# Devoir Surveillé 1, corrigé

**Exercice 1. Limite d'une somme.**

1) *Majoration de la suite.* Dans toute la question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On va poser le changement d'indice $j = n - k$ (ou $k = n - j$) dans la définition de $u_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^n} \sum_{j=0}^{n} (n-k)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n-j}{n}\right)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^x - x - 1$. $f$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$. On a donc $f'$ négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. $f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f$ admet un minimum en 0. Puisque $f(0) = 0$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$.

c) Soit $x \geq -1$. On a alors $1 + x \geq 0$. En appliquant la fonction $u \mapsto u^n$ (qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\leq (e^x)^n \\ &\leq e^{nx}. \end{aligned}$$

En reprenant l'expression du a), on remarque que si $j \in [\![0, n]\!]$, alors on a bien $-\dfrac{j}{n} \geq -1$. On en déduit que $\left(1 - \dfrac{j}{n}\right)^n \leq e^{n \times (-j/n)} = e^{-j}$. En sommant cette inégalité de 0 à $n$, on en déduit que :

$$\sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n \leq \sum_{j=0}^{n} e^{-j},$$

ce qui est l'inégalité demandée.

d) Puisque pour $j$ entier, $e^{-j} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^j$, on reconnait une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{e} \neq 1$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} e^{-j} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}} \\ &= \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} \\ &= \frac{e - e^{-n}}{e - 1}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{e}{e-1}$ (puisque le terme en $-e^{-n}$ est négatif) donc la suite est majorée.

2) *Minoration de L.* Soient $n > m \geq 1$ des entiers.

a) On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{j=0}^{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n \\ &= \sum_{j=0}^{m}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n + \sum_{j=m+1}^{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

On peut décomposer ainsi puisque $n > m$. La seconde somme est positive puisque pour $j \leq n$, on a $1-\dfrac{j}{n} \geq 0$, et on somme donc des termes positifs. On en déduit que $u_n \geq \displaystyle\sum_{j=0}^{m}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n$.

b) « La fonction $f$ est dérivable en 0 » signifie que la quantité $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers une limite finie quand $x$ tend vers 0. On appelle cette limite $f'(0)$. On pose ici $f : u \mapsto \ln(1+u)$. Cette fonction est dérivable en 0 comme composée de fonctions dérivables. On en déduit que :

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)-\ln(1+0)}{u-0} = f'(0).$$

En calculant la dérivée de la fonction, on trouve que pour $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, ce qui donne bien $f'(0) = 1$.

c) Soit $j \in [\![0, m]\!]$.

i) Puisque $j \leq m < n$, on a alors $\dfrac{j}{n} < 1$ et donc $1-\dfrac{j}{n} > 0$. On en déduit alors que $\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n > 0$ et on peut donc composer par le logarithme. On a alors par propriété du logarithme :

$$\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)^n = n\ln\left(1-\frac{j}{n}\right).$$

En composant alors par l'exponentielle, on obtient que $e^{\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)^n} = e^{n\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)}$, ce qui donne l'égalité voulue puisque $e^{\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)^n} = \left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n$.

ii) Remarquons tout d'abord que la propriété est vraie pour $j = 0$ (on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = e^0$). Supposons à présent $j > 0$. On a alors en utilisant la question 2.b) en $x_n = -\dfrac{j}{n} \neq 0$ (qui tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini) que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)}{-\frac{j}{n}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{j}{n}\right) = -j.$$

Par composition de limites (la fonction exponentielle est continue) et en utilisant la question précédente, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n = e^{-j}$.

d) En passant à la limite dans l'inégalité obtenue en 2.a) (on a une somme finie de termes, $m$ étant fixé et on a le droit de passer à la limite dans les inégalités larges), on en déduit en sommant les différentes limites que :

$$\sum_{j=0}^{m} e^{-j} \leq L.$$

3) On peut alors calculer la somme précédente. On a toujours par somme géométrique de raison différente de 1 (voir le calcul du 1.d) :

$$\sum_{j=0}^{m} e^{-j} = \frac{e - e^{-m}}{e-1}.$$

On a donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $L \geq \frac{e - e^{-m}}{e-1}$. En passant à la limite quand $m$ tend vers l'infini, l'exponentielle tendant vers 0 en $-\infty$, on en déduit que :

$$L \geq \frac{e}{e-1}.$$

Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{e}{e-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{e}{e-1}$. En passant à la limite quand $n$ tend vers l'infini, on a donc $L \leq \frac{e}{e-1}$. Par double encadrement, on en déduit que $L = \frac{e}{e-1}$.

**Exercice 2. Deux équations fonctionnelles.**

1)

a) On suppose $f$ solution. *C'est l'analyse*

i) En $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0 + 0 = 0$.

ii) On évalue en $y = 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = xf(x) + 0$. On en déduit que pour $x \neq 0$, $f(x) = 0$. Puisque d'après la question précédente $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

b) *C'est la synthèse.* La fonction nulle étant clairement solution (on a $0 = 0 + 0$), c'est la seule solution de cette équation.

2)

a) On suppose $f$ solution. *C'est l'analyse*

i) On prend $x = 1$ et $y = 0$ par exemple, on a $f(1 - f(0)) = 0$. Si on pose $z = 1 - f(0)$, on a donc bien $f(z) = 0$.

ii) On évalue à présent la propriété en $y = z$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x - 0) = 1 - x - z$. En posant $k = 1 - z$, on a bien $k$ indépendant de $x$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + k$.

b) Réciproquement, on suppose que $f$ est de la forme $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + k$ où $k \in \mathbb{R}$. *C'est la synthèse.* On a alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + f(y)) = -(x - (-y + k)) + k = -x - y + 2k.$$

On en déduit que $f$ vérifie l'équation proposée si et seulement si $k = \frac{1}{2}$. Il n'y a finalement qu'une seule solution à cette équation, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x + \frac{1}{2} \end{array} \right.$.

**Exercice 3. Autour de la périodicité.**

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n \times 1 = (-1)^n$. La suite est donc 2-périodique.

2) Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ périodique de période $T \in \mathbb{N}^*$. On a alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ périodique à partir du rang 0 (on prend $N = 0$). De plus, si on fixe $n \in \mathbb{N}$, alors on a $u_{n+T} = u_n$ ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est répétable.

3) Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n$. Alors cette suite est périodique à partir du rang 1 mais elle n'est pas périodique car elle ne reprend jamais la valeur 2.

4) Prenons la même suite que ci-dessus. Elle n'est pas répétable car elle ne repasse jamais par la valeur $u_0 = 2$ (c'est à dire que $\forall T \in \mathbb{N}^*,\ u_{0+T} \neq u_0$).

5)

a) La propriété demandée est vraie pour les premiers rangs (on a $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_3 = 1$ (pour $k = 0, 1, 2$). On remarque que par définition, avant de retomber sur un 1, la suite est décomposée par paquets de 1 terme, puis 2, puis 3, puis 4, etc. en recommençant chaque nouveau paquet à 1. On en déduit que le $k+1$-ième 1 de la suite est en position $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$. On a donc bien $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{\frac{k(k+1)}{2}} = 1$.

b) Puisque $v_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} j$, la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante avec $u_0 = 0$. On peut donc décomposer $\mathbb{R}_+ = [u_0, u_1[\cup[u_1, u_2[\cup[u_2, u_3[\cup \ldots$. On recouvre bien toutes les valeurs puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} v_k = +\infty$.

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, si on prend le plus grand indice $k$ tel que $v_k \leq n$ (qui existe car $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} v_k = +\infty$ donc la suite finit par dépasser $n$), on a alors $n < v_{k+1}$. On a donc bien la propriété demandée.

c) Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après la propriété précédente, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k \leq n < v_{k+1}$. Puisque $u_{v_k} = 1$ et que le prochain 1 est atteint en $u_{v_{k+1}}$, on en déduit que le $n$ fait parti du « paquet » associé au $k+1$-ième 1 de la suite. Ainsi, si $n = v_k$, on a $u_n = 1$, si $n = v_k + 1$, $u_n = 2$, etc. jusqu'au terme $u_{v_k+k} = 1 + k$. C'est bien le dernier terme du paquet puisque $v_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} j = v_k + (k+1)$.

Pour retomber sur $u_n$, il suffit par exemple de se déplacer dans le paquet suivant (où on aura les entiers consécutifs de 1 à $1 + (k+1) = k+2$). Il faut ici se décaler de $k+1$ (toujours puisque $v_{k+1} = v_k + (k+1)$), ce qui donne $u_n = u_{n+(k+1)}$. En prenant donc $T = k+1$, on a donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est répétable. *La différence entre la répétabilité et la périodicité est que le $T$ peut dépendre de $n$, c'est à dire le terme de la suite considéré alors que pour une suite périodique, c'est le même $T$ pour tous les $n$.*

d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas périodique à partir d'un certain rang ? Supposons par l'absurde qu'elle soit $T$-périodique à partir du rang $N \in \mathbb{N}$. Fixons un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq v_k$ et tel que $T \leq k$ (ceci existe car $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} v_k = +\infty$). On a alors $u_{v_k} = 1$ et $u_{v_k+T} = 1 + T \neq 1$ (puisque l'on est toujours dans le « paquet » associé à $u_{v_k}$, on a pas encore atteint le paquet de $u_{v_{k+1}}$ car $v_{k+1} = v_k + (k+1)$ et $T < k+1$.