À chercher pour lundi 05/12/2022, corrigé

TD 11 :

Exercice 13. On commence par étudier la monotonie de (a_n). Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} \\ &= \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= a_n + \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (a_n) est croissante. Montrons à présent que (b_n) est décroissante. Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= b_n + \frac{-(2n+1)(2n+2) + n(2n+2) + n(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= b_n + \frac{-4n-2}{n(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

On en déduit que (b_n) est décroissante. Il ne reste plus qu'à montrer que la différence tend vers 0. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

La différence tend donc vers 0. On a donc une suite croissante, l'autre décroissante et la différence qui tend vers 0. Les deux suites sont adjacentes.

Exercice 18.

1) *Ordre 1.*

a) Le point fixe est ω tel que $\omega = 3\omega - 2$ donc $\omega = 1$. On en déduit que $(u_n - 1)$ est géométrique de raison 3. On a alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 1 = 3^n(u_0 - 1),$$

ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

b) Le point fixe vérifie $\omega = \frac{\omega}{2} + 3$, soit $\omega = 6$. La suite $(u_n - 6)$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, ce qui entraine :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u_n - 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (u_1 - 6),$$

ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{3}{2^{n-1}} + 6$.

2) *Ordre 2.*

a) déjà fait en cours, c'est la suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est $X^2 - X - 1 = 0$. Les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les suites solutions sont donc de la forme (avec λ et μ à déterminer) :

$$u_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On détermine λ et μ à l'aide des conditions initiales en évaluant en $n = 0$ et $n = 1$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

b) $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. L'équation caractéristique est $X^2 - X + 1 = 0$. On a $\Delta = -3$. On en déduit que les racines du polynômes caractéristiques sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. Ceci entraine qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a x_1^n + b x_2^n.$$

Avec les conditions initiales, on trouve que $a + b = 0$ et $a x_1 + b x_2 = 1$. On a alors $b = -a$ et $a(x_1 - x_2) = 1$ d'où :

$$a \times (-\sqrt{3}i) = 1.$$

On en déduit que $a = \frac{i}{\sqrt{3}}$ et $b = -\frac{i}{\sqrt{3}}$. On en déduit finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n - \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n.$$

On peut en déduire une expression réelle de (u_n) en exprimant les racines sous la forme $\rho e^{i\theta}$. Le module est ici égal à 1 et l'argument égal à $\pm\frac{\pi}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{i}{\sqrt{3}} \left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^n - \frac{i}{\sqrt{3}} \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}} \left(e^{-\frac{in\pi}{3}} - e^{\frac{in\pi}{3}}\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}} \times \left(-2i \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

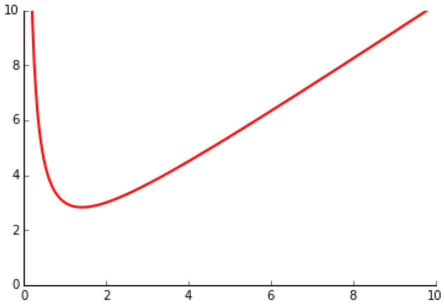
c) L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = 0$. On a 2 qui est racine double. Les solutions sont donc de la forme $u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Avec les conditions initiales, on veut $3 = 2\lambda + 2\mu$ et $8 = 4\lambda + 12\mu$. On obtient alors $2 = 8\mu$ donc $\mu = \frac{1}{4}$ et $\lambda = \frac{5}{4}$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{5}{4} 2^n + \frac{1}{4} n 2^n.$$

TD 10 :

Exercice 4.

1) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = -\dfrac{n}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2 - n}{x^2}$. On en déduit que f_n est décroissante sur $\left]0, \sqrt{n}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{n}, +\infty\right[$. Les limites en 0 et $+\infty$ valent $+\infty$ donc on a le graphe suivant :



On remarque que f_n admet un minimum en $x = \sqrt{n}$. Puisque $\{\frac{n}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^*\} \subset \{f(x),\ x > 0\}$, on en déduit que $f(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}$ minore $\{\frac{n}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble étant clairement non vide (il contient $n+1$ (pour $k = 1$)) et minoré, il admet une borne inférieure d'où l'existence de a_n.

a_n étant le plus grand des minorants et $2\sqrt{n}$ étant un minorant, on en déduit que $a_n \geq 2\sqrt{n}$.

2) Pour $n = 1$, on remarque que l'on a $a_1 \geq 2$ et que $2 \in \left\{\dfrac{1}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$. On en déduit que $a_1 = 2$ (et c'est même un minimum).

On étudie ici l'ensemble $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 2\sqrt{n} \geq 2 = a_1$, on a que a_1 minore cet ensemble (et appartient à l'ensemble en $n = 1$). On a donc $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*}(a_n) = \min\limits_{n \in \mathbb{N}^*}(a_n) = a_1 = 2$.

Enfin, on a puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geq 2\sqrt{n}$ que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ donc $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas majoré. On en déduit que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*}(a_n) = +\infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$) ou n'existe pas (dans $\mathbb{R}$).

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ forme une partition de $[0, 1[$ et que $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$, on en déduit qu'il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x = \lfloor x \rfloor + \dfrac{k_0}{n} + \alpha$ avec $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$.

Essayons alors de déterminer $\lfloor \left(x + \dfrac{k}{n}\right) \rfloor$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Cette partie entière est soit égale à $\lfloor x \rfloor$, soit égale à $\lfloor x \rfloor + 1$, selon les valeurs que prend k. En effet, on a toujours l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leq x + \dfrac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + 2$.

Supposons que $k \in [\![0, n - k_0 - 1]\!]$, on a alors :

$$\begin{aligned}
x + \frac{k}{n} &= \lfloor x \rfloor + \frac{k_0 + k}{n} + \alpha \\
&\leq \lfloor x \rfloor + \frac{n-1}{n} + \alpha \\
&\leq \lfloor x \rfloor + 1 + \alpha - \frac{1}{n} \\
&< \lfloor x \rfloor + 1.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\lfloor\left(x+\frac{k}{n}\right)\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

Supposons à présent que $k \in [\![n-k_0, n-1]\!]$, alors, on a :

$$\begin{array}{rcl} x+\frac{k}{n} & = & \lfloor x\rfloor + \frac{k_0+k}{n} + \alpha \\ & \geq & \lfloor x\rfloor + 1 + \alpha \\ & \geq & \lfloor x\rfloor + 1. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n-1}\lfloor\left(x+\frac{k}{n}\right)\rfloor & = & \sum_{k=0}^{n-k_0-1}\lfloor\left(x+\frac{k}{n}\right)\rfloor + \sum_{k=n-k_0}^{n-1}\lfloor\left(x+\frac{k}{n}\right)\rfloor \\ & = & \sum_{k=0}^{n-k_0-1}\lfloor x\rfloor + \sum_{k=n-k_0}^{n-1}(\lfloor x\rfloor+1) \\ & = & (n-k_0-1+1)\lfloor x\rfloor + (n-1-(n-k_0)+1)(\lfloor x\rfloor+1) \\ & = & (n-k_0)\lfloor x\rfloor + k_0(\lfloor x\rfloor+1) \\ & = & n\lfloor x\rfloor + k_0. \end{array}$$

De plus, on a :

$$\begin{array}{rcl} \lfloor nx\rfloor & = & \lfloor(n\lfloor x\rfloor + k_0 + n\alpha)\rfloor \\ & = & n\lfloor x\rfloor + k_0. \end{array}$$

La dernière égalité étant valable puisque $0 \leq n\alpha < 1$. On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lfloor\left(x+\frac{k}{n}\right)\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1) Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $f(n) = nf(1)$ ».

- La propriété est vraie au rang 0. En effet, on a $f(0+0) = 2f(0)$, ce qui entraine $f(0) = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors, en utilisant la relation vérifiée par f et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} f(n+1) & = & f(n)+f(1) \\ & = & nf(1)+f(1) \\ & = & (n+1)f(1). \end{array}$$

  On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout n entier.

2) La propriété demandée est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ d'après la question 1. Soit à présent $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. On a alors $-n \in \mathbb{N}$ et, d'après la relation vérifiée par f, on a $f(n+(-n)) = f(n)+f(-n)$. Or, $f(0) = 0$. On en déduit que :

$$0 = f(n)+f(-n),$$

ce qui entraine que $f(n) = -f(-n)$. Or, d'après la question 1, puisque $-n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = (-n)f(1)$. On en déduit finalement que $f(n) = nf(1)$.

3) Soit $q \in \mathbb{Q}$. On a alors $q = \frac{n}{m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
f(mq) &= f(n)\\
&= nf(1).
\end{aligned}
$$

Or, on peut montrer par récurrence, de la même manière qu'à la question 1 que $f(mq) = mf(q)$. On en déduit finalement que $f(q) = \frac{n}{m}f(1)$, ce qui entraine $f(q) = qf(1)$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous n'avons pour l'instant pas encore utilisé la croissance de f. Nous allons nous en servir maintenant ! Nous avons démontré que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x$ quand n tend vers l'infini. D'après les inégalités usuelles sur les parties entières, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\frac{(nx-1)}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.
$$

On en déduit que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$. Posons donc $q_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et $p_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$. Puisque f est croissante, on a alors :

$$
f(p_n) \leq f(x) \leq f(q_n).
$$

Or, d'après la question 3, on a donc $p_n f(1) \leq f(x) \leq q_n f(1)$. Puisque $p_n \to x$ et $q_n \to x$, on en déduit en passant à la limite dans les inégalités larges que $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$. Ceci entraine que $f(x) = xf(1)$ ce qui termine la preuve.