CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1 – Électron dans un puits de potentiel

1. Système : électron assimilé à un point M de masse m_e, de charge $q=-e<0$
   Référentiel terrestre supposé galiléen, axe (Oz) dans le sens du mouvement
   Bilan des forces :
   - Force électrique conservative dérivant de l'énergie potentielle électrique $E_P=\frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2$
   - Poids négligé

   Système conservatif à un degré de liberté : z

   Énergie cinétique : $E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

   Énergie mécanique : $\boxed{E_m=E_C+E_P=\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2}$

2. Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt}=\mathscr{P}^{NC}=0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2\right)=0\Leftrightarrow\frac{d}{d\dot{z}}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)\frac{d\dot{z}}{dt}+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2\right)\frac{dz}{dt}=0$$

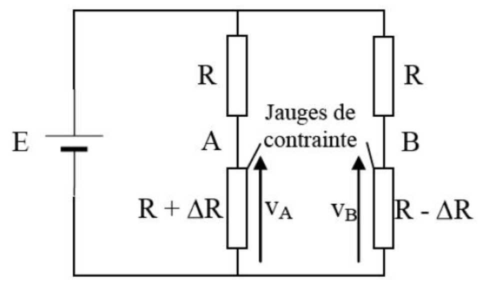
$$m\dot{z}\ddot{z}+\frac{qV_0}{d^2}z\dot{z}=0\Leftrightarrow m\ddot{z}+\frac{qV_0}{d^2}z=0\Leftrightarrow\ddot{z}+\frac{qV_0}{md^2}z=0$$

$$\ddot{z}+\omega_0^2z=0 \text{ avec } \omega_0=\sqrt{\frac{qV_0}{md^2}}$$

   C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti de fréquence propre : $\boxed{f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qV_0}{md^2}}=25\text{ MHz}}$

Exercice 2 – Capteur de déformation

1. Dans chacune des deux branches, on a deux résistances en série. On cherche la tension aux bornes de l'une d'entre elle, sachant que la tension aux bornes des deux résistances est E. On peut donc appliquer le diviseur de tension.



- Branche 1 : $V_A = \frac{R+\Delta R}{R+R+\Delta R}E$ soit $\boxed{V_A = \frac{R+\Delta R}{2R+\Delta R}E}$
- Branche 2 : $V_B = \frac{R-\Delta R}{R+R-\Delta R}E$ soit $\boxed{V_B = \frac{R-\Delta R}{2R-\Delta R}E}$

2. Expression de la tension $U_{AB} = V_A - V_B$:

$$U_{AB} = V_A - V_B = \frac{R+\Delta R}{2R+\Delta R}E - \frac{R-\Delta R}{2R-\Delta R}E$$

$$U_{AB} = \frac{(R+\Delta R)(2R-\Delta R)-(R-\Delta R)(2R+\Delta R)}{(2R+\Delta R)(2R-\Delta R)}E$$

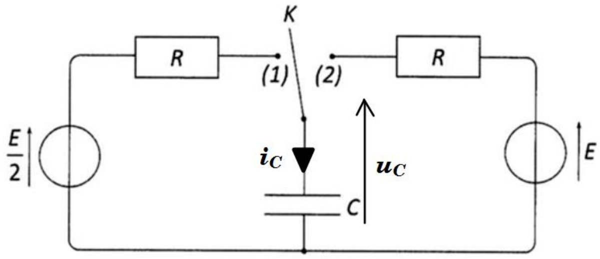
$$U_{AB} = \frac{2R^2+2\cdot R\cdot\Delta R - R\cdot\Delta R-(\Delta R)^2-\left(2R^2-2\cdot R\cdot\Delta R+R\cdot\Delta R-(\Delta R)^2\right)}{4R^2-(\Delta R)^2}E$$

$$U_{AB} = \frac{R\cdot\Delta R-(-R\cdot\Delta R)}{4R^2-(\Delta R)^2}E \text{ soit } \boxed{U_{AB} = \frac{2\cdot R\cdot\Delta R}{4R^2-(\Delta R)^2}E}$$

3. Si $R \gg \Delta R$, alors $R^2 \gg (\Delta R)^2$ et $U_{AB} \simeq \frac{2\cdot R\cdot\Delta R}{4R^2}E$ soit $\boxed{U_{AB} \simeq \frac{\Delta R}{2R}E}$

4. Pour $\frac{\Delta R}{R} = 5{,}0\ \% = 0{,}050$, on obtient : $\boxed{U_{AB} \simeq \frac{\Delta R}{2R}E = 0{,}38\ \text{V}}$

Exercice 3 – Rendement de la charge d'un condensateur



1ÈRE MÉTHODE

1. Loi des mailles et loi d'Ohm : $E = Ri_C(t)+u_C(t)$ (1)

   Pour le condensateur :

   $i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$

   Dérivation de la relation (1) : $0 = R\frac{di_C(t)}{dt}+\frac{du_C(t)}{dt} \Leftrightarrow 0 = R\frac{di_C(t)}{dt}+\frac{i_C(t)}{C}$

$$\boxed{\tau\frac{di_C(t)}{dt}+i_C(t) = 0 \text{ avec } \tau = RC}$$

2. Résolution de l'équation différentielle :

   Solution de l'essm et solution complète $i_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

   Condition initiale : C déchargé et pas de discontinuité de la tension aux bornes de C : $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$: C équivalent à un interrupteur fermé. Loi d'Ohm :

   $i_C(0^+) = \frac{E}{R}$ et $i_C(0) = K$ soit $K = \frac{E}{R}$

Solution finale : $\boxed{i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

3. Puissance électrique instantanée fournie par le générateur (en convention générateur) : $\mathscr{P}_g = E i_C(t)$

Énergie électrique fournie par le générateur :

$$\mathscr{E}_g = \int_0^\infty \mathscr{P}_g dt = \int_0^\infty E i_C(t) dt = E\int_0^\infty \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty \text{ et } \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\boxed{\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}\tau = CE^2}$$

4. En régime permanent, $i_C(\infty) = 0$ et C est équivalent à un interrupteur ouvert : $u_C(\infty) = E$: C chargé sous la tension E.

Énergie emmagasinée par le condensateur : $\boxed{\mathscr{E}_C = \frac{1}{2} CE^2}$

Rendement de la charge : $\boxed{r = \left|\frac{\mathscr{E}_C}{\mathscr{E}_g}\right| = \frac{1}{2}}$.

5. Puissance électrique instantanée reçue par la résistance (en convention récepteur) : $\mathscr{P}_J = R i_C^2(t)$

Énergie $\mathscr{E}_J$ dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\mathscr{E}_J = \int_0^\infty \mathscr{P}_J dt = \int_0^\infty R i_C^2(t) dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} CE^2}$$

Bilan d'énergie : $\mathscr{E}_g = \mathscr{E}_J + \mathscr{E}_C \Leftrightarrow \boxed{\mathscr{E}_J = \mathscr{E}_g - \mathscr{E}_C = \frac{1}{2} CE^2}$

<u>2ÈME MÉTHODE</u>

6. Loi des mailles et loi d'Ohm : $\frac{E}{2} = R i_C(t) + u_C(t) \quad (2)$

Pour le condensateur : $i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$

$$\frac{E}{2} = RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \Leftrightarrow \boxed{\tau\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = \frac{E}{2} \text{ avec } \tau = RC}$$

<u>Résolution de l'équation différentielle :</u>

Solution de l'essm : $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution particulière : $u_C(t) = cste = \frac{E}{2}$

Solution complète : $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{E}{2}$

Condition initiale : C déchargé et pas de discontinuité de la tension aux bornes de C : $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$ et $u_C(0) = K + \dfrac{E}{2}$ soit $K = -\dfrac{E}{2}$

Solution finale : $\boxed{u_C(t) = \dfrac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

7. En régime permanent, $u_C(\infty) = \dfrac{E}{2}$. Soit l'instant t_1 tel que $u_C(t_1) = 0{,}99\dfrac{E}{2}$.

$$\frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = 0{,}99\frac{E}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}99 \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}01 \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln(100) = 4{,}6\tau}$$

8. Pour $\boxed{t > t_1}$, avec les relations de la question 1, on a :

$$\boxed{\tau \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \text{ avec } \tau = RC}$$

<u>Résolution de l'équation différentielle :</u>

Solution de l'essm : $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution particulière : $u_C(t) = cste = E$

Solution complète : $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + E$

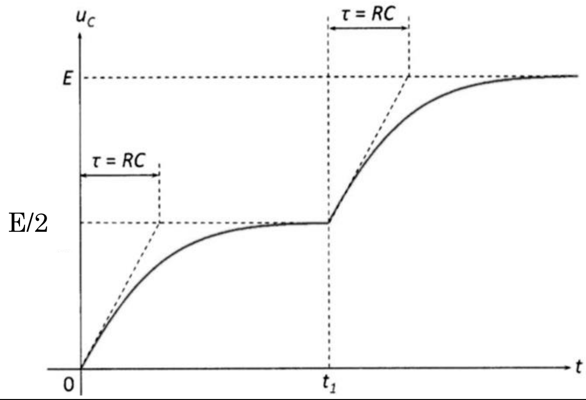
Condition initiale : <u>**Attention**</u> : à $\boxed{t = t_1}$, C est chargé sous la tension $\dfrac{E}{2}$ (**régime permanent précédent**) et pas de discontinuité de la tension aux bornes de C :

$u_C(t_1^-) = u_C(t_1^+) = \dfrac{E}{2}$ et $u_C(t_1) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}} + E$

$$K\,\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}} + E = \frac{E}{2} \Leftrightarrow K\,\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}} = -\frac{E}{2} \Leftrightarrow K = -\frac{E}{2}\mathrm{e}^{\frac{t_1}{\tau}}$$

Solution finale : $u_C(t) = -\dfrac{E}{2}\mathrm{e}^{\frac{t_1}{\tau}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + E \Leftrightarrow \boxed{u_C(t) = E - \dfrac{E}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$ pour $\boxed{t > t_1}$

9. Allure de la tension $u_C(t)$ pour $t > 0$.



10. Intensité du courant : $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$

Pour $\boxed{0<t<t_1}$: $i_C(t) = C\dfrac{E}{2}\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow \boxed{i_C(t) = \dfrac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

Pour $\boxed{t>t_1}$: $i_C(t) = C\dfrac{E}{2}\dfrac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \Leftrightarrow \boxed{i_C(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$

11. Énergie électrique fournie par le premier générateur pour $0<t<t_1$:

$$\mathscr{E}_{g1} = \int_0^{t_1}\frac{E}{2}i_C(t)dt = \frac{E}{2}\int_0^{t_1}\frac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}}dt = \frac{E^2}{4R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_1} = \frac{CE^2}{4}\left(1-e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)$$

Or $e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}01$, donc $\mathscr{E}_{g1} \simeq \dfrac{CE^2}{4}$

Énergie électrique fournie par le second générateur pour $t>t_1$:

$$\mathscr{E}_{g2} = \int_{t_1}^{\infty}Ei_C(t)dt = E\int_{t_1}^{\infty}\frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_1}{\tau}}dt = \frac{E^2}{2R}\left[-\tau e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right]_0^{\infty} \text{ soit } \mathscr{E}_{g2} = \frac{CE^2}{2}$$

Énergie électrique totale fournie pendant la charge :

$$\mathscr{E}_g = \mathscr{E}_{g1} + \mathscr{E}_{g2} = \frac{CE^2}{4} + \frac{CE^2}{2} \text{ soit } \boxed{\mathscr{E}_g = \frac{3CE^2}{4}}$$

12. Énergie emmagasinée par le condensateur inchangée : $\mathscr{E}_C = \dfrac{1}{2}CE^2$

Rendement de la charge : $\boxed{r = \left|\dfrac{\mathscr{E}_C}{\mathscr{E}_g}\right| = \dfrac{2}{3}}$.

Le rendement est <u>meilleur avec une charge en deux étapes</u> qu'avec une charge directe.

Problème 4 – Modélisation de l'œil humain

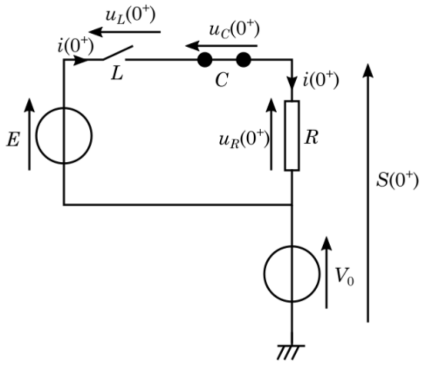
(Banque G2E 2019)

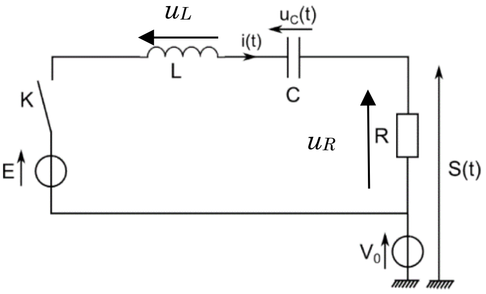
1. Valeur de repos $\boxed{S_0 = -60 \text{ mV}}$, valeur maximale $\boxed{S_{\max} = 37 \text{ mV}}$, valeur minimale $\boxed{S_{\min} = -67 \text{ mV}}$. Durée caractéristique $\boxed{\tau \simeq 1 \text{ ms}}$ (on évalue le temps de réponse à 5% à $3\tau \simeq 3 \text{ ms}$)
2. Pour $t<0$, K est ouvert : $\boxed{i(0^-) = 0}$. C est déchargé : $\boxed{u_C(0^-) = 0}$

   Loi des mailles : $\boxed{S(0^-) = V_0 + Ri(0^-) = V_0}$

   Or, pour $t<0$, $S(0^-) = S_0 = -60 \text{ mV}$ donc $\boxed{V_0 = -60 \text{ mV}}$

3. À l'instant $t=0^+$, pas de discontinuité de tension aux bornes du condensateur : $\boxed{u_C\left(0^+\right)=u_C\left(0^-\right)=0}$: C est équivalent à un <u>interrupteur fermé</u>.
   Pas de discontinuité de courant dans l'inductance : $\boxed{i\left(0^+\right)=i\left(0^-\right)=0}$: L est équivalent à un <u>interrupteur ouvert</u>.
   Loi des mailles : $\boxed{S\left(0^+\right)=V_0+Ri\left(0^+\right)=V_0}$





4. Loi des mailles : $\boxed{S(t)=V_0+Ri(t) \quad (1)}$
5. Loi des mailles :
$$E=u_L(t)+u_C(t)+u_R(t) \quad (2)$$
   Loi d'Ohm : $u_R(t)=Ri(t)$
   Pour L et C : $u_L(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$, $i(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}$
   On dérive (2) :
$$0=\frac{du_L(t)}{dt}+\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{du_R(t)}{dt} \Leftrightarrow 0=L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}i(t)+R\frac{di(t)}{dt} \quad (3)$$
   On remplace $i(t)$ avec $(1) \Leftrightarrow i(t)=\dfrac{S(t)-V_0}{R}$
$$(3) \Leftrightarrow \frac{L}{R}\frac{d^2S}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{S(t)-V_0}{R}+\frac{dS(t)}{dt}=0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2S}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dS(t)}{dt}+\frac{1}{LC}S=\frac{1}{LC}V_0}$$
6. Équation de la forme $\dfrac{d^2S}{dt^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dS}{dt}+\omega_0^2S=\omega_0^2V_0$ avec $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ soit $\boxed{\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{R}{L}$ soit $\boxed{Q=\dfrac{L\omega_0}{R}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$
7. Signal de la FIGURE 1 : régime transitoire <u>pseudo-périodique</u> ou <u>oscillant amorti</u>.

   <u>*Solution de l'essm*</u> : Équation caractéristique : $r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$

   Discriminant réduit : $\Delta'=\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2}-1\right)$. Il faut $\Delta'<0$ soit $\boxed{Q>\dfrac{1}{2}}$
$$S(t)=\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$
   avec $\boxed{\omega=\sqrt{|\Delta'|}=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ la <u>pseudo-pulsation</u>

   <u>*Solution particulière*</u> : $S_P=V_0$

Solution complète :

$$\boxed{S(t)=V_0+\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}=V_0+\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

avec $\boxed{\tau=\dfrac{2Q}{\omega_0}}$: la durée caractéristique

8. *Condition initiale* : $S(0^+)=V_0$ et $S(0)=V_0+A$ donc $\boxed{A=0}$
9. Loi des mailles à l'instant $t=0^+$ (cf. schéma à la question 3)

$$E=u_L(0^+)+u_C(0^+)+u_R(0^+) \text{ et } u_C(0^+)=0,\ u_R(0^+)=Ri(0^+)=0$$

$$E=L\left(\frac{di}{dt}\right)_{0^+}=\frac{L}{R}\left(\frac{dS}{dt}\right)_{0^+}\Leftrightarrow\boxed{\left(\frac{dS}{dt}\right)_{0^+}=\frac{RE}{L}}$$

Condition initiale : $\left(\dfrac{dS}{dt}\right)_{0^+}=B\omega$ d'où $B=\dfrac{RE}{L\omega}$

Or, $\tau=\dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{R}{L}$ d'où $\boxed{\tau=2\dfrac{L}{R}}$ et $\boxed{B=\dfrac{2E}{\tau\omega}}$

10. Points communs : la valeur au repos S_0, la valeur maximale S_{max}, la valeur minimale S_{min} et la durée caractéristique τ.
Différences notables : Pas de temps de latence ou de retard pour le circuit électrique, présence d'un second maximum pour le circuit électrique (non présent sur le potentiel d'action).
11. Pseudo-période : $\boxed{T_P=3{,}5-0{,}5=3{,}0\text{ s}}$

$S(t_1)=40\text{ mV}$, $S(t_1+T_P)=-59\text{ mV}$, $S(\infty)=-60\text{ mV}$ donc $\boxed{\delta=4{,}6}$