À chercher pour lundi 12/09/2022, corrigé

Exercice 6.

1) On dessine deux droites horizontales d'équation $y = -M$ et $y = M$ sur le dessin et sur le graphe une fonction f qui est comprise entre ces deux valeurs.

2) Procédons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f bornée. Il existe alors $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$. Ceci est équivalent au fait que $\forall x \in \mathbb{R},\ -M \leq f(x) \leq M$ (Remarquons que M est positif, une valeur absolue étant toujours positive). Posons alors $a = -M$ et $b = M$. On a donc construit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ a \leq f(x) \leq b$. La propriété de l'énoncé est donc démontrée.

($\Leftarrow$) Supposons à présent la propriété de l'énoncé. On a alors qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ a \leq f(x) \leq b$. On en déduit alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x) \leq b \\ -f(x) \leq -a \end{cases}.$$

Ceci entraine que $\forall x \in \mathbb{R},\ \max(f(x), -f(x)) \leq \max(b, -a)$. En posant alors $M = \max(-a, b)$, on a alors construit M tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$. On a donc montré que f était bornée.

3) On va encore procéder par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f bornée sur $\mathbb{R}$. Soit M tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$. Pour tout $x, y \in R$, on a alors $-M \leq f(x) \leq M$ et $-M \leq f(y) \leq M$. En multipliant par -1, on obtient $-M \leq -f(y) \leq M$. Par addition, on a alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ -2M \leq f(x) - f(y) \leq 2M.$$

La propriété de l'énoncé est donc bien vérifiée, il suffit par exemple de prendre $a = -2M$ et $b = 2M$.

($\Leftarrow$) Supposons à présent la propriété de l'énoncé. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ a \leq f(x) - f(y) \leq b$. Cette propriété étant vraie pour tout x, y réels, on peut en particulier l'appliquer en $y = 0$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a + f(0) \leq f(x) \leq b + f(0).$$

En posant alors $a_0 = a + f(0)$ et $b_0 = b + f(0)$, on a construit deux réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ a_0 \leq f(x) \leq b_0$. D'après la question précédente, ceci entraine que f est bornée.

Exercice 14.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété énoncée.

a) On prend $x = y = 0$. On obtient alors :

$$0 + 0^2 + f(0) = (f(0))^2 - f(0)^2 = 0.$$

On a donc $f(0) = 0$.

b) On utilise à présent la propriété en $x = 0$. On obtient donc que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$0 + y^2 + f(0) = f(y)^2 - f(0)f(y).$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que $\forall y \in \mathbb{R},\ (f(y))^2 = y^2$. On en déduit donc en passant à la racine carrée que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = \pm y.$$

Attention, ceci n'est pas la même chose que ($\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = -y$ ou $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = y$). En effet, on pourrait parfois avoir $f(y) = y$ (par exemple sur $\mathbb{R}_+$) et parfois $f(y) = -y$ (par exemple sur $\mathbb{R}_-$).

c) On va appliquer cette fois l'équation en $y = 0$. On obtient alors, en utilisant $f(0) = 0$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$xf(x) = f(x)^2.$$

On va ensuite séparer deux cas :

- Si $x = 0$, on a $f(x) = f(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, alors, puisque $f(x)^2 = x^2 \neq 0$ d'après la question précédente, on en déduit que $f(x) \neq 0$. On peut donc simplifier la relation précédente par $f(x)$ ce qui donne $x = f(x)$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

2) Si f vérifie l'équation, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$. Vérifions si cette fonction est bien solution. On a dans ce cas, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$xf(x) + y^2 + f(xy) = x^2 + y^2 + xy$$

et :

$$(f(x+y))^2 - f(x)f(y) = (x+y)^2 - xy = x^2 + y^2 + xy.$$

On en déduit que cette fonction est bien solution.

Finalement, l'équation fonctionnelle proposée n'admet qu'une unique solution : la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 21. On va dans tout l'exercice faire une étude de fonction pour montrer le résultat voulu.

1) Posons $f : x \mapsto e^x - 1 - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. f' est donc positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle admet un minimum en 0. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui est l'inégalité demandée.

2) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme somme de fonctions dérivables) et $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x}$.

Puisque la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\sqrt{1} = 1$, on a alors $f'(x) \leq 0$ pour $x \in]0, 1]$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. On en déduit que f est décroissante puis croissante et admet un minimum en 1. Puisque $f(1) = 2 - 2 - \ln(1) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui entraine l'inégalité voulue.

3) On va réaliser une étude de fonction. Cependant, on verra que pour déterminer le signe de h', il nous faudra étudier f''. Posons $h : x \mapsto \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = -\sin(x) + x \text{ et } h''(x) = -\cos(x) + 1.$$

On remarque que h'' est positive, ce qui entraine que h' est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $h'(0) = 0$, on en déduit que h' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

et croissante sur $\mathbb{R}_+$. h admet donc un minimum en 0. Or, $h(0) = 0$. On en déduit que h est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui entraine le résultat voulu.

Exercice 27.

1) L'équation étudiée est équivalente à l'équation $x^2 + x - 6 \leq 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$. On en déduit que les racines de ce polynôme sont $x_- = -3$ et $x_+ = 2$. On peut alors dresser le tableau de signe de cette fonction polynomiale, ce qui nous permet d'affirmer que l'ensemble des solutions est $[-3, 2]$.

2) On place tout du même côté et on factorise pour obtenir un tableau de signes. On a :

$$\begin{aligned}\frac{12}{x+2} \leq x + 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{(x+3)(x+2) - 12}{x+2} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x^2 + 5x - 6}{x+2} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{(x-1)(x+6)}{x+2}.\end{aligned}$$

On effectue alors un tableau de signes pour obtenir que l'ensemble des solutions est $[-6, -2[\bigcup[1, +\infty[$.

3) On a :

$$\begin{aligned}|x^2 - 2| \leq 5 \quad &\Leftrightarrow \quad -5 \leq x^2 - 2 \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 \leq x^2 \leq 7.\end{aligned}$$

Or, x^2 est toujours positif donc l'inégalité de gauche est toujours vraie. L'inégalité de droite revient à avoir $x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$.

4) On a $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{x-1}{x+3} \leq 2$. On étudie alors les deux inéquations de manière indépendante :

- On a $-2 \leq \frac{x-1}{x+3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x - 1 + 2(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{3x+5}{x+3}$. On en déduit (éventuellement avec un tableau de signes) que cette inéquation est vérifiée pour $x \in]-\infty, -3[\bigcup\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

- On a $\frac{x-1}{x+3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x - 1 - 2(x+3)}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{x+3} \leq 0$. On en déduit (éventuellement avec un tableau de signes) que cette inéquation est vérifiée pour $x \in]-\infty, -7]\bigcup]-3, +\infty[$.

On veut que ces deux inéquations soient vérifiées en même temps. On fait donc l'intersection des ensembles de solutions, ce qui donne finalement que l'ensemble des solutions est $]-\infty, -7]\bigcup\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.