33. Familles sommables, méthodologie

Remarque : Les formules/propriétés suivantes sont à connaitre par coeur (utiles dans de nombreux exercices du chapitre) :

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$. γ *est la constante gamma d'Euler.*
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. *En particulier,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.
- $\forall z \in \mathbb{C}$ / $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

I. Familles sommables de réels positifs

I.1. Convention de calculs dans $[0, +\infty]$

Définition. Si $A \subset [0, +\infty]$ est non vide et non majoré, on pose $\sup(A) = +\infty$. Si A est vide, on pose $\sup(A) = 0$ et si A est non vide et majoré, on a $\sup(A) \in \mathbb{R}_+$.

Remarque : Tout fonctionne comme dans $\mathbb{R}$ en rajoutant les conventions $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x + (+\infty) = +\infty$, $\forall x > 0$, $x \times (+\infty) = +\infty$ et $0 \times (+\infty) = 0$.

I.2. Somme d'éléments de $[0, +\infty]$

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I} \in [0, +\infty]^I$. On pose $\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\subset I \text{ et } J \text{ fini}} \left(\sum_{j\in J} x_j \right)$. Cette valeur appartient à $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Remarque : Si I est fini, on retrouve la somme $\sum_{i\in I} x_i$ habituelle. Si $I = \mathbb{N}$, on retrouve les SATPs avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si la série converge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$ si la série diverge.

Définition. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

Exercice d'application 1. Les familles (positives) suivantes sont-elles sommables ?

1) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2) $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3) $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

I.3. Sommation par paquets

Théorème. Soit $(x_i)_{i\in I}\in[0,+\infty]^I$. Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I (autrement dit, tel que $\displaystyle\bigcup_{k\in K} I_k = I$ et $\forall k_1\neq k_2,\ I_{k_1}\cap I_{k_2}=\emptyset$). Alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in I_k} x_j\right).$$

m C'est en général toujours ce résultat que l'on utilise pour montrer qu'une famille de réels positifs $(x_i)_{i\in I}$ est sommable. On procède de deux façons différentes :

- Soit on écrit $I=\displaystyle\bigcup_{k\in K} I_k$ avec K fini et on se ramène à l'étude d'une somme (finie) de séries à termes positifs de la forme $\displaystyle\sum_{i\in I_k} x_i$ dont il faut montrer la convergence.

- Soit on décompose $I=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ et on montre que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge où $u_k=\displaystyle\sum_{j\in I_k} x_j$. *C'est alors* $\displaystyle\sum_{j\in I_k} x_j$ *qui est alors souvent finie.*

Exercice d'application 2. Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $x_n=\dfrac{1}{n^2}$ si n est pair et $x_n=\dfrac{1}{n^3}$ si n est impair.

2) La famille des réels de $[0,1]$ dont l'écriture décimale est de la forme $0,000\ldots0k000\ldots$ avec $k\in[\![1,9]\!]$. *Autrement dit les nombres qui ont exactement un seul chiffre après la virgule non nul.*

3) $(x_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ où $\forall i,j\in\mathbb{N}^*$, $x_{i,j}=\dfrac{1}{(i+j)^3}$. *On découpera* $(\mathbb{N}^*)^2$ *selon les diagonales* $i+j=$ *constante.*

4) La famille $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}$.

Exercice d'application 3. On pose pour $d\in\mathbb{N}^*$, $S_d=\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\ /\ p\wedge q=d\}$.

1) Vérifier que $(S_d)_{d\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$.

2) En étudiant $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2q^2}$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in S_1}\frac{1}{p^2q^2}$. *On admettra que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

I.4. Règles de calcul

(m) Pour les familles à termes positifs, toutes les propriétés vues pour les sommes finies s'appliquent (changement d'indice, majoration, linéarité,interversion).

Proposition. Soient $(x_i)_{i\in I},\ (y_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$ et $\lambda, \mu \geq 0$. Alors :

- $\forall \sigma : J \to I$ bijective, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\sigma(j)}$.
- $\forall J \subset I,\ \displaystyle\sum_{j\in J} x_j \leq \sum_{i\in I} x_i$.
- Si $\forall i \in I,\ x_i \leq y_i$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i$.
- $\displaystyle\sum_{i\in I} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i$.
- $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leq \sum_{i\in I} |x_i|$.

Remarque : En particulier, pour les séries à termes positifs, si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bijective, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

(m) On peut donc faire les calculs comme pour des sommes finies. Il faut juste faire très attention à ne jamais faire apparaitre de forme indéterminée de type $(+\infty) - (+\infty)$.

Exercice d'application 4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n!}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Théorème. De Fubini. Soit $(u_{i,j}) \in [0,+\infty]^{I\times J}$. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Exercice d'application 5. Déterminer une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la famille $\displaystyle\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

Exercice d'application 6. Déterminer $\displaystyle\sum_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{np(n+p-1)}$.

II. Familles sommables de nombres complexes

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1. Définition

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$. *Autrement dit si* $(|x_i|)_{i\in I}$ *est sommable.*

Remarque : On a donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente.

Définition. On note $l^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des familles sommables de $\mathbb{K}^I$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

II.2. Règles de calcul

Proposition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $J \subset I$ finie telle que $\left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\right| \leq \varepsilon$.

(m) Pour les familles sommables, toutes les propriétés de la partie précédente s'appliquent.

Proposition. Soient $(x_i)_{i\in I},\ (y_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ des familles sommables et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

- $\forall \sigma : J \to I$ bijective, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\sigma(j)}$.
- $\forall J \subset I,\ (x_j)_{j\in J}$ est sommable.
- $\sum_{i\in I}(\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i$.

Remarque : En particulier, pour les séries absolument convergentes, si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bijective, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème. De sommation par paquets. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable. On suppose que $(I_k)_{k\in K}$ est un recouvrement disjoint de I (autrement dit, telle que $\bigcup_{k\in K} I_k = I$ et $\forall k_1 \neq k_2, I_{k_1} \cap I_{k_2} = \emptyset$). Alors, toutes les familles qui apparaissent sont sommables et :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in I_k} x_j\right).$$

Théorème. De Fubini. Soit $(u_{i,j}) \in \mathbb{K}^{I\times J}$ une famille sommable. Alors, toutes les familles qui apparaissent dans la suite sont sommables et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

(m) Pour simplifier une somme infinie, on commence par faire les calculs en supposant que la famille est sommable (on a alors le droit de « tout » faire) et ensuite, on reprend les mêmes calculs en module (ou en valeur absolue) pour justifier la sommabilité de la famille.

Exercice d'application 7. Déterminer $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{n^p}$.

Exercice d'application 8. Soit $x \in]-1,1[$.

1) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(x^{np})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{np}$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

II.3. Produit de Cauchy

Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables. Le produit de Cauchy de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Cette famille est alors sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Remarque : On peut donc faire le produit de Cauchy de deux séries si elles sont absolument convergentes.

Exercice d'application 9. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x)^n$ sont absolument convergentes sur $]-1,1[$ et déterminer leurs sommes. En utilisant un produit de Cauchy, retrouver le fait que pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-x^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\right)$.

Exercice d'application 10. En utilisant des produits de Cauchy, montrer que pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$. De la même façon, déterminer pour $x \in]-1,1[$ l'expression de $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^3}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

III. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente par critère de Riemann ($\alpha = 1$) donc cette famille n'est pas sommable.

2) On a ici une somme géométrique de raison $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc la famille est sommable.

3) On a $\frac{\ln(n)}{n^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissance comparée. Par comparaison de SATPs, on en déduit que la famille $\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable (comparaison avec une série de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$).

Exercice d'application 2.

1) Puisque tout est positif, on a par sommation par paquets $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} x_{2k+1}$. On en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}.$$

Or, les deux sommes considérées sont convergentes (la première car on a directement une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ et la seconde car le terme général est équivalent à $\frac{1}{8k^3}$ et on a $3 > 1$ (comparaison de SATPs avec une série de Riemann convergente). On en déduit que la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

2) Par sommation par paquets, on peut écrire la famille considérées comme parcourant l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{9} \left\{\frac{k}{10^j},\ j \in \mathbb{N}^*\right\}$. Par théorème de sommation par paquets (tout est positif) :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{9}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{k}{10^j} = \sum_{k=1}^{9} \frac{k}{10} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{10^j}.$$

Par somme géométrique, $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{10^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$. On en déduit que :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{9} 9k = 9 \times \frac{9\times 10}{2} = 405.$$

La famille de départ est donc sommable.

3) La famille est bien positive. En utilisant le découpage proposé et en utilisant la sommation par paquets, on a :

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j)^3} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{i,j\in\mathbb{N}^*\ /\ i+j=k} \frac{1}{(i+j)^3} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{i,j\in\mathbb{N}^*\ /\ i+j=k} \frac{1}{k^3}.$$

Or, on a exactement $k-1$ couples (i,j) tels que $i+j=k$ (les couples $(1,k-1), (2,k-2), \dots, (k-1,1)$). On a donc :

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j)^3} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k^3}.$$

Or, on a $\dfrac{k-1}{k^3} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ donc par comparaison de SATPs avec une série de Riemann convergente $(2>1)$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k^3} < +\infty$ et que la famille de départ est donc sommable.

4) On remarque que si $r \in]1,2]$, on a $\dfrac{1}{r^2} \geq \dfrac{1}{4}$. Rien qu'en sommant les rationnels entre 1 et 2, on va donc avoir une somme qui va tendre vers $+\infty$. La famille proposée n'est donc pas sommable. Si on veut détailler un peu plus, on peut par exemple dire que :

$$\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap]1,+\infty[} \frac{1}{r^2} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} = +\infty.$$

Exercice d'application 3.

1) Deux entiers ont un unique PGCD donc $S_{d_1} \cap S_{d_2}$ est bien vide pour $d_1 \neq d_2$. De plus, puisque tous les entiers ont un PGCD qui est bien dans $\mathbb{N}^*$, on a bien $(\mathbb{N}^*)^2 = \displaystyle\bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} S_d$. On a donc bien un recouvrement disjoint.

2) Tout d'abord, par théorème de Fubini positif, on a :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \times \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^4}{36}.$$

De plus, par théorème de sommation par paquets (tout est positif), on a :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in S_d} \frac{1}{p^2 q^2}.$$

Or, si $p \wedge q = d$, on a $p = dp'$ et $q = dq'$ avec $p' \wedge q' = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2} &= \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \sum_{(p,q) \in S_d} \left(\frac{1}{\frac{p}{d} \frac{q}{qd}} \right)^2 \\
&= \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \sum_{(p,q) \in S_1} \frac{1}{p^2 q^2} \\
&= \frac{\pi^4}{90} \times \sum_{(p,q) \in S_1} \frac{1}{p^2 q^2}.
\end{aligned}$$

On a donc finalement $\displaystyle\sum_{(p,q) \in S_1} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{\pi^4}{36} \times \frac{90}{\pi^4} = \frac{5}{2}$.

Exercice d'application 4. Tout est à termes positifs. On a alors ;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n!} + 0 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{n!(n-k-1)!}.$$

On procède alors au changement d'indice $j = n-k-1$. On obtient alors que la somme de départ est égale à :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = e$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = e$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = e$. On en déduit que (tout converge donc on peut faire des sommes) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} = e + e = 2e.$$

De même, puisque $n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = e + 6e - 2e = 4e.$$

Exercice d'application 5. Tout est à termes positifs. On effectue ici une sommation par paquets en écrivant $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{k\geq 2} \left\{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ / \ p+q = k\right\}$. On a alors :

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \ / \ p+q=k} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{p=1}^{k-1} \frac{p(k-p)}{k^\alpha}.$$

Or, on a $u_k = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{pk-p^2}{k^\alpha} = \frac{(k-1)k^2}{2k^\alpha} - \frac{(k-1)k(2(k-1)+1)}{6k^\alpha}$. En regroupant, on a donc :

$$u_k = \frac{3(k^3-k^2) - k(2k^3 - 3k + 1)}{6k^\alpha} = \frac{k^3-k}{6k^\alpha}.$$

On a bien $\forall k \geq 2,\ u_k \geq 0$. On a $u_k \sim_{+\infty} \frac{k^3}{6k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{6k^{\alpha-3}}$. On a donc $\sum u_k$ qui converge si et seulement si $\alpha > 4$. On en déduit que la famille de départ est sommable si et seulement si $\alpha > 4$.

Exercice d'application 6. On peut effectuer là encore le même découpage qu'à l'exercice précédent. On a alors :

$$\sum_{n,p\geq 1} \frac{1}{np(n+p-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)}.$$

Or, on a $\frac{1}{n(k-n)} = \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k-n}\right)$ (décomposition en éléments simples). On a donc :

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k-n}\right) = \frac{2}{k}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n}.$$

En effet, on somme deux fois les mêmes termes (une famille de 1 à $k-1$ et l'autre de $k-1$ à 1). On a donc finalement :

$$\sum_{n,p\geq 1} \frac{1}{np(n+p-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n}.$$

On va alors utiliser le théorème de Fubini (tout est positif) à la famille $x_{k,n} = \frac{1}{n(k-1)k}$ si $n < k$ et $x_{k,n} = 0$ sinon. On a alors :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} = \sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 1} x_{k,n} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2} x_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n(k-1)k}.$$

Or, on a $\dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ (décomposition en éléments simples) et par somme télescopique, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \to_{N\to+\infty} \frac{1}{n}$. On en déduit que :

$$\sum_{n,p\geq 1} \frac{1}{np(n+p-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice d'application 7. En supposant que la famille est sommable, on a en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{n^p} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{n^p} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)}{n}\right)^p \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On a au cours du calcul fait apparaitre une somme géometrique de raison $-\dfrac{1}{n}$ en valeur absolue strictement inférieure à $\dfrac{1}{2} < 1$ car $n \geq 2$. Il reste à présent à justifier la sommabilité, pour cela, en reprenant les premières étapes de calcul en considérant $\left|\dfrac{(-1)^p}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p}$, on obtient (tout est justifié car tout est positif, le seul changement est que la somme géométrique est alors de raison $\dfrac{1}{n}$ au lien de $\dfrac{-1}{n}$)) :

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Or, on a $\dfrac{1}{n(n-1)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente ($2 > 1$). Par comparaison de SATPS, on en déduit que la série converge et donc que la famille initiale est sommable.

Exercice d'application 8. Soit $x \in]-1,1[$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a alors $|x^{np}| = (|x|^p)^n$ et $|x|^p < 1$. Par calcul de somme géométrique, on a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x^{np}| = \frac{1}{1-|x|^p} - 1 < +\infty.$$

On en déduit que la famille proposée est sommable. Pour calculer la somme, on procède exactement de la même façon, ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{np} = \frac{1}{1-x^p} - 1 = \frac{x^p}{1-x^p}.$$

2) Remarquons déjà que l'égalité proposée est vraie en $x=0$ (on obtient $0=0$). On va supposer dans la suite que $x \neq 0$ ce qui nous permettra de faire des divisions par x.

On va commencer par prouver l'égalité proposée en supposant que l'on peut faire toute les interversions de somme que l'on justifiera ensuite par sommabilité de la famille. On utilise la question précédente en $p = 2n-1$ ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} x^{(2n-1)k}.$$

Si on a le droit d'intervertir les deux sommes, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2nk}x^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{-k} \times \frac{x^{2k}}{1-x^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^{2k}}.$$

Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à justifier qu'on peut intervertir, ce qui revient à montrer que la famille $(x^{(2n-1)k})_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Or, si on étudie cette famille en valeur absolue, on a alors pour $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$ (on a $|x|<1$) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^{(2n-1)k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{1-|x|^{2k}}.$$

Enfin, on a $\displaystyle\frac{|x|^k}{1-|x|^{2k}} \sim_{+\infty} |x|^k$ (puisque le dénominateur tend vers 1 car $|x|<1$). Puisque la série de terme général $|x|^k$ est convergente (série géométrique), on en déduit par comparaison de SATPs que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{1-|x|^{2k}}$ converge. Ceci prouve la sommabilité de la famille $(x^{(2n-1)k})_{k,n\geq 1}$ ce qui nous permet de justifier toutes les interversions de somme avec le théorème de Fubini.

Exercice d'application 9. Les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-x)^n$ sont absolument convergentes sur $]-1,1[$ (ce sont des séries géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue). On a directement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

On va effectuer le produit de Cauchy des deux séries (licite par absolue convergence). On a pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k \times (-1)^{n-k}x^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\right) x^n.\end{aligned}$$

Or, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j$ qui vaut 1 si n est pair et 0 sinon. On en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\right) x^n = \sum_{n\in\mathbb{N} \text{ pair}} 1x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}.$$

La dernière égalité provient d'une somme géométrique.

Exercice d'application 10. Pour $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et la série converge absolument (puisque $|x| < 1$). On a alors pour $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge absolument, on peut faire le produit de Cauchy, ce qui entraine que :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Par théorème, cette série est à nouveau absolument convergente. On peut donc recommencer l'opération sur le produit de Cauchy pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{1-x} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k x^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.
\end{aligned}$$