À chercher pour lundi 22/05/2023, corrigé

TD 27 :

Exercice 3. On a A qui s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_n \\ a_3 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

En effectuant alors les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, etc., ce qui ne change pas le déterminant, on se ramène alors au déterminant d'une matrice triangulaire inférieure avec sur la diagonale les coefficients $a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ \dots, a_{n-1} - a_n$ et a_n. On a donc :

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \times a_n.$$

Pour $A = (\max(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent en prenant $a_k = k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. On obtient alors dans ce cas :

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n-1} (-1) \times n = (-1)^{n-1} n.$$

Pour $A = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$, on adapte la première preuve. On a cette fois :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

En effectuant alors les opérations élémentaires $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, etc., ce qui ne change pas le déterminant, on se ramène alors au déterminant d'une matrice triangulaire supérieure avec sur la diagonale les coefficients $a_1,\ a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \dots, a_n - a_{n-1}$. On a donc :

$$\det(A) = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k).$$

Toujours en posant $a_k = k$, on obtient alors $\det(A) = 1$.

Exercice 8. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1) On a :

$$\begin{aligned}
\det(\overline{C}) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n}\overline{c_{k,\sigma(k)}} \\
&= \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n} c_{k,\sigma(k)}} \\
&= \overline{\det(C)}.
\end{aligned}$$

En effet, le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués et une somme de conjugués est égal au conjugué de la somme et $\varepsilon(\sigma)$ est réel (la signature vaut 1 ou -1) et on peut donc la sortir ou la rentrer dans le conjugué. On a donc bien le résultat voulu.

2) On a $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$ puisque A et B commutent (les termes croisés en $-iAB$ et iBA se simplifient). Si on pose $C=A+iB$, puisque A et B sont réelles, on a $\overline{C}=A-iB$. On a donc :

$$\det(A^2+B^2)=\det(C\overline{C}).$$

On en déduit que $\det(A^2+B^2)=\det(C)\det(\overline{C})$. Puisque $\det(\overline{C})=\overline{\det C}$, on a alors que l'expression que l'on considère est un module et est donc positive.

Exercice 14. Soit φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M)=M^T$. On a φ linéaire car la transposée est linéaire et $\varphi\circ\varphi=\mathrm{Id}$ (on applique deux fois la transposée). On a donc une symétrie. Il s'agit ici de la symétrie par rapport aux matrices symétriques (qui sont fixes par φ) parallèlement aux matrices antisymétriques (qui sont envoyées sur leur opposée).

Pour calculer le déterminant de φ, on va écrire sa matrice dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ bien choisie. Plutôt que de choisir la base canonique, on va choisir une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de matrices symétriques et antisymétriques. Ainsi, la matrice de φ s'écrira facilement (elle sera diagonale) et calculer son déterminant sera alors facile.

On va donc prendre comme base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les $E_{1,1},E_{2,2},\dots,E_{n,n}$ puis les $E_{i,j}+E_{j,i}$ et $E_{i,j}-E_{j,i}$ pour $i\neq j$. Alors, les matrices symétriques s'envoient sur elles-mêmes par φ et les antisymétriques sur leurs opposées. Ceci implique que dans cette base, φ s'écrit avec des 1 sur la diagonale et des -1, avec autant de -1 que la dimension de l'espace vectoriel des matrices antisymétriques. On en déduit que :

$$\det(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

TD 28 :

Exercice 7. Notons u_n le nombre de façons de monter un escalier à n marches avec des pas d'une ou deux marches. On a clairement $u_1=1$ et $u_2=2$ (on ne peut faire que soit un pas de 2 marches, soit 2 pas d'une marche). Supposons que l'on désire monter un escalier de $n+2$ marches. Alors, au premier pas, soit on monte 1 marche et il reste un escalier de $n+1$ marches à monter, soit on monte 2 marches et il reste un escalier de n marches à monter. On a donc que pour $n\geq 1$:

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

En effet, les possibilités sont bien disjointes (on ne fait pas le même premier pas) et on compte bien tout car au premier pas, on fait forcément un pas d'une marche ou de deux marches. Remarquons que l'on peut étendre cette propriété en $n=0$ en posant $u_0=1$ (pour bien avoir $u_2=u_1+u_0$). L'équation caractéristique associée à cette équation est $X^2-X-1=0$ dont les racines sont $x_0=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit qu'il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_0^n + \mu x_1^n.$$

En $n = 0$, on trouve $1 = \lambda + \mu$ et en $n = 1$, on trouve que $1 = \lambda x_0 + \mu x_1$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ et $\mu = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, ce qui donne l'expression de u_n.

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On veut colorier un carré en utilisant k couleurs. On a ici k côtés à colorier. On va également supposé que le carré est « fixe » (autrement dit qu'un carré colorié en rouge-vert-rouge-vert est différent d'un carré colorié en vert-rouge-vert-rouge, on ne considère pas les coloriages invariants par rotation).

Pour $k = 1$, il n'y a aucune façon de colorier le carré. Pour $k = 2$, il y en a deux (les deux données précédemment). Pour $k = 3$, il faut compter les coloriages utilisant 2 couleurs :

- il y a 3 couples de couleurs possibles si nos couleurs sont Rouge, Vert, Bleu, on peut prendre les couples $R - V$, $R - B$ et $V - B$) et pour chacun de ces couples, 2 coloriages possibles d'après l'étude précédente.
- si on prend exactement trois couleurs, il faut choisir une couleur que l'on utilise deux fois (3 choix possibles, rouge, vert ou bleu). Il faut ensuite choisir si on colorie les côtés haut/bas ou gauche/droite avec cette couleur (2 possibilités). Il faut ensuite choisir si on colorie les deux côtés restants en Bleu-Vert ou en Vert-Bleu (2 possibilités).
- Finalement, on a $3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2$ coloriages possibles, soit 18.

Pour $k = 4$, on peut reprendre l'étude précédente :

- il y a $\binom{4}{2}$ manières de choisir 2 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 2 coloriages possibles (cf première étude).
- il y a $\binom{4}{3}$ manières de choisir 3 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 12 coloriages possibles (cf deuxième étude)
- si on utilise exactement les 4 couleurs, on a alors $4! = 24$ possibilités pour colorier notre carré (il faut choisir une couleur pour la face du haut (4 possibilités), puis une couleur pour la droite (3 possibilités restantes), puis une couleur pour le bas (2 possibilités restantes) et la dernière est fixée donc en tout 4! coloriages.
- Il y a donc finalement $\binom{4}{2} \times 2 + \binom{4}{3} \times 12 + 4! = 12 + 48 + 24 = 84$ possibilités pour le coloriage avec 4 couleurs.

Pour le cas général ($k \geq 4$), en reprenant l'étude précédente :

- il y a $\binom{k}{2}$ manières de choisir 2 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 2 coloriages possibles (cf première étude).
- il y a $\binom{k}{3}$ manières de choisir 3 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 12 coloriages possibles (cf deuxième étude)
- si on utilise exactement 4 couleurs, il y a $\binom{k}{4}$ manières de les choisir et ensuite 24 coloriages avec chacun de ces choix.
- Il y a donc finalement $2\binom{k}{2} + 12\binom{k}{3} \times 12 + 24\binom{k}{4}$ possibilités pour le coloriage avec k couleurs.

Une autre façon de compter (plus rapide) est la suivante :

Pour le premier côté, on a k couleurs possibles, pour le second, on en a $k - 1$ (pour ne pas réutiliser la première). On effectue ensuite une disjonction de cas pour le troisième côté : soit on réutilise la première couleur (1 possibilité) et on a alors $k - 1$ possibilités pour le 4ieme côté, soit on utilise une autre couleur ($k - 2$ possibilités) et il nous reste alors $k - 2$ possibilités pour le dernier côté. Au total, cela donne donc :

$$k \times (k-1) \times \left(1 \times (k-1) + (k-2)^2\right).$$