DEVOIR À LA MAISON 12

Exercice 1 – Mode AC de l'oscilloscope

Le rôle principal d'un oscilloscope est de pouvoir visualiser une tension électrique en fonction du temps. Il existe trois couplages d'entrée possible : le mode DC (*Direct Current*), le mode AC (*Alternative Current*) et le mode GND (*Ground*). La FIGURE 1 ci-dessous indique le schéma de principe de ces couplages.

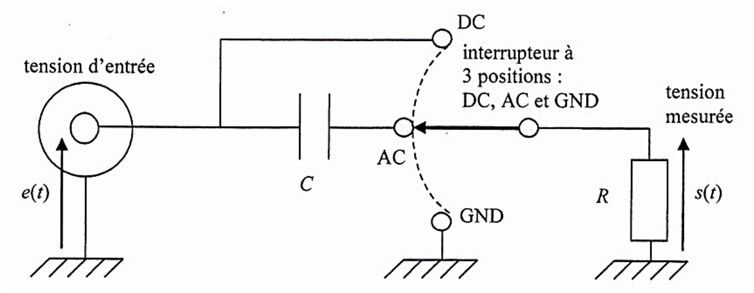


FIGURE 1 : Trois couplages de l'entrée de l'oscilloscope

1. Pourquoi la résistance d'entrée R de l'oscilloscope est-elle relativement grande (généralement 1,0 MΩ) ?
2. En mode DC, exprimer la tension mesurée $s(t)$ en fonction de $e(t)$.

<u>MODE AC DE L'OSCILLOSCOPE</u>

3. À partir du comportement du condensateur en fonction de la fréquence, indiquer le type de filtrage qu'effectue l'oscilloscope en mode AC.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ en mode AC. La mettre sous forme normalisée en faisant apparaître une constante de temps τ.
5. Connaissant la valeur de R, on peut accéder à la valeur de la capacité C par l'analyse temporelle des signaux. Proposer un protocole expérimental permettant de mesurer la valeur de C : allure et fréquence de $e(t)$, méthode de mesure de la constante de temps τ.
6. À partir de l'équation différentielle établie à la question 4, déterminer la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$ et la mettre sous la forme normalisée : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}$. Préciser l'expression de la pulsation de coupure à – 3 dB ω_C.
7. En pratique, la fréquence de coupure à – 3 dB du mode AC est $f_C = 8{,}0\ \text{Hz}$. En déduire la valeur de C.
8. Déterminer les expressions littérales du module $G(f) = \left|\underline{H}(jf)\right|$ et de la phase $\varphi(f) = \arg\left(\underline{H}(jf)\right)$ du filtre.

EFFET DE L'OSCILLOSCOPE EN MODE AC SUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE

On désire faire une simulation numérique de l'effet du mode AC sur un signal périodique non sinusoïdal, par exemple un signal triangulaire.

La décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire $e(t)$ de fréquence $f_e = \dfrac{1}{T_e} = \dfrac{\omega_e}{2\pi}$ d'amplitude A et de valeur moyenne E_0 s'écrit :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(2\pi(2n+1) f_e t\right) \text{ avec } B_n = \frac{8A}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Le signal est constitué uniquement d'harmoniques de rang impair $2n+1$.

❖ Simulation numérique en Python

Le fichier « DM12_Mode_AC.py » est disponible dans l'application Moodle sur l'ENT. Le télécharger sur votre ordinateur et le renommer « NOM_Prénom_DM12_Mode_AC.py ». Lancer Pyzo puis ouvrir votre fichier.

9. Exécuter la « Cellule 1 » pour importer les bibliothèques (CTRL + Entrée).
10. Compléter et exécuter la « Cellule 2 » pour spécifier les caractéristiques du signal triangulaire à générer : fréquence $f_e = 100\ \text{Hz}$, valeur moyenne $E_0 = 0{,}5\ \text{V}$, amplitude $A = 1{,}0\ \text{V}$.
11. Compléter et exécuter la « Cellule 3 » : la fonction `def e(t):` permet de générer le signal triangulaire $e(t)$ à partir de sa décomposition en série de Fourier, par sommation de ses 50 premiers harmoniques impairs non nuls.
12. Compléter et exécuter la « Cellule 4 » pour tracer le graphe du signal $e(t)$ avec 600 points sur trois périodes, en trait continu bleu.
13. Compléter et exécuter la « Cellule 5 » : les fonctions `def G(f, fc):` et `def phi(f, fc):` permettent de définir le gain et la phase du filtre.
14. Compléter et exécuter la « Cellule 6 » : la fonction `def s(t):` permet de générer la tension de sortie $s(t)$ du filtre par sommation de ses 50 premiers harmoniques impairs non nuls.
15. Compléter et exécuter la « Cellule 7 » pour tracer les graphes des signaux $e(t)$ (en trait continu bleu) et $s(t)$ (en pointillés rouge) dans la même fenêtre, sur trois périodes.

❖ Exploitation de la simulation numérique

16. Quel est l'effet du filtre sur la composante continue de $e(t)$? Quel est l'effet du filtre sur les autres composantes de $e(t)$? Quel est l'intérêt pratique du mode AC de l'oscilloscope ?
17. Fermer les fenêtres graphiques et exécuter l'ensemble du fichier (CTRL + E) pour $f_e = 1\ \text{Hz}$. Quelle est l'allure du signal $s(t)$? Comment se comporte le filtre dans le domaine temporel ? Le justifier théoriquement.
18. Fermer les fenêtres graphiques et exécuter l'ensemble du fichier (CTRL + E) pour $f_e = 8\ \text{Hz} = f_C$. Quelle est l'allure du signal $s(t)$? Commenter.

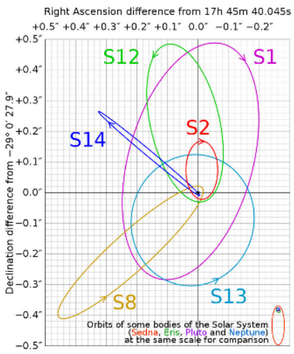
19. À partir de quelle fréquence f_e, à exprimer en fonction de f_C, le mode AC de l'oscilloscope ne modifie pas la composante alternative du signal d'entrée $e(t)$?

<u>Restitution des travaux :</u>

- *Sauvegardez les différentes figures obtenues en faisant des copies d'écran et en les collant dans un document « Writer » de Libre Office (à imprimer si vous disposez d'une imprimante).*
- *Déposez votre fichier complet sur l'application Moodle (Devoir à la maison / DM12_Mode AC).*

Exercice 2 – Vérification de la 3ème loi de Kepler

❖ <u>Contexte et récupération des données</u>



Le trou noir supermassif au centre de notre galaxie, la Voie Lactée, correspond à la source Sagittarius A*. Les figures suivantes montrent les trajectoires de quelques étoiles autour de ce trou noir, ainsi que leurs paramètres orbitaux. L'objectif est, d'une part, de montrer que la **3ème loi de Kepler** est vérifiée pour ces étoiles et, d'autre part, **d'estimer la masse du trou noir central**.

Désignation		Séparation angulaire θ (″)	Demi grand-axe a (ua)	Excentricité orbitale e	Période de révolution P (a)	Date de passage au péricentre T_0 (année)
S1	S0-1	0,412 ± 0,024	3 300 ± 190	0,358 ± 0,036	94,1 ± 9,0	2002,6 ± 0,6
S2	S0-2	0,1226 ± 0,0025	980 ± 20 919 ± 23	0,8760 ± 0,0072 0.8670 ± 0.0046	15,24 ± 0,36 14.53±0.65	2002,315 ± 0,012 2002.308 ± 0.013
S8	S0-4	0,329 ± 0,018	2 630 ± 140	0,927 ± 0,019	67,2 ± 5,5	1987,71 ± 0,81
S12	S0-19	0,286 ± 0,012	2 290 ± 100	0,9020 ± 0,0047	54,4 ± 3,5	1995,628 ± 0,016
S13	S0-20	0,219 ± 0,058	1 750 ± 460	0,395 ± 0,032	36 ± 15	2006,1 ± 1,4
S14	S0-16	0,225 ± 0,022	1 800 ± 180 1680 ± 510	0,9389 ± 0,0078 0,974 ± 0,016	38 ± 5,7 36 ± 17	2000,156 ± 0,052 2000,201 ± 0,025

Tableau des paramètres orbitaux de quelques étoiles

(Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Sagittarius_A)*

<u>Données</u> :

- Constante de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}\ \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
- Unité astronomique : $1\ \text{u.a.} = 1{,}50.10^{11}\ \text{m}$

❖ Simulation numérique en Python : Vérification de la 3ème loi de Kepler

Le fichier « DM12_Kepler.py » est disponible dans l'application Moodle sur l'ENT. Le télécharger sur votre ordinateur et le renommer « NOM_Prénom_DM12_Kepler.py ». Lancer Pyzo puis ouvrir votre fichier.

1. Exécuter la « Cellule 1 » pour importer les bibliothèques (CTRL + Entrée).
2. Compléter la « Cellule 2 » : saisir les deux tableaux de données `tabT` et `taba` correspondants aux périodes T et demi-grand axes a des 6 étoiles (S1, S2, S8, S12, S13 et S14) présentes dans le tableau (en unités SI).

3. Créer les deux variables $x = a^3$ et $y = T^2$. Déterminer les coefficients A et B de la régression linéaire $ymodele = A \cdot x + B$ avec la fonction np.polyfit. Exprimer *ymodele* en fonction de A, B et x.
4. Compléter les lignes permettant de tracer sur une même figure les points expérimentaux y en fonction de x avec des ronds bleus, et la régression linéaire *ymodele* en trait rouge. Exécuter la « Cellule 2 ». Commenter la vérification de la loi de Kepler.

- *Sauvegardez le graphe obtenu (à imprimer si vous disposez d'une imprimante).*

❖ Simulation numérique en Python : Masse du trou noir

Pour exploiter des données quantitativement, le plus simple et le plus précis consiste non pas à réaliser une régression linéaire, mais à calculer la liste des valeurs de la masse du trou noir pour chaque étoile qui orbite autour, grâce à la troisième loi de Kepler. À partir de cette liste, on peut calculer la valeur moyenne de cette liste, qui constituera le meilleur estimateur de la masse du trou noir, mais aussi l'écart-type expérimental de cette liste, ce qui donnera l'incertitude-type sur la masse du trou noir.

5. Compléter la « Cellule 3 » : générer le tableau tabK correspondant à l'ensemble des valeurs $\frac{T^2}{a^3}$. À l'aide des fonctions statistiques np.mean et np.std (écart-type expérimental $s(K)$), calculer la valeur moyenne K de ce tableau, ainsi que son incertitude-type $u(K)$ telle que $u(K) = \frac{s(K)}{\sqrt{N}}$, avec N le nombre de mesures.
6. Déterminer les expressions de la masse M du trou noir et de son incertitude-type $u(M)$ en fonction notamment de K, G et $u(K)$.
7. Compléter la « Cellule 3 » avec les expressions précédentes. Exécuter la « Cellule 3 » et écrire correctement les valeurs de M et $u(M)$ sur la copie.
8. Compléter la « Cellule 4 » : calculer l'écart normalisé EN (cf. livret ou chapitre IPC2 pour la définition) pour comparer les valeurs précédentes aux valeurs tabulées : $M_t = 8{,}2541.10^{36}$ kg et $u(M_t) = 0{,}0278.10^{36}$ kg. Exécuter la « Cellule 4 » et commenter.

<u>*Restitution des travaux :*</u>

- *Déposez votre fichier complet sur l'application Moodle (Devoir à la maison / DM12_Kepler).*