À chercher pour lundi 24/04/2023, corrigé

TD 24 :

Exercice 11. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et essayons de montrer que la famille est libre. On a alors pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ax_1 + bx_2 + c_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} ax + 2b = 0 \\ a + bx + c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \end{array}\right.$$

On rappelle que la méthode pour les systèmes Ã paramètres est de faire la discussion sur les paramètres le plus tard possible. On va ici commencer par éliminer les c partout sauf dans la dernière ligne et on va placer cette dernière ligne tout en haut. On effectue donc ici $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et on échange L_1 et L_3. On a donc le système équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} -c + 2a + 3b = 0 \\ ax + 2b = 0 \\ 3a + (3+x)b = 0 \end{array}\right. .$$

On effectue alors $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{x}{3} L_3$ pour éliminer les a pour obtenir (en échangeant ensuite L_2 et L_3) :

$$\left\{\begin{array}{l} -c + 2a + 3b = 0 \\ 3a + (3+x)b = 0 \\ \left(2 - x - \dfrac{x^2}{3}\right) b = 0 \end{array}\right. .$$

On a $2 - x - \dfrac{x^2}{3} = -\dfrac{1}{3}\left(x^2 + 3x - 6\right)$. On a $\Delta = 9 + 24 = 33 > 0$ donc on trouve deux racines réelles qui sont $\dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$. On a alors la conclusion suivante :

- Si x n'est pas une de ces deux racines, alors le coefficient en b est non nul et on a alors $b = 0$ puis $a = 0$ puis $c = 0$ donc la famille est libre et le rang vaut donc 3.
- Sinon la famille est liée. On a donc un rang strictement inférieur Ã 3. Or, vu que par exemple e_3 est libre avec e_2 (puisque e_3 a un coefficient nul en première position et pas e_2, ils ne sont pas colinéaires), on a le rang supérieur ou égal Ã 2. On en déduit donc que dans ce cas, le rang vaut 2.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f, g \in L(E)$.

1) Déterminer le noyau de $h : \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Im}(f) & \to & E \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}\right.$.

On a $x \in \ker(h) \Leftrightarrow g(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Im}(f)$. On a donc $\ker(h) = \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$. De plus, on a :

$$\mathrm{Im}(h) = g(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(g \circ f).$$

2) D'après le théorème du rang (car $\mathrm{Im}(f) \subset E$ et E est de dimension finie donc $\mathrm{Im}(f)$ aussi), on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(h) + \dim(\ker(h)).$$

On a donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))$. Puisque $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$, on en déduit que $\dim(\ker(h)) \leq \dim(\ker(g))$. En appliquant le théorème du rang Ã g, on a $\dim(\ker(g)) = n - \mathrm{rg}(g)$. On a donc finalement :

$$\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(g \circ f) + n - \mathrm{rg}(g)$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrons l'équivalence des trois propriétés :

- (1) $\ker(f) = \ker(f^2)$.
- (2) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
- (3) $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Commençons par montrer que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (2). Supposons donc que $\ker(f) = \ker(f^2)$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ est toujours vraie (puisque si $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(f(x))$ ce qui implique que $y \in \mathrm{Im}(f)$). Si on montre que ces deux espaces vectoriels ont même dimension, alors la preuve est terminée.

Or, d'après le théorème du rang appliqué à f et à f^2, on a que $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ et que $\dim(\ker(f^2)) + \mathrm{rg}(f^2) = \dim(E)$. Puisque par hypothèse les noyaux de f et de f^2 ont même dimension (car ils sont égaux), on en déduit que les rangs de f et de f^2 sont égaux. Ceci implique que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f^2))$. Puisque l'on a une inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im} f(^2)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). De même, l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ étant toujours vraie, le théorème du rang appliqué à f et f^2 nous donne comme dans la preuve précédente que les noyaux sont de même dimension (ce sont cette fois les images qui par hypothèse ont même dimension). On en déduit alors que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

On a déjà montré en exercice que $\big((1)$ et $(2)\big) \Leftrightarrow (3)$. Voici une preuve, qui utilise cette fois la dimension finie, montrant que (1) $\Leftrightarrow$ (3) :

($\Rightarrow$) Supposons (1). Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $0 = f(y) = f(f(x))$ donc $x \in \ker(f^2)$. Par égalité des noyaux, on en déduit que $x \in \ker(f)$ ce qui implique que $x = 0$. On en déduit que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe.

Montrons que $\ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. Une inclusion est toujours vraie. Pour l'autre, remarquons que d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

Or, d'après ce que l'on vient de montrer, la dimension de l'intersection vaut 0. D'après le théorème du rang, le terme de droite vaut donc $\dim(E)$. On en déduit que $\dim(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$, ce qui implique, puisque l'on avait déjà une inclusion, que $\ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

($\Leftarrow$) Supposons (3). On a alors que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Ceci implique que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$. En effet, si $x \in \ker(f^2)$, on a alors $f(x) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ et donc $f(x) = 0$. L'inclusion inverse étant toujours vraie, on en déduit que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

On a donc bien montré les équivalences voulues puisque toutes les propriétés sont équivalentes à (1).