2}(\ln(1-\cos(x))-\ln(1+\cos(x)))$, on a :

$$f_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} - \frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)}\right) = \frac{\sin(x)}{2} \times \frac{(1+\cos(x))+(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

4) Le domaine de définition de $x\mapsto \frac{x}{x-1}$ est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Le domaine de définition de $x\mapsto x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$ est $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que f_4 est définie sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. Elle est dérivable sur ce domaine comme composée de fonctions dérivables puisque pour $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, on a :

$$f_4(x) = e^{\frac{x}{x-1}\ln(x)}.$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (on peut écrire $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ pour simplifier le calcul de la dérivée) :

$$f_4'(x) = \left(-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) e^{\frac{x}{x-1}\ln(x)} = \frac{(x-1-\ln(x))}{(x-1)^2} x^{\frac{x}{x-1}}.$$

Exercice d'application 4.

1) On avait montré que f était dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. Sur $\mathbb{R}^*$, f est un quotient de fonctions dérivables donc elle est dérivable (puisque $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$). Pour $x > 0$, on a $|x| = x$ donc pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Pour $x < 0$, on a $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ donc pour $x \in \mathbb{R}_-^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit finalement que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^2}$.

2) f' est continue sur $\mathbb{R}$ car d'après la question précédente, elle s'écrit comme un quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

3) Remarquons déjà que f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à étudier la dérivabilité en 0. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{(1+|x|)^2} - 1}{x} = \frac{1-(1+|x|)^2}{x(1+|x|^2)} = \frac{-2|x| - |x|^2}{x(1+|x|)^2}.$$

Pour $x > 0$, on a donc $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = \dfrac{-2-x}{(1+|x|)^2}$ qui tend vers -2 quand x tend vers 0^+. Pour $x < 0$, on a $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = \dfrac{2-x}{(1+|x|)^2}$ qui tend vers 2 quand x tend vers 0^-. On en déduit que f' n'est pas dérivable en 0.

Exercice d'application 5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$. Les extrema locaux de f sont donc éventuellement en 0 et en $\dfrac{3}{4}$. Or, après réalisation du tableau de signes de f' et du tableau de variations de f, on a que f est décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right[$. Ceci entraine que f n'a pas d'extremum en 0 mais qu'elle a un minimum (global) en $\dfrac{3}{4}$.

Exercice d'application 6. f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{2}{\pi}\right]$ comme composée de fonctions dérivables. On remarque également qu'elle est toujours comprise entre -1 et 1 (car le sinus est compris entre -1 et 1). Au bord droit de l'intervalle, on a $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ donc f admet un maximum en ce point. Pour les extrema de f sur $\left]0, \dfrac{pi}{2}\right[$, on cherche les points d'annulation de la dérivée. Pour $x \in \left]0, \dfrac{pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

La dérivée s'annule donc quand $\frac{1}{x} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Elle s'annule donc pour les x de la forme $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ avec k entier. Pour être dans l'intervalle $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$, on doit avoir $k \in \mathbb{N}$ (pour $k=0$, on retrouve le bord droit de l'intervalle). En ces valeurs, on a $f(x_k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k$. On a donc f qui admet un maximum en x_k si k est pair et un minimum si k est impair. *Il n'est pas utile d'étudier les variations ici car on sait que f est comprise entre -1 et 1 donc dès qu'on a une valeur de f qui vaut ± 1, on sait que l'on a un extremum et puisque ce sont les seules valeurs où la dérivée s'annule, il n'y a pas d'autres extrema.*

Exercice d'application 7.

1) On a $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - k(x-a)(x-b) = 0$. Puisque $x \neq a$ et $x \neq b$, on en déduit qu'il faut prendre :

$$k = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

2) Remarquons que g est dérivable sur $[a,b]$ (par somme de fonctions dérivables car f l'est) donc elle est en particulier dérivable sur $]a,x[$ et $]x,b[$ et continue sur $[a,x]$ et $[b,x]$. Puisque $g(a) = g(x) = g(b) = 0$, on en déduit qu'il existe $c \in\ ]a,x[$ tel que $g'(c) = 0$ d'après le théorème de Rolle et de même il existe $d \in\ ]x,b[$ tel que $g'(d) = 0$. On a donc bien $c < d$ tels que $g'(c) = g'(d)$.

3) On a g' dérivable sur $[a,b]$ par somme/produit de fonctions deux fois dérivables car f est deux fois dérivable sur $[a,b]$. On a donc en particulier g' dérivable sur $]c,d[$ et continue sur $[c,d]$. Puisque $g(c) = g(d) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $e \in\ ]c,d[\ \subset\ ]a,b[$ tel que $g''(e) = 0$. Or, on a $g''(e) = f''(e) - 2k$. On en déduit donc que :

$$f''(e) - 2\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(e).$$

Exercice d'application 8. On peut prendre par exemple $x \mapsto \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Sa dérivée, la fonction cosinus s'annule à la fois en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$ (et sin vérifie clairement les hypothèses du théorème de Rolle).

Exercice d'application 9.

1) f est bien continue sur $[0,1]$ car elle est lipschitzienne. Si on pose $g : x \mapsto f(x) - x$, elle est donc continue comme différence de fonctions continues. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ (car f est à valeurs dans $[0,1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car f est à valeurs dans $[0,1]$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est à dire tel que $f(x_0) = x_0$.

2)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors puisque f est K-lipschitzienne :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - x_0| &= |f(u_n) - f(x_0)| \\ &\leq K|u_n - x_0|. \end{aligned}$$

b) On montre ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n - x_0| \leq K^n|u_0 - x_0|$. On a alors :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - x_0| &\leq K|u_n - x_0| \\ &\leq K^{n+1}|u_0 - x_0|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie d'après l'hypothèse de récurrence et parce que l'on fait des produits de termes positifs (ce qui permet de ne pas changer le sens des inégalités). La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Puisqu'elle est initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

c) Puisque $K \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n = 0$. Or, d'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-K^n|u_0 - x_0| \leq u_n - x_0 \leq K^n|u_0 - x_0|.$$

D'après le théorème des gendarmes, puisque les suites à gauche et à droite de l'inégalité tendent vers 0, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - x_0) = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

3) On peut faire deux preuves différentes de ce résultat. Tout d'abord une preuve directe. Si il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = x_1$. On a alors puisque f est K-lipschitzienne :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| &= |f(x_1) - f(x_0)| \\ &\leq K|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Si $x_1 \neq x_0$, on a alors $|x_1 - x_0| > 0$. En divisant l'inégalité précédente par $|x_1 - x_0|$, on a alors $1 \leq K$: absurde ! On en déduit que $x_0 = x_1$.

On peut faire une autre preuve en utilisant ce qui a été fait avant. Si il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = x_1$, alors on peut reprendre la question 2 et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_1$ (la seule hypothèse sur x_0 utilisée dans la question 2 était que x_0 était un point fixe de f, ce qui est aussi le cas de x_1). Par unicité de la limite, on en déduit que $x_1 = x_0$.

Exercice d'application 10. Soit $x > 1$. On a ln dérivable sur $]1,x[$ et continue sur $[1,x]$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]1,x[$ tel que :

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Puisque $0 < 1 < c < x$, on a $\frac{1}{c} > \frac{1}{x}$ ce qui entraine bien $\frac{\ln(x)}{x-1} > \frac{1}{x}$.

Exercice d'application 11. arctan est dérivable (et donc aussi continue) sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a donc que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\arctan'(x)| \leq 1$. Ceci entraine que si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, alors $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq 1 \times |y - x|$ d'après l'inégalité des accroissements finis. La fonction arctan est donc 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 12. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue) et pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$. On a donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 13. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2\sin(2x)$. On a alors $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - 2 = -1 < 0$. Ceci entraine que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 14.

1) On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \arctan(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} a + bx = a$. On doit donc avoir $a = 0$ pour que f se prolonge par continuité en 0. Dans ce cas, on doit poser $f(0) = 0$ pour avoir f continue sur $\mathbb{R}$ (elle est bien continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ car définie avec des fonctions continues et continue en 0 par théorème de prolongement par continuité).

2) f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. On a également f qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x < 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 1$. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = b$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = b$. Ceci entraine que si $b = 1$, alors par théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 15. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Si on pose $g : x \mapsto x^2$, on a $g' : x \mapsto 2x$, $g'' : x \mapsto 2$ et $\forall k \geq 3$, $g^{(k)} = 0$. Si on pose $h : x \mapsto e^{-3x}$, on a $h^{(k)} : x \mapsto (-3)^k e^{-3x}$. D'après la formule de Leibniz, on a donc :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\
&= x^2(-3)^n e^{-3x} + \binom{n}{1} 2x(-3)^{n-1}e^{-3x} + \binom{n}{2} 2(-3)^{n-2}e^{-3x} \\
&= ((-3)^n x^2 + 2n(-3)^{n-1}x + n(n-1)(-3)^{n-2})e^{-3x}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 16. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) & \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & a + bx + cx^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) On a déjà f de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x < 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. On a donc :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0.$$

On calcule de même que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = 2c$. Ceci entraine que si on a $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$, alors la fonction f se prolonge en fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ si on pose $f(0) = 0$. On a alors dans ce cas $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 0$.

2) f est bien de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Il reste le problème en 0. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f'''(x) = 0$ (calcul direct) et pour $x < 0$, on a :

$$f'''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}.$$

On a donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f'''(x) = -2$. Puisque les limites à gauche et à droite en 0 de f''' ne sont pas les mêmes, on en déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.