28. Dénombrement

Exercice 1. (c) Combien d'anagrammes distincts peut-on trouver au mot « ABRACADABRA » ?

Exercice 2. (m) On considère un jeu de 52 cartes.

1) Combien de mains différentes de 5 cartes contiennent un carré (4 cartes identiques) ? Un full (3 cartes identiques + 2 autres cartes identiques) ?

2) Combien de mains différentes contiennent une couleur (5 cartes de la même couleur) ? Une suite (5 cartes consécutives) ? *Attention, l'as peut servir pour la suite 1-2-3-4-5 mais aussi pour la suite 10-V-D-R-A.*

3) Combien de mains différentes de 5 cartes contiennent un brelan (3 cartes identiques) (*et pas mieux qu'un brelan*) ? Une double paire (2 cartes identiques + 2 cartes identiques distinctes) (*idem*) ?

Exercice 3. (m) Trouver le nombre de n-uplets $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq p$. En déduire le nombre de n-uplets tels que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_i| = p$.

Exercice 4. (m)/ (i) Soit E un ensemble fini à np éléments. Trouver le nombre de partitions de E en n parties de p éléments chacune. Si un tournoi de tennis comporte $2n$ joueurs, de combien de façon différentes peut-on les appareiller au premier tour ? Si le tournoi est en élimination directe, combien faut-il de matchs avant de connaitre le vainqueur ?

Exercice 5. (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$. *On pourra étudier la fonction* $x \mapsto x(n-x)$.

Exercice 6. (m) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \subset [\![1, n]\!]$, on appelle diamètre de A et on note $d(A) = \max(A) - \min(A)$. Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, combien de parties de $[\![1, n]\!]$ ont pour diamètre k ?

Exercice 7. (m) Calculer le nombre de manières de monter un escalier à n marches en ne s'autorisant à monter à chaque pas que d'une ou deux marches.

Exercice 8. (m) On considère un échiquier à n lignes et n colonnes. On dispose de n « tours » indiscernables (on rappelle qu'une tour menace les pièces situées dans la même ligne ainsi que celle de la même colonne).

1) Combien y-a-t-il de façons distinctes de placer une tour ? De placer deux tours (indiscernables) sans qu'elles de menacent ?

2) Quel est le nombre maximal N de tours que l'on peut placer sans que les tours se menacent entre elles ? De combien de façons peut-on alors disposer ces N tours sans qu'elles se menacent entre elles ?

3) Pour k entier compris entre 1 et N, de combien de façons peut-on alors disposer k tours sans que ces tours ne se menacent entre elles ? (on pourra vérifier sa formule : pour 2 tours sur un échiquier 3×3, la réponse est 18).

Exercice 9. (m) Sur un échiquier il ne reste plus que les deux tours blanches et les deux tours noires. Combien de positions sont possibles pour que les tours ne se menacent pas entre elles ? *Deux tours de la même couleur ne se menacent pas.*

Exercice 10. (m) Soit $n \leq p$ des entiers. On pose $E = [\![1, n]\!]$ et $F = [\![1, p]\!]$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 11. (m)

1) Pour $0 < p \leq n$, établir par le calcul les relations :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0.$$

2) Retrouver la première formule en dénombrant de deux manières différentes le nombre de couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)^2$ où E est de cardinal n vérifiant $A \subset B$ et $\mathrm{Card}(B) = p$.

Exercice 12. (m) Montrer de manière combinatoire que si $0 \leq k \leq \min(n, p)$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \binom{n+p}{k}$.
En déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Exercice 13. (m) Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1) Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

2) Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \emptyset$.

3) Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Exercice 14. (m) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de manières de colorier les arêtes d'un carré avec k couleurs sans que deux arêtes adjacentes aient la même couleur ?

Exercice 15. (m) Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. On note $E = [\![1, n]\!]$ et $A = [\![1, p]\!]$. Déterminer le nombre :

1) d'applications $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$.

2) d'injections $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$.

3) de surjections $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$.

4) de bijections $f : E \to E$ telles que $f^{-1}(A) = A$.

5) d'applications $f : E \to E$ telles que $f^{-1}(A) = A$.

Exercice 16. (i) On pose $E = \{1, \ldots, n\}$.

1) Trouver le nombre d'applications $f : E \to E$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

2) Trouver le nombre d'applications $f : E \to E$ telles que $f \circ f = f$. *On donnera le résultat sous forme d'une somme.*

Exercice 17. (i) Dans l'ensemble des élèves de la classe, chaque personne a serré la main d'un certain nombre d'autres personnes. Montrer que le nombre d'élèves qui ont serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 18. (∗) Déterminer le nombre de carrés dont les coordonnées des quatre sommets sont dans $\{0, \ldots, n\}^2$. *Leurs côtés ne sont pas forcément horizontaux ou verticaux !*