DEVOIR À LA MAISON 14

Exercice 1 – Alternateur de bicyclette

PRÉLIMINAIRES : CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN SOLÉNOÏDE

Soit un solénoïde d'axe (*Ox*) de longueur *L*, comportant *N* spires parcourues par un courant d'intensité *I*. Le champ magnétique créé par le solénoïde à l'intérieur est uniforme et s'écrit $\vec{B} = \mu_0 \dfrac{N}{L} I \overrightarrow{u_x} = B\overrightarrow{u_x}$.

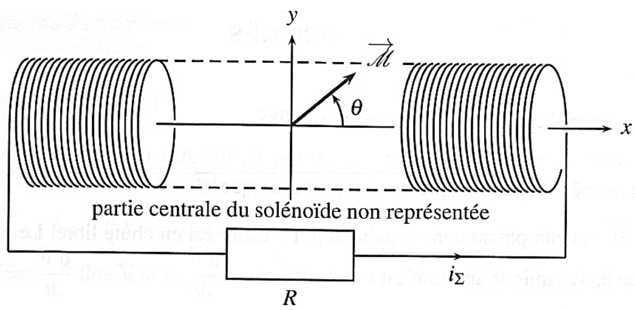
1. Représenter les lignes de champ du solénoïde sur une figure en coupe. Indiquer les pôles Nord et Sud du solénoïde.
2. L'allure des lignes de champ est-elle modifiée si on augmente l'intensité du courant ? Justifier. Que se passe-t-il si on change le sens du courant ?

MODÉLISATION DE L'ALTERNATEUR

Un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ contenu dans le plan (*Oxy*), tourne sans frottement autour de l'axe (*Oz*) à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega_0 \overrightarrow{u_z}$. Le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe (*Oz*) est noté *J*. Un opérateur extérieur applique un couple $\vec{\Gamma}_{op}$ à l'aimant. L'angle que fait l'aimant avec l'axe (*Ox*) est noté θ.

L'axe (*Oz*) et l'aimant sont placés dans un solénoïde Σ contenant *n* spires par unité de longueur, d'axe (*Ox*), de résistance électrique *r*, d'inductance propre *L*. Le solénoïde Σ est fermé sur une résistance *R*, très supérieure à *r*. Il est parcouru par un courant i_Σ.

L'ensemble modélise, par exemple, un alternateur de bicyclette qui débite dans une ampoule. L'opérateur est alors la personne qui pédale.



3. Expliquer sans calcul et en 5 lignes les différents aspects caractérisant le phénomène physique qui se produit. Pourquoi l'opérateur doit-il appliquer le couple supplémentaire $\vec{\Gamma}_{op}$ à l'aimant pour maintenir sa vitesse constante à ω_0 ?
4. L'instant origine $t = 0$ est choisi au moment où l'aimant est suivant $\overrightarrow{u_x}$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. En déduire la relation entre θ et ω_0.

L'aimant, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{n}$, peut être assimilée à une spire fictive de vecteur surface $\vec{S} = S\vec{n}$, parcourue par un courant i_S.

5. Établir le flux $\phi_{\Sigma \to spire}$ du champ magnétique $\overrightarrow{B_\Sigma}$ créé par le solénoïde à travers la spire fictive. En déduire le coefficient de mutuelle induction M entre le solénoïde et la spire fictive.
6. En déduire l'expression du flux $\phi_{spire \to \Sigma}$ du champ magnétique de l'aimant dans le solénoïde. Exprimer ensuite la f.e.m. induite e_{ext} dans le solénoïde par la rotation de l'aimant, en fonction notamment de n, $\mathscr{M}$ et ω_0.
7. Représenter le schéma électrique équivalent du circuit contenant le solénoïde. Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité $i_\Sigma(t)$ du courant dans le solénoïde. On posera $\tau = \dfrac{L}{R}$.

On souhaite déterminer l'expression de l'intensité $i_\Sigma(t)$ en régime permanent, i.e. en régime sinusoïdal forcé. À la grandeur temporelle $i_\Sigma(t)$ de pulsation ω_0, on associe la grandeur complexe $\underline{i_\Sigma}(t)$ et l'amplitude complexe $\underline{I}$ telles que :

$$i_\Sigma(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{Im}\left(\underline{i_\Sigma}(t)\right) \text{ et } \underline{i_\Sigma}(t) = I_m e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = \underline{I} e^{j\omega_0 t}$$

8. Montrer que l'amplitude I_m s'écrit $I_m = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}}$ où α est un terme à exprimer en fonction de τ et ω_0. Déterminer l'expression de φ en fonction de α.
9. Exprimer le couple électromagnétique exercé sur l'aimant. Établir une équation sur la vitesse angulaire ω de l'aimant.
10. Déterminer l'expression du couple moyen $\left\langle \vec{\Gamma}_{op} \right\rangle$ que doit exercer l'opérateur pour maintenir constante la vitesse angulaire de l'aimant, en fonction de n, $\mathscr{M}$, R, ω_0 et α. Commenter son sens.

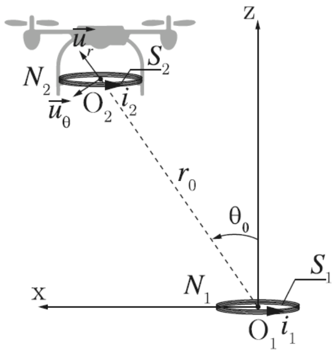
<u>Rappels mathématiques :</u>

$$\left\langle \sin(\omega_0 t + \varphi)\sin(\omega_0 t) \right\rangle = \frac{1}{2}\cos(\varphi) \text{ et } \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

11. Effectuer un bilan de puissance électrique et un bilan de puissance mécanique pour une vitesse angulaire ω quelconque. Comment se traduit le couplage électromécanique ? En déduire un bilan de puissance complet. Commenter la nature des différents termes. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0 = cste$?
12. L'opérateur cesse son action à $t = t_1$: $\vec{\Gamma}_{op}(t \geq t_1) = \vec{0}$. Expliquer, en le justifiant avec le bilan de puissance, ce qu'il se passe ensuite.

Exercice 2 – Couplage inductif résonnant *(CCINP PSI 2019)*

L'étude porte sur un système de transmission de puissance sans fil pour alimenter un drone se déplaçant à proximité d'une borne-source. Le dispositif d'alimentation à distance est constitué d'une bobine émettrice fixée à un support au sol, et d'une bobine réceptrice associée à un étage de conversion de puissance, tous deux embarqués sur le drone.



Le couplage est modélisé par l'inductance mutuelle M apparaissant entre les enroulements récepteur et émetteur, tous deux restant parfaitement horizontaux. Le centre des spires de l'émetteur est noté O_1 et la position du centre O_2 du récepteur est donnée par les coordonnées (r_0, θ_0) associées au repère polaire de centre O_1. On note a_1, N_1, S_1, le rayon, le nombre de spires et la section de l'enroulement émetteur parcouru par l'intensité i_1. Les grandeurs relatives au récepteur seront notées avec un indice 2.

1. Exprimer la norme du moment magnétique $\mathscr{M}_1$ de l'émetteur en fonction de N_1, S_1 et i_1.
2. Rappeler la définition de la mutuelle inductance M entre les circuits 1 et 2.

L'émetteur, de moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}_1} = \mathscr{M}_1 \overrightarrow{u_z}$, crée un champ magnétique :

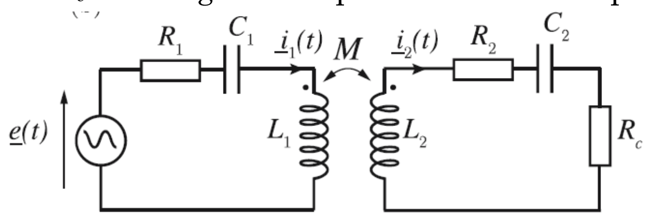
$$\overrightarrow{B_1}(r,\theta) = \frac{\mu_0 \mathscr{M}_1}{4\pi r^3}\left(2\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

On suppose que $\overrightarrow{B_1}$ est uniforme sur toute la surface du récepteur.

3. Déterminer l'expression de l'inductance mutuelle M en fonction de r_0, θ_0, μ_0, N_1, N_2, S_1 et S_2.

L'inductance mutuelle variant en $\frac{1}{r^3}$, le couplage entre émetteur et récepteur est très faible dès que la distance entre eux augmente. Pour pallier ce faible couplage, les circuits émetteur et récepteur sont rendus résonnants et leurs fréquences propres sont accordées à la même valeur.

Sur le schéma électrique équivalent du système, $\underline{e}(t)$ modélise la source vue depuis la bobine émettrice et R_c la charge vue depuis la bobine réceptrice.



4. Établir deux relations liant les grandeurs complexes $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$ et $\underline{e}$.

On admet que le découplage de ces deux relations conduit à :

$$\underline{i_2} = \frac{jM\omega\underline{e}}{M^2\omega^2 + \left(R_1 + j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)\right)\left(R_2 + R_c + j\left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)\right)}$$

5. Que devient l'expression de $\underline{i}_2$ lorsque $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$?
6. Montrer que, en régime sinusoïdal, la puissance moyenne P reçue par une résistance R s'écrit $P = RI_{eff}^2$ où I_{eff} est la valeur efficace de l'intensité du courant qui traverse R.
7. En déduire l'expression de la puissance moyenne P transmise à la charge R_c en fonction de la tension efficace E_{eff}, M, ω_0, R_1, R_2 et R_c.

Cette puissance est maximale pour une résistance de charge $R_c = R_m = \frac{R_1R_2 + M^2\omega_0^2}{R_1}$ et elle vaut : $P_{\max} = \frac{1}{4R_1}\frac{M^2\omega_0^2E_{eff}^2}{R_1R_2 + M^2\omega_0^2}$.

8. Pour $E_{eff} \sim 10^2$ V, $\omega_0 \sim 10^6$ rad.s^{-1} et $R_1 \sim R_2 \sim 1\ \Omega$, déterminer l'ordre de grandeur de la puissance maximale P_{max} transférée sur des distance de 1 m $\left(M \sim 10^{-6}\text{ H}\right)$, 3 m $\left(M \sim 10^{-7}\text{ H}\right)$ et 10 m $\left(M \sim 10^{-9}\text{ H}\right)$. Conclure sur la pertinence du système pour alimenter un drone de 500 g nécessitant environ 50 W en vol stationnaire.