DM 17, pour le mardi 23/05/2023

PROBLÈME
Calcul d'un déterminant (oral de l'X détaillé)

On pose $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4}$, ... , $a_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \ldots \times (2n)}$.

1) Déterminer a_n en fonction de factorielles.

Le but du problème est de calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ le déterminant de la matrice :

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & \ldots & a_1 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On notera pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \det(D_n)$ et on pose $\Delta_0 = 1$.

Partie I. Relation de récurrence

2) On fixe $n \geq 3$.

a) Que peut-on dire du déterminant de la matrice extraite de la matrice D_n où l'on a effacé la dernière ligne et la première colonne ? Même question avec le déterminant de la matrice extraite de la matrice D_n où l'on a effacé la dernière ligne et la dernière colonne.

b) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Dans quelle colonne de la matrice D_n a-t-on le coefficient a_k sur la dernière ligne ? Vérifier que la matrice extraite de D_n après suppression de la ligne n et de la colonne contenant a_k est la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, $0 \in \mathcal{M}_{n-k,k-1}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{k-1,n-k}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{R})$ et expliciter les matrices A et C.

En utilisant un déterminant par blocs, on obtient que $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$.

3) Montrer que $\forall n \geq 3$, $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \Delta_{n-k}$.

4) Vérifier que la relation précédente est également vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Partie II. Détermination de Δ_n

5) Énoncer le théorème de Taylor-Young et vérifier que si f et g sont deux fonctions qui admettent un développement limité à l'ordre N en 0 de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k + o(x^N) \text{ et } g(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k + o(x^N),$$

alors pour $n \in [\![0, N]\!]$, le coefficient de x^n du développement limité de $f(x)g(x)$ en 0 est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$.
On expliquera brièvement quels sont les termes qui font apparaitre du x^n quand on développe le produit.

On pose dans toute la suite $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

6) Déterminer le plus grand intervalle I sur lequel f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ et justifier que f et g admettent un développement limité à tout ordre en 0. *On ne demande pas de les déterminer explicitement.*

On notera dans la suite pour tout $N \in \mathbb{N}$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} c_k x^k + o(x^N)$ et on pose également $a_0 = 1$ (la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant celle définie au début de l'énoncé).

7) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k! a_k}{(1+x)^{k+1/2}}$.

8) Simplifier $f(x)g(x)$ sur l'intervalle I et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k c_{n-k}$.

9) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = c_n$.

10) Pour $x \in I$, déterminer $g'(x)$ et en déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $g^{(n)}(0)$ en fonction de n et d'un des termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

11) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = (-1)^{n-1} \dfrac{a_{n-1}}{2n}$ et déterminer finalement une expression de Δ_n en fonction de n et de factorielles.