Programme de colle, semaine 25

Matrices (en entier) + groupe symétrique :

— Nous avons commencé avec la définition de la matrice d'un vecteur x dans une base e d'un espace vectoriel E, puis de celle d'une famille vecteur et enfin de celle d'une application linéaire (notation $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ où $u \in L(E,F)$, e est une base de E et f une base de F). Nous avons alors vu quelques exemples (décomposition de projecteurs et de symétries dans des bases adaptées). Nous avons ensuite montré qu'étant donné des espaces E et F, des bases e et f de ces espaces, alors l'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans les bases e au départ et f à l'arrivée est bijective.

— Nous avons revu le produit matriciel et vu qu'il est compatible avec la composition, c'est à dire pour que $\mathrm{Mat}_{e,g}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{f,g}(u) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(v)$ où $u : F \to G$, $v : E \to F$ et e, f, g sont des bases de E, F, G et vu comment calculer la matrice de $u(x)$ en fonction de la matrice de u et de celle de x (dans les bonnes bases). Nous avons alors vu les différentes propriétés matricielles des applications linéaires (image et noyau d'une matrice).

— Nous avons alors vu comment changer de base en étudiant les matrices de passage, les formules de changement de base pour les vecteurs et pour les applications linéaires.

— Nous avons alors défini le rang d'une matrice comme le rang de son application linéaire canoniquement associée et remarqué que cela coïncidait avec le rang de ses vecteurs colonnes. Nous avons alors utilisé les résultats du chapitre sur les espaces vectoriels, ainsi que les matrices de passage pour montrer que le rang était préservé quand on multipliait à gauche ou à droite par des matrices inversibles. Nous avons défini les matrices équivalentes, démontré qu'une matrice était de rang r ssi elle était équivalente à $J_{n,p,r}$ et que deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

— Nous avons alors ensuite revu l'algorithme du pivot (que l'on a utilisé en général sur les lignes même s'il est également possible de l'appliquer sur les colonnes) pour calculer le rang. Nous avons aussi vu comment calculer le noyau (action sur les lignes) et trouver une base de l'image (action sur les colonnes) d'une matrice. Nous avons également montré que tout matrice extraite (obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et de colonnes) d'une matrice de rang r était de rang inférieur ou égal à r et qu'il existe une matrice extraite carrée inversible de rang r.

— Nous avons terminé le chapitre par l'étude des matrices de passages (notation $P_e^{e'}$ pour la matrice de passage de la base e à la base e' qui est la matrice de la base e' exprimée dans la base e) et des matrices semblables (définition, comment calculer une matrice de passage, comment montrer que deux matrices sont semblables, l'interprétation en terme d'endomorphismes). Nous avons ensuite défini la trace d'une matrice, d'une application linéaire et ses propriétés.

— Nous avons alors commencé le chapitre sur le groupe symétrique. Nous avons vu comment noter une permutation de S_n (qui est un groupe pour la loi $\circ$ de cardinal $n!$). Nous avons ensuite défini les p-cycles, les transpositions et la notation $(x_1\ x_2\ \ldots x_p)$ pour le p-cycle envoyant x_1 sur x_2, x_2 sur x_3, etc. Nous avons alors démontré que deux cycles à supports disjoints commutent (le support d'un cycle étant l'ensemble des éléments « déplacés » par le cycle).

— Nous avons ensuite justifié que toute permutation se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de cycles à supports disjoints et, puisque $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_p) = (x_1\ x_2) \circ (x_2\ x_3) \circ \ldots \circ (x_{p-1}\ x_p)$, que toute permutation se décompose en produits de transposition. Nous avons vu comment obtenir ces décompositions à partir d'une permutation donnée. Nous avons alors terminé le chapitre en admettant l'existence de la signature (unique application de S_n dans $\{-1, 1\}$ valant -1 sur les transpositions et telle que $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$ pour toute permutation. Nous avons étudié la signature d'un p-cycle, de σ^{-1} et vu une méthode pour calculer la signature d'une permutation donnée.

Remarques sur le programme : Attention, il n'y a plus de matrices blocs au programme officiel (même si nous en avons brièvement parlé) ! Nous n'avons pas beaucoup avancé (perte de 3h du lundi...)

Compétences :

— Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
— Déterminer, étant données deux bases e et e' de E et $u \in L(E)$, les matrices de passage $P_e^{e'}$ et $P_{e'}^{e}$, puis trouver $\mathrm{Mat}_{e'}(u)$ étant donné $\mathrm{Mat}_e(u)$.
— Démontrer que deux matrices A et B sont semblables en visualisant $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ avec u linéaire et en cherchant par analyse/synthèse une base dans laquelle $B = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$.
— Déterminer, étant données deux bases e et e' de E et $u \in L(E)$, les matrices de passage $P_e^{e'}$ et $P_{e'}^{e}$, puis trouver $\mathrm{Mat}_{e'}(u)$ étant donné $\mathrm{Mat}_e(u)$.
— Pour montrer des propriétés qui ne dépendent que du rang, commencer par les prouver pour les matrices $J_{n,p,r}$ et s'y ramener avec des matrices équivalentes.
— Déterminer le rang d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires.
— Déterminer $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ à l'aide d'opérations élémentaires (sur les lignes pour le noyau, sur les colonnes pour l'image).
— Déterminer l'inverse d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires (uniquement sur les lignes **ou** uniquement sur les colonnes !)
— Décomposer une permutation en produits de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions et déterminer sa signature.

Questions de cours :

1. Donner la définition de $P_e^{e'}$ où e et e' sont deux bases de E ainsi que le lien entre $P_e^{e'}$ et $P_{e'}^{e}$ et donner pour $u \in L(E)$, rappeler la définition de $\mathrm{Mat}_e(u)$ et donner la formule de changement de base :
$$\mathrm{Mat}_e(u) = P_e^{e'} \times \mathrm{Mat}_{e'}(u) \times P_{e'}^{e}.$$
2. Donner la définition de la trace et montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Donner la définition d'être semblable et montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et que deux matrices semblables ont la même trace.
4. Décomposer sur des exemples proposés par le colleur une permutation σ en produit de cycles à supports disjoints, de transpositions et déterminer sa signature.
5. Donner la formule permettant de calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donner les formules pour calculer des déterminants de matrice 2 et 3×3 (formule de Sarrus).
6. Déterminer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercices à chercher pour mardi prochain (pour tout le monde) : TD25 : 8 et 16 ; TD 26 : 3 et 6. Et surtout le DM !

Exercices à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD25 : 8.
- 2ieme du groupe : TD 25 : 16.
- 3ieme du groupe : TD26 : 3 et 6.

Prochain programme : pas de colle la semaine du jeudi de l'ascension puis déterminant.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

TD 25, exercice 8

- Bien appliquer la méthode du pivot.
- On pourra échanger C_1 et C_3 afin de mettre les paramètres le plus loin possible (et donc discuter sur le rang le plus tard possible !) pour ensuite faire des opérations élémentaires sur les lignes.
- Si je ne me suis pas trompé dans les calculs, la disjonction de cas porte selon si $a = 3$ ou pas...

TD 25, exercice 16

- On effectue la méthode du pivot. Je vous conseille d'échanger L_1 et L_3 pour mettre le x tout en bas pour commencer.
- Vous devriez trouver le rang qui vaut 1 si $x = 1$ et donc un noyau de dimension 2 si $x = 1$. Il reste une valeur de x (normalement -2) à trouver pour laquelle vous devriez avoir un noyau de dimension 1.
- Pour la question 2, les vecteurs f_1, f_2 correspondent aux vecteurs trouvés pour $x = 1$ et f_3 à la valeur trouvée pour $x = -2$. Attention à ne pas oublier de vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$!
- Pour la matrice diagonale, on pourra poser u l'application linéaire canoniquement associée à A et poser $D = \mathrm{Mat}_f(u)$ en la calculant en revenant à la définition de $\mathrm{Mat}_f(u)$.
- **Même si ce n'est pas dans l'énoncé, ce serait chouette d'écrire juste la relation entre A, la matrice diagonale et $P = P_e^f$ où e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on explicitera (on n'explicitera pas P^{-1} par contre !)**

TD 26, exercices 3 et 6 :

- Pour le 3, séparer les cas n pair et n impair.
- On pourra poser explicitement $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.
- On pourra essayer de trouver une formule qui dépend de n en faisant apparaitre une partie entière !
- Pour l'exo 6, on essaiera de décomposer n'importe quelle transposition $(i_0\ j_0)$ en fonction de transpositions de la forme $(1\ i)$ puis utiliser le fait que n'importe quelle permutation s'écrit en produit de transpositions.
- Indication pour la question précédente : si vous voulez échanger une carte en position i_0 avec celle en position j_0 en autorisant uniquement des échanges avec la 1ere carte, quelle suite d'échanges devez vous faire ?
- Dernière indication : vous pouvez écrire $(i_0\ j_0)$ uniquement avec un produit de 3 transpositions faisant apparaitre $(1\ i_0)$ et $(1\ j_0)$.