DEVOIR SURVEILLÉ 8 (2 HEURES)

Conseils de rédaction

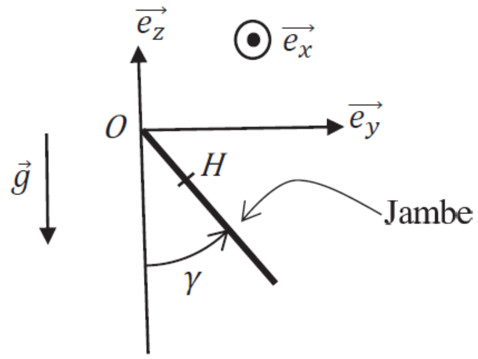
- Le sujet, constitué de 3 exercices, comporte **4 pages**.
- Les raisonnements doivent être **méthodiques**, **justifiés** et s'appuyer sur des **schémas** !
- Soyez attentif à **l'énoncé** et aux **notations** utilisées : adaptez-vous !
- La **calculatrice** est autorisée.

Exercice 1 – Marcher à son rythme pour aller plus loin

(CCINP TSI 2019) **(≈ 40 mn)**

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.
On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.
Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$.

On assimile la jambe à un solide <u>rigide</u> de masse m_0 et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $\left(O,\overrightarrow{e_x}\right)$ fixe dans le référentiel d'étude. $\left(O,\overrightarrow{e_x}\right)$ passe par la hanche du randonneur. La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{e_x}\right)$ est noté J. On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH). L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ et supposée uniforme.



1. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire L_{Ox} de la jambe par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{e_x}\right)$ en fonction de γ et J.
2. Que vaut le moment par rapport à $\left(O,\overrightarrow{e_x}\right)$ de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.
3. Déterminer l'expression du moment Γ_{Ox} du poids de la jambe par rapport à $\left(O,\overrightarrow{e_x}\right)$ en fonction de g, m_0, d' et γ.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ, caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

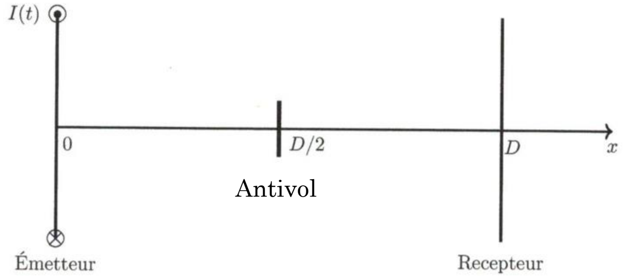
5. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.
6. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de la jambe.
7. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.
8. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre T d'oscillations de la jambe est :
$$T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0 g d'}}$$
9. Le moment d'inertie est de la forme : $J = k m_0 d^2$ où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.
10. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période propre d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?
11. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Exercice 2 – Système d'alarme **(≈ 30 mn)**

Un portique de sécurité de magasin est constitué de deux bobines placées face à face. Une des bobines (l'émetteur) est alimentée par un générateur de courant alternatif. On mesure la tension aux bornes de la deuxième bobine (le récepteur). L'antivol, attaché aux objets du magasin, est constitué d'un petit bobinage en cuivre en série avec un condensateur. Le modèle est le suivant :

- ❖ l'émetteur est un enroulement de N spires circulaires (constituant une « bobine plate ») de rayon $a = 25\text{ cm}$. Il est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$;
- ❖ le récepteur est identique à l'émetteur, en face de celui-ci, à la distance D et de même axe. Il n'est alimenté par aucun courant ;
- ❖ l'antivol est modélisé par un enroulement de n spires circulaires de rayon $b = 1{,}0\text{ cm}$ de coefficient d'auto-induction L et de résistance R en série avec un

condensateur de capacité C. L'axe de cet enroulement est confondu avec l'axe des deux bobines et il se trouve à égale distance de l'émetteur et du récepteur.



1. Représenter sur une figure les lignes de champ magnétique de l'émetteur.

L'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice sur son axe, à mi-distance de l'émetteur et du récepteur s'écrit :

$$\overrightarrow{B_e}(t) = \alpha I(t)\overrightarrow{u_x} \text{ avec } \alpha = \frac{\mu_0 N a^2}{2\left(a^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

2. Expliquer pourquoi une force électromotrice apparaît dans l'antivol (5 lignes maximum, vocabulaire spécifique attendu).
3. Déterminer l'expression de la force électromotrice $e(t)$ due à la présence de $\overrightarrow{B_e}$, considéré comme uniforme que niveau de l'antivol, du fait de sa petite dimension. Exprimer sa valeur efficace E_{eff}, en fonction de α, I_0, b, n et ω.
4. Représenter le schéma électrique équivalent du circuit de l'antivol.
5. On se place en régime sinusoïdal forcé. En utilisant la notation complexe, exprimer l'amplitude complexe du courant dans le circuit de l'antivol, en fonction de R, L, C, E_{eff} et ω. En déduire sa valeur efficace I_{eff}. Quel phénomène se produit lorsque $LC\omega^2 = 1$?
6. Expliquer pourquoi, lorsque l'antivol traverse les portiques, le champ magnétique au niveau du récepteur, et par conséquent la tension à ses bornes, diminuent. C'est cette chute de tension qui déclenche l'alarme.

Exercice 3 – Champ magnétique terrestre (≈ 40 mn)

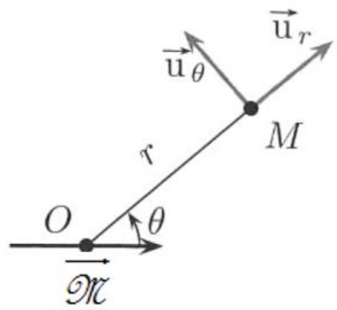
En un point de la surface de la Terre, on veut déterminer l'intensité B_h de la composante horizontale du champ magnétique terrestre en étudiant les petites oscillations d'une boussole dans le plan horizontal. Cette boussole est un petit solide qui peut pivoter sans frottements autour de son axe vertical $\left(O,\overrightarrow{u_z}\right)$. Elle est assimilable à un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ horizontal et de moment d'inertie J par rapport à son axe $\left(O,\overrightarrow{u_z}\right)$. Elle est repérée par l'angle $\alpha = \left(\vec{u},\vec{m}\right)$ où $\vec{u}$ a la direction et le sens de la composante horizontale du champ magnétique terrestre à l'endroit considéré.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la boussole (équation vérifiée par l'angle $\alpha(t)$). Quelle est la position d'équilibre stable de la boussole ?
2. En faisant l'hypothèse que α reste petit au voisinage de la position d'équilibre stable, montrer que la période T_0 des petites oscillations s'écrit : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mB_h}}$ où $m = \left\|\overrightarrow{m}\right\|$.
3. Les valeurs de m et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique $\overrightarrow{B_e}$ créé par une bobine parcourue par un courant pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine de façon que $\overrightarrow{B_e}$ et $\overrightarrow{B_h}$ soient parallèles et de même sens, puis on mesure la période T_1 des petites oscillations. On inverse ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle période T_2 des oscillations. Exprimer T_1 et T_2 (en supposant $B_h < B_e$). En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ créé par la bobine et du rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$.
4. On mesure $\dfrac{T_1}{T_2} = 0{,}78$ et $B_e = 0{,}10\ \text{mT}$. En déduire la valeur de B_h.

On admet que l'expression du champ magnétique créé au point M de coordonnées polaires (r,θ) par un moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ centré en O s'écrit, en coordonnées polaires de centre O et d'axe $\overrightarrow{\mathscr{M}}$:

$$\overrightarrow{B} = B_r\overrightarrow{u_r} + B_\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\text{avec } B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathscr{M}\cos(\theta)}{r^3} \text{ et } B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathscr{M}\sin(\theta)}{r^3}$$



La valeur de la perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{H.m}^{-1}$.

5. Représenter sur un schéma plan le moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}_T}$ responsable de la création du champ magnétique terrestre, les positions de l'équateur et des pôles Nord et Sud géographique.
6. Sachant que le rayon terrestre est $R_T = 6{,}4.10^6$ m et que l'expérience décrite dans les questions précédentes a été effectuée en France (latitude $\lambda \simeq 45°$, la latitude étant l'angle mesuré par rapport au plan de l'équateur), déterminer la norme $\mathscr{M}_T$ du moment magnétique terrestre.
7. À quel endroit sur la Terre la composante horizontale du champ magnétique est-elle la plus grande ? Quelle est sa valeur ?
8. Quelles sont la direction et l'intensité du champ magnétique terrestre aux pôles Nord et Sud ?