23. Espaces vectoriels, méthodologie

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général).

I. Espaces vectoriels

I.1. Définition

Notation. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit que :
- les éléments de E sont des vecteurs.
- les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.
- 0_E est le vecteur nul de E.

I.2. Produit d'espaces vectoriels

Proposition. Soient $(E, +_E)$ et $(F, +_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors, $E \times F$ muni de la loi $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 +_E x_2, y_1 +_F y_2)$ et de la multiplication externe $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(m) En pratique, les seuls espaces vectoriels produits que vous rencontrerez sont $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Comme on le verra dans le chapitre sur les matrices, on peut noter les n-uplets de vecteurs de manière verticale (c'est plus facilement lisible que de manière horizontale). L'addition dans ces espaces se fait donc coordonnée par coordonnée de manière indépendante :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

I.3. Sous-espace vectoriel

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (abrégé « sev de E ») si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. Alors :

$$F \text{ est un sev de } E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F,\ \lambda x + \mu y \in F \end{array} \right. .$$

(m) C'est **très souvent** cette propriété que l'on utilise pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. On montre donc qu'il est inclus dans un espace vectoriel connu et qu'il est non vide (le plus souvent, on montre qu'il contient le vecteur nul) et stable par combinaison linéaire.

Exercice d'application 1. Montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (on précisera de quel espace vectoriel ils sont des sous-espaces vectoriels) :

1) $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$.

2) $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 3y = 0 \right\}$.

3) $E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$.

m La caractéristique principale d'un espace vectoriel est donc d'être stable par combinaison linéaire (stabilité par somme et par multiplication par un scalaire). Pour intuitivement voir si un ensemble est un espace vectoriel ou pas, il faut donc visualiser si la somme de deux éléments de cet ensemble est toujours dans l'ensemble, si on peut multiplier un élément par -1 et qu'il soit encore dans l'ensemble, multiplier par 2, etc. Si cela semble être le cas, on démontre que c'est un espace vectoriel, sinon, on devrait pouvoir trouver un contre exemple.

Exercice d'application 2. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $E_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ décroissantes}\}$.

2) $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ croissantes ou décroissantes}\}$.

3) $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \text{ soit pair.}\} \cup \{0\}$.

4) $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| = |y| \right\}$.

II. Opérations dans les EVs

II.1. Combinaison linéaire

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E. **Une combinaison linéaire** des $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur $y \in E$ s'écrivant de la forme :

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est **une famille de scalaires à support fini**, c'est à dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de λ_i qui sont non nuls.

Remarque : D'après le I, un espace vectoriel est toujours stable par combinaison linéaire. Le vecteur nul peut s'écrire comme combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs (il suffit de prendre les λ_i tous nuls). Dans le cas où l'on part d'une famille avec un nombre fini de vecteurs (donc dans le cas où I est fini), la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est automatiquement à support fini (puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de λ_i, il y en a forcément un nombre fini non nuls).

II.2. Espaces vectoriels engendrés

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $A \subset E$. On note $\text{Vect}(A)$ l'espace vectoriel engendré par A, c'est à dire :

- Si $A = \emptyset$, $\text{Vect}(A) = \{0_E\}$.

- Sinon, si on note $A = \{x_i,\ i \in I\}$, $\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i x_i,\ (\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini$\}$.

(m) $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient l'ensemble A. Pour montrer qu'un vecteur est dans $\mathrm{Vect}(A)$, il faut réussir à l'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de A (on ne peut donc écrire qu'une somme finie puisque la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à support fini).

Exercice d'application 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que $\exp \notin \mathrm{Vect}((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en utilisant les croissances comparées.

Exercice d'application 4. A-t-on $x \mapsto x^2$ dans $\mathrm{Vect}(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes ou décroissantes$\})$?

(m) Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut montrer qu'il s'écrit comme un espace vectoriel engendré par un certain ensemble.

Exercice d'application 5. Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et l'écrivant comme un espace vectoriel engendré.

Exercice d'application 6. Utiliser cette méthode pour l'exercice d'application 1, question 2). Quelle méthode préférez-vous ?

II.3. Intersection d'espaces vectoriels

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sevs de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev de E.

II.4. Somme d'espaces vectoriels

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient F et G deux sevs de E. La somme de F et G est notée $F + G$ et est définie par :

$$F + G = \{x \in E \ / \ \exists (x_F, x_G) \in F \times G \ / \ x = x_F + x_G\}.$$

$F + G$ est donc l'ensemble des vecteurs que l'on peut écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. *On a de plus* $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E. On dit que F et G sont en somme directe (ou que la somme $F + G$ est directe), et on note $F \oplus G$ si :

$$\forall x \in F + G,\ \exists! (x_F, x_G) \in F \times G \ / \ x = x_F + x_G.$$

Autrement dit, F et G sont en somme directe si l'écriture d'un élément de $F + G$ comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E. Alors :

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}.$$

(m) L'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est toujours vraie puisqu'une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel et contient donc le vecteur nul. Pour montrer que F et G sont en somme directe, il suffit donc de montrer que si $x \in F \cap G$, alors $x = 0_E$.

Exercice d'application 7. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; \deg(P) \leq 1\} = \mathbb{R}_1[X]$. Montrer que F et G sont en somme directe. *On commencera par vérifier rapidement que F et G sont bien des sevs de $\mathbb{R}[X]$.*

Exercice d'application 8. Soit $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ constantes}\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$. Montrer que F et G sont en somme directe. *On commencera par vérifier rapidement que F et G sont bien des sevs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires (dans E) si $E = F \oplus G$, autrement dit, si $E = F + G$ et que F et G sont en somme directe, ou de manière équivalente, si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(m) Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires, on prouve la partie $F \cap G = \{0_E\}$ comme expliqué ci-dessus et on prouve la partie $E = F + G$ par analyse/synthèse. L'inclusion ($\supset$) est toujours vraie (puisque $F + G$ est un sev de E donc $F + G \subset E$). Pour l'inclusion ($\subset$), on suppose donc (analyse) que $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = x_F + x_G$ et on essaye de trouver x_F et x_G en fonction de x, ce qui permet de faire la synthèse (en posant $x_F = \ldots$ et $x_G = \ldots$ et en vérifiant que $x = x_F + x_G$). On remarquera que si on trouve x_F, alors on a automatique $x_G = x - x_F$.

Exercice d'application 9. Dans les deux exercices d'applications précédents, montrer que F et G sont supplémentaires (respectivement dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$).

III. Famille de vecteurs

III.1. Famille génératrice

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille **génératrice** de E si $E = \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$. Autrement dit, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génétratrice si tous les vecteurs de E peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$:

$$\forall x \in E,\; \exists (\lambda_i)_{i\in I} \text{ à support fini } / \; x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

(m) Pour démontrer qu'une famille est génératrice, on peut :

- Revenir à la définition : on fixe $x \in E$ et on essaye de trouver une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$.
- Essayer de retrouver une famille génératrice connue de E à partir de combinaisons linéaires des $(x_i)_{i\in I}$.

Exercice d'application 10. Montrer que la famille de $\mathbb{R}^2$ contenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ en résolvant pour $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ le système $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 X + \lambda_2 Y$.

Exercice d'application 11. Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^k$. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \le k \le 3}$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ en montrant que les polynômes 1, X, X^2 et X^3 s'écrivent chacun comme une combinaison linéaire des $(P_k)_{0 \le k \le 3}$.

III.2. Famille libre

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **libre** si :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ à support fini, } \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0.$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$ qui donne le vecteur nul est celle qui a tous les scalaires égaux à 0.

Définition. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ qui n'est pas libre est dite **liée**. Une famille est donc liée si :

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{non nulle à support fini, } \ / \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E.$$

Une telle relation est appelée une relation de liaison entre les $(x_i)_{i \in I}$. Elle permet d'exprimer un des x_i comme une combinaison linéaire des autres (ce qui est impossible si la famille est libre).

m Pour montrer qu'une famille est libre, on commence par définir $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$ et on prouve que $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$. On remarquera que dans le cas où I est fini, la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est automatiquement à support fini (car elle contient un nombre fini de scalaires donc un nombre fini de scalaires non nuls).

Exercice d'application 12. Montrer que la famille constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice d'application 13. En évaluant en des valeurs de $\mathbb{R}$ bien choisies, montrer que la famille $(\cos, \sin, x \mapsto x)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice d'application 14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(nx) \end{array} \right.$. Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre mais que la famille (f_1, f_2, f_3) est liée. Que peut-on dire de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

III.3. Base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$(e_i)_{i\in I} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists!(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ à support fini } / \ x = \sum_{i\in I} x_i e_i.$$

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires. C'est la famille des coordonnées du vecteur x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

(m) Pour montrer qu'une famille est une base :
- Soit on montre qu'elle est libre et génératrice. On commence le plus souvent par montrer la liberté (c'est le sens le plus facile en général, et on verra au prochain chapitre que sous certaines conditions, cela entraine que la famille est une base).
- On montre directement que la famille est une base en prenant un vecteur $x \in E$ et en résolvant le système $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ (c'est à dire en raisonnant par analyse/synthèse en supposant que la famille $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ existe et en déterminant leurs valeurs en fonction de x). L'existence d'une telle famille prouve la partie génératrice de la famille. L'unicité prouve la liberté.

,

Exercice d'application 15. Montrer que la famille $(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées dans cette base du polynôme $X^2 + X + 1$.

IV. Applications linéaires

IV.1. Définition

Définition. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u : E \to F$ une fonction. On dit que u est linéaire si :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

(m) Une application est linéaire si l'image d'une combinaison linéaire par cette application est la combinaison linéaire des images. Pour montrer qu'une application est linéaire, on revient à la définition. Pour montrer qu'elle ne l'est pas, on donne un contre exemple.

Exercice d'application 16. Montrer que $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array} \right.$ est linéaire mais que $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ ne l'est pas.

Exercice d'application 17. Les applications $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) \end{array} \right.$ et $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - 1 \end{array} \right.$ sont-elles linéaires ?

Notation. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs. $L(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F. De plus :
- si $u \in L(E, E)$, on dit que u est un endomorphisme. *On notera* $L(E, E) = L(E)$.
- si $u \in L(E, F)$ est bijective, on dit que u est un isomorphisme.
- si $u \in L(E)$ est bijective, on dit que u est un automorphisme.

IV.2. Structure de $L(E,F)$

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs. Alors, $(L(E,F),+)$ est un $\mathbb{K}$-ev de neutre $0_{L(E,F)}$ (l'application nulle définie de E dans F).

Proposition. Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-evs. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors, $v \circ u \in L(E,G)$. Autrement dit, une composée d'applications linéaires est linéaire.

Proposition. Soient E,F deux $\mathbb{K}$-evs. Soient $u \in L(E,F)$ bijective. Alors, $u^{-1} \in L(F,E)$. Autrement dit, la réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors :
- $(L(E),+,\circ)$ est un anneau (non commutatif en général).
- si on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (donc des applications linéaires bijectives de E dans E), $(GL(E),\circ)$ est un groupe (non commutatif en général). C'est le groupe linéaire.

m On peut donc additionner des applications linéaires, les multiplier par des scalaires, les composer (quand les ensembles de départ/d'arrivée sont compatibles), les inverser (quand elles sont bijectives) et on obtient toujours des applications linéaires.

Exercice d'application 18. On pose $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1) Montrer que $u \in L(\mathbb{R}^2)$.

2) Déterminer $u^2 = u \circ u$, u^3 et u^4. En déduire que u est bijective et déterminer u^{-1}. Que représente géométriquement l'application u ?

3) Montrer que $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, u)$ est une famille libre de $L(\mathbb{R}^2)$. *On évaluera la relation $aId_{\mathbb{R}^2} + bu = 0_{L(\mathbb{R}^2)}$ en des valeurs de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ simples.*

IV.3. Liens entre applications linéaires et espaces vectoriels

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs. Soit $u \in L(E,F)$, E_1 un sev de E et F_1 un sev de F. Alors $u(E_1)$ est un sev de F et $u^{-1}(F_1)$ est un sev de E. Autrement dit, l'image directe et l'image réciproque d'espaces vectoriels par une application linéaire sont encore des espaces vectoriels.

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs. Soit $u \in L(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$u\left(\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})\right) = \mathrm{Vect}\left((u(e_i))_{i\in I}\right).$$

m Cette dernière proposition sera très utile pour calculer l'image d'une application linéaire en connaissant une famille génératrice de E.

IV.4. Image et Noyau

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs et $u \in L(E,F)$. Alors on pose :
- $\mathrm{Im}(u) = u(E)$ l'image de u. *C'est l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent dans E par u.*
- $\ker(u) = u^{-1}(\{0_F\})$ le noyau de u. *C'est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = 0_F$.*

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs et $u \in L(E,F)$. Alors :
- u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.
- u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

m Pour calculer $\ker(u)$, on fixe $x \in E$ et on cherche ceux qui vérifient l'équation $u(x) = 0_F$.

m Pour calculer $\mathrm{Im}(u)$, on peut soit revenir à la définition en cherchant tous les vecteurs $y \in E$ qui s'écrivent sous la forme $y = u(x)$ avec $x \in E$, soit si on a $E = \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$ (autrement dit si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E), alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((u(x_i))_{i\in I})$. Il suffit donc de calculer les vecteurs $u(x_i)$ pour $i \in I$ et de trouver l'espace vectoriel qu'ils engendrent.

Exercice d'application 19. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x+2y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Vérifier que u est linéaire et déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. *Pour l'image, on pourra utiliser la base canonique de $\mathbb{R}^2$...*

Exercice d'application 20. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) \end{array} \right.$. Vérifier que u est linéaire et montrer que $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$ (les polynômes constants) et que $\mathrm{Im}(u) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0\}$.

Proposition. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-evs. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors :

$$v \circ u = 0_{L(E,G)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v).$$

Proposition. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-evs. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v) \text{ et } \ker(u) \subset \ker(v \circ u).$$

Exercice d'application 21. Redémontrer avec cette proposition que si $v \circ u$ est injective, alors u est injective et que si $v \circ u$ est surjective, alors v est surjective.

IV.5. Liens entre applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition. Soit $u \in L(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. Alors :
- si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E et que u est surjective, alors $(u(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.
- si $(e_i)_{i\in I}$ est libre et que u est injective, alors la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre.

Proposition. Soit $u, v \in L(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors :

$$u = v \Leftrightarrow \forall i \in I,\ u(e_i) = v(e_i).$$

Théorème. De construction des applications linéaires. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evs. Soit $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une base de E et $(f_i)_{i\in I} \in F^I$ une famille de vecteurs de F. Alors :

$$\exists! u \in L(E,F)\ /\ \forall i \in I,\ u(e_i) = f_i.$$

De plus : $\begin{cases} u \text{ est injective} \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \text{ est libre.} \\ u \text{ est surjective} \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \text{ est génératrice de } F \\ u \text{ est bijective} \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \text{ est une base de } F \end{cases}$.

m Ce théorème est très utile puisqu'il permet de construire des applications linéaires en choisissant les images d'une base. Cela permet de construire des applications linéaires vérifiant des propriétés particulières.

Exercice d'application 22. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $u(1) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(X^n - X^{n-1}) = X^n$. Est-elle injective ? Surjective ?

IV.6. Prolongement d'applications linéaires

Théorème. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev et E_1, E_2 deux sevs de E supplémentaires (donc tels que $E = E_1 \oplus E_2$). Soient $u_1 \in L(E_1, F)$ et $u_2 \in L(E_2, F)$. Alors, $\exists! u \in L(E,F)\ /\ u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

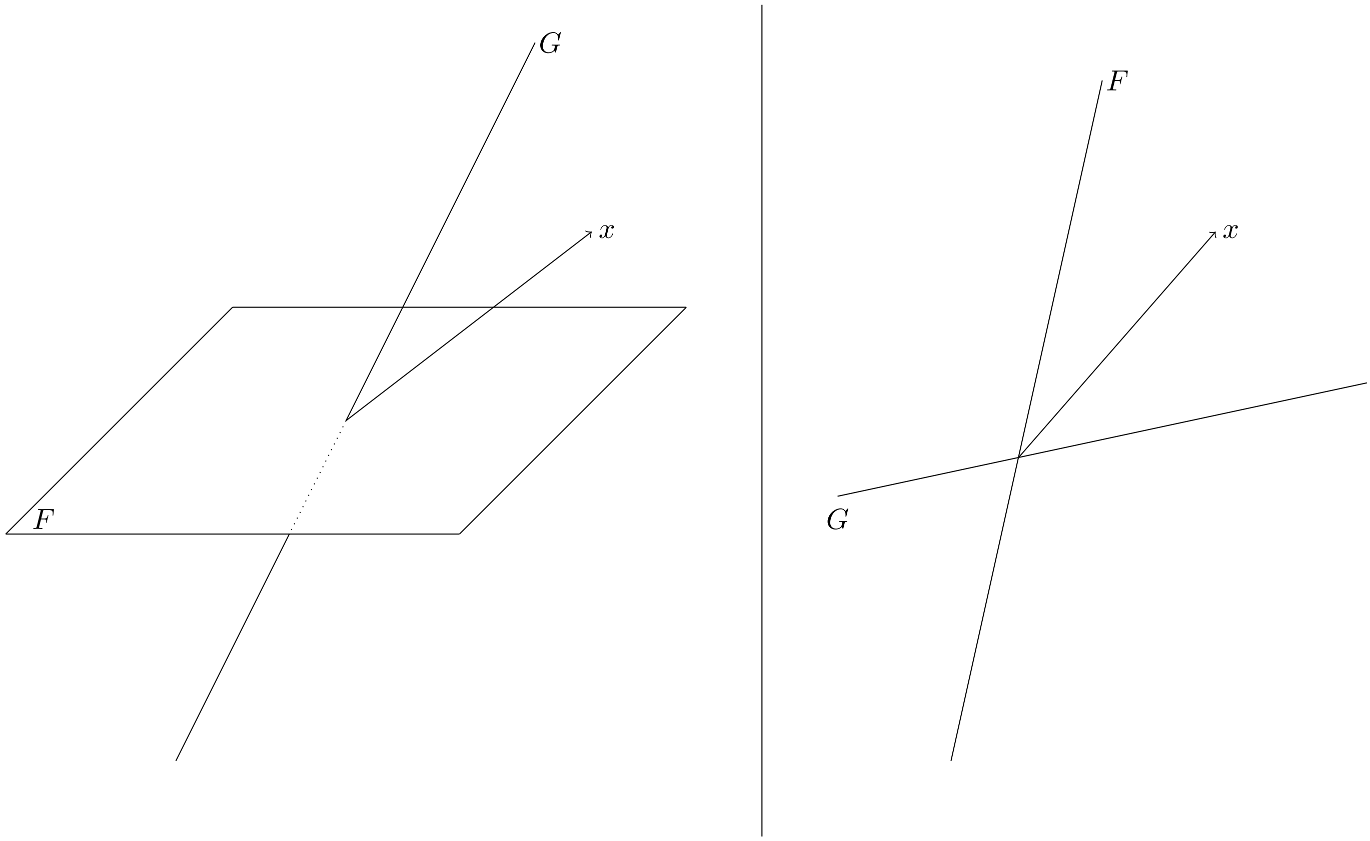
V. Projecteurs et symétries

V.1. Projections

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E supplémentaires. On a donc $E = F \oplus G$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. La projection sur F parallèlement à G est l'application $p : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{cases}$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E supplémentaires. Soit p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F. Alors :
- $p, q \in L(E)$ (les projections sont des applications linéaires).
- $p + q = \mathrm{Id}_E$.
- $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p = O_{L(E)}$.
- $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(q)$ et $G = \mathrm{Im}(q) = \ker(p)$.

Exercice d'application 23. Dans les deux cas suivants, dessiner les vecteurs $p(x)$ et $q(x)$ et retrouver graphiquement les propriétés précédentes (en particulier le fait que $F = \ker(\mathrm{Id}_E - p)$ et que $G = \ker(p)$).



Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E)$. Alors, u est une projection si et seulement si $u \circ u = u$. u est alors la projection sur $\mathrm{Im}(u) = \ker(\mathrm{Id}_E - u)$ parallèlement à $\ker(u)$.

m Pour montrer qu'une application linéaire est une projection, on montre donc que $u \circ u = u$. Déterminer les éléments caractéristiques d'une projection, c'est déterminer l'espace sur lequel on projette, c'est à dire $\mathrm{Im}(u) = \ker(\mathrm{Id}_E - u)$ et l'espace parallèlement auquel on projette, c'est à dire $\ker(u)$.

Exercice d'application 24. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2x-y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que u est un projecteur et en déterminer ses éléments caractéristiques.

V.2. Symétries

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E supplémentaires. On a donc $E = F \oplus G$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sevs de E supplémentaires. Soit p la projection sur F parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à g. Alors :

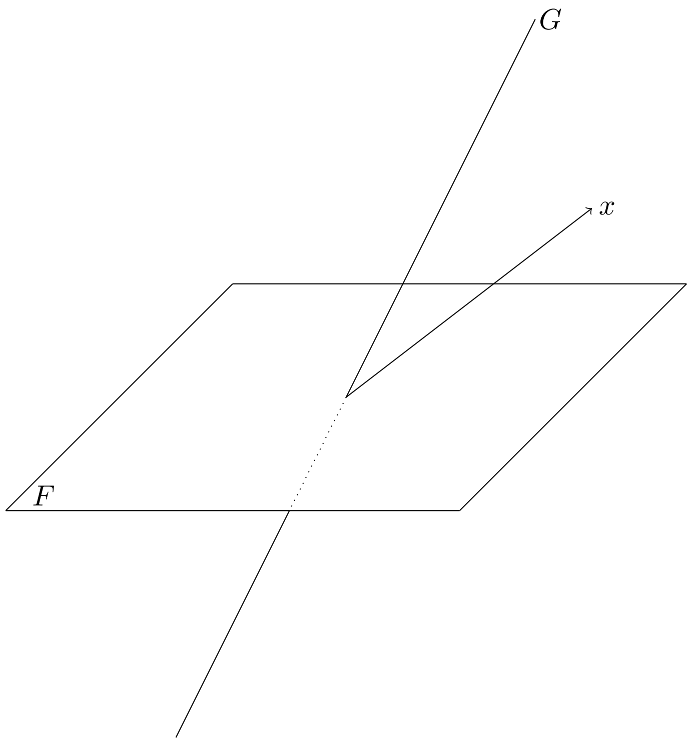
- $s \in L(E)$ (les symétries sont des applications linéaires).

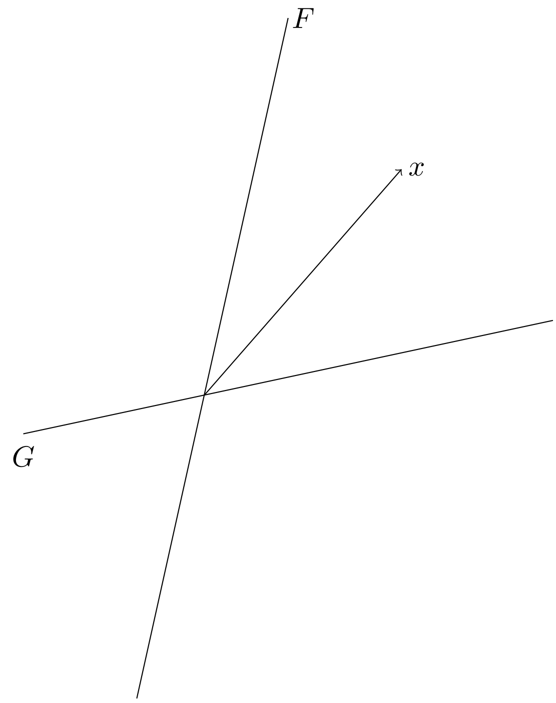
- $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2q$.
- $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
- $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E)$. Alors, u est une symétrie si et seulement si $u \circ u = \mathrm{Id}_E$. u est alors la symétrie par rapport à $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$.

m Pour montrer qu'une application linéaire est une symétrie, on montre donc que $u \circ u = \mathrm{Id}_E$. Déterminer les éléments caractéristiques d'une symétrie, c'est déterminer l'espace par rapport auquel on effectue la symétrie, c'est à dire $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et l'espace parallèlement auquel on effectue la symétrie, c'est à dire $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice d'application 25. Dans les deux cas suivants, dessiner les vecteurs $s(x)$, $p(x)$ et $q(x)$ et retrouver graphiquement les propriétés précédentes (en particulier le fait que $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$).





VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) $E_1 \subset \mathbb{R}[X]$, $E_1 \neq \emptyset$ (car le polynôme nul est dans E_1). Pour terminer la preuve, il ne reste plus qu'à définir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E_1$. On a alors $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ et de même, $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$. Ceci prouve que $\lambda P + \mu Q \in E_1$: E_1 est donc bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (c'est un sev de $\mathbb{R}[X]$).

2) $E_2 \subset \mathbb{R}^3$, $E_2 \neq \emptyset$ (car le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien dans E_2). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in E_2$. Si on note $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$\lambda X_1 + \mu X_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors $(\lambda x_1 + \mu x_2) + 3(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + 3y_1) + \mu(x_2 + 3y_2) = 0$. Ceci entraine que $\lambda X_1 + \mu X_2 \in E_2$. E_2 est donc bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (c'est un sev de $\mathbb{R}^3$).

3) $E_3 \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles). On a $E_3 \neq \emptyset$ (car la fonction nulle est dans E_3 car elle tend bien vers 0 en $+\infty$). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E_3$. On a alors par somme de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \to +\infty} f(x) + \mu \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

On a donc bien $\lambda f + \mu g \in E_3$. E_3 est donc bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (c'est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Exercice d'application 2.

1) E_1 n'est pas un espace vectoriel. En effet, la fonction $f : x \mapsto -x$ est dans E_1 (elle est décroissante sur $\mathbb{R}$) mais la fonction $-f$ n'est pas décroissante (elle est même strictement croissante...). *Attention, la négation d'être décroissant n'est pas d'être croissant !*

2) E_2 n'est pas un espace vectoriel. En effet, prenons les fonctions $f : \left\{ \begin{array}{llll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & -x & \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{llll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$. On a alors $f, g \in E_2$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$. Cependant, $f + g$ est la fonction valeur absolue qui sur $\mathbb{R}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

3) E_3 n'est pas un espace vectoriel. On a par exemple $P = X^2 + X$ et $Q = X^2$ qui sont dans E_3 mais $P - Q = X$ qui n'est pas dans E_3.

4) E_4 n'est pas un espace vectoriel. On a par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui sont dans E_4 mais leur somme $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans E_4.

Exercice d'application 3. Supposons par l'absurde que $\exp \in \text{Vect}((x^n)_{n \in \mathbb{N}})$. Il existe donc une famille $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à support fini telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i x^i$. Puisque la famille est à support fini, il existe $i_{\max} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i > i_{\max},\ \lambda_i = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \lambda_i x^i.$$

On a en particulier $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \lambda_i x^i e^{-x}$. On peut alors faire tendre x vers $+\infty$ et par croissances comparées, on a donc $1 = 0$: absurde !

On a donc bien $\exp \notin \mathrm{Vect}((x^n)_{n\in\mathbb{N}})$. *Remarquons le résultat que l'on verra plus tard dans l'année :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. *Cependant, une combinaison linéaire de vecteurs étant finie, cela ne contredit pas ce que nous venons de démontrer...*

Exercice d'application 4. La réponse est oui. En effet, prenons les fonctions $f : \left\{ \begin{array}{llll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{llll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \mapsto & 0 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$. On a alors f décroissante et g croissante donc ces deux fonctions sont dans $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ croissantes ou décroissantes}\}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ s'écrit comme $f + g$ donc est bien dans l'espace vectoriel engendré par cet ensemble.

Exercice d'application 5. On procède par suite d'égalités entre ensembles :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -2y - 3z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix},\ y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Exercice d'application 6. Par suite d'égalités encore :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = -3y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Cette méthode est donc à priori la plus simple mais elle ne fonctionne pas toujours... Il n'est pas toujours facile de trouver une famille de vecteurs qui engendrent un espace vectoriel (prendre par exemple le cas de E_3 dans le premier exercice d'application...)

Exercice d'application 7. On a déjà montré que F était un sev de $\mathbb{R}[X]$. Pour G, on sait que $\mathbb{R}_1[X]$ est un espace vectoriel (il contient bien le polynôme nul et il est stable par combinaison linéaire puisque si P et Q sont deux polynômes, $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)))$.

Pour montrer que F et G sont en somme directe, montrons que $F \cap G = \{0\}$. On a bien $0 \in F \cap G$. Réciproquement, si $P \in F \cap G$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX + b$. Or, $P(0) = b = 0$ donc $b = 0$ et $P(1) = a = 0$ d'où $P = 0$. On a donc bien $F \cap G = \{0\}$.

Exercice d'application 8. Une combinaison linéaire de suites constantes est une suite constante et la suite nulle est constante dans F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De même la suite nulle tend vers 0 et une combinaison linéaire de suites qui tendent vers 0 tend également vers 0. F et G sont bien des sevs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

De plus, si une suite est à la fois constante et tend vers 0 en l'infini, alors c'est automatiquement la suite nulle. Ceci entraine que $F \cap G = \{0\}$, et F et G sont donc en somme directe.

Exercice d'application 9.

1) Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

- (analyse) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et supposons que $P = A + B$ avec $A \in F$ et $B \in Q$. Puisque B est de degré inférieur ou égal à 1, il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $B = cX + d$. On a alors $P(0) = A(0) + b = b$ et $P(1) = A(1) + a + b = a + b$.
- (synthèse) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $B = (P(1) - P(0))X + P(0)$ et $A = P - B$. On a alors $P = A + B$, $B \in G$ et $A \in F$ (on vérifie que $A(0) = A(1) = 0$). On a donc bien $\mathbb{R}[X] \subset F + G$ (et la réciproque est toujours vraie). Puisque l'on a déjà montré que la somme était directe, on a bien $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

2) Montrons que $F \oplus G = E$. On remarquera tout d'abord que l'on a bien $F + G \subset E$ (car $F \subset E$ et $G \subset E$).

- (analyse) Soit $u \in E$ et supposons que $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Puisque w est une suite constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = \lambda$. Puisque la suite u converge et que la suite v tend vers 0 en l'infini, on a alors $\lambda = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

- (synthèse) Soit $u \in E$. Posons w la suite constante égale à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (qui existe car la suite u converge) et $v = u - w$. On a alors bien $u = v + w$, w qui est constante et v qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a donc bien $E \subset F + G$, ce qui prouve $F \oplus G = E$ puisque l'on a déjà montré que la somme était directe.

Exercice d'application 10. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 X + \lambda_2 Y & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ b = 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ b - 2a = -7\lambda_2 \end{array} \right. \qquad\qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a - 3\lambda_2 = \lambda_1 \\ \dfrac{2a-b}{7} = \lambda_2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a+3b}{7} = \lambda_1 \\ \dfrac{2a-b}{7} = \lambda_2 \end{array} \right. .
\end{array}$$

On peut donc écrire tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ comme une combinaison linéaire de X et de Y. Puisque X et Y sont dans $\mathbb{R}^2$, ceci entraine que X et Y forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. *On a même que c'est une base puisque l'on a trouvé une unique solution au système.*

Exercice d'application 11. On a $1 = P_0$, $X = P_1 - P_0$, $X^2 = (X+1)^2 - 2X - 1 = P_2 - 2P_1 + P_0$ et

$$\begin{array}{rcl}
X^3 & = & (X+1)^3 - 3X^2 - 3X - 1 \\
& = & P_3 - 3(P_2 - 2P_1 + P_0) - 3(P_1 - P_0) - P_0 \\
& = & P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0
\end{array} .$$

Ceci entraine que $1, X, X^2, X^3 \in \mathrm{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq 3})$ d'où $\mathrm{Vect}((X^k)_{0 \leq k \leq 3}) \subset \mathrm{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq 3})$. On a donc $\mathbb{R}_3[X] \subset \mathrm{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq 3})$ et l'inclusion réciproque est claire car les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 sont de degré inférieur ou égal à 3. On a donc prouvé par double inclusion que :

$$\mathrm{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq 3}) = \mathbb{R}_3[X].$$

Ceci prouve que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq 3}$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice d'application 12. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on suppose que $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2c \\ b = c \\ -2c + 2c + c = 0 \end{array} \right.$$

Ceci entraine que $c = b = a = 0$. La famille est donc libre.

Exercice d'application 13. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) + cx = 0$. En évaluant en $x = 0$, on trouve que $a = 0$. En évaluant en $x = \pi$, on trouve que $c\pi = 0$ et donc $c = 0$. Enfin, en évaluant en $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a $b = 0$. La famille donnée est donc libre.

Exercice d'application 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 = 0$, soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a\ln(x) + b\ln(2x) = 0$. En évaluant en $x = 1$, on obtient $b\ln(2) = 0$, soit $b = 0$. En évaluant en $x = e$, on obtient $a = 0$. On a donc bien la famille (f_1, f_2) libre.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2(x) = \ln(2) + \ln(x) = \ln(2) + f_1(x)$ et $f_3(x) = \ln(3) + \ln(x) = \ln(3) + f_1(x)$. Ceci entraine que :

$$\ln(2) = f_2 - f_1 \text{ et } \ln(3) = f_3 - f_1.$$

On a donc $\ln(3)(f_2 - f_1) - \ln(2)(f_3 - f_1) = 0$, soit $(\ln(2) - \ln(3))f_1 + \ln(3)f_2 - \ln(2)f_3 = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3) est donc liée.

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ contient une famille liée, alors elle est liée.

Exercice d'application 15. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On peut écrire P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que l'on puisse écrire $aX^2 + bX + c = \lambda_1 X^2 + \lambda_2(X + 1)^2 + \lambda_3(X + 2)^2$. On a alors :

$$aX^2 + bX + c = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (2\lambda_2 + 4\lambda_3)X + (\lambda_2 + 4\lambda_3).$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on a donc le système (que l'on résout avec la méthode du pivot) :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = b \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_2 = b - c & \qquad L_2 \to L_2 - L_3 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - b + c + \dfrac{b - 2c}{4} \\ \lambda_2 = b - c \\ \lambda_3 = \dfrac{-b + 2c}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{4a - 3b + 2c}{4} \\ \lambda_2 = b - c \\ \lambda_3 = \dfrac{-b + 2c}{4} \end{cases}.$$

On obtient donc une unique solution. La famille $(X^2, (X + 1)^2, (X + 2)^2)$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (on a montré que $R_2[X] \subset \text{Vect}((X^2, (X + 1)^2, (X + 2)^2))$, l'inclusion réciproque est clairement vraie et l'unicité de la solution au système ci-dessus prouve la liberté).

En prenant $a = b = c = 1$ dans le système précédent, on obtient :

$$X^2 + X + 1 = \frac{3}{4} \times X^2 + 0 \times (X + 1)^2 \frac{1}{4} \times (X + 2)^2.$$

Exercice d'application 16. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= 3(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda 3x + \mu 3y \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y). \end{aligned}$$

u est donc bien linéaire. Par contre v ne l'est pas puisque par exemple $v(0) = 0$ et $v(1) + v(-1) = 1 + 1 = 2$ donc on a $v(1 + (-1)) \neq v(1) + v(-1)$.

Exercice d'application 17. u est linéaire. En effet, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, alors par linéarité de la dérivation :

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda P+\mu Q) & = & X(\lambda P+\mu Q)' \\ & = & \lambda XP'+\mu XQ' \\ & = & \lambda u(P)+\mu u(Q). \end{array}$$

v n'est par contre pas linéaire. En effet, on a par exemple $v(0)=1\neq 0$ donc v n'est pas linéaire.

Exercice d'application 18.

1) Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} u\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) & = & u\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_2\\ \lambda y_1+\mu y_2\end{pmatrix}\right) \\ & = & \begin{pmatrix}-(\lambda y_1+\mu y_2)\\ \lambda x_1+\mu x_2\end{pmatrix} \\ & = & \lambda\begin{pmatrix}-y_1\\x_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-y_2\\x_2\end{pmatrix} \\ & = & \lambda u\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)+\mu u\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right). \end{array}$$

u est donc bien linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

2) On a $u^2:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-(x)\\(-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $u^3:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-(-y)\\-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ et enfin :

$$u^4:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-(-x)\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

On a alors $u^4=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc u est bijective d'inverse u^3 (car $u\circ u^3=u^3\circ u=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$). Géométriquement u est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3) Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}+bu=0$. En évaluant en le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix}a+0\\0+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ d'où $a=b=0$. La famille $(u,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ est donc libre.

Exercice d'application 19. u est linéaire (même preuve que dans l'exercice ci-dessus). On a :

$$\begin{array}{rcl} \ker(u) & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ /\ u\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ /\ \left\{\begin{array}{l}2x+y=0\\4x+2y=0\end{array}\right.\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ /\ y=-2x\right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right). \end{array}$$

On a également :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\left(u\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), u\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Exercice d'application 20. u est bien définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. De plus, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

$$
\begin{aligned}
u(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)'\\
&= \lambda X P' + \mu X Q'\\
&= \lambda u(P) + \mu u(Q).
\end{aligned}
$$

u est donc bien linéaire. On a de plus $P \in \ker(u) \Leftrightarrow XP'(X) = 0$. Puisque le polynôme X est différent du polynôme nul, ceci est équivalent à $P'(X) = 0$ et donc équivalent au fait que P soit un polynôme constant. On a donc bien $\ker(u) = R_0[X]$.

Par double inclusion, montrons que $\mathrm{Im}(u) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0\}$.

- Soit $P \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = XQ'(X)$. On a alors bien $P(0) = 0$.
- Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Puisque P admet 0 comme racine, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ(X)$. Si on a $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors, si on pose $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$, on a $P = XR'(X) = u(R)$. On a donc bien $P \in \mathrm{Im}(u)$.

Par double inclusion, on a le résultat voulu.

Exercice d'application 21. Supposons $v \circ u$ injective. On a alors $\ker(v \circ u) = \{O_E\}$. Puisque $\ker(u) \subset \ker(v \circ u) = \{0_E\}$, on a donc $\ker(u) = \{0_E\}$ (l'autre inclusion étant toujours vraie) et u est donc injective.

Supposons $v \circ u$ surjective. On a alors $\mathrm{Im}(v \circ u) = G$. Puisque $G = \mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$, on a alors $G = \mathrm{Im}(v)$ (l'autre inclusion étant toujours vraie) et v est donc surjective.

Exercice d'application 22. On procède par analyse/synthèse.

Si une telle application linéaire existe, on a $u(1) = 1$, $u(X-1) = X$ donc par linéarité $u(X) = X + u(1) = X + 1$. On a ensuite $u(X^2 - X) = X^2$ d'où par linéarité, $u(X^2) = X^2 + u(X) = X^2 + X + 1$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(X^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

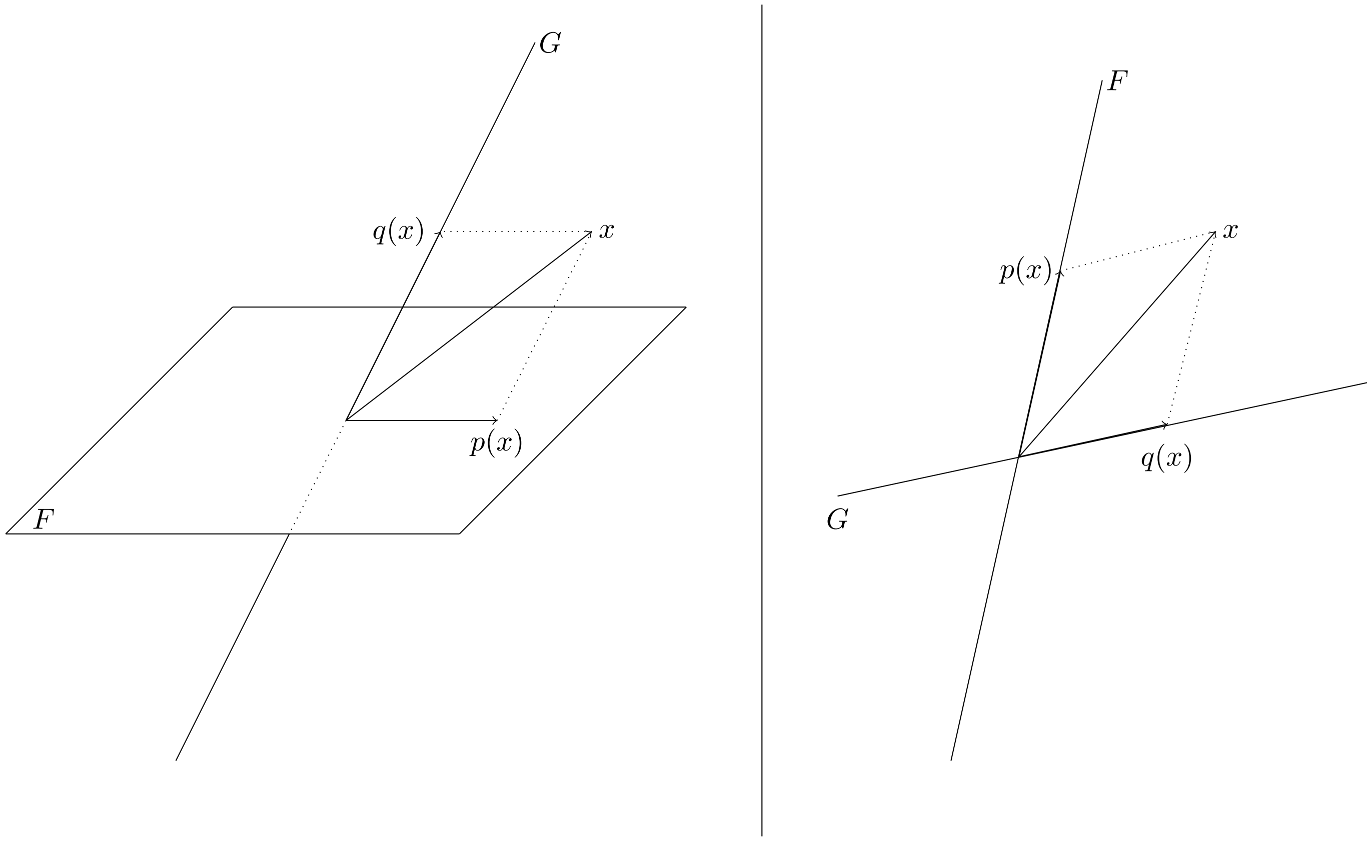
Réciproquement, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. Par théorème, puisque $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, il existe alors une unique application linéaire telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(X^n) = P_n$. On a alors bien $u(1) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u(X^n - X^{n-1} = u(X^n) - u(X^{n-1}) = P_n - P_{n-1} = X^n.$$

On a donc bien prouvé l'existence d'une telle application linéaire. L'analyse précédente prouve l'unicité puisque l'on a les valeurs des $u(X^n)$ imposées, et que deux applications linéaires égales sur une base sont égales partout.

Puisque la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (car elle est échelonnée en degré), on en déduit que u est bijective.

Exercice d'application 23. On a les dessins suivants :



Dans les deux cas, on a bien $p(x) \in F$ et $q(x) \in G$. On a bien $G = \ker(p)$ (un vecteur est dans G si et seulement si sa projection sur F parallèlement à G l'envoie sur le vecteur nul) et $F = \ker(\mathrm{Id}_E - p)$ (les points de F sont exactement les points fixes de p, c'est à dire les $x \in E$ tels que $p(x) = x \Leftrightarrow (\mathrm{Id}_E - p)(x) = 0_E$.)

Exercice d'application 24. u est linéaire et pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
(u \circ u)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2(2x-y)-(2x-y) \\ 2(2x-y)-(2x-y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2x-y \end{pmatrix} \\
&= u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

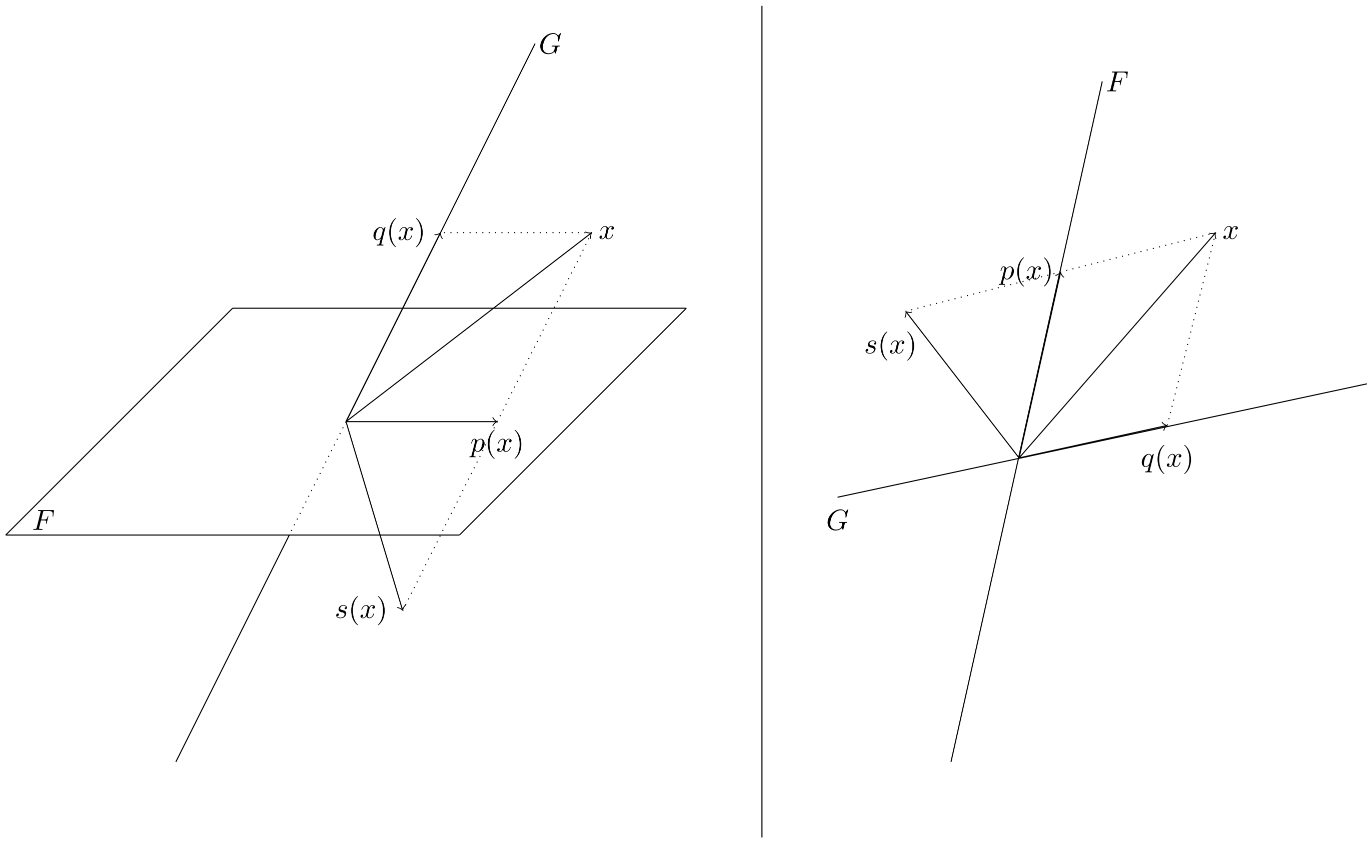
On a donc $u \circ u = u$ donc u est un projecteur. C'est la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\left(u\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\ker(u) &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \ / \ u\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \ / \ 2x - y = 0\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Exercice d'application 25. On a les dessins suivants :



Dans les deux cas, on a bien $s(x) = p(x) - q(x)$. On a bien que les vecteurs fixes par s sont exactement les vecteurs de F, c'est à dire que F est l'ensemble des $x \in E$ tels que $s(x) = x \Leftrightarrow (s - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ et que les vecteurs de G sont les $x \in E$ tels que $s(x) = -x \Leftrightarrow (s + \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$.