# Devoir de cours autocorrigé, révisions vacances

1) *Logique.*

a) La négation de $A \Rightarrow B$ est : $A$ et non$(B)$

b) Écrire la négation de $\forall M > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \geq a,\ f(x) \geq M$ : $\exists M > 0\ /\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \geq a\ /\ f(x) < M$

c) Écrire avec des quantificateurs « la fonction $f$ est majorée sur $\mathbb{R}$ » et sa négation :

$\exists M \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M \ \|\ \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) > M$

2) *Sommes.*

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$

e) Pour $k, n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$n \in \mathbb{N}$
$k \in \mathbb{Z}$

f) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$

g) Écrire la somme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j}$ comme deux sommes consécutives, avec l'indice $i$ en premier puis l'indice $j$ puis avec l'indice $j$ en premier puis l'indice $i$ :

$$(*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} u_{i,j}$$

3) *Généralités sur les fonctions.*

a) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner la définition de $f$ est paire et de $f$ est impaire. Quelle est l'interprétation graphique de ces propriétés ?

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$ || symétrie p/r à l'origine

symétrie p/r à l'axe $(Oy)$

b) Quelle propriété de sin doit-on utiliser pour calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ ? Que vaut cette limite ?

sin dérivable en 0 $= 1 = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0)$

c) Donner l'équation de la tangente à $f$ en $x_0$ (on suppose $f$ dérivable en $x_0$) :

$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

4) *Trigo et complexes.*

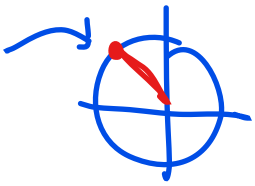
a) $\begin{cases} \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \end{cases}$

b) Pour $a \in \mathbb{R}$, factoriser $1 - e^{ia}$.

$$1-e^{ia} = e^{\frac{ia}{2}}\left(e^{-\frac{ia}{2}} - e^{\frac{ia}{2}}\right) = -2i\,e^{\frac{ia}{2}} \sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $z^n = -1+i$. $\iff z^n = \sqrt{2}\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$



$\iff z = 2^{\frac{1}{2n}} \times e^{\frac{3i\pi}{4n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$\exists k \in [\![0, n]\!] /$

d) Donner l'expression complexe de la similitude directe $s$ de centre d'affixe $\omega$, d'angle $\theta$ et de rapport $k$.

$$s(z) = ke^{i\theta}(z-\omega) + \omega$$

e) Réciproquement, si $s(z) = az + b$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$, comment trouve-t-on le centre de cette similitude directe, son angle et son rapport ?

$s(\omega) = \omega \iff \omega(1-a) = b \iff \omega = \dfrac{b}{1-a}$ | $\theta \equiv \mathrm{Arg}(a)\ [2\pi]$, $k = |a|$

5) *Applications.* Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

a) Donner la définition de $f$ est injective.

$\forall (x,y) \in X^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

b) Donner la définition de $f$ est surjective.

$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \ /\ y = f(x)$

c) Si $g \circ f$ est bijective, quelle fonction est injective ? Surjective ?

$f$ injective | $g$ surjective

d) Si $f$ et $g$ sont bijectives, justifier que $g \circ f$ est bijective et donner l'expression de $(g \circ f)^{-1}$.

car une composée de bijections est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

6) *Fonctions usuelles.*

a) Montrer que $\forall x > 0,\ \underbrace{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{f(x)} = \frac{\pi}{2}$.

$f$ est dérivable comme somme / composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$

$f(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f$ est constante

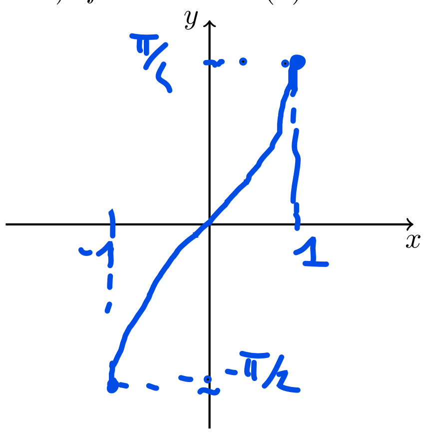
' $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ | égale à $\pi/2$

b) *Dérivées usuelles.* Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, de dérivabilité et sa dérivée.

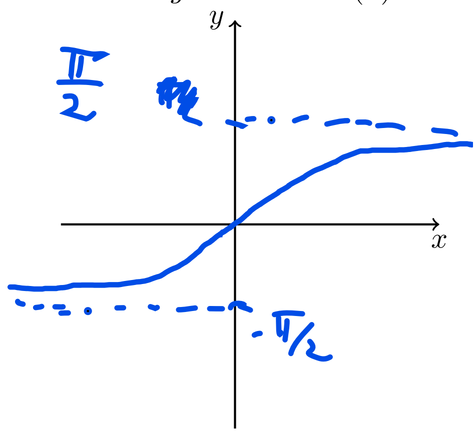
| $f(x)$ | $D_f$ | $D'$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $n\,x^{n-1}$ |
| $x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\alpha\,x^{\alpha-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\mathrm{ch}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{sh}(x)$ |
| $\mathrm{sh}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{ch}(x)$ |
| $\mathrm{th}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1-\mathrm{th}^2(x)$ |
| $\ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $1/x$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\cos$ |
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin$ |
| $\arcsin(x)$ | $[-1,1]$ | $]-1,1[$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\arccos(x)$ | $[-1,1]$ | $]-1,1[$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\tan(x)$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi,$ | $k \in \mathbb{Z}\}$ | $\frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2$ |
| $\arctan(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $1/(1+x^2)$ |

c) Tracer les graphes des fonctions suivantes en faisant apparaitre également les valeurs aux bords/les limites :

i) $f : x \mapsto \arcsin(x)$

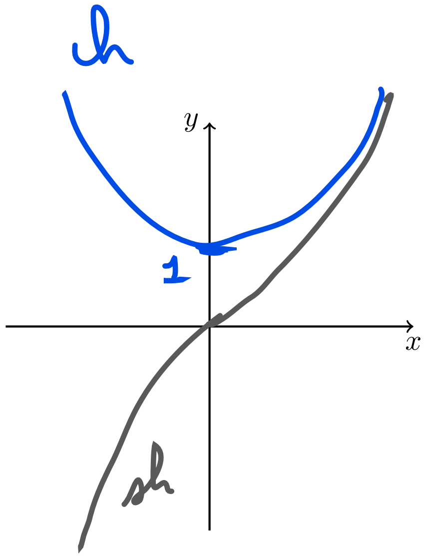


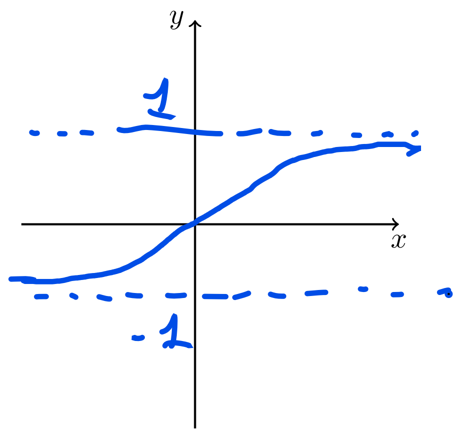

$g : x \mapsto \arctan(x)$




ii) $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $g : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

$h : x \mapsto \mathrm{th}(x)$




d) *Théorème de la bijection.* Soient $a < b$ et $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$.

i) Que faut-il vérifier pour montrer que $f$ est une bijection de $[a,b[$ dans un intervalle $I$ (que l'on précisera en fonction de la monotonie de $f$) ?

$f$ $\mathcal{C}^0$, strict. monotone et $f$ bijective

de $[a,b[$ dans $\to [f(a), \lim_{x\to b} f(x)[$ )) $f \nearrow$

$\to ]\lim_{x\to b} f(x), f(a)]$ )) $f \searrow$

ii) À quelle(s) condition(s) sur $f$ la réciproque de $f$ est-elle continue sur $I$ ? À quelle(s) condition(s) sur $f$ la réciproque de $f$ est-elle dérivable sur $I$ ?

$f$ $\mathcal{C}^0$

$f$ dérivable et $f'$ ne s'annule pas sur $[a,b[$

7) *Intégration.*

a) Déterminer $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^{3t}dt$ en utilisant une IPP (et en donner les hypothèses !).

On pose $u(t) = t^2$, $v(t) = \frac{e^{3t}}{3}$ )) $\mathcal{C}^1$

donc $u'(t) = 2t$, $v'(t) = e^{3t}$

donc $I = \left[\frac{t^2 e^{3t}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t e^{3t}}{3} dt$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 t e^{3t} dt$

On pose $u(t) = t$, $v(t) = \frac{e^{3t}}{3}$ )) $\mathcal{C}^1$

On a $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^{3t}$

donc $I = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\left[\frac{t e^{3t}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{3t}}{3} dt\right)$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \left[\frac{e^{3t}}{9}\right]_0^1\right)$

$= \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}$

b) Déterminer $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(t))^3}{t}dt$ en utilisant le changement de variable $x = \ln(t)$ (en donner les hypothèses !).

$x = \ln(t)$ )) $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$

$dx = \frac{1}{t} dt$

| $t$ | $x$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| $e$ | 1 |

donc $I = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

c) *Primitives usuelles.* Pour chacune des fonctions suivantes, donner l(es) intervalle(s) sur le(s)quel(s) elles sont continues et une primitive sur ce(s) intervalle(s).

| $f$ | $I$ | $\int^x f(t)dt$ |
|---|---|---|
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ | $\ln(\lvert x \rvert)$ |
| $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ |
| $x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$ |
| sin | $\mathbb{R}$ | $-\cos$ |
| cos | $\mathbb{R}$ | $\sin$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1,1[$ | arcsin |
| $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | arctan |
| $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ | $I$ où $u$ ne s'annule pas | $\ln(\lvert u(x) \rvert)$ |
| $x \mapsto u'(x)u(x)$ | $I$ | $u(x)^2/2$ |
| $x \mapsto \ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $x\ln(x) - x$ |

d) Déterminer $\int_0^x \frac{t+1}{t^2+t+1}dt.$ $= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt}_{[\ln(\lvert \underbrace{t^2+t+1}_{>0} \rvert)]_0^x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}dt$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+3/4}dt$

$= \text{———} + \frac{2}{3}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dt$

$= \text{———} + \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$

$= \text{———} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

e) Déterminer $I(x) = \int_0^x e^{2t}\sin(t)dt$ (en utilisant les complexes).

$I(x) = \int_0^x \underbrace{e^{2t}}_{\in\mathbb{R}} \times \operatorname{Im}(e^{it})dt$

$= \operatorname{Im}\left(\int_0^x e^{(2+i)t}\right)$

$= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(2+i)t}}{2+i}\right]_0^x\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(e^{2x}e^{ix}-1)(2-i)}{5}\right) = \frac{2e^{2x}\sin(x) - e^{2x}\cos(x) + 1}{5}$