29. Probabilités

Exercice 1. (c) **Calculs d'univers.** Dans chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer un univers associé et son cardinal.

1) On tire successivement et avec remise 3 cartes dans un jeu de 32 cartes (numérotées de 1 à 32).

2) On tire successivement 3 cartes dans un jeu de 32 cartes.

3) On tire simultanément 3 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Exercice 2. (c) À quelles conditions sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ telle que $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = x$ et $P(\{\omega_2, \omega_3\}) = y$?

Exercice 3. (c) Soit (Ω, P) un espace de probabilité. Soient A et B deux évènements. Montrer que $\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$.

Exercice 4. (m) Un joueur de tennis a une probabilité $p \in]0, 1[$ de réussir son premier service. Si le joueur rate son premier service, il a alors une probabilité $q \in]0, 1[$ de réussir son second service.

1) Déterminer la probabilité pour que le joueur fasse une double faute. Application numérique dans le cas où $p = 0.9$ et $q = 0.3$.

2) On suppose que $q = 1 - p$. Pour quelle valeur de p cette probabilité est-elle maximale ?

Exercice 5. (m) On dispose de n urnes $U_1, \ldots, U_n$ contenant chacune 3 boules. Toutes les boules sont blanches sauf une qui est rouge (placée de manière équiprobable dans une des urnes). On tire sans remise deux boules dans U_1. Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches ?

Exercice 6. (m) Une urne contient 8 boules blanches et deux noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 7. (m) On considère un dé à n faces (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dont la probabilité de faire k est proportionnelle à k.

1) Déterminer la probabilité de faire k avec ce dé.

2) On considère l'expérience suivante : on lance le premier dé puis on lance un dé à k faces équilibré où k est le résultat du premier dé. Déterminer un univers Ω associé à cette expérience aléatoire, les évènements élémentaires et leur probabilité. Quelle est la probabilité de faire « 1 » avec le second dé ?

Exercice 8. (m) Déterminer une probabilité sur $\Omega = [\![1, n]\!]$ telle que la probabilité de l'évènement $A_k = [\![1, k]\!]$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 9. (m) On considère deux pièces P_1 et P_2 dont la probabilité de faire pile est respectivement $3/4$ et $2/3$. On choisit avec une chance sur deux une des deux pièces que l'on lance et on obtient pile. Avec quelle probabilité cette pièce est-elle P_1 ? On réalise le même procédé et on obtient cette fois n pile de suite. Avec quelle probabilité cette pièce est-elle P_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini ?

Exercice 10. (m) Des individus $A_0, \dots, A_n$ se transmettent un nombre égal à 0 ou 1. Chaque individu A_k transmet le nombre reçu à A_{k+1} avec une probabilité p et le change avec une probabilité $1-p$. Tous les individus se comportent de manière indépendante. Calculer la probabilité p_n pour que le nombre reçu par A_n soit identique à celui donné par A_0. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ? *On pourra trouver une formule de récurrence vérifiée par* (p_n).

Exercice 11. (m) On considère N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un des coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il soit dans le dernier coffre ? *On commencera par définir des évènements permettant de répondre à la question posée.*

Exercice 12. (m) Dans la savane, il y a 20% de lions, 30% d'éléphants et 50% de zèbres. La probabilité que ces animaux aient faim est respectivement de 50%, 20% et 30%. Voux croisez un animal. Quelle est la probabilité de rencontrer un animal affamé ? Vous croisez un animal affamé, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un lion ?

Exercice 13. (c) On considère un dé équilibré à 8 faces numérotées de 1 à 8. On considère les évènements A : obtenir un nombre compris entre 1 et 4, B : obtenir un nombre pair C : obtenir 1,2,5 ou 6. Les évènements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 14. (m) On a 3 pièces équilibrées, l'une ayant deux côtés face et les deux autres ayant un côté pile et un côté face. On prend une pièce au hasard (uniformément) et on effectue n lancers indépendants de cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » au premier lancer ? Quelle est la probabilité d'obtenir « face » aux n premiers lancers ? Sachant que l'on a obtenu n fois de suite « face », quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce double-face ? Combien de tirages faut-il avoir effectués pour que cette probabilité soit supérieure à 0.95 ?

Exercice 15. (m) Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à $e^{-\sum_{i=1}^n P(A_i)}$.

Exercice 16. (m) On considère un triangle A, B, C et une marche aléatoire X_n sur le triangle définie par, à l'instant $n = 0$, $X_0 = A$ puis :

- Si à l'instant n, $X_n = A$, alors X_{n+1} vaut B ou C de manière équiprobable.
- Si à l'instant n, $X_n = B$, alors X_{n+1} vaut A ou C de manière équiprobable.
- Si à l'instant n, $X_n = C$, alors X_{n+1} vaut C.

On pose alors $a_n = P(X_n = A)$, $b_n = P(X_n = B)$ et $c_n = P(X_n = C)$.

1) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2) Calculer alors $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$ et en déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

3) Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 17. (m) Soit $n \geq 2$. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Si $p|n$, on pose l'évènement $A_p = \{1 \leq k \leq n \ / \ p \text{ divise } k\}$.

1) Déterminer $P(A_p)$.

2) Soient p et q deux diviseurs de n premiers entre eux. Montrer que A_p et A_q sont indépendants. Généraliser si on dispose de $p_1, \dots, p_r$ des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux.

3) On pose $B = \{1 \leq k \leq n \ / \ k \wedge n = 1\}$. Montrer que $P(B) = \displaystyle\prod_{p \text{ diviseur premier de } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Exercice 18. (i) Peut-on piper deux dés indépendants de manière à ce que la somme des deux résultats soit uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?