OUTILS MATHÉMATIQUES 6
Vecteurs : produit vectoriel, produit mixte

1 Produit vectoriel de deux vecteurs

1.1 Définition

- **Définition** : Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$, est un **vecteur** défini par :
  - Direction : orthogonale au plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$
  - Sens : donné par la règle du tire-bouchon ou de la main droite : le trièdre $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ est direct
  - Norme : $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

1.2 Propriétés

- Anti commutativité $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}}$
- Non associativité $\boxed{\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)}$
- Distributivité $\boxed{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}}$
- Associativité avec le produit simple $\boxed{k\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \left(k\vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(k\vec{b}\right)}$

1.3 Cas particuliers

- Vecteur nul : $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0}}$
- Vecteurs colinéaires

Propriété : Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **colinéaires**, alors le **produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est nul**.

1.4 Expression en coordonnées cartésiennes

- Expression de $\vec{a} \wedge \vec{b}$:
  On utilise la notation colonne :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{vmatrix} \qquad \boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{vmatrix}}$$

- Calcul pratique des composantes
  - Composante selon $\overrightarrow{u_x}$: On raye la ligne a_x, b_x et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - a_z b_y$$

  - Composante selon $\overrightarrow{u_y}$: On raye la ligne a_y, b_y, **on rajoute la ligne a_x, b_x sous la ligne a_z, b_z** et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} = a_z b_x - a_x b_z$$

  - Composante selon $\overrightarrow{u_z}$: On raye la ligne a_z, b_z et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

1.5 Dérivation

Comme pour tout produit (scalaire, simple), la dérivée d'un produit vectoriel est obtenue en dérivant successivement les deux éléments du produit :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}}$$

1.6 Base orthonormée

- Base cartésienne

$$\boxed{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z} \qquad \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_x} \qquad \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_y}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{u_y} \qquad \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_x} = -\overrightarrow{u_z} \qquad \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_y} = -\overrightarrow{u_x}}$$

- Base cylindrique

$$\boxed{\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z} \qquad \overrightarrow{u_\theta} \wedge \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_r} \qquad \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{u_\theta} \qquad \overrightarrow{u_\theta} \wedge \overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{u_z} \qquad \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = -\overrightarrow{u_r}}$$

2 Produit mixte entre trois vecteurs

- **Définition** : Le produit mixte est une opération entre les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ combinant produit vectoriel et produit scalaire : $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

  Le résultat obtenu est un **scalaire**.

- Permutation circulaire des vecteurs

$$\boxed{\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \cdot \vec{a}}$$