14. Limites, continuité

Exercice 1. (m) Soit f une fonction périodique tendant vers l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. (m) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x^3$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1) Montrer que si $x_0 \notin \{-1, 0, 1\}$, alors f est discontinue en x_0.

2) Montrer que si $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$, alors f est continue en x_0. *On pourra utiliser un encadrement pour déterminer* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Exercice 3. (i) Déterminer une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue en tout point.

Exercice 4. (m) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 5. (i) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x^2)$.

Exercice 6. (m) Vérifier que les fonctions $f : x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et étudier leur continuité.

Exercice 7. (m) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

1) Quels sont les points où f est continue ? On précisera les limites à droite et à gauche en un point de discontinuité de f.

2) Montrer que si l'on prolonge f par $f(0) = 0$, alors la fonction ainsi définie est continue en 0.

Exercice 8. (m) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9. (m) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ (f(x))^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 10. (m) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou bien que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 11. (i)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Que peut-on dire de f ? Le prouver.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ continue. Que peut-on dire de f ? Le prouver.

Exercice 12. (i) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sin(f)$ tend vers 0 en $+\infty$. Que dire de f en $+\infty$?

Exercice 13. (i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone surjective. Montrer que f est continue.

Exercice 14. (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que f est bornée et qu'elle admet un maximum et un minimum.

Exercice 15. (m) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$, alors $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 16. (m) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 17. (m) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On dit que c est un point fixe de f si $f(c) = c$.

1) Montrer que si $f([0,1]) \subset [0,1]$, f admet au moins un point fixe.

2) Montrer que si $[0,1] \subset f([0,1])$, f admet au moins un point fixe.

Exercice 18. (m) Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ telles que $g \circ f = f \circ g$. Soit $x_0 \in [0,1]$ un point fixe de f (x_0 existe d'après l'exercice précédent).

1) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n$.

2) On suppose que $\forall x \in [0,1],\ f(x) > g(x)$. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et arriver à une contradiction.

3) En déduire qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = g(a)$.

Exercice 19. (m) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 20. (i) Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in [0,1[\ /\ f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

On pourra commencer par les cas $n = 2$ et $n = 3$ pour se donner des idées...

Exercice 21. (m) On pose pour $x \neq 0$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais qu'elle n'est pas continue en 0.

2) Montrer que pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 22. (m) Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans I où I est un intervalle à préciser.

2) Déterminer f^{-1}.

Exercice 23. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que tout réel admet exactement n antécédents par f ?

On commencera par les cas $n = 1, 2, 3$ et on fera des dessins !

Exercice 24. (*) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $M(x) = \sup_{t \in [0,x]} f(t)$.

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $M(x)$ est bien définie et que M est une fonction croissante.

2) Montrer que M est continue sur $\mathbb{R}_+$.