Programme de colle, semaine 17

polynômes : tout SAUF arithmétique des polynômes

— Nous avons étudié les polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) cette semaine. Nous avons commencé par la construction, les différentes lois (addition, multiplication, composition), ainsi que la structure de $\mathbb{K}[X]$ (anneau commutatif). Nous avons défini le degré et vu les propriétés du degré (du produit de deux polynômes, que peut-on dire sur la somme, sur la composée) et montré qu'un produit de polynômes non nul était non nul.
— Nous avons étudié la divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, démontré que si $B \neq 0$ et $A|B$, alors $\deg(A) \leq \deg(B)$ et la définition de polynômes associés. Nous avons démontré l'existence et l'unicité du couple (P, Q) dans la division euclidienne et vu des exemples de calculs et montré que B divise A ssi le reste de la division euclidienne de A par B était nul.
— Nous avons ensuite défini une racine d'un polynôme et vu la multiplicité d'une racine. Nous avons en particulier montré qu'un polynôme de degré n admettait au plus n racines distinctes et admis qu'ils admettaient au plus n racines comptées avec multiplicité. Nous avons vu en application le fait qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'annulant en $n+1$ points était égal au polynôme nul. Nous avons alors vu les polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Nous avons continué le chapitre sur les polynômes avec la définition du polynôme dérivée ainsi que les propriétés usuelles. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, formule de Leibniz, formule de Taylor, ainsi que son application à la caractérisation des racines multiples à l'aide des polynômes dérivés successifs.
— Nous avons ensuite vu la définition d'un polynôme scindé et démontré que dans $\mathbb{C}[X]$, tous les polynômes étaient scindés et pouvaient donc s'écrire sous la forme $\lambda \prod_{j=1}^{k} (X - \alpha_j)^{r_j}$ (le théorème de d'Alembert-Gauss a été admis). Nous avons défini et étudié les fonctions symétriques élémentaires et les relations coefficients/racines.
— Nous avons terminé le chapitre par l'étude des polynômes irréductibles, en particulier dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Remarques sur le programme : nous avons fait le cours sur l'arithmétique des polynômes et commencé le cours sur les fractions rationnelles mais je ne le mets pas au programme de colle. **Il y a un devoir de maths le jeudi de la rentrée de 8h à 12h en salle 640 donc il faudra déplacer les colles qui ont lieu le jeudi de 11h à 13h.**

Compétences :

— Poser la division euclidienne de A par B afin de déterminer le quotient et le reste.
— Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B en évaluant en les racines de B.
— Utiliser le degré et la recherche de racines de polynômes afin de trouver des informations sur un polynôme inconnu.
— Exprimer des expressions symétriques à l'aide des fonctions symétriques élémentaires.
— Étudier la multiplicité des racines d'un polynôme à l'aide d'un des deux critères, selon si le polynôme est donné sous forme factorisée ou développée.
— Déterminer la factorisation en produits de polynômes irréductibles de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Questions de cours :

1. Citer le théorème d'interpolation de Lagrange et le démontrer (existence et unicité). *On donnera la forme de L_k et on vérifiera que $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$.*
2. Énoncer les deux critères de multiplicité des racines d'un polynôme et les utiliser pour trouver la multiplicité de 1 comme racine de $P(X) = (X-1)^2(X+2) = X^3 - 3X + 2$ en utilisant le critère adapté selon si $P(X)$ est sous forme factorisée ou développée.
3. Donner la forme générale des coefficients d'un polynôme de degré n en fonction des fonctions symétriques élémentaires et retrouver ces valeurs dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.
4. Retrouver la valeur de la somme et du produit des racines n-ièmes de l'unité pour $n \geq 2$ en utilisant les relations coefficients/racines dans le polynôme $X^n - 1$.
5. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est racine de P.
6. Donner la forme des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (en rappelant la définition d'un polynôme irréductible) puis déterminer la factorisation en produit de polynômes irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
7. Donner la forme des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (en rappelant la définition d'un polynôme irréductible) puis déterminer la factorisation en produit de polynômes irréductibles de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ de deux manières : avec une identité remarquable ou en passant dans $\mathbb{C}$ en cherchant les racines quatrièmes de -1.
8. Montrer l'existence et l'unicité de l'écriture d'une fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible, c'est à dire $\forall F \in \mathbb{K}(X),\ \exists!(P,Q) \in \mathbb{K}[X]\ /\ F = \dfrac{P}{Q}$ avec Q unitaire et $P \wedge Q = 1$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 18 : 3, 14, 19.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD18 : 3
- 2ieme du groupe : TD18 : 14
- 3ieme du groupe : TD18 : 19

Prochain programme : fractions rationnelles

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions ! Bonnes vacances à tous !

Indications pour les exercices :

Exo 3 :

- Raisonner par analyse/synthèse et commencer par chercher le degré du polynôme.
- Traiter à part le cas des polynômes constants pour se ramener à P de degré 3.
- Montrer que $P'(0) = 0$ pour simplifier un coefficient.
- Écrire un système. On trouve normalement un seul polynôme de degré 3 solution.

Exo 14 :

- Utiliser le théorème d'interpolation de Lagrange pour l'existence et l'unicité.
- Pour montrer que le degré est n, il faut utiliser la forme explicite des polynômes de Lagrange et faire la somme des coefficients dominants. Vous devriez trouver comme coefficient dominant de L_k $\frac{1}{k}\prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{1}{k-i}$.
- Il faut essayer d'écrire ce coefficient avec des factorielles en séparant le produit selon si $i < k$ ou $i > k$. On trouve normalement $\frac{1}{k!} \times \frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}$.
- Quand on fait la somme de ces coefficients dominants, on peut faire apparaitre un binôme de Newton en factorisant tout par $\frac{1}{(n+1)!}$. Vous devriez trouver comme coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.
- Pour la limite en l'infini, utilisez l'expression développée du polynôme et factorisez par $a_n X^n$.

Exo 19 :

- un exercice similaire a été traité en cours. Utilisez les relations coefficients/racines pour montrer que le polynôme admet 4 comme racine.
- Vous pouvez ensuite factoriser par $X - 4$ et vous ramener à l'étude d'un polynôme de degré 2.