Programme de colle, semaine 6

Fonctions usuelles + intégration (début) :

— Nous avons commencé les fonctions usuelles en définissant les fonctions trigonométriques réciproques (arcsin, arccos, arctan). Domaine de définition, domaine de dérivabilité, calcul de la dérivée et graphe.

— Nous avons ensuite défini le logarithme comme l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 (nous avons admis que toute fonction continue sur un intervalle admettait une primitive). Nous avons alors démontré/admis ses propriétés.

— Nous avons ensuite défini sa réciproque (exp) et démontré ses propriétés. Ceci nous a permis ensuite de définir sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons tracé leurs graphes et vérifié leurs propriétés.

— Nous avons ensuite démontré les croissances comparées. Nous avons terminé le chapitre par l'étude des fonctions hyperboliques.

— Nous avons admis les différentes propriétés de l'intégrale (relation de Chasles, linéarité, croissance, la valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue). Pour les deux derniers résultats, on fera attention au sens des bornes !

— Nous avons ensuite défini les primitives et admis qu'une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admettait toujours une primitive et que celle-ci peut s'écrire sous la forme $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ où $a \in I$. Nous avons alors montré que toutes les primitives sont égales à une constante près et que pour toute primitive F de f, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Nous avons également vu comment dériver les fonctions du type $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ (avec u et v dérivables).

— Nous avons démontré les théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable et vu des exemples d'applications. Nous avons vu alors comment utiliser les résultats précédents à la recherche de primitives (j'ai noté $\displaystyle\int^x f(t)dt$ une primitive de f et on peut réaliser tous les calculs sans se préoccuper des constantes, les égalités étant alors réalisées à une constante près).

— La fin du chapitre d'intégration a été consacrée à la recherche de primitives des fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ (étudier selon le signe du discriminant).

— Nous avons terminé le chapitre par l'extension de la continuité/dérivabilité et de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.

Compétences :

— Simplifier des expressions du genre $\arcsin(\sin(x))$ en « ramenant » x dans le bon ensemble (idem avec arccos et arctan).

— Montrer qu'une fonction est bijective de I (un intervalle de $\mathbb{R}$) dans J à l'aide du théorème de la bijection continue.

— Réaliser une étude de fonction (domaine de definition, de dérivabilité, tableau de variations, graphe).

— Trouver le domaine de dérivabilité et calculer une dérivée de fonction en détaillant (éventuellement) les calculs s'il y a de multiples fonctions composées.

— Déterminer une limite en simplifiant les éventuelles formes indéterminées (on pourra éventuellement utiliser les croissances comparées). En cas de quotient qui donne une forme indéterminée,

factoriser par le terme dominant le numérateur et le dénominateur pour lever l'indétermination.
— Utiliser un changement de variable pour simplifier un calcul d'intégrale/de primitive.
— Utiliser une intégration par partie pour simplifier un calcul d'intégrale/de primitive ou pour trouver des relations de récurrences entre différentes intégrales.
— Utiliser la linéarisation (en remplaçant cos et sin par leur expression avec les formules d'Euler) pour déterminer des primitives du type $\int^x \cos^n(t)dt$ et $\int^x \sin^n(t)dt$.

Remarques sur le programme : Le TD d'intégration n'a pas été fait en entier (nous avons cependant fait des exemples d'intégrations par parties et de changement de variable), interrogez en premier sur les fonctions usuelles (et ensuite sur l'intégration si tout se passe bien). Les logarithmes et exponentielles en base a sont hors programme ainsi que les réciproques des fonctions hyperboliques.

Questions de cours :

1. *(quatre au choix du colleur)* Sans démonstration, donner les propriétés (domaine de définition, parité/imparité éventuelle, périodicité éventuelle, domaine de dérivabilité, dérivée, limites éventuelles) et tracer les graphes de $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arccos(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.
2. *(quatre au choix du colleur)* Sans démonstration, donner les primitives de fonctions usuelles (**on précisera à chaque fois sur quel intervalle on se place**) : $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, etc.
3. Démontrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors $G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.
4. Justifier l'existence d'une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ (car elle est continue) et en déterminer une en calculant $\int_1^x \ln(t)dt$ par intégration par parties.
5. Justifier l'existence de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ et la calculer avec le changement de variable $x = \sin(t)$.
6. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{t+1}{t^2+t+1}dt$ (en expliquant la méthode).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 6 : 16.1) et 20.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD6 : 10.
- 2ieme du groupe : TD6 : 17.
- 3ieme du groupe : TD7 : 5)

Prochain programme : intégration en entier et début des équations différentielles.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 10 :

- Commencer par le domaine de définition des fonctions. Pour f, on trouve normalement deux valeurs (simples) interdites.
- Pour simplifier f, on utilisera la formule de duplication de la tangente donnant $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$. On peut la retrouver en utilisant celle de $\tan(a+b)$ en $a=b=x$.
- Pour simplifier g, on pourra utiliser le fait que $\forall x \in D_{\tan},\ \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$ ce qui permet d'exprimer le cosinus uniquement en fonction de la tangente.
- Attention pour la simplification finale de g au fait que $\sqrt{X^2} = |X|$ (et non pas juste X).

Exo 17 :

- Pour rappelle que pour étudier $f(x)^{g(x)}$, on écrit $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ (en l'occurrence, $2^{-x} = e^{-x\ln(2)}$). On déterminera les limites en $\pm\infty$, on trouve normalement un maximum atteint en $x = \dfrac{1}{\ln(2)}$. *On rappelle/utilisera le fait que* $0 < \ln(2) < 1$.
- On factorisera $g'(x)$ par $2^{\cos(x)+\sin(x)}$ pour obtenir l'égalité voulue.
- Pour le signe de $g'(x)$, bien justifier que sur $[0, \pi/4]$, $\sin(x) \leq \cos(x)$.
- Utiliser le fait que $g(0) \leq g(x) \leq g(\pi/4)$ pour $x \in [0, \pi/4]$ par croissance de g.
- Justifier que $x \mapsto 2^{|\sin(x)|} + 2^{|\cos(x)|}$ est paire et $\dfrac{\pi}{2}$ périodique pour étendre l'encadrement à $\mathbb{R}$.

Exo 5 :

- Bien rappeler les hypothèses du théorème de changement de variable.
- Utiliser la formule de $\tan(a+b)$ pour simplifier $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.
- Il faut ensuite mettre au même dénominateur dans le logarithme et obtenir une égalité de la forme $I = \ldots - I$ où $\ldots$ est une intégrale simple à calculer. On en déduit alors la valeur de I.