Problème 1 : Algèbre

Q1) L'espace E est de dimension finie égale à $n+1$, et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un sev de E de dimension n (même si $n=0$), donc $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}) = \dim(E) - \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n+1-n = 1$.

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}) = 1.}$$

Dans la suite on considère un polynôme P_n non nul appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

Q2) Posons $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k$, si $a_{n,n}$ est nul, alors $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, or $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$, donc $P_n = 0$ car un sev de E et son orthogonal sont toujours en somme directe, mais P_n est un polynôme non nul ce qui est absurde, par conséquent $a_{n,n} \neq 0$, c'est à dire :

$$\boxed{\deg(P_n) = n.}$$

Q3) On pose $R_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{X+k+1} \in \mathbb{R}(X)$.

a) On a pour $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^x P_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^x \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} t^k\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} t^{x+k}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \int_0^1 t^{x+k}\,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left[\frac{t^{x+k+1}}{x+k+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{1}{x+k+1} \quad (\text{car } x+k+1>0) \\
&= \boxed{R_n(x)}
\end{aligned}$$

b) On met toutes les fractions rationnelles $\frac{a_{n,k}}{X+k+1}$ au même dénominateur pour k allant de 0 à n, un dénominateur commun est $\prod\limits_{k=0}^{n}(X+k+1)$, il existe donc un polynôme Q_n tel que $R_n(X) = \frac{Q_n(X)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(X+k+1)}$.
Comme R_n est une somme de fractions de degré strictement négatif, la fraction R_n est elle même de degré strictement négatif, or le dénominateur est de degré $n+1$, donc $\deg(Q_n) < n+1$, c'est à dire $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$.
On remarque que R_n est une somme d'éléments simples de première espèce dont les dénominateurs sont distincts deux à deux. Si Q_n était nul, alors la fraction R_n serait nulle, et par unicité de la décomposition en éléments simples tous les éléments simples devraient être nuls, c'est à dire que tous les coefficients $a_{n,k}$ seraient nuls pour $k \in [\![0;n]\!]$, et donc P_n serait nul, ce qui est exclu.

$$\boxed{\exists Q_n \in \mathbb{R}_n[X], \text{ non nul, tel que } R_n(X) = \frac{Q_n(X)}{(X+1)(X+2)\cdots(X+n+1)}.}$$

Remarque : on peut aussi voir que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}R_n(k) = \int_0^1 P_n(t)\times P_n(t)\,\mathrm{d}t = \|P_n\|^2 \neq 0$, ce qui entraîne que R_n ne peut pas être la fraction nulle.

c) Par définition, les pôles de la fraction R_n sont parmi les entiers $-(k+1)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.
Si $n \geqslant 1$, alors pour $k \in [\![0;n-1]\!]$ on a $R_n(k) = \int_0^1 t^k P_n(t)\,\mathrm{d}t = (X^k \mid P_n) = 0$ car $X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$. Les entiers $k \in [\![0;n-1]\!]$ sont donc racines de la fraction R_n, et donc ce sont des racines (distinctes) du polynôme Q_n, or Q_n est non nul de degré au plus n, donc Q_n est scindé de

degré n, d'où $Q_n = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ avec λ_n le coefficient dominant de Q_n (les racines sont forcément simples puisqu'il y en a n et que $\deg(Q_n)=n$).
Si $n=0$, alors Q_n est de degré 0, c'est donc une constante non nulle que l'on note λ_n.

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda_n \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } Q_n = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(X-k) \text{ (même si } n=0).}$$

d) On a donc $\frac{Q_n(X)}{(X+1)(X+2)\cdots(X+n+1)} = R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{X+k+1}$, s'agit d'une décomposition en éléments simples (la partie entière est nulle puisque $\deg(R_n)<0$). Pour obtenir le coefficient $a_{n,k}$, on multiplie de part et d'autre par $X+k+1$, on simplifie, et on évalue en $-(k+1)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \lambda_n \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(-(k+1)-i)}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)} \\ &= \lambda_n \frac{(-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}(i+k+1)}{(-1)^k k!(n-k)!} \\ &= \lambda_n \frac{(-1)^n (k+1)(k+2)\cdots(n+k)}{(-1)^k k!(n-k)!} \\ &= \boxed{\lambda_n (-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!^2(n-k)!}} \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P_n = \lambda_n \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!^2(n-k)!}X^k}$.
Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}[P_n]$, on impose $\lambda_n = 1$, on a toujours $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}[P_n]$ mais avec $P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!^2(n-k)!}X^k$.

e) La construction précédente est valable pour tout entier naturel n. On a donc des polynômes $(P_0,\ldots,P_n)$ qui vérifient en particulier $\deg(P_i)=i$ et $P_i \in \mathbb{R}_{i-1}[X]^\perp$, par conséquent la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est libre, de cardinal $n+1$ dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, si $0 \leqslant i < j \leqslant n$, alors $P_i \in \mathbb{R}_i[X] \subset \mathbb{R}_{j-1}[X]$ et $P_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]^\perp$, donc $(P_i \mid P_j)=0$.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0,\ldots,P_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q4) a) $\|P_n\|^2 = (P_n \mid P_n)$. Posons $R = P_n - a_{n,n}X^n$, alors $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_n = a_{n,n}X^n + R$, d'où $(P_n \mid P_n) = (a_{n,n}X^n + R \mid P_n) = a_{n,n}(X^n \mid P_n) + (R \mid P_n) = a_{n,n}(X^n \mid P_n)$ car l'autre produit scalaire est nul puisque $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$. De plus $(X^n \mid P_n) = \int_0^1 t^n P_n(t)\,dt = R_n(n)$, et donc :

$$\boxed{\|P_n\|^2 = a_{n,n}(X^n \mid P_n) = a_{n,n}R_n(n).}$$

b) $a_{n,n} = (-1)^{n-n}\frac{(n+n)!}{n!^2(n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!^2}$.
$R_n(n) = \frac{Q_n(n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n+1)} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n+1)} = \frac{n!^2}{(2n+1)!}$, d'où $\|P_n\|^2 = a_{n,n}R_n(n) = \frac{1}{2n+1}$. On a donc :

$$\boxed{\|P_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.}$$

Les polynômes $T_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$ sont unitaires, or la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est orthogonale, donc :

$$\boxed{\text{La famille } (T_0,\ldots,T_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X].}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} (X^n \mid T_n) &= \frac{(X^n \mid P_n)}{\|P_n\|} = \frac{\|P_n\|^2}{a_{n,n}\|P_n\|} \\ &= \frac{\|P_n\|}{a_{n,n}} = \boxed{\frac{n!^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} > 0} \end{aligned}$$

La famille $(T_0,\dots,T_n)$ est orthonormale, de plus pour $i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}\left[1,\dots,X^i\right] = \mathbb{R}_i[X] = \mathrm{Vect}\left[T_0,\dots,T_i\right]$ et $(X^i \mid T_i) > 0$, donc par unicité :

$$\boxed{\text{Si on applique la méthode de Schmidt à la famille } (1,X,\dots,X^n)\text{, on obtient la famille } (T_0,\dots,T_n).}$$

Q5) On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base $(T_0,\dots,T_n)$ à $(1,X,\dots,X^n)$.

a) i) Soit $(i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2$, $X^j \in \mathbb{R}_j[X] = \mathrm{Vect}\left[T_0,\dots,T_j\right]$ d'après le théorème de Schmidt, comme $i > j$ on a que T_i est orthogonal aux polynômes $T_0,\dots,T_j$ et donc T_i est orthogonal à X^j.

$$\boxed{\text{Si } i > j \text{ alors } (T_i \mid X^j) = 0.}$$

ii) Soit $(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$, le coefficient $b_{i,j}$ de la matrice B représente la coordonnée de X^{j-1} sur le vecteur T_{i-1}, comme la base $(T_0,\dots,T_n)$ est une b.o.n, cette coordonnée est le produit scalaire entre X^{j-1} et le polynôme T_{i-1}.

$$\boxed{b_{i,j} = (X^{j-1} \mid T_{i-1}).}$$

Or d'après la question précédente, si $j < i$ alors $j-1 < i-1$ et donc $(X^{j-1} \mid T_{i-1}) = 0$, c'est à dire $b_{i,j} = 0$ lorsque $i > j$, ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{La matrice B est triangulaire supérieure.}}$$

iii) On en déduit que le déterminant de B est le produit de ses coefficients diagonaux, c'est à dire $\det(B) = \prod_{i=1}^{n+1} b_{i,i} = \prod_{i=1}^{n+1} (X^{i-1} \mid T_{i-1}) = \prod_{k=0}^{n} (X^k \mid T_k)$. d'après la question Q4c, on a donc :

$$\boxed{\det(B) = \prod_{k=0}^{n} \frac{(k!)^2}{(2k)!\sqrt{2k+1}}.}$$

b) Soit $C = {}^{\mathbf{t}}B \times B$.

Soit $(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} [{}^{\mathbf{t}}B]_{i,k}\, b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,i} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} (X^{i-1} \mid T_{k-1})(X^{j-1} \mid T_{k-1})$, comme la base $(T_0,\dots,T_n)$ est orthonormale on reconnaît l'expression dans cette base du produit scalaire $(X^{i-1} \mid X^{j-1})$.

$$\boxed{c_{i,j} = (X^{i-1} \mid X^{j-1}).}$$

c) $(X^{i-1} \mid X^{j-1}) = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{i+j-2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\dfrac{1}{i+j-1}}$ $(i+j-1 \geqslant 1)$.

Le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ est donc le déterminant de la matrice C, c'est à dire $\det({}^{\mathbf{t}}B \times B)$, ce qui donne $\det(C) = \det({}^{\mathbf{t}}B)\det(B) = \det(B)^2$ car une matrice et sa transposée ont le même déterminant, donc le déterminant cherché est :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{(k!)^4}{[(2k)!]^2(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{(k!)^4}{[(2k)!]^2} = \frac{(2\cdot 4\cdots(2n))}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(k!)^4}{[(2k)!]^2}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(k!)^4}{[(2k)!]^2}} \text{ (déterminant de Hilbert).}$$

Problème 2 : Probabilités

Partie I : Préliminaires

Q1) $G(1) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X = k) = \boxed{1}$ puisque $(\{X = k\})_{k \in [\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'événements de Ω.

$G'(t) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X = k)\,t^{k-1}$ donc $G'(1) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X = k) = \boxed{\mathbb{E}(X)}$.

Q2) On sait que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X = k).$$

Or d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(A_1, \dots, A_p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(X = k).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{N} k \left(\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(X = k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{p} k\,\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(X = k) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(X = k) \quad \text{(par permutation de sommes double rectangulaire)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) \times \left(\sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}_{A_i}(X = k) \right) \quad \text{(car } \mathbb{P}(A_i) \text{ est indépendant de } k\text{)} \\
&= \boxed{\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{E}_{A_i}(X)}.
\end{aligned}$$

Partie II

Q3) a) Comme chaque individu a nombre d'enfants peut prendre les valeurs entre 0 et N, le nombre Z_n d'individus au bout de n étape prends les valeurs entre 0 (si la population est éteinte) et N^n (si chaque individu a donné naissance à N enfants), donc $\boxed{Z_n(\Omega) = [\![0, N^n]\!]}$.
Si on suppose que $Z_n = k$, et que l'on note $X_1, \dots, X_k$ les nombre d'enfants des k individus présents à l'étape n, alors on a immédiatement

$$\boxed{Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} X_i}$$

d'où on déduit par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}_{\{Z_n = k\}}(Z_{n+1}) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=m} = \boxed{k\,m} \quad \text{(car } m \text{ est indépendant de } i\text{).}$$

b) En utilisant Q2 pour le système complet d'événements $(\{Z_n = k\})_{k \in [\![0, N^n]\!]}$ on obtient

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \sum_{k=0}^{N^n} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\underbrace{\mathbb{E}_{Z_n = k}(Z_{n+1})}_{=km} = m \sum_{k=0}^{N^n} k\,\mathbb{P}(Z_n = k) = \boxed{m\mathbb{E}(Z_n)}.$$

La suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison m et

$$\mathbb{E}(Z_n) = m^n \times \mathbb{E}(Z_n) = \boxed{m^n}$$

puisque $Z_0 = 1$ (variable constante), car on sait de manière certaine qu'il y a un seul individu à l'étape 0, donc $\mathbb{E}(Z_0) = 1$.

c) D'après l'inégalité de Markov (la variable Z_n est bien à valeurs positives) :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{a}$$

ce qui donne pour $a = 1 \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z_n)}.$$

Comme $\mathbb{E}(Z_n) = m^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ (car $Z_n \geqslant 0$ entraîne $m \geqslant 0$, donc $m \in [0;1[$), et en utilisant qu'une probabilité est positive, on déduit du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) = 0.$$

Or $q_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\{Z_n = 0\}}) = 1 - \mathbb{P}(Z_n \geqslant 1)$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = 1}.$$

Q4) a) Si l'événement $\{Z_1 = k\}$ est réalisé, c'est que la population à l'étape 1 comporte k individus. On note alors $E_1, \dots, E_n$ le nombre d'enfants que chacun de ces individus aura sur n étapes d'évolution, et on a immédiatement que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} E_i.$$

La population sera donc éteinte à l'étape $n+1$ si, et seulement si, chaque E_i est nul (car les E_i sont positifs) :

$$\mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(Z_n = 0) = \mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(\{E_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{E_k = 0\})$$

Or les variables $E_1, \dots, E_k$ sont mutuellement indépendantes (puisque chaque individu se reproduit de manière indépendante des autres) donc

$$\mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(Z_n = 0) = \mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(\{E_1 = 0\}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(\{E_k = 0\})$$

et comme la probabilité que la descendance d'un individu soit éteinte sur n étapes vaut q_n (ceci quelque soit l'individu puisqu'ils suivent tous la même loi), on en déduit que

$$\mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(Z_n = 0) = \underbrace{q_n \times \cdots \times q_n}_{k \text{ fois}} = q_n^k.$$

b) D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(\{Z_1 = k\})_{k\in[\![0,N]\!]}$:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(Z_1 = k) \times \mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(Z_{n+1} = 0) = \boxed{\sum_{k=0}^{N} p_k q_n^k}.$$

Q5) a) G étant polynomiale elle est dérivable sur $[0,1]$ et

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{N} k p_k t^{k-1} = \underbrace{p_1}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=2}^{N} k p_k t^{k-1}}_{\geqslant 0} > 0$$

donc G est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $[0,1]$.
Montrons par récurrence simple que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} \geqslant q_n$.
L'initialisation est immédiate car $\underbrace{q_1}_{=p_0} > \underbrace{q_0}_{=0}$.
Pour l'hérédité, on suppose $q_{n+1} > q_n$. Alors (puisque q_n et q_{n+1} sont dans $[0,1]$: ce sont des probabilités)

$$\underbrace{G(q_{n+1})}_{q_{n+2}} > \underbrace{G(q_n)}_{q_{n+2}}.$$

b) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée (par 1), on en déduit qu'elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Si on note ℓ sa limite, un passage à la limite dans l'inégalité (large) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant q_n \leqslant 1$ donne $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
Enfin, un passage à la limite dans l'égalité $\forall\, n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = G(q_n)$ donne $\boxed{\ell = G(\ell)}$, en utilisant le théorème des suites extraites et la continuité de la fonction G.

c) f est 2 fois dérivable sur $[0,1]$ d'après les théorèmes généraux, et

$$\forall\, t \in [0,1],\ f''(t) = G''(t) = \sum_{k=2}^{N} k(k-1) p_k t^{k-2} = 2\underbrace{p_2}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=3}^{N} k(k-1) p_k t^{k-2}}_{\geqslant 0} > 0.$$

1^e cas : si $m = 1$:

t	0		1
$f''(t)$		$+$	
f'	$p_1 - 1$	$\nearrow$	0
$f'(t)$		$-$	0
f	p_0	$\searrow$	0

donc l'équation $f(t) = 0$ a pour unique solution sur $[0,1]$ la valeur $t = 1$.
Comme on a vu que $G(\ell) = \ell$, et donc que $f(\ell) = 0$, on en déduit que $\boxed{\ell = 1}$.
2^e cas : si $m > 1$:
Comme la fonction f' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$, le théorème de la bijection continue assure que f' induit une bijection de $[0,1]$ sur $[f'(0), f'(1)] = [p_1 - 1, m - 1]$. Or $0 \in [f'(0), f'(1)]$ (puisque $p_1 < 0$ et $m > 1$), donc il existe une unique valeur $\alpha \in [0;1]$ telle que $f'(\alpha) = 0$ (et notons qu'en fait $\alpha \in [0;1[$ puisque $f'(1) > 0$).
On en déduit :

t	0		α		1
f'	$p_1 - 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$m - 1$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	p_0	$\searrow$		$\nearrow$	0

On en déduit que $\forall\, t \in [\alpha, 1]$, $f(t) \leqslant 0$.
Or la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante, on a $q_{n+1} > q_n$, d'où on déduit $f(q_n) > 0$.
Ainsi, $q_n \in [0;\alpha[$, et un passage à la limite dans l'inégalité (large) $0 \leqslant q_n \leqslant \alpha$ prouve que $0 \leqslant \ell \leqslant \alpha$, et comme on a vu que $\alpha < 1$, on en déduit bien que $\boxed{\ell < 1}$.

Problème 3 : Analyse

Partie I : Mots bien parenthésés

Q1) On a $C_1 = 1$ car le seul mot bien parenthésé est ( ). On a $C_2 = 2$ car les deux mots bien parenthésés de longueur 4 sont (( )) et ( )( ). Enfin, on a $C_3 = 5$ avec comme mots de longueur 6 bien parenthésés :

((( ))), (( ) ( )), (( )) ( ), ( ) (( )) et ( ) ( ) ( ).

Q2) C_n est un mot de $2n$ lettres où il y a deux possibilités par lettres (une parenthèse ouvrante ou fermante). Si on ne tient pas compte de la contrainte du bon parenthésage, on a en tout 2^{2n} mots. Il y a forcément moins de mots bien parenthésés (car on rajoute une contrainte) ce qui entraine que $C_n \leqslant 2^{2n}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $|x| < \frac{1}{4}$, on a $|C_k x^k| = |C_k||x|^k \leqslant 2^{2k}|x|^k = (4|x|)^k$. Puisque $|x| < \frac{1}{4}$, la série de terme général $(4|x|)^k$ est convergente (car série géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue). Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |C_k x^k|$ converge. La série $\sum C_k x^k$ est donc absolument convergente. *On remarque que clairement, vu que* C_n *est un cardinal, il est positif donc* $|C_n| = C_n$.

Q3) Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$ tel que $f(x_0) = 0$. On a alors $2x_0 F(x_0) - 1 = 0$. On remarque alors que $x_0 \neq 0$ (sinon on obtient $0 = 1$) et on a donc $F(x_0) = \frac{1}{2x_0}$. En utilisant la relation admise par l'énoncé, on a alors :

$$F(x_0) = 1 + x_0 (F(x_0))^2 \iff \frac{1}{2x_0} = 1 + \frac{x_0}{4x_0^2}.$$

On a alors $\frac{1}{4x_0} = 1$ d'où $x_0 = \frac{1}{4}$ ce qui est absurde car $|x_0| < \frac{1}{4}$.
On en déduit que f ne s'annule pas. Puisque f est continue (comme produit de fonctions continues) et que $\left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$ est un intervalle, elle ne change pas de signe d'après le théorème de valeurs intermédiaires. On

a $f(0) = -1$ donc f est strictement négative sur

$$]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$$

.

Q4) D'après l'énoncé, on a $F(x) = 1 + xF(x)^2$ donc $F(x)$ est racine de l'équation de degré 2 $xy^2 - y + 1 = 0$. Le discriminant est $1-4x > 0$ car $x < \frac{1}{4}$. On en déduit que pour $x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ et x non nul :

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ ou } F(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

En multipliant par $2x$ (toujours pour x non nul), on a alors $2xF(x) - 1 = \pm\sqrt{1-4x}$. Or, d'après la question précédente, la fonction f est négative. On en déduit finalement que pour $x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ avec x non nul :

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x}.$$

Pour $x = 0$, on a $F(0) = C_0 = 1$.

Q5) D'après le cours, on a :

$$\sqrt{1-u} = (1-u)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-u)^k + o(u^n).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} &= \frac{1\times(-1)\times(-3)\times(-2k+3)}{2^k k!}\\
&= \frac{(-1)^{k-1}1\times3\times\ldots\times(2k-3)}{2^k k!}\\
&= \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\times2\times4\times\ldots\times(2k-2)}\\
&= \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!2^{k-1}(k-1)!}.
\end{aligned}$$

On en déduit finalement que :

$$\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}u^k + o(u^n).$$

Q6) On va utiliser l'unicité du développement limité de la fonction F en 0. On a d'après l'énoncé $F(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)$ et d'après les deux questions précédentes (puisque $4x$ tend vers 0 quand x tend vers 0) :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}(4x)^k + o(x^{n+1})}{2x}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{4^k(2k-2)!}{2^{2k}k!(k-1)!}x^{k-1} + o(x^n)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{(2j)!}{(j+1)!j!}x^j + o(x^n).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $C_j = \frac{(2j)!}{(j+1)!j!}$.

Partie II : Un calcul d'intégrale

$$m_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^k\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Q7) La fonction $x \mapsto x^{2k+1}\sqrt{4-x^2}$ est impaire donc quand on intègre sur $[-2,2]$, qui est un intervalle centré en 0, l'intégrale est nulle donc $m_{2k+1} = 0$.

Q8) Le changement de variable $x = 2\sin(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $dx = 2\cos(t)dt$. On en déduit alors que :

$$\begin{array}{rcl} m_0 & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\sin^2(t)}2\cos(t)dt \\ & = & \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt. \end{array}$$

La dernière égalité étant justifiée car $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ car le cosinus est positif sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour calculer cette dernière intégrale, il reste à linéariser le cosinus. On a pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$. On en déduit que :

$$m_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt = \frac{1}{\pi}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1.$$

Q9) On utilise le fait que $f(x) = (4-x^2)^{3/2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-2,2]$ de dérivée $f'(x) = \frac{3}{2}\times(-2x)(4-x^2)^{1/2} = -3x(4-x^2)^{1/2}$. On a alors pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} m_{2k+2} & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2k+1}x\sqrt{4-x^2}dx \\ & = & \frac{1}{2\pi}\left(\left[x^{2k+1}\times\frac{-1}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2} + \frac{2k+1}{3}\int_{-2}^{2}x^{2k}(4-x^2)^{3/2}dx\right) \\ & = & 0 + \frac{2k+1}{6\pi}\int_{-2}^{2}x^{2k}(4-x^2)(4-x^2)^{1/2}dx \\ & = & \frac{2k+1}{3}\left(4m_{2k} - m_{2k+2}\right). \end{array}$$

On en déduit alors que :

$$\left(1 + \frac{2k+1}{3}\right)m_{2k+2} = \frac{4(2k+1)}{3}m_{2k} \Longleftrightarrow m_{2k+2} = \frac{4(2k+1)}{2k+4}m_{2k} = \frac{2(2k+1)}{k+2}m_{2k}.$$

Q10) Pour les indices impaires, cela découle directement de la question 7. Pour les indices pairs, on effectue une récurrence. On a déjà $m_0 = \mathrm{C}_0 = 1$ d'après la question 8. Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que $m_{2j} = \mathrm{C}_j$ On a alors :

$$\begin{array}{rcl} m_{2j+2} & = & \frac{2(2j+1)}{j+2}m_{2j} \\ & = & \frac{2(2j+1)}{j+2}\times\frac{(2j)!}{(j+1)!j!} \\ & = & \frac{2(j+1)(2j+1)!}{(j+2)!(j+1)!} \\ & = & \frac{(2j+2)!}{(j+2)!(j+1)!} \\ & = & \mathrm{C}_{j+1}. \end{array}$$

Le résultat est donc vrai au rang $j+1$. La propriété demandée est donc vraie à tout rang.