CHAPITRE MI1
Cinématique du point

➢ Problématique

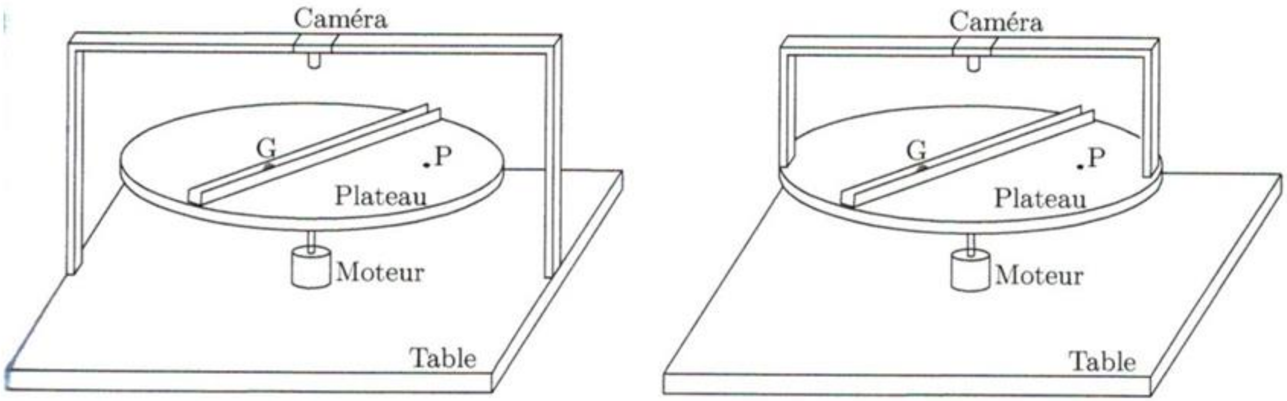


FIGURE 1 : Caméra fixée sur un support lié à la table (à gauche) ou sur un support lié au plateau (à droite)

Comment le placement d'une caméra peut-il influer sur l'étude du mouvement d'un objet ?

Peut-on assimiler l'objet à un point ou doit-on le considérer comme un solide ?

- **repérer** l'objet dans l'espace et dans le temps
- étudier **l'évolution** de la position au cours du temps

Cinématique : étude du mvt en fct du temps

1 Notion de point en physique

1.1 Solide

➢ Modèle du solide indéformable

Définition:

Distances entre 2 pts qcq restent **invariables** au cours du temps

➢ Étude du mouvement d'un solide

- Mvt d'1 de ses points : 3 coordonnées
- Mvt de rotation propre du solide : 3 angles

6 degrés de liberté

1.2 Modèle du point matériel

➢ **Définition** :

Solide tq position donnée par 3 coordonnées d'1 pt

Caractéristiques physiques d'1 solide

affectées au point

➢ Quand peut-on modéliser le système par un point ?

- **extension spatiale** du solide négligée
- tout **effet de rotation** **sur lui-même négligé**

2 Repérage d'un point

2.1 Repère d'espace

- **Observateur**, situé en un point *O*, repère l'espace avec un **système de coordonnées** (axes orthogonaux)
- $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ **Base OrthoNormée Directe** (B.O.N.D.)
- **Définition** : **repère d'espace *R***

  origine *O* + B.O.N.D.
- **Définition** : **position** du point *M* p/r à l'origine *O*

  vecteur position $\boxed{\overrightarrow{OM}}$

Outils mathématiques 5 : Vecteurs : produit scalaire, projection, dérivée temporelle, fonctions composées

2.2 Repère de temps

- **échelle de temps**

- **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t)$

2.3 Référentiel

➤ <u>Retour à la problématique : observations expérimentales</u>

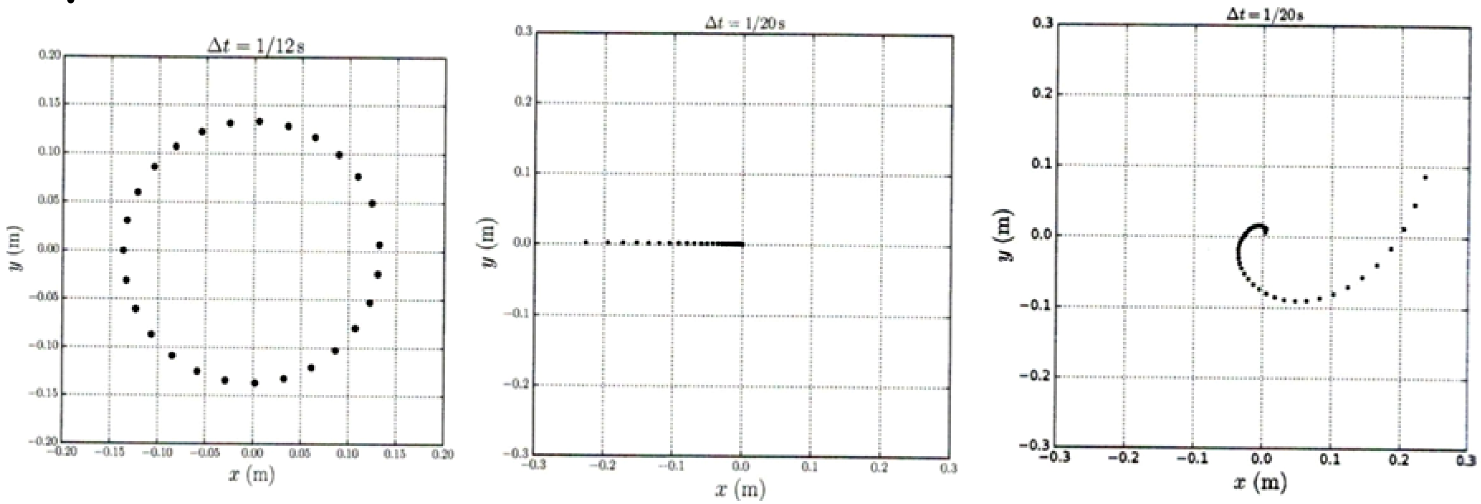


FIGURE 2 : Mouvement de P, caméra liée à la table (à gauche)
Mouvement de G, caméra liée au plateau (au centre)
Mouvement de G, caméra liée à la table (à droite)

$$\boxed{\mathscr{R}\left(O;\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},t\right)}$$

➤ <u>Référentiel d'observation</u>

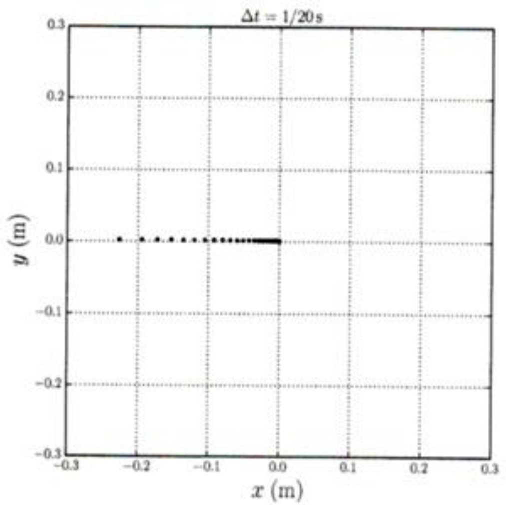
<u>Définition</u> : **référentiel d'observation $\mathscr{R}$**

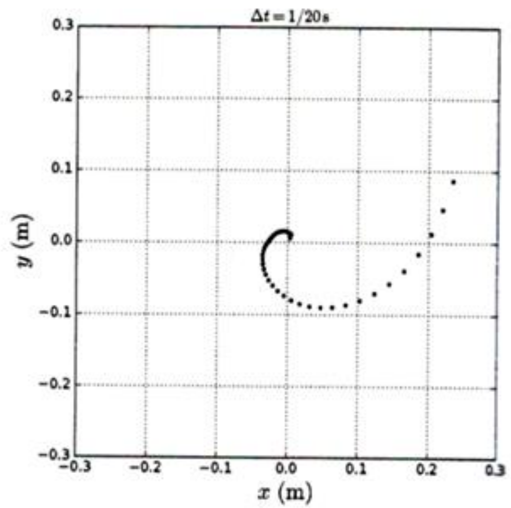
➢ Caractère absolu du temps

$$\boxed{\mathscr{R}\left(O;\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)}$$

➢ Caractère relatif du mouvement

Propriété :



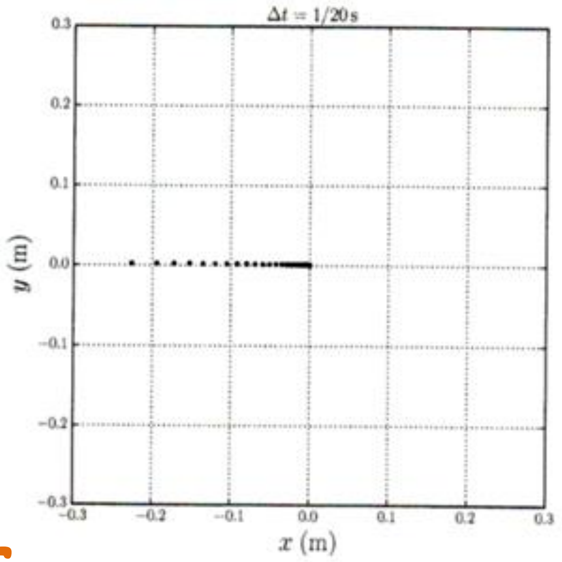


➢ Repère ≠ référentiel

3 Cinématique du point

3.1 Trajectoire et vecteur position

➢ Retour à la problématique



➢ Trajectoire

Définition : Trajectoire

Équation(s) de la trajectoire :

❖ 1 équation entre les coordonnées

OU

❖ 3 équations paramétriques (ou horaires)

➢ Vecteur position du mvt rectiligne

3.2 Vecteur vitesse instantanée

- Cas du mvt rectiligne
- Généralisation à tout mvt

Définition Vecteur vitesse instantanée

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}$$

- Remarque
- Caractéristiques du vecteur vitesse instantanée

Propriétés

3.3 Vecteur accélération instantanée

- Cas du mvt rectiligne
- Généralisation à tout mvt

Définition : Vecteur accélération instantanée

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}}$$

- Caractéristiques du vecteur vitesse instantanée

Propriétés

- Remarque

4 Mouvements plans en coordonnées cartésiennes

4.1 Mouvements rectilignes

Définitions :

- Mvt **rectiligne** : $\vec{v}(t)$ direction cste
- Mvt **uniforme:** $\left\|\vec{v}(t)\right\| = v(t)$ cste
- Mvt **rectiligne uniforme:** $\vec{v}(t)$ vecteur cst
- Mvt **rectiligne uniformét accéléré:** $\vec{a}(t)$ vecteur cst

4.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

- <u>Exercice d'application</u>

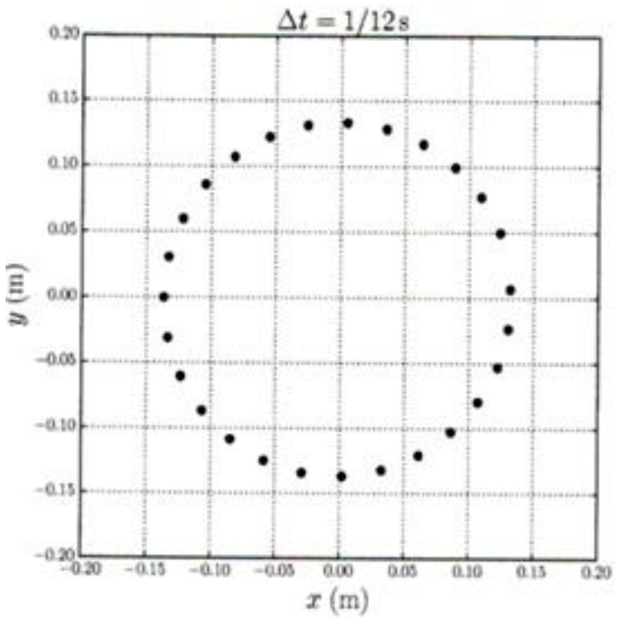
On lance une bille avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, faisant un angle α avec l'horizontale, à partir d'un point M_0 à l'instant $t=0$ dans le champ de pesanteur uniforme. Son accélération est $\vec{a}=\vec{g}=\overrightarrow{cste}$ à tout instant.

1. Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps.
2. Établir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

5 Mouvements circulaires

5.1 Vecteur position

- Retour à la problématique
- Vecteur position



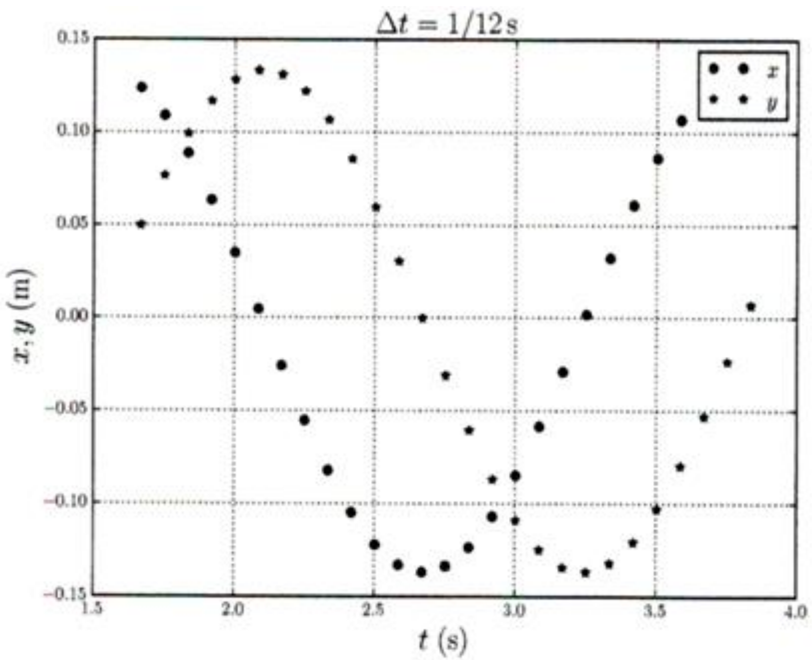


FIGURE 3 : Valeurs expérimentales de x et y du point P à différents instants

5.2 Coordonnées polaires et base polaire

➢ Syst. de coord. le mieux adapté au mvt circulaire : **polaires de base** $\boxed{\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)}$

➢ <u>Coordonnées du point *M*</u>

<u>**Définition**</u> : Dans le plan (*xOy*), les **coordonnées polaires** de *M* sont (r,θ) telles que : $\boxed{r = OM}$ $\boxed{\theta = \left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM}\right)}$

➢ <u>Vecteurs de la base polaire</u>

<u>**Définition**</u>

❖ vecteur unitaire **radial** $\overrightarrow{u_r}$ $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$

❖ vecteur unitaire **orthoradial** $\overrightarrow{u_\theta}$

<u>**Propriété**</u> : base locale

- <u>Vecteur position</u>

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \end{vmatrix}}$$

- <u>Remarques</u>

Coord. de $M \neq$ **composantes** du vecteur position

- <u>Passage coord. cartésiennes $\leftrightarrow$ coord. Polaires</u>

$$\boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}}$$

- <u>Dérivées temporelles des vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$</u>

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \text{ et } \left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}}$$

5.3 Vecteur vitesse

- Vecteur position
- Vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{u_\theta} = v\overrightarrow{u_\theta}}$$

- Norme du vecteur vitesse

$$\boxed{v = r\omega}$$

- Caractéristiques du vecteur vitesse

5.4 Vecteur accélération

- Expression du vecteur accélération

$$\boxed{\vec{a} = -r\omega^2 \overrightarrow{u_r} + r\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta}}$$

- Expression en fonction de la norme de la vitesse

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{u_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_\theta}}$$

5.5 Base de Frenet

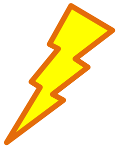
➢ Vecteurs de la base de Frenet

Définition

- $\overrightarrow{T}$ vecteur unitaire **tangent** à la trajectoire
- $\overrightarrow{N}$ vecteur unitaire **orthogonal à** $\overrightarrow{T}$

➢ Mouvement circulaire

- Vecteur vitesse $\boxed{\vec{v} = r\omega\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{T}}$



- Vecteur accélération $\boxed{\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\overrightarrow{N} + \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{T}}$

5.6 Nature des mouvements circulaires

➢ Cas d’un mouvement circulaire uniforme

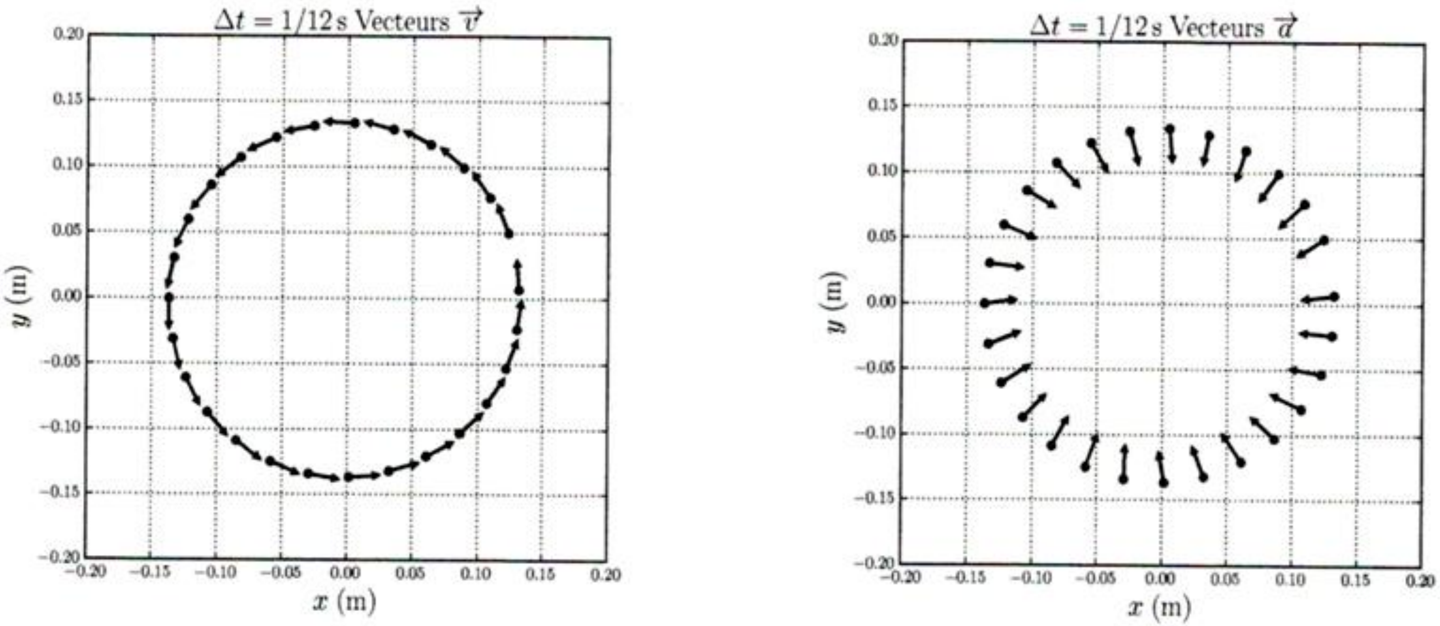


FIGURE 4 : Vecteurs vitesse et accélération du point P
(mouvement circulaire uniforme)

➢ **Propriété**

accélération **centripète**

Cas d'un mouvement circulaire non uniforme

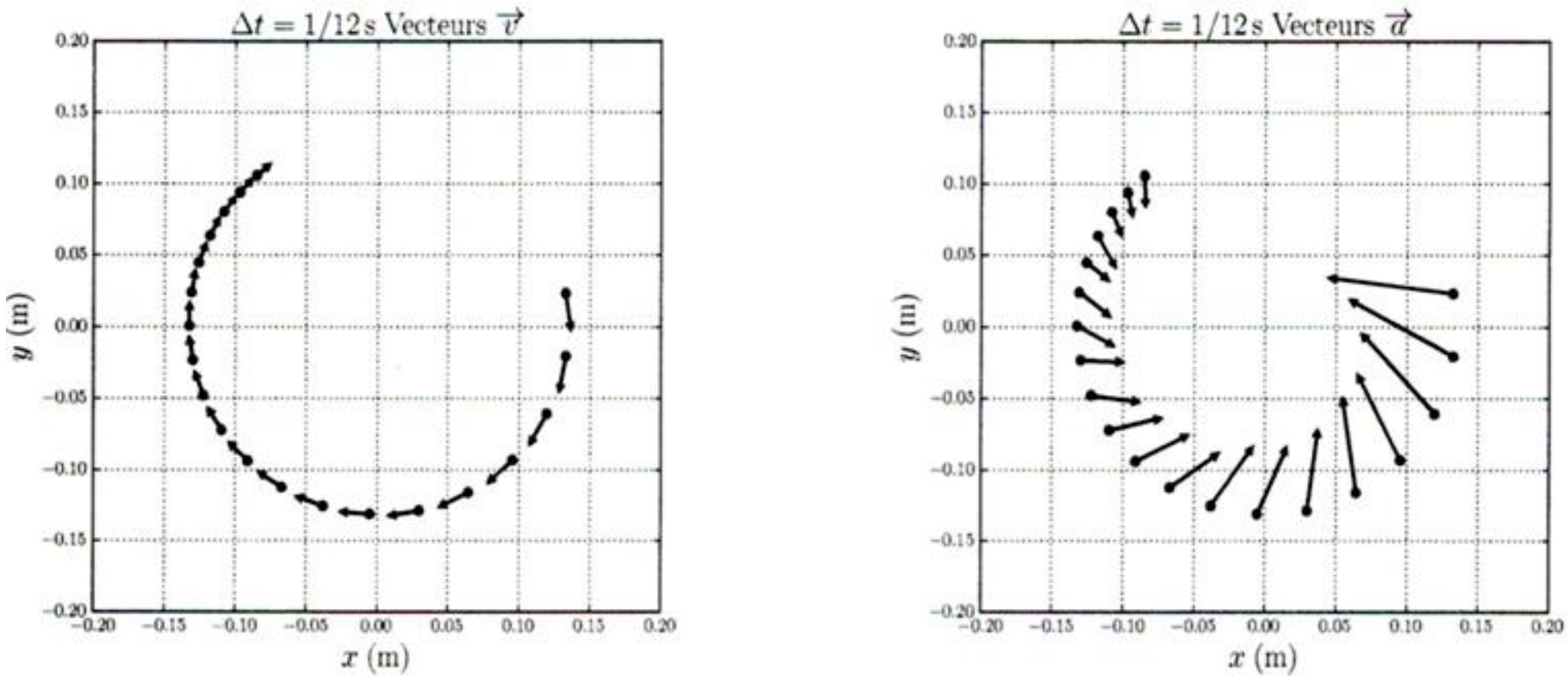


FIGURE 5 : Vecteurs vitesse et accélération du point P
(mouvement circulaire non uniforme)

Propriété

vect. acc. orienté vers la **concavité** de la trajectoire

➢ Évolution de v au cours du temps

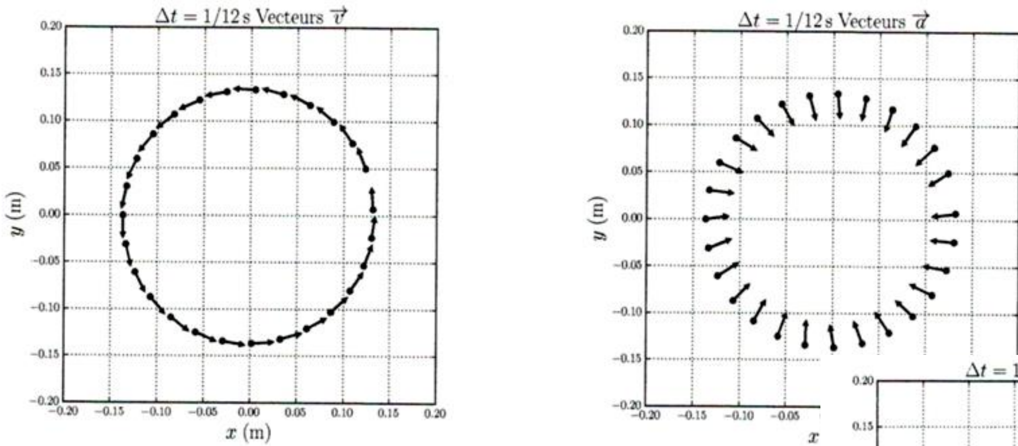


FIGURE 4 : Vecteurs vitesse et accélération du p
(mouvement circulaire uniforme)

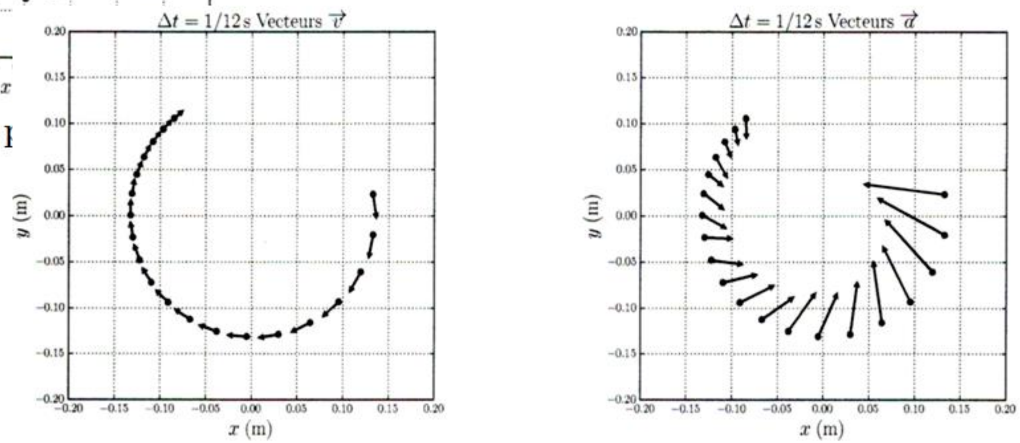


FIGURE 5 : Vecteurs vitesse et accélération du point P
(mouvement circulaire non uniforme)

➢ Généralisation à tout mvt

Propriété

6 Paramétrage d'un mouvement en 3 dimensions

nature du mouvement + symétries :

choix d'un système de coordonnées adapté

6.1 Coordonnées cartésiennes

- Utilisation
- B.O.N.D. cartésienne : $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ base **fixe**

Animation 1 : Figures animées pour la physique / Mécanique / Cinématique / Coordonnées cartésiennes
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

➢ Coordonnées du point *M*

Définition : **coordonnées cartésiennes** de *M* : (*x*,*y*,*z*)

$x = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_x}$: **abscisse** ; $y = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_y}$: **ordonnée** ; $z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_z}$: **cote**

➢ Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

➢ Remarque

Coordonnées du point *M*

= **composantes** du vecteur position

➢ Vecteur vitesse

➢ Vecteur accélération

6.2 Coordonnées cylindriques

- Utilisation
- B.O.N.D. cylindrique : $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$

  Animation 2 : Figures animées pour la physique / Mécanique / Cinématique / Coordonnées cylindriques
  http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

- Coordonnées du point *M*

Définition :

H : projeté orthogonal de *M* dans le plan (*xOy*).

coordonnées cylindriques de *M* : **(*r*, *θ*, *z*)**

$$\boxed{r = OH \qquad \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OH}}\right) \qquad z = HM = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_z}}$$

➢ Vecteurs de la base

Définition :

❖ $\overrightarrow{u_r}$ tel que $\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{u_r}$: vecteur unitaire **radial**

❖ vecteur unitaire **orthoradial** $\overrightarrow{u_\theta}$

Propriété :

base locale : dépend de la position du point *M*, et dépend donc du temps

➢ Vecteur position

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} r \\ 0 \\ z \end{array} \right.}$$

➢ Remarques

Coord. de *M* ≠ **composantes** du vecteur position

- <u>Coordonnées polaires</u>

  $z=0$: coord cylindriques = **coord polaires** (r,θ) du plan (xOy)

- <u>Vecteur vitesse</u>
- <u>Vecteur accélération</u>

6.3 Coordonnées sphériques

➢ Utilisation

➢ B.O.N.D. sphérique : $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$

Animation 3 : Figures animées pour la physique / Mécanique / Cinématique / Coordonnées sphériques
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

➢ Coordonnées du point *M*

Définition :

H : projeté orthogonal de *M* dans le plan (*xOy*).

coordonnées sphériques de *M* : (r,θ,φ)

$$\boxed{r = OM \qquad \theta = \left(\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{OM}\right) \qquad \varphi = \left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OH}\right)}$$

- <u>Vecteurs de la base</u>

<u>Définition :</u>

<u>Propriété</u> :

base locale : dépend de la position du point *M*, et dépend donc du temps

- <u>Vecteur position</u>

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \left| \begin{matrix} r \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.}$$

- <u>Remarque</u>

Coord. de $M \neq$ **composantes** du vecteur position

7 Vecteur déplacement élémentaire

7.1 Définition

- <u>Vecteur déplacement</u>
- <u>Vecteur déplacement élémentaire</u>

<u>Propriété</u> :

- <u>Lien avec le vecteur vitesse</u>

$$\boxed{d\overrightarrow{OM}(t) = d\vec{l} = \vec{v}dt}$$

7.2 Expression dans les différentes bases

➢ Base cartésienne

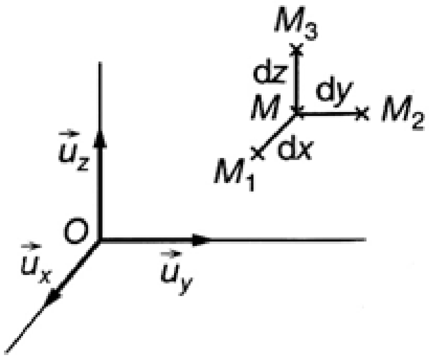


FIGURE 6 : Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}}$$

➢ Base cylindrique

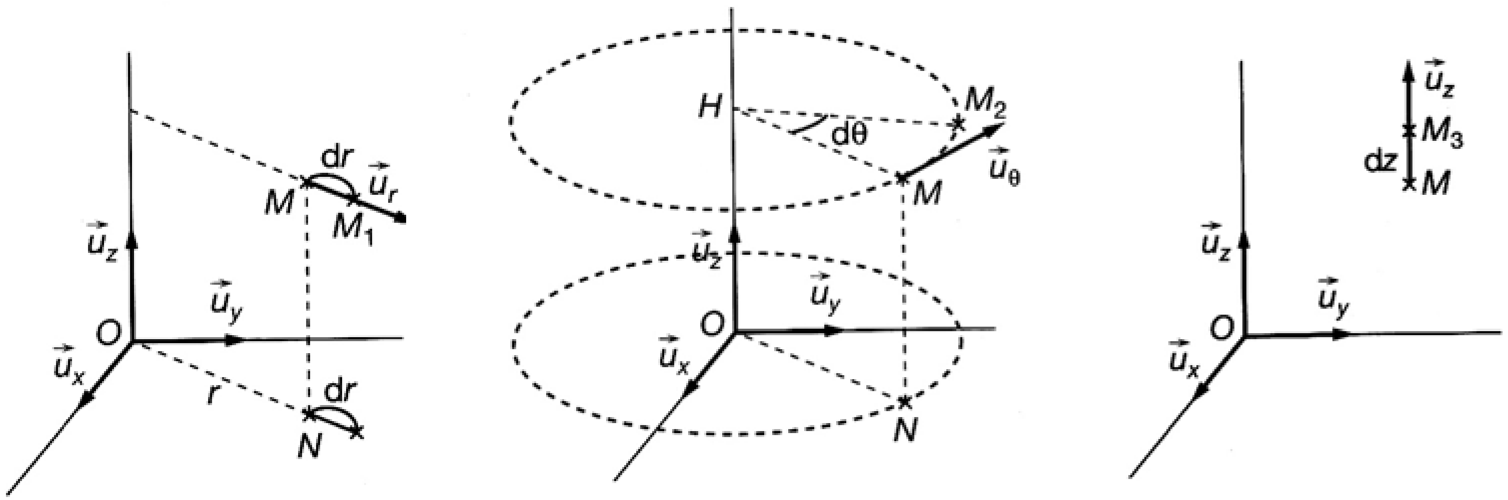


FIGURE 7 : Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques par rapport à r (à gauche), à θ (au centre), à z (à droite)

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}}$$

Base sphérique

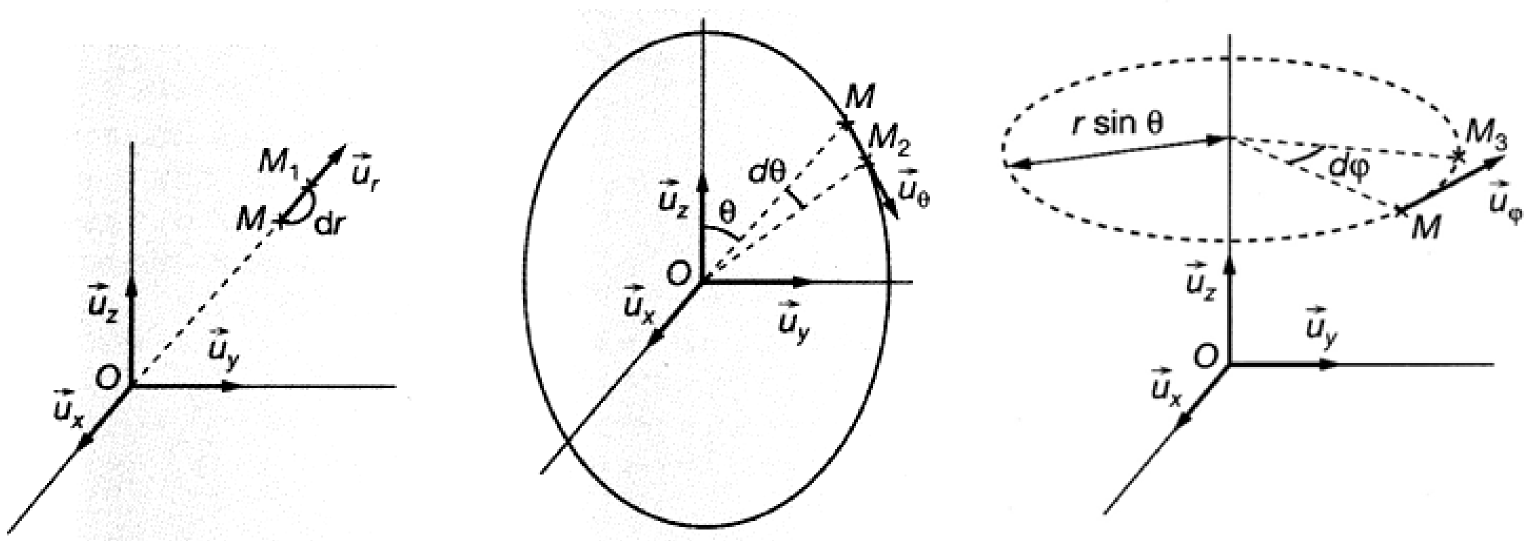


FIGURE 8 : Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques par rapport à r (à gauche), à θ (au centre), à φ (à droite)

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}}$$