Problème 1 : Analyse

Partie I : Préliminaires

Q1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \pi x = k\pi \iff x \in \mathbb{Z}$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction C est définie sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$$

La fonction cos est paire, et la fonction sin est impaire, ce qui entraîne que $\boxed{\text{la fonction C est impaire}}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $C(x+1) = \frac{\cos(\pi x+\pi)}{\sin(\pi x+\pi} = \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = C(x)$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction C est 1-périodique.}}$$

b) Soit $x \in]0;1[$.

i) $0 < x < 1$ donc $0 < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} < 1$ et $\frac{1}{2} < \frac{x+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$, donc :

$$\boxed{\tfrac{x}{2} \text{ et } \tfrac{x+1}{2} \text{ sont aussi dans }]0;1[.}$$

ii) On a :

$$\begin{aligned}
C\left(\frac{x}{2}\right) + C\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{\cos(\pi\frac{x}{2})}{\sin(\pi\frac{x}{2})} + \frac{\cos(\pi\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})}{\sin(\pi\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{\cos(\pi\frac{x}{2})}{\sin(\pi\frac{x}{2})} - \frac{\sin(\pi\frac{x}{2})}{\cos(\pi\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\cos^2(\pi\frac{x}{2}) - \sin^2(\pi\frac{x}{2})}{\cos(\pi\frac{x}{2})\sin(\pi\frac{x}{2})} \\
&= 2\frac{\cos(2\pi\frac{x}{2})}{\sin(2\pi\frac{x}{2})} = 2\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\
&= \boxed{2C(x)}
\end{aligned}$$

Q2) a) Un $dl_3(0)$ de sin est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}(x^3)$, d'où $\sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3}{6}x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$ (on peut composer puisque $\pi x \to 0$).
Un $dl_2(0)$ de cos est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}(x^2)$, d'où $\cos(\pi x) = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$ et donc $\pi x\cos(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3}{2}x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$, finalement :

$$\boxed{\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x) = -\frac{\pi^3}{3}x^3 + \underset{0}{o}(x^3).}$$

b) D'après la question précédente, on a $\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x) \underset{0}{\sim} -\frac{\pi^3}{3}x^3$, et on sait aussi que $\sin(\pi x) \underset{0}{\sim} \pi x$, d'où :
$C(x) - \frac{1}{x} = \frac{\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{\pi^3}{3}x^3}{\pi x^2} = -\frac{\pi^2}{3}x$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} C(x) - \frac{1}{x} = 0.}$$

Partie II : Définition de S

Q3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\frac{1}{k^2-x^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), donc la série à termes positifs (à partir d'un certain rang) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2-x^2}$ est convergente, donc son opposé aussi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{x^2-k^2} \text{ est convergente.}}$$

Q4) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $S(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{(-x)^2-k^2} = -\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}\right) = -S(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction S est impaire.}}$$

Q5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note $S_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}$, d'après ce qui précède, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $S(x)$.

a) On a $\sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}\right) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}$ (en réduisant au même dénominateur), donc :

$$\boxed{\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}.}$$

b) Puisque $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a aussi $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n(x+1) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-n+1}^{n+1} \frac{1}{x+k} \quad \text{(changment d'indice } k \leftarrow k+1\text{)} \\
&= -\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n+1} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} \\
&= \mathrm{S}_n(x) + \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{S}_n(x+1) - \mathrm{S}_n(x) = \tfrac{1}{x+n+1} - \tfrac{1}{x-n}.}$$

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x+n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x-n}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x)$, c'est à dire :

$$\boxed{\mathrm{S}(x+1) = \mathrm{S}(x), \text{ la fonction S est 1-périodique.}}$$

d) Puisque S est 1-périodique on a $\mathrm{S}(1-x) = \mathrm{S}(-x)$, et comme S est impaire on a $\mathrm{S}(-x) = -\mathrm{S}(x)$, finalement :

$$\boxed{\mathrm{S}(1-x) = -\mathrm{S}(x)}$$

On en déduit en prenant $x = \frac{1}{2}$, que $\mathrm{S}(1-\frac{1}{2}) = -\mathrm{S}(\frac{1}{2})$ et donc $\mathrm{S}(\frac{1}{2}) = -\mathrm{S}(\frac{1}{2})$, finalement :

$$\boxed{\mathrm{S}(\tfrac{1}{2}) = 0.}$$

Q6) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (si un des deux était entier, alors x serait lui même entier).

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n(\frac{x}{2}) + \mathrm{S}_n(\frac{x+1}{2}) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \frac{2}{x+2k} + \frac{2}{x+2k+1} \\
&= \sum_{p=-2n}^{2n+1} \frac{2}{x+p} \quad \text{(en séparant les indices pairs et impairs)} \\
&= \frac{2}{x+2n+1} + \sum_{p=-2n}^{2n} \frac{2}{x+p} \\
&= \boxed{2\mathrm{S}_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}}
\end{aligned}$$

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{x+2n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(\frac{x}{2}) + \mathrm{S}_n(\frac{x+1}{2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\mathrm{S}_{2n}(x)$, c'est à dire :

$$\boxed{\mathrm{S}(\tfrac{x}{2}) + \mathrm{S}(\tfrac{x+1}{2}) = 2\mathrm{S}(x).}$$

Partie III : Continuité de S

Q7) Soit a et x dans $]0;1[$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$, on a $0 < x < 1 < k$ d'où $x^2 < 1 < k^2$ et donc $0 < k^2-1 < k^2-x^2$, par conséquent :

$$\boxed{0 \leqslant \tfrac{1}{k^2-x^2} \leqslant \tfrac{1}{k^2-1}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2a}{a^2-k^2} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2x(a^2-k^2) - 2a(x^2-k^2)}{(x^2-k^2)(a^2-k^2)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{2ax(a-x) + 2k^2(a-x)}{(x^2-k^2)(a^2-k^2)} \\
&= 2(a-x) \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+ax}{(x^2-k^2)(a^2-k^2)}
\end{aligned}$$

On en déduit avec l'inégalité triangulaire, que :

$$\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|\leqslant 2|a-x|\sum_{k=2}^{n}\frac{|k^2+ax|}{|(x^2-k^2)(a^2-k^2)|}$$

or $|k^2+ax| = k^2+ax \leqslant k^2+1$ et $\frac{1}{|x^2-k^2|} = \frac{1}{k^2-x^2} \leqslant \frac{1}{k^2-1}$, de même $\frac{1}{|a^2-k^2|} = \frac{1}{k^2-a^2} \leqslant \frac{1}{k^2-1}$, par conséquent $\frac{|k^2+ax|}{|(x^2-k^2)(a^2-k^2)|} \leqslant \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$ et donc :

$$\boxed{\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|\leqslant 2|x-a|\times\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}.}$$

c) Soit $n \geqslant 2$, alors :

$$\begin{aligned}|S_n(x)-S_n(a)| &= \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2a}{a^2-1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2a}{a^2-1}\right|+\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2a}{a^2-1}\right|+2|x-a|\times\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}\quad\text{(d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

On a $\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2} \sim \frac{k^2}{k^4} = \frac{1}{k^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente (Riemann avec $\alpha > 1$), donc la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$ est convergente (SATP). D'autre part on sait que $(S_n(x))$ converge vers $S(x)$ (de même pour a), donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$\boxed{|S(x)-S(a)| \leqslant \left|\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2-1}\right|+2|x-a|\times\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}.}$$

d) Posons $K = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$. On a $\lim_{x\to a}\left|\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2-1}\right|+2|x-a|\times K = 0$, donc $\lim_{x\to a} S(x) = S(a)$, c'est à dire :

$$\boxed{\text{La fonction S est continue en } a \in]0;1[.}$$

La fonction S est donc continue sur $]0;1[$, or S est 1-périodique, si $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, alors $a-\lfloor a\rfloor \in]0;1[$ et on a $S(a) = S(a-\lfloor a\rfloor)$, si x est dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, alors $\lim_{x\to a} x-\lfloor x\rfloor = a-\lfloor a\rfloor$ (la partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$), donc $S(x) = S(x-\lfloor x\rfloor) \xrightarrow[x\to a]{} S(a-\lfloor a\rfloor) = S(a)$.

$$\boxed{\text{La fonction S est continue sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.}$$

Q8) a) Soit $x \in]0;1[$ et $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\left|S_n(x)-\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-1}\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{|2x|}{|x^2-k^2|}\\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{k^2-x^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{2x}{k^2-1}\quad\left(\text{car } \frac{1}{k^2-x^2}\leqslant\frac{1}{k^2-1}\right)\\ &\leqslant 2x\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1}{k^2-1}$ est convergente, donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$\boxed{\left|S(x)-\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-1}\right| \leqslant 2x\times\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}.}$$

b) On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} S(x)-\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-1} = 0$, or $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x^2-1} = 0$, ce qui entraîne que $\lim_{x\to 0^+} S(x)-\frac{1}{x} = 0$.
D'autre part en posant $y = -x$, $\lim_{x\to 0^-} S(x)-\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^+} S(-y)+\frac{1}{y}$ et S étant impaire, il en découle que $\lim_{x\to 0^-} S(x) = -\lim_{y\to 0^+} S(y)-\frac{1}{y} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} S(x)-\frac{1}{x} = 0.}$$

c) Soit $x \in]0;1[$, alors en utilisant l'inégalité établie en Q8a et en multipliant par x, il vient que : $\left|xS(x)-1-\frac{2x^2}{x^2-1}\right| \leqslant 2x^2\times\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}$, ce qui entraîne que $\lim_{x\to 0^+} xS(x) = 1$. La fonction S étant impaire on a alors $\lim_{x\to +0^-} xS(x) = 1$, finalement :

$$\boxed{S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

$\boxed{\textbf{Partie IV : Simplification de } \mathrm{S} \textbf{ sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$

Q9) a) Les fonctions C et S sont définies sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, continues, impaires et 1-périodiques, puisque $f = \mathrm{C} - \mathrm{S}$, on a donc que :

$$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \text{ continue, impaire et 1-périodique.}}$$

b) Pour $x \in]0;1[$, on a montré que $\mathrm{C}(\frac{x}{2}) + \mathrm{C}(\frac{x+1}{2}) = 2\mathrm{C}(x)$ (Q1bii) et que $\mathrm{S}(\frac{x}{2}) + \mathrm{S}(\frac{x+1}{2}) = 2\mathrm{S}(x)$ (Q6b), par conséquent (puisque $f = \mathrm{C} - \mathrm{S}$) :

$$\boxed{f(\tfrac{x}{2}) + f(\tfrac{x+1}{2}) = 2f(x).}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $f(x) = \mathrm{C}(x) - \frac{1}{x} - \left[\mathrm{S}(x) - \frac{1}{x}\right]$, or on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{C}(x) - \frac{1}{x} = 0$ (Q2b) et que $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x} = 0$ (Q8b), par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0.}$$

d) On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, alors $f(x) = f(x-k) \xrightarrow[x\to k]{} f(0) = 0$ (continuité de f en 0), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } k \text{ en posant } f(k) = 0.}$$

On remarque que la fonction ainsi prolongée est définie, continue sur $\mathbb{R}$, impaire et encore 1-périodique.

Q10) On suppose désormais que f a été prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $x \in [0;1]$, on sait déjà que si $0 < x < 1$ alors $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$, il suffit donc de le vérifier pour $x = 0$ et $x = 1$.

- Si $x = 0$, alors $\mathrm{C}(\frac{1}{2}) = \pi \operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\mathrm{S}(\frac{1}{2}) = 0$ (Q5d), par conséquent $f(\frac{1}{2}) = 0$,
  on a donc bien $f(\frac{0}{2}) + f(\frac{0+1}{2}) = 2f(0)$.
- Si $x = 1$, alors $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1+1}{2}) = 0 + f(1) = 0 = 2f(1)$.

$$\boxed{\forall x \in [0;1], f(\tfrac{x}{2}) + f(\tfrac{x+1}{2}) = 2f(x).}$$

b) La fonction f étant continue sur le segment $[0;1]$ on peut affirmer que :

$$\boxed{f \text{ possède un maximum (noté M) sur } [0;1].}$$

c) Soit $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = \mathrm{M}$. On sait que $\frac{x_0}{2}$ et $\frac{x_0+1}{2}$ sont encore dans $[0;1]$, on a donc $f(\frac{x_0}{2}) \leqslant \mathrm{M}$ et $f(\frac{x_0+1}{2}) \leqslant \mathrm{M}$, or la somme des deux images donnent $2f(x_0) = 2\mathrm{M}$, les deux images sont donc nécessairement égales à M :

$$\boxed{f(\tfrac{x_0}{2}) = f(\tfrac{x_0+1}{2}) = \mathrm{M}.}$$

On a ainsi montré que si f atteint son maximum en un réel x_0 de $[0;1]$, elle atteint également son maximum en $\frac{x_0}{2}$, une récurrence immédiate entraîne que f atteint son maximum en $\frac{x_0}{2^k}$ pour tout naturel k.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, f(\tfrac{x_0}{2^k}) = \mathrm{M}.}$$

d) $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^k} = 0$ et f est continue en 0, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} f(\frac{x_0}{2^k}) = f(0) = 0$, or $\forall k \in \mathbb{N}, f(\frac{x_0}{2^k}) = \mathrm{M}$, par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{M} = 0.}$$

Le maximum de f sur $[0;1]$ est nul par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est négative sur } [0;1].}$$

e) f étant impaire et 1-périodique, on a pour $x \in [0;1]$, $f(x) = -f(-x) = -f(-x+1)$, or $-x+1 \in [0;1]$, donc $f(-x+1) \leqslant 0$, ce qui entraîne que $f(x) \geqslant 0$, finalement $0 \leqslant f(x) \leqslant 0$ et donc $f(x) = 0$. La fonction f est nulle sur $[0;1]$, comme elle est 1-périodique :

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}.}$$

Problème 2 : Algèbre

$\boxed{\textbf{Partie I}}$

Q1) Soit $\mathrm{P}_0 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg(\mathrm{P}_0) = 0$. Montrons que $\operatorname{vect}(\mathrm{P}_0) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ car

- $\text{vect}(P_0) \subset \mathbb{R}_0[X]$ car $\mathbb{R}_0[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ contenant P_0 (puisque $\deg(P_0) = 0 \leqslant 0$), et que $\text{vect}(P_0)$ est le plus petit.
- $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{vect}(P_0)$ car si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ on peut noter $P = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, et comme $\deg(P_0) = 0$ on peut noter $P_0 = b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$, donc $P = \underbrace{\frac{a}{b}}_{\in\mathbb{R}} P_0 \in \text{vect}(P_0)$.

Q2) a) $\boxed{\text{vect}(P_0, \dots, P_{n+1}) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]}$ car $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ contenant $P_0, \dots, P_{n+1}$ (puisque $\forall\, k \in [\![0, n+1]\!]$, $\deg(P_k) = k \leqslant n+1$, et que $\text{vect}(P_0, \dots, P_{n+1})$ est le plus petit.

b) Notons $\boxed{\lambda = \frac{a_{n+1}}{p_{n+1}} \in \mathbb{R}}$ (on a bien $b_{n+1} \neq 0$ puisque $\deg(P_{n+1}) = n+1$)

et $\boxed{B = \sum_{k=0}^{n} (a_k - \dfrac{a_{n+1}}{p_{n+1}} p_k)\, X^k \in \mathbb{R}_n[X]}$.

On a bien

$$\begin{aligned}
\lambda P_{n+1} + B &= \frac{a_{n+1}}{p_{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} p_k X^k + \sum_{k=0}^{n} (a_k - \frac{a_{n+1}}{p_{n+1}} p_k)\, X^k \\
&= \underbrace{a_{n+1} X^{n+1}}_{k=n+1} + \frac{a_{n+1}}{p_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} p_k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k - \underbrace{\frac{a_{n+1}}{p_{n+1}}}_{\text{indep. de } k} \sum_{k=0}^{n} p_k\, X^k \\
&= a_{n+1} X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \\
&= A.
\end{aligned}$$

c) Montrons que $\boxed{\text{vect}(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}) = \mathbb{R}_{n+1}[X]}$.
On a montré en Q2a l'inclusion directe.
Reste à prouver l'inclusion réciproque : soit $A \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
D'après Q2b on peut écrire $A = \lambda P_{n+1} + B$ avec $B \in \mathbb{R}_n[X]$.
Or par hypothèse de récurrence $\mathbb{R}_n[X] = \text{vect}(P_1, \dots, P_n)$
donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n :\ B = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.
Ainsi $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \lambda P_{n+1} \in \text{vect}(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$.

Partie II

Q3) a) On a clairement $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$.
D'autre part Δ est linéaire car pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\
&= (\lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)) - (\lambda P(X) + \mu Q(X)) \\
&= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\
&= \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\Delta \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$.

b) Si P est constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc

$$\boxed{\Delta(P) = 0}.$$

c) Si $P = X^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors en utilisant la formule du binôme :

$$\Delta(X^n) = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-1} - X^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k}$$

car $\binom{n}{n} = 1$. Et comme $\binom{n}{n-1} = n \neq 0$ on sait que $\boxed{\deg(\Delta(X^n)) = n-1}$.

d) Soit P non constant, que l'on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$.
En utilisant la linéarité de Δ on écrit

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\Delta(X^k)}_{=0 \text{ pour } k=0} = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta(X^k).$$

Comme $\deg(a_n\Delta(X^n)) = \deg(\Delta(X^n)) = n-1$ puisque $a_n \neq 0$, et que

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!],\ \deg(a_k\Delta(X^k)) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a_k = 0 \\ k-1 \text{ si } a_k \neq 0 \end{cases} < n-1$$

on a $\boxed{\deg(\Delta(P)) = n-1 = \deg(P)-1}$.

e) Montrons que $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$ par double inclusion.
Pour l'inclusion réciproque, supposons que $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Alors P est constant, et d'après Q3b on a $\Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$, ie. $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.
Pour l'inclusion directe, supposons que $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. Alors $\Delta(P) = 0$.
Montrons que $P \in \mathbb{R}_0[X]$ par l'absurde. Si P n'est pas constant, alors $\deg(P) \geqslant 1$, et donc d'après Q3d $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \geqslant 0$, ce qui contredit $\Delta(P) = 0$.

f) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $P_k = \Delta(X^{k+1})$. D'après Q3c, on sait que $\deg(P_k) = k$.
D'après Partie I, on en déduit que

$$\mathrm{vect}(\Delta(X), \dots, \Delta(X^{n+1})) = \mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n) = \boxed{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Montrons que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$, ce qui prouvera la surjectivité de Δ.
L'inclusion directe est immédiate puisque $\mathrm{Im}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
Pour l'inclusion réciproque, soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{vect}(\Delta(X), \dots, \Delta(X^{n+1}))$.
Ainsi, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \Delta(X^k)$.
Posons $Q = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Alors par linéarité de Δ on a $\Delta(Q) = P$,
donc $\boxed{P \in \mathrm{Im}(\Delta)}$.

Q4) a) $\boxed{\text{E est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$ car

- $E \subset \mathbb{R}[X]$ immédiat.
- $E \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}[X]} \in E$ puisque $0_{\mathbb{R}[X]}(0) = 0$.
- $\forall\,(P, Q) \in E^2,\ \forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda P + \mu Q \in E$ car

$$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0)(0) = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$

b) $\boxed{\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_0[X] \oplus E}$ car

- $\mathbb{R}_0[X] \cap E = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
L'inclusion réciproque est immédiate puisque E et $\mathbb{R}_0[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
Pour l'inclusion directe, soit $P \in \mathbb{R}_0[X] \cap E$.
Alors $\exists\,\lambda \in \mathbb{R} :\ P = \lambda$ et $P(0) = 0$, donc $\lambda = 0$, et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
- $\mathbb{R}_0[X] + E = \mathbb{R}[X]\}$.
L'inclusion directe est immédiate.
Pour l'inclusion directe, soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Posons $Q = P(0) \in \mathbb{R}[X]$ et $R = P - P(0) \in E$ (puisque $R(0) = P(0) - P(0) = 0$).
On a $Q + R = P$.
On a montré $\exists\,(Q, R) \in \mathbb{R}_0[X] \times E :\ P = Q + R$, donc $P \in \mathbb{R}_0[X] + E$.

Q5) a) La linéarité de f provient immédiatement de celle de Δ.
Montrons que f est injective, ie. $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
L'inclusion réciproque est immédiate, $\mathrm{Ker}(f)$ étant un sous-espace vectoriel de E.
Pour l'inclusion directe, soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$.
Alors $P \in E$ et $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc $\Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$, et donc $P \in \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
On en déduit que $P \in E \cap \mathbb{R}_0[X] = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, puisque $\mathbb{R}[X] = E \oplus \mathbb{R}_0[X]$.
Montrons que f est surjective, ie. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$.
L'inclusion directe est immédiate.
Pour l'inclusion réciproque, soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Alors comme Δ est surjective, $\exists\,Q \in \mathbb{R}[X] :\ \Delta(Q) = P$.
Comme $\mathbb{R}[X] = E \oplus \mathbb{R}_0[X]$, on sait qu'il existe un unique couple $(R, S) \in E \times \mathbb{R}_0[X]$ tel que $Q = R + S$.
Or par linéarité de Δ

$$P = \Delta(Q) = \Delta(R+S) = \Delta(R) + \Delta(S) = \Delta(R)$$

puisque $S \in \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}(\Delta)$ implique que $\Delta(S) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Enfin, puisque $R \in E$, on a $\Delta(R) = f(R)$. On a donc montré

$$P = f(R) \text{ avec } R \in E$$

donc $P \in \mathrm{Im}(f)$.
Finalement, on a montré que f est une application linéaire bijective de E sur $\mathbb{R}[X]$, donc un $\boxed{\text{isomorphisme}}$ de E sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Comme $f : E \to \mathbb{R}[X]$, on sait que $\nabla : \mathbb{R}[X] \to E$.
Montrons l'équivalence demandée par double implication.
Sens direct : Si $\nabla(P) = Q$ alors $Q \in E$, donc $\boxed{Q(0) = 0}$, et

$$\Delta(Q) = f(Q) = f(\nabla(P)) = f(f^{-1}(P)) = \boxed{P}$$

car $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}[X]}$.
Sens réciproque : si $P = \Delta(Q)$ et $Q(0) = 0$, alors $Q \in E$ et $P = f(Q)$ donc

$$\nabla(P) = f^{-1}(P) = (f^{-1}(f(Q)) = \boxed{Q}$$

car $f^{-1} \circ f = id_E$.

c) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in \mathbb{N}$.
Notons $Q = \nabla(P)$, donc $Q(0) = 0$ et $P = \Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.
Alors, par simplification de la somme télescopique

$$\sum_{i=0}^{p} P(i) = \sum_{i=0}^{p} [Q(i+1) - Q(i)] = Q(p+1) - Q(0) = \boxed{\nabla(P)(p+1)}.$$

Partie III

Q6) a) Comme P_0 est constant on a $\boxed{\Delta(P_0) = 0}$ d'après Q3b.
Pour $m \geqslant 1$, on écrit

$$\Delta(P_m) = P_m(X+1) - P_m(X) = \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(X+1-k) - \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(X-k)$$

et en posant le changement d'indice $\ell = k-1$ dans le premier produit

$$\begin{aligned}\Delta(P_m) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=-1}^{m-2}(X-k) - \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(X-k)\\ &= \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-2}(X-k)\left(\underbrace{(X+1)-(X-m+1)}_{=m}\right)\\ &= \frac{1}{(m-1)!}\prod_{k=0}^{m-2}(X-k)\\ &= \boxed{P_{m-1}}.\end{aligned}$$

b) En utilisant Q6a, on conclut que

$$\boxed{\Delta^k(P_m) = \begin{cases} P_{m-k} \text{ si } m \geqslant k \\ 0 \text{ si } m < k \end{cases}}$$

c) Comme $P_m(0) = 0$ dès que $m \geqslant 1$ (puisque X apparaît dans le produit pour $k = 0$) mais $P_0(0) = 1$, on trouve que

$$\Delta^k(P_m)(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } m > k \\ 1 \text{ si } m = k \\ 0 \text{ si } m < k \end{cases} = \boxed{\delta_{k,m}}$$

Q7) a) Comme $\deg(P_m) = m$ (il y a m termes de degré 1 dans le produit), il suffit d'appliquer la partie I pour obtenir $\boxed{\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]}$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après Q7a, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m P_m$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par linéarité de Δ^k (c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ en tant que composée d'endomorphismes) on écrit

$$\Delta^k(P) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \Delta^k(P_m)$$

puis en utilisant Q6c on obtient $\Delta^k(P)(0) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \Delta^k(P_m)(0) = \lambda_k$.

Ainsi on a bien

$$\boxed{\mathrm{P} = \sum_{m=0}^{n} \Delta^m(\mathrm{P})(0)\,\mathrm{P}_m}.$$

c) Notons $\mathrm{Q} = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta^{m-1}(\mathrm{P})(0)\,\mathrm{P}_m$.
On a $\mathrm{Q}(0) = 0$ puisque chaque P_m s'annule en 0 pour $m \geqslant 1$, et par linéarité de Δ

$$\Delta(\mathrm{Q}) = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta^{m-1}(\mathrm{P})(0)\,\Delta(\mathrm{P}_m) = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta^{m-1}(\mathrm{P})(0)\,\mathrm{P}_{m-1} = \mathrm{P}$$

en posant le changement d'indice $q = m-1$.
D'après Q5c, on a bien $\boxed{\nabla(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta^{m-1}(\mathrm{P})(0)\,\mathrm{P}_m}$.

Partie IV

Q8) D'après Q7c

$$\nabla(\mathrm{X}^3) = \sum_{m=1}^{4} \Delta^{m-1}(\mathrm{X}^3)(0)\mathrm{P}_m.$$

Or

$$\begin{aligned}
&\Delta^0(\mathrm{X}^3) = \mathrm{X}^3\\
&\Delta^1(\mathrm{X}^3) = (\mathrm{X}+1)^3 - \mathrm{X}^3 = 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1\\
&\Delta^2(\mathrm{X}^3) = \Delta(3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1) = [3(\mathrm{X}+1)^2 + 3(\mathrm{X}+1) + 1] - [3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1] = 6\mathrm{X} + 6\\
&\Delta^3(\mathrm{X}^3) = \Delta(6\mathrm{X}+6) = [6(\mathrm{X}+1)+6] - [6\mathrm{X}+6] = 6
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\Delta^0(\mathrm{X}^3)(0) = 0\\
&\Delta^1(\mathrm{X}^3)(0) = 1\\
&\Delta^2(\mathrm{X}^3)(0) = 6\\
&\Delta^3(\mathrm{X}^3)(0) = 6
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathrm{X}^3) = \mathrm{P}_2 + 6\mathrm{P}_3 + 6\mathrm{P}_4 &= \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2} + 6\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)}{6} + 6\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)}{24}\\
&= \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{4}\,[2 + 4(\mathrm{X}-2) + (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)]\\
&= \boxed{(\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2})^2}.
\end{aligned}$$

Q9) En utilisant Q5c pour $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3$:

$$\sum_{i=0}^{p} i^3 = \nabla(\mathrm{X}^3)(p+1) = \boxed{(\frac{p(p+1)}{2})^2}.$$