DM 4, pour le vendredi 18/11/2022

Je vous rappelle les consignes en devoir à la maison :

- Vous pouvez chercher les exercices à plusieurs, me poser des questions dessus mais la rédaction doit être personnelle.
- Écrire lisiblement sur des feuilles grandes et doubles, au stylo ou à l'encre bleu foncé ou noir et **souligner ou encadrer ses résultats**.
- Vous avez le droit de sauter des questions et d'admettre les résultats correspondants pour traiter les questions suivantes.
- Les différents exercices sont indépendants.

Exercice. Modèle de Verhulst. Le modèle de Verhulst est un modèle mathématique proposé pour modéliser l'évolution de la taille d'une population. On considère dans ce modèle que le taux de natalité et de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente.

Si on note $t \mapsto y(t)$ la taille de la population, on suppose donc qu'elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

où $a, K \in \mathbb{R}_+^*$ sont des constantes.

Cette équation différentielle n'est pas linéaire. On admet cependant (c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz) que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, le système avec condition initiale $\begin{cases} y'(t) = ay(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$ admet une unique fonction solution y définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Donner deux solutions évidentes de (E).

On fixe à présent $y_0 > 0$ (la population initiale) et on note y l'unique solution du système

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

2) Montrer à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) > 0$.

On pose alors dans la suite $z = \dfrac{1}{y}$.

3) Montrer que z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

4) Résoudre cette équation différentielle et en déduire pour $t \in \mathbb{R}$ l'expression de $y(t)$ en fonction de y_0, a, K et de t. Que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$?

PROBLÈME
Prolongement de la fonction factorielle

La factorielle d'un entier positif est définie par $\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n! = n \times (n-1)! \end{cases}$.

Le but du problème est d'étendre cette définition aux réels positifs en construisant une fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ \forall x \in [1, +\infty[\, , \ F(x) = x \times F(x-1) \end{cases}.$$

Partie I.

Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(x) = x^a$.

1)

a) En distinguant les cas $a = 0$ et $a > 0$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g_a(x)$. En déduire que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $g_a(0)$ correspondante.

b) On note toujours g_a la fonction ainsi prolongée en 0. Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la fonction g_a est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Prouver que pour tout $a \geq 1$, la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ g_a'(x) = a g_{a-1}(x).$$

On rappelle qu'une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

2) Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t) dt.$$

a) Justifier précisément que la fonction $t \mapsto g_a(t) g_b(1-t)$ est continue sur $[0, 1]$, ce qui assure l'existence de l'intégrale.

b) À l'aide d'un changement de variable, vérifier que $I(a, b) = I(b, a)$.

c) Préciser la valeur de $I(0, b)$ et prouver que

$$I(a+1, b) = \frac{a+1}{b+1} I(a, b+1).$$

d) En déduire que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \ I(a, b) = \frac{a!}{\prod\limits_{k=1}^{a+1} (b+k)}.$$

e) À l'aide des question précédentes, écrire une fonction Python `I(a,b)` qui, pour a entier naturel et b flottant positif, renvoie une valeur approchée de l'intégrale $I(a, b)$.

f) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, exprimer $I(a, b)$ à l'aide de factorielles.

g) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2a+1} (\cos(x))^{2b+1}) dx$$

où a et b sont deux entiers naturels.

Partie II.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right).$$

3) Préciser le domaine de définition de f_a.

4) Prouver que

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \ \ln(1+x) \leq x.$$

5) En déduire que

$$\forall x \in \left]a, +\infty\right[, \ -\frac{a}{x-a} \leq \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \leq -\frac{a}{x}.$$

6) Déterminer le sens de variation de la fonction f_a sur $]a, +\infty[$.

7) Prouver que

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = -a.$$

8) On considère la suite $(u_n)_{n \geq a}$ définie uniquement pour les entiers naturels n tels que $n \geq a$ par

$$u_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n.$$

Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n \geq a}$.

Partie III.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n y^x dy.$$

9) Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$ où l'intégrale $I(x, n)$ est introduite au I.2.

10) En utilisant les résultats de la partie II, montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

11)

a) Justifier que $\lim\limits_{y \to +\infty} y^{x+2} e^{-y} = 0$.

On **admet** que l'on peut en déduire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall y \in [\alpha, +\infty[, \ y^{x+2} e^{-y} \leq 1.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq \alpha$,

$$F_n(x) \leq \frac{1}{\alpha} + \int_0^\alpha e^{-y} y^x dy.$$

c) Conclure que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle converge.

12) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$.

Vérifier que la fonction F répond au problème posé en début de problème, à savoir que

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ \forall x \in [1, +\infty[, \ F(x) = x \times F(x-1) \end{cases}.$$