Problème 1 : Analyse

Partie I : Équation différentielle d'Euler

Q1) *Par un changement d'inconnue.*

a) y_0 est bien deux fois dérivables, pour $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = 1$ et $y_0''(x) = 0$. On a donc pour $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 y_0''(x) - x y_0'(x) + y_0(x) = 0 - x + x = 0.$$

On a donc bien y_0 solution de l'équation différentielle.

b) La fonction y est deux fois dérivables comme produit de fonctions deux fois dérivables. On a pour $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = xz(x)$, $y'(x) = z(x) + xz'(x)$ et $y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$. Puisque y est solution de l'équation différentielle, on a alors en remplaçant dans l'équation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& x^2(2z'(x) + xz''(x)) - x(z(x) + xz'(x)) + xz(x) = 0 \\
\iff \quad & x^3 z''(x) + (2x^2 - x^2)z'(x) + 0 = 0 \\
\iff \quad & x^3 z''(x) + x^2 z'(x) = 0.
\end{aligned}$$

En divisant par x^3 (possible pour $x \in \mathbb{R}^*$), on a alors que pour $x \in \mathbb{R}^*$, $z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) = 0.$$

c) En posant $\mathrm{Z} = z'$, on a Z solution de $\mathrm{Z}' + \frac{1}{x}\mathrm{Z} = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\int^x \frac{1}{t} dt = \ln(|x|) = \ln(x)$. Puisque la fonction nulle est solution particulière (c'est une équation homogène), on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{Z}(x) = \lambda e^{-\ln(x)} = \lambda e^{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lambda}{x}.$$

d) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $z'(x) = \frac{\lambda}{x}$. En primitivant (on est sur un intervalle), on en déduit qu'il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = \lambda \ln(x) + \mu.$$

e) Sur $\mathbb{R}_-^*$, en reprenant le calcul du c), les solutions sont cette fois de la forme $\mathrm{Z}(x) = \lambda e^{-\ln(-x)}$ (puisque $\ln(|x|) = \ln(-x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$). On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $z'(x) = -\frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En primitivant, on a alors que pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$$z(x) = -\lambda \ln(|x|) + \mu = -\lambda \ln(-x) + \mu.$$

En posant $\lambda_2 = -\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu_2 = \mu$, on en déduit qu'il existe des constantes $\lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ z(x) = \lambda_2 \ln(-x) + \mu_2$.

En multipliant par x, on en déduit que pour $x > 0$, $y(x) = xz(x) = \lambda x \ln(x) + \mu x$ (ce qui revient au résultat de l'énoncé en posant $\lambda_1 = \mu$ et $\mu_1 = \lambda$). Pour $x < 0$, on obtient également le résultat proposé (en échangeant le rôle des constantes λ_2 et μ_2, ce qui ne pose aucun problème les variables étant muettes).

Pour la valeur en 0, on évalue l'équation différentielle initiale en $x = 0$. On obtient alors $0 - 0 + y(0) = 0$ soit $y(0) = 0$.

Q2) *Par un changement de variable.*

a) z est deux fois dérivables comme composée de fonction deux fois dérivables (y et l'exponentielle). Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

b) En évaluant l'équation de départ en $x = e^t$, on a que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & e^{2t}y''(e^t) - e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\ \iff & z''(t) - 2e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\ \iff & z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

c) L'équation caractéristique associée à cette équation est $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double. On en déduit qu'il existe $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = \lambda_1 e^t + \mu_1 t e^t.$$

On a alors pour $t \in \mathbb{R}$, $y(e^t) = \lambda_1 e^t + \mu_1 t e^t$. Pour $x > 0$, on peut alors poser $t = \ln(x)$ et on en déduit que pour $x > 0$, $y(x) = \lambda_1 x + \mu_1 x \ln(x)$, ce qui donne le résultat demandé.

Q3) *Synthèse.*

a) La fonction y est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0}$ existe et est finie.

Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} &= \frac{\lambda_1 x + \mu_1 x \ln(x)}{x} \\ &= \lambda_1 + \mu_1 \ln(x). \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, si $\mu_1 \neq 0$, on obtient une limite qui vaut $\pm\infty$ et y ne peut alors pas être dérivable. On en déduit que $\mu_1 = 0$ et on a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lambda_1$.

On procède de même sur $\mathbb{R}_-^*$. Le même calcul donne que pour $x < 0$, $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lambda_2 + \mu_2 \ln(-x)$. Encore une fois, si $\mu_2 \neq 0$, la limite vaut $\pm\infty$ (selon le signe de μ_2). On en déduit que $\mu_2 = 0$ et que la limite vaut alors λ_2.

La fonction y est donc dérivable si et seulement si $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et que $\lambda_1 = \lambda_2$ (pour avoir la même limite du taux d'accroissement à gauche et à droite).

b) On en déduit finalement que pour $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda_1 x$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. En effet, on a $\lambda_2 = \lambda_1$ et $\mu_1 = \mu_2 = 0$ donc cette expression est bonne sur $\mathbb{R}^*$ et $y(0) = 0$ donc cette expression est cohérente avec la valeur en 0 de y.

Cette fonction y est alors deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction usuelle). On en déduit finalement que si y est solution, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda x$ et réciproquement que si $\lambda \in \mathbb{R}$, toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x$ sont solutions (en reprenant le calcul de Q1a) et en multipliant par la constante λ). Il n'y a donc aucune contrainte sur λ, ce qui prouve que toutes les fonctions du type $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont solutions.

Partie II : Intégrale de Poisson

Q4) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a puisque $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2 &= 1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2\cos^2(t) + \alpha^2\sin^2(t) \\ &= (1 - \alpha\cos(t))^2 + \alpha^2\sin^2(t). \end{aligned}$$

On a une somme de deux carrés donc cette quantité est positive. Il reste à justifier qu'elle ne s'annule jamais. Pour qu'elle soit nulle, il faut que les deux termes s'annulent en même temps. Remarquons que si $\alpha = 0$, le terme de gauche ne s'annule jamais (il vaut 1). Si $\alpha \neq 0$, le terme de droite ne s'annule que quand $\sin^2(t) = 0$, soit $\sin(t) = 0$, soit quand $t \equiv 0\ [\pi]$. On a alors $(1 - \alpha\cos(t)) = 1 \pm \alpha$. Puisque $\alpha \neq \pm 1$, on en déduit que $1 \pm \alpha \neq 0$.

On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2 > 0$, ce qui assure que f_α est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus continue comme composée de fonctions continues (le logarithme étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction dans le logarithme étant continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).

Q5) *Quelques relations.*

a) Supposons $\alpha \neq 0$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} J_{\frac{1}{\alpha}} & = & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos(t) + \frac{1}{\alpha^2}\right) dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\cos(t) + 1}{\alpha^2}\right) dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\ln\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos(t) + 1\right) - \ln(\alpha^2)\right) dt \\ & = & J_\alpha - \pi\ln(\alpha^2) \\ & = & J_\alpha - 2\pi\ln(|\alpha|). \end{array}$$

La dernière égalité est valide puisque $\alpha^2 = |\alpha|^2$ (et il faut bien une valeur absolue puisque ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$).

b) On pose $t = \pi - x \iff x = \pi - t$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On a $dx = -dt$ et les nouvelles bornes sont π et 0 (dans cet ordre). On a alors par changement de variable :

$$\begin{array}{rcl} J_\alpha & = & \displaystyle\int_{\pi}^{0} \ln(1 - 2\alpha\cos(\pi - x) + \alpha^2)(-dx) \\ & = & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + 2\alpha\cos(x) + \alpha^2) dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2(-\alpha)\cos(x) + (-\alpha)^2) dx \\ & = & J_{-\alpha}. \end{array}$$

c) On va intégrer 1 et dériver f_α. On pose donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = t \\ v(t) = f_\alpha(t) \end{array} \right.$$

qui sont bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ (composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ pour f_α). On a $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{2\alpha\sin(t)}{1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2} \end{array} \right.$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} J_\alpha = \displaystyle\int_0^{\pi} 1 \times f_\alpha(t) dt & = & [t f_\alpha(t)]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{2\alpha t\sin(t)}{1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2} dt \\ & = & \pi f_\alpha(\pi) - 0 - 2\alpha I_\alpha \\ & = & \pi\ln(1 + 2\alpha + \alpha^2) - 2\alpha I_\alpha \\ & = & \pi\ln((1+\alpha)^2) - 2\alpha I_\alpha \\ & = & 2\pi\ln(|1+\alpha|) - 2\alpha I_\alpha. \end{array}$$

Q6) *Expression de* J_α *comme une limite.*

a) On a $\beta_0 = e^0 = 1$ et $\beta_n = e^{i\pi} = -1$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $1 \leqslant k \leqslant n-1$ donc $-n+1 \leqslant -k \leqslant -1$ d'où :

$$n + 1 \leqslant n - k \leqslant 2n - 1.$$

Enfin, toujours pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \overline{\beta_k} & = & e^{-\frac{ik\pi}{n}} \\ & = & e^{2i\pi} \times e^{-\frac{ik\pi}{n}} \\ & = & e^{\frac{2in\pi}{n}} \times e^{-\frac{ik\pi}{n}} \\ & = & e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}} \\ & = & \beta_{2n-k}. \end{array}$$

La dernière égalité a bien du sens puisque $2n - k \in [\![n+1, 2n-1]\!] \subset [\![0, 2n-1]\!]$.

b) On va poser le changement d'indice $k = 2n - j$ *i.e.* $j = 2n - k$. Puisque k varie entre $n + 1$ et $2n - 1$, on a j qui varie entre 1 et $n-1$. On en déduit (en utilisant la question précédente) que :

$$\begin{aligned}\prod_{k=n+1}^{2n-1}(z-\beta_k) &= \prod_{j=1}^{n-1}(z-\beta_{2n-j})\\ &= \prod_{j=1}^{n-1}(z-\overline{\beta_j}).\end{aligned}$$

c) En utilisant les relations précédentes, et en particulier la relation admise par l'énoncé en $z=\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} &= \frac{\prod_{k=0}^{2n-1}(\alpha-\beta_k)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\ &= (\alpha-1)\times\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\beta_k)\times(\alpha+1)\times\prod_{k=n+1}^{2n-1}(\alpha-\beta_k)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\beta_k)\times\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\overline{\beta_k})\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\beta_k)(\alpha-\overline{\beta_k}).\end{aligned}$$

Pour montrer la seconde égalité, il faut développer l'expression dans le produit pour $k\in[\![1,n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta_k)(\alpha-\overline{\beta_k}) &= \alpha^2-\alpha(\beta_k+\overline{\beta_k})+\beta_k\times\overline{\beta_k}\\ &= \alpha^2-2\alpha\mathrm{Re}(\beta_k)+|\beta_k|^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1.\end{aligned}$$

On obtient donc bien l'égalité proposée.

d) On va appliquer le logarithme dans l'égalité de la question précédente. On a bien le droit car chaque terme du produit est strictement positif, comme montré à la question 4 en $t=\frac{k\pi}{n}$. On a donc le produit strictement positif et également $\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}>0$. On en déduit que :

$$\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$

En divisant des deux côtés par $\frac{\pi}{n}$ et en passant à la limite quand n tend vers l'infini (d'après le résultat admis par l'énoncé), on obtient exactement le résultat voulu.

Q7) *La conclusion.*

a) Si $\alpha\in[0;1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}\alpha^{2n}=0$ (c'est une suite géométrique de raison $0\leqslant\alpha^2<1$). On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right)=\ln\left(\frac{-1}{\alpha^2-1}\right)$ ce qui donne une limite finie. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}=0$, on en déduit par produit de limite que la limite est nulle et donc que $J_\alpha=0$.

b) D'après la question 5.b, on a $J_\alpha=J_{-\alpha}$. On en déduit que si $\alpha\in\,]-1;1[$, alors $J_\alpha=0$.
Supposons à présent $\alpha<-1$ ou $\alpha>1$. On a alors $\frac{1}{\alpha}\in]-1,1[$ et donc $J_{\frac{1}{\alpha}}=0$. En utilisant la question 5.a), on en déduit alors que :

$$J_\alpha=2\pi\ln(|\alpha|).$$

Q8) *Un exemple.* On a en reprenant les notations de l'énoncé $\displaystyle\int_0^\pi\frac{t\sin(t)}{5-4\cos(t)}dt=I_2$.
Or, on a d'après la question 5, $J_2=2\pi\ln(3)-4I_2$ et $J_2=2\pi\ln(2)$ d'après la question précédente. On a donc :

$$I_2=\frac{2\pi(\ln(3)-\ln(2))}{4}=\frac{\pi(\ln(3)-\ln(2))}{2}.$$

Problème 2 : Algèbre

Partie I : Une formule de trigonométrie

Q1) a) Par définition, ω est une des racines n^{es} de l'unité, donc $\boxed{\omega^{11}=1}$.

Le complexe ω est de module 1, donc $|\omega|^2 = \omega \times \overline{\omega} = 1$, d'où $\boxed{\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}}$.

D'autre part, $1 = \omega^{11} = \omega \times \omega^{10}$, d'où $\boxed{\dfrac{1}{\omega} = \omega^{10}}$.

b) De même, ω^4, ω^9, ω^5 et ω^3 sont des complexes de module 1, donc leur inverse est leur conjugué.
D'autre part, $1 = \omega^{11} = \omega^4 \times \omega^7 = \omega^9 \times \omega^2 = \omega^5 \times \omega^6 = \omega^3 \times \omega^8$, d'où :

$$\boxed{\overline{\omega^4} = \omega^{-4} = \omega^7,\ \overline{\omega^9} = \omega^{-9} = \omega^2,\ \overline{\omega^5} = \omega^{-5} = \omega^6,\ \text{et } \overline{\omega^3} = \omega^{-3} = \omega^8}$$

c) On en déduit que :

$$\boxed{\overline{A} = \overline{\omega} + \overline{\omega^4} + \overline{\omega^9} + \overline{\omega^5} + \overline{\omega^3} = \omega^{10} + \omega^7 + \omega^2 + \omega^6 + \omega^8 = B}$$

Q2) a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Im}(\omega) + \mathrm{Im}(\omega^4) + \mathrm{Im}(\omega^9) + \mathrm{Im}(\omega^5) + \mathrm{Im}(\omega^3)\\
&= \sin(\frac{2\pi}{11}) + \sin(\frac{8\pi}{11}) + \sin(\frac{18\pi}{11}) + \sin(\frac{10\pi}{11}) + \sin(\frac{6\pi}{11})\\
&= \sin(\frac{2\pi}{11}) + \sin(\frac{8\pi}{11}) - \sin(\frac{4\pi}{11}) + \sin(\frac{10\pi}{11}) + \sin(\frac{6\pi}{11}) \quad (\text{car } \frac{18\pi}{11} = 2\pi - \frac{4\pi}{11})
\end{aligned}$$

Tous les angles en jeu dans les sinus ci-dessus sont dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, il y a donc :

$$\boxed{\text{cinq sinus dont quatre sont strictement positifs (et } \sin(\tfrac{18\pi}{11}) \text{ qui est négatif)}}\ .$$

b) On a $0 < \frac{4\pi}{11} < \frac{5\pi}{11} < \frac{\pi}{2}$ et la fonction sinus est strictement croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, donc :
$$\sin(\tfrac{4\pi}{11}) < \sin(\tfrac{5\pi}{11}) = \sin(\pi - \tfrac{5\pi}{11}) = \sin(\tfrac{6\pi}{11}),$$
d'où $0 < \sin(\frac{6\pi}{11}) - \sin(\frac{4\pi}{11})$, comme les autres sinus sont positifs, on peut en déduire que :

$$\boxed{\text{La partie imaginaire de A est positive.}}$$

Q3) a) On a $A + B = \sum_{k=1}^{10} \omega^k$, on reconnaît une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$, d'où :
$A + B = \frac{\omega - \omega^{11}}{1-\omega} = \frac{\omega - 1}{1-\omega} = -1$.
$A \times B = \omega(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}) + \omega^4(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}) + \omega^9(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}) +$
$\omega^5(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}) + \omega^3(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10})$
$= 5 + 2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5 + 2\omega^6 + 2\omega^7 + 2\omega^8 + 2\omega^9 + 2\omega^{10} = 5 + 2(A+B) = 3.$

$$\boxed{A + B = -1 \text{ et } A \times B = 3.}$$

b) A et B sont les solutions de l'équation du second degré $(x - A)(x - B) = 0$, c'est à dire en développant, $x^2 - (A+B)x + AB = 0$, ou encore, $x^2 + x + 3 = 0$, on a $\Delta = -11$, on a donc deux racines complexes non réelles qui sont $\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$, on on sait que $\mathrm{Im}(A)$ est positive, donc :

$$\boxed{A = \tfrac{-1+i\sqrt{11}}{2} \text{ et } B = \tfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}.}$$

Q4) a) $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k$ est une somme géométrique de raison $-\omega^3 = -e^{\frac{6\pi}{11}} \neq 1$, d'où :
$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{-\omega^3 - (-\omega)^{11}}{1+\omega^3} = \frac{-\omega^3+1}{1+\omega^3}$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = \frac{1 - e^{\frac{6\pi}{11}}}{1 + e^{\frac{6\pi}{11}}} &= \frac{e^{\frac{3\pi}{11}}(e^{\frac{-3\pi}{11}} - e^{\frac{3\pi}{11}})}{e^{\frac{3\pi}{11}}(e^{\frac{-3\pi}{11}} + e^{\frac{3\pi}{11}})} \quad (\text{arc moitié})\\
&= \frac{-2i\sin(\frac{3\pi}{11})}{2\cos(\frac{3\pi}{11})} = -i\tan(\frac{3\pi}{11})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k = \tfrac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i\tan\left(\tfrac{3\pi}{11}\right).}$$

b) On développe :

$$\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k = -\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega-\omega^4+\omega^7-\omega^{10}+\omega^2-\omega^5+\omega^8$$

D'autre part :

$$\mathrm{B}-\mathrm{A} = \omega^2+\omega^6+\omega^7+\omega^8+\omega^{10}-\omega-\omega^4-\omega^9-\omega^5-\omega^3$$

On constate donc que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k = (\mathrm{B}-\mathrm{A})+2(\omega-\omega^{10}).}$$

c) $(\mathrm{B}-\mathrm{A})+2(\omega-\omega^{10}) = -2i\,\mathrm{Im}(\mathrm{A})+4i\,\mathrm{Im}(\omega) = -i\sqrt{11}+4i\sin(\frac{2\pi}{11})$, d'où, d'après la question précédente, $-i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = -i\sqrt{11}+4i\sin(\frac{2\pi}{11})$, il vient alors en simplifiant que :

$$\boxed{\tan\left(\tfrac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\tfrac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}.}$$

Partie II : Identité binomiale d'Abel

Q5) a) On a $\mathrm{S}_{n,0} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^0 = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0^n = 0$ (binôme de Newton, avec $n>0$).

$$\boxed{\mathrm{S}_{n,0} = 0\text{, on a donc établi que R(0) est vrai.}}$$

b) Soit $p\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathrm{R}(p)$ est vrai. Soit n un entier tel que $n>p+1$.

i) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{n,p+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^{p+1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^k k^p \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^k k^p \quad \text{(car le terme pour } k=0 \text{ est nul)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-1)^k k^p \quad \left(\text{car } \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\right) \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-1)^k k^p}
\end{aligned}$$

ii) Soit $k>0$, on a $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (triangle de Pascal), par conséquent :

$$\boxed{\tbinom{n-1}{k-1} = \tbinom{n}{k}-\tbinom{n-1}{k}.}$$

Cette relation est valable pour tout $n>0$.

iii) En reportant dans la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{n,p+1} &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k k^p = \mathrm{S}_{n,p+1} = n\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}\right)(-1)^k k^p \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^p - n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}(-1)^k k^p \\
&= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^p - n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k k^p \quad \left(\text{les termes pour } k=0 \text{ sont nuls, et } \binom{n-1}{n} = 0\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{S}_{n,p+1} = n(\mathrm{S}_{n,p}-\mathrm{S}_{n-1,p}).}$$

c) Comme $n > p+1$, on a $n-1 > p$, donc par hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{S}_{n-1,p} = 0$. De même on a $n > p$, donc par hypothèse de récurrence on a aussi $\mathrm{S}_{n,p} = 0$, par conséquent $\mathrm{S}_{n,p+1} = 0$. La propriété a été montrée au rang $p+1$.

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \text{si } n > p \text{ alors } \mathrm{S}_{n,p} = 0.}$$

Q6) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $(x+t)^0 = 1$, et $f_0(t) = t^0 + \sum\limits_{k=1}^{0} \binom{0}{k} x(x-k)^{k-1}(t+k)^{0-k} = t^0 = 1$ (car la somme est nulle lorsque $n = 0$), donc $f_0(t) = (x+t)^0$.

$$\boxed{\text{P}(0) \text{ est vraie.}}$$

Q7) Soit $t \in \mathbb{R}$.

a) Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$, $(n+1-k)\binom{n+1}{k} = (n+1-k)\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ (n+1-k)\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k}.}$$

On a $f_{n+1}(t) = t^{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x(x-k)^{k-1}(t+k)^{n+1-k}$, donc en dérivant terme à terme on obtient $f'_{n+1}(t) = (n+1)t^n + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x(x-k)^{k-1}(n+1-k)(t+k)^{n-k}$, mais le dernier terme de la somme est nul (quand $k = n+1$), il reste donc :

$$\boxed{f'_{n+1}(t) = (n+1)t^n + \sum_{k=1}^{n} (n+1)\binom{n}{k} x(x-k)^{k-1}(t+k)^{n-k}.}$$

b) On peut factoriser l'expression précédente par $n+1$, ce qui donne : $f'_{n+1}(t) = (n+1)\left(t^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-k)^{k-1}(t+k)^{n-k}\right) = (n+1)f_n(t)$, or par hypothèse de récurrence, on a $f_n(t) = (x+t)^n$, par conséquent :

$$\boxed{f'_{n+1}(t) = (n+1)(x+t)^n.}$$

c) On reconnaît à droite la dérivée de la fonction $t \mapsto (x+t)^{n+1}$, on en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(t) = (x+t)^{n+1} + c$. On peut obtenir la constante x en évaluant en $t = -x$, car $f_{n+1}(-x) = 0^{n+1} + c = c$, par conséquent :

$$\boxed{f_{n+1}(t) = (x+t)^{n+1} + f_{n+1}(-x).}$$

d) On a a :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(-x) &= (-x)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x(x-k)^{k-1}(-x+k)^{n+1-k} \\
&= (-x)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x(x-k)^{k-1}(-1)^{n+1-k}(x-k)^{n+1-k} \\
&= (-x)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x(x-k)^{n}(-1)^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} x(x-k)^n \quad (\text{pour } sk = 0 \text{ on a } (-x)^{n+1}) \\
&= \boxed{x\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}(x-k)^n}
\end{aligned}$$

e) Pour $k \in [\![0\,;n+1]\!]$, on a $(x-k)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(-1)^p k^p x^{n-p}$, en réinjectant dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(-x) &= x\sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p k^p x^{n-p}\right]\\
&= x\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{p}(-1)^p k^p x^{n-p}\\
&= x\sum_{(p,k)\in[\![0;n+1]\!]\times[\![0;n]\!]}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{p}(-1)^p k^p x^{n-p} \quad \text{(somme double rectangulaire)}\\
&= x\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{p}(-1)^p k^p x^{n-p}\\
&= x\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}(-1)^p x^{n-p}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}k^p\right]\\
&= x(-1)^{n+1}\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}(-1)^p x^{n-p}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k k^p\right] \quad (\text{car } (-1)^{-k}=(-1)^k)\\
&= \boxed{x(-1)^{n+1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p x^{n-p}\mathrm{S}_{n+1,p}}
\end{aligned}$$

car $\mathrm{S}_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k k^p$.

f) On sait que $\mathrm{S}_{n+1,p} = 0$ lorsque $n+1 > p$, donc $\forall p \in [\![0;n]\!]$, $\mathrm{S}_{n+1,p} = 0$, ce qui entraîne donc que $f_{n+1}(-x) = 0$, et par conséquent $f_{n+1}(t) = (x+t)^{n+1} + f_{n+1}(-x) = (x+t)^{n+1}$, c'est la propriété au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\ (x+t)^n = t^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(x-k)^{k-1}(t+k)^{n-k}.}$$

Q8) *Généralisation.* Soient a, x, y des réels et $n \in \mathbb{N}$. Si $a = 0$, alors $y^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} = y^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = (x+y)^n$ (on reconnaît un binôme de Newton).
Si $a \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
y^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} &= y^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}xa^{k-1}\left(\frac{x}{a}-k\right)^{k-1}a^{n-k}\left(\frac{y}{a}+k\right)^{n-k}\\
&= y^n + a^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-k\right)^{k-1}\left(\frac{y}{a}+k\right)^{n-k}\\
&= a^n\left[\left(\frac{y}{a}\right)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-k\right)^{k-1}\left(\frac{y}{a}+k\right)^{n-k}\right]\\
&= a^n\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}\right)^n \quad \text{(propriété P}(n))\\
&= \boxed{(x+y)^n}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a :

$$(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} \quad \text{(identité binomiale d'Abel).}$$