OUTILS MATHÉMATIQUES 8
Coniques

1 Excentricité et paramètre d'une conique

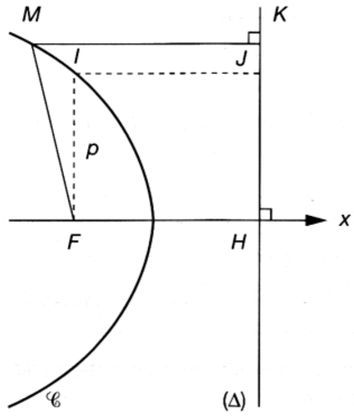
- Conique

Une **conique** est une courbe plane, correspondant à l'intersection d'un plan avec un cône de révolution, le plan de coupe ne passant pas par le sommet du cône.

Définition : On appelle **conique**, de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité e le lieu $\mathscr{C}$ des points M tel que :

$$\frac{MF}{MK} = e = cste$$

où MK représente la distance (M, Δ).



- Paramètre p de la conique

Définition : La perpendiculaire en F à l'axe de symétrie (Fx) de la conique coupe cette conique au point I : la distance $p = FI$ définit **le paramètre de la conique**.

- Excentricité e

Selon les valeurs de l'excentricité e, on obtient différentes coniques :

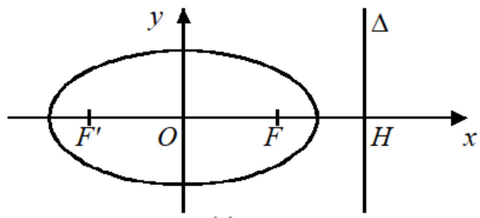
- $0 \leq e < 1$: **ellipse** (cercle pour $e = 0$)
- $e = 1$: **parabole**
- $e > 1$: **hyperbole**

Propriété : $p = e \cdot FH$ où FH est la distance du foyer F à la directrice Δ.

2 Ellipse

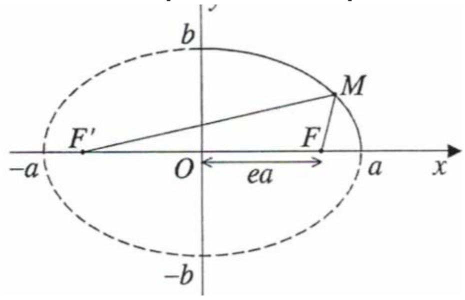
➢ **<u>Définition</u>** : Une **ellipse** est formée par l'ensemble des points M d'un plan dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers F et F') est constante : $FM + F'M = cste$
Cette constante est appelée le **grand axe** de l'ellipse.

➢ Une ellipse est caractérisée par :
- ❖ les **foyers** F et F'
- ❖ le **demi-grand axe** a
- ❖ le **demi- petit axe** b
- ❖ la distance $c = ea = OF = OF' = \sqrt{a^2 - b^2}$



➢ <u>Excentricité et paramètre :</u>

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1 \text{ et } p = \frac{b^2}{a} = a\left(1 - e^2\right)$$

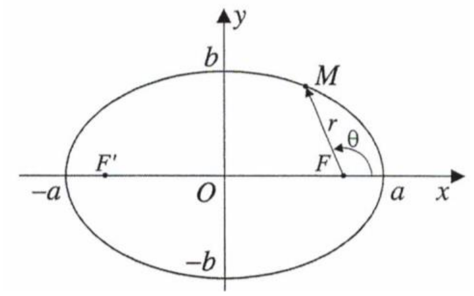


➢ <u>Aire de l'ellipse :</u> $\boxed{\mathscr{A} = \pi ab}$

➢ <u>Équation cartésienne :</u> $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

➢ <u>Équation polaire</u>
L'origine des coordonnées polaires est le foyer F et l'axe de symétrie (Fx) est l'axe polaire : $FM = r$ et $\theta = \left(Fx, FM\right)$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\left(\theta\right)}}$$



➢ <u>Points particuliers</u>

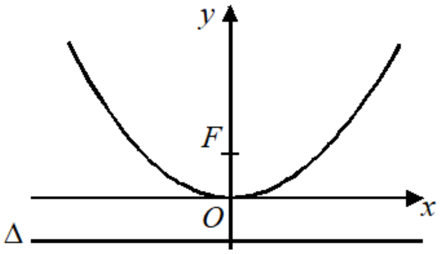
<u>Définition</u> : Le sommet P le plus proche d'un foyer est le **périapse** ; le sommet A le plus éloigné d'un foyer est l'**apoapse**.

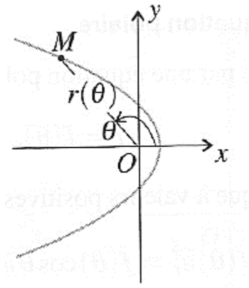
- ❖ <u>Position du périapse</u> : $\boxed{FP = r\left(0\right) = \frac{p}{1+e} = a\left(1 - e\right)}$
- ❖ <u>Position de l'apoapse</u> : $\boxed{FA = r\left(\pi\right) = \frac{p}{1-e} = a\left(1 + e\right)}$

3 Parabole

➢ **<u>Définition</u>** : La parabole est l'ensemble des points M situés à la même distance du foyer F et de la génératrice Δ, perpendiculaire à l'axe de symétrie de la parabole. La distance entre F et Δ est égale à L.

➢ <u>Équation cartésienne :</u> $\frac{y}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2$





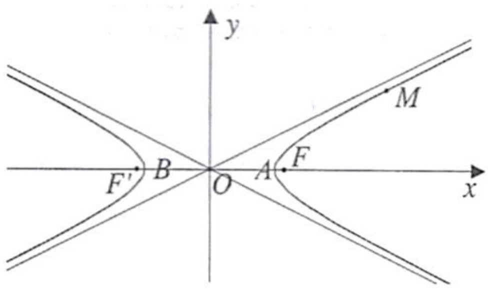
- <u>Équation polaire :</u> $\boxed{r = \dfrac{p}{1+\cos(\theta)} = \dfrac{L}{1+\cos(\theta)}}$

- <u>Point particulier</u>
  La parabole a un périapse O, mais pas d'apoapse : courbe non fermée.

  <u>Position du périapse</u> : $\boxed{FP = FO = r(0) = \dfrac{p}{2} = \dfrac{L}{2}}$

4 Hyperbole

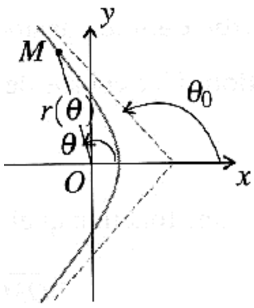
- <u>Caractérisation</u>
  L'hyperbole est une courbe non fermée à deux branches distinctes, passant par les sommets A et B et partant à l'infini. Les axes (Ox) et (Oy) sont deux axes de symétrie.
  Le demi-axe focal a vérifie : $OA = OB = a$



- <u>Excentricité et paramètre :</u> $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}} > 1$ et $p = \dfrac{b^2}{a} = a\left(e^2 - 1\right)$

- <u>Équation cartésienne :</u> $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- <u>Équation polaire</u>
  - Pour la branche d'hyperbole la plus proche du foyer F :
    $\boxed{r = \dfrac{p}{1+e\cos(\theta)}}$
  - Pour la branche d'hyperbole la plus éloignée du foyer F :
    $\boxed{r = \dfrac{p}{-1+e\cos(\theta)}}$



- <u>Point particulier :</u> L'hyperbole a un périapse, mais pas d'apoapse.
  - <u>Position du périapse</u> : $\boxed{FP = r(0) = \dfrac{p}{1+e} = a(e-1)}$

- <u>Équations des asymptotes :</u> $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ ou $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{e}$