2. Sommes et identités remarquables, méthodologie

I. Sommes et produits

I.1. Le symbole Σ

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_0, \ldots, u_n$ des réels. On pose $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Par convention, une somme indicée sur l'ensemble vide (dans notre cas si $n < 0$) est nulle.

De manière générale, si $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, on note $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + u_{i_2} + \ldots + u_{i_n}$.

Proposition. Sommes arithmétiques. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

I.2. Changement d'indice

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_0, \ldots, u_n$ des réels. Alors :
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n+1} u_{j-1}$ (on a posé $k = j - 1 \Leftrightarrow j = k + 1$).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=-1}^{n-1} u_{j+1}$ (on a posé $k = j + 1 \Leftrightarrow j = k - 1$).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j}$ (on a posé $k = n - j \Leftrightarrow j = n - k$).

m Pour rédiger un changement d'indice, on écrit l'ancienne variable en fonction de la nouvelle (ou dans l'autre sens si c'est plus facile) et la nouvelle variable en fonction de l'ancienne (pour calculer facilement les nouvelles bornes) et on réalise un petit tableau pour préciser les nouvelles bornes entre lesquelles on somme. Attention à ne pas oublier de changer les bornes (et de mettre en bas la plus petite valeur) après un changement d'indice ! Par exemple, pour le second changement d'indice :

k	j
0	1
n	n+1

Exercice d'application 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer les sommes suivantes en fonction de n en utilisant un changement d'indice :

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$.

2) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-3}(k+3)^2$.

3) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(n+1-k))$.

I.3. Premiers résultats

Théorème. Simplification télescopique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_0, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Exercice d'application 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0, \ldots, u_{n+2} \in \mathbb{R}$. Simplifier les sommes suivantes à l'aide d'une somme télescopique :

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k+1)^2)$.

2) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$.

3) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$.

Théorème. Somme géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Alors

- si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

On pose par convention $q^0 = 1$ pour tout $q \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 3. Calculer les sommes suivantes en fonction de la valeur de $x \in \mathbb{R}$.

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{j+2}$.

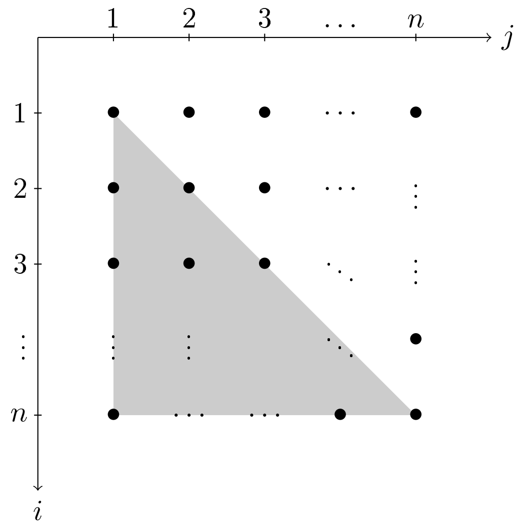
2) $S_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x+1)^j$.

3) $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x^{4j+2}$.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des réels. On pose :

- $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}$ (somme de tous les termes).
- $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u_{i,j}$ (somme des termes sous la diagonale, diagonale incluse).
- $\displaystyle\sum_{1\leq j< i\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j}$ (somme des termes sous la diagonale, diagonale excluse).

Le tableau des indices. En gris, les indices situés sous la diagonale (diagonale incluse).



Proposition. Interversion dans une double somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des réels. Alors :

- $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}$
- $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}.$
- $\displaystyle\sum_{1\leq j< i\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} u_{i,j}.$

m Pour rédiger une interversion de sommes dans une double (ou triple, etc.) somme, on écrit tout d'abord la somme sous la forme $\displaystyle\sum_{1\leq\ldots\leq\ldots\leq n}\ldots$, puis on écrit les sommes séparément où les bornes pour chaque indice sont les indices qui apparaissent dans les sommes précédentes. Par exemple, si on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} u_{i,k}$, on a i qui varie entre 1 et n et ensuite k entre 1 et i, ce qui entraine que cette somme est $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq i\leq n} u_{i,k}$. Si on veut écrire une somme en fonction de l'indice k en premier, on a donc k qui varie entre 1 et n (puisque l'indice i n'est pas encore apparu), puis ensuite i qui varie entre k et n (puisque k apparait dans la première somme). La somme considérée vaut donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} u_{i,k}$.

(m) Réaliser un tableau des indices sur lesquels on somme peut également parfois permettre de mieux visualiser les bornes dans les interversions et les changements d'indices.

Exercice d'application 4. On pose $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ij$.

1) Écrire S en sommant d'abord sur j, puis sur i.

2) En déduire l'expression de S en fonction de n. *On pourra utiliser le fait que* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice d'application 5. On pose $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=i}^{j} u_{i,j,k}$ où $(u_{i,j,k})_{1 \leq i,j,k \leq n}$ est une famille de réels.

Écrire cette triple somme comme :

1) trois sommes indicées sur i, puis k et enfin j.

2) trois sommes indicées sur j, puis k et enfin i.

3) trois sommes indicées sur k, puis i et enfin j.

4) trois sommes indicées sur j, puis i et enfin k.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Alors $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i b_j$.

I.5. Le symbole $\prod$

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_0, \ldots, u_n$ des réels. On pose $\prod_{0 \leq i \leq n} u_i = \prod_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

Par convention, un produit indicé sur l'ensemble vide (dans notre cas si $n < 0$) est égal à 1.

Définition. La factorielle. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ (on a donc $0! = 1$).

Exercice d'application 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide de factorielles :

1) $P = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n$.

2) $I = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)$.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda u_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k \text{ et } \prod_{k=1}^{n} (u_k \times v_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} v_k\right).$$

Théorème. Simplification télescopique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{R}^*$. Alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_0}$.

II. Identités remarquables

II.1. Coefficients binomiaux

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On pose $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \end{cases}$.

$\binom{n}{k}$ représente le nombre de façons de choisir k éléments parmi n. En particulier, c'est toujours un entier naturel.

Exercice d'application 7. Soient $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. On pose $n = k_1 + k_2 + k_3$. Simplifier $\displaystyle\binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ (on exprimera le résultat avec des factorielles).

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Théorème. Formule de Pascal. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

(m) Pour démontrer des formules avec des coefficients binomiaux ou pour les calculer rapidement, c'est parfois une bonne idée d'utiliser le triangle de Pascal afin de mieux visualiser la situation.

II.2. Binôme de Newton

Théorème. Binôme de Newton. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Pour le cas $n = 0$, on rappelle que par convention $x^0 = 1$.

Exercice d'application 8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Développer ou factoriser les expressions suivantes à l'aide du binôme de Newton :

1) $S_1 = (1-x)^n$.

2) $\displaystyle S_2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k$.

3) $\displaystyle S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k} x^{2k}$.

II.3. Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Pour le cas $n = 0$, on rappelle que par convention, une somme indicée sur le vide vaut 0.

$\boxed{\text{m}}$ On ne sait pas calculer beaucoup de sommes... Si on demande de calculer explicitement la valeur d'une somme sans vous donner la valeur du résultat, c'est en général qu'il s'agit d'une somme arithmétique, géométrique, télescopique ou d'un binôme de Newton. Si vous ne reconnaissez pas une de ses expressions, on peut toujours calculer la valeur de la somme pour les premières valeurs de n et trouver une formule que l'on montre par récurrence ou essayer des changements d'indices qui permettraient de simplifier cette somme.

III. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On effectue le changement d'indice $j = k+1 \Leftrightarrow k = j-1$. Puisque k varie entre 0 et n, alors j varie entre 1 et $n+1$. On a donc $S_1 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

2) On effectue cette fois le changement d'indice $j = k+3 \Leftrightarrow k = j-3$ afin de simplifier la somme. Puisque k varie entre 0 et $n-3$, on a donc j qui varie entre 3 et n. On a donc :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=3}^{n} j^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1^2 - 2^2 \qquad \text{(Attention aux premiers termes !)} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5. \end{aligned}$$

3) On a $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+1-k)$. Dans la seconde somme, on va poser $j = n+1-k \Leftrightarrow k = n+1-j$. Quand $k=1$, on a $j=n$. Quand $k=n$, on a $j=1$. On en déduit que j varie entre 1 et n. On a donc :

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{j=1}^{n} \ln(j) = 0 \quad \text{(les deux sommes sont les mêmes).}$$

Exercice d'application 2.

1) Pour retrouver la formule, on peut poser $u_k = k^2$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On obtient alors $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1} = 1 - (n+1)^2$.

2) On a $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \ln(k)$ (on rappelle que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$). Ce n'est alors par exactement une somme télescopique puisqu'il n'y a pas exactement une différence de deux termes consécutifs mais il y a seulement un écart de deux. Ainsi, les termes en $\ln(k+2)$ vont donner $\ln(3) + \ln(4) + \ldots + \ln(n) + \ln(n+1) + \ln(n+2)$ et les termes en $\ln(k)$ vont donner $\ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(n-1) + \ln(n)$. En éliminant les termes en commun, on obtient donc que $S_2 = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(2)$ (on rappelle que $\ln(1) = 0$).

Un autre moyen d'obtenir ce résultat est d'écrire $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ et de réaliser le changement d'indice $j = k+2$ dans la première somme. On a alors $S_2 = \sum_{j=3}^{n+2} \ln(j) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. En éliminant les termes qui apparaissent dans les deux sommes, on retrouve le résultat précédent.

3) On sépare la somme en deux pour utiliser deux fois les sommes télescopiques. On a :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n+1} (u_{k-1} - u_k) + \sum_{k=1}^{n+1} (-u_k + u_{k+1}) \\ &= u_0 - u_{n+1} + (-u_1 + u_{n+2}) \\ &= u_0 - u_1 + u_{n+2} - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice d'application 3.

1) On a $S_1 = \sum_{j=0}^{n} 2^j \times 2^2 = 4\sum_{j=0}^{n} 2^j$. Puisque $2 \neq 1$, on a donc $S_1 = 4(2^{n+1} - 1)$.

2) Attention la somme commence à 1 et pas à 0 ! Il faut de plus traiter à part le cas $x = 0$ pour lequel la raison est 1 est où $S_2 = n$. Si $x \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=0}^{n}(x+1)^j - 1 \\ &= \frac{1-(x+1)^{n+1}}{1-(x+1)} - 1 \\ &= \frac{(x+1)^{n+1}-1}{x} - 1. \end{aligned}$$

3) On a en procédant comme dans le 1., $S_3 = \sum_{j=0}^{n}(x^{4j} \times x^2) = x^2 \sum_{j=0}^{n}(x^4)^j$. On a donc une somme géométrique de raison x^4. Or, quand $x \in \mathbb{R}$, on a $x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. On a donc, si $x = \pm 1$, $S_3 = n+1$. Si $x \neq \pm 1$, alors $x^4 \neq 1$ et on a :

$$S_3 = x^2 \times \frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4} = x^2 \times \frac{x^{4n+4}-1}{x^4-1}.$$

Exercice d'application 4.

1) On a $S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij$.

2) Puisque la seconde somme est sur i, on peut factoriser le j et utiliser la formule pour une somme arithmétique. On a donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(j \times \frac{(j-1)j}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3 - j^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} \times (3n(n+1) - 2(2n+1)) \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}. \end{aligned}$$

Exercice d'application 5. L'idée est tout d'abord d'écrire $S = \sum_{1 \leq i \leq k \leq j \leq n} u_{i,j,k}$. On peut alors écrire la somme dans l'ordre désiré.

1) $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\sum_{j=k}^{n} u_{i,j,k}$.

2) $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \sum_{i=1}^{k} u_{i,j,k}$.

3) $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k}^{n} u_{i,j,k}$.

4) $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=i}^{j} u_{i,j,k}$.

Exercice d'application 6. On effectue ici le produit des nombres pairs et le produit des nombres impairs.

1) L'idée est ici de factoriser un 2 dans chaque terme et on a n termes en tout. On a donc

$$\begin{array}{rcl} P & = & (2 \times 1)(2 \times 2)(2 \times 3) \dots (2 \times n) \\ & = & 2^n \times 1 \times 2 \times \dots \times n \\ & = & 2^n n!. \end{array}$$

2) L'idée est de rajouter les termes qui manquent, c'est à dire les termes pairs que l'on a calculé ci-dessus. On a :

$$\begin{array}{rcl} I & = & \frac{I \times P}{P} \\ & = & \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}{P} \\ & = & \frac{(2n+1)!}{2^n n!}. \end{array}$$

Exercice d'application 7. On a :

$$\begin{array}{rcl} \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \binom{n-k_1-k_2}{k_3} & = & \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \times \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \times \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \\ & = & \frac{n!}{k_1!} \times \frac{1}{k_2!} \times \frac{1}{k_3! \times 0!} \\ & = & \frac{n!}{(k_1!)(k_2!)(k_3!)}. \end{array}$$

Exercice d'application 8.

1) On a d'après la formule du binôme $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k}$ (puisque $1^k = 1$ pour toute valeur de k). Cependant, il est ici plus simple d'écrire la formule dans l'autre sens, c'est à dire d'écrire $(1-x)^n = (-x+1)^n$ afin que les termes en $-x$ soient à la puissance k et non pas $n-k$ (plus facile à manipuler). On a donc $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$.

2) Attention, la somme commence à 1 et non pas à 0 comme dans la formule. Il faut ici rajouter (et enlever) le premier terme. On a donc :

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 1^{n-k} - 1 \\
&= (-2+1)^n - 1 \\
&= (-1)^n - 1.
\end{aligned}
$$

3) On peut soit tout regrouper dans le même terme (et utiliser la formule du binôme avec du 1^{n-k} comme ci-dessus), comme le montre le calcul suivant :

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x^2}{3}\right)^k \\
&= \left(\frac{x^2}{3} + 1\right)^n .
\end{aligned}
$$

On peut également multiplier et diviser par 3^n pour faire apparaitre la formule du binôme (on retrouve le même résultat que ci-dessus) :

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^k 3^{n-k} \\
&= \frac{1}{3^n} \left(x^2 + 3\right)^n .
\end{aligned}
$$