25. Matrices 2, corrigÃ©

Exercice 1. Soient f, g, h les trois applications de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = P(X+1)$, $g(P) = P(X-1)$ et $h(P) = P(1-X)$. On trouve alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

C ne peut pas être semblable aux deux autres matrices car elle a une trace différente. Cependant, A et B sont semblables. En effet, on remarque qu'elles sont presque égales aux signes près. On trouve alors, après quelques essais que si l'on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (qui est son propre inverse), on a alors $A = DBD$. Ceci implique que A et B sont semblables.

Exercice 2. Les $E_{i,j}$ sont de rang 1 et engendrent $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On en déduit que l'espace vectoriel engendré par les matrices de rang 1 est $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et est donc de dimension np.

Exercice 3. Il est clair que $T_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que T_n contient la matrice nulle. De plus, si on fixe $A, B \in T_n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors, pour $i, j \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda A + \mu B)_{i,j} & = & \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} \\ & = & \lambda a_{i+1,j+1} + \mu b_{i+1,j+1} \\ & = & (\lambda A + \mu B)_{i+1,j+1}. \end{array}$$

On a donc bien $\lambda A + \mu B \in T_n$ donc T_n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Afin de trouver sa dimension, on cherche pour des petites valeurs de n à quoi ressemble T_n. Pour $n = 2$, on a :

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et donc $\dim(T_2) = 3$. Pour $n = 3$, on a :

$$T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix},\ a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

et donc $\dim(T_3) = 5$. Pour déterminer une base de T_n, on voit donc qu'il suffit de fixer les coefficients sur la première colonne et la première ligne pour obtenir les coefficients de toute la matrice fixés de manière unique. On peut alors expliciter une base de T_n, constituée des matrices $E_{n,1}, E_{n-1,1} + E_{n,2}, E_{n-2,1} + E_{n-1,2} + E_{n,1}, \dots, I_n, \dots, E_{1,n-1} + E_{2,n}, E_{1,n}$. On en déduit donc que $\dim(T_n) = 2n - 1$.

Exercice 4. Soit E de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = e_i + \sum_{k=1}^{n} e_k.$$

On a $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Posons donc B la matrice $n \times n$ remplie de 1. On a alors $A = I_n + B$. On peut donc utiliser la formule du binôme pour calculer les puissances N-ièmes de A (puisque l'identité commute avec B). Calculons les puissances k-ièmes de B. On a $B^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix}$. On a donc $B^2 = nB$. On montre alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = n^{k-1}B$.

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} A^N &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} n^{k-1} B \\ &= I_n + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} n^k - 1\right) B \\ &= I_n + \frac{1}{n}((1+n)^N - 1)B. \end{aligned}$$

On en déduit que A^N est la matrice avec des $1+\frac{1}{n}((1+n)^N-1)$ sur la diagonale et des $\frac{1}{n}((1+n)^N-1)$ partout ailleurs.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u^{n-1} = 0$ et $u^n = 0$. Il existe alors $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Posons alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $e_k = u^{k-1}(x)$. Montrons alors que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Puisqu'elle est de cardinal n, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Supposons que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0.$$

En composant cette relation par u^{n-1}, en utilisant la relation $u^n = 0$, on trouve $\lambda_1 u^{n-1}(x) = 0$. On en déduit que $\lambda_1 = 0$. En revenant dans la relation de départ et en composant par u^{n-2}, on trouve alors $\lambda_2 u^{n-1}(x) = 0$ ce qui implique $\lambda_2 = 0$. De proche en proche, on montre alors que tous les λ_i sont nuls. La famille est donc libre ce qui implique que c'est une base de E.

On a alors $u(e_1) = u(x) = e_2$. De même, on a $u(e_2) = u^2(x) = e_3$. On montre alors que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$. On en déduit que dans cette base, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ en fonction de a, b, c. On va alors effectuer des opérations élémentaires afin de se ramener à un système triangulaire.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & a-b & a-c\end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - (b+c)L_1)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2).
\end{aligned}$$

On en déduit que si $a=b$ et $a=c$ (autrement dit si a,b,c sont égaux), alors le rang de la matrice vaut 1. Sinon, le rang de la matrice vaut 2.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ a & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 4 & 2 & 0 & a\end{pmatrix}$. On va utiliser des opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire. On va commencer par placer le « a » de la première colonne en 3ieme colonne pour avoir à discuter selon la valeur de a le plus tard possible. On effectue ensuite des opérations élémentaires sur les lignes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & a & 1\\ 3 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 4 & a\end{pmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_3)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & a+1 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 4 & a\end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a-3 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & a-3\end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \text{ et } L_4 \leftarrow L_4 - L_3)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & a-3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-3\end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_3).
\end{aligned}$$

On en déduit que si $a=3$, le rang de la matrice est 2. Si $a \neq 3$, alors le rang de la matrice est 4 (et elle est donc inversible).

Exercice 9. m On a $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}$. En particulier, pour $n=2$, on a :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

On a alors $\mathrm{rg}(A) = 1$ (les deux colonnes sont liées car identiques) donc A n'est pas inversible.

Supposons $n \geq 3$. On va se ramener à I_n en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes. On commence par faire $L_n \leftarrow L_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k$ pour obtenir la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2-n \end{pmatrix}.$$

On a $2 - n \neq 0$ donc on peut réaliser $L_n \leftarrow \dfrac{1}{2-n} L_n$ puis les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ pour se ramener à I_n. On effectue alors les mêmes opérations en partant de I_n. Après la première opération, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient A^{-1} après la seconde opération ce qui donne :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n-3}{n-2} & \frac{1}{2-n} & \dots & \frac{1}{2-n} & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{2-n} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2-n} & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{2-n} & \dots & \frac{1}{2-n} & \frac{n-3}{n-2} & \frac{1}{n-2} \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Procédons par double implication.

($\Leftarrow$) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang 1. A admet donc alors en particulier une ligne non nulle L_{i_0} (sinon A serait nulle et donc de rang 0) et toutes les lignes de A sont proportionnelles à cette ligne (sinon par l'absurde en utilisant la méthode du pivot, on montrerait que le rang de A est supérieur ou égal à 2. Soit donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$ tel que $L_i = x_i L_{i_0}$. Posons $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a alors que $A = CL_{i_0}$ et que C et L_{i_0} sont non nulles (sinon A serait nulle).

($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons que $A = CL$ où C et L sont des matrices colonnes et lignes non nulles de bonne dimension. Si on note $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors on remarque que la i-ième ligne de A est proportionnelle à $x_i L$. Toutes les lignes sont proportionnelles donc A est au plus de rang 1. A est exactement de rang 1 car elle n'est pas nulle (la ligne L n'est pas nulle par hypothèse et il existe un i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$ sinon C serait nulle donc la i_0-ième ligne de A n'est pas nulle).

Exercice 11. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On souhaite montrer que :

$$\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A) \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \ / \ B = PAQ.$$

1) Supposons que $B = PAQ$ avec P inversible et Q quelconque. Puisque multiplier par une matrice inversible préserve le rang, on a $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(AQ)$. De plus, on a $\mathrm{Im}(AQ) \subset \mathrm{Im}(A)$. On a donc $\mathrm{rg}(AQ) \leq \mathrm{rg}(A)$. On en déduit que $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.

2) Supposons $A = J_r$ et $B = J_k$. On a alors $k \leq r$ (si on suppose $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$). Considérons alors $P = I_n$ et $Q = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par bloc). On vérifie (petit calcul) que $B = PAQ$. Le résultat est donc vrai pour les matrices J_r et J_k.

Supposons à présent A de rang r et B de rang k avec $k \leq r$. Alors, A est équivalente à J_r et B équivalente à J_k. On a donc $A = P_1 J_r Q_1$ et $B = P_2 J_k Q_2$. D'après ce que l'on a montré, $J_k = P J_r Q$. On en déduit que :

$$B = P_2(PP_1^{-1}AQ_1^{-1}Q)Q_2,$$

ce qui donne le résultat voulu (la matrice $P_2PP_1^{-1}$ étant inversible comme produit de matrices inversibles).

Exercice 12. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Supposons A inversible. On a alors $A^{-1}(AB)A = BA$ ce qui implique que AB et BA sont semblables. De même, si B est inversible, on a $B(AB)B^{-1} = BA$. On en déduit que si A ou B est inversible, alors AB et BA sont semblables.

2) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque la seule matrice semblable à la matrice nulle est elle-même, on en déduit que AB et BA ne sont pas semblables.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

1) Notons e_1', e_2', e_3' la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par définition de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice, on a $f(e_1') = e_1'$, $f(e_2') = -e_1' + 2e_2'$ et $f(e_3') = e_1' + 2e_2' - e_3'$. On pose alors $e_1 = e_1'$. On essaye alors de construire e_2 et e_3 l'un après l'autre. Cherchons e_2 sous la forme $e_2 = e_2' + \lambda e_1'$ et déterminons λ pour avoir $f(e_2) = 2e_2$. On a :

$$\begin{aligned} f(e_2' + \lambda e_1') &= -e_1' + 2e_2' + \lambda e_1' \\ &= 2(e_2' + \lambda e_1') - e_1' - \lambda e_1'. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $\lambda = -1$. On en déduit que $e_2 = -e_1' + e_2'$.

On procède de même pour trouver e_3 que l'on cherche sous la forme $e_3 = \lambda e_1' + \mu e_2' + e_3'$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda e_1' + \mu e_2' + e_3') &= \lambda e_1' + \mu(-e_1' + 2e_2') + (e_1' + e_2' - e_3') \\ &= -(\lambda e_1' + \mu e_2' + e_3') + (2\lambda - \mu + 1)e_1' + (3\mu + 1)e_2'. \end{aligned}$$

On a donc $\mu = -\dfrac{1}{3}$ et $\lambda = -\dfrac{2}{3}$. On en déduit que $e_3 = -\dfrac{2}{3}e_1' - \dfrac{1}{3}e_2' + e_3'$. En résumé, on a donc :

$$\begin{cases} e_1 = e_1' \\ e_2 = -e_1' + e_2' \\ e_3 = -\dfrac{2}{3}e_1' - \dfrac{1}{3}e_2' + e_3' \end{cases}$$

2) La famille (e_1, e_2, e_3) est triangulaire construite à partir d'une famille libre. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En effet, si on a $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, en utilisant le vecteur e_3', on a $\lambda_3 = 0$, en

utilisant ensuite e_2, on a $\lambda_2 = 0$ ce qui implique alors que $\lambda_1 = 0$. Cette famille est de cardinal 3 et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On a alors $\mathrm{mat}(f, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$. Puisque cette matrice représente l'application f dans une autre base, on en déduit que A est semblable à cette matrice. Il existe donc une matrice P inversible telle que :

$$A = P^{-1}BP.$$

On en déduit que $A^n = (P^{-1}BP)^n = P^{-1}B^nP$. Or, on peut ici calculer P puisqu'il s'agit d'une matrice de passage de la base e à la base e'.

On a $\mathrm{mat}_{e'}(f) = P^e_{e'}\mathrm{mat}_e(f)P^{e'}_e$, c'est à dire $A = P^e_{e'}BP^{e'}_e$.

On a directement, puisque e' est la base canonique que $P^e_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à déterminer son inverse pour pouvoir calculer A^n. Pour trouver $P^{e'}_e$, on résout le système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 = y_1 \\ x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ce système est triangulaire. On peut donc le résoudre et on trouve comme solution $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$.

On en déduit que :

$$P^{e'}_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A^N = P^e_{e'}B^NP^{e'}_e$. Ceci entraine que :

$$\begin{aligned} A^N &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2^N & 2^N/3 \\ 0 & 0 & (-1)^N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-2^N & (1 - 2^N/3 + (-1)^{N+1}2/3) \\ 0 & 2^N & (2^N/3 + (-1)^{N+1}/3) \\ 0 & 0 & (-1)^N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 15. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) On trouve $A^2 = 3A$. On en déduit que si l'on pose $B = \dfrac{1}{3}A$, alors $B^2 = \dfrac{1}{9}A^2 = \dfrac{1}{3}A = B$. Si on note p l'application linéaire canoniquement associée à B, alors on a que $p^2 = p$ et donc p est un projecteur. On a donc bien $f = 3p$ où p est un projecteur.

2) Puisque $f = 3p$, on a $\ker(f) = \ker(p)$ (car $x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow 3p(x) = 0_E \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \ker(p)$) et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p)$ (preuve similaire). Puisque p est un projecteur, on a $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$, ce qui donne $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Pour trouver $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, on étudie $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

On a donc $\ker(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.

De même, on a :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

En effet, on a $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc les 3 vecteurs sont liés et les deux premiers sont libres car non colinéaires. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((2,-1,-1), (-1,2,-1)\right).$$

Une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est alors la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3) = ((1,1,1), (2,-1,-1), (-1,2,-1))$. On a par définition de la projection p que $p(f_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $p(f_2) = f_2$ et $p(f_3) = f_3$. Puisque $f = 3p$, on en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. (m)

1) Pour $x = 1$, on remarque directement que $\mathrm{rg}(B) = 1$ (toutes les colonnes sont identiques). Supposons à présent $x \neq 1$. On peut simplifier des lignes en utilisant la 3ieme ligne comme pivot par exemple et en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - xL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$. On obtient alors que B est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Puisque $x - 1 \neq 0$, on peut diviser les lignes 1 et 2 par $x - 1$ et se ramener à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -x-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Pour se ramener à une matrice triangulaire inférieure, il reste à échanger L_1 et L_3 et ensuite effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ sur la nouvelle L_3. On a alors B équivalente à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x-2 \end{pmatrix}$$

On obtient donc que $\text{rg}(B) = 3$ (et donc B inversible) si $x \neq -2$ et que $\text{rg}(B) = 2$ si $x = -2$.

Si $x = 1$, une base de $\text{Im}(B)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de $\ker(B)$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (car $(x, y, z) \in \ker(B)$ ssi $x + y + z = 0$ et on peut exprimer x en fonction du reste). Ces 2 vecteurs sont clairement libres (preuve immédiate ou par non colinéarité).

Si $x = -2$, alors, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ (car les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le noyau). On exprime tout en fonction de z et on a donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de $\ker(B)$.

Comme base de $\text{Im}(B)$ (qui est de dimension 2 dans ce cas d'après le théorème du rang), on va avoir $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. En effet, ces 2 vecteurs sont libres (preuve rapide...) et ce sont les 2 premiers vecteurs colonnes de B.

2) On a $A = B - xI_3$ donc $X \in \ker(B) \Leftrightarrow BX = 0 \Leftrightarrow (A + xI_3)X = 0 \Leftrightarrow AX = -xX$.

On prend les vecteurs (f_1, f_2) qui formaient une base de $\ker(B)$ dans le cas $x = 1$ et le vecteur f_3 qui formait une base de $\ker(B)$ quand $x = -2$. On a alors $Af_i = -f_i$ pour $i = 1, 2$ et $Af_3 = 2f_3$. Il reste à vérifier que (f_1, f_2, f_3) est libre (et on aura une base de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3). On a :

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

On a donc bien f qui est une base de $\mathbb{R}^3$.

Si on note $A = \text{Mat}_e(u)$ où e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (et u l'application linéaire canoniquement associée à A) et que l'on note $P = P_e^f$ la matrice de passage de la base e vers la base f, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

où $D = \mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car $u(f_i) = -f_i$ pour $i = 1, 2$ et $u(f_3) = 2f_3$. On a donc bien A semblable à D.