## Problème 1 : Algèbre

**Partie I : Polynômes réels scindés**

**Q1)** *Étude de* E.

a) Si $P \in E$, alors P n'est pas constant donc $-P$ non plus. De plus, $-P$ a aussi ses coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ (car $-(-1) = 1$). On a donc $-P \in E$. La réciproque est immédiate et se fait de la même manière.

b) Pour les polynômes unitaires de E de degré 1, on en a exactement 3 : $X-1$, X et $X+1$.

Pour ceux de degré 2 unitaires, on en a exactement 9 (que l'on obtient en prenant les 3 possibilités pour le coefficients en X et les 3 possiblités pour le coefficient constant) :

- $X^2 - X - 1$.
- $X^2 - X$.
- $X^2 - X + 1$.
- $X^2 - 1$.
- $X^2$.
- $X^2 + 1$.
- $X^2 + X - 1$.
- $X^2 + X$.
- $X^2 + X + 1$.

Pour obtenir le nombre de polynômes de degré 1 dans E, on en a 6 (on a les trois unitaires et les trois obtenus à partir des unitaires en multipliant par $-1$). De la même façon, on a $18 = 9 \times 2$ polynômes de degré 2 dans E. *En effet à chaque fois leur coefficient dominant ne peut pas être 0 sinon le degré ne serait plus le bon.*

**Q2)** *Étude de* $E_s$.

a) On a déjà $P \in E \iff -P \in E$. De plus, si P est scindé à racines simples dans E, alors $-P$ l'est aussi (les racines sont exactement les mêmes avec la même multiplicité). On a donc bien l'équivalence demandée.

Pour obtenir le nombre de polynômes dans $E_s$ de degré 1 et 2, il suffit de vérifier parmi les polynômes trouvés à la question 1.b lesquels sont scindés à racines simples réelles. Pour le degré 1, ils le sont tous, ce qui donne 6 polynômes de degré 1 dans $E_s$ (les unitaires étant $X-1$, X et $X+1$).

Pour le degré 2 unitaire, on a $X^2$ qui n'est pas à racine simple (0 est racine double), $X^2+1$ qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ (les racines sont $\pm i$), de même que $X^2+X+1$ et $X^2-X+1$ (qui sont de discriminant $-3 < 0$). Il reste donc $X^2-1 = (X-1)(X+1)$, $X^2 - X = X(X-1)$, $X^2+X = X(X+1)$, $X^2+X-1$ et $X^2-X-1$ (qui sont de discriminant 5>0 donc ils ont deux racines réelles distinctes, donc simple). On a donc 5 polynômes unitaires de degré 2 dans $E_s$, ce qui donne au total $10 = 5 \times 2$ polynômes de degré 2 dans $E_s$.

Au total, on a donc $16 = 6 + 10$ polynômes de degré 1 ou 2 dans $E_s$.

b) Soit $P \in E_s$ avec $\deg(P) \geqslant 2$.

Supposons d'abord $P(0) = 0$. On a donc 0 qui est racine de P donc $X|P$. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = XQ(X)$. Or, les coefficients de Q sont exactement ceux de P décalés d'un indice donc ils sont aussi à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. De plus, P étant de degré supérieur ou égal à 2, on Q non constant (car de degré supérieur ou égal à 1). On a donc $Q \in E$. Enfin, puisque P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, c'est aussi le cas de Q qui a les mêmes racines que P avec la même multiplicité sauf pour 0. En effet, puisque 0 est racine de P et que $P \in E_s$, alors 0 est racine simple de P et il n'est donc pas racine de Q, ce qui implique $Q(0) \neq 0$.

Réciproquement, si $P(X) = XQ(X)$ avec $Q \in E_s$ et $Q(0) = 0$, alors en évaluant en 0, on a directement $P(0) = 0$.

**Q3)** *Un résultat intermédiaire.*

a) On a :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & \sum_{i=1}^n (a_i^2 X^2 + 2a_i b_i X + b_i^2) \\ & = & \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) X^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) X + \sum_{i=1}^n b_i^2. \end{array}$$

On a donc $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $b = 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)$ et $c = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

b) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) \geqslant 0$ car c'est une somme de carrés de réels qui sont donc tous positifs. On a $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ puisqu'au moins un des termes est non nul (et donc strictement positif car élevé au carré) et que les autres sont supérieurs ou égaux à 0. On a donc le discriminant de P inférieur ou égal à 0 (c'est à dire une racine réelle double ou deux racines complexes conjuguées). On a donc $b^2 - 4ac \leqslant 0$, soit $b^2 \leqslant 4ac$, ce qui donne exactement (en divisant par 4) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

c) On a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si le discriminant de P vaut 0, autrement dit, toujours puisque $\deg(\mathrm{P}) = 2$, si et seulement si P admet une racine réelle (double). On a donc égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(\lambda) = 0$.

Or, on a $\mathrm{P}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \lambda b_i)^2$. Puisque l'on somme des termes tous positifs, la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul. On a donc finalement égalité dans l'inégalité proposée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i\lambda + b_i = 0$, ce qui montre bien l'équivalence voulue.

d) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$. On utilise l'inégalité précédente en posant pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = x_i$ et $b_i = \frac{1}{x_i}$. On a bien $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ puisque les $x_i$ sont non nuls et les $b_i$ sont bien définis, toujours car les $x_i$ sont non nuls. On a alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right)$$

ce qui donne l'inégalité voulue puisque $\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 = n^2$.

**Q4)** *Majoration du degré.*

a) En posant $\sigma_0 = 1$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ :

$$a_n \sigma_k = (-1)^k a_{n-k}.$$

On a ici $a_n = \pm 1$ puisque P est de degré exactement $n$. On a donc $\sigma_k = \pm(-1)^k a_{n-k}$. Or, on a $a_{n-k} \in \{-1, 0, 1\}$ puisque $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. On a donc bien que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma_k \in \{-1, 0, 1\}$.

b) On a :

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_1^2 & = & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\
 & = & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \\
 & = & \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \\
 & = & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i x_j \\
 & = & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \\
 & = & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sigma_2.
\end{array}$$

On a donc $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma_1 - 2\sigma_2$. Or, on a $-1 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1$. On a donc $-3 \leqslant \sigma_1 - 2\sigma_2 \leqslant 3$, ce qui implique $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$.

c) i) Les coefficients de Q sont bien tous dans $\{-1, 0, 1\}$ car ce sont les mêmes coefficients que ceux de P (en des indices différents). Le coefficient dominant de Q est $a_0 = \mathrm{P}(0)$ et on suppose $\mathrm{P}(0) \neq 0$ don cQ est bien de degré $n$. Enfin, on a $\mathrm{Q}(0) = a_n \neq 0$ car P est de degré $n$.

ii) Toujours puisque $\mathrm{P}(0) \neq 0$, P n'admet pas 0 comme racine donc on a $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \neq 0$. On a de plus pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x_i}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{1}{x_i^k} = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{1}{x_i^{n-j}} = \frac{1}{x_i^n} \mathrm{P}(x_i).$$

Puisque $\mathrm{P}(x_i) = 0$, on a donc que $\frac{1}{x_i}$ est racine de Q.

On a $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$ et on vient de montrer que Q admet $n$ racines réelles distinctes (puisque les $x_1, \dots, x_n$ sont elles aussi distinctes). Puisque $\deg(\mathrm{Q}) = n$, ces racines sont toutes simples (puisqu'on en a trouvé $n$) et Q n'a pas d'autres racines. On a donc bien Q qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Puisque $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$, on en déduit que $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}_s$.

iii) En utilisant la question 4.b appliquée au polynôme Q (qui vérifie exactement les mêmes conditions que P), on en déduit que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \leqslant 3$.

d) En utilisant l'inégalité démontrée dans la question 3.d, puisque tous les $x_i$ sont non nuls, on a alors par produit d'inégalités (tout est positif) :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) \leqslant 9.$$

Par croissance de la racine, on a donc $n \leqslant 3$, soit $\deg(\mathrm{P}) \leqslant 3$.

**Q5)** *Étude du degré 3.* Soit $P \in E_s$ de degré 3 tel que $P(0) \neq 0$. Puisque $n = \deg(P) = 3$, on est exactement dans le cas d'égalité obtenue à la question 3, au sens où :

$$3^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i^2}\right).$$

D'après la question 3, on a alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\frac{1}{x_i} = -\lambda x_i$. On remarque que $\lambda \neq 0$ puisque $\frac{1}{x_i} \neq 0$. On en déduit donc en posant $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\mu = x_i^2$.
On a alors automatiquement $\mu \geqslant 0$ et pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $x_i \in \{-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}\}$. Ceci est absurde car les trois racines de P sont supposées distinctes (car P est scindé à racines simples) et qu'elles ne peuvent prendre que deux valeurs différentes. Il y en a donc au moins deux égales, ce qui est absurde.

**Q6)** D'après la question 4, il n'y a aucun polynôme de degré plus grand que 4 dans $E_s$. D'après la question 5, $E_s$ ne contient aucun polynôme de degré 3 qui admet 0 comme racine. Pour obtenir des polynômes de degré 3 dans $E_s$, il faut donc d'après la question 2.b multiplier par X un polynôme de degré 2 qui est dans $E_s$ et qui n'admet pas 0 comme racine. Or, on avait trouvé exactement 3 tels polynômes unitaires ($X^2-1$, $X^2+X-1$ et $X^2-X+1$). En multipliant par X, on obtient donc 3 polynômes unitaires de degré 3 dans $E_s$, auquel il faut ajouter les 3 autres obtenus en multipliant par $-X$ (cas où le coefficient dominant vaut $-1$).
Pour conclure, on a donc $22 = 6+10+6$ polynômes dans $E_s$ (de degrés respectivement 1, 2 et 3).

## Partie II : Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$

**Q7)** P n'est pas constant donc $\lambda \neq 0$. Prenons $x > \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On a alors $\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{m}(x^2+a_jx+b_j)^{s_j} > 0$. En effet, tous les termes en $x-\alpha_i$ sont strictement positifs et les polynômes de degré 2 ont un discriminant strictement négatif et un coefficient dominant égal à 1 et sont donc strictement positifs sur $\mathbb{R}$. Puisque $P(x) \geqslant 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$ et puisque $\lambda \neq 0$, on a $\lambda > 0$.

**Q8)** a) On a $Q(\alpha_i) \neq 0$ car $\alpha_i$ était racine de P de multiplicité exactement $r_i$. Puisque la fonction polynômiale $x \mapsto Q(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en appliquant la définition de la continuité en $\varepsilon = \frac{|Q(\alpha_i)|}{2} > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [\alpha_i - \eta, \alpha_i + \eta]$, $|Q(x)| \geqslant \frac{|Q(\alpha_i)|}{2} > 0$, ce qui implique $Q(x) \neq 0$.

b) Puisque Q est continue sur le segment $[x_i - \eta, x_i + \eta]$ et ne s'annule pas, le théorème des valeurs intermédiaires implique que Q est de signe constant.
Supposons par l'absurde que $r_i$ soit impair. On aurait alors $P(\alpha_i+\eta) = \eta^{r_i}Q(\alpha_i+\eta)$ et $P(\alpha_i-\eta) = -\eta^{r_i}Q(\alpha_i-\eta)$ (puisque $(-1)^{r_i} = -1$). On aurait donc au moins une des deux quantités qui seraient strictement négative (puisque Q ne change pas de signe et est non nul sur ce segment). Ceci est absurde car on avait supposé que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.

**Q9)** a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $(X-\alpha)^2 = (X-\alpha)^2 + 0^2$ et s'écrit donc comme somme de deux carrés. On a donc $(X-\alpha)^2 \in \mathscr{E}$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$. Alors :

$$X^2 + aX + b = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)^2.$$

On a donc $X^2 + aX + b$ qui s'écrit comme une somme de deux carrés donc $X^2 + aX + b \in \mathscr{E}$.

c) i) On a $C \times \overline{C} = (A+iB)(A-iB) = A^2 - (iB)^2 = A^2 + B^2$.

ii) En reprenant les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \overline{C_1} \times \overline{C_2} &= (A_1 - iB_1)(A_2 - iB_2) \\ &= A_1A_2 - B_1B_2 - i(A_1B_2 + A_2B_1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \overline{C_1C_2} &= \overline{(A_1 + iB_1)(A_2 + iB_2)} \\ &= \overline{(A_1A_2 - B_1B_2) + i(A_1B_2 + A_2B_1)} \\ &= A_1A_2 - B_1B_2 - i(A_1B_2 + A_2B_1). \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité demandée.

iii) On a alors en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} (A_1^2 + B_1^2) \times (A_2^2 + B_2^2) &= (C_1 \times \overline{C_1}) \times (C_2 \times \overline{C_2}) \\ &= C_1C_2 \times \overline{C_1C_2}. \end{aligned}$$

Puisque $C_1C_2 = (A_1A_2 - B_1B_2) + i(A_1B_2 + A_2B_1)$, en posant $A_3 = A_1A_2 - B_1B_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $B_3 = A_1B_2 + A_2B_1 \in \mathbb{R}[X]$, on a bien :

$$(A_1^2 + B_1^2) \times (A_2^2 + B_2^2) = A_3^2 + B_3^2.$$

Ceci entraîne que si deux polynômes $P, Q \in \mathscr{E}$, alors ils s'écrivent sous la forme d'une somme de deux carrés (donc $P = A_1^2 + B_1^2$ et $Q = A_2^2 + B_2^2$), alors $P \times Q$ s'écrit aussi comme la somme de deux polynômes au carré, autrement dit $P \times Q \in \mathscr{E}$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc stable par produit.

**Q10)** Dans les termes qui apparaissent dans P, on a $\lambda = (\sqrt{\lambda})^2 + 0^2$ qui est dans $\mathscr{E}$, on a les $(X - \alpha_i)^{r_i} = \left((X - \alpha_i)^2\right)^{r_i/2}$ (possible car $r_i$ est pair) avec $(X - \alpha_i)^2 \in \mathscr{E}$ (d'après Q9a) et tous les polynômes $X^2 + a_j X + b_j$ qui sont dans $\mathscr{E}$ d'après Q9b.

Puisque $\mathscr{E}$ est stable par produit et que l'on fait des produits de polynômes dans $\mathscr{E}$, on en déduit que $P \in \mathscr{E}$.

Autrement dit, les polynômes positifs sur $\mathbb{R}$ sont exactement ceux qui s'écrivent comme une somme de deux carrés de polynômes (la réciproque étant évidente).

---

## Problème 2 : Analyse

### Partie I

**Q1)** La fonction $f$ est de classe $\boxed{C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ d'après les théorèmes généraux (puisque $\forall\, t \in \mathbb{R},\ 1 + t^2 \neq 0$) et

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] e^t + \frac{1}{1+t^2}\,\frac{d}{dt}[e^t] \\ &= e^t \left[-\frac{2t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t^2}\right] \\ &= e^t\,\frac{(t-1)^2}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{g(t) = (t-1)^2}$.

**Q2)** On a $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \boxed{0}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \times \frac{e^t}{t^2} = \boxed{+\infty}$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.

Le tableau des variations de $f$ est donc :

| $t$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Q3)** a) On écrit :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d}{dt}[e^t]\,\frac{(t-1)^2}{(1+t^2)^2} + e^t\,\frac{d}{dt}\left[(t-1)^2 \times \frac{1}{(1+t^2)^2}\right] \\ &= e^t\,\frac{(t-1)^2}{(1+t^2)^2} + e^t\left[2(t-1) \times \frac{1}{(1+t^2)^2} + (t-1)^2 \times \frac{-4t}{(1+t^2)^3}\right] \\ &= e^t\,\frac{(t-1)^2(1+t^2) + 2(t-1)(1+t^2) - 4t(t-1)^2}{(1+t^2)^3} \\ &= e^t\,\frac{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t - 1}{(1+t^2)^3} \\ &= e^t\,\frac{(t-1)(t^3 - 3t^2 + 5t + 1)}{(1+t^2)^3} \qquad \text{(car 1 est racine évidente de } t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t - 1\text{)} \end{aligned}$$

donc $\boxed{h(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1}$.

b) La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et $h'(t) = 3t^2 - 6t + 5$.
Ce polynôme de degré 2 a un discriminant $\Delta = -24 < 0$, et un coefficient dominant $3 > 0$, donc $h'(t)$ est toujours strictement positif.
De plus, en écrivant pour $t \neq 0$ que $h(t) = t^3 \times (1 - \frac{3}{t} + \frac{5}{t^2} + \frac{1}{t^3})$, on trouve

$$\lim_{t\to-\infty} h(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty.$$

La fonction $h$ est strictement croissante et continue (car dérivable) sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection continue, $h$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{t\to-\infty} h(t), \lim\limits_{t\to+\infty} h(t)[= \mathbb{R}$.
Ainsi, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists!\, x \in \mathbb{R} : f(x) = y$, et en particulier pour $y = 0 \in \mathbb{R}$ on a obtient l'existence d'un unique réel $\alpha$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Le sens de variation de $h$ permet donc de conclure que

$$\begin{cases} h(t) < 0 \text{ si } t < \alpha \\ h(t) = 0 \text{ si } t = \alpha \\ h(t) > 0 \text{ si } t > \alpha \end{cases}.$$

On a de plus $h(0) = 1$, et $h(-\frac{1}{5}) = -\frac{16}{125}$ donc $h(-\frac{1}{5}) < h(\alpha) < h(0)$, et le sens de variation de $h$ permet de conclure que $\boxed{-\frac{1}{5} < \alpha < 0}$.

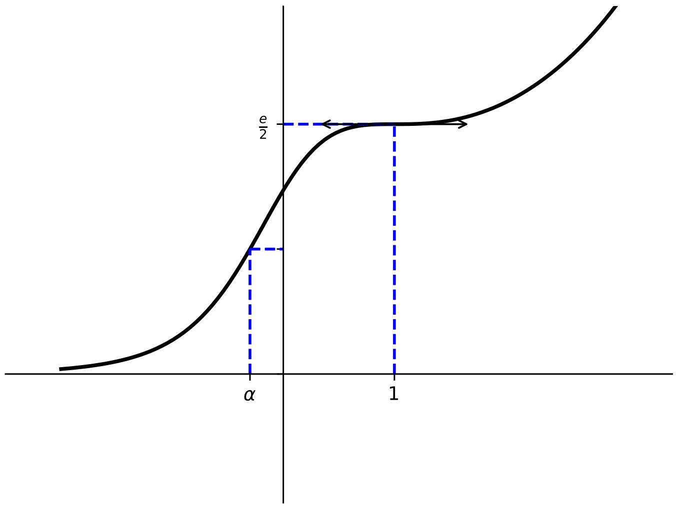
c) Le tableau de signe de $f''(t)$ est donc :

| $t$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $t-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $f$ est donc $\boxed{\text{convexe sur } ]-\infty,\alpha] \text{ et sur } [1,+\infty[}$, et elle est $\boxed{\text{concave sur } [\alpha,1]}$.

**Q4)** Graphe :

Graphe de la fonction f




**Partie II**

**Q5)** a) En posant $\boxed{P_0(X) = 1}$ on a bien $f^{(0)}(t) = f(t) = \frac{e^t}{1+t^2} = \frac{e^t \times P_0(t)}{(1+t^2)^1}$.

b) On écrit

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{e^t P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}}\right] \\
&= \frac{d}{dt}[P_n(t)e^t] \times \left[\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right] + [P_n(t)e^t] \times \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right] \\
&= [P_n'(t)e^t + P_n(t)e^t] \times \left[\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right] + [P_n(t)e^t] \times \left[\frac{-2(n+1)t}{(1+t^2)^{n+2}}\right] \\
&= \frac{e^t\,[(P_n'(t)+P_n(t))(1+t^2) - 2(n+1)tP_n(t)]}{(1+t^2)^{n+1}} \\
&= \frac{e^t\,[(1+t^2)P_n'(t) + (1-2(n+1)t+t^2)P_n(t)]}{(1+t^2)^{n+1}} \\
&= \frac{e^t P_{n+1}(t)}{(1+t^2)^{n+2}}
\end{aligned}$$

en posant $\boxed{P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) + (X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n(X)}$, qui est bien un polynôme puisque $P_n$ l'est.

**Q6)** On écrit :

$$P_1(X) = (1+X^2)\underbrace{P_0'(X)}_{=0} + (X^2-2X+1)\underbrace{P_0(X)}_{=1} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

donc

$$f'(t) = \frac{e^t\,\mathrm{P}_1(t)}{(1+t^2)^2} = \boxed{\frac{e^t\,(t-1)^2}{(1+t^2)^2}}$$

et

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = (1+\mathrm{X}^2)\underbrace{\mathrm{P}_1'(\mathrm{X})}_{=2\mathrm{X}-2} + (\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+1)\underbrace{\mathrm{P}_1(\mathrm{X})}_{=\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+1} = \boxed{\mathrm{X}^4-4\mathrm{X}^3+8\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+1}$$

donc

$$f''(t) = \frac{e^t\,\mathrm{P}_2(t)}{(1+t^2)^3} = \boxed{\frac{e^t\,(t^4-4t^3+8t^2-4t+1)}{(1+t^2)^3}}.$$

**Q7)** Montrons par récurrence simple que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)\ :\ \text{« } \deg(\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) = 2n \text{ et } \mathrm{dom}(\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) = 1 \text{ ».}$$

<u>I :</u> $\boxed{\mathscr{P}(0)}$ est immédiat puisque $\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = 1$.
<u>H :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$.
On a $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'(\mathrm{X}) + (\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_n(\mathrm{X})$ avec

$$\begin{cases} \deg((\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) = \deg(\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1) + \deg(\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) = 2+2n = 2(n+1) \\ \deg((1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'(\mathrm{X})) = \deg(1+\mathrm{X}^2) + \deg(\mathrm{P}_n'(\mathrm{X})) = 2+2n-1 = 2n+1 \end{cases}$$

donc $\deg((\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) > \deg((1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'(\mathrm{X}))$, d'où

$$\begin{cases} \deg(\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})) = \deg((\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) = 2(n+1) \\ \mathrm{dom}(\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})) = \mathrm{dom}((\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_n(\mathrm{X})) = \underbrace{\mathrm{dom}(\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)}_{=1} \times \underbrace{\mathrm{dom}(\mathrm{P}_n(\mathrm{X}))}_{=1} = 1 \end{cases}$$

donc $\boxed{\mathscr{P}(n+1)}$.

**Q8)** En substituant $i$ à X dans la relation $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'(\mathrm{X}) + (\mathrm{X}^2-2(n+1)\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_n(\mathrm{X})$ on trouve

$$\mathrm{P}_{n+1}(i) = -2(n+1)i\mathrm{P}_n(i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n(i) &= -2ni\mathrm{P}_{n-1}(i) \\ &= (-2ni)\times(-2(n-1)i)\mathrm{P}_{n-2}(i) \\ &= (-2ni)\times(-2(n-1)i)\times(-2(n-2)i)\mathrm{P}_{n-3}(i) \\ &= \ldots \\ &= (-2ni)\times(-2(n-1)i)\times(-2(n-2)i)\times\cdots\times(-2\times 1\times i)\underbrace{\mathrm{P}_0(i)}_{=1} \\ &= \boxed{(-2i)^n \times n!} \end{aligned}$$

formule qui peut facilement se confirmer par récurrence.

## **Partie III**

**Q9)** La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, qui contient 0, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, F est l'unique primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. En particulier F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}'(x) = f(x) > 0$, donc $\boxed{\text{F est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.
De plus, $f$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction F est deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}''(x) = f'(x) \geqslant 0$, donc $\boxed{\text{F est convexe sur } \mathbb{R}}$.
Enfin, la tangente à F en 0 a pour équation

$$y = \underbrace{\mathrm{F}'(0)}_{=f(0)=1}(x-0) + \underbrace{\mathrm{F}(0)}_{=0} = \boxed{x}.$$

**Q10)** F étant convexe sur $\mathbb{R}$ son graphe est au-dessus de sa tangente en 0, ie.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) \geqslant x.$$

Le théorème des gendarmes prouve alors que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty}$.

**Q11)** Prenons $x$ négatif. On écrit pour tout $t \in [x,0]$ :

$$\begin{aligned} 1+t^2 \geqslant 1 &\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 \quad (\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}) \\ &\Rightarrow \frac{e^t}{1+t^2} \leqslant e^t \quad (\text{car } e^t \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc, comme $x \leqslant 0$, on obtient :

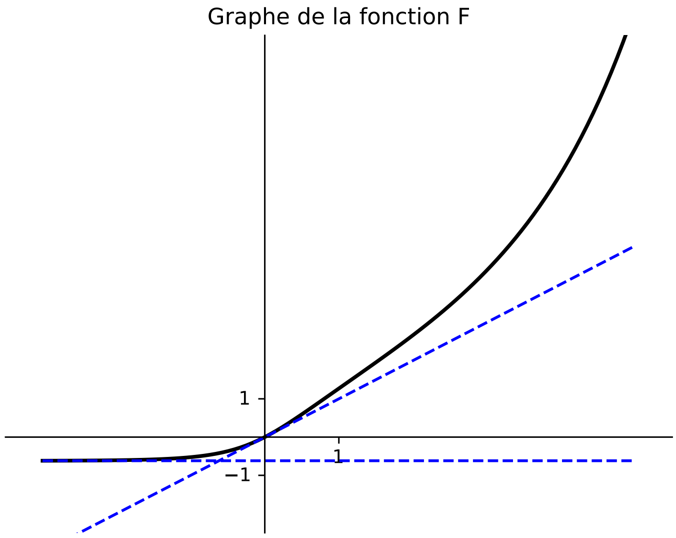
$$\int_x^0 f(t)\,dt \leqslant \underbrace{\int_x^0 e^t\,dt}_{1-e^x} \leqslant 1.$$

Ainsi $\mathrm{F}(x) = -\int_x^0 f(t)\,dt \geqslant -1$.
La fonction F est croissante et minorée sur $]-\infty, 0]$, donc d'après le théorème de limite monotone :
$\boxed{\text{F admet une limite finie } \ell \text{ en } -\infty}$.
De plus, on a $\forall\, t \in [x,0]$, $f(t) \geqslant 0$, donc $\int_x^0 f(t)\,dt \geqslant 0$. Ainsi $\mathrm{F}(x) = -\int_x^0 f(t)\,dt \leqslant 0$.
Donc pour tout $x \leqslant 0$ on a

$$-1 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant 0$$

et en passant à la limite quand $x$ tend vers $-\infty$, on trouve bien $\boxed{-1 \leqslant \ell \leqslant 0}$.

**Q12)** Graphe :




**Q13)** a) Intégrons par parties en posant

$$\begin{cases} u : t \mapsto e^t \\ v : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \qquad (\text{de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } [0,n])$$

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^n \underbrace{e^t}_{u'(t)} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v(t)}\,dt \\ &= [\underbrace{e^t}_{u(t)} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v(t)}]_0^n - \int_0^n \underbrace{e^t}_{u(t)} \underbrace{(-\frac{2t}{(1+t^2)^2})}_{v'(t)}\,dt \\ &= \frac{e^n}{1+n^2} - 1 + 2\int_0^n \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ &= \frac{e^n}{1+n^2} - 1 + 2\left(\int_0^1 \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt + \int_1^n \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt\right) \\ &= \frac{e^n}{1+n^2} + \mathrm{A} + 2x_n \end{aligned}$$

en posant $\boxed{\mathrm{A} = -1 + 2\int_0^1 \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt}$.

b) On écrit pour tout $t \in [1, n]$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant t^2 \leqslant 1+t^2 &\Rightarrow 0 \leqslant t^4 \leqslant (1+t^2)^2 \quad (\text{car } t \mapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+)\\
&\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{1}{t^4} \quad (\text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*})\\
&\Rightarrow 0 \leqslant \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{e^t}{t^3} \quad (\text{car } t\,e^t \geqslant 0)
\end{aligned}$$

et comme $1 \leqslant n$ on en déduit que

$$\int_1^n 0\,dt \leqslant \int_1^n \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_1^n \frac{e^t}{t^3}\,dt$$

ie. $\boxed{0 \leqslant x_n \leqslant y_n}$.

c) Intégrons par parties en posant

$$\begin{cases} u : t \mapsto e^t \\ v : t \mapsto \frac{1}{t^3} \end{cases} \qquad (\text{de classe C}^1 \text{ sur } [1, n])$$

$$\begin{aligned}
y_n &= \int_1^n \underbrace{e^t}_{u'(t)}\ \underbrace{\frac{1}{t^3}}_{v(t)}\,dt\\
&= [\underbrace{e^t}_{u(t)}\ \underbrace{\frac{1}{t^3}}_{v(t)}]_1^n - \int_1^n \underbrace{e^t}_{u(t)}\ \underbrace{(-\frac{3}{t^4})}_{v'(t)}\,dt\\
&= \frac{e^n}{n^3} - e + 3z_n
\end{aligned}$$

donc $y_n - 3z_n = \frac{e^n}{n^3} - e$ d'où on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - 3z_n}{\frac{e^n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - e\,\dfrac{n^2}{e^n} = 0 \quad (\text{car } n^2 = o(e^n))$. Par conséquent $\boxed{y_n - 3z_n = o(\frac{e^n}{n^2})}$.

d) On écrit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^{3/4}}}{\frac{e^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{n-n^{3/4}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{n/2}} \times \frac{1}{e^{n/2-n^{3/4}}} = 0$$

puisque $n^2 = o(e^{n/2})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n/2 - n^{3/4} = +\infty$ (puisque $n^{3/4} = o(n/2)$ donc $n/2 - n^{3/4} \sim n/2$). Ainsi $\boxed{e^{n^{3/4}} = o(\frac{e^n}{n^2})}$.

e) D'après la relation de Chasles :

$$z_n = \int_1^{n^{3/4}} \frac{e^t}{t^4}\,dt + \int_{n^{3/4}}^n \frac{e^t}{t^4}\,dt.$$

Or pour $n \geqslant 1$ on a $1 \leqslant n^{3/4} \leqslant n$. Ainsi pour tout $t \in [1, n^{3/4}]$ :

$$\begin{aligned}
t^4 \geqslant 1 &\Rightarrow \frac{1}{t^4} \leqslant 1 \quad (\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^{+*})\\
&\Rightarrow \frac{e^t}{t^4} \leqslant e^t \quad (\text{car } e^t \geqslant 0)\\
&\Rightarrow \int_1^{n^{3/4}} \frac{e^t}{t^4}\,dt \leqslant \int_1^{n^{3/4}} e^t\,dt \quad (\text{car } 1 \leqslant n^{3/4})\\
&\Rightarrow \int_1^{n^{3/4}} \frac{e^t}{t^4}\,dt \leqslant e^{n^{3/4}} - e \leqslant e^{n^{3/4}}.
\end{aligned}$$

D'autre part pour tout $t \in [n^{3/4}, n]$ :

$$\begin{aligned} t \geqslant n^{3/4} &\Rightarrow t^4 \geqslant n^3 \\ &\Rightarrow \frac{e^t}{t^4} \leqslant \frac{e^t}{n^3} \\ &\Rightarrow \int_{n^{3/4}}^{n} \frac{e^t}{t^4}\, dt \leqslant \int_{n^{3/4}}^{n} \frac{e^t}{n^3}\, dt \quad (\text{car } n^{3/4} \leqslant n) \\ &\Rightarrow \int_{n^{3/4}}^{n} \frac{e^t}{t^4}\, dt \leqslant \frac{1}{n^3}(e^n - e^{n^{3/4}}) \leqslant \frac{e^n}{n^3} \end{aligned}$$

Ainsi, $z_n \leqslant e^{n^{3/4}} + \frac{e^n}{n^3}$. Or on a clairement $0 \leqslant z_n$, d'où (puisque $\frac{e^n}{n^2} > 0$) :

$$0 \leqslant \frac{z_n}{\frac{e^n}{n^2}} \leqslant \frac{e^{n^{3/4}}}{\frac{e^n}{n^2}} + \frac{1}{n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n^{3/4}}}{\frac{e^n}{n^2}} + \dfrac{1}{n} = 0$ d'après la question précédente, donc en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z_n}{\frac{e^n}{n^2}} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{z_n = o(\frac{e^n}{n^2})}$.

f) On écrit d'après Q13b :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x_n \leqslant y_n &\Rightarrow 0 \leqslant x_n \leqslant (y_n - 3z_n) + 3z_n \\ &\Rightarrow 0 \leqslant \frac{x_n}{\frac{e^n}{n^2}} \leqslant \left(\frac{y_n - 3z_n}{\frac{e^n}{n^2}}\right) + 3\frac{z_n}{\frac{e^n}{n^2}} \end{aligned}$$

En utilisant Q13c et Q13e on obtient que le membre de droite tend vers 0, et on conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\frac{e^n}{n^2}} = 0$, ie. $\boxed{x_n = o(\frac{e^n}{n^2})}$.

On écrit alors d'après Q13a :

$$\frac{u_n}{\frac{e^n}{n^2}} = \frac{n^2}{1+n^2} + \mathrm{A}\frac{n^2}{e^n} + 2\frac{x_n}{\frac{e^n}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{1+n^2} = 1$ (car $1+n^2 \sim n^2$), $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}\dfrac{n^2}{e^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\frac{e^n}{n^2}} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{e^n}{n^2}} = 1$$

c'est-à-dire $\boxed{u_n \sim \frac{e^n}{n^2}}$.

**Q14)** On sait que la fonction F est convexe sur $\mathbb{R}$, donc sa fonction pente en 0

$$x \mapsto \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{F}(x)}{x}$$

est croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, donc en particulier $\boxed{\text{croissante sur } \mathbb{R}^{+*}}$.
Pour tout $x \geqslant 1$, en notant $n = \lfloor x \rfloor$, l'inégalité $n \leqslant x$ conduit donc à

$$\frac{\mathrm{F}(n)}{n} \leqslant \frac{\mathrm{F}(x)}{x}.$$

Or $n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ (par le théorème des gendarmes puisque $x - 1 < n$), et comme $\frac{\mathrm{F}(n)}{n} = \frac{u_n}{n} \sim \frac{e^n}{n^3}$ d'après Q13f, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{F}(n)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^3} = +\infty$, donc toujours par le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = +\infty}.$$

On en déduit que le graphe de F présente quand $x \to +\infty$ une $\boxed{\text{branche parabolique}}$ de direction l'axe des ordonnées.