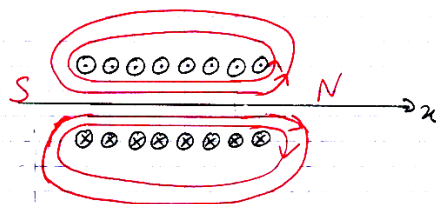


CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 14

Exercice 1 – Alternateur de bicyclette

- Règle de la main droite pour trouver le sens de \vec{B} à partir du sens du courant. Les lignes de champ sortent par un pôle Nord et entrent par un pôle Sud.
- Si on augmente l'intensité du courant, seule l'intensité du champ magnétique augmente : l'allure des lignes de champ n'est pas modifiée.
- Si on change le sens du courant, l'orientation des lignes de champ change.
- L'aimant tourne et le solénoïde est fixe :
 - le solénoïde Σ est un circuit fixe dans un champ magnétique variable créé par l'aimant,
 - une fem e_{ext} et un courant i_Σ sont induits dans le solénoïde Σ
 - le champ magnétique \vec{B}_Σ , créé par le courant i_Σ circulant dans le solénoïde, exerce un couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ sur l'aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ qui tend à le freiner (loi de modération de Lenz)
 - l'opérateur doit compenser ce couple de freinage en appliquant un couple $\vec{\Gamma}_{op}$ afin de maintenir la vitesse de l'aimant constante



- Avec la condition initiale : $\theta = \omega_0 t$
- Champ magnétique créé par le solénoïde : $\vec{B}_\Sigma = \mu_0 n i_\Sigma \vec{u}_x$
 Flux de \vec{B}_Σ à travers la spire fictive : $\phi_{\Sigma \rightarrow spire} = \vec{B}_\Sigma \cdot \vec{S} = \mu_0 n i_\Sigma \vec{u}_x \cdot S \vec{n}$ soit :

$$\phi_{\Sigma \rightarrow spire}(t) = \mu_0 n i_\Sigma S \cos(\omega_0 t)$$

Flux mutuel tel que $\phi_{\Sigma \rightarrow spire}(t) = M i_\Sigma$ soit $M = \mu_0 n S \cos(\omega_0 t)$

- Flux mutuel du champ magnétique de l'aimant dans le solénoïde :

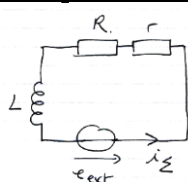
$$\phi_{spire \rightarrow \Sigma} = M i_S = \mu_0 n i_S S \cos(\omega_0 t)$$

Moment magnétique de l'aimant : $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{n} = i_S S \vec{n}$

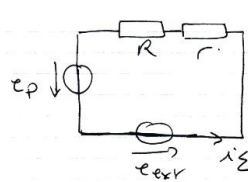
Flux mutuel : $\phi_{spire \rightarrow \Sigma}(t) = \mu_0 n \mathcal{M} \cos(\omega_0 t)$

- Loi de Faraday : $e_{ext}(t) = -\frac{d\phi_{spire \rightarrow \Sigma}(t)}{dt} = \mu_0 n \mathcal{M} \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

- Schéma électrique équivalent :



OU



Attention : auto-induction à prendre en compte avec l'inductance propre L OU avec la fem auto-induite $e_p = Li_{\Sigma}$; r négligeable devant R donc $R + r \simeq R$

➤ Loi des mailles :
$$e_{ext}(t) = L \frac{di_{\Sigma}}{dt} + Ri_{\Sigma} \quad (EE)$$

➤ Équation différentielle :
$$\tau \frac{di_{\Sigma}(t)}{dt} + i_{\Sigma}(t) = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R} \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

8. Passage en complexe en associant à $\sin(\omega_0 t)$ la grandeur complexe $e^{j\omega_0 t}$.

$$\tau \frac{di_{\Sigma}(t)}{dt} + i_{\Sigma}(t) = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow (1 + j\tau\omega_0) i_{\Sigma}(t) = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R} e^{j\omega_0 t}$$

$$(1 + j\tau\omega_0) \underline{I} = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R(1 + j\tau\omega_0)} = I_m e^{j\varphi}$$

➤ Amplitude :
$$I_m = |\underline{I}| = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R \sqrt{1 + (\tau\omega_0)^2}} = \frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R \sqrt{1 + \alpha^2}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \tau\omega_0$$

➤ Déphasage : $\varphi = \arg(\underline{I}) = \arg\left(\frac{\mu_0 n \mathcal{N} \omega_0}{R}\right) - \arg(1 + j\tau\omega_0)$ soit $\varphi = -\arctan(\alpha)$

9. Système : aimant (solide) étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

➤ Bilan des forces :

- Poids \vec{P} colinéaire à (Oz) ou passant par O : $\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = 0$
- Liaison pivot idéale : $\Gamma_{Oz}(\text{pivot}) = 0$
- Couple exercé par l'opérateur : $\vec{\Gamma}_{op} = \Gamma_{op} \vec{u}_z$
- Couple électromagnétique exercé par le solénoïde sur l'aimant :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\Sigma} = -\mathcal{N} B_{\Sigma} \sin(\theta) \vec{u}_z = -\mathcal{N} \mu_0 n i_{\Sigma} \sin(\omega_0 t) \vec{u}_z$$

➤ Théorème du moment cinétique :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{Oz}(\vec{P}) + \Gamma_{Oz}(\text{pivot}) + \Gamma_{op} - \mathcal{N} \mu_0 n i_{\Sigma} \sin(\omega_0 t)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{op} - \mathcal{N} \mu_0 n i_{\Sigma} \sin(\omega_0 t) \quad (EM) \quad \text{avec} \quad i_{\Sigma}(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

10. Vitesse angulaire de l'aimant constante : $\frac{d\omega}{dt} = 0$ et $\Gamma_{op} = \mathcal{N} \mu_0 n i_{\Sigma} \sin(\omega_0 t)$

$$\Gamma_{op}(t) = \mathcal{N} \mu_0 n I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t)$$

➤ Couple moyen exercé par l'opérateur :

$$\langle \Gamma_{op}(t) \rangle = \mathcal{N} \mu_0 n I_m \langle \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t) \rangle = \frac{\mathcal{N} \mu_0 n I_m}{2} \cos(\varphi)$$

$$\langle \Gamma_{op}(t) \rangle = \frac{(\mathcal{N} \mu_0 n)^2}{2R \sqrt{1 + \alpha^2}} \omega_0 \cos(-\arctan(\alpha)) = \frac{(\mathcal{N} \mu_0 n)^2}{2R \sqrt{1 + \alpha^2}} \omega_0 \cos(\arctan(\alpha))$$

$$\langle \Gamma_{op}(t) \rangle = \frac{(\mathcal{N}\mu_0 n)^2 \omega_0}{2R(1+\alpha^2)} > 0 \text{ pour } \omega_0 > 0$$

$\langle \bar{\Gamma}_{op}(t) \rangle = \langle \Gamma_{op}(t) \rangle \vec{u}_z$: le couple est orienté selon l'axe (Oz) pour $\omega_0 > 0$:

l'opérateur doit compenser les effets inductifs qui s'opposent au mouvement de l'aimant.

11. Bilan de puissance pour une vitesse angulaire ω quelconque :

$$\begin{cases} EE \cdot i_\Sigma \\ EM \cdot \omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_{ext} i_\Sigma = Li_\Sigma \frac{di_\Sigma}{dt} + Ri_\Sigma^2 \\ J \frac{d\omega}{dt} \omega = \Gamma_{op} \omega - \mathcal{N}\mu_0 n i_\Sigma \omega \sin(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_0 n \mathcal{N} \omega i_\Sigma \sin(\omega t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li_\Sigma^2 \right) + Ri_\Sigma^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \Gamma_{op} \omega - \mathcal{N}\mu_0 n i_\Sigma \omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

➤ Couplage électromécanique : $\mathcal{P}_{fem} + \mathcal{P}_\Gamma = 0$ avec $\mathcal{P}_{fem} = e_{ext} i_\Sigma = \mu_0 n \mathcal{N} \omega i_\Sigma \sin(\omega t)$ et $\mathcal{P}_\Gamma = \Gamma \omega = -\mu_0 n \mathcal{N} \omega i_\Sigma \sin(\omega t)$

➤ Après élimination du terme de couplage :

$$\Gamma_{op} \omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li_\Sigma^2 \right) + Ri_\Sigma^2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_{op} = \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_m}{dt} + \mathcal{P}_J$$

L'opérateur fournit une puissance mécanique qui sert à augmenter l'énergie cinétique de l'aimant, l'énergie magnétique du solénoïde, et compense les pertes par effet Joule dans l'ampoule.

➤ Dans le cas où $\omega = \omega_0 = cste$, la puissance mécanique apportée par l'opérateur est convertie en puissance électrique utile (puissance Joule dans l'ampoule) et en variation de l'énergie magnétique :

$$\Gamma_{op} \omega_0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li_\Sigma^2 \right) + Ri_\Sigma^2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_{op} = \frac{dE_m}{dt} + \mathcal{P}_J$$

12. À partir de $t = t_1$: $\vec{\Gamma}_{op} = \vec{0}$: l'opérateur ne compense plus le couple de freinage : l'aimant ralentit et s'arrête. Le bilan de puissance s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li_\Sigma^2 \right) = -Ri_\Sigma^2 < 0 \right] : \text{l'énergie cinétique de l'aimant et l'énergie}$$

magnétique du solénoïde diminuent jusqu'à $\omega = 0$ et $i_\Sigma = 0$.

Exercice 2 – Couplage inductif résonnant (CCINP PSI 2019)

1. Moment magnétique de l'émetteur comportant N_1 spires de norme $\mathcal{M}_1 = N_1 S_1 i_1$
2. Mutuelle inductance M telle que les flux mutuels sont : $\Phi_{1/2} = M i_1$ et $\Phi_{2/1} = M i_2$
3. Vecteur surface du récepteur : $\vec{S}_2 = S_2 \vec{u}_z$

Flux mutuel de l'émetteur sur le récepteur, à travers les N_2 spires :

$$\Phi_{1/2} = N_2 \vec{B}_1(r_0, \theta_0) \cdot \vec{S}_2 = N_2 \frac{\mu_0 \mathcal{M}_1}{4\pi r_0^3} (2 \cos(\theta_0) \vec{u}_r + \sin(\theta_0) \vec{u}_\theta) S_2 \vec{u}_z$$

$$\Phi_{1/2} = N_2 \frac{\mu_0 N_1 S_1 i_1 S_2}{4\pi r_0^3} (2 \cos(\theta_0) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z + \sin(\theta_0) \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z)$$

$$\Phi_{1/2} = i_1 \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 S_2}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2(\theta_0) - \sin^2(\theta_0)) = M i_1$$

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 S_2}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2(\theta_0) - \sin^2(\theta_0))$$

4. Loi des mailles en complexes : **attention** aux signes « - » devant les termes mutuels, du fait des orientations respectives de i_2 (qui sort par le point) et de i_1 (qui entre par le point) !

$$\begin{cases} \underline{e} = R_1 \underline{i}_1 + \frac{1}{jC_1 \omega} \underline{i}_1 + jL_1 \omega \underline{i}_1 - jM \omega \underline{i}_2 \\ 0 = (R_2 + R_c) \underline{i}_2 + \frac{1}{jC_2 \omega} \underline{i}_2 + jL_2 \omega \underline{i}_2 - jM \omega \underline{i}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{e} = \left(R_1 + j \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) \right) \underline{i}_1 - jM \omega \underline{i}_2 \\ 0 = \left((R_2 + R_c) + j \left(L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} \right) \right) \underline{i}_2 - jM \omega \underline{i}_1 \end{cases}$$

$$5. \text{ Pour } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} : \underline{i}_2 = \frac{jM \omega_0 \underline{e}}{M^2 \omega_0^2 + R_1 (R_2 + R_c)}$$

6. En régime sinusoïdal, puissance moyenne reçue par une résistance R :

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt = R \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \right) \text{ soit } P = R I_{eff}^2$$

7. Puissance moyenne transmise à la charge R_c : $P = R_c I_{2,eff}^2$

$$P = R_c \left(\frac{M \omega_0 E_{eff}}{M^2 \omega_0^2 + R_1 (R_2 + R_c)} \right)^2$$

- 8.

d (m)	1	3	10
P_{max} (W)	$1,3 \cdot 10^3$	25	$2,5 \cdot 10^{-3}$

L'alimentation du drone n'est suffisante que pour des distances inférieures à 2 m, i.e. pour un vol à très basse altitude, ce qui n'est pas adapté à l'utilisation d'un drone. Ce système n'est donc pas pertinent pour alimenter un drone.