9. Ensembles et applications, méthodologie

I. Ensembles

I.1. Propriétés

Définition. Quand on définit un ensemble, on peut le définir :
- de manière **explicite** en notant entre accolades les éléments de l'ensemble, éventuellement séparés d'une virgule, en indiquant éventuellement à la fin les valeurs qui sont parcourues par les éléments.
- de manière **implicite** en notant entre accolades les éléments de l'ensemble puis des conditions (après un symbole « tel que ») qui doivent être vérifiées par les éléments de l'ensemble.

Exercice d'application 1. Les ensembles suivants sont-ils définis de manière explicite ou implicite et à quels ensembles connus correspondent-ils ?

1. $A_1 = \{x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$.
2. $A_2 = \{1, i, -1, -i\}$.
3. $A_3 = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

Définition. Soient A et B deux ensembles.
- On note $x \in A$ si x est un élément de A (et on note $x \notin A$ sinon). On dit alors que x **appartient à** A.
- Si B est un autre ensemble, on note $A \subset B$ si **tous** les éléments de A sont également dans l'ensemble B. On dit alors que A est **inclus** dans B, que A est un sous-ensemble de B ou que A est une partie de B.

Définition. Soit A un ensemble. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A, c'est à dire l'ensemble des ensembles inclus dans A (donc l'ensemble des sous-ensembles de A).

I.2. Opérations sur les ensembles

Définition. Soit E un ensemble et $A \subset E$ un sous-ensemble de E. Le complémentaire de A dans E est noté A^c ou $\overline{A}$ (quand l'ensemble E est sous-entendu) et est défini par $\overline{A} = \{x \in E\ /\ x \notin A\}$. On a donc $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

Définition. Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Alors, on note :
- $A \cup B = \{x \in E\ /\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- $A \cap B = \{x \in E\ /\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Définition. Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

I.3. Liens entre les différentes opérations

Proposition. Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Alors :
- $\overline{(\overline{A})} = A$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposition. Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Alors :
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

I.4. Différence

Définition. Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On note $A \setminus B$ l'ensemble A privé de B, c'est à dire $A \setminus B = \{x \in A \ / \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

I.5. Ensembles produits

Définition. Soient A et B deux ensembles. On note $A \times B = \{(a, b), \ a \in A, \ b \in B\}$ le produit cartésien de A et B. Un élément $(x, y) \in A \times B$ est appelé un couple.

Définition. De la même manière, on pose $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n), \ x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$ l'ensemble des n-uplets donc la i-ième coordonnée est dans l'ensemble A_i. On note également pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A \times \ldots A$.

I.6. Exemple

(m) Pour démontrer que $A \subset B$, il faut commencer par définir un élément quelconque dans l'ensemble A (en écrivant « Soit $a \in A$ ») et ensuite montrer que cet élément appartient à B en utilisant les hypothèses à notre disposition (la preuve se termine donc quand on est arrivé à montrer que $a \in B$).

(m) Pour montrer que deux ensembles sont égaux (donc pour montrer que $A = B$), on démontre le plus souvent que $A \subset B$ et que $B \subset A$ à l'aide de la méthode précédente. On procède donc en général par double inclusion.

Exercice d'application 2. Soient A et B deux ensembles. Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cap B = A \cup B$.

Exercice d'application 3. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que :

$$(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow B = C.$$

Exercice d'application 4. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que $A \cup B = A \cap C$ si et seulement si $B \subset A \subset C$.

II. Image directe

II.1. Définition et propriétés

Définition. Soit $f : X \to Y$ et A un sous-ensemble de X (l'ensemble de départ de f). L'image directe de A par f est notée $f(A)$ et est définie par $f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in Y \ / \ \exists x \in A \ / \ y = f(x)\}$.

(m) Pour manipuler des images directes, il est **essentiel** de retenir que :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \ / \ y = f(x).$$

Autrement dit les éléments de $f(A)$ sont les éléments de l'ensemble d'arrivée de f qui admettent un antécédent dans A par f.

II.2. Exemples

(m) Si $f : X \to Y$ et $A \subset X$, il est en général plus facile pour calculer l'image directe $f(A)$ d'écrire A sous forme explicite. En effet, si on a $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $f(A) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$.

Exercice d'application 5. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}$ par l'exponentielle.

Exercice d'application 6. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$.

1. Écrire $\mathbb{U}$ sous forme explicite.
2. Déterminer $f(\mathbb{U})$ et le représenter graphiquement dans $\mathbb{C}$.

III. Image réciproque

III.1. Définition et propriétés

Définition. Soit $f : X \to Y$ et B un sous-ensemble de Y (l'ensemble d'arrivée de f). L'image réciproque de B par f est notée $f^{-1}(B)$ et est définie par $f^{-1}(B) = \{x \in X \ / \ f(x) \in B\}$.

(m) Pour manipuler des images réciproques, il est **essentiel** de retenir que :

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Autrement dit les éléments de $f^{-1}(B)$ sont les éléments de l'ensemble de départ de f dont l'image par f appartient à B. Attention à ne pas se faire induire en erreur par les notations, on peut toujours calculer une image réciproque, il n'est pas nécessaire que f soit bijective ! Pour éviter ceci, on écrit parfois l'image réciproque $f^{<-1>}(B)$ mais $f^{-1}(B)$ est la notation du programme officiel.

III.2. Exemples

(m) Si $f : X \to Y$ et $B \subset Y$, il est en général plus facile pour calculer l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'écrire B sous forme implicite. En effet, si on a $B = \{y \in Y \ / \ y \text{ vérifie une condition}\}$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in X \ / \ f(x) \text{ vérifie la même condition}\}$. Écrire le fait que $f(x)$ vérifie cette condition permet en général de calculer l'image réciproque.

Exercice d'application 7. Soit $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction exponentielle. Déterminer l'image réciproque de $\{2\}$ par l'exponentielle et la représenter graphiquement dans $\mathbb{C}$.

Exercice d'application 8. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$.

1. Écrire $\mathbb{R}$ sous forme implicite. *Quelle condition simple caractérise les réels dans l'ensemble des nombres complexes ?*
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{R})$ et la représenter graphiquement dans $\mathbb{C}$.

m Pour déterminer des images directes/réciproques associées à des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on réalise en général une étude de fonctions.

Exercice d'application 9. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - x \end{array} \right.$.

1. Déterminer le tableau de variations de f.
2. En déduire $f([-1, 2])$.
3. Résoudre $f(x) = 1$ et déterminer $f^{-1}(]0, 1])$.

IV. Fonction indicatrice

Définition. Soit X un ensemble et A un sous-ensemble de X. Alors la fonction indicatrice de A est notée $\mathbb{1}_A$ et est définie par $\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{lcll} X & \to & \{0, 1\} & \\ x & \mapsto & 1 & \text{si } x \in A \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \right.$.

Remarque : nous nous servirons des fonctions indicatrices principalement quand nous ferons des probabilités (voir chapitres 28 et 30).

V. Familles d'ensembles

V.1. Définition d'une famille

Notation. On note $(x_i)_{i \in I}$ la famille constituée des éléments x_i où $i \in I$. *La meilleure façon de la visualiser est de voir une famille comme une suite d'éléments numérotés à l'aide de l'ensemble I.*

V.2. Propriétés

Définition. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On pose alors :
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \ / \ \exists i \in I \ / \ x \in A_i\}$.
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \ / \ \forall i \in I, \ x \in A_i\}$.

Proposition. Toutes les propriétés vues pour deux ensembles sont encore vraies pour des familles constituées d'un nombre quelconque d'ensembles.

V.3. Partition

Définition. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensemble de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si :

1. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$
2. Les A_i sont deux à deux disjoints ($\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$).
3. $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$ *(sans cette hypothèse, on parle de recouvrement disjoint)*

Exercice d'application 10.

1. Déterminer trois partitions différentes de $\mathbb{N}$.
2. On pose $A = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^3 + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$. La famille (A, B) est-elle une partition de $\mathbb{N}$?

VI. Relations d'ordre et d'équivalence

VI.1. Relation binaire

Définition. Soit E un ensemble. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire si $\mathcal{R}$ est une fonction de la forme $\mathcal{R} : E \times E \to \{\text{oui}, \text{non}\}$. Si $\mathcal{R}(x, y) = \text{oui}$, on dit que x et y sont en relation et on note $x\mathcal{R}y$. Si $\mathcal{R}(x, y) = \text{non}$, on dit que x et y ne sont pas en relation et on note $x\not{\mathcal{R}}y$.

VI.2. Relation d'ordre

Définition. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire. On dit que $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E si elle est :

1. réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
2. transitive : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
3. antisymétrique : $\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$

En général, une relation d'ordre sur E est notée $\leq_E$.

Définition. Soit $\leq_E$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\leq_E$ est une relation d'ordre totale si $\forall x, y \in E,\ x \leq_E y$ ou $y \leq_E x$. *Autrement dit, on peut toujours comparer deux éléments de E.* Dans le cas contraire, on dit que $\leq_E$ est une relation d'ordre partielle.

Exercice d'application 11. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ par :

$$z_1\mathcal{R}z_2 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z_2) \text{ et } \text{Im}(z_1) \leq \text{Im}(z_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.
2. Cette relation d'ordre est-elle totale ?

VI.3. Majorant et maximum

Définition. Soit E un ensemble et $\leq_E$ une relation d'ordre sur E. Soit $A \subset E$ et $M \in E$. On dit que M est un majorant de A si $\forall x \in A,\ x \leq_E M$. Si A admet un majorant, alors on dit que A est majoré.

Proposition. Soit E un ensemble et $\leq_E$ une relation d'ordre sur E. Soit $A \subset E$ et $M \in E$. On dit que A admet M comme maximum si $\left\{\begin{array}{l} M \text{ majore } A \\ M \in A \end{array}\right.$. Si A admet un maximum, alors ce dernier est unique et est noté $\max(A)$.

Définition. Soit E un ensemble et $\leq_E$ une relation d'ordre sur E. Soit $A \subset E$ et $m \in E$. On dit que m est un minorant de A si $\forall x \in A,\ m \leq_E x$. Si A admet un minorant, alors on dit que A est minoré.

Proposition. Soit E un ensemble et $\leq_E$ une relation d'ordre sur E. Soit $A \subset E$ et $m \in E$. On dit que A admet m comme minimum si $\left\{\begin{array}{l} m \text{ minore } A \\ m \in A \end{array}\right.$. Si A admet un minimum, alors ce dernier est unique et est noté $\min(A)$.

Théorème. Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$. Soit $A \subset \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ usuelle. Alors si A est non vide et majoré, il admet un maximum.

m Quand on demande de montrer qu'un ensemble d'entiers admet un minimum/maximum, c'est très souvent ce résultat qu'il faut utiliser.

VI.4. Relation d'équivalence

Définition. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire. On dit que $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E si elle est :

1. réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
2. transitive : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
3. symétrique : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

En général, une relation d'équivalence sur E est notée $\sim_E$.

Définition. Soit E un ensemble et $\sim_E$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x \in E$. La classe de x est notée $\mathrm{Cl}(x)$ et est définie par $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E \ / \ x \sim_E y\}$. La classe de x est donc l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x.

Exercice d'application 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $f = \sin$. Déterminer la classe de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposition. Soit E un ensemble et $\sim_E$ une relation d'équivalence sur E. Alors, les classes d'équivalence forment une partition de E, autrement dit :

1. $\forall x \in E,\ \mathrm{Cl}(x) \neq \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{x \in E} \mathrm{Cl}(x) = E$
3. $\forall x, y \in E,\ \begin{cases} x \not\sim_E y \Rightarrow \mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) = \emptyset \\ x \sim_E y \Rightarrow \mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y) \end{cases}$

VII. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Les ensembles suivants sont-ils définis de manière explicite ou implicite ? À quel ensemble connu correspondent-ils ?

1. $A_1 = \{x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$ est défini de manière explicite (on donne la liste des éléments). Puisque $x \mapsto x^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est surjective (elle est par exemple bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ d'après le théorème de la bijection continue), on a $A_1 = \mathbb{R}_+$.
2. $A_2 = \{1, i, -1, -i\}$ est défini de manière explicite. On a ici $A_2 = \mathbb{U}_4$.
3. $A_3 = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$ est défini de manière implicite (on donne une condition sur z). On a $A_3 = i\mathbb{R}$.

Exercice d'application 2. On procède par double implication.

- ($\Rightarrow$) Supposons $A = B$. On a alors $A \cap B = A \cap A = A$ et $A \cup B = A \cup A = A$. L'égalité est donc vraie.

- ($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $A \cap B = A \cup B$. Commençons par montrer que $A \subset B$. Pour cela, on prend $a \in A$. On a alors $a \in A \cup B$ (puisque $A \subset A \cup B$). Puisque $A \cup B = A \cap B$, on a donc $a \in A \cap B$, ce qui implique $a \in B$. On a donc bien montré que $A \subset B$.
  L'inclusion réciproque se prouve exactement de la même manière en échangeant le rôle de A et de B.

Exercice d'application 3. On procède par double implication. Si $B = C$, le résultat est direct.
Réciproquement, supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. On va montrer $B = C$ par double inclusion.

Soit $x \in B$.
— Si $x \in A$, alors on a $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ donc $x \in C$.
— Si $x \notin A$, alors, on a quand même $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cup C$. Puisque $x \notin A$, alors on a $x \in C$.
Dans tous les cas, on a bien $x \in C$ d'où $B \subset C$.

L'inclusion réciproque se montre de la même façon, les rôles de B et C étant symétriques.

Exercice d'application 4. Soient A, B, C trois ensembles. On procède par double implication.

- Supposons $A \cup B = A \cap C$. Soit $b \in B$. On a alors $b \in A \cup B$, ce qui entraine $b \in A \cap C$ et donc $b \in A$. On a donc prouvé que $B \subset A$. De plus, si on prend $a \in A$, on a également $a \in A \cup B$, ce qui entraine $a \in A \cap C$ et donc $a \in C$. On a donc prouvé que $A \subset C$.

- Supposons $B \subset A \subset C$ et montrons que $A \cup B = A \cap C$ par double inclusion.
  — Soit $x \in A \cup B$. On a donc $x \in A$ ou $x \in B$. Puisque $B \subset A$, cela entraine dans les deux cas que $x \in A$. Puisque $A \subset C$, on a aussi $x \in C$. On a donc bien montré que x est dans A et C et donc que $x \in A \cap C$. La première inclusion est démontrée.
  — Réciproquement, soit $x \in A \cap C$. On a alors $x \in A$, ce qui entraine $x \in A \cup B$. La seconde inclusion est vérifiée.

Exercice d'application 5. L'exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ d'après le théorème de la bijection continue (elle est continue, strictement croissante de limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. On a donc $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

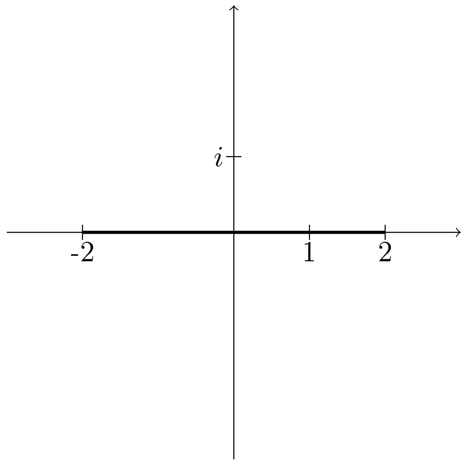
Exercice d'application 6.

1. On a sous forme explicite $\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$. *On peut également écrire* $\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi[\}$ *si on veut une écriture unique.*

2. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbb{U}) & = & \{f(e^{i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}},\ \theta \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{e^{i\theta} + e^{-i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{2\cos(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} \\ & = & [-2, 2]. \end{array}$$

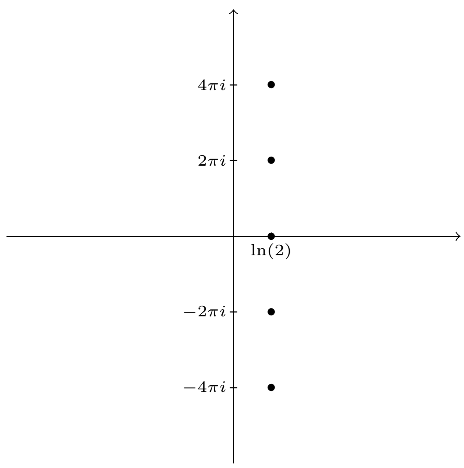
En effet, la fonction cosinus est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ (ses images sont comprises entre -1 et 1 et le théorème des valeurs intermédiaires assure que toutes les valeurs sont atteintes puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ et que cos est continue). On peut donc représenter $f(\mathbb{U})$ ainsi :



Exercice d'application 7. On a $\exp^{-1}(\{2\}) = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \exp(z) = 2\}$. On doit donc résoudre $e^z = 2$ avec $z \in \mathbb{C}$. On cherche $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$e^{x+iy} = 2 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 2.$$

Ceci est équivalent, en identifiant module et argument à $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$ et $y \equiv\ 0\ [2\pi]$. On a donc $\exp^{-1}(\{2\}) = \{\ln(2) + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.



Exercice d'application 8.

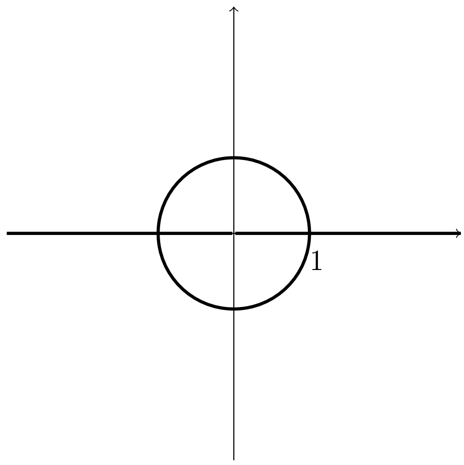
1. On a $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$.
2. On a donc $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \mathrm{Im}(f(z)) = 0\}$. En cherchant z sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, on a donc :

$$\begin{aligned}
f(z) &= x+iy+\frac{1}{x+iy} \\
&= x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2} \\
&= \frac{(x+iy)(x^2+y^2)+x-iy}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x^3+xy^2+iyx^2+iy^3+x-iy}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

ce qui entraine $\mathrm{Im}(f(z)) = \dfrac{yx^2+y^3-y}{x^2+y^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\mathbb{R}) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \ / \ yx^2+y^3-y=0\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \ / \ y(x^2+y^2-1)=0\}.
\end{aligned}$$

On a donc $f^{-1}(\mathbb{R})$ qui est la réunion de l'axe des réels ($y=0$) et du cercle de centre O et de rayon, le tout privé du point O. On a $f^{-1}(\mathbb{R})$ qui se représente ainsi :



Exercice d'application 9.

1. f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et le tableau de variations de la fonction s'obtient sans difficulté. On a une fonction strictement décroissante sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

2. On a $f(-1)=0$ et $f(2)=2$. On en déduit (puisque $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$) d'après le tableau de variations que :

$$f([-1,2]) = \left[-\frac{1}{4},2\right].$$

Pour justifier rigoureusement cette égalité, le tableau de variations justifie l'inclusion ($\subset$) (car la fonction ne « dépasse » pas des bornes proposées) et la continuité de la fonction couplée au théorème des valeurs intermédiaires assure que toutes les valeurs sont atteintes (ce qui prouve l'inclusion ($\supset$)).

3. Pour résoudre $f(x)=1$, on a une équation de degré 2 de la forme $x^2-x-1=0$ dont les racines sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque f s'annule en 0 et en 1, on en déduit, toujours grâce au tableau de variations que :

$$f^{-1}(]0,1]) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right[\cup \left]1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Exercice d'application 10.

1. On a comme première partition $(\{2n,\ n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\})$ (les nombres pairs et les impairs). On peut également prendre $(\{0\}, \mathbb{N}^*)$ comme partition, $(\{0\}, \{1\}, \{n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\})$, $(\{3n,\ n \in \mathbb{N}\}, \{3n+1,\ n \in \mathbb{N}\}, \{3n+2,\ n \in \mathbb{N}\})$, etc.
2. (A, B) ne forme pas une partition de $\mathbb{N}$. En effet, on remarque que les fonctions qui définissent A et B sont strictement croissante sur $\mathbb{N}$ (car ce sont des fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). Or, n^2 n'atteint pas la valeur 5 et n^3+2 non plus (elle ne l'atteint pas pour $n=1$ et pour $n=2$ est strictement plus grande que 5, donc par stricte croissance toutes les autres valeurs seront plus grandes que 5). Puisque 5 n'est jamais atteint, on a pas une partition de $\mathbb{N}$.

Exercice d'application 11.

1. On a bien pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\mathcal{R}z$. Pour la transitivité, si $z_1\mathcal{R}z_2$ et $z_2\mathcal{R}z_3$, alors on a $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_3)$ donc $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_3)$. On procède de même pour la partie imaginaire. Enfin, si $z_1\mathcal{R}z_2$ et $z_2\mathcal{R}z_1$, on a $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_1)$ donc $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$. On procède de même pour la partie imaginaire, ce qui entraine $z_1 = z_2$, on a donc bien l'antisymétrie. On a donc bien
2. Cette relation d'ordre n'est pas totale. En effet, $(1, 2)$ et $(2, 1)$ par exemple ne sont en relation ni dans un sens (à cause des parties imaginaires) ni dans l'autre (à cause des parties réelles).

Exercice d'application 12.

1. On doit vérifier la réfléxivité, la symétrie et la transitivité. Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$ (car $f(x) = f(x)$) donc $\mathcal{R}$ est réflexive. La symétrie ($x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ est claire aussi car $f(x) = f(y)$ implique $f(y) = f(x)$). Enfin, la transitivité est vraie également car si $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, alors $f(x) = f(z)$. On a donc bien une relation d'équivalence.

2. On a $x \in \mathrm{Cl}(x_0)$ si et seulement si $x\mathcal{R}x_0$, c'est à dire si et seulement si $\sin(x) = \sin(x_0)$. On a donc x dans la classe de x_0 si et seulement si $x \equiv x_0\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - x_0\ [2\pi]$. *Attention à ne pas oublier le second cas !*