29. Probabilités, méthodologie

I. Vocabulaire

I.1. Univers

Définition. L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles. On le note en général Ω.

(m) Le choix de l'univers dépend donc de l'expérience aléatoire étudiée. Il est parfois plus pratique de définir un univers « plus grand » (s'il s'écrit de manière plus simple), le point important étant qu'il contienne au moins toutes les possibilités de l'expérience aléatoire étudiée.

Exercice d'application 1. Déterminer les univers associés aux expériences aléatoires suivantes ainsi que leur cardinal.

1) Lancer successivement deux dés à 6 faces.

2) Lancer un dé à 6 faces puis un dé ayant autant de faces que le résultat du premier dé.

3) Lancer n pièces de monnaies successivement.

4) Choisir 8 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes.

5) Choisir 8 cartes successivement dans un jeu de 52 cartes.

I.2. Événement

Définition. Un événement associé à une expérience aléatoire d'univers Ω et une partie de Ω. L'ensemble des événéments possibles est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

(m) Toutes les opérations vues en théorie des ensembles (complémentaire, intersection, union) permettent d'écrire de nouveaux événements à partir d'événements déjà définis. On peut également visualiser un événement comme l'ensemble des éléments de Ω qui entraine cet événement.

Exercice d'application 2. Expliciter les événements suivants.

1) On lance deux dés 6 successivement. Expliciter l'événement « la somme des deux dés fait 5 ».

2) On lance n pièces successivement. Expliciter les événements « ne faire que des piles » et « faire au moins un pile ».

3) On note $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements associés à une expérience aléatoire. Expliciter les événements « au moins un des A_i se réalise », « tous les A_i se réalisent » et « exactement un seul des A_i se réalise ».

Définition. Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Les événements élémentaires sont $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ (autrement dit, ce sont les événements de cardinal 1).

Définition. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** si :

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
- $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.

(m) Pour vérifier qu'une famille d'événements est un système complet d'événements, il faut donc vérifier qu'ils couvrent bien toutes les possibilités (la réunion fait l'univers) et qu'ils ne comptent pas en double certaines possibilités (ils sont deux à deux incompatibles). Par exemple, la famille des événements élémentaires forme un système complet d'événement.

Exercice d'application 3. On lance un dé à 10 faces.

1) Expliciter l'univers et les événements « faire un nombre premier », « faire un carré d'entier » et « faire un nombre pair strictement plus grand que 5 ». *On rappelle que 1 n'est pas premier.*

2) Forment-ils un système complet d'événements ?

3) On lance à présent un dé à $n \geq 1$ faces. Quelle est la première valeur de n pour laquelle cette famille d'événements ne forme pas un système complet d'événements ?

I.3. Probabilité

Définition. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Une probabilité sur Ω est une fonction $\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{cases}$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)\ /\ A \cap B = \emptyset,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On a alors :

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (et donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$).
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Théorème. De construction d'une probabilité. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. Soient $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

(m) Ce résultat permet de définir une probabilité sur un univers Ω en ne fixant que les valeurs sur les événements élémentaires, à condition que ces valeurs soient positives et de somme égale à 1. On peut alors calculer la probabilité de chaque événement en les décomposant en fonction des événements élémentaires. On a en effet $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(\omega_i)$.

Exercice d'application 4. On lance un dé à 6 faces et on pose $\Omega = [\![1,6]\!]$.

1) Déterminer l'unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que si l'on pose pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, $\mathbb{P}(\{i\}) = \lambda i$, alors $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur Ω.

2) Déterminer la probabilité de faire un nombre pair avec cette probabilité ainsi que la probabilité de faire un nombre supérieur ou égal à 5.

3) Existe-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\forall i \in [\![1,5]\!],\ \mathbb{P}(\{i,i+1\}) = \dfrac{1}{4}$? Et telle que $\forall i \in [\![1,5]\!],\ \mathbb{P}(\{i,i+1\}) = \dfrac{1}{2}$? Quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ doit-on poser pour qu'il soit possible de construire une probabilité telle que $\forall i \in [\![1,5]\!],\ \mathbb{P}(\{i,i+1\}) = \lambda$?

4) Existe-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{4}$ et telle que $\forall i \in [\![1,5]\!],\ \mathbb{P}(\{i,i+1\}) = \dfrac{1}{3}$? Si oui, déterminer la probabilité de chacun des événements élémentaires ainsi que la probabilité de faire un nombre pair avec cette probabilité.

I.4. Probabilité uniforme

Définition. Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ fini de cardinal n. La probabilité uniforme sur Ω est l'unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$.

m Avec la probabilité uniforme, la probabilité d'un événement A peut se calculer en comptant le « nombre de cas favorables » (c'est à dire $\text{Card}(A)$) divisé par le « nombre de cas possibles » (c'est à dire $n = \text{Card}(\Omega)$). Ainsi, de nombreux exercices de probabilités peuvent être traités par les méthodes vues dans le chapitre dénombrement si la probabilité utilisée est la probabilité uniforme.

Exercice d'application 5. On considère une classe de $n \in \mathbb{N}^*$ étudiants avec $n \leq 365$ et on désire étudier la répartition de leurs anniversaires. On suppose que leurs dates d'anniversaires sont indépendantes les unes des autres et que la probabilité d'être né un certain jour est de $\dfrac{1}{365}$ (on oublie les années bissextiles).

1) Déterminer un univers Ω permettant de modéliser cette expérience, ainsi que les événements élémentaires. De quelle probabilité est muni cet univers ?

2) En utilisant des méthodes de dénombrement, déterminer :
   a) La probabilité que toutes les personnes soient nées le même jour.
   b) La probabilité que tous les anniversaires tombent sur au plus 2 jours différents et pas tous le même jour .
   c) La probabilité que toutes les personnes soient nées des jours tous différents. Réaliser l'application numérique dans le cas où n est le nombre de personnes dans la classe. Conclusion ?

II. Probabilité conditionnelle

II.1. Définition

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors, l'application $\mathbb{P}_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array} \right.$ est une probabilité sur Ω. C'est la probabilité conditionnée par B. *En particulier, toutes les règles vues sur les probabilités s'appliquent à $\mathbb{P}_B$.*

(m) Pour calculer $\mathbb{P}_B(A)$, soit elle se calcule directement grâce à l'énoncé car l'événement A « dépend directement » de l'événement B, soit on revient à la définition (en n'oubliant pas de vérifier que $\mathbb{P}(B) > 0$).

Exercice d'application 6. Dé et urnes 1. On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 100 faces et si le résultat du dé est i, on tire de manière uniforme et indépendante du lancer de dé une boule dans une urne qui contient i boules blanches et $(101 - i)$ boules noires. On note alors D_i l'événement « faire i avec le dé », B « tirer une boucle blanche dans l'urne » et N « tirer une boule noire dans l'urne ».

1) Déterminer un univers Ω adapté à cette expérience aléatoire et expliciter les événements D_i, B et N.

2) Déterminer pour $i \in [\![1, 100]\!]$, $\mathbb{P}_{D_i}(B)$ et $\mathbb{P}_{D_i}(N)$.

Exercice d'application 7. Manipulations de probabilité conditionnelle.

1) Soient A, B, C trois événements avec $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}_{B\cap C}(A)\mathbb{P}_C(B) = \mathbb{P}_C(A \cap B)$.

2) Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}_{A\cup B}(A \cap B) \leq \mathbb{P}_A(A \cap B)$.

II.2. Des formules naturelles

Théorème. Formule des probabilités composées. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k).$$

(m) Cette formule est très utile pour calculer des probabilités d'événements « en cascade », c'est à dire quand on s'intéresse à des événements qui dépendent successivement les uns des autres (une suite de lancers de pièces ou de dés dont les lancers dépendent des lancers précédents par exemple). Quand l'expérience aléatoire est représentée sous forme d'arbre, ce résultat permet de calculer la probabilité d'un « chemin » sur l'arbre.

Exercice d'application 8. On considère une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires et on tire 3 boules dans cette urne successivement et sans remise. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note B_i l'événement « on tire une boule blanche au i-ième tirage ».

1) Déterminer la probabilité de tirer 3 boules blanches (c'est à dire $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$). Déterminer de même la probabilité de tirer 3 boules noires.

2) Écrire l'événement « tirer exactement une boule blanche » à l'aide des événements $B_1, B_2, B_3, N_1, N_2, N_3$ et d'unions et d'intersections. En déduire la probabilité de tirer exactement une boule blanche.

3) Déduire des questions précédentes la probabilité de tirer exactement deux boules blanches. Est-il plus probable de tirer 0, 1, 2 ou 3 boules blanches lors des trois tirages ?

Théorème. Formule des probabilités totales. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

On posera par convention que si $\mathbb{P}(A_i) = 0$*, alors* $\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B) = 0$.

(m) Il convient pour utiliser ce théorème de trouver à quel système complet d'événements l'appliquer. On « découpe » alors l'événement dont on cherche la probabilité en fonction des différentes éventualités prises en compte par le système complet d'événements.

Exercice d'application 9. Dé et urnes 2. On reprend l'expérience de l'exercice d'application 6.

1) Justifier que $(D_i)_{1\leq i\leq 100}$ est un système complet d'événements.

2) En déduire $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(N)$. Est-ce normal ?

II.3. Formules de Bayes

Théorème. Formule de Bayes. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \times \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(m) Cette formule permet d'inverser les probabilités conditionnelles. Si l'on voit l'événement A comme une « cause » et l'événement B comme une « conséquence », elle permet ainsi d'obtenir la probabilité de la « cause » sachant que la « conséquence » a été observée.

Exercice d'application 10. Dé et urnes 3. On reprend l'expérience des exercices d'application 6 et 9.

1) Pour $i \in [\![1, 100]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_B(D_i)$.

2) En déduire pour $j \in [\![1, 100]\!]$, $\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i=1}^{j} D_i\right)$. Déterminer numériquement la plus grande valeur de j telle que cette probabilité soit inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$. Comment l'interprétez-vous et cela vous semble-t-il cohérent ?

III. Événements indépendants

III.1. Indépendance de deux événements

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exercice d'application 11. Si A et B sont indépendants tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, que peut-on dire de $\mathbb{P}_B(A)$ et de $\mathbb{P}_A(B)$?

III.2. Indépendance mutuelle

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que les A_i sont mutuellement indépendants si :

$$\forall I \subset [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On a $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ (afin de pouvoir noter le résultat de chaque dé). On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 36$.

2) On a ici $\Omega = \{(i, j),\ i \in [\![1, 6]\!],\ j \in [\![1, i]\!]\}$. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 21$.

On pourrait aussi prendre $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et compter trop de possibilités... Si on avait une probabilité définie sur cet univers, la probabilité des événements rajoutés serait fixée à 0.

3) On a $\Omega = \{P, F\}^n$ (chaque ensemble représente le résultat d'une pièce, soit Pile ou Face). On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^n$.

4) Puisque l'on choisit ici les cartes de manière simultanée, on a ici $\Omega = \{A \subset [\![1, 52]\!] \ /\ \mathrm{Card}(A) = 8\}$. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{52}{8}$.

5) On choisit les cartes successivement et on veut donc pouvoir considérer des événements du type « la première carte tirée est ... » ou « les 4 premières cartes tirées sont ... ». Ainsi, on a $\Omega = \{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8),\ i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8 \in [\![1, 52]\!] \text{ deux à deux distincts}\}$ (autrement dit Ω est l'ensemble des 8-uplets d'éléments distincts de $[\![1, 52]\!]$). On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 52 \times 51 \times \ldots \times (52 - 7) = \dfrac{52!}{44!}$.

Exercice d'application 2.

1) On a $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. L'événement qui correspond à « la somme des deux dés fait 5 » correspond donc à l'ensemble des couples dont la somme fait 5, c'est à dire à $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

2) On a $\Omega = \{P, F\}^n$. L'événement « ne faire que des piles » correspond donc à $\{(P, P, \ldots, P)\}$ (il s'agit en particulier d'un événement élémentaire). L'événement « faire au moins un pile » est $\overline{\{(F, F, \ldots, F)\}}$ car il s'agit de la négation de l'événement « ne faire aucun pile »=« ne faire que des faces ».

3) On a « au moins un des A_i se réalise »$= \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, « tous les A_i se réalisent »$= \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et « exactement un seul des A_i se réalise » qui est :

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left(A_j \bigcap \left(\bigcap_{i \neq j} \overline{A_i} \right) \right).$$

Dans le dernier cas, on écrit une union disjointe quand c'est le j-ième événement qui se réalise (et uniquement celui-là car on intersecte avec le complémentaire des autres).

Exercice d'application 3.

1) On a $\Omega = [\![1, 10]\!]$. On a alors « faire un nombre premier »$= \{2, 3, 5, 7\}$, « faire un carré d'entier »$= \{1, 4, 9\}$ et « faire un nombre pair strictement plus grand que 5 »$= \{6, 8, 10\}$.

2) Les événéments précédents sont bien disjoints (incompatibles) deux à deux et leur réunion fait Ω tout entier. Il s'agit dont bien d'un système complet d'événements.

3) 11 est présent uniquement dans « faire un nombre premier », 12 uniquement dans « faire un nombre pair plus grand que 5 », 13 uniquement dans « faire un nombre premier », 14 uniquement dans « faire un nombre pair plus grand que 5 », on a donc toujours un système complet d'événements. Par contre, 15 n'est ni un carré, ni pair, ni premier. Pour $n = 15$, la réunion des trois événements ne fait plus Ω et on a donc plus un système complet d'événements.

Exercice d'application 4.

1) On doit avoir $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et d'après le théorème de construction des probabilités, on doit avoir $\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{i\}) = 1$. Or, $\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{i\}) = \lambda \sum_{i=1}^{6} i = \lambda \times \left(\frac{6 \times 7}{2}\right) = 21\lambda$. L'unique λ qui convient est donc $\lambda = \frac{1}{21}$ (et cela définit bien une probabilité d'après le théorème de construction des probabilités car on a définit les probabilités des événéments élémentaires).

2) Pour la probabilité de faire un nombre pair, il faut calculer $\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \lambda(2+4+6) = \frac{12}{21}$.

Pour la probabilité de faire un nombre supérieur ou égal à 5, il faut calculer $\mathbb{P}(\{5,6\}) = \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \lambda(5+6) = \frac{11}{21}$.

3) Si une telle probabilité existerait, on aurait $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\}) = \mathbb{P}(\{1,2\}) + \mathbb{P}(\{3,4\}) + \mathbb{P}(\{5,6\})$ (car l'union est disjointe), ce qui donnerait $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{3}{4}$: absurde ! Pour la même raison, il ne peut exister de probabilité où $\mathbb{P}(\{i, i+1\}) = \frac{1}{2}$ car on aurait $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{3}{2}$: absurde ! On voit que la seule possibilité est que $\mathbb{P}(\{i, i+1\}) = \frac{1}{3}$, on a ainsi $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pas d'absurdité.

4) On raisonne par analyse/synthèse. Si une telle probabilité existe, on a $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(\{1,2\}) = \frac{1}{3}$ donc on a $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. De plus, puisque $\mathbb{P}(\{2,3\}) = \frac{1}{3}$, on a $\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$. De proche en proche, on trouve alors $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{12}$.

Synthèse : on pose pour $i \in [\![1,6]\!]$, $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{4}$ si i est impair et $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{12}$ si i est pair. Puisque la somme fait 1, ceci définit bien une probabilité par théorème de construction des probabilités (on a bien fixé les probabilités des événéments élémentaires).

Pour la probabilité de faire un nombre pair, on a $\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

Exercice d'application 5.

1) On a $\Omega = [\![1,365]\!]^n$ (chaque nombre représente un jour possible pour l'anniversaire et on considère des n-uplets puisque l'on a n étudiants). Les événements élémentaires sont donc tous les $\{(i_1, \ldots, i_n)\}$ avec $i_1, \ldots, i_n \in [\![1,365]\!]$ (on a 365^n événements élémentaires). D'après les hypothèses de l'énoncé, tous les événements élémentaires sont équiprobables donc cet univers est muni de la probabilité uniforme.

2) En utilisant des méthodes de dénombrement, déterminer :

a) On a ici 365 choix pour le jour et pour chaque personne, on a alors une seule possibilité (puisque l'on veut que tout le monde soit né le même jour). On a donc :

$$\mathbb{P}(\text{toutes les personnes sont nés le même jour}) = \frac{365}{365^n} = \frac{1}{365^{n-1}}.$$

b) On doit cette fois choisir les deux jours parmi 365 (donc on a $\binom{365}{2}$ façons de les choisir) et ensuite chaque personne peut être née sur un des deux jours. On a donc 2 possibilités par personne. On a cependant compté dans ces possibilités les cas où toutes les personnes ont leur anniversaire le premier jour (1 possibilité) et le cas où toutes les personnes ont leur anniversaire le second jour (1 possibilité). Ceci entraine que la probabilité recherchée vaut :

$$\frac{\binom{365}{2} \times (2^n - 2)}{365^n} = \frac{364(2^{n-1} - 1)}{365^{n-1}}.$$

c) On a ici $n \leq 365$. On doit ici compter le nombre de n-uplets distincts de $[\![1, 365]\!]$ (car on ne veut que des anniversaires distincts). La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{365 \times 364 \times \ldots (365 - (n-1))}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$

Voici une petite table des valeurs en fonction de n :

n	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
p_n	0.109	0.97	0.086	0.076	0.067	0.059	0.052	0.045	0.039	0.034	0.030

Il est donc très peu probable que toutes les personnes de la classe ait leur anniversaire sur des jours tous distincts, et donc très probable que deux personnes de la classe ait leur anniversaire le même jour !

Exercice d'application 6. Dé et urnes 1.

1) On prend ici $\Omega = [\![1, 100]\!] \times \{b, n\}$ (le premier ensemble correspond au résultat du lancer de dé et le second à la couleur de la boule tirée). On a alors $D_i = \{(i, b), (i, n)\}$, $B = [\![1, 100]\!] \times \{b\}$ et $N = [\![1, 100]\!] \times \{n\}$.

2) D'après l'énoncé, il y a i boules blanches dans l'urne si le dé fait i et $101 - i$ boules noires donc au total 101 boules dans l'urne. On a donc :

$$\mathbb{P}_{D_i}(B) = \frac{i}{101} \text{ et } \mathbb{P}_{D_i}(N) = \frac{101 - i}{101}.$$

Exercice d'application 7. Manipulations de probabilité conditionnelle.

1) Puisque $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ et que $B \cap C \subset C$, on a aussi $\mathbb{P}(C) > 0$. Les probabilités conditionnelles existent donc toutes. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{B\cap C}(A) P_C(B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \times \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \mathbb{P}_C(A \cap B). \end{aligned}$$

2) On a $A \subset A \cup B$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ donc $\mathbb{P}(A \cup B) > 0$ et toutes les probabilités conditionnelles existent bien. Puisque $A \cap B \subset A \cup B$, on a :

$$\mathbb{P}_{A\cup B}(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)}.$$

On a de plus $\mathbb{P}_A(A \cap B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$. Puisque $0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$ (car $A \subset A \cup B$), on a $\dfrac{1}{\mathbb{P}(A \cup B)} \leq \dfrac{1}{\mathbb{P}(A)}$ et en multipliant par $\mathbb{P}(A \cap B)$ qui est positif, on a l'inégalité voulue.

Exercice d'application 8.

1) On utilise les probabilités composées (toutes les probabilités conditionnelles existent bien). On a :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3).$$

Or, on a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{3}{10}$, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{9}$ (car il reste 9 boules dans l'urne mais plus que 2 boules blanches) et $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{1}{8}$ (il ne reste qu'une boule blanche dans l'urne et 8 boules au total). La probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}.$$

De même, on a $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)(N_3) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{210}{720}$.

2) L'événement « tirer exactement une boule blanche » est :

$$(B_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)$$

en fonction de si on tire la boule blanche en 1ere, 2nde ou troisième position. Ces unions sont disjointes (car on ne tire pas la boule blanche à la même position). On a donc que la probabilité de tirer exactement une boule blanche vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) &= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \\
&= \frac{3 \times 126}{720} \\
&= \frac{378}{720}.
\end{aligned}$$

3) Puisqu'au cours des trois tirages, on tire soit aucune boule blanche, soit une seule, soit deux, soit trois, la somme de ces trois probabilités fait 1. On en déduit que la probabilité de tirer exactement deux boules blanches vaut :

$$1 - \frac{6}{720} - \frac{210}{720} - \frac{378}{720} = \frac{126}{720}.$$

L'événement le plus probable est donc de tirer exactement une boule blanche.

Exercice d'application 9. Dé et urnes 2.

1) Le dé ne peut faire qu'un résultat entre 1 et 100 (c'est un dé à 100 faces) et il renvoie un résultat et un seul. On a donc bien que $(D_i)_{1 \leq i \leq 100}$ est un système complet d'événements.

2) D'après la formule des probabilités totales (on a $\mathbb{P}(D_i) = \dfrac{1}{100} > 0$), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(D_i) \times \mathbb{P}_{D_i}(B) \\
&= \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{100 \times 101} \\
&= \frac{100 \times 101}{2} \times \frac{1}{100 \times 101} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De même, on a (avec le changement d'indice $j = 101 - i$) :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N) &= \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(D_i) \times \mathbb{P}_{D_i}(N) \\
&= \sum_{i=1}^{100} \frac{101-i}{100 \times 101} \\
&= \sum_{j=1}^{100} \frac{j}{100 \times 101} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Le problème étant symétrique (en termes de boules blanches et noires), ce résultat est tout à fait normal.

Exercice d'application 10. Dé et urnes 3.

1) D'après la formule de Bayes, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_B(D_i) &= \mathbb{P}_{D_i}(B) \times \frac{\mathbb{P}(D_i)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{i}{101} \times \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{i}{5050}.
\end{aligned}
$$

2) Puisque les événements $(D_i)_{1 \leq i \leq j}$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$
\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i=1}^{j} D_i\right) = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}_B(D_j) = \frac{j(j+1)}{10100}.
$$

On trouve alors (cette probabilité étant croissante) que pour $j = 49$, on a cette probabilité qui est strictement inférieur à $\frac{1}{4}$ et pour $j = 50$, cette probabilité est strictement supérieure à $\frac{1}{4}$. Ceci signifie que si on a tiré une boule blanche, on a moins d'une chance sur quatre d'avoir fait un résultat inférieur à 49 sur le dé, ce qui est naturel car on a plus de chances de tirer des boules blanches si le résultat du dé est grand.

Exercice d'application 11. Si A et B sont indépendants tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, on a :

$$
\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)
$$

et de même, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$. Ainsi, quand des événements sont indépendants, savoir que l'un se réalise ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.