TRAVAUX DIRIGÉS OS17
Introduction à la physique quantique

Niveau 1

Exercice 1. Caractère quantique d'une situation

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la longueur d'onde de de Broglie et la comparer à une longueur caractéristique du problème ; apprécier la nécessité d'aborder le problème par la physique quantique.
   a. une balle en sortie d'une arme à feu, de masse $m = 10^{-2}$ kg et de vitesse $v = 3.10^{2}$ m.s^{-1} ;
   b. une poussière de masse $m = 10^{-14}$ kg flottant dans l'air avec une énergie cinétique $E_C \sim 7.10^{-21}$ J ;
   c. une hématie de masse $m = 10^{-13}$ kg se déplaçant dans un vaisseau sanguin à la vitesse $v \sim 1$ cm.s^{-1} ;
   d. un électron libre, de masse $m_e \sim 10^{-30}$ kg, au sein d'un métal, auquel une théorie classique attribue une vitesse d'agitation thermique de l'ordre de 10^{5} m.s^{-1}.
2. Apprécier la nécessité d'une description quantique de l'électron de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental, dont la vitesse est de l'ordre de $\dfrac{c}{137}$. On rappelle la valeur du rayon de Bohr : $a = 5.10^{-11}$ m, qui correspond à une valeur typique du rayon de l'atome d'hydrogène.
3. Des travaux récents ont montré que dans le graphène (feuillet monocouche d'atomes de carbone), la vitesse des électrons est de l'ordre de 10^{6} m.s^{-1} : quelle longueur d'onde de de Broglie correspond à cette valeur ? Quel peut être l'intérêt d'obtenir des matériaux dans lesquels la mobilité des électrons est très grande ?

*Exercice 2. Niveaux d'énergie de l'hydrogène

La description classique (dite planétaire) d'un atome d'hydrogène, consiste à considérer que l'électron est en orbite circulaire de rayon *r* autour du proton. D'un point de vue quantique, cette description est acceptable si la longueur d'onde de de Broglie et le rayon *r* de l'orbite vérifie la relation $\lambda_{DB} = \dfrac{2\pi r}{n}$.

1. En déduire la condition, dite de Bohr, liant le rayon r de l'orbite, la quantité de mouvement p de l'électron, la constante de Planck réduite $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ et un entier n.
2. Un calcul classique montre que la quantité de mouvement d'un électron en orbite circulaire de rayon r est proportionnelle à $\dfrac{1}{\sqrt{r}}$. En déduire comment varie le rayon quantifié r_n d'une orbite de Bohr en fonction de l'entier n.
3. Par un raisonnement simple, dire comment les niveaux d'énergie E_n de l'électron dans l'atome dépendent de n, en considérant qu'il s'agit d'énergie cinétique.

Exercice 3. Énergie de différents photons

Un tube à rayons X émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_X = 0{,}50$ nm avec une puissance $P_X = 0{,}20$ W ; un émetteur de radio irradie avec une puissance $P_r = 1{,}2$ kW sous une fréquence $\upsilon_r = 1{,}5.10^5$ Hz ; une lampe au sodium émet une lumière jaune de longueur d'onde $\lambda_s = 590$ nm avec une puissance $P_s = 40$ W.
Pour chacune de ces sources de photons, calculer l'énergie de chaque photon émis ainsi que le nombre de photons émis par seconde. L'énergie sera exprimée en eV.

*Exercice 4. Rayonnement stellaire

Au niveau du sol, le rayonnement solaire transporte une puissance surfacique d'environ $P = 500$ W/m^2.

1. Donner l'ordre de grandeur de l'énergie E reçue par un œil regardant pendant une seconde le Soleil au travers d'un filtre ne laissant passer que 10^{-3} % de l'énergie. La pupille a alors un diamètre $D \simeq 2$ mm.
2. Estimer combien de photons atteignent l'œil pendant cette durée.
3. Les étoiles visibles les plus faibles du ciel émettent un rayonnement possédant au niveau de la Terre une puissance surfacique de l'ordre de 10^{-14} W.cm^{-2}. Combien l'œil reçoit-il de photons chaque seconde d'une telle étoile ?

Niveau 2

*Exercice 5. Microscope électronique à balayage

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique des plus petits détails qu'il permet d'observer, est de l'ordre de la longueur d'onde utilisée.

1. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope ?

2. Rappeler les valeurs des longueurs d'onde extrêmes (dans le vide) du spectre visible et déterminer les énergies en eV des photons correspondants, sachant que $h = 6{,}6.10^{-34}$ J.s.

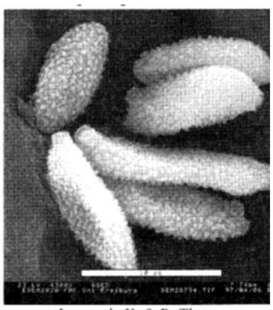


Image de Y. & R. Thomann

La taille des grains de pollen d'orchidée dont l'image est fournie ci-dessous est de l'ordre de 10 µm.

3. Expliquer pourquoi cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique, sachant qu'en grossissant l'image ci-contre, on peut observer des détails 100 fois plus petits que la taille d'un grain de pollen.

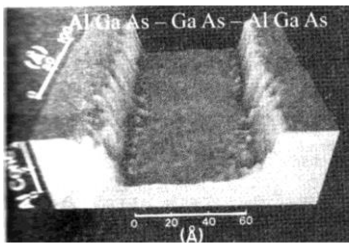
Cette image a été obtenue à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB), dans lequel un faisceau d'électrons est envoyé sur l'échantillon à analyser. Après interaction avec la matière, ces électrons sont récupérés par des capteurs dont les informations permettent de reconstruire l'image.

4. Évaluer l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique minimale des électrons qui ont été utilisés pour obtenir cette image, sachant que la masse de l'électron est $m_e = 9{,}11.10^{-31}$ kg.
5. Déterminer la longueur d'onde de de Broglie λ_{DB} d'un électron dans un microscope électronique, dans le cas où il possède une énergie cinétique $E_C = 100$ keV.

<u>Données</u> : pour un électron relativiste de vitesse v, on a :

$$E_C = (\gamma - 1) m_e c^2 \quad \text{et} \quad p = \gamma m_e v \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

*Exercice 6. Absorption de photons par un puits quantique



En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, on montre que l'expression des énergies totales E_n d'une particule libre de masse m confinée dans un puits quantique de largeur L, est $E_n = n^2 \dfrac{h^2}{8mL^2}$, où h est la constante de Planck h et n un entier non nul.

Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence υ_{nk}, si l'écart $E_n - E_k$ entre deux niveaux d'énergie du puits vérifie la relation $E_n - E_k = h\upsilon_{nk} \quad (n > k)$.

1. Quelle est l'interprétation physique de la relation précédente ?
2. Déterminer les fréquences υ_{21} et υ_{31}, ainsi que les longueurs d'onde correspondantes λ_{21} et λ_{31} pour un puits à semi-conducteurs à base d'arséniure

de gallium (AsGa), d'épaisseur $L = 60\,\overset{o}{A}$ $\left(1\,\overset{o}{A} = 10^{-10}\text{ m}\right)$ et tel que $m = 0{,}067m_e$ avec $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg la masse de l'électron.

3. À quel domaine du spectre appartiennent les longueurs d'ondes des photons obtenues dans la question précédente ? Proposer des applications pratiques de tels puits quantiques.

SOLUTIONS

Exercice 1. Caractère quantique d'une situation

1. a. $\lambda_{DB} = 2.10^{-34}$ m << qqs cm : pas d'effet quantique b. $\lambda_{DB} = 6.10^{-17}$ m << qqs m : pas d'effet quantique c. $\lambda_{DB} = 7.10^{-19}$ m << qqs mm : pas d'effet quantique d. $\lambda_{DB} = 7.10^{-9}$ m $\approx 10^{-10}$ m : effets quantiques 2. $\lambda_{DB} = 3.10^{-10}$ m $\approx 10^{-10}$ m : effets quantiques 3. $\lambda_{DB} = 7.10^{-10}$ m $\approx 10^{-10}$ m : effets quantiques

*Exercice 2. Niveaux d'énergie de l'hydrogène

1. Relation de de Broglie : $\lambda_{DB} = \dfrac{h}{p}$

   Quantité de mouvement : $p = \dfrac{h}{\lambda_{DB}} = \dfrac{h}{\frac{2\pi r}{n}}$ soit $\boxed{p = n\dfrac{\hbar}{r}}$ avec $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

2. Quantité de mouvement $p = \dfrac{K}{\sqrt{r}}$ soit $\dfrac{K}{\sqrt{r}} = n\dfrac{\hbar}{r}$

   Rayon de l'orbite de Bohr tel que : $\sqrt{r_n} = n\dfrac{\hbar}{K}$ soit $\boxed{r_n = K'n^2}$

   Le rayon est proportionnel à n^2.

3. Quantité de mouvement proportionnelle à $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ soit à $\dfrac{1}{n}$.

   L'énergie cinétique de l'électron est proportionnelle à p^2, car $E_C = \dfrac{p^2}{2m}$, donc proportionnelle à $\boxed{\dfrac{1}{n^2}}$, ce qui est observé expérimentalement. L'énergie potentielle, non prise en compte dans cette approche, se comporte de même.

Exercice 3. Énergie de différents photons

Rayons X : $n = 5{,}0.10^{14}$ photons.s^{-1}, émetteur de radio : $n = 1{,}2.10^{31}$ photons.s^{-1}, lampe au sodium : $n = 1{,}2.10^{20}$ photons.s^{-1}

*Exercice 4. Rayonnement stellaire

1. L'œil intercepte les rayons lumineux sur la surface de la pupille circulaire :

$$S = \pi \frac{D^2}{4} \simeq 3 \text{ mm}^2 = 3.10^{-6} \text{ m}^2$$

<u>L'énergie reçue</u> chaque seconde (avec filtre) est $\boxed{E = P \cdot 10^{-5} \cdot S \simeq 2.10^{-8} \text{ J}}$

2. L'énergie d'un photon est donnée par la <u>relation de Planck-Einstein</u> :

$$E_{Ph} = h\upsilon = h\frac{c}{\lambda} \simeq 3.10^{-19} \text{ J avec } \lambda = \lambda_{moyenne} = 0{,}6 \text{ µm}$$

<u>Nombre de photons reçus par l'œil en une seconde</u> : $\boxed{N = \frac{E}{E_{Ph}} \simeq 5.10^{10}}$

3. <u>L'énergie reçue</u> par l'œil chaque seconde (sans filtre) est $\boxed{E' = P' \cdot S \simeq 3.10^{-16} \text{ J}}$

avec $P' = 10^{-10}$ W.m^{-2}. Nombre de photons reçus par seconde : $\boxed{N' = \frac{E'}{E_{Ph}} \simeq 1.10^{3}}$

*Exercice 5. Microscope électronique à balayage

1. <u>La diffraction limite le pouvoir de résolution d'un microscope</u>. En effet, à cause de la diffraction, l'image d'un point n'est plus un point mais une tache d'extension spatiale inversement proportionnelle à la taille de l'objet diffractant. Si deux détails d'un objet sont trop proches, leurs images se chevauchent et il est alors impossible de les distinguer.
2. Le <u>spectre de la lumière visible</u> s'étant de $\lambda_V = 400$ nm (violet) à $\lambda_R = 800$ nm (rouge). L'énergie est donnée par la <u>relation de Planck-Einstein</u> $\boxed{E = \frac{hc}{\lambda}}$.

$$\boxed{E_V = 5{,}0.10^{19} \text{ J} = 3{,}1 \text{ eV}} \text{ et } \boxed{E_R = 2{,}5.10^{19} \text{ J} = 1{,}5 \text{ eV}}$$

3. La taille des détails que l'on peut distinguer est de l'ordre de $d = \frac{1}{100}.10 \text{ µm} = 100 \text{ nm}$. Cette longueur est inférieure aux longueurs d'onde du spectre visible : <u>cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique</u>.
4. Le pouvoir de résolution du microscope étant de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, on en déduit que $\boxed{\lambda_{DB} = d = 100 \text{ nm}}$.

<u>Relation de de Broglie</u> : $p = \frac{h}{\lambda_{DB}}$

Énergie cinétique : $\boxed{E_C = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_{DB}^2}}$ A.N. : $\boxed{E_C = 2{,}4.10^{-23} \text{ J} = 1{,}5.10^{-4} \text{ eV}}$

<u>Remarque</u> : cette énergie est facilement réalisable expérimentalement. Actuellement, les MEB permettent de détecter des détails de l'ordre de 0,1 nm, ce qui correspond à une énergie de 150 eV.

5. <u>Énergie cinétique de l'électron</u> : $E_C = 100 \text{ keV} = 1{,}60.10^{-14} \text{ J}$

- Si l'électron n'est pas relativiste, sa vitesse est :

$$v = \sqrt{\frac{2E_C}{m_e}} = 1{,}88.10^8 \text{ m.s}^{-1} = 0{,}6\ c > 0{,}1\ c \text{ : électron relativiste}$$

- Facteur de Lorentz : $E_C = (\gamma - 1)m_e c^2 \Leftrightarrow \gamma - 1 = \frac{E_C}{m_e c^2} \Leftrightarrow \gamma = 1 + \frac{E_C}{m_e c^2} = 1{,}2$

- Vitesse de l'électron relativiste

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow v^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$\boxed{v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_C}{m_e c^2}\right)^2}} = 1{,}64.10^8 \text{ m.s}^{-1} \approx 0{,}5\ c}$$

- Quantité de mouvement : $p = \gamma m_e v$

- Relation de de Broglie : $\boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m_e v} = 3{,}71 \text{ pm}}$

  Avec beaucoup d'énergie (et donc une très grande vitesse des électrons), il est possible d'observer des détails de l'ordre du pm !

*Exercice 6. Absorption de photons par un puits quantique

1. Cette relation traduit la conservation de l'énergie totale au cours de l'absorption ou de l'émission d'un photon par une particule du puits :

$$\boxed{E_n = E_k + h\upsilon_{nk} \quad (n > k)}$$

2. Avec les deux relations de l'énoncé, on a :

$$\frac{h^2}{8mL^2}\left(n^2 - k^2\right) = h\upsilon_{nk} \text{ soit } \boxed{\upsilon_{nk} = \frac{h}{8mL^2}\left(n^2 - k^2\right)}$$

Fréquences : $\boxed{\upsilon_{21} = 3\frac{h}{8mL^2} = 1{,}1.10^{14} \text{ Hz}}$ et $\boxed{\upsilon_{31} = \frac{h}{mL^2} = 3{,}0.10^{14} \text{ Hz}}$

Longueurs d'onde :

$$\boxed{\lambda_{21} = \frac{c}{\upsilon_{21}} = \frac{8mcL^2}{3h} = 2{,}6.10^{-6} \text{ m}} \text{ et } \boxed{\lambda_{31} = \frac{c}{\upsilon_{31}} = \frac{mcL^2}{h} = 1{,}0.10^{-6} \text{ m}}$$

3. Les longueurs d'onde obtenues appartiennent à l'infrarouge. On peut utiliser ces puits quantiques pour réaliser des caméras infrarouges ou pour augmenter le rendement des cellules photovoltaïques actuelles, qui n'absorbent pas dans l'infrarouge.