.

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans ce supplément, nous proposons d'exposer la méthode dite *d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* en parallèle d'un exemple numérique traitée.

Il est possible de parler d'algorithme : la méthode suit une procédure qui se prête assez bien à la programmation sur un ordinateur. De plus, sur le plan théorique, elle permet, une fois sa correction justifiée, d'aboutir à l'existence de bases orthonormée dans les espaces euclidiens de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

La méthode mise en pratique

On se place dans E euclidien de dimension $n \geq 2$, le résultat pour $n = 1$ étant évident. On pose alors $(b_1 \dots b_n)$ une base de E quelconque.
On construit explicitement les deux premiers vecteurs u_1 et u_2 d'une base orthonormée à partir de $(b_1 \dots b_n)$.

La description du cas général des premières étapes se fera parallèlement avec $b_1 = (1; 1; 0)$, $b_2 = (1; 0; 2)$ et $b_3 = (0; -1; 1)$ pour exemple.

Construction de u_1 :

On décrit le cas général :
- On définit $v_1 = b_1$
- On calcule $\alpha_1 = ||v_1||$
- On pose alors $u_1 = \dfrac{1}{||v_1||} v_1$ qui est donc unitaire.

On décrit sur l'exemple :
- On définit $v_1 = (1; 1; 0)$
- On calcule $\alpha_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- On pose alors $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1; 1; 0)$

Construction de u_2 :

On décrit le cas général :
- On définit $v_2 = b_2 - \langle b_2 | u_1 \rangle u_1$.
  Ceci assurera que $v_2 \perp u_1$; en effet :
  $$\langle v_2 | u_1 \rangle = \langle b_2 | u_1 \rangle - \langle b_2 | u_1 \rangle \langle u_1 | u_1 \rangle = \langle b_2 | u_1 \rangle - \langle b_2 | u_1 \rangle = 0$$
- On calcule $\alpha_2 = ||v_2||$
- On pose alors $u_2 = \dfrac{1}{||v_2||} v_2$

Si l'espace E est de dimension $n = 2$, alors la procédure se termine.

On décrit sur l'exemple :
- On définit $v_2 = (1; 0; 2) - \langle b_2 | u_1 \rangle u_1$;
  soit $v_2 = (1; 0; 2) - \frac{1}{2}(1; 1; 0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; 2\right)$
- On calcule $\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
- On pose alors $u_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; 2\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{6}(1; -1; 4)$.

  On peut vérifier que $\langle v_2 | v_1 \rangle = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ et donc, par bilinéarité, $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$.

Construction de u_3 :

On considère donc ici que $n \geq 3$. On décrit maintenant la construction du vecteur u_3 :

On décrit le cas général :
- On définit $v_3 = b_3 - (\langle b_3 | u_1 \rangle u_1 + \langle b_3 | u_2 \rangle u_2)$.
  Ceci assurera que $v_3 \perp u_1$ et $v_3 \perp u_2$; on vérifiera (exercice) en calculant $\langle v_3 | u_1 \rangle$ et $\langle v_3 | u_2 \rangle$:
- On calcule $\alpha_3 = ||v_3||$
- On pose alors $u_3 = \dfrac{1}{||v_3||} v_3$

Si l'espace E est de dimension $n = 3$, alors la procédure se termine.

On décrit sur l'exemple :
- On définit v_3 par :
  $(0; -1; 1) - \left(\frac{1}{2}\langle (0; -1; 1) | (1; 1; 0) \rangle (1; 1; 0) + \frac{1}{18}\langle (0; -1; 1) | (1; -1; 4\right.$
  ce qui aboutit à $v_3 = \frac{1}{9}(2; -2; -1)$.
- On calcule $\alpha_3 = \dfrac{1}{9}\sqrt{4+4+1} = \frac{1}{3}$
- On pose alors $u_3 = \dfrac{3}{9} \cdot (2; -2; -1) = \left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{-2}{3}\ ;\ \frac{-1}{3}\right)$.
  On peut vérifier que $\langle v_3 | v_1 \rangle = 0$ et $\langle v_3 | v_2 \rangle = 0$

Construction itérative de u_{k+1}

On suppose ici que $k < n$ et que u_1, u_2 , . . . et u_k ont été construits et forment déjà une famille orthonormée. Les sections précédentes assurent que le travail a déjà bien été fait pour $k \leq 3$ si $n \geq 4$. Comme, pour $n = 2$ ou $n = 3$, nous avons déjà prouvé que la procédure produit une base orthonormée de E, nous considérons alors avoir à prouver le résultat pour $n \geq 4$.
Nous définissons donc :

$$\boxed{v_{k+1} = b_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1}|u_i\rangle u_i}$$

Nous prouvons que $v_{k+1} \in vect(u_1 \dots u_k)^\perp$:
Pour chaque $j \leq k$, nous avons que :

$$\begin{aligned}
\langle v_{k+1}|u_j\rangle &= \langle b_{k+1}|u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1}|u_i\rangle\langle u_i|u_j\rangle \\
&= \langle b_{k+1}|u_j\rangle - \sum_{i\neq j} \langle b_{k+1}|u_i\rangle\langle u_i|u_j\rangle - \langle b_{k+1}|u_j\rangle\langle u_j|u_j\rangle \\
&= \langle b_{k+1}|u_j\rangle - \langle b_{k+1}|u_j\rangle = 0
\end{aligned}$$

la famille $(u_1 \dots u_k)$ étant supposée orthonormée.

Par ailleurs, $v_{k+1} \neq 0_E$: en effet, $k < n$ et donc $b_{k+1} \notin vect(u_1 \dots u_k) = vect(b_1 \dots b_k)$ comme chaque u_i s'écrit comme combinaison linéaire des b_j (où $j \leq i \leq k < n$).
Nous pouvons donc calculer $||v_{k+1}|| \neq 0$ et poser, pour finir : $u_{k+1} = \dfrac{1}{||v_{k+1}||} \cdot v_{k+1}$. Ce nouveau vecteur est colinéaire à v_{k+1} donc orthogonal à chaque u_i (pour $i \leq k$) et ainsi la famille augmentée $(u_1 \dots u_k \ u_{k+1})$ est orthonormée de cardinal $k + 1$.

La répétition du procéssus conduit à produire une famille $(u_1 \dots u_n)$ libre maximale de E orthonormée donc une base de E.

La méthode en théorie :

Grâce à cette méthode, on obtient le résultat général et théorique suivant :

Théorème - existence de base orthonormée :
Dans tout espace E euclidien, il existe une base orthonormée.
De plus, à toute base $(e_1 \dots e_n)$ de E de dimension $n \geq 2$, on peut associer la base $(u_1 \dots u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 & u_1 = \frac{1}{||v_1||} \cdot v_1 \\ \forall k \leq n \quad v_{k+1} = b_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1}|u_i\rangle u_i & u_{k+1} = \frac{1}{||v_{k+1}||} \cdot v_{k+1} \end{cases}$$

La démonstration étant faite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en considérant, pour l'hérédité, le sous espace vectoriel $vect(e_1 \dots e_n)$ de dimension n de l'epace $E = vect(e_1 \dots e_n \ \ e_{n+1})$ de dimension $n + 1$ pour lequel l'étude de la construction itérative de la méthode vue ci-dessus établit le résultat attendu.

Propriété - Supplémentaire orthogonal : Dans tout espace E euclidien, tout sous-espace vectoriel F vérifie $F \oplus F^\perp = E$.
En particulier, $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$

Poser H un supplémentaire quelconque de F, définir une base $(f_1 \dots f_k)$ de F puis une base $(h_{k+1} \dots h_n)$ de H et considérer sa concaténation $\mathcal{B}$ que l'on orthonormalisera : au cours de l'éxécution de la méthode de Gram-Schmidt, on aura $h_j \notin F = vect(f_1 \dots f_k)$ par l'étude qui précède.
En notant $(u_1 \dots u_k \ u_{k+1} \ \dots \ u_n)$ la nouvelle base produite, on trouvera que chaque $vect(u_1 \dots u_k) = F$ et que chaque $u_j \in vect(u_1 \dots u_k)^\perp = F^\perp$ pour $j > k$. D'où le résultat.