DM 13, corrigé

PROBLÈME
Étude de séries

Partie I. Critère de convergence

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} + a_n B_n \\ &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) - a_n B_n + a_n B_n \\ &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.\end{aligned}$$

Puisque $B_0 = b_0$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = S_n$.

2)

a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on a par somme télescopique, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on en déduit que $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge également.

b) On sait que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Notons $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq K$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|(a_n - a_{n+1})B_n| \leq K \times |a_n - a_{n+1}|.$$

Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $a_n \geq a_{n+1}$. On en déduit que :

$$|(a_n - a_{n+1})B_n| \leq K(a_n - a_{n+1}).$$

Puisque $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum |(a_n - a_{n+1})B_n|$ converge et donc que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument.

c) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n B_n = 0$ puisque la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (on peut le détailler avec le théorème des gendarmes en écrivant que $|a_n B_n| \leq |a_n| \times K$). D'après la question 2.b, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument donc elle converge. D'après la question 1, on en déduit par somme de suites convergentes que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donc que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

3) On a déjà la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et qui converge vers 0. Il reste à montrer pour pouvoir utiliser la question 2 que la suite $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ est bornée. Or, on a une série géométrique de raison $-1 \neq 1$. On a donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq \frac{2}{2} \leq 1$. D'après la question 2, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ qui converge.

4)

a) Si $x \equiv 0 \ [2\pi]$, on a $\cos(kx) = 1$ et donc $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Si $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$, on a alors $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k\right)$. Puisque $e^{ix} \neq 1$, on a alors par somme géométrique, et en utilisant l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

b) Si $x \equiv 0 \ [2\pi]$, on a alors $\frac{\cos(nx)}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Par comparaison de séries à termes positifs avec une série de Riemann, on en déduit que la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$, alors si on pose $a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ et $b_n = \cos(nx)$, on a bien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et qui tend vers 0 (puisque $\alpha > 0$) et la suite $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ bornée d'après la question précédente (puisque le terme au numérateur est bornée et que le dénominateur est constant). D'après la question 2, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(nx)}{(n+1)^\alpha}$ est convergente.

Exercice. Séries de Bertrand.

1) Si $\alpha < 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{n^{-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \to +\infty$ par croissances comparées (ici $-\alpha > 0$). La série diverge donc grossièrement.

2) Soit $\alpha \in [0,1[$. On a alors $\frac{n^\alpha \ln^\beta(n)}{n} = \frac{\ln^\beta(n)}{n^{1-\alpha}} \to 0$ par croissances comparées (car $1-\alpha > 0$). On a donc bien $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$. Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison de séries à termes positifs (tout est clairement positif), on en déduit que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est divergente.

3) Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Il existe donc $\alpha_0 > 1$ tel que $\alpha_0 < \alpha$. On montre alors de la même manière que dans la question précédente que :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_0}}\right).$$

En effet, en effecutant le quotient, on obtient $\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}\ln^\beta(n)} \to 0$ quand n tend vers l'infini par croissances comparées (car $\alpha - \alpha_0 > 0$). Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha_0}}$ est une série de Riemann convergente (car $\alpha_0 > 1$) donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est convergente.

4) On se place dans le cas $\alpha = 1$.

a) Si $\beta = 0$, le terme général de la série est $\dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Si $\beta < 0$, on a $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{n\ln^\beta(n)}\right)$. Puisque $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et par comparaison de séries à termes positives, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ diverge.

b) La fonction f_β est dérivable sur $[2, +\infty[$ (comme quotient de fonctions dérivables) et pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$f'_\beta(x) = \frac{-(\ln(x))^\beta - \beta(\ln(x))^{\beta-1}}{(x(\ln(x))^\beta)^2} = \frac{(\ln(x))^{\beta-1}}{(x(\ln(x))^\beta)^2} \cdot (-\ln(x) - \beta) < 0.$$

Ceci entraine que f_β est décroissante sur son intervalle de définition.

c) f_β est continue sur $[2, n]$ donc on peut calculer l'intégrale. On a alors :

- Si $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)} &= [\ln(\ln(x))]_2^n \\ &= \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)). \end{aligned}$$

- Si $\beta \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int_2^n \frac{1}{x\ln^\beta(x)} &= \left[\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(x)}\right]_2^n \\ &= \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(2)}. \end{aligned}$$

d) On effectue une comparaison série intégrale. La fonction f_β étant décroissante sur $[2, +\infty[$, on a que pour $k \geq 2$ et pour $t \in [k, k+1]$, $f_\beta(k+1) \leq f_\beta(t) \leq f_\beta(k)$. En intégrant entre k et $k+1$, on trouve alors :

$$f_\beta(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k).$$

En sommant de 2 à $n-1$, on en déduit que :

$$\sum_{k=2}^{n-1} f_\beta(k+1) \leq \int_2^n f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n-1} f_\beta(k).$$

On en déduit que :

- Si $\beta < 1$, alors d'après le calcul du c), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_2^n f_\beta(t)dt = +\infty$ (puisque $\beta - 1 < 0$). Ceci entraine d'après la comparaison série/intégrale (en utilisant l'inégalité de droite) que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ diverge.

- Si $\alpha = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt = +\infty$. Ceci entraine par comparaison série/intégrale que la série diverge.
- Si $\beta > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_2^n f_\beta(t)dt$ existe et est finie. Ceci entraine que la suite $n \mapsto \int_2^n f_\beta(t)dt$ est bornée et donc en particulier majorée. En prenant l'inégalité de gauche de la comparaison série/intégrale, on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=3}^n f_\beta(n)\right)_{n\geq 3}$ est majorée. Puisque la série est à termes positifs, on déduit la suite précédente est croissante majorée et donc que la série converge (et rajouter le terme d'indice 2 ne change pas la nature de la série).