Programme de colle, semaine 27

déterminant :

- Nous avons commencé le chapitre sur le déterminant par la définition du déterminant d'une matrice carrée. Nous avons vu comment se traduisait la formule dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ (Sarrus) et pourquoi ne pas utiliser cette formule pour $n \geq 4$ (trop de termes). Nous avons utilisé cette formule pour calculer le déterminant de la transposée et d'une matrice triangulaire.
- Nous avons admis que si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Nous en avons alors déduit l'effet des opérations élémentaires sur le déterminant (en calculant le déterminant des matrices représentant les opérations élémentaires), le fait qu'une matrice A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ et que dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, les déterminants de matrices triangulaires par blocs et le développement par rapport aux lignes/colonnes (nous avons noté $A_{i,j}$ la matrice extraite de A où l'on a effacé la ligne i et la colonne j) et défini $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ le cofacteur d'indice (i, j). Nous avons vu le déterminant de Vandermonde.
- Nous avons ensuite vu la définition de la comatrice et démontré la relation $A\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T A = \det(A)I_n$. Nous en avons déduit comment trouver A^{-1} en fonction de la comatrice.

- Nous avons ensuite défini du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée d'un espace vectoriel E de dimension n. Nous avons vu tout le vocabulaire lié à la construction du déterminant (forme n-linéaire alternée). Nous avons démontré que le déterminant dans la base e est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Nous avons déduit de ceci que si e' était une base de E ssi $\det_e(e') \neq 0$.
- Nous avons démontré que si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Nous avons terminé le chapitre en définissant le déterminant d'un endomorphisme (et démontré qu'il était indépendant de la base dans lequel on le calcule, deux matrices semblables ont donc même déterminant). Nous avons également montré que u est un automorphisme si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et les propriétés usuelles. Nous avons calculé le déterminant d'une symétrie.

Remarques sur le programme : Attention, il n'y a plus de matrices blocs au programme officiel donc plus de déterminant par blocs. La notion d'orientation et de base directe/indirecte n'est plus au programme non plus.

Compétences :

- Savoir déterminer « rapidement » un déterminant 2×2 ou 3×3.
- Utiliser un déterminant pour montrer qu'une matrice est/n'est pas inversible.
- Calculer un déterminant à l'aide d'opérations élémentaires.
- Déterminer une relation de récurrence vérifiée par un déterminant (ou calculer directement le déterminant) à l'aide d'un développement par rapport à une ligne/colonne.
- Utiliser la relation $A \times \mathrm{Com}(A)^T = \det(A)I_n$ pour trouver des informations sur la comatrice.
- Déterminer le déterminant d'un endomorphisme en choisissant la base dans lequel on le calcule afin d'avoir une matrice « simple ».

Questions de cours :

1. Énoncer et démontrer l'expression du déterminant de Vandermonde.
2. Donner la définition de la comatrice de A, énoncer (pas de preuve) la propriété $A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_n$ démontrer la formule donnant A^{-1} si $\det(A) \neq 0$.
3. Montrer qu'une forme n-linéaire est alternée ssi elle est antisymétrique.
4. Donner la définition du déterminant d'une famille de vecteurs $f = (f_1, \ldots, f_n)$ dans une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et du déterminant d'un endomorphisme dans la base e. Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant (en utilisant $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).
5. Énoncer les différentes formules sur les cardinaux : cardinal de l'union (cas disjoint à plusieurs ensembles ou pas forcément disjoint à deux ensembles), du complémentaire, du produit.
6. Déterminer le nombre de p-uplets (ou p-listes) et le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Expliquer la différence avec le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments (attendu : différence entre comptage avec ordre ou sans ordre).
7. Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, la formule de Pascal et le binôme de Newton de manière combinatoire.

Exercices à chercher pour lundi (indications au dos) : TD27 : 3,8,14 ; TD 28 : 7 et 14.

Exercices à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD27 : 3.
- 2ieme du groupe : TD 27 : 8.
- 3ieme du groupe : TD 27 : 14.

Prochain programme : dénombrement + probabilités 1.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

TD 27, exercice 3

- Écrire la matrice graphiquement. Vous devriez normalement avoir un a_1 en position en haut à gauche, un a_2 en position $(2,1),(2,2),(1,2)$, etc. et observer un motif en « L » retourné.
- Procéder alors à des opérations élémentaires pour se ramener à une matrice triangulaire. On pourra en particulier étudier des opérations élémentaires qui retranche une ligne (ou une colonne) à la colonne suivante (ou précédente).
- Vous devriez trouver un déterminant égal à $a_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})$.
- Pour les applications, pour le max, il suffit d'utiliser le résultat précédent en $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$. Pour le minimum, il suffit d'inverser (à noter que si vous n'arrivez pas à appliquer la formule, vous pouvez appliquer la même méthode avec des opérations élémentaires).

TD 27, exercice 8

- Pour la première question, on utilisera la définition du déterminant (avec la somme sur les permutations) et le fait qu'une somme/produit de conjugué est égal à la somme/le produit des conjugués.
- Pour la deuxième question, on justifiera que $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$, puis on utiliser le fait que $\det(M \times N) = \det(M)\det(N)$ appliqué à des matrices M et N bien choisies.

TD 27, exercice 14 :

- Justifiez rapidement la linéarité. Vous pouvez également justifier que φ est une symétrie.
- N'oubliez pas que la matrice de φ sera de taille $n^2 \times n^2$.
- Vous disposez ensuite de deux façons d'écrire la matrice (au choix) : soit en l'écrivant dans la base canonique mais en ordonnant les vecteurs convenablement, par exemple $(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}, E_{12}, E_{21}, E_{13}, E_{31}$ On pourra alors ensuite procéder à des transpositions sur les lignes pour se ramener à une matrice diagonale et trouver le déterminant.
- On peut aussi en utilisant le fait que φ est une symétrie trouver l'espace par rapport auquel on fait la symétrie (on rappelle, $F = \ker(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$) et celui parallèlement auquel on fait la symétrie ($G = \dots$ cf cours ou à retrouver avec un dessin). Vous devriez trouver des espaces vectoriels connus dont vous connaissez la dimension. En écrivant la matrice de φ dans une base adaptée à la décomposition $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = F \oplus G$, vous obtiendrez que la matrice de φ est diagonale et le déterminant sera facile à trouver.
- Vous devriez trouver normalement un déterminant égal à $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

TD 28, exercice 7 et 14 :

- Pour le 7, si on note u_n le nombre de façons, justifiez une relation de récurrence donnant u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n-2} en effectuant une disjonction de cas en fonction du 1er pas effectué.

— Déterminez alors u_1 et u_2 puis reprenez la résolution des suites du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour trouver une formule explicite pour u_n.

— Pour le 14, on différenciera les côtés (il y en a 4) : on commencera par choisir de combien de façons différentes on peut colorier le côté 1, puis le côté 2, puis le côté 3, etc.

— Attention à un point : vous aurez très certainement besoin de faire une disjonction de cas sur ce que vous faites sur le côté 3. En effet, le nombre de possibilités pour le côté 4 dépendra à la fois de ce qu'il s'est passé sur le côté 1 ET sur le côté 3...

— Testez votre formule pour des petites valeurs de k ! Vous devriez avoir $N_k = 0$ pour $k = 1$ et $N_k = 2$ pour $k = 2$ (les deux coloriages possibles sont $RBRB$ et $BRBR$) et $N_k = 18$ pour $k = 3$ (à retrouver par vous même).