À chercher pour lundi 19/09/2022, corrigé

TD 2 :

Exercice 16. Il est important de vérifier que les relations trouvées fonctionnent pour les petits indices ($n=1$, $n=2$ par exemple) afin de vérifier qu'il n'y a pas eu d'erreurs de calculs !

1) On a :

$$\begin{aligned}\prod_{1\leq i,j\leq n} ij &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij)\\ &= \prod_{i=1}^{n}(i^n n!)\\ &= (n!)^n \times (n!)^n\\ &= (n!)^{2n}.\end{aligned}$$

2) Déjà fait.

3) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{(2j^2+3j+1}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}+\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n}{6}\\ &= \frac{n}{36}\times\big(2(2n^2+3n+1)+9(n+1)+6\big)\\ &= \frac{n}{36}\times\left(4n^2+15n+17\right).\end{aligned}$$

TD 3 :

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ impaire et 2-périodique telle que $\forall x\in]0,1],\ f(x)=1-x^2$. Puisque f est impaire, on a $f(0)=0$. Pour tous les autres calculs, l'idée va être de toujours se ramener dans l'intervalle $]0,1]$, soit par périodicité, soit en utilisant l'imparité. Puisque f est 2-périodique, on a $f(5)=f(1+4)=f(1)=0$. De même, on a $f(7/3)=f(7/3-2)=f(1/3)=\dfrac{8}{9}$.

Puisque f est impaire, on a $f(-1/2)=-f(1/2)=-\dfrac{3}{4}$.

Enfin, on a $f(8/5)=f(8/5-2)=f(-2/5)$. Puisque f est impaire, on a $f(-2/5)=-f(2/5)=-\dfrac{21}{25}$.

Exercices de colle : TD 2 :

Exercice 5.

1) On a $S_0 = n+1$ et $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) On va développer le cube :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right)\\ & = & \displaystyle 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\ & = & 3S_2+3S_1+S_0.\end{array}$$

En utilisant une somme télescopique, on trouve également que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3$. Enfin, on a :

$$\begin{array}{rcl}3S_2+3S_1+S_0 & = & 3S_2+\dfrac{3n(n+1)}{2}+(n+1)\\ & = & 3S_2+\dfrac{n+1}{2}\cdot(3n+2)\,.\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}3S_2 & = & (n+1)^3-\dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}\\ & = & \dfrac{n+1}{2}\cdot\left(2(n+1)^2-3n-2\right)\\ & = & \dfrac{n+1}{2}\cdot\left(2n^2+n\right)\\ & = & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}.\end{array}$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) De la même manière, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4=(n+1)^4$ et :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(4k^3+6k^2+4k+1\right)\\ & = & 4S_3+6S_2+4S_1+S_0\\ & = & 4S_3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n+1\\ & = & 4S_3+(n+1)(2n^2+3n+1)\\ & = & 4S_3+(n+1)^2(2n+1).\end{array}$$

On a alors, en identifiant les deux égalités :

$$\begin{array}{rcl}4S_3 & = & (n+1)^4-(n+1)^2(2n+1)\\ & = & (n+1)^2(n^2+2n+1-2n-1)\\ & = & (n+1)^2n^2.\end{array}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On remarque que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)^2$*, ce qui est plutôt surprenant !*

Toujours avec la même méthode, peut trouver $\sum_{k=0}^{n} k^4$. On a que $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5$ et que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5 &= \sum_{k=0}^{n}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\
&= 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + \frac{1}{6}(n+1)(15n^3 + 35n^2 + 25n + 6).
\end{aligned}$$

On trouve alors, après calculs, que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Exercice 8. On sépare en indices pairs/impairs. Pour la somme des pairs, si on pose $k = 2j$, on aura j variant entre 1 et n. Pour la somme des impairs, en posant $k = 2i - 1$, on aura i variant entre 1 et n. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3 &= \sum_{j=1}^{n}(2j)^3 - \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 \\
&= 8\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{i=1}^{n}(8i^3 - 12i^2 + 6i - 1) \\
&= 12\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n \\
&= n(4n^2 + 6n + 2 - 3n - 3 + 1) \\
&= n(4n^2 + 3n) \\
&= n^2(4n+3).
\end{aligned}$$

.

Exercice 14. Pour la première égalité, il faut simplifier les factorielles et réarranger les termes. Remarquons que l'on se place pour $0 \leq p \leq k \leq n$ pour que tout soit défini (on a bien en particulier $0 \leq k - p \leq n - p$). On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{(k-p)!((n-p)-(k-p))} \\
&= \frac{n!}{p!} \times \frac{1}{(k-p)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{k!}{p!(k-p)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{k}{p}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 2^k \qquad \text{(d'après le binome de Newton)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k \\
&= (-2+1)^n \qquad \text{(encore d'après le binome de Newton)} \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}
$$