7. Calcul d'intégrales et de primitives, corrigé

Exercice 1.

1) $\displaystyle\int_0^3 te^{t^2}dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2}\right]_0^3 = \frac{e^9-1}{2}$.

2) $\displaystyle\int_0^1 t^3(t^4+1)^3dt = \left[\frac{1}{16}(t^4+1)^4\right]_0^1 = \frac{(2)^4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

3) L'intégrale est bien définie car la fonction que l'on intègre est continue sur l'intervalle proposé. On a une expression de la forme $u' \times u$. On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \left[\frac{\arctan^2(x)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

4) L'intégrale proposée est bien définie car la fonction étudiée est continue. On a alors :

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \ln(2).$$

5) L'intégrale est bien définie car la fonction que l'on intègre est continue sur l'intervalle proposé. On a une expression de la forme u'/u. On en déduit :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}+1.$$

6) On a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)}dt = [\ln(|\sin(t)|)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que l'intégrale recherchée vaut

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 2.

1) $x \mapsto x^2\cos(3x)$ est continue sur $[0,\pi]$ donc l'intégrale existe. On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{\sin(3x}{3}$ qui sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Alors, par intégration par parties :

$$\int_0^\pi x^2\cos(3x) = \left[\frac{x^2\sin(3x)}{3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x\sin(3x)}{3}dx = 0 - \frac{2}{3}\int_0^\pi x\sin(3x)dx.$$

On refait alors une intégration par parties en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{-\cos(3x)}{3}$ (qui sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$). On a alors :

$$\int_0^\pi x^2\cos(3x) = -\frac{2}{3}\left(\left[\frac{-x\cos(3x)}{3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos(3x)}{3}dx\right).$$

On a donc $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(3x) = \frac{2\pi\cos(3\pi)}{9} - \frac{2}{9}\int_0^\pi \cos(3x)dx$. Ceci entraine que :

$$\int_0^\pi x^2\cos(3x) = -\frac{2\pi}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^\pi = -\frac{2\pi}{9}.$$

2) On pose $u(x) = x$ et $v(x) = -\dfrac{2(1-x)^{3/2}}{3}$ qui sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = (1-x)^{1/2}$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx &= \left[-\frac{2x(1-x)^{3/2}}{3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2(1-x)^{3/2}}{3}dx \\
&= 0 + \left[-\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

3) Notons $I_3(x) = \displaystyle\int_0^x e^t \sin(2t)dt$. On va alors faire deux intégrations par parties en intégrant la partie en exponentielle et en dérivant le sinus (tout est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a alors :

$$\begin{aligned}
I_3(x) &= \left[e^t \sin(2t)\right]_0^x - 2\int_0^x e^t \cos(2t)dt \\
&= e^x \sin(2x) - 2\left[e^t \cos(2t)\right]_0^x - 4\int_0^x e^t \sin(2t)dt \\
&= e^x \sin(2x) + 2 - 2e^x \cos(2x) - 4I_3(x).
\end{aligned}$$

En passant I de l'autre côté, on en déduit que $I_3(x) = \dfrac{e^x \sin(2x) + 2 - 2e^x \cos(2x)}{5}$.

4) On pose $u(x) = \dfrac{x^5}{5}$ et $v(x) = \ln(x)$ qui sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On a alors $u'(x) = x^4$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Par IPP, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^4 \ln(x)dx &= \left[\frac{x^5}{5}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{5}dx \\
&= \frac{2^5 \ln(2)}{5} - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^2 \\
&= \frac{2^5 \ln(2)}{5}\frac{1-2^5}{25}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

1) On va cette fois poser $x = e^u$. La fonction exp est $\mathcal{C}^1$. On a alors $dx = e^u du$. On en déduit que :

$$\int_1^2 \cos(\ln(x))dx = \int_0^{\ln(2)} \cos(u)e^u du.$$

On peut alors calculer cette intégrale à l'aide de deux intégrations par parties. Posons I cette intégrale. On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \left[e^t \cos(t)\right]_0^{\ln(2)} + \int_0^{\ln(2)} e^t \sin(t)dt \\
&= 2\cos(\ln(2)) - 1 + \left[e^t \sin(t)\right]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} e^t \cos(t)dt \\
&= 2\cos(\ln(2)) - 1 + 2\sin(\ln(2)) - I.
\end{aligned}$$

On a alors $I = \cos(\ln(2)) + \sin(\ln(2)) - \dfrac{1}{2}$.

2) Posons $x = u^2$. La fonction carré est $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On a $dx = 2udu$. Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}dx &= \int_1^2 2ue^{-u}du \\
&= 2\int_1^2 ue^{-u}du \\
&= 2\left[-ue^{-u}\right]_1^2 + 2\int_1^2 e^{-u}du \\
&= 2\left[-ue^{-u}\right]_1^2 + 2\left[-e^{-u}\right]_1^2 \\
&= -4e^{-2} + 2e^{-1} - 2e^{-2} + 2e^{-1} \\
&= -6e^{-2} + 4e^{-1}.
\end{aligned}$$

3) On pose $u = \ln(t)$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$. On a alors $du = \frac{1}{t}dt$. On en déduit que :

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{(1+u)^3}du = \left[-\frac{1}{2(1+u)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

4) On pose $u = e^x$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ln(2)]$. On a alors $du = e^x dx$. On en déduit que :

$$I_4 = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x+1}e^x dx = \int_1^2 \sqrt{u+1}du.$$

On a donc $I_4 = \left[\frac{2}{3}(u+1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{3^{3/2}-2^{3/2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5. On pose $t = \frac{\pi}{4} - x$ donc $dt = -dx$. On a alors :

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right))(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right))dx.$$

Or, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)) = \frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}$ (en utilisant $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$). On a donc :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan(x)}\right)dx = -\frac{\pi}{4}\ln(2) - I.$$

On en déduit finalement que $I = \frac{\pi\ln(2)}{8}$.

Exercice 6. La méthode est quatre fois la même. Il faut linéariser l'expression à partir de la formule d'Euler (ou de la définition pour les cosinus et sinus hyperboliques).

1) On a :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}.
\end{aligned}$$

On a donc $\int \cos^3(x)dx = \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin(x)}{4}$ (avec l'égalité à une constante près).

2) On a :

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{\cos(4x)-4\cos(2x)+6}{8}.
\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\int \sin^4(x)dx = \frac{\sin(4x)}{32} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{4}$.

3) On a :

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1-\cos(4x)}{8}.
\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}$.

*

Exercice 7. Effectuons le changement de variable $x = \pi - u$. C'est un changement de variable affine, donc $\mathcal{C}^1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_\pi^0 (\pi-u)\cos^2(\pi-u)(-du) \\
&= \int_0^\pi (\pi-u)\cos^2(u)du \\
&= \pi\int_0^\pi \cos^2(u)du - I.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(u)du$. On peut alors calculer cette expression en linéarisant le cosinus. On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(2u)+1}{2}du \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin(2u)}{4}+\frac{u}{2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
I+J &= \int_0^\pi x(\cos^2(x)+\sin^2(x))dx \\
&= \int_0^\pi xdx \\
&= \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(x)dx = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. Puisque f est continue, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème fondamentale de l'intégration). On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(u)du = F(x+T) - F(x).$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g l'est aussi par somme/composée de fonction dérivable et on a pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 \times F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x)$.

On a donc f T-périodique si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 0$, soit si et seulement si g est constante sur $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}$ est un intervalle).

Exercice 13. Tous les discriminants du dénominateur sont strictement négatifs donc les primitives se calculent toutes sur $\mathbb{R}$.

1) On a :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{1}{2t^2+t+1}dt &= \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t^2+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}dt \\
&= \frac{8}{7}\int^x \frac{1}{\frac{16}{7}\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{8}{7}\int^x \frac{1}{\left(\frac{4t}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right).
\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t+1}{t^2-6t+10}dt &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-6+8}{t^2-6t+10}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-6x+10|) + 4\int^x \frac{1}{(t-3)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-6x+10|) + 4\arctan(x-3).
\end{aligned}$$

3) Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t+1}{t^2-3t+\frac{9}{2}}dt &= \frac{1}{2}\frac{2t-3+5}{t^2-3t+\frac{9}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-3x+\frac{9}{2}|)+\frac{5}{2}\int^x \frac{1}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-3x+\frac{9}{2}|)+\frac{10}{9}\int^x \frac{1}{\left(\frac{2t}{3}-1\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-3x+\frac{9}{2}|)+\frac{10}{9}\times\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{2x}{3}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-3x+\frac{9}{2}|)+\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{2x}{3}-1\right).
\end{aligned}$$

Exercice 14. (m) **Intégrales de Wallis.** On pose pour $n \geq 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)d\theta$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \sin^n(x)$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Leurs intégrales sur ce segment existent donc.

Pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(\theta) \geq 0$. On en déduit que $\sin^n(\theta) \geq 0$, ce qui donne en passant à l'intégrale (puisque les bornes sont dans le bon sens) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que $I_n \geq 0$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc positive.

On a de plus pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta) \leq 1$. On en déduit, toujours puisque $\sin^n(\theta) \geq 0$, que :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin^{n+1}(\theta) \leq \sin^n(\theta).$$

On en déduit, en passant à l'intégrale (puisque les bornes sont dans le bon sens), que $I_{n+1} \leq I_n$. Puisque n est pris quelconque dans $\mathbb{N}$, on en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Ceci montre sans aucun calcul que puisque cette suite est décroissante minorée, elle converge (même si on ne peut pour l'instant rien dire sur la limite).

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On va écrire $\sin^{n+2}(\theta) = \sin^{n+1}(\theta) \times \sin(\theta)$ et dériver le terme en $\sin^{n+1}(\theta)$ et intégrer celui en $\sin(\theta)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[\sin^{n+1}(\theta)\times(-\cos(\theta))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\cos(\theta)\sin^n(\theta)\times(-\cos(\theta))d\theta \\
&= 0+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\sin^n(\theta)d\theta \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(\theta))\sin^n(\theta)d\theta \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, c'est à dire que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

3) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(k)$: « $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ ».

- Au rang 0, la propriété est vraie car $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a alors, en utilisant la question 2 en $n = 2k$ que :

$$\begin{aligned}
I_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k} \\
&= \frac{2k+1}{2(k+1)} \times \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(2k+2)(2k+1)}{2^2(k+1)^2} \times \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

- La propriété étant héréditaire et initialisée, on en déduit l'égalité voulue pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Avant de poser directement la formule, expliquons comment nous l'avons trouvé (pas la peine d'expliquer ceci sur la copie). Tout vient de la formule de récurrence de la question 2. Appliquée en $n = 2k - 1$, on a :

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1}.$$

On voit alors que de proche en proche, on va exprimer I_{2k+1} en fonction de $I_1 = 1$ multiplié par le produit des nombres pairs divisé par le produit des nombres impairs. On peut donc poser, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: « $I_{2k+1} = \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j)}{\prod_{j=1}^{k}(2j+1)}$ ».

- La propriété est vraie au rang 0 (on rappelle qu'un produit vide est par convention égal à 1 et que $I_1 = 1$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a alors (on utilise toujours la question 2 et l'hypothèse de récurrence) :

$$\begin{aligned}
I_{2k+3} &= \frac{2k+2}{2k+3} I_{2k+1} \\
&= \frac{2k+2}{2k+3} \times \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j)}{\prod_{j=1}^{k}(2j+1)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{k+1}(2j)}{\prod_{j=1}^{k+1}(2j+1)}.
\end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

- On a donc montré par récurrence la propriété voulue.

On va à présent faire apparaitre des factorielles dans la formule. Pour cela, l'idée est de multiplier au numérateur et au dénominateur par le produit des termes pairs. En effet, on fera apparaitre alors le produit des termes pairs multiplié par le produit des termes impairs, ce qui fera apparaitre $(2k+1)!$. Enfin, au numérateur, il nous restera à factoriser tous les 2 pour faire apparaitre une factorielle. Calculons, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
I_{2k+1} &= \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j)}{\prod_{j=1}^{k}(2j+1)} \times \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j)}{\prod_{j=1}^{k}(2j)}\\
&= \frac{\left(\prod_{j=1}^{k}(2j)\right)^2}{(2k+1)!}\\
&= \frac{\left(2^k\prod_{j=1}^{k}j\right)^2}{(2k+1)!}\\
&= \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ (la formule étant aussi vraie pour $k = 0$), que $I_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

4)

a) On procède par récurrence (encore) en utilisant la question 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ ». *On a testé au brouillon la valeur pour $n = 0$ afin de trouver la valeur constante à poser.*

- La propriété est vraie au rang 0 (d'après la question 1.b).

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$
\begin{aligned}
(n+2)I_{n+1}I_{n+2} &= (n+2)I_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}I_n && \text{(d'après la question 2)}\\
&= (n+1)I_nI_{n+1} && \text{(d'après } \mathcal{P}(n)\text{)}\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

  On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

  b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante (d'après la question 1.c), on a alors :

$$(nI_n) \cdot I_{n+1} \leq nI_n^2 \leq (nI_n) \cdot I_{n-1}.$$

On a alors, en utilisant la question précédente (on multiplie à gauche par $1 = \dfrac{n+1}{n+1} > 0$) que :

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit alors, en utilisant le théorème des gendarmes (on a $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ quand n tend vers $+\infty$) que la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 15.

1) On pose le changement de variable $t = 1 - x$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On a $dt = -dx$. On a donc :

$$I_{p,q} = \int_1^0 (1-t)^p t^q(-dt) = \int_0^1 t^q(1-t)^p dt = I_{q,p}.$$

2) On procède par IPP. On va dériver le x^p et primitiver le $(1-x)^q$ en $-\dfrac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ (tout est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$). On a alors :

$$
\begin{aligned}
I_{p,q} &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\
&= \left[-x^p \frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + \frac{p}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}dx \\
&= 0 + \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.
\end{aligned}
$$

A noter que le crochet fait bien 0 car $p \geq 1$ et $q+1 \geq 1$.

3) En utilisant p fois la relation précédente, on obtient :

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times \ldots \times \frac{1}{q+p} I_{0,q+p}.$$

Or, on a $I_{0,q+p} = I_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 x^{p+q}dx = \frac{1}{p+q+1}$. On a donc :

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(q+p)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(q+p+1)!}.$$