DM 19, corrigÃ©

PROBLÈME
Étude d'une marche aléatoire

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements. On en déduit que :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n).$$

On a alors à chaque fois plusieurs possibilités. Soit $P(A_n) = 0$ et alors $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0$ (car $A_{n+1} \cap A_n \subset A_n$). Soit $P(A_n) > 0$ et on peut utiliser les probabilités conditionnelles pour affirmer que $P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) = a_n \times 0 = 0$. Dans tous les cas, on a $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0$. De la même manière, on a si $P(B_n) = 0$ que $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0$ et si $P(B_n) > 0$ que $P(A_{n+1} \cap B_n) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = b_n \times \dfrac{2}{3}$. On remarque alors que l'égalité $P(A_{n+1} \cap B_n) = \dfrac{2b_n}{3}$ est valable que b_n soit nulle ou pas. On a alors de la même façon que $P(A_{n+1} \cap C_n) = \dfrac{c_n}{2}$ (car en partant de C, on a une chance sur deux d'aller en A). On en déduit finalement que :

$$a_{n+1} = \frac{2b_n}{3} + \frac{c_n}{2}.$$

De la même façon (en utilisant le même système complet d'évènements et les probabilités totales quand les probabilités a_n, b_n et c_n sont strictement positives), on trouve (en utilisant les indications de l'énoncé sur la probabilité d'aller en A, B ou C quand on part de A, B ou C) :

$$b_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{c_n}{2} \text{ et } c_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{3}.$$

2) On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{2a_n}{3} + 0 \times b_n + \frac{c_n}{2} \\ \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{3} + 0 \times c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a bien $X_{n+1} = AX_n$.

On en déduit alors par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. La propriété est vraie au rang 0 (en posant $A^0 = I_3$) et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$ donc elle est vraie au rang $n+1$ ce qui achève la récurrence.

3) On utilise la formule de Sarrus et on trouve que $P(x) = (-x)^3 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} - \left(-\dfrac{x}{6} - \dfrac{4x}{9} - \dfrac{x}{6} \right) = -x^3 + \dfrac{7x}{9} + \dfrac{2}{9}$.

4) On a 1 comme racine évidente. On en déduit que $P(x) = -(x-1)\left(x^2+x+\frac{2}{9}\right)$. On a alors un discriminant égal à $\Delta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$. On a donc deux autres racines qui sont :

$$x_+ = \frac{-1+\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_- = \frac{-1-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{2}{3}.$$

On a donc $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ et $\lambda_3 = 1$.

5)

a) Pour e_1, on résout $A\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$. On a alors le système :

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{2a}{3}+\frac{b}{2} = -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}+\frac{b}{2} = -\frac{2a}{3} \\ \frac{1}{3}+\frac{a}{3} = -\frac{2b}{3} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4a+3b = -4 \\ 4+3b = -4a \\ 1+a = -2b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4a+3b = -4 \\ a+2b = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -5b = 0 \\ a+2b = -1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On trouve donc $b = 0$ et $a = -1$ d'où $e_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On procède de même pour e_2 :

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{2a}{3}+\frac{b}{2} = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}+\frac{b}{2} = -\frac{a}{3} \\ \frac{1}{3}+\frac{a}{3} = -\frac{b}{3} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4a+3b = -2 \\ 4+3b = -2a \\ 1+a = -b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4a+3b = -2 \\ 2a+3b = -4 \\ a+b = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2a = 2 \\ 2a+3b = -4 \\ a+b = -1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On a donc $a = 1$ et $b = -2$ d'où $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Enfin, on résout $A\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{3} + \dfrac{b}{2} = 1 \\ \dfrac{2}{3} + \dfrac{b}{2} = a \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{a}{3} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3b = 6 \\ 4 + 3b = 6a \\ 1 + a = 3b \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières lignes, on trouve $4 - 4a = 6a - 6$, soit $a = 1$ et $b = \dfrac{2}{3}$. On a donc $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b) Pour montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre (car on a 3 vecteurs en dimension 3). Supposons donc que l'on ait $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = 0$. On a alors le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + \dfrac{2x_3}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2).$$

On en déduit directement que $x_2 = 0$ puis $x_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque l'on a pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, on en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) D'après la formule de changement de base, si on note $\mathcal{B}$ la base canonique, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

où $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2/3 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, qui est bien inversible car (e_1, e_2, e_3) forme une base de R^3 et on a $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. En posant $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et D la matrice diagonale de la question précédente, on a le résultat voulu.

6) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ (les produits $P^{-1} \times P$ valent I_3 et se simplifient donc quand on élève à la puissance). On en déduit, d'après la question 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0.$$

Or, on a $D^n = \begin{pmatrix} (-2/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (car c'est une matrice diagonale), ce qui entraine que D^n converge coefficient par coefficient vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quand on effectue des produits de matrice, on ne fait que des produits et des sommes, ce qui entraine qui sont des opérations qui préservent les limites (on peut toujours faire des sommes et des limites de suites convergentes). On peut donc passer à la limite avant de faire le produit de matrice (ce qui simplifiera les calculs). On en déduit finalement que :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}X_0.$$

7) Pour terminer le calcul, il ne reste plus qu'à déterminer P^{-1}. On résout alors le système $PX = Y$:

$$PX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ -2x_2 + \dfrac{2x_3}{3} = y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = y_1 - y_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ -2x_2 + \dfrac{2x_3}{3} = y_3 \end{array} \right. \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1/2 - y_2/2 \\ x_2 + x_3 = y_1/2 + y_2/2 \\ -6x_2 + 2x_3 = 3y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1/2 - y_2/2 \\ x_2 + x_3 = y_1/2 + y_2/2 \\ 8x_3 = 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \end{array} \right. \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1/2 - y_2/2 \\ x_2 = y_1/8 + y_2/8 - 3y_3/8 \\ x_3 = 3y_1/8 + 3y_2/8 + 3y_3/8 \end{array} \right.$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} X_0 \end{aligned}$$

On a donc finalement $\lim_{n \to +\infty} a_n = 3/8(a_0 + b_0 + c_0) = 3/8$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = 3/8(a_0 + b_0 + c_0) = 3/8$ et $\lim_{n \to +\infty} c_n = 1/4(a_0 + b_0 + c_0) = 1/4$. En effet, on a $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ (au départ, la marche est forcément à un des points et ne peut être qu'à un seul des points). La probabilité limite ne dépend donc pas de la position initiale.