DS N^{o} 6, Pb 2 : commentaires

Problème 2

Globalement la présentation est correcte.

Par contre d'une manière générale, les justifications attendues sont souvent absentes ou trop succinctes, les théorèmes (ou formules) utilisés ne sont pas cités. Or dans la partie I notamment, pratiquement toutes les réponses sont dans l'énoncé, ce sont donc les preuves qu'il fallait faire. Beaucoup n'ont pas encore bien compris ce point (on attend de la rigueur et une justification).

Dans beaucoup de copies, on voit ce genre de phrases « *d'après la question une telle, si on fait ça ou ça on obtiendra l'inégalité demandée* », ceci n'est évidemment pas une réponse satisfaisante, si les gens qui rédigent ainsi gagnent du temps, ils perdent par contre tous les points ...

Il faut éviter aussi l'abus de notations personnelles, certains, pour éviter d'écrire une expression complète, leur donnent de manière plus ou moins explicite un nom ou un symbole, et c'est au correcteur ensuite de se débrouiller pour retrouver à chaque fois à quoi correspond ce symbole, c'est possible si cela reste sur la même page (à condition que ce soit bien clair), mais au delà ce n'est pas acceptable.

Ce problème, qui étudiait un cas particulier de dérivation sous le signe somme (le cas général sera étudié en deuxième année) a été globalement très mal compris. Beaucoup en ont déduit implicitement que *toute intégrale est dérivable*, ce qui est n'importe quoi, mais certains le pensaient déjà avant ... Faut-il rappeler qu'une intégrale est un nombre, et que la sempiternelle phrase *donc l'intégrale est dérivable d'après les théorèmes généraux* ne sert qu'à prouver au correcteur que l'auteur de cette phrase ne sait pas de quoi il parle...

Partie I

Q1a Globalement réussie, on attendait une IPP avec les hypothèses habituelles.

Q1b Tout le monde (ou presque) justifie la classe avec les théorèmes généraux du cours, en précisant bien que l'exponentielle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, ce qui est un non sens ici. En fait on avait la composée suivante : $\exp\circ p \colon \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{C} \xrightarrow{exp} \mathbb{C}$ avec $p(x) = -\alpha x$. Il fallait donc invoquer un théorème sur l'exponentielle **complexe** (si p est dérivable, alors $\exp\circ p$ aussi et $\exp(p)' = p' \times \exp(p)$).

Q2b Une des questions les plus mal réussies, très peu connaissent réellement l'inégalité triangulaire sur les intégrales : $\boxed{\text{si } x_0 \leqslant x}$ alors $\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t$, et $\boxed{\text{si } x \leqslant x_0}$ alors $\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x}^{x_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
Beaucoup ne savent pas non plus que pour primitiver (ou dériver) $t \mapsto |x-t|$, il faut **d'abord** se débarrasser de la valeur absolue en étudiant de signe de $x-t$. On attendait vraiment le calcul (et non pas une simple recopie du résultat qui était dans l'énoncé), peu savent qu'une primitive de $t \mapsto x-t$ est $t \mapsto -\frac{1}{2}(x-t)^2$...

Q3a Les fonctions étant ici à valeurs complexes, on ne peut pas dire qu'elles ont un maximum! Certains ont voulu utiliser que l'image d'un segment est un segment, mais ce n'est pas vrai dans $\mathbb{C}$. Il fallait dire qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

Q3b Pratiquement tout le monde oublie qu'il y a une hypothèse sur α à vérifier ...

Q3c Question très mal réussie, comme Q2b, ou très mal rédigée.

Q3di Il fallait dire qu'on divise de chaque côté par $|x-x_0|$ qui **est strictement positif** (et non pas par $x-x_0$). Très peu justifient et la plupart des copies se contentent de recopier le résultat de l'énoncé.

Q3dii Question très mal réussie, ce n'est pas un passage à la limite contrairement à ce que pensent beaucoup (il faudrait d'ailleurs montrer avant que les limites existent bien). Il s'agissait simplement du résultat du cours qui dit que si $|f(x)-\ell| \leqslant g(x)$ et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors on peut en déduire que f a une limite en x_0, et que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Q3diii Pratiquement jamais réussie, car très peu ont compris le fond du problème. Il fallait avoir compris que les questions précédentes ont montré qu'une fonction du type $x \mapsto \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, avec α et β **vérifiant certaines hypothèses**, est dérivable et que sa dérivée est $x \mapsto \int_a^b -\alpha(t)\beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.

Partie II

Q4 Presque jamais réussie. Il fallait dire que F est du type $x \mapsto \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, en précisant a b, les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et vérifier que les hypothèses de la partie I étaient bien toutes remplies. Par contre G n'est pas de ce type (mais est la composée de deux fonctions dérivables, en traitant F en premier). Quant à H très peu on reconnu la primitive de $x \mapsto \exp(-x^2)$ qui s'annule en 0... Certains ont même voulu calculer H pensant connaître une primitive de $\exp(-x^2)$, écrivant ainsi n'importe quoi...

Q5a Pratiquement pas traitée. On attendait un changement de variable.

Q5b Beaucoup ont bien reconnu que $-2\mathrm{H}'\mathrm{H}$ est la dérivée de $-\mathrm{H}^2$, donc $\mathrm{G} = -\mathrm{H}^2$+constante (certains ont oublié la constante).

Q6a Pratiquement personne n'a su expliquer pourquoi $|\mathrm{G}(x)| \leqslant e^{-x^2}$.

Q6b Beaucoup tombent dans le piège, H^2 tend bien vers $\frac{\pi}{4}$ en $+\infty$, mais il faut ensuite étudier le signe de H (et le justifier) avant de pouvoir dire que H tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie III

Q7 Là encore, il fallait dire que F est du type $x \mapsto \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, en précisant a b, les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et vérifier que les hypothèses de la partie I étaient bien toutes remplies.

Q8a Assez bien réussie dans l'ensemble, mais on voit quand même encore des gens qui ne savant pas simplifier $\frac{1}{i}$, ou qui ne reconnaissent même pas $e^{i\pi/2}$!

Q8b Très peu abordée, il fallait reconnaître que $-ixe^{it}e^{-xe^{it}}$ était la dérivée **par rapport à** t de $e^{-xe^{it}}$, quelques uns l'ont vu.

Q9 Question élémentaire et pourtant mal réussie ! Beaucoup de DL faux pour l'exponentielle et le cosinus ! Rappelons qu'un dl_1 permet un prolongement continu **et dérivable**. Quelques uns pensent à tort qu'une fonction qui a une limite finie en 0 (par exemple) admet un dl_1, c'est évidemment faux (confusion avec le dl_0), il suffit de prendre une fonction continue en 0 et non dérivable en 0 (la racine carrée par exemple). Quelques uns ont également justifier l'existence des DL en disant que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors qu'elle n'étaient pas définies en 0...

Q10 Assez bien réussie globalement.

Q12a Très peu abordée.

12b Assez peu abordée, mais parfois bien réussie par ceux qui connaissaient la formule de Taylor-Young. Certains ont cherché à dériver le DL pour calculer $f^{(k)}(0)$, et oublié que la dérivée d'un $\underset{0}{o}(x^n)$ n'est pas forcément un $\underset{0}{o}(x^{n-1})$...