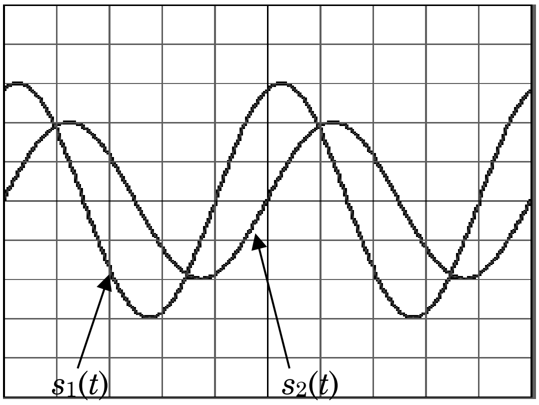
TRAVAUX DIRIGÉS OS9
Diffraction et interférences

DÉPHASAGE

Niveau 1

Exercice 1. Détermination d'un déphasage

La figure suivante représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de même fréquence.
Calibres verticaux : CH1 : 1 V/div CH2 : 1 V/div (div = division, carreau)
Calibre de la base de temps : 100 µs/div

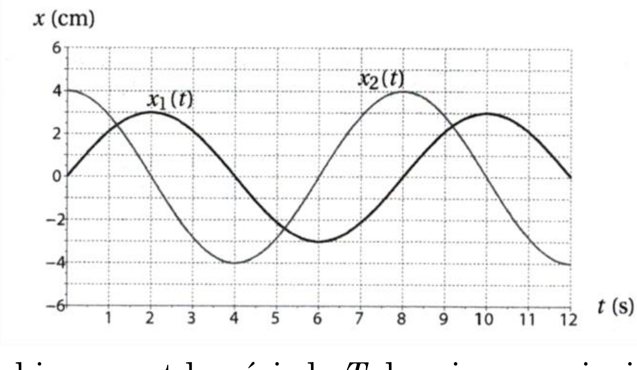


1. Déterminer la fréquence des signaux.
2. Calculer le déphasage φ de $s_2(t)$ par rapport à $s_1(t)$.
3. Déterminer la phase de $s_1(t)$ au point le plus à gauche de l'écran.

Niveau 2

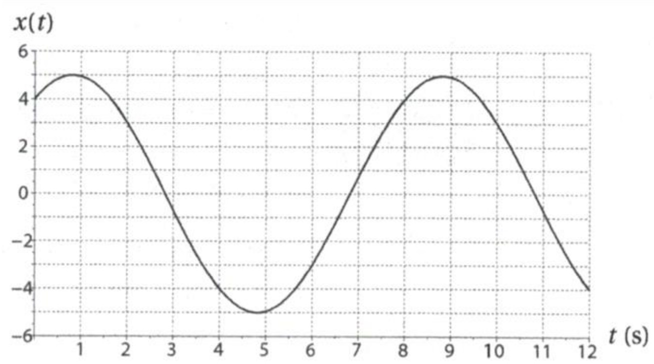
*Exercice 2. Somme de signaux sinusoïdaux

On représente les signaux $x_1(t) = X_1 \sin(\omega t)$ et $x_2(t) = X_2 \cos(\omega t)$.



1. Déterminer graphiquement la période T des signaux ainsi que les amplitudes X_1 et X_2.

2. Déterminer le déphasage du signal $x_2(t)$ par rapport au signal $x_1(t)$.
3. On s'intéresse au signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$. À l'aide de la relation $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, exprimer l'amplitude X et la phase à l'origine φ en fonction de X_1 et X_2. Effectuer les applications numériques.
4. Le signal obtenu $x(t)$ est alors le suivant :

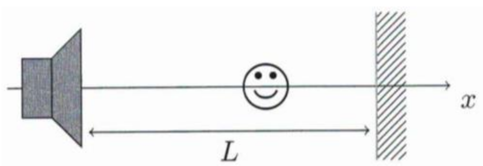


En exploitant le graphe temporel, vérifier la cohérence avec la valeur numérique de X obtenue précédemment et retrouver la valeur de φ.

INTERFÉRENCES

Niveau 1

Exercice 3. Réflexion d'une onde acoustique

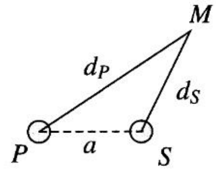


Un haut-parleur, placé à l'abscisse $x = 0$, émet une onde acoustique. Un auditeur se trouve à l'abscisse x, et un mur à l'abscisse L, avec $L > x$. L'onde se réfléchit sur le mur. Elle se propage à la vitesse c. On suppose que la réflexion n'engendre aucun déphasage.

1. Le haut-parleur émet une surpression d'amplitude P_0 de pulsation ω. Déterminer les expressions des deux ondes reçues par l'auditeur.
2. En déduire l'expression du déphasage entre les deux ondes au niveau de l'auditeur. L'exprimer en fonction de λ.
3. En déduire les valeurs des abscisses pour qu'il y ait interférences destructives.
4. Retrouver l'expression du déphasage à partir de la différence de parcours.
5. En déduire l'amplitude A de l'onde résultante au niveau de l'auditeur.
6. L'auditeur se place à l'abscisse $x_1 = L - \dfrac{\lambda}{8}$. Calculer l'amplitude en fonction de P_0.
7. Calculer le contraste $C = \dfrac{A_M - A_m}{A_M + A_m}$ des interférences, où A_M est l'amplitude maximale et A_m l'amplitude minimale.

Niveau 2

*Exercice 4. Contrôle actif de bruit en espace libre



La méthode du contrôle actif du bruit consiste à émettre une onde sonore qui, superposée à l'onde sonore du bruit, l'annule par interférence destructrice. Pour modéliser la méthode, on suppose que la source primaire du bruit P est ponctuelle et qu'elle émet une onde sinusoïdale de longueur λ. On crée une source sonore secondaire S qui est située à la distance $PS = a$ de la source primaire et qui émet une onde de même longueur d'onde.

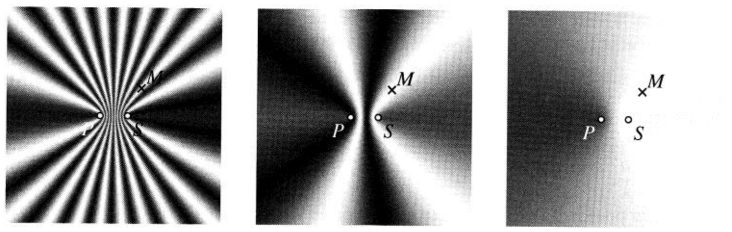
On souhaite annuler le bruit en un point M tel que $PM = d_P$ et $SM = d_S$.

1. Exprimer le déphasage $\Delta\varphi_0$ que la source secondaire doit présenter par rapport à la source primaire en fonction de λ, d_P, d_S et d'un entier m.

L'amplitude de l'onde d'une source ponctuelle à la distance d de la source est $A = \dfrac{\alpha}{d}$ où α est une constante.

2. Quel doit être le rapport $\dfrac{\alpha_S}{\alpha_P}$ des constantes d'amplitude relatives aux deux sources ?

Les figures ci-dessous obtenues par simulation visualisent l'amplitude de l'onde résultante dans le plan contenant P, S et M : le gris est d'autant plus foncé que l'amplitude de l'onde sonore est élevée.



$\lambda = 0{,}2a$ $\lambda = a$ $\lambda = 5a$

3. Commenter ce document, notamment l'influence de la longueur d'onde.

Exercice 5. Interférences en lumière monochromatique

On utilise un dispositif appelé interféromètre de Michelson. Un faisceau de lumière monochromatique est braqué vers un miroir diviseur d'amplitude, séparant le faisceau en deux faisceaux fils de même amplitude. Par un jeu de miroirs et de lentilles, ces deux faisceaux sont dirigés vers un écran où ils interfèrent. Dans le dispositif appelé « dispositif du coin d'air », l'écran plan est muni d'un repère (O,x,y) et on démontre que le déphasage des deux faisceaux arrivant en un point $M(x,y)$ de l'écran ne dépend que de x : $\delta\varphi(M) = 4\pi\gamma\alpha\dfrac{x}{\lambda}$, où γ est un coefficient de grandissement sans dimension, α est un très petit angle (l'angle du coin d'air) exprimé en radian et λ la longueur d'onde dans l'air (assimilé au vide) de la lumière monochromatique.

Rappels mathématiques :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

1. L'onde lumineuse en M est la superposition des ondes sinusoïdales empruntant les deux chemins, de même amplitude C, de même fréquence f_0, de phases respectives $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ avec $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \delta\varphi(M)$. Donner l'expression mathématique du signal somme en l'écrivant sous la forme :
$$s_M(t) = K(x)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\varphi_1(M) + \varphi_2(M)}{2}\right)$$
Donner l'expression de l'amplitude $K(x)$ en fonction de C, γ, α, λ et x.
2. L'éclairement $E(x)$ (la grandeur que l'œil peut apprécier) est proportionnel à $K^2(x)$: on note β le coefficient de proportionnalité. Montrer que :
$$E(x) = 2\beta C^2\left(1 + \cos\left(4\pi\gamma\alpha\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $E(x)$ est maximal, respectivement nul ; à quelles valeurs de $\delta\varphi$ ces situations correspondent-elles ? à quels types d'interférences ?
4. Tracer l'allure de $E(x)$ et préciser sa période spatiale X.
5. On donne $\alpha = 0{,}15$ mrad, $\gamma = 4{,}0$, $\lambda = 589$ nm. Décrire la figure observée sur l'écran.

DIFFRACTION

Niveau 1

*Exercice 6. Voix humaine

Le son émis par la voix humaine est produit par les cordes vocales et passe principalement par la bouche. La vitesse du son dans les conditions courantes est de l'ordre de 340 m.s^{-1} et la fréquence de l'ordre de 300 Hz.

Pourquoi entend-on parler quelqu'un même si on se place à son côté ?

Si quelqu'un parle dans une salle avec une porte ouverte, pourquoi l'entend-on dans tout le couloir longeant la salle ?

Niveau 2

Exercice 7. Le laser-Lune

Pour mesurer la distance Terre-Lune avec une précision de quelques millimètres, on envoie un faisceau laser en direction de la Lune. Une partie de la lumière du laser est réfléchie par un rétro-réflecteur, dispositif qui a la propriété de renvoyer la lumière dans la direction d'où elle arrive (il a été déposé sur le sol lunaire par les astronautes de la mission Apollo 11 en 1969). Un télescope terrestre recueille ensuite une partie de la lumière renvoyée par le rétro-réflecteur. La mesure précise de la durée τ de l'aller-retour de la lumière entre la surface terrestre et la surface lunaire permet de déduire la distance D entre ces surfaces.

1. Sachant que $D \simeq 3{,}76.10^{8}\ \text{m}$, évaluer τ. La précision de l'horloge atomique utilisée étant de 50 ps, calculer la précision relative sur la valeur de τ.
2. Le faisceau au départ de la Terre est de forme circulaire, de diamètre $a = 5{,}5\ \text{cm}$, et sa longueur d'onde est $\lambda = 532\ \text{nm}$. Calculer son demi-angle d'ouverture θ. En déduire le diamètre d de la tache que fait le faisceau sur le sol lunaire.
3. Le rétro-réflecteur est un carré de côté $l = 0{,}10\ \text{m}$. Calculer la fraction ρ de l'énergie lumineuse émise de la Terre qui est reçue par le rétro-réflecteur.
4. Expliquer pourquoi le télescope récepteur à la surface de la Terre, de diamètre $b = 1{,}5\ \text{m}$, ne capte qu'une très petite fraction ρ' de la lumière réfléchie par le rétro-réflecteur, constitué d'éléments carrés de côté $l' = 1{,}0\ \text{cm}$. Au total, le flux lumineux reçu à l'arrivée est environ 10^{-20} fois le flux émis au départ. La diffraction est-elle la seule cause des pertes ?

SOLUTIONS

Exercice 1. Détermination d'un déphasage

2. $\varphi = -\dfrac{2\pi}{5}\ \text{rad} = -1{,}26\ \text{rad}$ 3. $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{10} = -0{,}31\ \text{rad}$

*Exercice 2. Somme de signaux sinusoïdaux

1. On lit sur le graphe les valeurs maximales en ordonnée $\boxed{X_1 = 3{,}0\ \text{cm}}$ et $\boxed{X_2 = 4{,}0\ \text{cm}}$. La période T se lit en regardant par exemple l'écart temporel entre deux maxima consécutifs de $x_1(t)$ soit $\boxed{T = 10 - 2{,}0 = 8{,}0\ \text{s}}$.
2. $x_1(t) = X_1 \sin(\omega t) = X_1 \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $x_2(t) = X_2 \cos(\omega t) = X_2 \cos(\omega t + 0)$

Déphasage : $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\Delta\varphi > 0}$ donc $x_2(t)$ est <u>en avance</u> sur $x_1(t)$ (il passe par son maximum avant).

3. On développe $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ soit :

$$x(t) = X\cos(\omega t)\cos(\varphi) - X\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

D'autre part, on a $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t)$

Par identification $X_2 = X\cos(\varphi)$ et $X_1 = -X\sin(\varphi)$

$X_1^2 + X_2^2 = X^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = X^2$ soit $\boxed{X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = 5{,}0 \text{ cm}}$

$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{X_1}{X_2}$ soit $\boxed{\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = -0{,}64 \text{ rad}}$

4. On vérifie bien que $\boxed{X = 5{,}0 \text{ cm}}$.

Le premier maximum <u>en retard</u> de la courbe $x(t)$ est obtenu après une durée $\Delta t' \simeq 0{,}80$ s par rapport à l'origine des temps.

La phase à l'origine est donc <u>négative</u> et vaut $\boxed{\varphi = -2\pi\frac{\Delta t'}{T} \simeq -0{,}63 \text{ rad}}$

Exercice 3. Réflexion d'une onde acoustique

1. $p_1(x,t) = P_0\cos(\omega t - kx)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ et $p_2(x,t) = P_0\cos(\omega t + kx - k2L)$

2. $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}(x - L)$ 3. $x = L + \frac{\lambda}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)$ 6. $A_1 = \sqrt{2}P_0$ 7. $C = 1$

*Exercice 4. Contrôle actif de bruit en espace libre

1. Le déphasage $\Delta\varphi$ en M entre l'onde secondaire et l'onde primaire est différent du déphasage $\Delta\varphi_0$ entre les deux sources, car les ondes mettent un certain temps à se propager jusqu'en M.

- <u>Déphasage en M</u> : $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - k(d_S - d_P) = \Delta\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(d_S - d_P)$
- <u>Interférence destructive</u> souhaitée en M : $\Delta\varphi = \pi + 2m\pi$ avec m entier
- <u>Déphasage entre les deux sources</u> tel que : $\pi + 2m\pi = \Delta\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(d_S - d_P)$ soit :

$$\boxed{\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(d_S - d_P) + (2m+1)\pi}$$

2. Pour que l'annulation du bruit en M soit totale, il faut que <u>l'onde résultante soit d'amplitude nulle</u> et donc que les deux ondes incidentes aient la même amplitude :

$$A_S = A_P \Leftrightarrow \frac{\alpha_S}{d_S} = \frac{\alpha_P}{d_P} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha_S}{\alpha_P} = \frac{d_S}{d_P}}$$

3. On constate qu'annuler le bruit en un point ne veut pas dire annuler le bruit dans tout l'espace.

- Plus la longueur d'onde augmente, plus la zone autour de M où l'amplitude sonore est faible, est étendue.
- Cette méthode est donc efficace pour les grandes longueurs d'onde, i.e. pour les basses fréquences, donc pour les sons graves.

Exercice 5. Interférences en lumière monochromatique

1. $K(x) = 2C\cos\left(2\pi\gamma\alpha\dfrac{x}{\lambda}\right)$

*Exercice 6. Voix humaine

- En considérant le son comme une onde progressive sinusoïdale, on constate que sa longueur d'onde est de l'ordre de $\lambda = \dfrac{c}{f} \simeq 1{,}5 \text{ m}$, soit λ de l'ordre du mètre.
- La bouche par laquelle sort l'onde sonore peut être assimilée à une ouverture circulaire de diamètre environ égal à $d \simeq 5 \text{ cm}$, soit une ouverture dont la taille est de l'ordre de $\dfrac{\lambda}{20}$. On a donc $d < \lambda$ et $\dfrac{\lambda}{d} = 20 > 1$: il y a diffraction par la bouche, avec une ouverture angulaire de demi-largeur $\dfrac{\pi}{2}$. L'onde émise en sortant de la bouche est sphérique et occupe tout l'espace environnant. On entend donc une personne même en étant à côté d'elle !
- La largeur d'une porte est de l'ordre de $l \simeq 1 \text{ m}$, soit de l'ordre de grandeur de λ. Dans ce cas-là aussi, il y a diffraction par la porte car $\dfrac{\lambda}{d} \simeq 1$ et l'onde émise après la porte est sphérique et occupe tout l'espace : on entend la personne qui parle dans la salle même si on n'est pas en face de la porte.

Exercice 7. Le laser-Lune

2. $d = 7{,}3 \text{ km}$ 3. $\rho = \dfrac{4l^2}{\pi d^2} = 2{,}4.10^{-10}$