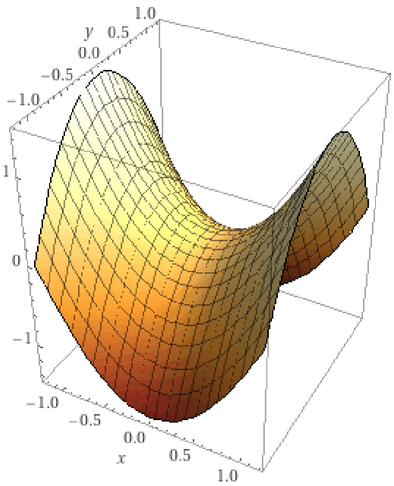
34. Fonctions de deux variables, méthodologie

I. Graphe d'une fonction de deux variables

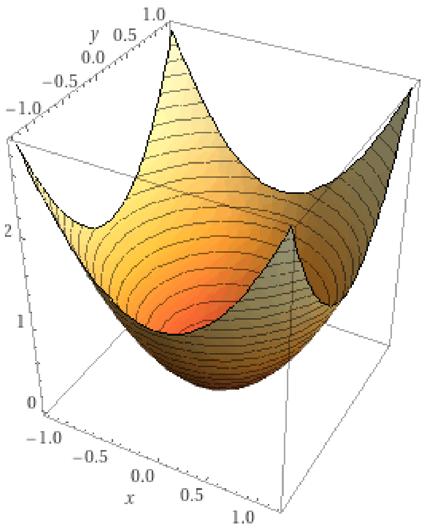
Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le graphe de f est l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x,y)$. Il est souvent représenté dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

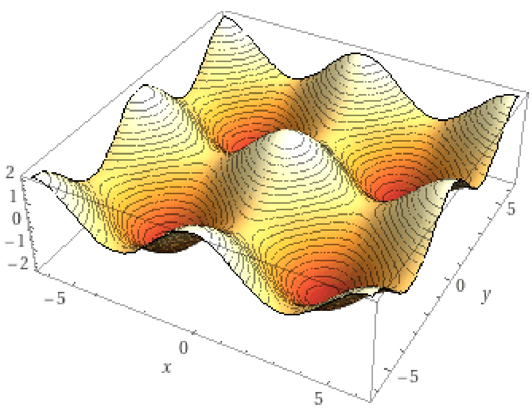
Ci-dessous le graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$ réprésenté. On peut visualiser sur le tracé les courbes qui balayent la surface à x fixé ($y \mapsto x_0^2 - y^2$) et à y fixé ($x \mapsto x^2 - y_0^2$).



Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intersection du graphe de f et du plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe de niveau λ de f. Il s'agit donc de la courbe d'équation $f(x,y) = \lambda$. *Il s'agit du tracé de tous les points « d'altitude » λ.*

Ci-dessous les graphes de $f(x,y) = x^2 + y^2$ et de $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$ avec les lignes de niveaux représentées.





II. Topologie dans $\mathbb{R}^2$

II.1. Ouverts

Définition. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On appelle :

- boule ouverte de centre A et de rayon r l'ensemble $B(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||\overrightarrow{AM}|| < r\}$.
- boule fermée de centre A et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||\overrightarrow{AM}|| \leq r\}$.

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. On dit que D est ouvert si $\forall A \in D, \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ B(A,\varepsilon) \subset D$.

(m) Pour montrer qu'un ensemble D est ouvert, il faut prendre un point quelconque dans cet ensemble et montrer que tous les points « proches » (à distance strictement inférieure à ε) de ce dernier sont dans D.

Exercice d'application 1. Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:

1) $O_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0 \right\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2) $O_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ |y| < 1 \right\} = \mathbb{R} \times]-1,1[$.

Exercice d'application 2. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas ouverts :

1) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x+1 \right\}$.

2) $F_2 = [-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice d'application 3. Union et intersection d'ouverts.

1) Soient $U, V \subset \mathbb{R}^2$ deux ensembles ouverts. Montrer que $U \cup V$ et $U \cap V$ sont ouverts.

2) Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, alors $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ est ouvert. En explicitant un contre exemple, montrer qu'il existe $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ ouverts tels que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ ne soit pas ouvert. *On pourra prendre des boules centrées en O.*

II.2. Limite et continuité

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $A \in D$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim\limits_{M \to A} f(M) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall M \in D, \ ||\overrightarrow{AM}|| \leq \eta \Rightarrow |f(M) - l| \leq \varepsilon.$$

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $A \in D$. On dit que f est continue en A si $\lim\limits_{M \to A} f(M) = f(A)$, autrement dit si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall M \in D, \ ||\overrightarrow{AM}|| \leq \eta \Rightarrow |f(M) - f(A)| \leq \varepsilon.$$

Proposition. Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

III. « Dérivation » d'une fonction de deux variables

III.1. Dérivées directionnelles

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $A \in D$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est dérivable en A dans la direction $\vec{v}$ si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t}$ existe et est finie. Si c'est le cas, on note cette limite $D_{\vec{v}}(f)(A)$. *C'est la dérivée de f en A dans la direction $\vec{v}$.*

III.2. Dérivées partielles

Définition. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $A \in D$. On dit que f admet des dérivées partielles en A si f est dérivable en A dans les directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = D_{\vec{i}}(f)(A) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(A) = D_{\vec{j}}(f)(A).$$

Proposition. Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(m) Tous les calculs de dérivées partielles se font « comme d'habitude » en dérivant, soit par rapport à x, soit par rapport à y, en considérant que l'autre variable est une constante quand on dérive.

Exercice d'application 4. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1) $e : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2) $f : (x,y) \mapsto x^3 e^y + \cos(2x - y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3) $g : (x,y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
4) $h : (x,y) \mapsto x^y$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

III.3. Gradient

Définition. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $A \in D$. On suppose que f admet des dérivées partielles en A. Alors, le gradient de f est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\nabla f(A) = \mathrm{grad}_f(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 5. Déterminer le gradient en $(1,2)$ de $f(x,y) = x^2 e^y + y\ln(x)$.

IV. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

IV.1. Définition et développement limité

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si f admet des dérivées partielles en tout point de D et que ces dernières sont continues sur D.

Théorème. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $A \in D$. Alors, f admet un développement limité à l'ordre 1 en A de la forme :

$$f(A+\vec{v}) = f(A) + \langle \nabla f(A), \vec{v} \rangle + o(||\vec{v}|| \text{ ou encore } f(M) = f(A) + \langle \nabla f(A), \overrightarrow{AM} \rangle + o(||\overrightarrow{AM}||.$$

Autrement dit, en notant $A = (x_A, y_A)$, on a :

$$f(x,y) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A) \times (x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \times (y - y_A) + o\left(\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}\right).$$

Proposition. Si f est $\mathcal{C}^1$ sur D, alors elle est continue sur D.

IV.2. Plan tangent

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $A = (x_A, y_A) \in D$. Alors le plan tangent de f en A est le plan $T_f(A)$ d'équation :

$$T_f(A) : z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A) \times (x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \times (y - y_A).$$

Exercice d'application 6. Déterminer le plan tangent en (x_0, y_0) à $f(x,y) = x^2 - y^2$. Pour quelle(s) valeur(s) de (x_0, y_0) ce plan est-il parallèle au plan d'équation $z = 0$? Même question avec le plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 7. Déterminer le plan tangent en $(-1, 1)$ à $f(x,y) = x\ln(y) + \sin(x+y)$.

IV.3. Règle de la chaîne et applications

Théorème. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$ telles que $\forall t \in I,\ \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in D$. Alors, la fonction $g : t \mapsto f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

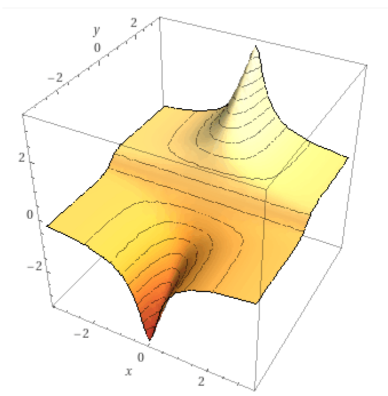
Autrement dit, on a $\forall t \in I,\ (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.

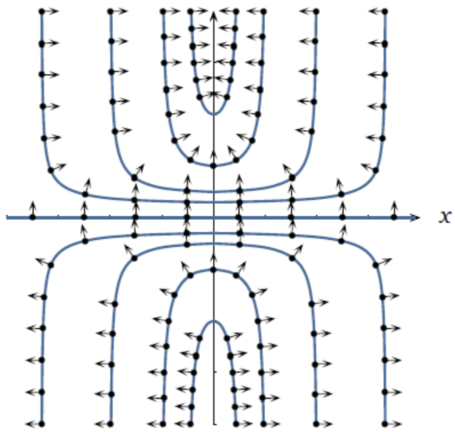
Exercice d'application 8. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Pour $t > 0$, on pose $\varphi(t) = f(t\ln(t), e^{2t})$. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Proposition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Alors, pour tout $A \in D$ et pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, f admet une dérivée en A dans la direction $\vec{v}$ et :

$$D_{\vec{v}}(f)(A) = \langle \nabla f(A), \vec{v} \rangle.$$

Remarque : La proposition précédente nous permet d'interpréter géométriquement le gradient. Elle signifie que le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f et dirigé dans le sens des pentes croissantes. Autrement dit, se déplacer dans le sens du gradient revient à « monter en altitude », dans le sens inverse à « descendre en altitude » et se déplacer orthogonalement au gradient revient à rester sur la même ligne de niveau, donc à « rester à la même altitude ». Ci-dessous, le tracé de $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2y^2}}$ avec les lignes de niveau à gauche et à droite, les lignes de niveaux avec les gradients dessinés dessus (la norme des gradients sur la figure n'est pas bonne pour que l'on voit quelque chose. Normalement, plus la pente est forte, plus le gradient a une norme grande).





Dans les algorithmes de descente de gradient, on cherche en général à minimiser une fonction de plusieurs variables. En partant d'un point A_0, on calcule le gradient de la fonction de coût en ce point et on se déplace au point $A_1 = A_0 - h\nabla f(A_0)$ avec h petit (le pas de discrétisation). On s'est donc à priori rapproché d'un minimum local de f. On itère ensuite ce procédé jusqu'à arriver vers (on l'espère !) le minimum de f.

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Soient $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose alors $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. *En physique, on noterait juste $g(u, v) = f(x, y)$ en gardant à l'esprit que x et y dépendent des variables u et v.* Alors, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v} \times \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \times \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{m}}$ Ce résultat est très souvent utilisé pour étudier des équations aux dérivées partielles où l'on fait un changement de variable et où on cherche à dériver « f » par rapport aux variables u et v. *On a noté cette fonction g dans le théorème précédent car ce n'est formellement pas la même fonction.*

Exercice d'application 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x, y) = f(x - y, y - x)$. Déterminer $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

Exercice d'application 10. Si P, V, T représentent la pression, le volume et la température d'un gaz parfait (on a donc $PV = nRT$), montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial V} \times \dfrac{\partial V}{\partial T} \times \dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$.

Exercice d'application 11. On souhaite déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, 0) = \cos(x)$.

1) Soit le changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$. Déterminer x et y en fonction de u et v.
2) On note alors $g(u, v) = f(x, y)$. Déterminer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de f.
3) En déduire l'expression de la fonction g, puis celle de la fonction f.

IV.4. Extrema locaux

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ et $A \in D$. On dit que f a un maximum (respectivement minimum) local en A si f est majorée (resp. minorée) par $f(A)$ au voisinage de A.

Proposition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Soit $A \in D$. On suppose que f admet un extremum local en A. Alors, $\nabla f(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Autrement dit,* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

m Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction de deux variables définie sur un ouvert, on étudie détermine donc les $A = (x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\nabla f(A) = \vec{0}$. Pour déterminer s'il s'agit vraiment d'extrema, on étudie alors le signe de $f(x_A + h, y_A + k) - f(x_A, y_A)$ en fonction de $h, k \in \mathbb{R}$. Si pour (h, k) proches de 0, ce signe n'est pas constant alors il n'y a pas d'extremum local en A, sinon, il y en a un.

Exercice d'application 12. Déterminer les extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1) $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$.
2) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$.

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) O_1 est un demi plan (les abscisses strictement positives). Si on fixe $A \in O_1$, on a alors $x_A > 0$. On en déduit que la boule de centre A et de rayon $\frac{x_A}{2} > 0$ est incluse dans O_1. O_1 est donc un ensemble ouvert.

2) Graphiquement, O_2 est un cylindre (on peut le visualiser comme un cylindre de centre la droite $y = 0$ et dont les bords (non inclus) sont $y = 1$ et $y = -1$). Soit $A \in O_2$. On a alors $|y_A| < 1$. On pose alors $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(|1-y_A|, |1+y_A|) > 0$ (graphiquement, ε représente le plus petit écart entre y_A et les droites $y = 1$ et $y = -1$). On a alors que la boule de centre A et de rayon ε est incluse dans O_2 donc on a un ensemble ouvert.

Exercice d'application 2.

1) On a $A = (0, 1) \in F_1$. Fixons $\varepsilon > 0$. On a alors $\left((\frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \in B(A, \varepsilon)$ alors que $\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \notin F_1$. On en déduit que quelque soit le $\varepsilon > 0$, la boule de centre A et de rayon ε n'est pas incluse dans F_1. F_1 n'est donc pas ouvert. *Graphiquement, F_1 est une droite et n'a pas d'aire donc dès qu'on trace une boule de centre un des points de la droite et de rayon strictement positif, elle n'est pas incluse dans la droite.*

2) On prend le point $(1, 1) \in F_2$. Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, la boule de centre $(1, 1)$ et de rayon ε ne va pas être incluse dans F_2 (il suffit de considérer le point $\left(1, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. On en déduit que F_2 n'est pas ouvert.

Exercice d'application 3.

1) Soit $A \in U \cup V$. Puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset U$. Puisque $U \subset U \cup V$, on a $B(A, \varepsilon) \subset U \cup V$ donc $U \cup V$ est ouvert.

Remarquons que si $U \cap V = \emptyset$, alors $U \cap V$ est ouvert (il n'y a aucun point dans cet ensemble). Supposons à présent $U \cap V \neq \emptyset$. Alors il existe $A \in U \cap V$. Puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B(A, \varepsilon_1) \subset U$. De même, puisque V est ouvert, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $B(A, \varepsilon_2) \subset V$. En prenant alors $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, alors $B(A, \varepsilon) \subset U \cap V$ ce qui prouve que $U \cap V$ est ouvert.

2) Puisque U_1 est ouvert, alors en effectuant la même preuve que dans la première question, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ ouvert.

On remarque que si l'on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = B\left(O, \frac{1}{n}\right)$, alors les U_n sont tous ouverts et on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \{O\}$ (en effet, O est clairement dans toutes les boules centrées en O et si $A \neq O$, alors en prenant n tel que $\frac{1}{n} < ||\vec{OA}||$ (ce qui est possible car $\frac{1}{n}$ tend vers 0), alors on a $A \notin U_n$). Or, $\{O\}$ n'est pas ouvert, ce qui prouve qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ensemble ouvert.

Exercice d'application 4.

1) On a sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}$.

2) On a sur $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2e^y - 2\sin(2xy)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3e^y + \sin(2x - y)$.

3) On a, sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

4) On a, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $h(x,y) = e^{y\ln(x)}$ et :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln(x)} = yx^{y-1} \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^{y\ln(x)} = \ln(x)x^y.$$

Exercice d'application 5. On se place sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^y + \frac{y}{x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^y + \ln(x).$$

En évaluant en $(1,2)$, on en déduit que :

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} e^2+2 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 6. On a f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$. On en déduit que le plan tangent de f en (x_0,y_0) est d'équation :

$$z = x_0^2 - y_0^2 + 2x_0(x-x_0) - 2y_0(y-y_0) = 2x_0x - 2y_0y - 1x_0^2 + y_0^2.$$

Pour être parallèle au plan d'équation $z=0$, il faut (et il suffit) d'avoir un vecteur normal colinéaire à celui de $z=0$, autrement dit de colinéaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or, un vecteur normal au plan tangent à f en (x_0,y_0) est $\begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On en déduit que l'on a un plan tangent parallèle à $z=0$ uniquement en $(0,0)$ (on a d'ailleurs un plan tangent exactement d'équation $z=0$).

De même, pour avoir un plan de vecteur normal colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il faut avoir $\begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui n'arrive donc que pour le point $(x_0,y_0) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice d'application 7. On se place sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(y) + \cos(x+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} + \cos(x+y).$$

Puisque $f(-1,1) = 0$, on en déduit que l'équation du plan tangent à f en $(-1,1)$ est :

$$z = 0 + 1(x-(-1)) + 0(y-1) \Leftrightarrow z = x+1.$$

Exercice d'application 8. D'après la règle de la chaine, φ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t>0$:

$$\varphi'(t) = (\ln(t)+1)\frac{\partial f}{\partial x}(t\ln(t), e^{2t}) + 2e^{2t}\frac{\partial f}{\partial y}(t\ln(t), e^{2t}).$$

Exercice d'application 9. On applique la règle de la chaine. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1\times\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-x) - 1\times\frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-x) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -1\times\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-x) + 1\times\frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-x).$$

On en déduit que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$

Exercice d'application 10. On a $PV = nRT$ donc $P = \dfrac{nRT}{V}$, $V = \dfrac{nRT}{P}$ et $T = \dfrac{PV}{nR}$. On a donc :

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2},\ \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{P} \text{ et } \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{nR}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} &= -\frac{nRT}{V^2}\times\frac{nR}{P}\times\frac{V}{nR}\\ &= -\frac{nRT}{PV}\\ &= -1.\end{aligned}$$

Exercice d'application 11.

1) On résout le système $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ pour obtenir $x = \dfrac{u+v}{2}$ (par somme) et $y = \dfrac{u-v}{2}$ (par différence).

2) D'après la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

3) On en déduit que g vérifie l'équation $2\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v)$. Fixons alors $v\in\mathbb{R}$. On a alors une équation différentielle en u, ce qui entraine qu'il existe $\lambda(v)\in\mathbb{R}$ (λ ne dépend pas de u mais peut dépendre de v !) telle que :

$$\forall u\in\mathbb{R},\ g(u,v) = \lambda(v)e^{u/2}.$$

En repassant à la fonction f, on en déduit que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (\lambda(x-y))\, e^{(x+y)/2}.$$

Il s'agit bien ici de la fonction λ évaluée en $x-y$ qu'il reste à déterminer.

Or, on veut que pour $y=0$, $f(x,0) = \cos(x)$. On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x) = \lambda(x)e^{x/2}$, soit que $\lambda(x) = \cos(x)e^{-x/2}$. On en déduit donc finalement que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \cos(x-y)\, e^{-(x-y)/2}e^{(x+y)/2} = \cos(x-y)\, e^{y}.$$

On peut vérifier que cette fonction convient bien puisque :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y)e^y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -(-\sin(x-y))e^y + \cos(x-y)e^y$$

donc la somme des deux redonne bien f.

Exercice d'application 12. Les fonctions étudiées sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert.

1) f est $\mathcal{C}^1$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3(1-x)^2y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(1-x)^3$. Si on veut la seconde dérivée partielle qui s'annule, on doit donc avoir $y = 0$ ou $x = 1$. Or, si $x = 1$, la première dérivée partielle ne s'annule pas. Si $y = 0$, pour que la première dérivée partielle s'annule, il faut $x = 0$. On en déduit que le seul point critique est $(0,0)$.

On a $f(0,0) = 0$. De plus, au voisinage de $(0,0)$, on a $(1-x)^3 > 0$ (puisque x est proche de 0 donc $1 - x > 0$). Puisque $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, on en déduit que $f(x,y) \geq 0$ au voisinage de 0 (par exemple pour $(x,y) \in]-1,1[^2$). On a donc un minimum local en 0.

2) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x$. On en déduit que le gradient de f est nul si et seulement si $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases}$. On doit donc avoir $x = y$ et $3x^2 - 2x = 0$, ce qui donne deux solutions : $(0,0)$ et $(2/3, 2/3)$. Il reste à voir si ce sont bien des extrema locaux.

Pour $(0,0)$, en étudiant $f(x,0) = x^3$, on a directement que ce n'est pas un extremum local ($f(x,0)$ est négatif puis positif au voisinage de $(0,0)$).

Pour $(2/3, 2/3)$, on étudie $f(2/3+h, 2/3+k)$ pour $h, k \in \mathbb{R}$. On a $f(2/3, 2/3) = -\dfrac{4}{27}$ et :

$$\begin{aligned}
f(2/3+h, 2/3+k) &= (2/3+h)^3 + (2/3+k)^2 - 2(2/3+h)(2/3+k) \\
&= \frac{8}{27} + \frac{4}{3}h + 2h^2 + h^3 + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}k + k^2 - 2\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}h + \frac{2}{3}k + hk\right) \\
&= -\frac{4}{27} + 2h^2 + h^3 + k^2 - 2hk \\
&= -\frac{4}{27} + (h+k)^2 + h^2 + h^3 \\
&= -\frac{4}{27} + (h+k)^2 + h^2(1+h).
\end{aligned}$$

Or, pour h proche de 0, on a $1 + h > 0$ et on a $(h+k)^2 \geq 0$ et $h^2 \geq 2$. On en déduit par exemple que pour $(h,k) \in]-1,1[^2$, $f(2/3+h, 2/3+k) \geq -\dfrac{4}{27}$. On a donc f qui admet un minimum local en $(2/3, 2/3)$.