15. Arithmétique

Exercice 1. (c) Quel est le dernier chiffre de 17^{2023} ?

Exercice 2. (c) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2222^3 \times 3^{2222}$ par 10.

Exercice 3. (c) Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.

Exercice 4. (m) **Critère de divisibilité par 11.** Montrer qu'un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

Exercice 5. (m) Montrer que si $x_0 \in \mathbb{Z}$ est une racine du polynôme $2X^3 - 3X^2 + 2X - 3$, alors $x_0|3$. Ce polynôme admet-il des racines entières ?

Exercice 6. (m) Déterminer la table de 2^n et de 3^n modulo 7. En déduire le reste de la division euclidienne de $3^n - 2^n$ par 7 selon les valeurs de n.

Exercice 7. (m) Montrer que si $n \geq 2$ alors l'écriture décimale de $2^{2^n} + 1$ se termine par 7.

Exercice 8. (m) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

Exercice 9. (m) Montrer que si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $a^2 + b^2 + 1$ n'est pas divisible par 8.

Exercice 10. (i) Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que $11^n + 12^n + 13^n$ soit un multiple de 7.

Exercice 11. (i) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, 24 divise $n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Exercice 12. (i) Déterminer les n tels que 7 divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

Exercice 13. (m) Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(n+1)|(n+3)$, puis les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(n+2)|(n^2 + 3n + 5)$.

Exercice 14. (m) En utilisant le lemme d'Euclide, déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ la valeur de $(9n^2 + 10n + 1) \wedge (9n^2 + 8n - 1)$.

Exercice 15. (i) Déterminer tous les $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 16. (c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1) $151x - 77y = 5$.
2) $51x + 44y = 1$.
3) $9072x + 306y = 18$.

Exercice 17. (i) Montrer que si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont également premiers entre eux.

Exercice 18. (i) Montrer qu'il existe des uniques $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, puis que $a_n \wedge b_n = 1$.

Exercice 19. (i) Soit $x \in \mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20. (m) Déterminer tous les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ solutions de $\left\{ \begin{array}{l} ab = 7488 \\ a \vee b = 936 \end{array} \right.$.

Exercice 21. (i) Déterminer les $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x \wedge y = x + y - 1$. *De même, vous pouvez aussi résoudre* $x \vee y = x + y - 1$.

Exercice 22. (m) On considère $(E) : 3^x = 8 + y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}^*$. Soit (x,y) une solution de (E).

1) Montrer que y est impair et en déduire que $y^2 \equiv 1[8]$.

2) Montrer que x est pair, puis en utilisant une identité remarquable, montrer que $3^{\frac{x}{2}} \leq 8$.

3) Résoudre (E).

Exercice 23. (i) Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 11z^2$ n'admet pas de solutions entières.

Exercice 24. (m) En travaillant modulo 9, montrer que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3,\ x^3 + y^3 + z^3 \neq 94$.

Exercice 25. (m) Déterminer les nombres premiers p tels que p, $p+2$ et $p+4$ soient premiers.

Exercice 26. (i) Montrer qu'une somme d'inverses de nombres premiers distincts n'est pas entière.

Exercice 27. (i) Déterminer le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de $2023!$.

Exercice 28. (i) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe n entiers consécutifs non premiers. *On pourra s'intéresser à* $n!$...

Exercice 29. (m) Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteur premier de $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que n admet $\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$ diviseurs positifs distincts.

2) Déterminer alors le plus petit nombre entier admettant exactement 21 diviseurs positifs.

Exercice 30. (c) Montrer en utilisant le petit théorème de Fermat que $\forall n \in \mathbb{N},\ 42 | (n^7 - n)$.

Exercice 31. (∗) **Infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$.**

1) Montrer que si $n \equiv 3\ [4]$, alors il existe un nombre premier $p \in \mathbb{P}$ tel que $p | n$ et $p \equiv 3\ [4]$.

2) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3\ [4]$.

Exercice 32. (∗) **Infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.**

1) Montrer cette conséquence du petit théorème de Fermat : si $p \in \mathbb{P}$ est premier et que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \wedge p = 1$, alors $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{P}$ un nombre premier impair tel que p divise $n^2 + 1$. Montrer que $n \wedge p = 1$ et en déduire que $p \equiv 1\ [4]$.

3) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 1\ [4]$.