Devoir Surveillé 2, corrigé

Exercice 1. Racines d'un polynôme à coefficients complexes.

1) On a $Q(1) = 0$ donc 1 est une racine évidente de Q. On a alors pour $z \in \mathbb{C}$:

$$Q(z) = (z-1)(z^2 + az + b) = (z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b.$$

On trouve alors $a = 1 - i$ et $b = 2 - 2i$.

2) On cherche Déterminer (sous forme algébrique) $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = -8 + 6i$. En développant et en identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $x^2 - y^2 = -8$ et $2xy = 6 > 0$.

En étudiant le module, on obtient $|\delta^2| = |-8+6i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = 10$. Par somme et différence, on trouve alors $x^2 = 1$ et $y^2 = 9$. Puisque $xy > 0$, on a x et y de même signe. On en déduit que les deux racines carrées de $-8 + 6i$ sont :

$$1 + 3i \text{ et } -1 - 3i.$$

3) On a $z^2 + az + b = z^2 + (1-i)z + 2 - 2i$. On calcule le discriminant :

$$\Delta = (1-i)^2 - 4(2-2i) = -8 + 6i = (1+3i)^2.$$

On en déduit que les racines de Q sont égales à $\dfrac{-1+i+(1+3i)}{2} = 2i$ et $\dfrac{-1+i-(1+3i)}{2} = -1-i$.

4) On a pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = Q(z^3)$. Puisque les racines de Q sont 1, $2i$ et $-1-i$, on a alors z racines de P si et seulement si $z^3 = 1$ ou $z^3 = 2i$ ou $z^3 = -1-i$. On résout ces équations à l'aide des racines 3ièmes de l'unité. On a alors :

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2]\!] \ / \ z = e^{\frac{2ik\pi}{3}}.$$

De plus, puisque $2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$, on a :

$$z^3 = 2i \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2]\!] \ / \ z = 2^{1/3} e^{\frac{i\pi}{6}} \times e^{\frac{2ik\pi}{3}}.$$

Enfin, puisque $-1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, on a :

$$z^3 = -1 - i \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2]\!] \ / \ z = 2^{1/6} e^{-\frac{i\pi}{4}} \times e^{\frac{2ik\pi}{3}}.$$

On a donc trouvé les 9 racines de P.

Exercice 2. Calcul d'une somme.

1)

a) Puisque $\theta \in]0, \pi[$, on a $e^{2i\theta} \neq 1$. Par somme géométrique (en utilisant la formule de Moivre), on a :

$$\sum_{p=0}^{d-1} e^{2ip\theta} = \sum_{p=0}^{d-1} \left(e^{2i\theta}\right)^p = \frac{1 - e^{2i\theta d}}{1 - e^{2i\theta}}.$$

En factorisant alors par l'arc moitié, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{d-1} e^{2ip\theta} = \frac{e^{i\theta d}}{e^{i\theta}} \times \frac{-2i\sin(d\theta)}{-2i\sin(\theta)} = e^{i(d-1)\theta}\frac{\sin(d\theta)}{\sin(\theta)}.$$

On obtient donc exactement la première égalité en multipliant par $e^{-i(d-1)\theta}$. Pour la seconde, on peut soit faire le même calcul, soit remarquer qu'il s'agit exactement du conjugué de la première somme (puisqu'un produit/une somme de conjugués et le produit/la somme des conjugués). Puisque $\dfrac{\sin(d\theta)}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$, il est égal à son propre conjugué et on a l'égalité voulue.

b) On multiplie les deux égalités précédentes ce qui donne, les indices étant indépendants :

$$\frac{\sin^2(d\theta)}{\sin^2(\theta)} = 1 \times \left(\sum_{p=0}^{d-1} e^{2ip\theta}\right) \times \left(\sum_{q=0}^{d-1} e^{-2iq\theta}\right) = \sum_{p=0}^{d-1}\sum_{q=0}^{d-1} e^{2ip\theta} \times e^{-2iq\theta} = \sum_{q=0}^{d-1}\sum_{p=0}^{d-1} e^{2i(p-q)\theta}.$$

c) On peut séparer la somme en trois parties : selon si $p = q$, $p < q$ ou $q < p$. On a donc :

$$\frac{\sin^2(d\theta)}{\sin^2(\theta)} = \sum_{q=0}^{d-1} 1 + \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} e^{2i(p-q)\theta} + \sum_{0 \leq p < q \leq d-1} e^{2i(p-q)\theta}.$$

La première somme vaut d et on peut changer d'indice dans la troisième somme en échangeant les rôles de p et q (ce sont des variables muettes). On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(d\theta)}{\sin^2(\theta)} &= d + \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} e^{2i(p-q)\theta} + \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} e^{2i(q-p)\theta} \\
&= d + \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \left(e^{i2(p-q)\theta} + e^{-i2(p-q)\theta}\right) \\
&= d + \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} 2\cos(2(p-q)\theta) \\
&= d + 2\sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \cos(2(p-q)\theta)
\end{aligned}.$$

2) *La conclusion.*

a) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on peut utiliser la question précédente en $\theta = \dfrac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$. On peut ensuite sommer les égalités pour k allant de 1 à $n-1$ ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(d + 2\sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \cos\left(\frac{2(p-q)k\pi}{n}\right)\right).$$

Par linéarité de la somme, on peut découper les sommes en deux et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d = (n-1)d$. On peut également intervertir les sommes (puisque les indices sont indépendants) ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (n-1)d + 2\sum_{0 \leq q < p \leq d-1}\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2(p-q)k\pi}{n}\right).$$

b) On va calculer cette somme à l'aide d'une somme géométrique. On a $q < p$ donc $0 < p - q$ et puisque $p \leq d-1$ et $-q \leq 0$, on a $p - q \leq d - 1$. Puisque $d \leq n$, on en déduit que $p - q \in [\![1, n-1]\!]$, ce qui permet d'affirmer que $e^{i\frac{2(p-q)\pi}{n}} \neq 1$ (car $\dfrac{2(p-q)\pi}{n} \not\equiv 0\ [2\pi]$). On a alors :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{2(p-q)k\pi}{n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2(p-q)k\pi}{n}} - 1 \\
&= \frac{1-e^{i2(p-q)\pi}}{1-e^{\frac{2i(p-q)\pi}{n}}} - 1 \\
&= 0-1 \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

En effet, on a $2(p-q)\pi \equiv 0\ [2\pi]$ et l'exponentielle complexe est alors égale à 1.

c) Puisque la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles, la question précédente permet d'affirmer que si $0 \leq q < p \leq d-1$, alors :

$$-1 = \mathrm{Re}(-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{2(p-q)k\pi}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2(p-q)k\pi}{n}\right).$$

D'après la question 2.a) (on peut bien remplacer puisque dans la somme, on a $0 \leq q < p \leq d-1$) :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} &= (n-1)d - 2\sum_{0\leq q<p\leq d-1} 1 \\
&= (n-1)d - 2\sum_{p=0}^{d-1}\sum_{q=0}^{p-1} 1 \\
&= (n-1)d - 2\sum_{p=0}^{d-1} p \\
&= (n-1)d - 2\frac{d(d-1)}{2} \\
&= nd - d^2 \\
&= d(n-d).
\end{aligned}
$$

PROBLÈME
ÉTUDE D'UNE FONCTION ET D'UNE SUITE

1) *Une première fonction.*

a) g_n est définie sur $]-1,+\infty[$ (on doit avoir $1+x>0$ pour que le logarithme soit bien défini). Elle y est dérivable comme somme (et composée) de fonctions dérivables.

b) On a pour $x \in \mathcal{D}$:

$$
\begin{aligned}
g_n'(x) &= \frac{n}{1+x} + \frac{3}{1+x} - \frac{3x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{n}{1+x} + \frac{3+3x-3x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{n}{1+x} + \frac{3}{(1+x)^2}.
\end{aligned}
$$

On a donc g_n' qui est strictement positive sur $\mathcal{D}$. La fonction g_n est donc strictement croissante sur $\mathcal{D}$.

c) On a $g_n(0) = 0$. Puisque g_n est strictement croissante sur $\mathcal{D}$, elle ne s'annule qu'en 0. On en déduit que $g_n(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[$ et que $g_n(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$.

2) *Une nouvelle fonction.*

a) $x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vaut -1 en -1, on a $1 + x^3 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. On en déduit que f_n est définie sur $\mathcal{D}_2 =]-1, +\infty[$. Elle est également dérivable sur $\mathcal{D}_2$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_2$ (la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > -1, 1+x^3 > 0$). Pour $x \in \mathcal{D}_2$, on a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x^3) + \frac{3x^{n+2}}{1+x^3} \\ &= x^{n-1}\left(n\ln(1+x^3) + \frac{3x^3}{1+x^3}\right) \\ &= x^{n-1}g_n(x^3). \end{aligned}$$

b) On en déduit alors les tableaux de signes suivants, selon la parité de n :

- Quand n est pair :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$g_n(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	$\|$	$+$	0	$+$	
f_n	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On trouve les limites de f_n par produits de limites (aucune forme indéterminée). Puisque n est pair (et strictement positif), on a $(-1)^n = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

- Si n est impair, on a alors $x^{n-1} \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_2$ (ceci est aussi valable si $n = 1$). On a alors :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$		$+$	
$h_n(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f_n	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites sont aussi déterminées par produits de limites de la même manière que dans le cas précédent.

Dans tous les cas, puisque pour tout $x > 0$, $f'_n(x) > 0$ (d'après la question 1) et que la seule valeur où f'_n s'annule est en 0, on en déduit que f_n strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x-1)x^n \ln(1+x^3)$. On en déduit alors les tableaux de signes suivants :

- Si n est pair :

x	-1		0		1		$+\infty$
x^n		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(1+x^3)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

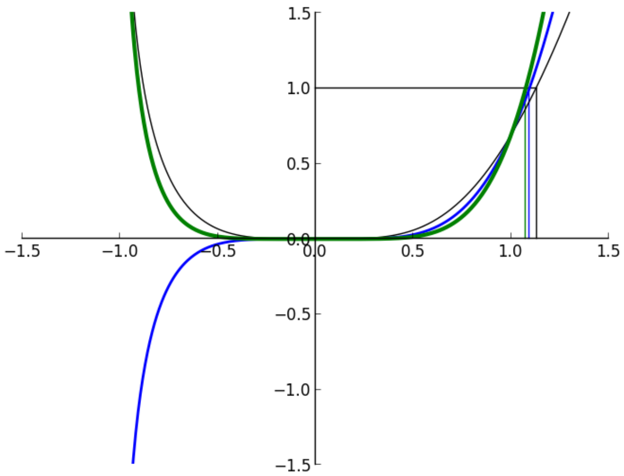
On en déduit que pour n pair, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \Leftrightarrow x \in]-1, 0] \cup [1, +\infty[$.

- Si n est impair :

x	-1		0		1		$+\infty$
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(1+x^3)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$\Vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que pour n impair, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \Leftrightarrow (x = 0)$ ou $(x \in [1, +\infty[)$.

d) On déduit des questions précédentes les graphes suivants (f_1 en traits fins, f_2 en trait moyen et f_3 en trait plus épais). Le point important est de bien respecter l'ordre des courbes les unes par rapport aux autres trouvé à la question précédente. On a également représenté sur le graphe les emplacement de α_1, α_2 et α_3 (de gauche à droite : α_3, α_2 et α_1) qui correspondent aux valeurs pour lesquels les fonctions f_1, f_2 et f_3 valent 1 (sur $\mathbb{R}_+$).



3)

a) Nous avons montré à la question 2.a) que $f_n(0) = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Puisque f_n est continue, on en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $\alpha_n \in [0, +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.

Puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que cette valeur de α_n est unique. En effet, si on avait deux valeurs distinctes α_n et β_n telles que $f_n(\alpha_n) = f_n(\beta_n)$, alors, puisque $\alpha_n < \beta_n$ ou $\alpha_n > \beta_n$, on a donc, par stricte croissante de f_n, $f_n(\alpha_n) < f_n(\beta_n)$ ou $f_n(\alpha_n) > f_n(\beta_n)$, c'est à dire $1 < 1$ ou $1 > 1$, ce qui est absurde.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $\alpha_n < 1$. Puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $f_n(\alpha_n) < f_n(1)$, c'est à dire $1 < \ln(2)$. Ceci est absurde puisque d'après l'énoncé, $\ln(2) \approx 0,69$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n \geq 1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.c), on a pour tout $x \geq 1$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Puisque $\alpha_n \geq 1$, on a alors $f_n(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_n)$. On en déduit que :

$$1 \leq f_{n+1}(\alpha_n).$$

Supposons par l'absurde que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Alors, puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, c'est à dire $f_{n+1}(\alpha_n) < 1$ ce qui est absurde !

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$. Ceci entraine que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée (par 1). Elle converge donc vers une limite $l \geq 1$. Nous allons montrer que $l = 1$. Supposons par l'absurde que $l > 1$. En partant de la relation $1 = f_n(\alpha_n)$ et en utilisant l'indication de l'énoncé, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 = e^{n\ln(\alpha_n)} \ln(1 + \alpha_n^3).$$

Puisque la fonction ln est croissante et que $\alpha_n \geq 1$, on a $\ln(1 + \alpha_n^3) \geq \ln(2)$. On a donc :

$$1 \geq \ln(2)e^{n\ln(\alpha_n)}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = l$, par continuité de ln (ou par composition de limites), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(l) > 0$. Par produit de limites, on a donc $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(\alpha_n)} \ln(2) = +\infty$, ce qui est absurde car une suite majorée par 1 ne peut pas tendre vers $+\infty$!

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers 1.

PROBLÈME
Une limite classique.

1) *Existence de la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2} &= \frac{k^2-k(k-1)-(k-1)}{k^2(k-1)}\\ &= \frac{1}{k^2(k-1)}\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité voulue.

b) Par somme télescopique et sommes d'inégalités, on en déduit pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}u_n &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\\ &\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &\leq 1+1-\frac{1}{n}\\ &\leq 2-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc (strictement) croissante et majorée par 2 d'après la question précédente. Elle converge donc.

2) *Convergence de* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}$. On peut alors séparer cette somme en les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs. Les termes d'indices impairs correspondent exactement à v_n. Pour les termes d'indices pairs, on peut effectuer le changement de variable $k = 2j$ (avec j variant entre 1 et n car k varie entre 1 et $2n$ et est pair). On a alors :

$$\sum_{k=1,k \text{ pair}}^{2n}\frac{1}{k^2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{4}u_n.$$

On a donc bien $u_{2n} = \dfrac{u_n}{4} + v_n$.

b) Puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - \dfrac{u_n}{4}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers la même limite (par composition de limites). La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc comme somme de suites convergentes. On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = L - \frac{L}{4} = \frac{3L}{4}$.

3) *Un peu de trigonométrie.*

a) Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Remarquons que toutes les expressions considérées existent bien (pas de division par 0) puisque $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{\pi-x}{2}$ sont dans $]0,\pi[$ et le sinus ne s'annule pas. Ceci entraine que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \qquad (\text{car } \cos^2+\sin^2=1)\\
&= \frac{1}{\sin^2\left(2\times\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité voulue.

b)

i) Soit $k \in [\![0, 2^{n-1}-1]\!]$. Remarquons que $0 < \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \leq \dfrac{(2^n-2+1)\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2^{n+1}} < \dfrac{\pi}{2}$.

On peut donc utiliser la question précédente en $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ ce qui entraine :

$$\begin{aligned}
w_{n,k} &= \frac{1}{4}\left(w_{n+1,k}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(w_{n+1,k}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2^{n+1}\pi-(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(w_{n+1,k}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2(2^n-k-1)+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(w_{n+1,k}+w_{n+1,2^n-k-1}\right).
\end{aligned}$$

ii) On a donc d'après la question précédente (on a bien k entre 0 et $2^{n-1}-1$ dans la somme) que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n,k} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(w_{n+1,k}+w_{n+1,2^n-k-1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n+1,k} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} + w_{n+1,2^n-k-1}.
\end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'indice $j = 2^n - k - 1$ dans la seconde somme. Les bornes deviennent alors $2^n - 1$ (quand $k = 0$) et $j = 2^n - (2^{n-1}-1) - 1 = 2^{n-1}$ (quand $k = 2^{n-1}-1$). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n,k} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n+1,k} + \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} w_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{n+1,k}.$$

c) On remarque que si on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n,k}$, alors on a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 4a_n$. On a donc une suite géométrique de raison 4. On montre alors rapidement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4^n}{2}$.

Pour $n = 1$, on a $a_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 = \frac{4}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $a_n = \frac{4^n}{2}$. On a alors :

$$a_{n+1} = 4a_n = \frac{4^{n+1}}{2}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. On a donc montré la propriété voulue par récurrence.

d) Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} - 1.$$

On a donc d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} &= \frac{4^n}{2} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} 1 \\
&= \frac{4^n}{2} - 2^{n-1} \\
&= \frac{4^n - 2^n}{2}.
\end{aligned}$$

4) *La conclusion.*

a) Posons $f : x \mapsto x - \sin(x)$. Cette fonction est bien définie et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. On en déduit que f est croissante sur cet intervalle et puisque sa limite en 0 vaut 0, on en déduit que f est positive. De la même manière, si on étudie $g : x \mapsto \tan(x) - x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est dérivable et on a $g'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 = \tan^2(x) \geq 0$. g est donc croissance et sa limite en 0 est également 0. Elle est donc positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a donc bien l'encadrement $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

De plus toutes ces fonctions étant positives, on peut élever au carré (la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$) et tout étant strictement positif, on peut prendre l'inverse (qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$). On a donc bien que $\frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) On va sommer appliquer l'encadrement précédent en $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ pour k entre 0 et $2^{n-1} - 1$ et sommer les inégalités (on a déjà vérifié que tout était bien entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dans la question 2.b). Ceci entraine d'après les questions 2.c et 2.d que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
& \frac{4^n - 2^n}{2} \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)^2} \leq \frac{4^n}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4^n - 2^n}{2} \leq \frac{4^{n+1}}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{4^n}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{8} \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2j-1)^2} \leq \frac{1}{8} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq v_{2^{n-1}} \leq \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

c) On peut alors faire tendre n vers l'infini. D'après le théorème des gendarmes, puisque $2^{n-1}-1$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{\pi^2}{8}$.

D'après la question 2.b, on en déduit que $L = \dfrac{\pi^2}{6}$.