DS N° 8, Pb 3 : commentaires

Problème 3 : Analyse

Globalement la présentation est correcte à de rares exceptions près.

Remarques générales :

- Quelques uns (rares) se sont crus dans un problème d'algèbre linéaire en parlant de $\dim(E) = n$, de $GL(E)$ au lieu des permutations de E, du noyau des involutions etc.
- Attention à être bien rigoureux dans vos expressions, une involution n'est pas un nombre, ni un ensemble !
- Pour montrer qu'un ensemble est en bijection avec un autre il faut trouver une application de l'un vers l'autre et **prouver** qu'elle est bijective.
- Beaucoup ont déjà oublié comment montrer l'absolue convergence d'une série et veulent absolument comparer les sommes au lieu des termes généraux…
- Par contre, la résolution d'une EDL1 est en général connue.

Q1 Question élémentaire, mais certains sont passés complètement à côté. On justifie d'abord que l'ensemble est fini, puis on justifie l'inégalité sur le cardinal : inclusion dans un ensemble fini de référence, ici c'est l'ensemble des bijections de E dans E qui était attendu.

Q2 Assez bien réussie dans l'ensemble, mais parfois aucune explication ! Si on écrit que $E = \{x_1, x_2\}$ alors l'unique transposition de E est $(x_1\ x_2)$ et non pas $(1\ 2)$. Trop peu précisent quel ensemble E ils prennent.

Q3a Question délicate à bien rédiger, il fallait exhiber une bijection entre les deux ensembles (et le démontrer), l'objectif étant ensuite d'en déduire qu'ils ont le même cardinal (et non pas l'inverse !). Beaucoup ont bien vu la bijection en question, mais assez peu font la preuve.

Q3b Question mal réussie. C'est la même idée que Q3a, mais en plus subtil…

Q3c Il fallait dire qu'on venait de partitionner $\mathrm{Inv}(\llbracket 1\,; n+1 \rrbracket)$ avec les ensembles A_k (beaucoup oublient de préciser qu'ils sont disjoints **deux à deux**), et faire la somme des cardinaux (et non la somme des ensembles !).

Q3de Questions triviales, mais que de calculs faux !

Q4 Question (bien payée) de savoir faire, on attendait la majoration **du terme général** en valeur absolue $\left|\frac{I_n}{n!}x^n\right|$ par $|x|^n$ (avec justification), puis il fallait reconnaître le terme général d'une série géométrique convergente. Beaucoup ne maîtrisent pas encore ce savoir faire assez élémentaire sur les séries. Par contre que de bêtises avec des équivalents, des négligeables, …

Q5 Question un peu technique de manipulation de séries. Certains y sont bien parvenus, mais beaucoup utilisent la relation de récurrence établie par le raisonnement de dénombrement, sans se préoccuper du fait que celle-ci n'était valable qu'à partir du rang 1, ceci a été sanctionné.

Q6 Très peu précisent qu'il s'agit d'un EDL1 homogène, mais globalement beaucoup se souviennent de l'expression des solutions. Une erreur récurrente cependant, la variable était x, et donc une primitive de $x+1$ est $\frac{1}{2}x^2 + x$ et non pas $(x+1)t$! Il ne fallait pas se contenter de l'expression générale des solutions, il fallait aussi déterminer la constante en facteur (et en justifiant) !

Q7a Malheureusement on a très rarement le nom du théorème (Taylor-Young) est les hypothèses (de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0). Si l'expression des coefficients a_k est en général correcte, ce n'est que très rarement le cas pour les b_k, beaucoup donnent des formules pour b_k contenant le terme x^k (ce qui est absurde) !

Q7b La formule donnée pour c_n (formule de produit de Cauchy) est le plus souvent correcte.

Q7c Assez bien réussie en général.

Q7d La formule obtenue pour I_n est rarement la bonne, car celle-ci suppose d'avoir la bonne expression des coefficients b_k.