DEVOIR À LA MAISON 5
Résolution d'une équation différentielle avec la méthode d'Euler explicite

Capacité exigible
Mettre en œuvre la méthode d'Euler, à l'aide d'un langage de programmation, pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite est une **méthode itérative** qui permet de déterminer numériquement une solution approchée de l'équation différentielle :

$$\boxed{y'(t) = F\left(y(t),t\right)}$$

sur l'intervalle $\left[t_0,t_f\right]$, avec la **condition initiale** $y(t_0) = y_0$ (problème de Cauchy).

La **procédure algorithmique** est la suivante :

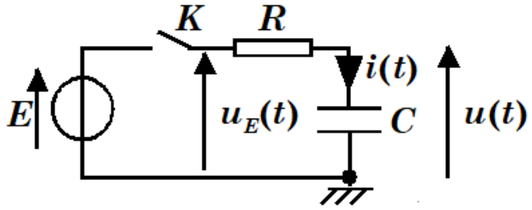
- On commence par réaliser une subdivision régulière de l'intervalle $\left[t_0,t_f\right]$ en sous-intervalles de largeur δt (δt est le **pas de résolution**), ce qui revient à générer un ensemble de points d'abscisses t_k telles que :

$$\boxed{t_k = t_0 + k \cdot \delta t}$$

- On cherche ensuite une valeur numérique approchée de $y(t_k)$; cette valeur approchée est notée y_k. On connaît y_0 grâce à la condition initiale. On détermine les valeurs y_k en procédant de proche en proche grâce à la **relation de récurrence** (ou **schéma numérique**) :

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot F\left(y_k,t_k\right)}$$

2 Réponse indicielle du circuit *RC*



On considère le circuit *RC* série (schéma ci-contre), dans lequel le condensateur est initialement déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur *K*. Pour $t \geq 0$, l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est régie par l'équation différentielle $\boxed{\dfrac{du(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u(t) = \dfrac{E}{\tau}}$ avec $\boxed{u(0) = 0}$ comme condition initiale. C'est un problème de Cauchy de la forme $\dfrac{du(t)}{dt} = F\left(u(t),t\right)$ avec $\boxed{F\left(u(t),t\right) = \dfrac{E}{\tau} - \dfrac{1}{\tau}u(t)}$.

La **solution analytique** est $\boxed{u(t)=E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

L'objectif est d'obtenir **les solutions numériques** pour différents pas de résolution sur l'intervalle de temps $[0,5\tau]$ et de tracer sur un même graphe les solutions numériques et la solution analytique.
On prendra : $E=10\ \mathrm{V}$, $R=10\ \mathrm{k\Omega}$, $C=100\ \mathrm{nF}$.

Les deux fichiers « DM5_OS5_Euler_niveauX.py » sont disponibles dans l'application Moodle sur l'ENT (avec X égal à 1 ou 2).
Faîtes votre choix en fonction de votre niveau ! Vous pouvez commencer par le niveau 1 et, si vous êtes à l'aise, passer ensuite au niveau 2. Si vous bloquez au niveau 2, n'hésitez pas à rétrograder…
Télécharger le fichier choisi sur votre ordinateur. Le ***renommer*** *« NOM_Prénom_DM5_niveauX.py ». Lancer Pyzo puis ouvrir votre fichier.*
Nota Bene ***: Veillez à bien lire les commentaires associés à chaque ligne de code (informations, consignes, zones à compléter…)***

Cellule 1 : Importation des bibliothèques

1. Exécuter la « Cellule 1 » pour importer les bibliothèques (CTRL + Entrée).

Cellule 2 : Système physique étudié et valeurs numériques des paramètres physiques

2. *Niveaux 1 et 2* : préciser les valeurs numériques ou expressions littérales des paramètres physiques du système étudié.
3. *Niveaux 1 et 2* : écrire la fonction derivee_u(u, t), qui prend comme arguments la tension u et le temps t, et qui renvoie l'expression de $\frac{du(t)}{dt}$. Exécuter la « Cellule 2 ».

Cellule 3 : Implémentation de la méthode d'Euler explicite

Le choix est fait ici de travailler avec des structures de données de type **tableau** (**array** nécessitant la bibliothèque **numpy**) de façon à faciliter le traitement ultérieur des variables de sortie.
La fonction euler(F, y0, t0, tf, dt) proposée prend comme arguments la fonction F associé au système différentiel étudié, la condition initiale y0, les bornes t0 et tf de l'intervalle de temps $[t_0,t_f]$, le pas dt de résolution, et renvoie deux tableaux : celui des instants t_k et celui des valeurs approchées y_k.

4. *Niveau 1* : compléter la fonction euler(F, y0, t0, tf, dt) proposée avec le tableau des instants t, la condition initiale et la relation de récurrence. Exécuter la « Cellule 3 ».

Niveau 2 : compléter la fonction euler(F, y0, t0, tf, dt) proposée avec la création et l'initialisation de toutes les variables nécessaires, la boucle de récurrence et les variables de sortie. Exécuter la « Cellule 3 ».

Cellule 4 : Résolution numérique

5. *Niveaux 1 et 2* : Effectuer la résolution numérique de $\frac{du(t)}{dt} = F(u(t),t)$ avec la méthode d'Euler en choisissant un pas de résolution $\delta t = \frac{\tau}{10}$: la solution est nommée u_Euler. Exécuter la « Cellule 4 ».

Cellule 5 : Résolution analytique

6. *Niveaux 1 et 2* : Effectuer la résolution analytique pour 100 valeurs de temps régulièrement espacées sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$: la solution est nommée u_exacte. Exécuter la « Cellule 5 ».

Cellule 6 : Représentation graphique

7. *Niveaux 1 et 2* : Tracer sur un même graphe la solution exacte en traits rouges (en fonction de t_fixe), et la solution numérique en tirets bleus (en fonction de t). Le temps sera affiché en ms. Exécuter la « Cellule 6 ». Commenter l'allure des courbes.

Influence du pas de discrétisation

8. *Niveau 1 :* Changer le pas de résolution numérique (discrétisation) puis exécuter le programme (CTRL+E) et commenter les graphes des solutions numériques obtenues dans les deux cas suivants : $\delta t = \tau$ et $\delta t = \frac{\tau}{100}$.

   Niveau 2 : Compléter la **Cellule 7 : Représentation graphique pour plusieurs pas de résolution** de façon à superposer dans une nouvelle fenêtre les graphes de la solution analytique avec les trois graphes des solutions numériques obtenues pour les trois pas de résolution suivants : $\delta t = \tau$, $\delta t = \frac{\tau}{10}$ et $\delta t = \frac{\tau}{100}$ (à l'aide d'une boucle). Exécuter la « Cellule 7 ». Commenter l'influence du pas de discrétisation.

Sauvegarder votre fichier correctement renommé.