

MATHÉMATIQUES MPSI_{1,2,3}

DS N°10

Jeudi 10/06/2021 (3h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être encadrés ou soulignés à la règle.

**Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.**

Problème 1 : Algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

On rappelle que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q1) On convient que $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$. Déterminer la dimension de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ en tant que sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la suite on considère un polynôme P_n non nul appartenant à $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Q2) Justifier que $\deg(P_n) = n$.

On pose pour la suite $P_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k$.

Q3) On pose $R_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n,k}}{X+k+1} \in \mathbb{R}(X)$.

a) Montrer que $\forall x \geq 0, R_n(x) = \int_0^1 t^x P_n(t) dt$.

b) Justifier l'existence d'un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que $R_n(X) = \frac{Q_n(X)}{(X+1)(X+2)\cdots(X+n+1)}$.

c) À l'aide de Q3a, montrer que si $n \geq 1$, alors $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, Q_n(k) = 0$.

En déduire qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q_n = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$ (on convient que ce produit vaut 1 si n est nul).

d) Avec une décomposition en éléments simples, démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_{n,k} = \lambda_n (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}$$

Donner l'expression de P_n .

Dans la suite on impose $\lambda_n = 1$.

e) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$

Q4) a) Démontrer que $\|P_n\|^2 = a_{n,n}(X^n | P_n) = a_{n,n}R_n(n)$.

b) En déduire que $\|P_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $T_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$.
Que dire de la famille (T_0, \dots, T_n) ?

c) Vérifier que $(X^n | T_n) = \frac{(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} > 0$.

Quelle base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ obtient-on si on applique la méthode de Schmidt à la famille $(1, X, \dots, X^n)$ (justifier)?

Q5) On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base (T_0, \dots, T_n) à $(1, X, \dots, X^n)$.

a) i) Soit $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, justifier que si $i > j$ alors $(T_i | X^j) = 0$.

ii) Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$, exprimer le coefficient $b_{i,j}$ de B sous forme d'un produit scalaire.

En déduire que B est triangulaire supérieure.

iii) Montrer que $\det(B) = \prod_{k=1}^n \frac{(k!)^2}{(2k)!\sqrt{2k+1}}$.

b) Soit $C = {}^tB \times B$.

Montrer que pour $(i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$, le coefficient d'indice (i, j) de C est $c_{i,j} = (X^{i-1} | X^{j-1})$.

c) Calculer $(X^{i-1} | X^{j-1})$.

En déduire que le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i, j \leq n+1}$ est $\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n \frac{(k!)^4}{[(2k)!]^2}$.

Problème 2 : Probabilités

Dans tout le sujet, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie I : Préliminaires

Dans cette partie, on démontre deux résultats, indépendants l'un de l'autre, qui seront utilisés dans la suite du sujet.

Soient (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q1) On pose

$$G : t \mapsto \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X = k) t^k.$$

Justifier que $G(1) = 1$ et $G'(1) = \mathbb{E}(X)$.

Q2) Soit (A_1, \dots, A_p) un système complet d'événements de Ω .

On appelle espérance de X conditionnée par l'événement A_i , et on note $\mathbb{E}_{A_i}(X)$, le réel défini par

$$\mathbb{E}_{A_i}(X) = \sum_{k=0}^N k \times \mathbb{P}_{A_i}(X = k).$$

(Il s'agit donc de l'espérance de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_{A_i})$, c'est-à-dire l'espérance de X lorsqu'on sait que A_i est réalisé.)

Prouver la formule suivante, dite de l'espérance totale :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{E}_{A_i}(X).$$

Partie II

L'objectif de ce problème est d'étudier un modèle d'évolution d'une population au cours du temps.

- On suppose qu'au départ (étape 0), la population comporte un seul individu.
- A la première étape, celui-ci donne naissance à un nombre aléatoire de descendants, puis il meurt immédiatement.
- A la deuxième étape, chacun des enfants donne lui-même naissance à de nouveaux individus de la même manière.
- Et ainsi de suite tant qu'il reste des individus dans la population (celle-ci n'étant constituée à une certaine étape que par les nouveaux enfants puisque les parents sont décédés).

On note X_i le nombre d'enfants auxquels donne naissance l'individu i , et on estime que les variables aléatoires X_i suivent toutes une même loi \mathcal{L} définie par $X(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathbb{P}(X_i = k) = p_k \in]0, 1[.$$

(Ainsi, p_k désigne la probabilité pour un individu fixé qu'il donne naissance à k enfants, N étant le nombre maximal d'enfants.)

On note $m = \mathbb{E}(X_i)$ l'espérance de la loi \mathcal{L} .

En outre, on considère que chaque individu se reproduit indépendamment des autres, c'est-à-dire que toutes les variables X_i sont mutuellement indépendantes.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n le nombre d'individus dans la population à l'étape n , et

$$q_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

la probabilité que la population soit éteinte à l'étape n . Le but du problème est d'étudier la limite de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction des valeurs de m .

Q3) Dans cette question, on suppose que $m < 1$.

a) Justifier brièvement que $Z_n(\Omega) = \llbracket 0, N^n \rrbracket$.

Pour $k \in \llbracket 0, N^n \rrbracket$, on fait l'hypothèse que l'événement $\{Z_n = k\}$ est réalisé, et on note X_1, \dots, X_k les nombres d'enfants que chacun des k individus de la population à l'étape n aura à l'étape $n + 1$. En exprimant Z_{n+1} à l'aide de X_1, \dots, X_k établir que

$$\mathbb{E}_{\{Z_n=k\}}(Z_{n+1}) = k m.$$

b) Utiliser la question Q2 pour en déduire que

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = m \mathbb{E}(Z_n)$$

puis donner une expression de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de m et n .

c) Justifier que $\mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n)$, et conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 1$ dans le cas où $m < 1$.

Q4) Dans cette question, on suppose que $m \geq 1$.

a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ on a

$$\mathbb{P}_{\{Z_1=k\}}(Z_{n+1}=0) = q_n^k.$$

(On pourra noter E_1, \dots, E_k les nombre de descendants à l'étape $n+1$ de chacun des k enfants du premier individu.)

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = \sum_{k=0}^N p_k q_n^k.$$

Q5) On considère comme en question Q1, pour une variable aléatoire de loi \mathcal{L} , la fonction

$$G: t \mapsto \sum_{k=0}^N p_k t^k.$$

a) Préciser le sens de variation de G sur $[0, 1]$ et, en remarquant que $q_{n+1} = G(q_n)$, justifier que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b) Conclure que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$ telle que $G(\ell) = \ell$.

c) On définit la fonction $f: t \mapsto G(t) - t$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1]$ en distinguant les deux cas $m > 1$ et $m = 1$.

Conclure que si $m > 1$ alors $\ell < 1$, et préciser la valeur de ℓ quand $m = 1$.

Problème 3 : Analyse

Les deux parties sont indépendantes (la deuxième partie n'utilise que le résultat énoncé en toute fin de la partie I).

Partie I : Mots bien parenthésés

On s'intéresse à des chaînes de caractères constituées uniquement des deux caractères parenthèse ouvrante et parenthèse fermante. On dit qu'un mot est *bien parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante *qui lui est postérieure*. Par exemple le mot

$() (())$

est bien parenthésé. En revanche, le mot

$()) ($

n'est pas bien parenthésé. Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères, chaque parenthèse qui s'ouvre doit se refermer.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. On pose par commodité $C_0 = 1$.

Q1) En énumérant (sans justification) les différents mots bien parenthésés de longueur 2,4,6, montrer que $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ et déterminer C_3 .

Q2) Montrer que pour tout entier naturel n , $C_n \leq 2^{2n}$. En déduire que la série $\sum C_k x^k$ est absolument convergente pour $|x| < \frac{1}{4}$.

On pose $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$. On **admet** les propriétés suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F admet un développement limité à l'ordre n en 0 de la forme

$$F(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n).$$

- F est continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = 1 + x(F(x))^2$.

Q3) Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2xF(x) - 1 \end{cases}$ ne s'annule pas. Que peut-on en déduire sur le signe de f ?

Q4) Déterminer pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ une expression de $F(x)$ en fonction de x .

Q5) Déterminer le développement limité à l'ordre n de la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$. On écrira les coefficients sous la forme d'un quotient de factorielles et de puissances de 2.

Q6) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}.$$

Partie II : Un calcul d'intégrale

Pour tout entier naturel k , on pose

$$m_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4-x^2} dx.$$

Q7) Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut m_{2k+1} ?

Q8) En utilisant le changement de variable $x = 2 \sin(t)$, calculer m_0 .

Q9) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel k ,

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} m_{2k}.$$

Q10) En déduire que $m_k = \begin{cases} C_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

– FIN –