# Complément de trigonométrie, corrigé

**Exercice 1.** On a $c = \pi - a - b$. On a donc $\cos(c) = \cos(\pi - (a+b)) = -\cos(a+b)$. Ceci entraine, en notant $(*) = \cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c)$ :

$$\begin{array}{rcl}
(*) & = & \cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(a+b) - 2\cos(a)\cos(b)\cos(a+b) \\
& = & \cos^2(a) + \cos^2(b) + (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))^2 - 2\cos(a)\cos(b)(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
& = & \cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(a)\cos^2(b) + \sin^2(a)\sin^2(b) - 2\cos(a)\cos(b)\sin(a)\sin(b) \\
& & -2\cos^2(a)\cos^2(b) + 2\cos(a)\cos(b)\sin(a)\sin(b) \\
& = & \cos^2(a) + \cos^2(b) - \cos^2(a)\cos^2(b) + \sin^2(a)\sin^2(b) \\
& = & \cos^2(a)(1 - \cos^2(b)) + \cos^2(b) + \sin^2(a)\sin^2(b) \\
& = & \cos^2(a)\sin^2(b) + \sin^2(a)\sin^2(b) + \cos^2(b) \\
& = & 1 \times \sin^2(b) + \cos^2(b) \\
& = & 1.
\end{array}$$

**Exercice 2.**

1) On a $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

2) On a $\tan(x) = -1$ ssi $x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

3) On a :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(5x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) & \Leftrightarrow & 5x \equiv \dfrac{2\pi}{3} - x\ [2\pi] \text{ ou } 5x \equiv -\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)\ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow & 6x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{9}\ \left[\dfrac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right].
\end{array}$$

4) On va factoriser cette expression. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(3x) - \sin(x) & = & \cos(3x) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \\
& = & 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(3x) = \sin(x) & \Leftrightarrow & 2x + \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\
& \Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{8}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [\pi].
\end{array}$$

5) On a :

$$\begin{array}{rcl}
\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right) & \Leftrightarrow & 2x - \dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{x}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x - \dfrac{\pi}{3} \equiv \pi - \dfrac{x}{3}\ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{5x}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } \dfrac{7x}{3} \equiv \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{5}\ \left[\dfrac{6\pi}{5}\right] \text{ ou } x \equiv \dfrac{4\pi}{7}\ \left[\dfrac{6\pi}{7}\right].
\end{array}$$

6) On a :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) - \sin^4(x) &= (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos(2x).\end{aligned}$$

On en déduit que $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$ ssi $x \equiv 0\ [\pi]$.

**Exercice 3.**

1) Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2\sin^2(x) - 3\sin(x) - 2$. On remarque qu'en posant $X = \sin(x)$, on a un polynôme du second degré en $X$. On a $\Delta = 25$. On en déduit la factorisation de ce polynôme. En remplaçant $X$ par $\sin(x)$, on trouve donc :

$$h(x) = 2 \cdot (\sin(x) - 2) \cdot \left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right).$$

La partie de gauche est toujours strictement négative. On a donc

$$\begin{aligned}h(x) > 0 &\Leftrightarrow \sin(x) < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right[.\end{aligned}$$

2) Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4$. On remarque qu'en posant $X = \cos(x)$, on a un polynôme du second degré en $X$. On a $\Delta = 49$. On en déduit la factorisation de ce polynôme. En remplaçant $X$ par $\cos(x)$, on trouve donc :

$$g(x) = 2 \cdot (\cos(x) - 4) \cdot \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right).$$

La partie de gauche est toujours strictement négative. On a donc

$$\begin{aligned}g(x) > 0 &\Leftrightarrow \cos(x) < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[.\end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned}\cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

On a donc $\cos(x) - \sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$. Or, sur $[-\pi, \pi]$, on a $\cos(u) > \frac{1}{2}$ si et seulement si $u \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$. On doit donc avoir $x \in \left]-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right[$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $x \in \left]-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[$ à considérer modulo $2\pi$, c'est à dire :

$$\cos(x) - \sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\ \left]-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4) Posons $f : x \mapsto \cos(3x) + \cos(5x) - \cos(x)$. Pour tout $x$ réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos(x)\cos(4x) - \cos(x) \\ &= 2\cos(x)\cdot\left(\cos(4x) - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

On peut alors faire un tableau de signes afin de trouver le signe de $f$. Puisque $f$ est $2\pi$-périodique, on effectue le tableau sur $[0, 2\pi]$. On a en effet, pour $x \in [0, 2\pi]$ :

$$\begin{cases} \left(\cos(4x) - \frac{1}{2}\right) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right] \\ \left(\cos(4x) - \frac{1}{2}\right) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right] \end{cases}$$

Pour démontrer les relations ci-dessus, on effectue un tableau de signe en plaçant les valeurs où $\cos(4x) = 1/2$ (ce sont les valeurs où $4x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $4x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$) et on utilise le fait que le cosinus change de signe entre chaques valeurs. On peut alors à l'aide d'un tableau de signes et puisque $\cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ conclure que :

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right] \bigcup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right] \bigcup \left[\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right].$$

Pour avoir les solutions sur $\mathbb{R}$, il s'agit de l'ensemble ci-dessus considéré modulo $2\pi$.

**Exercice 4.**

1) On a :

$$\begin{aligned} \sin^3(\theta)\cos(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \\ &= \frac{(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \times (e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{-16i} \\ &= \frac{e^{4i\theta} - 3e^{2i\theta} + 3 - e^{-2i\theta} + e^{2i\theta} - 3 + 3e^{-2i\theta} - e^{-4i\theta}}{-16i} \\ &= \frac{\sin(4\theta) - 2\sin(2\theta)}{-8}. \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\ &= \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 6}{8}. \end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta)\sin(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\cdot\left(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}\right)\cdot\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\cdot\left(e^{3i\theta}+e^{i\theta}-e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\
&= \frac{\sin(3\theta)+\sin(\theta)}{4}.
\end{aligned}$$

**Exercice 6.**

1) On va factoriser $\cos(x)-\cos(3x)$. À l'aide de la formule de l'arc moitié (factorisation de $e^{ia}-e^{ib}$ où l'on calcule la partie réelle), on retrouve $\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$. On en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)-\cos(5x)=2\sin(3x)\sin(2x).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\cos(x)-\cos(5x)=\sin(3x) &\Leftrightarrow 2\sin(3x)\sin(2x)=\sin(3x)\\
&\Leftrightarrow 2\sin(3x)\left(\sin(2x)-\frac{1}{2}\right)=0.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation vérifient donc $\sin(3x)=0$ ou $\sin(2x)=\frac{1}{2}$. On peut alors exprimer les solutions :

$$\begin{aligned}
\sin(3x)=0 \text{ ou } \sin(2x)=-\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 3x\equiv 0\ [\pi] \text{ ou } \left(2x\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } 2x\equiv\pi-\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow x\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{12}\ [\pi] \text{ ou } x\equiv\frac{5\pi}{12}\ [\pi].
\end{aligned}$$

2) On va regrouper les cosinus, en regroupant ensemble $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$ afin de faire apparaitre du $\cos(2\theta)$ ce qui nous permettra de factoriser. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)+\cos(3\theta)+\cos(2\theta) &= 2\cos\left(\frac{\theta+3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta-\theta}{2}\right)+\cos(2\theta)\\
&= 2\cos(2\theta)\cos(\theta)+\cos(2\theta)\\
&= 2\cos(2\theta)\left(\cos(\theta)+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit alors les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)=0 &\Leftrightarrow \cos(2\theta)=0 \text{ ou } \cos(\theta)=-\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } \theta\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } \theta\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \theta\equiv\frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } \theta\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } \theta\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

3) Puisque $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\leq 1$, la seule possibilité pour que $\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)=3$ est que les trois cosinus soient égaux à 1 en même temps. On a donc :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)=3 &\Leftrightarrow \cos(\theta)=1 \text{ et } \cos(2\theta)=1 \text{ et } \cos(3\theta)=1\\
&\Leftrightarrow \theta\equiv 0\ [2\pi] \text{ et } 2\theta\equiv 0\ [2\pi] \text{ et } 3\theta\equiv 0\ [2\pi].
\end{aligned}$$

Or, on remarque que la première condition implique les deux autres (si $\theta$ est un multiple entier de $2\pi$, alors $2\theta$ et $3\theta$ aussi. On en déduit finalement que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $\theta \equiv 0\ [2\pi]$.

**Exercice 7.** L'idée est de regrouper les termes « proches » ensemble à l'aide des formules de trigonométrie pour $\cos(p) + \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\cos(p) + \sin(q)$.

1) On a, pour $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcl} \cos(\theta) + 2\cos(2\theta) + \cos(3\theta) & = & 2\cos(2\theta) + \cos(\theta) + \cos(3\theta) \\ & = & 2\cos(2\theta) + 2\cos(2\theta)\cos(\theta) \\ & = & 2\cos(2\theta)(1 + \cos(\theta)). \end{array}$$

On en déduit que les zéros de $f$ s'obtiennent quand $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ et quand $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$.

*On pourrait encore factoriser. On a* $1 + \cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *donc on peut écrire* $f$ *sous la forme* $f : \theta \mapsto 4\cos(2\theta)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, *ce qui donne le même ensemble de zéros.*

2) On a pour $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcl} \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \sin(7\theta) + \sin(8\theta) & = & 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{15\theta}{2}\right) \\ & = & 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{15\theta}{2}\right)\right) \\ & = & 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(3\theta)\sin\left(\frac{9\theta}{2}\right). \end{array}$$

On en déduit que les zéros de $g$ s'obtiennent quand $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, quand $\theta \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]$ et quand $\theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{9}\right]$.

**Exercice 8.** On va mettre le terme $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $X_m\cos(x + \varphi)$. Pour cela, on procède comme dans le cours. Posons $X_m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) & = & 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) \\ & = & 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right) \\ & = & 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \end{array}$$

On en déduit que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2}$. Puisque $x \mapsto \cos(x)$ atteint toutes les valeurs entre $[-1, 1]$ et n'atteint aucune valeur strictement plus grande que 1 en valeur absolue, on en déduit que l'équation cherchée admet une solution ssi $\frac{m}{2} \in [-1, 1]$, autrement dit ssi $|m| \leq 2$.

Supposons $m = \sqrt{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \quad & \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\
& \Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

**Exercice 9.** Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) Posons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on a $A = n+1$ et $B = 0$. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}
A + iB &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \cdot \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \cdot \frac{2i\sin((n+1)\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} \\
&= (\cos(n\theta/2) + i\sin(n\theta/2)) \cdot \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on en déduit $A$ et $B$.

2) Notons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$. On a alors $A + B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
A - B &= \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(k\theta) - \sin^2(k\theta)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{2ik\theta}) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{2i\theta}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors on a $A = n+1$ et $B = 0$. Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $e^{2i\theta} \neq 1$. On a donc, en calculant la somme géométrique et en factorisant ensuite par l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
A - B &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i\theta(n+1)} - 1}{e^{2i\theta} - 1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}} \cdot \left(\frac{2i\sin((n+1)\theta)}{2i\sin(\theta)}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\theta}\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right) \\
&= \frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

On a donc, pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ :

$$A = \frac{n+1+\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}{2} \text{ et } B = \frac{n+1-\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}{2}.$$

3) On procède toujours de la même façon. Posons $C = \sum_{k=0}^{n} \cos((2k-1)\theta)$. On a :

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{(2k-1)i\theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{2i\theta}\right)^k\right). \end{aligned}$$

On a donc deux cas. Si $2\theta \equiv 0\ [2\pi]$, autrement dit si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors on a $C = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}(n+1))$. On a donc $C = (n+1)\cos(\theta)$. Sinon, on a (on utilise encore une fois l'arc moitié et on calcule ensuite la partie réelle) :

$$\begin{aligned} C &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\frac{e^{2(n+1)i\theta}-1}{e^{2i\theta}-1}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}e^{in\theta} \cdot \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right) \\ &= \cos((n-1)\theta) \cdot \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

4) Posons $D = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\cos^k(\theta)e^{ik\theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\cos(\theta)e^{i\theta}\right)^k\right). \end{aligned}$$

On a donc deux cas. Si $\cos(\theta)e^{i\theta} = 1$, c'est à dire ssi $\theta \equiv 0\ [\pi]$ (on doit avoir $e^{i\theta}$ réel, donc égal à $\pm 1$. Il ne reste plus qu'à vérifier que le produit est toujours égal à 1, les deux termes étant toujours de même signe). Dans ce cas, on a alors $D = n+1$. Sinon, on a :

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}\cos^{n+1}(\theta)-1}{e^{i\theta}\cos(\theta)-1}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{(e^{i(n+1)\theta}\cos^{n+1}(\theta)-1)(e^{-i\theta}\cos(\theta)-1)}{|e^{i\theta}\cos(\theta)-1|^2}\right) \\ &= \frac{\cos(n\theta)\cos^{n+2}(\theta)-\cos((n+1)\theta)\cos^{n+1}(\theta)-\cos^2(\theta)+1}{\sin^2(\theta)} \\ &= 1+\cos^{n+1}(\theta)\cdot\frac{\cos(n\theta)\cos(\theta)-\cos((n+1)\theta)}{\sin^2(\theta)} \\ &= 1+\cos^{n+1}(\theta)\cdot\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

**Exercice 10.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(e^{(a+kb)i}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ib}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}(1+e^{ib})^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}e^{ibn/2}(e^{-ib/2}+e^{ib/2})^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(a+bn/2)}2^n \cos^n(b/2)\right) \\
&= 2^n \cos(a+bn/2)\cos^n(b/2).
\end{aligned}$$