TRAVAUX DIRIGES MI4
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Niveau 1

*Exercice 1. Limites de validité des hypothèses

Un proton de masse m et de charge $q = +e$, ayant une vitesse initiale nulle, est accéléré dans le vide par un champ électrostatique $\vec{E}$. On note U la différence de potentiel entre sa position initiale et sa position finale où la vitesse v a été acquise.

1. On considère que le poids de la particule n'est plus négligeable quand il dépasse le centième de la valeur de la force électrique. Calculer la valeur limite E_{lim} du champ E pour laquelle le poids n'est plus négligeable.
2. On considère la vitesse v de la particule comme relativiste quand elle dépasse le centième de la célérité c de la lumière. Calculer la valeur limite U_{lim} de la tension pour laquelle le proton acquiert une vitesse relativiste.

<u>Données</u> : $m = 1{,}7.10^{-27}$ kg, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $g = 9{,}8$ m.s^{-2}, $c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}

*Exercice 2. Particule dans un champ électrique ou magnétique

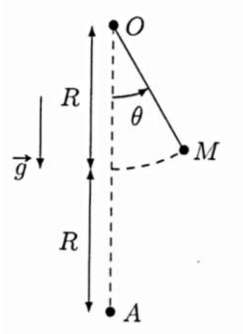
On considère une particule ponctuelle, de charge q et de masse m, de vitesse initiale $\vec{v}_0$ à l'entrée d'une zone où règnent un champ électrique $\vec{E}$ ou un champ magnétique $\vec{B}$.

On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps et on néglige toute autre force que celles provoquées par ces champs.

1. La particule décrit une droite et possède une accélération constante a.
   a. Déterminer la direction et la norme du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.
   b. Déterminer la position de la particule à chaque instant.
2. La particule décrit une trajectoire circulaire de rayon R_0, dans un plan xOy.
   a. Déterminer la direction du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.
   b. Déterminer l'équation différentielle de la trajectoire et l'expression de R_0. On suggère d'utiliser les coordonnées polaires.

Niveau 2

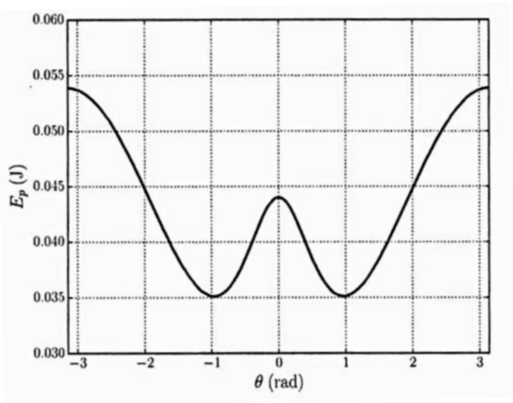
Exercice 3. Pendule électrostatique



Un pendule est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par une fine tige dont nous négligerons la masse.
La boule de masse $m = 20$ g sera assimilée à un point matériel noté *M*. Une boule identique est placée en *A*. Chargées électriquement avec la même charge, les deux boules se repoussent. La force exercée par *A* sur *M* s'écrit $\overrightarrow{F_e} = \dfrac{k}{(AM)^3}\overrightarrow{AM}$

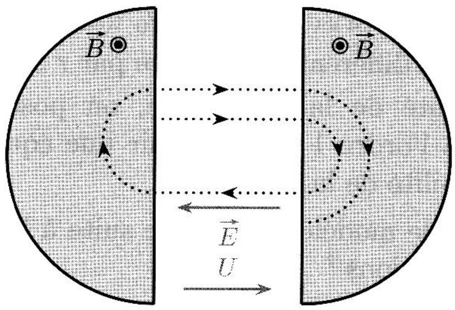
où $k = 4{,}4.10^{-3}$ N.m^2. La liaison d'axe est supposée sans frottement et nous ne tenons pas compte d'éventuels frottements fluides. La longueur du pendule est $R = 10$ cm.

1. Exprimer la distance *AM* en fonction de *R* et *θ*.
2. Montrer que la force $\overrightarrow{F_e}$ est conservative : pour cela, montrer qu'elle dérive de l'énergie potentielle $E_{P,e}(\theta) = \dfrac{k}{R\sqrt{5-4\cos(\theta)}}$.



3. Exprimer l'énergie potentielle $E_P(\theta)$ de la boule *M*.
4. Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure ci-contre. Déduire de ce graphe l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.
5. Discuter de la nature de la trajectoire de *M* suivant la valeur de son énergie mécanique initiale.

Exercice 4. Cyclotron



Dans un accélérateur de type cyclotron, on incurve la trajectoire des particules à l'aide de champs magnétiques uniformes dans deux zones en forme de « D », appelées « dés » en français ou « *dees* » en anglais. Entre les dés se trouve une petite zone d'accélération où règne un champ électrostatique uniforme qui accélère la particule en ligne droite. Après une accélération, la particule entre dans un dé où elle parcourt un demi-cercle avant de revenir dans la zone d'accélération, dans laquelle on a pris soin entre-temps d'inverser le sens de $\vec{E}$, etc. Les rayons des arcs de cercle croissent jusqu'à ce que la particule quitte le cyclotron. La valeur du champ magnétique uniforme et constant dans les dés est $B = 1{,}0$ T. L'amplitude de la tension sinusoïdale générant le champ électrostatique entre les dés est $U_m = 2{,}5.10^3$ V.

Données : $m = 1{,}7.10^{-27}$ kg, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

1. On admet que le mouvement du proton dans un dé est circulaire. Montrer qu'il est uniforme.
2. Exprimer le temps mis pour parcourir un demi-tour dans un dé. Ce temps dépend-il de la vitesse du proton ? Calculer sa valeur numérique.
3. En déduire la fréquence f de la tension à appliquer entre les dés pour que le champ accélère au mieux les protons (on considère que le temps de passage entre les deux dés est négligeable devant les autres durées). Cette fréquence s'appelle la fréquence cyclotron.
4. Exprimer, puis calculer numériquement (en Joule et en eV) l'augmentation d'énergie cinétique d'un proton à chaque accélération.
5. La vitesse d'injection du proton étant quasi nulle, on désire que sa vitesse atteigne 25.10^3 km.s^{-1}. Calculer le nombre de tours que doit faire le proton dans le cyclotron ainsi que le temps nécessaire à cette opération.
6. Quel est le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons lorsqu'ils ont atteint cette vitesse ? Commenter la valeur obtenue.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Limites de validité des hypothèses

1. L'intensité de la force électrique est $F = eE$ et celle du poids est $P = mg$.
   Le poids dépasse le centième de la valeur de la force électrique si :
   $$P > \frac{F}{100} \text{ soit } \boxed{E < E_{\text{lim}} = 100\frac{mg}{e}}$$
   A.N. : $\boxed{E_{\text{lim}} = 1{,}0.10^{-5} \text{ V.m}^{-1} = 10 \text{ µV.m}^{-1}}$
   Cette valeur est extrêmement faible : le poids est donc négligeable devant la force électrique.
2. La force électrique est une force conservative dérivant de l'énergie potentielle $E_P = qV = eV$.
   Théorème de l'énergie mécanique entre l'état initial et l'état final :
   $$\Delta\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{mF} - \mathscr{E}_{mI} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E}_{mF} = \mathscr{E}_{mI}$$
   $$\mathscr{E}_{CF} + \mathscr{E}_{PF} = \mathscr{E}_{CI} + \mathscr{E}_{PI} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + eV_F = 0 + eV_I$$
   $$\frac{1}{2}mv^2 = e\left(V_I - V_F\right) \text{ soit } U = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{e} \text{ avec } U = V_I - V_F > 0$$
   La vitesse v de la particule dépasse le centième de la célérité c de la lumière si
   $v > \frac{c}{100}$, soit $\boxed{U > U_{\text{lim}} = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{10^4 e}}$ A.N. : $\boxed{U_{\text{lim}} = 48 \text{ kV}}$
   C'est une tension élevée mais fréquemment atteinte dans les dispositifs d'accélération de particules : il faut donc utiliser la mécanique relativiste.

*Exercice 2. Particule dans un champ électrique ou magnétique

On étudie la particule M de masse m et de charge q assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
Cette particule est soumise à la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

1. Trajectoire rectiligne uniformément accélérée
   a. Nature du champ
      $\vec{a} = \overrightarrow{cste}$ soit $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$
      La norme v de la vitesse $\vec{v}$ varie donc l'énergie cinétique aussi.
      Or, la force magnétique étant orthogonale $\vec{v}$, son travail est nul. Seule la force électrique a un travail non nul et peut donc contribuer à une variation d'énergie cinétique : la particule est donc placée dans un champ électrique $\vec{E}$.

- <u>Norme du champ</u>

  Le principe fondamental de la dynamique donne : $m\vec{a} = q\vec{E}$ soit $\boxed{\vec{E} = \dfrac{m}{q}\vec{a}}$

- <u>Sens du champ</u>

  $\vec{E}$ est colinéaire à l'accélération : comme le mouvement est rectiligne, l'accélération est colinéaire à la vitesse $\vec{v}$ et donc à la vitesse initiale $\vec{v}_0$: donc $\vec{E}$ est <u>colinéaire</u> à $\vec{v}_0$

b. On note O l'origine du repère. Le <u>vecteur position</u> est obtenu en intégrant le vecteur vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}}$$

M_0 est la position initiale de la particule.

2. <u>Trajectoire circulaire dans le plan (xOy)</u>

a. La trajectoire circulaire est celle d'une charge dans un <u>champ magnétique</u> perpendiculaire à la vitesse initiale. $\vec{v}_0$ est dans le plan (xOy) et $\vec{B}$ est <u>porté par (Oz)</u>

b. <u>Trajectoire circulaire</u> étudiée dans la base cylindrique $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$

- <u>Principe fondamental de la dynamique</u> : $m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- <u>Projection du PFD sur la base cylindrique</u>
  - Cinématique : $\overrightarrow{OM} = R_0\overrightarrow{u_r}$; $\vec{v} = R_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$, $\vec{a} = -R_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R_0\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$
  - Force magnétique : $\vec{F} = q\begin{vmatrix}0\\R_0\dot{\theta}\\0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\0\\B\end{vmatrix} = qR_0\dot{\theta}B\overrightarrow{u_r}$

Projection sur $\overrightarrow{u_r}$: $-mR_0\dot{\theta}^2 = qR_0\dot{\theta}B$

Projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$: $R_0\ddot{\theta} = 0$

La deuxième relation montre que $\dot{\theta} = cste$: le mouvement est uniforme.

La première relation donne : $\dot{\theta} = -\dfrac{qB}{m}$. <u>L'équation différentielle de la trajectoire</u> est $\boxed{\dot{\theta} = -\dfrac{qB}{m} = cste}$.

Si la charge est positive, respectivement négative, elle tourne dans le sens horaire, respectivement trigonométrique, par rapport à l'axe (Oz).

- <u>Norme de la vitesse de la particule</u> : $v = R_0\left|\dot{\theta}\right| = cste = v_0$ soit $v_0 = R_0\dfrac{|q|B}{m}$

  <u>Rayon de la trajectoire</u> : $\boxed{R_0 = \dfrac{mv_0}{|q|B}}$

Exercice 3. Pendule électrostatique

1. $AM = R\sqrt{5-4\cos(\theta)}$ 3. $E_P(\theta) = \dfrac{k}{R\sqrt{5-4\cos(\theta)}} - mgR\cos(\theta) + cste$

Exercice 4. Cyclotron

2. $\Delta t = \dfrac{m\pi}{qB}$ 3. $f = 15$ MHz 4. $\Delta E_c = 4{,}0.10^{-16}$ J $= 2{,}5$ keV
5. $N = 664$ tours, $t_f = 44$ µs 6. $R_f = 26$ cm