Programme de colle, semaine 11

Suites 1 (en entier) :

— Nous avons revu le vocabulaire usuel (sommes de deux suites, produits de deux suites, suite majorée, minorée, monotone, etc.). Nous avons donné la définition d'une propriété vraie à partir d'un certain rang.

— Nous avons revu la définition de la convergence d'une suite , démontré l'unicité de la limite et montré que si une suite converge alors elle est bornée. Nous avons ensuite donné la définition d'une suite divergente, ainsi que les cas où la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous avons ensuite démontré les opérations sur les limites usuelles (addition, produit, passage à l'inverse, etc. quand il n'y a pas de formes indéterminées). Nous avons vu les liens entre limites et inégalité (passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes, une suite inférieure à une suite qui tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$).

— Nous avons continué le chapitre sur les suites avec l'étude des suites monotones (suite croissante majorée converge, suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$). Nous avons également démontré qu'une suite croissante convergente est majorée par sa limite, l'inégalité pouvant être stricte si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Nous avons enfin donné la définition de suites adjacentes et démontré que des suites adjacentes convergent vers la même limite.

— Nous avons étudié les suites extraites (sous suites), donné des exemples (termes d'indices pairs, impairs, etc.) démontré que les suites extraites d'une suite convergente convergent vers la même limite (ce qui permet de montrer qu'une suite ne converge pas si elle admet deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes). Nous avons ensuite démontré que si la suite des termes pairs et des termes impairs d'une suite converge vers la même limite, alors la suite converge vers cette limite.

— Nous avons vu la définition d'une valeur d'adhérence (ceci est hors programme mais permettait d'avoir un peu de vocabulaire). Nous avons ensuite démontré Bolzano Weierstrass (les étudiants doivent connaitre le principe de la démonstration par dichotomie). Nous avons ensuite vu les suites à valeurs dans $\mathbb{C}$, montré qu'une suite converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent et démontré le théorème de Bolzano Weierstrass.

— Nous avons ensuite fait un complément sur les suites arithmétiques et géométriques et vu les suites arithmético-géométriques. Nous avons également étudié les suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants et l'étude de $u_{n+1} = f(u_n)$ dans le cas f continue et croissante.

Remarques sur le programme : nous avons fini également toute l'étude sur les équivalents/comparaisons des suites. Vous pouvez éventuellement interroger un peu dessus mais plutôt en 2ieme exo et avec des applications « simples » car nous n'avons pas traité beaucoup d'exercices dessus !

Compétences :

— Savoir écrire la négation de $u_n \to l$, $u_n \to +\infty$, (u_n) n'est pas majorée, etc.

— Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ afin de montrer qu'une suite (u_n) est croissante (ou décroissante).
— Savoir écrire la négation de $u_n \to l$, $u_n \to +\infty$, (u_n) n'est pas majorée, etc.
— Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ afin de montrer qu'une suite (u_n) est croissante (ou décroissante).
— Utiliser les suites extraites afin de démontrer qu'une suite ne converge pas (en trouvant deux suites extraites qui tendent vers des limites différentes).
— Utiliser les propriétés d'une suite pour en dégager des propriétés (si la suite est monotone, on sait qu'elle ne peut que converger ou diverger vers $\pm\infty$, si la suite est bornée, on sait qu'elle admet une valeur d'adhérence, etc.).
— Être autonomne sur la résolution de $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
— Être autonomne sur l'étude de $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue croissante.

Questions de cours :

1. Donner les caractérisations à l'aide du quotient de $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ (autrement dit si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang) et illustrer avec des exemples.
2. Donner les comparaisons usuelles en l'infini ($\sum_{k=0}^{d} a_k n^k \sim a_d n^d$ si $a_d \neq 0$, $n! = o(n^n)$, $a^n = o(n!)$, $n^b = o(a^n)$ pour $a > 1$ et $(\ln(n))^c = o(n^b)$ pour $b > 0$) et démontrer la première ($n! = o(n^n)$).
3. Énoncer la formule de Stirling ainsi que les équivalents usuels en 0 obtenu en utilisant $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ pour f dérivable (quand $u_n \to 0$, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $\sin(u_n) \sim u_n$, etc.)
4. En utilisant les équivalents, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.
5. Sur un ensemble E, donner la définition d'une loi de composition interne, d'une loi associative, commutative et d'un élément neutre et montrer l'unicité de l'élément neutre.
6. Montrer que si $*$ est une lci associative sur E, alors si $x \in E$ est inversible, son inverse est unique et montrer que si $x, y \in E$ sont inversibles, alors $x * y$ l'est et que $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
7. Donner la définition d'un groupe (en rappelant les définitions d'une lci associative, de l'élément neutre et d'un élément inversible) et illustrer en donnant des exemples (simples) de groupes.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 12 : 8 et 15.

Pour le 15, on montrera que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD11 : 19
- 2ieme du groupe : TD11 : 3
- 3ieme du groupe : TD11 : 5

Prochain programme : vacances puis pas de colle la semaine de la rentrée !

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 19 :

- Se ramener au cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Vous devriez normalement avoir à séparer le cas $k = 0$ (une racine double) et le cas $k \neq 0$ (deux racines réelles distinctes).
- En utilisant les conditions initiales, vous devriez trouver des valeurs de λ et μ qui ne dépendent pas de k (dans le cas $k \neq 0$).
- Pour la limite, vous devriez avoir à considérer les cas $k > 1/2$, $k = 1/2$, $k \in [0, 1/2[$. Si votre suite s'écrit sous la forme $u_n = v_n + w_n$ et que vous avez l'impression que v_n « tend plus vite vers l'infini » que w_n, pour trouver la limite, vous pouvez écrire $u_n = v_n \times \left(1 + \dfrac{w_n}{v_n}\right)$ et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{v_n} = 0$.

Exo 3 :

- Vous pouvez rédiger cet exercice de deux manières différentes.
- 1ere méthode : en revenant à la définition de la limite. On fixe $\varepsilon > 0$ et on commence par montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ PUIS qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\dfrac{k}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- 2ieme méthode : on utilise l'inégalité de l'énoncé en une valeur de k dépendant de n bien choisie pour utiliser le théorème des gendarmes. Il vous faut trouver une suite (k_n) telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k_n} = 0$ et $k_n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit un k_n qui tend vers l'infini mais négligeable devant n. Pour qu'il soit entier, on pourra penser à utiliser la fonction partie entière...

Exo 5 :

- Montrer que (v_n) est croissante ne pose normalement aucun souci.
- Si la suite (v_n) n'est pas majorée par 0, justifiez alors l'existence d'un $a > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang $a \leq v_n$ (autrement dit, $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ a \leq v_n$).
- En considérant alors $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{p} v_n$ et en faisant apparaitre une somme télescopique, justifiez que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_p = +\infty$ ce qui sera absurde.
- Pour la seconde question, justifiez que (v_n) converge et que sa limite l est inférieure ou égale à 0. Ensuite, si $l < 0$, montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq l$ et en faisant comme dans l'indication précédente, montrez que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_p = -\infty$.