25. Matrices 2

Exercice 1. (c)/ (i) Soient f, g, h les trois applications de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ suivantes :

$$f(P) = P(X+1),\ g(P) = P(X-1) \text{ et } h(P) = P(1-X).$$

Écrire A, B, C les matrices de ces applications dans la base canonique. *Quand la notion aura été vue : ces matrices sont-elles semblables ?*

Exercice 2. (c) Déterminer l'espace vectoriel engendré dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par les matrices de rang 1.

Exercice 3. (m) On note T_n l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $a_{i,j} = a_{i+1,j+1}$ pour $i, j \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que T_n est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 4. (m) Soit E de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = e_i + \sum_{k=1}^{n} e_k$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et calculer les puissances n-ièmes de cette matrice.

Exercice 5. (i) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer qu'il existe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (m)/ (i) Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$.

Montrer que φ est un isomorphisme et en déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 7. (m) Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. (m) Discuter suivant $a \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 9. (m) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = 1$, $a_{i,n} = 1$, $a_{n,j} = 1$ et 0 sinon. Écrire graphiquement la matrice A et vérifier que pour $n = 2$, A n'est pas inversible. Montrer que pour $n \geq 3$, A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 10. (m) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ non nulles tels que $A = CL$.

Exercice 11. (m) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On souhaite montrer que :

$$\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A) \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})\ /\ B = PAQ.$$

Montrer le sens indirect, puis pour le sens direct, montrer que le résultat est vrai pour $A = J_r$ et $B = J_k$ avec $k \leq r$ et en déduire l'implication dans le cas général.

Exercice 12. (c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA sont semblables. A-t-on encore AB et BA semblables dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 13. (m) Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On pose $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 - e_2$.

1) Vérifier que $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$.

2) Déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2}$ et son inverse.

3) Exprimer A et fonction de D et P et en déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. (m) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

1) Montrer qu'il existe e_1, e_2, e_3 non nuls tels que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = -e_3$.

2) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. (m) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer A^2 et montrer que $f = \lambda p$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où p est un projecteur.

2) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et justifier sans calcul qu'ils sont supplémentaires. Donner une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et la matrice de f dans cette base.

Exercice 16. (m) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $B = A + xI_3$.

1) Déterminer le rang de B en fonction de x. Pour les valeurs de x pour lesquelles B n'est pas inversible, déterminer une base de $\ker(B)$.

2) Montrer que pour $X \in \mathbb{R}^3$, $X \in \ker(B) \Leftrightarrow AX = -xX$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ telle que $Af_i = -f_i$ pour $i \in [\![1, 2]\!]$ et $Af_3 = 2f_3$ puis que A est semblable à une matrice diagonale que l'on explicitera.

Exercice 17. (∗) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_A : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \mathrm{Tr}(AX) \end{array} \right.$.

1) Montrer que φ_A est une forme linéaire et que $\varphi_A = 0 \Leftrightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

2) En déduire que l'application $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & L(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \varphi_A \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

3) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle, il existe $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi_A(X) = 0$. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.