CHAPITRE MI5
Moment cinétique d'un point matériel

Problématique

FIGURE 1 : Dévissage des boulons d'une roue

- Comment dévisser les boulons d'une roue ?

Exercer une force afin d'obtenir un mvt de rotation du boulon, mais comment le faire efficacement ?

- Mvt de rotation : obtention équa° du mouvement:

théorème du moment cinétique

1 Notion intuitive de bras de levier

1.1 Retour à la problématique

- Dévissage d'un boulon

  + efficace avec une clé longue

- Conclusion

  Pour faire tourner un objet :

  - appliquer une force,
  - en un point judicieusement choisi :

    le + loin possible de l'axe de rotation

1.2 Balance romaine

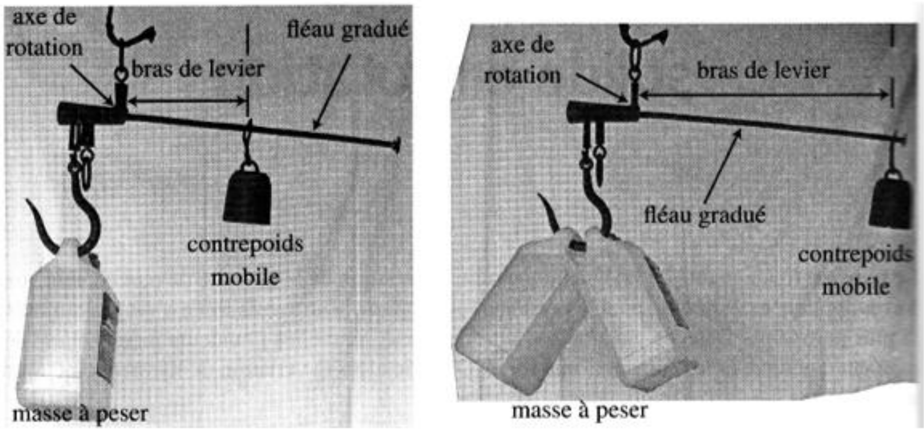


FIGURE 2 : Balance romaine pesant une masse de 5 kg (à gauche) ou 10 kg (à droite)

- Même contrepoids : équilibre balance pr ≠ masses

  Modification du bras de levier

- <u>Conclusion</u>

  Étude des systèmes en rotation autour d'un axe :

  notion pertinente : « **force × bras de levier** »

2 Moment cinétique d'un point

2.1 Moment cinétique d'un point par rapport à un point

- **<u>Définition</u>** : Moment cinétique de *M* p/r à *O*

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}}$$

- **<u>Caractéristiques du mmt cinétique (= vecteur)</u>**

  <u>Propriété</u>

M tourne autour de l'axe $\left(O, \overrightarrow{L_O}(M)\right)$ ds sens direct

- <u>Changement d'origine</u>

  <u>Propriété:</u> **Mmt cinétique** dépend du pt *O* choisi

2.2 Moment cinétique d'un point par rapport à un axe

- **Définition** : Moment cinétique de *M* p/r à Δ

$$\boxed{L_\Delta(M) = \overrightarrow{L_O}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \quad (\mathrm{kg.m^2.s^{-1}})}$$

- **Propriété**
  - Si $L_\Delta(M) > 0$: M tourne ds sens direct
  - Si $L_\Delta(M) < 0$: M tourne ds sens indirect
- **Changement d'origine sur l'axe**

Propriété:

Mmt cinétique p/r axe indépendant du pt *O* choisi

2.3 Moment d'inertie d'un point

- Expressions des vecteurs cinématiques et du moment scalaire

- Moment d'inertie

Définition : **Moment d'inertie de $M(r,\theta,z)$**

$$\boxed{J_{(Oz)}(M) = mr^2 \quad (\mathrm{kg.m^2})}$$

- Moment cinétique scalaire

Propriété

$$\boxed{L_{(Oz)}(M) = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}}$$

$\dot{\theta} = \omega$ est la vitesse angulaire

3 Moment d'une force

3.1 Moment d'une force par rapport à un point

- **Définition** :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}}$$

- **Caractéristiques du mmt d'une force (= vecteur)**
- Changement d'origine

Propriété :

Mmt d'1 force dépend du pt O choisi

- Cas de plusieurs forces

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right)=\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F_1}\right)+\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F_2}\right)}$$

3.2 Moment d'une force par rapport à un axe

➢ Définition :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}\left(\overrightarrow{F}\right)=\overrightarrow{\mathcal{M}_{O}}\left(\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{u_{\Delta}}\quad(\mathrm{N.m})}$$

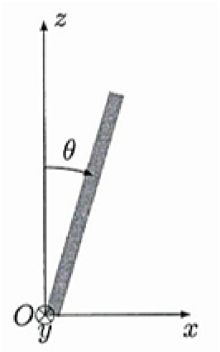
➢ Propriété

Mmt d'1 force p/r axe indépendant du pt *O* choisi

➢ Exercice d'application 1

On étudie une échelle assimilée à une barre homogène de masse m et de longueur L en mouvement de rotation autour de l'axe (Ox). Le poids s'applique au centre de gravité G. On repère la position de l'échelle par l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OG}$ avec la verticale ascendante (Oz).

Exprimer le moment du poids par rapport à l'axe (Oy).



3.3 Expression avec le bras de levier

➢ Propriété

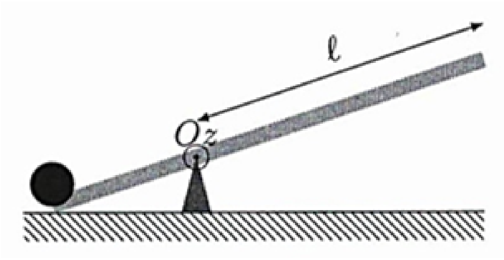
$$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{F}\right)=\pm d\left\|\vec{F}\right\|}$$

$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{F}\right)>0}$ si *F* fait tourner *M* ds le sens direct

$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{F}\right)<0}$ sinon

➢ Exercice d'application 2

Pour catapulter la masse m posée sur une planche, une personne tire sur une corde fixée à l'autre extrémité de la planche.
On note α l'angle que fait la planche avec le plan horizontal et l la distance entre le point d'attache de la corde et le plot sur lequel la planche est en appui.



1. Calculer le moment de la tension de la corde par rapport à l'axe (Oz) dans le cas où la personne tire la corde perpendiculairement à la planche.
2. Même question dans le cas où la personne tire la corde verticalement.

3.4 Interprétation physique

- **Efficacité à mettre en rotation** le point M autour du point O ou de l'axe Δ
- Cas de nullité
- Retour à la problématique

4 Théorème du moment cinétique

4.1 Théorème du moment cinétique en un point fixe

- <u>Énoncé du Th MC</u>

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F_i}\right)}$$

- <u>Démonstration</u>
- <u>Point d'application</u>

4.2 Théorème du moment cinétique en projection sur un axe fixe

$$\boxed{\frac{dL_{\Delta}(M)}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}\left(\overrightarrow{F}\right) = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}\left(\overrightarrow{F_i}\right)}$$

4.3 Conservation du moment cinétique

- M immobile ou en mvt rectiligne uniforme
- M soumis à 1 force centrale de centre O

4.4 Méthode

- **Quand utiliser le Th MC ?**
- **Méthode**
  - **Choisir pt O** = pt fixe (centre de rotation…)
  - Exprimer, ds base adaptée, **mmt cinétique du pt** et **mmt des forces**
  - Appliquer **Th MC** (dériver mmt cinétique !)

- Exercice d'application : pendule simple

Un point matériel M de masse m est attaché au point O par une ficelle (inextensible) de longueur l et de masse négligeable. On note $\theta(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et la verticale.

1. Calculer les moments scalaires de toutes les forces par deux méthodes : calcul explicite et bras de levier.
2. Déterminer l'équation du mouvement.