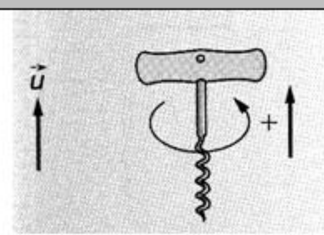
CHAPITRE OM5

Vecteurs : produit scalaire, projection, dérivée temporelle, fonction composée

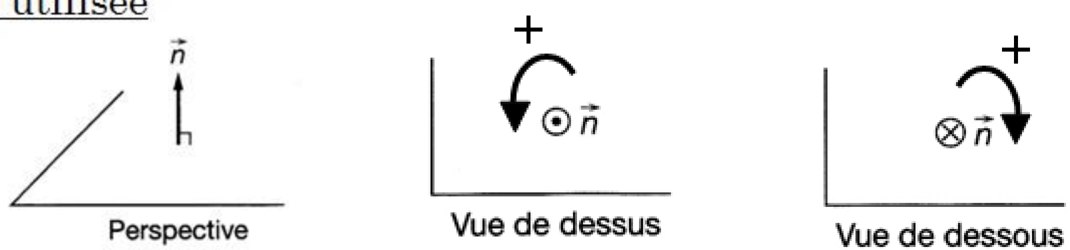
1 Vecteur

1.1 Sens de rotation associé à un vecteur

- **<u>Règle du tire-bouchon</u>** : On appelle **sens de rotation direct** autour de la direction $\vec{u}$ le sens de rotation qui fait avancer un tire-bouchon dans le sens de $\vec{u}$.



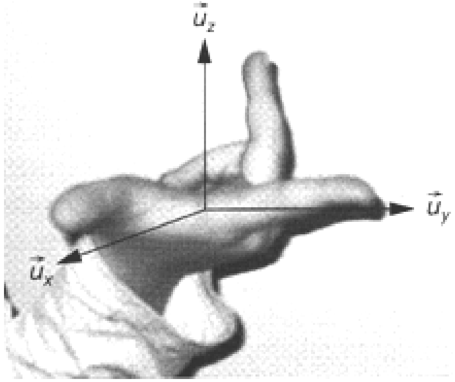
- <u>Convention utilisée</u>



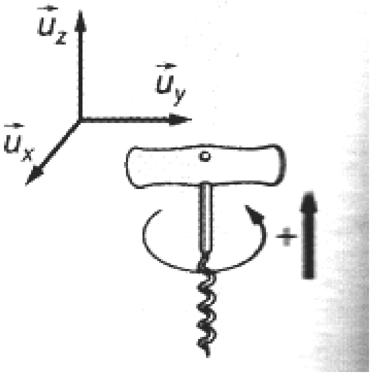
Le vecteur $\vec{n}$ représente la **normale** au plan (direction orthogonale).
En vue de dessus, le sens de rotation direct est **sens trigonométrique**.
En vue de dessous, le sens de rotation direct est **sens horaire**.

Base directe

Une base orthonormée de l'espace $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ est **directe** si :



- on peut faire coïncider $\overrightarrow{u_x}$ avec le pouce, $\overrightarrow{u_y}$ avec l'index et $\overrightarrow{u_z}$ avec le majeur de la main droite (**règle des trois doigts de la main droite**).



- en faisant tourner un tire-bouchon de $\overrightarrow{u_x}$ vers $\overrightarrow{u_y}$, le tire-bouchon se déplace dans le sens de $\overrightarrow{u_z}$ (**règle du tire-bouchon**).

1.2 Norme d'un vecteur

➢ <u>Vecteur en coordonnées cartésiennes</u>

$$\vec{a} = a_x \overrightarrow{u_x} + a_y \overrightarrow{u_y} + a_z \overrightarrow{u_z} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$$

➢ **<u>Définition</u> :** La **norme** du vecteur $\vec{a}$ est : $\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

2 Produit scalaire de deux vecteurs

➤ **<u>Définition</u>** : **Le produit scalaire** de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ est le **scalaire algébrique** :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=ab\cos(\theta)$$

➤ **<u>Propriétés</u>** : Le produit scalaire est **symétrique et bilinéaire** :

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\\ \left(k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}\right)\cdot\vec{b}=k_1\overrightarrow{a_1}\cdot\vec{b}+k_2\overrightarrow{a_2}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

➤ <u>Expression en coordonnées cartésiennes</u>

Soient deux vecteurs $\vec{a}=a_x\overrightarrow{u_x}+a_y\overrightarrow{u_y}+a_z\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{b}=b_x\overrightarrow{u_x}+b_y\overrightarrow{u_y}+b_z\overrightarrow{u_z}$

Le produit scalaire est :

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

➤ <u>Application</u>

Le produit scalaire caractérise **l'orthogonalité** :

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{b}>0\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}}\right)$ aigu $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{b}<0\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}}\right)$ obtus

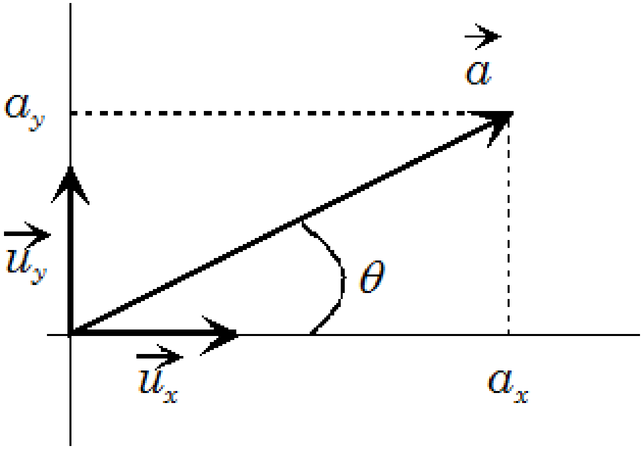
3 Projection d'un vecteur

➢ Que signifie « projeter un vecteur » ?

Définition : **Projeter** le vecteur $\vec{a}$ sur un vecteur d'une base revient à faire un **produit scalaire** entre le vecteur $\vec{a}$ et le vecteur de la base.

Propriété : Le **résultat** de la projection est la **composante** du vecteur $\vec{a}$ selon le vecteur de la base.

➢ Exemple



La projection du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur unitaire $\vec{u_x}$ est la composante a_x :

$$a_x = \vec{a}\cdot\vec{u_x} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{u_x}\|\cos\left(\widehat{\vec{u_x},\vec{a}}\right)$$

$$\boxed{a_x = \vec{a}\cdot\vec{u_x} = \|\vec{a}\|\cos(\theta) \text{ avec } \theta = \left(\widehat{\vec{u_x},\vec{a}}\right)}$$

La projection du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur unitaire $\vec{u_y}$ est la composante a_y :

$$a_y = \vec{a}\cdot\vec{u_y} = \|\vec{a}\|\cos\left(\widehat{\vec{u_y},\vec{a}}\right) = \|\vec{a}\|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \|\vec{a}\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\boxed{a_y = \vec{a}\cdot\vec{u_y} = \|\vec{a}\|\sin(\theta)}$$

4 Dérivation temporelle

- <u>Vecteur constant</u>

$$\boxed{\text{Si } \vec{a} = \overrightarrow{cste}, \text{ alors } \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}}$$

- <u>Dérivée d'une somme de vecteurs</u>

$$\boxed{\frac{d\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}}$$

- <u>Dérivée d'un produit d'un vecteur par un scalaire</u>

$$\boxed{\frac{d\left(f(t)\vec{a}\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\vec{a} + f(t)\frac{d\vec{a}}{dt}}$$

4 Dérivation temporelle

- Dérivée d'un produit scalaire de deux vecteurs

$$\boxed{\frac{d\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}}$$

- Dérivée d'une fonction composée

$$\boxed{\frac{d\left(\vec{f}\left[g(t)\right]\right)}{dt}=\frac{d\left(\vec{f}\left[g(t)\right]\right)}{dg}\cdot\frac{dg(t)}{dt}}$$

Exemple :