Complément sur les fonctions à valeurs complexes, méthodologie

I. Dérivabilité

I.1. Généralités

I.2. Dérivabilité

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ où $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur D si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (qui sont des fonctions définies de D dans $\mathbb{R}$) sont dérivables. On note alors :

$$f' = (\mathrm{Re}(f))' + i(\mathrm{Im}(f))'.$$

Proposition. Soient $f, g : D \to \mathbb{C}$ des fonctions dérivables. Alors, $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables sur D et :

$$(f+g)' = f' + g' \text{ et } (f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

Si de plus g ne s'annule pas sur D, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

m Autrement dit tout se passe comme pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 1. Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes et les dériver.

1) $f_1 : t \mapsto \ln(t) + i\arctan(t)$.
2) $f_2 : t \mapsto (3t+i)(\arcsin(t) - ie^t)$.
3) $f_3 : t \mapsto \dfrac{3t+i}{t^2+i}$.

Proposition. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ dérivable. Alors e^f est dérivable sur D et $\left(e^f\right)' = f' \times e^f$.

m Une exponentielle complexe se dérive donc comme une exponentielle réelle.

Exercice d'application 2. Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes et les dériver.

1) $f_1 : t \mapsto e^{(1+i)t}$.

2) $f_2 : t \mapsto t^2 e^{2i\ln(t)}$.

3) $f_3 : t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{e^{it^2}}$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable avec I un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Alors, f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$. On a donc :

$$f' = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \ / \ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda.$$

(m) Autrement dit, tout se passe comme pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (la seule différence étant que la constante est ici dans $\mathbb{C}$ au lieu d'être dans $\mathbb{R}$).

II. Intégration

II.1. Intégrale

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors, pour $a, b \in I$, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$. En particulier, on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

(m) Pour intégrer une fonction continue à valeurs complexes, on l'écrit sous forme algébrique et on calcule de manière séparée l'intégrale de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Exercice d'application 3. Déterminer les intégrales suivantes.

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(2\sin(3t) + ite^t\right) dt$.

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+i}{t-i} dt$.

(m) Quand on intègre des fonctions à valeurs complexes, l'intégrale est toujours linéaire, la relation de Chasles reste vraie. Les techniques d'intégration par parties et de changement de variable fonctionnent encore. Les seules propriétés qui n'ont plus de sens sont celles qui nous permettaient de dire qu'une intégrale était positive si la fonction était positive (puisqu'un complexe n'a pas de signe et que l'on a pas d'inégalité dans $\mathbb{C}$, tout ceci n'a plus de sens pour les fonctions à valeurs complexes). On peut cependant borner en module des intégrales avec la proposition suivante (utile pour borner une intégrale que l'on ne sait pas calculer).

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exercice d'application 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(t^2) e^{int} dt$.

1) Avec une intégration par parties, montrer que $u_n = \dfrac{\cos(4\pi^2) - 1}{in} - \dfrac{i}{n} \displaystyle\int_0^{2\pi} 2t \sin(t^2) e^{int} dt$.

2) Démontrer que $\left| \displaystyle\int_0^{2\pi} 2t \sin(t^2) e^{int} dt \right| \leq 4\pi^2$.

3) Déterminer alors une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $|u_n| \leq \dfrac{C}{n}$. Que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |u_n|$?

4) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \cos(t^2) \cos(nt) dt$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \cos(t^2) \sin(nt) dt$.

II.2. Primitives

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue où I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Alors f admet des primitives qui sont égales à une constante complexe près. Si $a \in I$, l'unique primitive de f qui s'annule en a est :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t) dt \end{array} \right. .$$

De plus, si F est une primitive de f, alors on a pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t) dt = \big[F(t)\big]_a^b$.

Exercice d'application 5. Vérifier que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x + 1 - 2i}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une primitive.

m Pour calculer des intégrales/primitives du type $\displaystyle\int^x \cos(at) e^{bt} dt$ et $\displaystyle\int^x \sin(at) e^{bt} dt$, on peut soit réaliser deux intégrations par parties successives (voir le cours d'intégration), soit passer par les complexes en utilisant le fait que $e^{iat} = \cos(at) + i \sin(at)$ et en utilisant le fait que pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\displaystyle\int^x e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$ (autrement dit que l'on sait intégrer une exponentielle complexe). En considérant alors la partie réelle (ou la partie imaginaire pour le sinus), on détermine l'intégrale/la primitive en une seule intégration.

Exercice d'application 6. Déterminer les primitives suivantes en utilisant les exponentielles complexes.

1) $F_1(x) = \displaystyle\int^x \cos(2t) e^t dt$.

2) $F_2(x) = \displaystyle\int^x \sin(3t) e^{-t} dt$.

III. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque ln et arctan le sont. On a pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1'(t) = \frac{1}{t} + \frac{i}{1+t^2}$.

2) f_2 est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (à cause de la fonction arcsin) comme produit de fonctions dérivables sur $]-1,1[$. On dérive comme un produit. Pour $t \in]-1,1[$:

$$f_2'(t) = 3(\arcsin(t) - ie^t) + (3t+i)\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - ie^t\right).$$

3) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 + i \neq 0$ (puisque t^2 est réel). On a un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f_3'(t) = \frac{3(t^2+i) - (3t+i) \times 2t}{(t^2+i)^2} = \frac{-3t^2 - 2it + 3i}{(t^2+i)^2}.$$

Exercice d'application 2.

1) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle d'une fonction dérivable est dérivable. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1'(t) = (1+i)e^{(1+i)t}.$$

2) f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables (puisque le logarithme l'est sur $\mathbb{R}_+^*$). Pour $t > 0$, on a :

$$f_2'(t) = 2te^{2i\ln(t)} + t^2 \times \frac{2i}{t} e^{2i\ln(t)} = (2+2i)te^{2i\ln(t)}.$$

3) f_3 est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it^2} \neq 0$ (car $|e^{it^2}| = 1$). On a par propriété de l'exponentielle, pour $t \in \mathbb{R}$, $f_3(t) = e^{3t - it^2}$. On a donc pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f_3'(t) = (3 - 2it)e^{3t-it^2}.$$

Exercice d'application 3.

1) I_1 existe car les fonctions dans l'intégrale sont continues sur $[0,\pi]$. On a en utilisant une intégration par parties (toutes les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$) pour la partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi 2\sin(3t)dt + i\int_0^\pi te^t dt \\
&= \left[-\frac{2\cos(3t)}{3}\right]_0^\pi + i\left(\left[te^t\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t dt\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + i\left(\pi e^\pi - \left[e^t\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{4}{3} + i((\pi - 1)e^\pi + 1).
\end{aligned}$$

2) On multiplie par la quantité conjuguée le dénominateur pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de l'intégrale. Remarquons tout d'abord que l'intégrale existe puisque l'on a un

quotient de fonctions continues et que le dénominateur ne s'annule pas (puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ t - i \neq 0$). On a donc :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \frac{(t+i)^2}{(t-i)(t+i)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^2+2ti-1}{t^2+1}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1} + i\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^2+1-2}{t^2+1} + i\big[\ln(|t^2+1|)\big]_0^1 \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) + i\ln(2) \\
&= \big[t - 2\arctan(t)\big]_0^1 + i\ln(2) \\
&= 1 - \frac{\pi}{2} + i\ln(2).
\end{aligned}$$

Attention à ne pas écrire de logarithme d'un nombre complexe ! Seule l'exponentielle est définie sur $\mathbb{C}$...

Exercice d'application 4.

1) Remarquons que u_n existe car la fonction $t \mapsto \cos(t^2)e^{int}$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Pour réaliser l'IPP, on va poser $\begin{cases} u(t) = \cos(t^2) & u'(t) = -2t\sin(t^2) \\ v(t) = \dfrac{e^{int}}{in} & v'(t) = e^{int} \end{cases}$. On primitive l'exponentielle car c'est plus facile et cela fait apparaitre du $\frac{1}{n}$. Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$. On a donc :

$$\begin{aligned}
u_n &= \left[\cos(t^2)\frac{e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{2t\sin(t^2)e^{int}}{in}dt \\
&= \frac{\cos(4\pi^2)e^{2i\pi n} - 1}{in} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} 2t\sin(t^2)e^{int}dt \\
&= \frac{\cos(4\pi^2) - 1}{in} - \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} 2t\sin(t^2)e^{int}dt.
\end{aligned}$$

2) Puisque $0 \leq 2\pi$, on va utiliser le fait que le module de l'intégrale est plus petit que l'intégrale du module. On rappelle que $|e^{int}| = 1$ et que $|\sin(t^2)| \leq 1$ (puisque le sinus est borné par 1). On a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} 2t\sin(t^2)e^{int}dt\right| &\leq \int_0^{2\pi} |2t\sin(t^2)e^{int}|dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} 2t \times 1dt \\
&\leq \big[t^2\big]_0^{2\pi} \\
&\leq 4\pi^2.
\end{aligned}$$

3) On utilise alors l'inégalité triangulaire et le fait que le module d'un produit/quotient est le produit/module des quotients. On a :

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \left|\frac{\cos(4\pi^2)-1}{in} - \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} 2t\sin(t^2)e^{int}dt\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos(4\pi^2)-1}{in}\right| + \left|\frac{i}{n}\int_0^{2\pi} 2t\sin(t^2)e^{int}dt\right| \\
&\leq \frac{|\cos(4\pi^2)|+1}{n} + \frac{1}{n}4\pi^2 \\
&\leq \frac{|\cos(4\pi^2)|+1+4\pi^2}{n}.
\end{aligned}$$

On a donc $C = |\cos(4\pi^2)| + 1 + 4\pi^2$. *On peut aussi majorer le* $|\cos(4\pi^2)|$ *par 1 si l'on veut ce qui nous donne* $C_2 = 2 + 4\pi^2$ *qui convient également.*

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |u_n| \leq \frac{C}{n}$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. De plus, on sait que pour $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$. On a donc par exemple pour $\mathrm{Re}(u_n)$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-|u_n| \leq \mathrm{Re}(u_n) \leq |u_n|.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = 0$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(u_n) &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \cos(t^2)e^{int}dt\right) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\cos(t^2)e^{int}\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(t^2)\cos(nt)dt.
\end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \cos(t^2)\cos(nt)dt = 0$. On procède de la même façon avec la partie imaginaire pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \cos(t^2)\sin(nt)dt = 0$.

Exercice d'application 5. Posons $f : x \mapsto \frac{1}{x+1-2i}$. Remarquons que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+1-2i \neq 0$ (il y a toujours une partie imaginaire non nulle). Pour déterminer une primitive, on sépare partie réelle et partie imaginaire en multipliant le dénominateur par la quantité conjuguée. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)dt &= \int^x \frac{1}{t+1-2i}dt \\
&= \int^x \frac{t+1+2i}{(t+1-2i)(t+1+2i)}dt \\
&= \int^x \frac{t+1+2i}{(t+1)^2+4}dt \\
&= \int^x \frac{t+1}{t^2+2t+5}dt + 2i\int^x \frac{1}{(t+1)^2+4}dt \\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+2}{t^2+2t+5}dt + \frac{i}{2}\int^x \frac{1}{\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(|t^2+2t+5|)\right]^x + \frac{i}{2}\left[2\arctan\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^x \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2+2x+5|) + i\arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Attention à ne pas écrire de logarithme d'un nombre complexe ! Seule l'exponentielle est définie sur $\mathbb{C}$...

Exercice d'application 6.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int^x \mathrm{Re}(e^{2it})e^t dt \\
&= \int^x \mathrm{Re}\left(e^{2it}\times e^t\right)dt \\
&= \mathrm{Re}\left(\int^x e^{(1+2i)t}dt\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}\right]^x\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1-2i)e^{(1+2i)x}}{(1+2i)(1-2i)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1-2i)e^x e^{2ix}}{5}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1-2i)e^x(\cos(2x)+i\sin(2x))}{5}\right) \\
&= \frac{e^x\cos(2x)}{5} + \frac{2e^x\sin(2x)}{5}.
\end{aligned}$$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int^x \mathrm{Im}(e^{3it})e^{-t}dt \\
&= \int^x \mathrm{Im}\left(e^{3it}e^{-t}\right)dt \\
&= \mathrm{Im}\left(\int^x e^{(-1+3i)t}dt\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(-1+3i)x}}{-1+3i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{(-1-3i)e^{-x}e^{3ix}}{10}\right) \\
&= \frac{-3\cos(3x)e^{-x}}{10} - \frac{\sin(3x)e^{-x}}{10}.
\end{aligned}$$