DM 5, pour le vendredi 09/12/2022

Je vous rappelle les consignes en devoir à la maison :

- Vous pouvez chercher les exercices à plusieurs, me poser des questions dessus mais la rédaction doit être personnelle.
- Écrire lisiblement sur des feuilles grandes et doubles, au stylo ou à l'encre bleu foncé ou noir et **souligner ou encadrer ses résultats**.
- Vous avez le droit de sauter des questions et d'admettre les résultats correspondants pour traiter les questions suivantes.
- Les différents problèmes sont indépendants.

Si vous n'avez pas le temps de chercher les deux problèmes, cherchez et rédigez plutôt le premier.

PROBLÈME
Théorème de Beatty

Le but de ce problème est de montrer le théorème de Beatty (1926) :

Soient $a > 1$ et $b > 1$. On pose $E_a = \{\lfloor na \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $E_b = \{\lfloor nb \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors on a :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ et } a \notin \mathbb{Q} \text{ et } b \notin \mathbb{Q}\right) \Leftrightarrow \text{ la famille } (E_a, E_b) \text{ est une partition de } \mathbb{N}^*.$$

Partie I. Sens direct

On fixe donc $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec $a > 1$ et $b > 1$ et on suppose que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

1) On suppose qu'il existe un couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$. On note $k = \lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$.
   a) Montrer que $p - \dfrac{1}{a} < \dfrac{k}{a} < p$ et $q - \dfrac{1}{b} < \dfrac{k}{b} < q$.
   b) En déduire une absurdité.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \lfloor na \rfloor$. Vérifier que $u_0 = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   b) En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor pa \rfloor \leq k < \lfloor (p+1)a \rfloor$.
   c) On suppose à présent que $k \notin E_a$.
      i) Démontrer que $\lfloor pa \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor (p+1)a \rfloor - 1$.
      ii) En déduire que $p < \dfrac{k}{a} < p + 1 - \dfrac{1}{a}$.

   On montre de même que si $k \notin E_b$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q < \dfrac{k}{b} < q + 1 - \dfrac{1}{b}$.

   d) Déduire des questions précédentes que $\mathbb{N}^* \subset E_a \cup E_b$.

3) Conclure sur le sens direct.

Partie II. Ensembles à densité

Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on note pour tout $n \geq 1$, a_n le nombre d'éléments de $A \cap [\![1, n]\!]$. Si la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$. On dit alors que A *admet une densité* et on note $d(A) = L$ la densité de A.

4) *Exemples d'ensembles à densité.*
   a) Vérifier que $\mathbb{N}^*$ admet une densité et la déterminer.
   b) *Les entiers pairs et impairs.*
      i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'entiers pairs dans $[\![1, n]\!]$ en fonction d'une partie entière dépendant de n. *On pourra considérer les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$ puis dégager une formule générale.*
      ii) Montrer que l'ensemble des nombres pairs a une densité égale à $\frac{1}{2}$.
      iii) Déterminer la densité de l'ensemble des nombres impairs.
   c) Soit A une partie majorée de $\mathbb{N}^*$. Montrer que A admet une densité et la déterminer.
   d) Déterminer la densité de l'ensemble des carrés d'entiers ($A = \{k^2,\ k \in \mathbb{N}^*\}$).

5) *Le résultat.* Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité. Montrer que $A \cup B$ admet une densité et que $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

Partie III. Réciproque

On suppose que $a > 1$, $b > 1$ et que E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

6) *E_a admet une densité.*
   a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k = \lfloor ka \rfloor$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. En déduire que les éléments de E_a sont deux à deux distincts.
   b) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer les deux implications suivantes :
      i) $k \leq \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \Rightarrow \lfloor ka \rfloor \leq n$.
      ii) $k \geq \left\lfloor \frac{n+1}{a} \right\rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor ka \rfloor > n$.
   c) Déduire des questions précédentes que si $n \in \mathbb{N}^*$ et que a_n est le nombre d'éléments de $E_a \cap [\![1, n]\!]$, alors :
   $$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \leq a_n \leq \left\lfloor \frac{n+1}{a} \right\rfloor.$$
   d) Montrer finalement que E_a admet une densité égale à $\frac{1}{a}$.

7) *Le premier point.* Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

8) *La conclusion.*
   a) Montrer que si a et b sont tous les deux rationnels, alors il existe un élément dans $E_a \cap E_b$.
   b) Montrer que a et b sont tous les deux irrationnels.

PROBLÈME

Théorème de Cantor-Bernstein et dénombrabilité

Le but de ce problème est de montrer le théorème de Cantor-Bernstein et de l'utiliser pour construire des fonctions bijectives entre des ensembles connus. Ce théorème a été énoncé par Cantor et démontré par Bernstein, son élève, en 1896 à l'âge de 18 ans :

« Soient X et Y deux ensembles. Si il existe $f : X \to Y$ injective et $g : Y \to X$ injective, alors, il existe une fonction h bijective de X dans Y. »

Les deux parties sont très largement indépendantes, la seconde n'utilisant que le théorème précédent.

Partie I. Preuve du théorème

Dans toute la partie, on fixe X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ injective et $g : Y \to X$ injective.

1) Le but de cette question est de montrer le lemme suivant :

« Soit $A \subset X$ et $u : X \to A$ injective. Alors, il existe une fonction $v : X \to A$ bijective ».

On fixe donc dans cette question $A \subset X$ et u une fonction injective de X dans A. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'ensembles définie par $B_0 = X \setminus A = \overline{A}$ (le complémentaire de A dans X), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = u(B_{n-1})$.

On pose alors $B = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et pour $x \in X$: $\begin{cases} v(x) = u(x) & \text{si} \quad x \in B \\ v(x) = x & \text{si} \quad x \notin B \end{cases}$.

   a) Montrer que $\forall x \in X,\ v(x) \in A$.
   b) Montrer que $v : X \to A$ est injective.
   c) Montrer que $v : X \to A$ est surjective et conclure sur le lemme.

2) Soit $A = g(Y)$ l'image de Y par la fonction g. On pose $u = g \circ f$.
   a) Démontrer que $\forall x \in X,\ u(x) \in A$ et que u est injective.
   b) En déduire qu'il existe une fonction $v : X \to A$ bijective.

3) On pose $h : \begin{cases} Y & \to & A \\ y & \mapsto & g(y) \end{cases}$. Justifier que h est bien définie et qu'elle est bijective.

4) Construire alors une bijection de X dans Y.

Partie II. Ensembles dénombrables

Soient A et B deux ensembles. On dit que A *est en bijection avec* B et on notera $A\mathcal{R}B$ si il existe $f : A \to B$ bijective.

Un ensemble X est dit *dénombrable* s'il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$.

5) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

6) *Premiers ensembles dénombrables.*
   a) Montrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

b) On pose $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \qquad\qquad \text{si } x \geq 0 \\ x & \mapsto & -2x-1 \quad \text{si } x < 0 \end{array} \right.$. Vérifier que f est bien définie et qu'elle bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de $\mathbb{Z}$?

c) Construire une fonction injective (simple !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ et vérifier que $g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (a,b) & \to & 2^a \times 3^b \end{array} \right.$ est injective. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

7) *Des propriétés bien utiles.* Soit A et B deux ensembles dénombrables. Il existe donc $\varphi : A \to \mathbb{N}$ bijective et $\psi : B \to \mathbb{N}$ bijective.

a) Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{lll} A \times B & \to & \mathbb{N}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (\varphi(a), \psi(b)) \end{array} \right.$ est bijective. Que peut-on donc dire de $A \times B$?

b) Montrer que $g : \left\{ \begin{array}{llll} A \cup B & \to & \mathbb{N}^2 & \\ x & \mapsto & (\varphi(x), 0) & \text{si } x \in A \\ x & \mapsto & (\psi(x), 1) & \text{si } x \in B \setminus A \end{array} \right.$ est injective.

c) Construire alors une fonction injective de $A \cup B$ dans $\mathbb{N}$ et une fonction injective de $\mathbb{N}$ dans $A \cup B$ (rester simple !). Que peut-on donc dire de $A \cup B$?

8) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

9) $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

a) Montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

b) On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \right\}$ et que cette écriture est unique. Vérifier que $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ \dfrac{p}{q} & \to & (p,q) \end{array} \right.$ (en reprenant les mêmes notations) est bien définie est injective.

c) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

10) On **admet** que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (je vous raconterai l'histoire une prochaine fois). $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est-il dénombrable ?