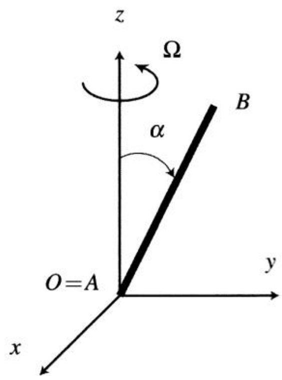
TRAVAUX DIRIGÉS MI7
Mouvements d'un solide

Niveau 1

*Exercice 1. Mouvement d'une nacelle de grande roue

La grande roue installée place de la Concorde à Paris est haute de $H = 60$ m. Chaque nacelle, suspendue au bout d'un bras d'une longueur $d = 2{,}5$ m, réalise un tour en $\Delta t = 10$ mn. On note O le centre de la grande roue.
Décrire le mouvement d'une nacelle et donner les vitesses (linéaire et angulaire) moyennes.

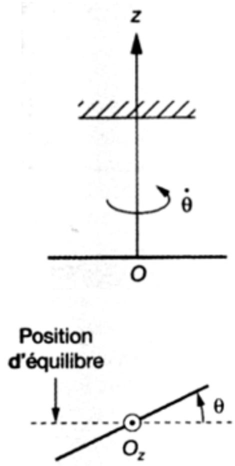
*Exercice 2. Rotation d'une barre autour d'un axe fixe



Une barre rigide AB de longueur L est mise en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω autour d'un axe fixe (Oz) dans un référentiel $\mathscr{R}$ lié au repère $(O;x,y,z)$. La barre est située dans un plan vertical et son extrémité A est confondue avec O. Elle fait un angle α avec l'axe (Oz).

1. Décrire le mouvement du point A dans $\mathscr{R}$.
2. Décrire celui de B puis exprimer ses vecteurs position, vitesse et accélération. On s'aidera d'un schéma sur lequel on définira une base adaptée au problème.

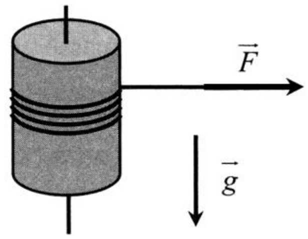
*Exercice 3. Énergie potentielle de torsion



On considère un bâton homogène (longueur l, masse m, moment d'inertie J_Δ) accroché à une ficelle. La position du bâton est repérée par l'angle θ. La ficelle exerce sur le bâton un couple de torsion $\mathscr{C} = -C\theta$.

1. Exprimer la puissance P du couple de torsion, ainsi que le travail W du couple entre les angles θ_1 et θ_2.
2. Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. L'exprimer explicitement.
3. Quelle analogie peut-on faire ?
4. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, déterminer l'équation du mouvement du pendule de torsion.

Exercice 4. La toupie



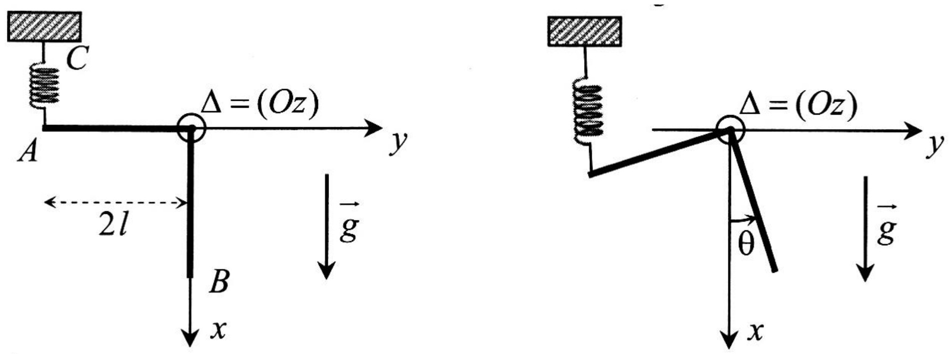
Un enfant joue avec une toupie qu'il fait tourner à l'aide d'un fil inextensible entouré sur le corps de la toupie. Celle-ci est assimilable à un cylindre de masse m et de rayon R. Une pointe métallique de masse négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. Pendant tout son mouvement, la toupie reste verticale. L'enfant enroule le fil (4 tours) puis tire sur le fil avec une force de norme F constante. On note ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie. L'enfant commence à exercer la force à la date $t=0$, la toupie étant initialement immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.
2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique. En déduire l'accélération angulaire de la toupie et sa vitesse angulaire instantanée.
3. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé ?

Niveau 2

Exercice 5. Oscillation d'un solide soumis à une force élastique

Un solide (S) est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant entre elles un angle droit. Chaque tige a pour masse m et pour longueur $2l$. (S) peut tourner autour d'un axe horizontal $\Delta = (Oz)$ passant par O.



La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, de longueur au repos L_0, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur supposé vertical et uniforme, AO est horizontale et OB verticale.
Le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur $2l$, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par une extrémité, est : $I = \frac{4}{3}ml^2$.

1. Que vaut le moment d'inertie J_Δ de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe Δ ?
2. Déterminer la longueur $L_{éq}$ du ressort à l'équilibre.

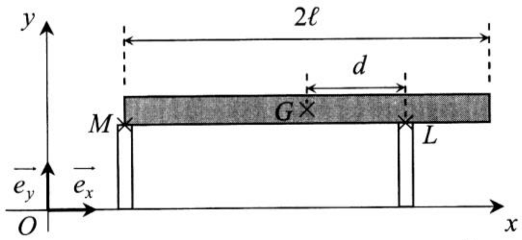
On se propose d'étudier les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle θ restant petit, on pourra considérer que la force exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant le mouvement.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période en fonction de m, g, k et l.
4. Calculer la période sachant que $m = 100$ g, $l = 10$ cm, $g = 9{,}8$ m.s^{-2}, $k = 12$ N.m^{-1}.

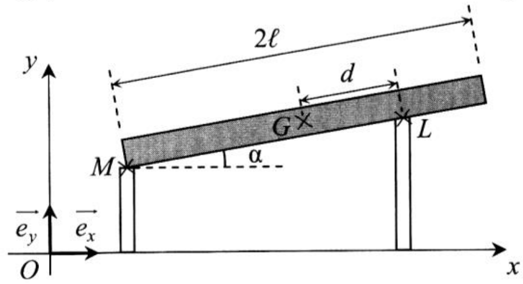
*Exercice 6. Portage d'une poutre

Les deux charpentiers Mario et Luigi portent ensemble une poutre, de longueur $2l = 4{,}0$ m et de masse $m = 30$ kg. Mario est à une extrémité M de la poutre, Luigi étant au point L à une distance $d = 1{,}4$ m du milieu de la poutre, où se situe le centre d'inertie G. Les deux forces qu'ils exercent sur la poutre sont verticales.

1. On suppose tout d'abord que les deux charpentiers ont la même taille, la poutre étant donc maintenue horizontale. Déterminer les normes des forces $\overrightarrow{F_M}$ et $\overrightarrow{F_L}$ exercées par les deux charpentiers.



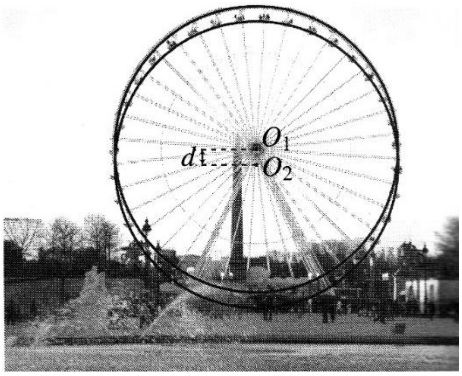
2. En fait, Mario est plus petit que Luigi, la poutre faisant alors un angle α avec l'horizontale. Les forces restent toujours verticales. Déterminer à nouveau les normes des deux forces et commenter.



SOLUTIONS

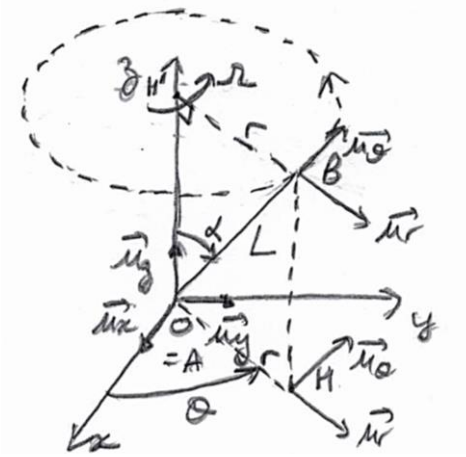
*Exercice 1. Mouvement d'une nacelle de grande roue

- Mouvement de la nacelle : Une nacelle est un solide en translation circulaire de rayon $R=\dfrac{H}{2}$ et parcourt le cercle en une durée $\Delta t=10$ mn .
- Vitesse angulaire moyenne : $\boxed{\langle\omega\rangle=\dfrac{2\pi}{\Delta t}=10.10^{-3}\ \text{rad.s}^{-1}}$
- Vitesse linéaire moyenne : $\boxed{\langle v\rangle=R\langle\omega\rangle=\dfrac{2\pi R}{\Delta t}=0{,}31\ \text{m.s}^{-1}}$
- Conclusion : tous les points de la nacelle décrivent un cercle de même rayon avec la même vitesse moyenne. Par contre, la trajectoire n'est pas centrée sur le même point. Sur la figure, le bas de la nacelle décrit un cercle de centre O_2 et le point d'attache de la nacelle décrit un cercle de centre O_1, situé au-dessus de O_2, tel que $O_1O_2=d=2{,}5$ m .



*Exercice 2. Rotation d'une barre autour d'un axe fixe

1. Système = barre AB = solide en rotation autour de (Oz)
   $A=O$: A appartient à l'axe de rotation (Oz) : A est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}\left(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$
2. B trajectoire circulaire dans un plan orthogonal à (Oz) : mouvement de rotation uniforme car le solide est en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω .



- On place H = projeté orthogonal de B dans le plan (xOy)
- Base cylindrique : $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$
- Trajectoire de B : cercle de centre H' (= projeté orthogonal de B sur (Oz)), de rayon $r=H'B=OH$
- Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OB}=r\overrightarrow{u_r}+z\overrightarrow{u_z}=L\sin(\alpha)\overrightarrow{u_r}+L\cos(\alpha)\overrightarrow{u_z}}$

- Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v_B} = \dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = L\sin(\alpha)\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = L\sin(\alpha)\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ avec $\dot{\theta} = \Omega$ (L et α sont constants) soit $\boxed{\overrightarrow{v_B} = L\sin(\alpha)\Omega\overrightarrow{u_\theta}}$: vitesse orthoradiale uniforme
- Vecteur accélération : $\overrightarrow{a_B} = \dfrac{d\overrightarrow{v_B}}{dt} = L\sin(\alpha)\Omega\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$ car $\Omega = cste$

$$\boxed{\overrightarrow{a_B} = -L\sin(\alpha)\Omega^2\overrightarrow{u_r}}$$: accélération centripète

*Exercice 3. Énergie potentielle de torsion

1. Puissance du couple de torsion : $\mathcal{P} = \mathcal{C}\dot{\theta} = -C\theta\dot{\theta}$

   Travail du couple de torsion : $W = \int \mathcal{P}dt = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} C\theta\dot{\theta}dt$

$$\boxed{W = -C\int_{\theta_1}^{\theta_2}\theta d\theta = -\frac{C}{2}\left(\theta_2^2 - \theta_1^2\right)}$$

2. Le travail W ne dépend pas de la trajectoire suivie mais uniquement de l'angle initial et de l'angle final : $W = -\Delta E_P$

$$\Delta E_P = E_P(\theta_2) - E_P(\theta_1) = \frac{C}{2}\left(\theta_2^2 - \theta_1^2\right)$$

   L'énergie potentielle s'écrit : $E_P(\theta) = \dfrac{C}{2}\theta^2 + cste$

   On suppose que lorsque $\theta = 0$, i.e. quand le fil n'est pas tordu : $E_P(0) = 0$, soit $cste = 0$ et $\boxed{E_P(\theta) = \dfrac{C}{2}\theta^2}$

3. Le pendule de torsion est l'analogue, pour la rotation, du ressort. Pour ce dernier, la force est proportionnelle à l'allongement du ressort, ce qui mène à des oscillations harmoniques en translation. Pour le pendule de torsion, le couple exercé est proportionnel à l'écart angulaire par rapport à l'équilibre, et cette modélisation conduit aussi à des oscillations harmoniques.
4. Système : bâton assimilé à un solide de masse m et de moment d'inertie J_Δ

   Référentiel terrestre supposé galiléen

   Forces : Poids appliqué au centre de gravité G : $\vec{P}$: force conservative dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{P,pesanteur} = mgz + cste$

   Tension du fil $\vec{T}$ appliquée en O : non conservative et $W(\vec{T}) = 0$

   Couple de torsion $\mathcal{C}$ conservatif dérivant de l'énergie potentielle de torsion : $\boxed{E_{P,torsion}(\theta) = \dfrac{C}{2}\theta^2}$

   Le système est conservatif. Le degré de liberté est θ.

   Énergie cinétique d'un solide en rotation : $E_C = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathscr{P}^{NC} = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_{P,pesanteur}}{dt} + \frac{dE_{P,torsion}}{dt} = 0$$

Le mouvement de la barre reste dans un plan horizontal : $E_{P,pesanteur} = cste$

$$\frac{dE_C}{d\dot\theta}\frac{d\dot\theta}{dt} + \frac{dE_{P,torsion}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0 \Leftrightarrow J_\Delta \dot\theta\ddot\theta + C\theta\dot\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot\theta + \omega_0^2\theta = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{C}{J_\Delta}}$$

C'est un oscillateur harmonique non amorti.

Exercice 4. La toupie

1. $\mathscr{P}\left(\vec{F}\right) = RF\omega$ 2. $\dot\omega = \dfrac{2F}{mR}$ $\omega(t) = \dfrac{2F}{mR}t$ 3. $\omega_f = 4\sqrt{\dfrac{2\pi F}{mR}}$

Exercice 5. Oscillation d'un solide soumis à une force élastique

1. $J_\Delta = \dfrac{8}{3}ml^2$ 2. $L_{éq} = L_0 + \dfrac{mg}{2k}$ 3. $\ddot\theta + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{l(mg+4kl)}{J_\Delta}} = \dfrac{2\pi}{T_0}$

$T_0 = 4\pi\sqrt{\dfrac{2ml}{3(mg+4kl)}}$ 4. $T_0 = 0{,}43$ s

*Exercice 6. Portage d'une poutre

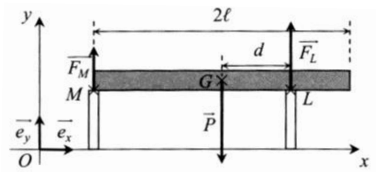
1. Système : poutre assimilée à un solide de centre de gravité G, de masse m

   Référentiel : terrestre supposé galiléen, base cartésienne $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$

   Forces : Poids appliqué en G : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_y}$

   Force de Mario en M : $\vec{F_M} = F_M\vec{e_y}$

   Force de Luigi en L : $\vec{F_L} = F_L\vec{e_y}$



   Loi scalaire du moment cinétique pour un solide à l'équilibre

   - Pour appliquer le Th M.C., on choisit d'abord le point M, qui est un point fixe, et par lequel passe $\vec{F_M}$
   - Moment cinétique de la poutre à l'équilibre : $\boxed{L_{(Mz)} = 0}$
   - Moment du poids : $\boxed{\mathscr{M}_{(Mz)}\left(\vec{P}\right) = -lmg}$: le bras de levier vaut $MG = l$, et le poids fait tourner la poutre dans le sens horaire, i.e. dans le sens indirect par rapport à l'axe (Mz).
   - Moment de force de Mario : $\boxed{\mathscr{M}_{(Mz)}\left(\vec{F_M}\right) = 0}$ car $\vec{F_M}$ passe par M

- Moment de force de Luigi : $\boxed{\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right)=+(l+d)F_L}$; le bras de levier vaut $ML=l+d$, et $\overrightarrow{F_L}$ fait tourner la poutre dans le sens trigonométrique, i.e. dans le sens direct par rapport à l'axe (*Mz*).
- Loi du MC : $\dfrac{dL_{(Mz)}}{dt}=\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\vec{P}\right)+\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_M}\right)+\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right)=0$

$$(l+d)F_L=lmg \Leftrightarrow \boxed{F_L=\frac{l}{l+d}mg=173\text{ N}}$$

<u>Loi scalaire du moment cinétique pour un solide à l'équilibre</u>

- Pour appliquer le Th M.C., on choisit ensuite le point *L*, qui est un point <u>fixe</u>, et par lequel passe $\overrightarrow{F_L}$
- Moment cinétique de la poutre à l'équilibre : $\boxed{L_{(Lz)}=0}$
- Moment du poids : $\boxed{\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\vec{P}\right)=+dmg}$: le bras de levier vaut $LG=d$, et le poids fait tourner la poutre dans le sens trigonométrique, i.e. dans le sens direct par rapport à l'axe (*Lz*).
- Moment de force de Luigi : $\boxed{\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right)=0}$ car $\overrightarrow{F_L}$ passe par *L*
- Moment de force de Mario : $\boxed{\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\overrightarrow{F_M}\right)=-(l+d)F_M}$; le bras de levier vaut $ML=l+d$, et $\overrightarrow{F_M}$ fait tourner la poutre dans le sens horaire, i.e. dans le sens indirect par rapport à l'axe (*Lz*).
- Loi du MC : $\dfrac{dL_{(Lz)}}{dt}=\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\vec{P}\right)+\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\overrightarrow{F_M}\right)+\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right)=0$

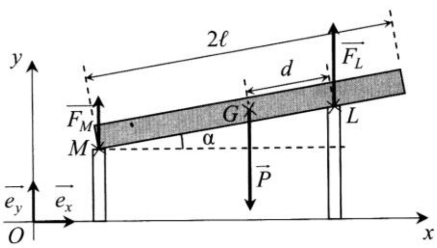
$$(l+d)F_M=dmg \Leftrightarrow \boxed{F_M=\frac{d}{l+d}mg=122\text{ N}}$$

2. Lorsque la poutre est inclinée, seuls les bras de levier changent.

<u>Loi scalaire du moment cinétique en *M* :</u>

$\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\vec{P}\right)=-l\cos(\alpha)mg$, $\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_M}\right)=0$ et

$\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right)=+(l+d)\cos(\alpha)F_L$ $\boxed{F_L=\dfrac{l}{l+d}mg=173\text{ N}}$



<u>Loi scalaire du moment cinétique en *L* :</u>

$\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\vec{P}\right)=+d\cos(\alpha)mg$, $\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right)=0$ et $\mathcal{M}_{(Lz)}\left(\overrightarrow{F_M}\right)=-(l+d)\cos(\alpha)F_M$

On obtient $\boxed{F_M=\dfrac{d}{l+d}mg=122\text{ N}}$

L'inclinaison de la poutre ne change rien à la répartition entre les forces exercées par les deux personnes.