32. Intégration, corrigé

Exercice 1. Notons $T > 0$ la période de f. Remarquons que d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur n'importe quel segment de $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-T, 2T]$. Fixons à présent $\varepsilon > 0$. Prenons le $\eta > 0$ associé à l'uniforme continuité sur $[0, 2T]$. Posons $\eta_2 = \min(\eta, T)$ qui est bien strictement positif. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ / $|x - y| \leq \eta_2$ et montrons que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Pour cela, par T-périodicité de f, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + nT \in [0, T]$. Puisque $|x - y| \leq \eta_2 \leq T$, on en déduit que $y + nT \in [-T, 2T]$. On a alors par périodicité de f :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x + nT) - f(y + nT)| \leq \varepsilon,$$

la dernière inégalité étant assurée car $|x + nT - (y + nT)| \leq \eta_2 \leq \eta$ et que f est uniformément continue sur $[-T, 2T]$. On a donc bien montré que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Posons $l_- = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $l_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

1) L'idée est ici de borner f au voisinage de $\pm\infty$ par ces limites plus une constante et d'utiliser la continuité de f pour la borne entre les deux.

Posons $\varepsilon = 1 > 0$. Par définition de la limite, il existe $M_- \in \mathbb{R}$ et $M_+ \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \leq M_-,\ |f(x) - l_-| \leq 1 \\ \forall x \geq M_+,\ |f(x) - l_+| \leq 1 \end{cases}$$

De plus, sur le segment $[M_-, M_+]$, f étant continue, elle est bornée par une constante λ. On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \leq M_-,\ |f(x)| \leq |l_-| + 1 \\ \forall x \in [M_-, M_+],\ |f(x)| \leq \lambda \\ \forall x \geq M_+,\ |f(x)| \leq |l_+| + 1 \end{cases}$$

Posons $\mu = \max(|l_-| + 1, \lambda, |l_+| + 1)$. On a alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \mu$. La fonction f est donc bornée.

f étant bornée, elle admet une borne inférieure et une borne supérieure. Ces bornes ne sont pas forcément atteintes. Par exemple, si on prend $f : x \mapsto \arctan(x)$, f est continue sur $\mathbb{R}$, de limites finies en $\pm\infty$. Elle n'atteint cependant pas ses bornes, qui sont $\pm\frac{\pi}{2}$. f n'admet donc pas de minimum ni de maximum.

2) On peut montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \geq a$. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \geq a$. On a alors soit a qui majore f (auquel cas f admet bien un maximum atteint en x_0), soit a qui ne majore pas f. Dans le second cas, cela signifie qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) > a$. Ceci implique que l'on peut construire un réel $y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq y$, $f(y) \leq a + \varepsilon < f(x_1)$ (en utilisant la définition de la limite de f en l'infini avec ε assez petit). Pour la même raison, on peut construire un réel $y_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leq y_2$, $f(x) \leq b + \varepsilon < f(x_1)$. Sur le segment $[y_2, y_1]$, f admet un maximum et x_1 est dans ce segment (car il ne peut pas être en dehors, cela contredirait les inégalités précédentes). Puisque f est strictement plus petite que $f(x_1)$ en dehors de $[y_2, y_1]$, elle est également plus petite que ce maximum. On a donc bien montré que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Par la contraposée, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < a$. Supposons par l'absurde que f admette un maximum M. On a alors $M < a$ (car il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = M$). Or, puisque f tend vers a en $+\infty$, il va exister un $y \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \geq y$, $f(x) > a - \varepsilon$. En prenant $a - \varepsilon = M$, on a l'absurdité voulue.

3) Montrons que f est uniformément continue. L'idée est ici d'utiliser le fait que f converge en $\pm\infty$ pour trouver des réels à partir desquels la fonction ne « bouge » pas de plus de ε et entre les deux, d'utiliser le théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f admet des limites finies en $\pm\infty$, il existe x_- et x_+ fixés tels que :

$$\begin{cases} \forall x \leq x_-, \ |f(x) - l_-| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \\ \forall x \geq x_+, \ |f(x) - l_+| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Quitte à prendre un x_+ plus grand, on peut supposer que $|x_- - x_+| > 1$. Sur le segment $[x_-, x_+]$, f étant continue, d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [x_-, x_+] \ / \ |x - y| \leq \eta, \ |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quitte à prendre un η plus petit, on peut supposer $\eta < 1$. Montrons que ce η convient pour montrer l'uniforme continuité de f. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \eta$.

- Si $x, y \in [x_-, x_+]$, alors, par construction, on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

- Si $x, y \in]-\infty, x_-]$. On a alors, par inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |f(x) - l_- + l_- - f(y)| \\ & \leq & |f(x) - l_-| + |l_- - f(y)| \\ & \leq & \varepsilon. \end{array}$$

- Si $x, y \in [x_+, +\infty[$, alors de même que ci-dessus, on montre que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

- Supposons que $x \in [x_-, x_+]$ et $y \in [x_+, +\infty[$. On a alors, puisque $|x - y| \leq \eta$ que $|x - x_+| \leq \eta$. On a donc $|f(x) - f(x_+)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a également, puisque $y \geq x_+$ que $|f(x_+) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par inégalité triangulaire, on en déduit donc que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

- On traite de manière identique le cas où x et y sont de part et d'autres de x_-. Le cas où l'un des deux est plus petit que x_- et l'autre plus grand que x_+ n'est pas à considérer car on a pris $\eta < 1$ et $|x_- - x_+| > 1$.

Dans tous les cas, on a montré que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ / \ |x - y| \leq \eta, \ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que f était uniformément continue.

Exercice 3. Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1 > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R} \ / \ |x - y| \leq \eta, \ |f(x) - f(y)| \leq 1$. Quitte à choisir η plus petit, on peut supposer également $1 > \eta$. Autrement dit, si x et y sont écartés de moins de η, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont écartés de moins de 1. L'idée va donc être de borner la fonction en utilisant ce η en faisant des « bonds » de η.

Il est ici conseillé de faire un dessin afin de voir quelle constante a et b choisir avant de se lancer dans la récurrence.

Sur le segment $[-1,1]$, f étant continue, elle est bornée par une constante a. Posons alors $b = \frac{1}{\eta} > 0$. On a donc en particulier que $\forall x \in [-1,1],\ |f(x)| \leq a + b|x|$. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in [-1-n\eta, 1+n\eta],\ |f(x)| \leq a + b|x|$. »

Cette propriété est vraie au rang 0 par construction.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $x_0 \in [-1-(n+1)\eta, 1+(n+1)\eta]$. Si $x_0 \in [-1-n\eta, 1+n\eta]$, alors la propriété est vraie par hypothèse de récurrence. Supposons $x_0 \in [n\eta, (n+1)\eta]$. On a alors $|x_0 - (x_0-\eta)| \leq \eta$ et $x_0 - \eta \in [-1-n\eta, 1+n\eta]$. On a donc par uniforme continuité de f, $|f(x_0) - f(x_0-\eta)| \leq 1$ et par hypothèse de récurrence, on a aussi $|f(x_0-\eta)| \leq a + b|x_0 - \eta|$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} |f(x_0)| & = & |f(x_0) - f(x_0-\eta) + f(x_0-\eta)| & \\ & \leq & |f(x_0) - f(x_0-\eta)| + |f(x_0-\eta)| & \\ & \leq & 1 + a + b|x_0 - \eta| & \\ & \leq & a + b(x_0-\eta) + 1 & (\text{ car } x_0 - \eta > 0) \\ & \leq & a + bx_0. & \end{array}$$

On a donc montré que x_0 vérifie la propriété voulue. On peut procéder de la même manière si $x_0 \in [-1-(n+1)\eta, -1-n\eta]$. On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ était vraie.

La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité que l'on veut montrer est donc vraie pour tout x réel. On a donc bien montré que :

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a + b|x|.$$

L'ordre des quantificateurs est ici important ! En effet, les constantes a et b ne dépendent pas de x mais uniquement de la fonction f ! Ceci nous permet de montrer que beaucoup de fonctions ne sont pas uniformément continues, par exemple $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, etc. Une fonction uniformément continue ne peut donc pas « croître trop vite » vers l'infini.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. On a $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Ceci implique que si l'on pose $g : x \mapsto f(x) - x$, alors $\int_0^1 g(x)dx = 0$.

Ceci implique que la fonction g s'annule sur $[0,1]$. En effet, g étant continue, si elle était toujours strictement positive (ou strictement négative), son intégrale serait strictement positive (ou strictement négative). On en déduit que g s'annule sur $[0,1]$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 5. Soit f continue telle que $\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt = \int_0^\pi f(t)\cos(t)dt = 0$. Montrons pour commencer que f s'annule au moins une fois sur $[0,\pi]$. Supposons par l'absurde que f soit strictement positive (ou strictement négative) sur $[0,\pi]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne peut effectivement pas changer de signe sans s'annuler. Puisque sinus est positive sur $[0,\pi]$, on en déduit que la fonction $t \mapsto f(t)\sin(t)$ est de signe constant. Puisqu'elle est continue et d'intégrale nulle, elle est donc identiquement nulle ce qui est absurde car alors f s'annulerait. On en déduit que f s'annule au moins une foix en $x_0 \in [0,\pi]$.

Si $x_0 = 0$ ou $x_0 = \pi$, alors le même argument que ci-dessus montre que f s'annule au moins une seconde fois. Supposons donc $x_0 \in]0,\pi[$. Supposons que la fonction f ne change pas de signe en x_0 (et qu'elle reste donc positive sur $[0,\pi]$ par exemple). On a alors toujours $t \mapsto f(t)\sin(t)$ qui est positive sur $[0,\pi]$ d'intégrale nulle. Elle est donc identiquement nulle et f s'annule donc en un autre point.

Supposons donc que f change de signe en x_0 et que par l'absurde, f n'admette pas d'autre zéro. On a alors f de signe constant sur $[0,x_0]$ et sur $[x_0,\pi]$. Supposons par exemple f négative sur $[0,x_0]$

et positive sur $[x_0,\pi]$. Considérons alors la fonction continue $g : t \mapsto f(t)\sin(t-t_0)$. Cette fonction est alors toujours positive sur $[0,\pi]$ (on effectue le produit de deux fonctions négatives sur $[0,x_0]$ et positives sur $[x_0,\pi]$. Or :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin(t-t_0) &= \cos(t_0)\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt - \sin(t_0)\int_0^\pi f(t)\cos(t)dt\\ &= 0.\end{aligned}$$

On aurait alors que g est identiquement nulle sur $[0,\pi]$ ce qui est absurde car cela implique que f s'annule une seconde fois. On a bien montré que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrons que la suite u_n converge vers l. On va séparer les cas $l = +\infty$ (le cas $-\infty$ se traite de la même façon) et $l \in \mathbb{R}$.

- Supposons donc $l = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque $f(x) \to +\infty$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq x_0$, $f(x) \geq M$. Posons donc $N = E(x_0)+1$. On a alors, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned}u_n &= \int_n^{n+1} f(t)dt\\ &\geq \int_n^{n+1} Mdt\\ &\geq M.\end{aligned}$$

  M étant quelconque, on a donc $u_n \to +\infty$.

- Supposons $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq x_0,\ |f(x)-l| \leq \varepsilon$. Posons alors $N = E(x_0)+1$. On a pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned}|u_n - l| &= \left|\int_n^{n+1} f(x)dx - l\right|\\ &= \left|\int_n^{n+1} (f(x)-l)dx\right|\\ &\leq \int_n^{n+1} |f(x)-l|dx\\ &\leq \int_n^{n+1} \varepsilon dx\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

  On a bien montré que $u_n \to l$.

Exercice 8. Soit f continue sur $[0,1]$.

1) Supposons $f(1) = 0$. On va découper l'intégrale en deux morceaux, en séparant ce qui se passe proche de 1 et loin de 1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [1-\eta, 1],\ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Quitte à réduire η, on peut supposer $1 > \eta$. De plus, puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est également bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq M$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n f(x)dx\right| &= \left|n\int_0^{1-\eta} x^n f(x)dx + n\int_{1-\eta}^1 x^n f(x)dx\right|\\ &\leq \left|n\int_0^{1-\eta} x^n f(x)dx\right| + \left|n\int_{1-\eta}^1 x^n f(x)dx\right|\\ &\leq n\int_0^{1-\eta} x^n\left|f(x)\right|dx + n\int_{1-\eta}^1 x^n\left|f(x)\right|dx\\ &\leq n\int_0^{1-\eta} x^n M dx + n\int_{1-\eta}^1 x^n \varepsilon dx\\ &\leq \frac{n}{n+1}M(1-\eta)^{n+1} + \varepsilon\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini (car $0 < 1-\eta < 1$). Il existe donc N_1 tel que pour $n \geq N_1$, ce terme soit plus petit que ε. Le second terme tend vers ε. Il existe donc N_2 tel que pour $n \geq N_2$, ce terme est plus petit que 2ε. On a montré, en prenant $N_3 = \max(N_1, N_2)$ qu'il existait un entier N_3 tel que :

$$\forall n \geq N_3, \quad \left| n \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci entraine donc que $\lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

2) Posons alors $g : x \mapsto f(x) - f(1)$. g vérifie les hypothèses de la question 1 et on donc $\lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_0^1 x^n g(x)dx = 0$. Or, on a :

$$\begin{aligned} n\int_0^1 x^n g(x)dx &= n\int_0^1 x^n f(x)dx - n\int_0^1 x^n f(1)dx \\ &= n\int_0^1 x^n f(x)dx - \frac{n}{n+1} f(1). \end{aligned}$$

Puisque $n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = n\int_0^1 x^n g(x)dx + \frac{n}{n+1} f(1)$, on en déduit en passant à la limite que :

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

Exercice 9. Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(1) = 0$ et $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leq g(t) < 1$. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée par une constante $M_1 > 0$. Puisque g est continue sur $[0,1]$ et que $\forall x \in [0,1[,\ 0 \leq g(x) < 1$, on en déduit que g est positive sur $[0,1]$ et majorée par 1 (sinon par l'absurde en utilisant la continuité en 1, on montre que g est strictement plus grande que 1 sur un voisinage de 1 ce qui est absurde).

On va étudier l'intégrale la coupant au voisinage de 1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(1) = 0$ et que f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [1-\eta, 1],\ |f(x)| \leq \varepsilon$.

De plus, g est continue sur le segment $[0, 1-\eta]$, elle atteint donc son maximum que l'on notera μ. Puisqu'il existe $x_0 \in [0,1[$ tel que $g(x_0) = \mu$, on a alors $\mu < 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| \int_0^1 f(t) g(t)^n dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t)||g(t)|^n dt \\ &\leq \int_0^{1-\eta} |f(t)| g(t)^n dt + \int_{1-\eta}^1 |f(t)||g(t)|^n dt \quad (g \text{est positive sur } [0,1[) \\ &\leq \int_0^{1-\eta} M_1 \mu^n + \varepsilon \int_{1-\eta}^1 1 dt \\ &\leq M_1 \mu^n \cdot 1 + \varepsilon \cdot 1. \end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini, le terme de gauche tend vers 0. On en déduit qu'il existe un rang N tel que ce terme est inférieur ou égal à ε. On a donc montré qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ |u_n| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci entraine que $u_n \to 0$.

Exercice 10. Dans tous les exercices, on va utiliser des sommes de Riemann. Elles seront toujours justifiées car les fonctions considérées seront toutes continues.

1) On a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$. On en déduit que $u_n \to \ln(2)$.

2) On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &\to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx. \end{aligned}$$

On a donc $v_n \to [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3) On a $w_n = \frac{n}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\frac{k}{n}}{2+\frac{k^2}{n^2}}$. Puisque $\frac{\sin(u)}{u} \to 1$, on en déduit que :

$$w_n \to \pi\int_0^1 \frac{x}{2+x^2}dx.$$

Or, $\int_0^1 \frac{x}{2+x^2}dx = \left[\frac{\ln(2+x^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2}$. On a donc $w_n \to \pi\frac{\ln(3)-\ln(2)}{2}$.

4) On a :

$$\begin{aligned} \ln(x_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{k=n+1}^{2n}k}{n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{j+n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

On a donc $\ln(x_n) \to \int_0^1 \ln(1+x)dx$. On peut alors calculer cette intégrale avec une intégration par partie en posant $u = \ln(1+x)$ et $v' = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x)dx &= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= 2\ln(2)-1. \end{aligned}$$

Exercice 13. Posons $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. On a :

$$u_n = n\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant continue sur $[0,1]$, on a, par convergence des sommes de Riemman que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}dx$. Ceci entraine que $\frac{u_n}{n\sqrt{n}} \to \frac{2}{3}$. On en déduit que $u_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

Exercice 14.

1) Commençons par montrer que pour $x \in [0,1]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. Une simple étude de fonction montre l'inégalité de droite. Montrons l'autre inégalité en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral. On a :

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k &= \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin^{(4)}(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Cette expression est alors positive puisque $x \in [0, \pi]$ et que le sinus est positif sur ce segment. On en déduit que :

$$\forall x \in [0, \pi], \ \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

Ces inégalités sont à fortiori valables pour $x \in [0,1]$ puisque $[0,1] \subset [0,\pi]$. De plus, sur ce segment les trois fonctions considérées sont positives (la seule qui peut poser problème est celle de gauche mais elle est égale à $x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$ qui est bien positive sur $[0,1]$). La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 \leq \sin^2(x) \leq x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \leq \sin^2(x) \leq x^2. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \frac{x^6}{36}$, on en déduit que $\forall x \in [0,1]$, $x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2(x) \leq x^2$.

2) On peut alors utiliser cet encadrement en l'appliquant à la suite u_n. Pour $n \geq 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a bien $\frac{1}{n+k} \in [0,1]$ donc l'encadrement de la question précédente est utilisable. On a alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)} - \frac{1}{3(n+k)^2} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

On a alors ici des sommes de Riemann. On a en effet :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \to \int_0^1 \frac{1}{3(1+x)^2} dx.$$

Les fonctions considérées étant bien continues sur $[0,1]$, ce qui justifie la convergence des sommes de Riemann. On en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \ln(2) \\ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\left(1+\frac{k}{n}\right)^3} \to 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $u_n \to \ln(2)$.

Exercice 19. Soit f continue et positive sur le segment $[a,b]$. f est alors positive et admet un maximum $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. L'idée est qu'ici toute la « masse » de l'intégrale se concentre là où la fonction est maximale. On va donc montrer tout d'abord une majoration et ensuite une minoration en ne considérant l'intégrale qu'au voisinage du maximum.

Si on note $u_n = \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{1/n}$, alors, on a déjà :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)^n dx &\leq \int_a^b M^n dx \\ &\leq M^n(b-a).\end{aligned}$$

On a donc majoré $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite qui converge vers M. Il ne reste plus qu'à trouver une minoration. Puisque M est le maximum de f, il est atteint par exemple en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ f(x) \geq M - \varepsilon$. On a alors, en utilisant également le fait que f est positive (pour ne considérer l'intégrale qu'autour de x_0) que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)^n dx &\geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} (M-\varepsilon)^n dx \\ &= (M-\varepsilon)^n(2\eta).\end{aligned}$$

On en déduit, alors, puisque la fonction $u \mapsto u^{1/n}$ est strictement croissante que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(M-\varepsilon)(2\eta)^{1/n} \leq u_n \leq M(b-a)^{1/n}.$$

Puisque $(2\eta)^{1/n} \to 1$ et que $(b-a)^{1/n} \to 1$, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$:

$$M - 2\varepsilon \leq u_n \leq M + \varepsilon.$$

ε étant pris quelconque, ceci entraine que $u_n \to M$.