Année Scolaire 2022 – 2023

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2}$ et MP2I

DS N°10

Jeudi 15/06/2023 (3h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être encadrés ou soulignés à la ***règle****.*

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : familles équiangulaires

Soit E *un espace euclidien de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *muni d'un produit scalaire* $\langle .,. \rangle$ *(que l'on pourra aussi noter* $(.|.)$*). On note* $||.||$ *la norme euclidienne associée et on pose* $(e_1, \dots, e_n)$ *une base orthonormée (ou orthonormale) de* E.

Q1) Si f_1 et f_2 sont deux vecteurs unitaires de E, en calculant $||f_1 - f_2||^2$, montrer que $\langle f_1, f_2 \rangle = 1$ si et seulement si $f_1 = f_2$.

On s'intéresse dans la suite du sujet à la notion de famille de vecteurs équiangulaire. Si $(f_1, \dots, f_p)$ *est une famille de vecteurs de* E*, on dit que cette famille est équiangulaire de paramètre* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *si :*

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i \text{ est unitaire.} \\ \forall i, j \in [\![1, p]\!],\ i \neq j \implies \langle f_i, f_j \rangle = \alpha. \end{cases}$$

Géométriquement, une famille équiangulaire est donc une famille de vecteurs unitaires, telle que pour tout $i \neq j$*, l'angle entre les vecteurs* f_i *et* f_j *est le même. Ces vecteurs sont forcément deux à deux distincts car le paramètre doit être différent de* 1.

Q2) *Deux exemples.*

a) Vérifier que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est équiangulaire.

b) Vérifier que la famille (f_1, f_2, f_3) définie par $f_1 = e_1$, $f_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $f_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ est équiangulaire et illustrer graphiquement.

Q3) *Quelques propriétés.*

a) Montrer que si une famille $(f_1, \dots, f_p)$ est équiangulaire de paramètre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors $\alpha \in [-1; 1[$.

b) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on pose $f_k = e_k + \beta e_n$ et $g_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$. Vérifier que pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, g_k est bien défini et que la famille $(g_1, \dots, g_{n-1})$ est une famille équiangulaire dont on précisera le paramètre en fonction de β.

c) En déduire que pour tout $\alpha \in [-1;1[$, on peut trouver une famille équiangulaire avec $n-1$ vecteurs de paramètre α.

Q4) On va à présent essayer de construire une famille équiangulaire de E avec le plus grand nombre de vecteurs possibles. Puisqu'il est possible d'en trouver une à n vecteurs (la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E convient par exemple), on suppose dans la suite qu'il existe une famille équiangulaire $(f_1, \dots, f_p)$ de cardinal $p > n$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ i \neq j,\ \langle f_i, f_j \rangle = \alpha$.

a) Justifier que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée.

Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *non tous nuls tels que* $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0_{\mathrm{E}}$.

b) Montrer que $\forall i \in [\![2, p]\!],\ \lambda_i = \lambda_1$. *On pourra pour cela réaliser le produit scalaire de la somme précédente avec le vecteur* f_1 *et avec le vecteur* f_i.

c) En déduire que $\sum_{k=1}^{p} f_k = 0_{\mathrm{E}}$ puis que $\alpha = -\frac{1}{p-1}$

d) On suppose par l'absurde que $p > n+1$. Justifier que $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est une famille équiangulaire de même paramètre α et en déduire une absurdité.

Q5) Autrement dit, si E est de dimension n, le cardinal maximum d'une famille équiangulaire est $n+1$ et on a alors dans ce cas $\alpha = -\frac{1}{n}$. On va à présent montrer qu'il est possible de construire une telle famille et on procède pour cela par récurrence sur n (la dimension de E).

a) Si $\dim(\mathrm{E}) = 1$, expliciter une famille (f_1, f_2) équiangulaire.

b) Soit $n \geqslant 2$. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$ et on fixe E de dimension n. On fixe alors $e \in \mathrm{E}$ unitaire et on pose $\mathrm{F} = (\mathrm{Vect}(e))^{\perp}$.

i) Quelle est la dimension de F ? En déduire qu'il existe une famille équiangulaire $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F. Préciser pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ la valeur de $\langle f_i, f_j \rangle$.

ii) Déterminer alors $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^*$ pour que la famille $\left(e, \frac{f_1 - \beta e}{\gamma}, \frac{f_2 - \beta e}{\gamma}, \dots, \frac{f_n - \beta e}{\gamma}\right)$ soit équiangulaire. *On donnera les valeurs de* β *et* γ *en fonction de* n.

Problème 2 : étude d'une marche aléatoire

Une puce se déplace sur un axe gradué de la manière suivante : à l'instant 0 *elle est à l'origine, puis à chaque instant (instant* 1*, instant* 2*, etc) elle fait un saut soit d'une unité vers la droite avec une probabilité* $p \in]0;1[$*, soit un saut d'une unité vers la gauche avec une probabilité* $q = 1-p$*. Les différents sauts sont supposés mutuellement indépendants.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* X_n *l'abscisse du point de l'axe où se trouve la puce à l'instant n (ie après n sauts).*

Q1) *Loi de* X_n.

Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on note D_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la puce fait un saut vers la droite à l'instant i, et -1 si elle fait un saut vers la gauche à l'instant i.

a) Pour $i \in [\![1; n]\!]$, préciser la loi de D_i, son espérance et sa variance.

b) Justifier brièvement que $X_n = D_1 + \cdots + D_n$ et que les variables D_i sont mutuellement indépendantes.

c) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

d) Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $B_i = \frac{1}{2}(D_i + 1)$.

i) Montrer que les B_i sont des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes, préciser leur paramètre.

ii) On pose $Y_n = B_1 + \cdots + B_n$, quelle est la loi de Y_n ? Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$ (espérance et variance de Y_n).

e) Vérifier que $X_n = 2Y_n - n$ et retrouver ainsi l'espérance et la variance de X_n. En déduire également $X_n(\Omega)$, puis pour $k \in X_n(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

Q2) *Un processus sans mémoire.*

Soient $r < n$ dans $\mathbb{N}^*$, soient a une valeur possible de X_r et b une valeur possible de X_n.

a) Justifier que l'événement $(X_r = a) \cap (X_n = b)$ est l'évènement :

$$(D_1 + \cdots + D_r = a) \cap (D_{r+1} + \cdots + D_n = b - a).$$

b) En évaluant $\mathbb{P}((X_r = a) \cap (X_n = b))$, montrer que $\mathbb{P}_{(X_r=a)}(X_n = b) = \mathbb{P}(X_{n-r} = b - a)$ (on ne demande pas l'expression de cette dernière probabilité).

Q3) *Premier retour à l'origine.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_{2n} l'évènement : « la puce est revenue à l'origine à l'instant $2n$ **pour la première fois** », et on pose $t_{2n} = \mathbb{P}(T_{2n})$.

a) Justifier brièvement que la puce ne peut être à l'origine qu'à des instants pairs, et calculer t_2.

b) En remarquant que $(X_{2n} = 0) = (T_2 \cup T_4 \cup \cdots \cup T_{2n}) \cap (X_{2n} = 0)$, démontrer que :

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} t_{2k} \times a_{2n-2k},$$

en notant $a_{2k} = \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ et avec la convention que $a_0 = 1$. On justifiera brièvement (sans calcul) que $\mathbb{P}_{T_{2k}}(X_{2n} = 0) = \mathbb{P}_{(X_{2k}=0)}(X_{2n} = 0)$.

c) i) Justifier que $\sum_{k=1}^{n} t_{2k} = \mathbb{P}(T_2 \cup \cdots \cup T_{2n})$.

ii) En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 1} t_{2k} x^{2k}$ est convergente lorsque $x \in [-1;1]$.

d) Soit $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_{2n} x^{2n}$ pour $x \in [-1;1]$, on admet que $F(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$.

i) En déduire que $F(1) = 1 - |p - q|$.

ii) Quelle interprétation probabiliste donner au nombre $F(1)$? Que devient cette interprétation lorsque $p = \frac{1}{2}$?

Problème 3 : analyse

Dans ce problème, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $p \in]0,1[$.

On note $q = 1 - p$ et on considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Q1) Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x, autrement dit :

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant k\}.$$

Justifier l'existence de $\lceil x \rceil$ et prouver que

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1.$$

Q2) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note $u_k = \mathbb{P}(\{X = k\})$.

a) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ simplifier l'expression $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$.

b) En déduire que

$$u_{k+1} \leqslant u_k \quad \Longleftrightarrow \quad np - q \leqslant k.$$

Q3) On pose $i_n = \lceil np - q \rceil$.

a) Justifier que $i_n \in [\![0, n]\!]$. On note alors $m_n = u_{i_n}$.

b) Établir que

$$m_n = \max\{u_k \mid k \in [\![0, n]\!]\}.$$

Indication : on pourra s'intéresser au sens de variation de la suite finie $(u_0, \ldots, u_n)$.

Ainsi m_n représente la plus grande valeur parmi $\mathbb{P}(\{X = 0\}), \ldots, \mathbb{P}(\{X = n\})$.
L'objectif de la suite du problème est d'en déterminer un équivalent simple quand $n \to +\infty$.

Q4) a) Prouver que

$$i_n \underset{n \to +\infty}{\sim} np \quad \text{et} \quad n - i_n \underset{n \to +\infty}{\sim} nq.$$

b) Rappeler la formule de Stirling et en déduire qu'il existe une constante C (indépendante de n) à préciser telle que

$$m_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}} \times \frac{n^n\, p^{i_n}\, q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\, (n - i_n)^{n-i_n}}.$$

Q5) On pose $f : x \mapsto (1+x)\ln(1+x)$.

a) Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

b) Vérifier que pour $n > \max\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\}$:

$$\frac{n^n\, p^{i_n}\, q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\, (n - i_n)^{n-i_n}} = e^{-npf\left(\frac{i_n - np}{np}\right) - nqf\left(\frac{np - i_n}{nq}\right)}.$$

c) En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n\, p^{i_n}\, q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\, (n - i_n)^{n-i_n}}$$

(on pourra commencer par justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{i_n - np}{n} = 0$*)*
puis préciser un équivalent simple de m_n quand $n \to +\infty$.

– FIN –