# 21. Développements limités

**Exercice 1.** (m) Donner un équivalent simple des suites suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n^2+3n+2}{n-1}$. 2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. 3) $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.
4) $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{n^2}\right)$. 5) $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. 6) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

**Exercice 2.** (c) En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de $u_n = \dbinom{2n}{n}$.

**Exercice 3.** (m) Déterminer les limites de :

$$1)\ u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}. \quad 2)\ v_n = \sqrt[n]{n^2}. \quad 3)\ w_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n. \quad 4)\ t_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}}.$$

**Exercice 4.** (i) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$. *On pourra découper la somme...*

**Exercice 5.** (m) Pour $n \geq 3$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n + nx - 1 \end{cases}$.

1) Montrer qu'il existe un unique $u_n \geq 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2) Déterminer un encadrement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa limite et un équivalent.

**Exercice 6.** (c) Calculer les développements limités en zéro des fonctions suivantes :

1) DL à l'ordre 4 : $(\sin x)e^x,\ \cos(x)\cos(2x),\ (\sqrt{1+x})\cos(x^2),\ \sqrt{1+x}e^{-x}$.
2) DL à l'ordre 4 : $\sqrt{\cos(x)},\ \sin(\arctan(x)),\ \mathrm{sh}(\cos(x)-1),\ \arctan(\ln(1+x)),\ \ln(\cos(x))$.
3) DL à l'ordre 3 : $\tan(\sin(x)),\ \ln(1+\tan(x))$.
4) DL à l'ordre 5 : $\dfrac{\sin(x)}{1-x},\ \mathrm{sh}(\sin(x)),\ x^2e^{\sin(x)},\ \cos(\sin(x)),\ \sin(xe^x)$.

**Exercice 7.** (c) Donner un équivalent en zéro de $\dfrac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$.

**Exercice 8.** (m) Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(1+\sin(x)) - \sin(\ln(1+x))$.

**Exercice 9.** (c) Trouver un équivalent en zéro de $(1+ax)^{1/a} - (1+bx)^{1/b}$ où $a, b > 0$ sont fixés.

**Exercice 10.** (m) Calculer des équivalents au voisinage de zéro des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{\cos(x) - e^x}{\sin(x) - \ln(1+x)} \text{ et } f_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} + x.$$

**Exercice 11.** (m) Déterminer deux réels $a$ et $b$ pour que $\sin(x) - \dfrac{x+ax^3}{1+bx^2} \sim_0 \lambda x^n$ avec $\lambda \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ le plus grand possible.

**Exercice 12.** (m) Calculer les développements limités à l'ordre 3 en zéro des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x}}$. 2) $g(x) = \dfrac{\sin(x^2\ln(1+x))}{x^2}$. 3) $h(x) = \cos(x)^{\frac{1}{x}}$. 4) $i(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\sin(2x)}$.

**Exercice 13.** (m) Ajuster $a$ et $b$ pour que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{\ln(1+x)} - \dfrac{b}{e^x-1}$ tende vers 0 quand $x$ tend vers 0 et vérifier qu'alors $f(x) = o(x)$.

**Exercice 14.** (m) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$.

**Exercice 15.** (m) Soient $a, b > 0$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

**Exercice 16.** (m) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$. 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2^x}{\sin(x-2)}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x)}{x^x-1}$. 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$.

**Exercice 17.** (m) Faire le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.

**Exercice 18.** (i) Soit $f(x) = \sin^n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(0) = 0$.

**Exercice 19.** (m) Donner le développement asymptotique de $\arctan(x)$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^3}$. *On pourra étudier* $\arctan(x) + \arctan(1/x)$.

**Exercice 20.** (m) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x$.

**Exercice 21.** (m) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}(2x^2-1)e^{1/x}$. Déterminer les asymptotes à $f$ en $\pm\infty$ (c'est à dire les droites de la forme $ax+b$ telles que $|f(x)-ax-b| \to 0$). Déterminer également la position de la courbe représentative de $f$ par rapport à celles-ci.

**Exercice 22.** (m) Soit $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Déterminer le domaine de définition de $f$ puis le DL à l'ordre 2 de $f$ en 0. En déduire que $f$ peut être prolongée par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable et déterminer la position relative de la courbe de $f$ par rapport à sa tangente en 0.

**Exercice 23.** (m) Soit $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$. Déterminer le domaine de définition de $f$ puis prolonger $f$ par continuité en 0. Montrer que ce prolongement est dérivable en 0 et déterminer la position relative de la courbe de $f$ par rapport à sa tangente en 0.

**Exercice 24.** (m) On pose $f(x) = 2x + \sin(x)$. Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque $h$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Trouver un développement limité de $h$ à l'ordre 5 en 0.

**Exercice 25.** (m) Montrer que la fonction $f(x) = \cosh(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.