5. Applications, méthodologie

I. Fonctions

I.1. Premières propriétés

Définition. Soit $f : X \to Y$. Soient $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $y = f(x)$. On dit alors que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f. Un élément de X n'a qu'une unique image par f mais un élément de Y peut avoir un seul, plusieurs ou aucun antécédents par f.

Exercice d'application 1. Donner des exemples de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

1. les images de f soient toutes incluses dans $[0, 2]$.
2. tout élément de $\mathbb{R}$ ait exactement un antécédent par f.
3. tout élément de $\mathbb{R}$ ait une infinité d'antécédents par f.

I.2. Fonctions particulières

I.3. Composition

Définition. Soient X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. Alors la composée de f par g est la fonction :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Exercice d'application 2. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$, $g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ et $g_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ?

1. $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
2. $g_2 \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.
3. $f \circ g_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.
4. $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

Proposition. La loi $\circ$ est associative, c'est à dire que si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to V$ sont trois fonctions, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Exercice d'application 3. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$.

1. Peut-on écrire $f \circ g$ et $g \circ f$? Si oui, préciser les domaines de départ et d'arrivée.
2. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Démontrer que $(g \circ f)^2 = g \circ f$.
3. On suppose toujours que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Que peut-on dire de $(g \circ f)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Le démontrer.

I.4. Résolution de $f(x) = y$

II. Fonctions injectives et surjectives

II.1. Injections

Définition. Soit $f : X \to Y$. On dit que f est **injective** si :

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Proposition. Soit $f : X \to Y$. Alors f est injective si et seulement si pour tout $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$ a au plus une solution.

m Pour démontrer qu'une fonction $f : X \to Y$ est injective, on dispose donc de trois méthodes :
- Définir $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et démontrer que $x_1 = x_2$.
- Définir $x_1, x_2 \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$ et démontrer que $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Définir $y \in Y$ et montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$ a une solution ou aucune solution.

Il est souvent préférable de travailler avec la première méthode car il est en général plus facile de manipuler une hypothèse avec une égalité ($f(x_1) = f(x_2)$) plutôt qu'une hypothèse qui suppose que deux éléments sont distincts ($x_1 \neq x_2$).

m Pour démontrer qu'une fonction $f : X \to Y$ n'est pas injective, il faut trouver deux éléments distincts $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exercice d'application 4. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 + x \end{array} \right.$. Démontrer que f n'est pas injective.

Exercice d'application 5. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x^2 + x \end{array} \right.$. Démontrer que f est injective en utilisant la première méthode.

Exercice d'application 6. Soit $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_-$ injective et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ injective. On définit h :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \text{ si } x \leq 0 \\ x & \mapsto & g(x) \text{ si } x > 0 \end{array} \right. .$$

Démontrer que h est injective en utilisant une des deux premières méthodes.

Proposition. Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux fonctions. Alors :
- si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

II.2. Surjections

Définition. Soit $f : X \to Y$. On dit que f est **surjective** si :

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \ /\ f(x) = y.$$

On a donc f surjective si et seulement si pour tout $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$ a au moins une solution.

(m) Pour démontrer qu'une fonction $f : X \to Y$ est surjective, on commence par définir $y \in Y$ (quelconque) et on prouve l'existence d'un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Il suffit de trouver un élément qui convient donc si vous trouvez une solution x « évidente », vous pouvez comme preuve vérifier que $f(x)$ est bien égal à y.

(m) Pour démontrer qu'une fonction $f : X \to Y$ n'est pas surjective, il faut prouver l'existence d'un élément $y \in Y$ tel qu'aucun $x \in X$ ne vérifie $f(x) = y$. Pour se faire, vous pouvez :
- soit raisonner par analyse/synthèse en étudiant l'équation $f(x) = y$ jusqu'à ce que vous obteniez une absurdité pour certaines valeurs de y. Dans la synthèse, vous pouvez alors démontrer que cette valeur de y n'a bien aucun antécédent par f.
- soit trouver « intuitivement » un $y \in Y$ qui va convenir et démontrer que cette valeur de y n'a bien aucun antécédent par f.

Exercice d'application 7. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 + x + \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$. Démontrer que :

1. f est bien définie (vérifier que l'ensemble des images est bien inclus dans $\mathbb{R}_+$).
2. f est surjective en résolvant l'équation $f(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R}_+$.
3. f est surjective en utilisant les variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice d'application 8. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{array} \right.$. Démontrer que f est bien définie et qu'elle n'est pas surjective.

Exercice d'application 9. Soit $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_-$ surjective et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ surjective. On définit $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \text{ si } x \leq 0 \\ x & \mapsto & g(x) \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$. Démontrer que h est surjective.

Proposition. Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux fonctions. Alors :
- si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

III. Fonctions bijectives et fonctions inversibles

III.1. Bijections

Définition. Soit $f : X \to Y$. On dit que f est **bijective** (de X dans Y) si :

$$\forall y \in Y,\ \exists! x \in X \ / \ f(x) = y.$$

On a donc f bijective si et seulement si pour tout $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$ a exactement une solution.

Proposition. Soit $f : X \to Y$. On a f bijective si et seulement si f est injective et surjective.

(m) Pour montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ est bijective, on peut :

- soit démontrer en deux temps qu'elle est injective et surjective.
- soit prendre $y \in Y$ et démontrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$ a une unique solution.

Exercice d'application 10. Démontrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} \end{cases}$ est bijective.

III.2. Fonctions inversibles

Définition. Soit $f : X \to Y$. On dit que f est **inversible** s'il existe une fonction $g : Y \to X$ telle que :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Proposition. Soit $f : X \to Y$. Alors f est inversible si et seulement si f est bijective.

(m) Pour montrer que $f : X \to Y$ est bijective, il suffit donc de montrer qu'elle est inversible. Il est parfois plus facile de vérifier qu'une fonction $g : Y \to X$ est bien un inverse de X plutôt que de démontrer que f est bijective.

Exercice d'application 11. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ n & \mapsto & n-2 \text{ si } n \geq 2 \text{ et si } n \text{ est pair.} \\ n & \mapsto & n+2 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$.

Montrer que f est bijective en construisant une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Proposition. Soit $f : X \to Y$ inversible. Alors son inverse est unique. C'est la **fonction réciproque** de f (ou **l'inverse** de f) et on la note f^{-1}.

(m) Pour déterminer explicitement la fonction réciproque d'une fonction $f : X \to Y$, on fixe $y \in Y$ et on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$. On a alors :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

ce qui donne la fonction $f^{-1} : Y \to X$. *On a bien une unique solution puisque f est bijective.*

Exercice d'application 12. Déterminer la fonction réciproque de l'application de l'exercice 10.

Proposition. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ bijectives. Alors :
- $g \circ f : X \to Z$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- $f^{-1} : Y \to X$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exercice d'application 13. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.

1. Quel est l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de $f \circ g \circ f$?
2. Démontrer que f est bijective. *On pourra utiliser les propositions énoncées à la fin des parties II.1 et II.2.*
3. En déduire que g est bijective.

IV. Cas particulier des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition. Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f est strictement monotone sur D. Alors :
- f est injective.
- $f : D \to f(D)$ est bijective. *On note $f(D) = \{f(x),\ x \in D\}$ l'ensemble des valeurs prises par f.*
- $f^{-1} : f(D) \to D$ est alors bien définie, elle est strictement monotone avec la même monotonie que f et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème. Théorème de la bijection continue. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **strictement monotone** et **continue** sur I. Alors, f est bijective de I dans $J = f(I)$ où J est un intervalle du même type que I, c'est à dire :
- Si f est strictement croissante :
  - si $I = [a,b]$, alors $J = [f(a), f(b)]$.
  - si $I =]a,b]$, alors $J =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$.
  - si $I = [a,b[$, alors $J = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
  - si $I =]a,b[$, alors $J =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
- Si f est strictement décroissante :
  - si $I = [a,b]$, alors $J = [f(b), f(a)]$.
  - si $I =]a,b]$, alors $J = [f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.
  - si $I = [a,b[$, alors $J =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$.
  - si $I =]a,b[$, alors $J =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.

m Ce théorème est très important car il permet de prouver que des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ sont bijectives à l'aide d'une étude de fonctions (calcul de la dérivée pour la stricte monotonie et calcul des limites aux bords de l'intervalle).

Exercice d'application 14. Démontrer que
1. $f : x \mapsto \ln(x) + x$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto e^x - x$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans I avec I à déterminer.

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **strictement monotone** et **continue** sur I. Alors :
- d'après le théorème précédent, f est bijective de I dans $J = f(I)$.
- sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.
- si f est de plus dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- en particulier, si f est **dérivable** sur I et que f' **ne s'annule pas sur** I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exercice d'application 15. On reprend les notations de l'exercice 14.
1. Sur quels ensembles les fonctions f^{-1} et g^{-1} sont-elles dérivables ?
2. Déterminer $(f^{-1})'(1)$ et $(g^{-1})'(e^2 - 2)$.

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Donner des exemples de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

1. On peut prendre la fonction constante égale à 1 ou la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)+1 \end{array} \right.$.
2. On peut prendre la fonction identité $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$, ou la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$.
3. On pourrait prendre la fonction tangente mais elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le moyen pour résoudre ce problème est de prolonger cette fonction. On peut donc définir la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \text{ si } x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ x & \mapsto & 0 \text{ si } x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{array} \right. .$$

Dans chacun des exemples précédents, il y a bien sûr d'autres solutions...

Exercice d'application 2.

1. On a bien $g_1 \circ f$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais pour $x \in \mathbb{R}$, $(g_1 \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ donc $g_1 \circ f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
2. $g_2 \circ f$ est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ donc elle ne peut pas être égale à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ (qui est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$).
3. $f \circ g_1$ est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(f \circ g_1)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ donc on a bien $f \circ g_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.
4. $f \circ g_2$ n'existe pas puisque l'ensemble d'arrivée de g_2 est $\mathbb{R}_+$ et l'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 3. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$.

1. Oui on peut écrire les deux composées. $f \circ g$ est une fonction définie de Y dans Y et $g \circ f$ une fonction définie de X dans X.
2. On utilise l'associativié de la loi $\circ$:

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)^2 & = & (g \circ f) \circ (g \circ f) \\ & = & g \circ (f \circ g) \circ f \\ & = & g \circ \mathrm{Id}_Y \circ f \\ & = & g \circ f. \end{array}$$

3. On procède par récurrence (simple) sur n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $(g \circ f)^n = g \circ f$ ».
   - La propriété est vraie au rang 1 (rien à démontrer) et au rang 2 (question précédente).
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

   $$\begin{array}{rcll} (g \circ f)^{n+1} & = & (g \circ f)^n \circ (g \circ f) & \\ & = & (g \circ f) \circ (g \circ f) & \text{(d'après } \mathcal{P}(n)) \\ & = & (g \circ f)^2 & \\ & = & g \circ f & \text{(d'après } \mathcal{P}(2)). \end{array}$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

Exercice d'application 4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x(2x+1)$. Pour $x_0 = 0$ et $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, on a $x_0 \neq x_1$ et $f(x_0) = f(x_1) = 0$. f n'est donc pas injective.

Exercice d'application 5. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\Leftrightarrow 2n_1^2 + n_1 = 2n_2^2 + n_2 \\ &\Leftrightarrow 2(n_1^2 - n_2^2) + n_1 - n_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (n_1 - n_2)(2(n_1+n_2)+1) = 0. \end{aligned}$$

Puisque n_1 et n_2 sont entiers, alors on a $2(n_1+n_2)+1 \neq 0$ (puisqu'il s'agit d'un entier impair). On en déduit que $n_1 - n_2 = 0$, d'où $n_1 = n_2$.

On a donc bien prouvé que f est injective. *Changer les domaines de départ et d'arrivée de la fonction change donc ses propriétés.*

Exercice d'application 6.

- Avec la première méthode. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. On procède alors par disjonction de cas :

  — Si $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$, alors $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Par injectivité de f, ceci entraine que $x_1 = x_2$.
  — Si $x_1 \leq 0$ et $x_2 > 0$, alors $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_2)$. Or, on a $f(x_1) \leq 0$ et $g(x_2) > 0$ (puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ et g à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$). On a donc une absurdité, cette hypothèse est impossible.
  — Pour les mêmes raisons, si $x_1 > 0$ et $x_2 \leq 0$, on obtient une absurdité.
  — Enfin, si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, alors $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2)$. Par injectivité de g, ceci entraine que $x_1 = x_2$.

  Dans tous les cas possibles, on obtient donc $x_1 = x_2$. Ceci entraine que h est injective.

- Avec la seconde méthode. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$. Alors, encore par disjonction de cas :

  — Si $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$. On a alors $h(x_1) = f(x_1)$ et $h(x_2) = f(x_2)$. Puisque f est injective et que $x_1 \neq x_2$, on a bien $f(x_1) \neq f(x_2)$ (et donc $h(x_1) \neq h(x_2)$).
  — Si $x_1 \leq 0$ et $x_2 > 0$. On a alors $h(x_1) = f(x_1) \leq 0$ et $h(x_2) = g(x_2) > 0$. Ceci entraine que $h(x_1) \neq h(x_2)$ (puisque ces valeurs sont de signes différents).
  — Par le même raisonnement, si $x_1 > 0$ et $x_2 \leq 0$, on obtient $h(x_1) \neq h(x_2)$.
  — Enfin, si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. On a alors $h(x_1) = g(x_1)$ et $h(x_2) = g(x_2)$. Puisque g est injective et que $x_1 \neq x_2$, on a bien $g(x_1) \neq g(x_2)$ (et donc $h(x_1) \neq h(x_2)$).

  Dans tous les cas, on a montré que $h(x_1) \neq h(x_2)$. Ceci entraine que h est injective.

Exercice d'application 7.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x + 1$. On en déduit que $f'(x)$ est négative pour $x \leq -\dfrac{1}{2}$ et positive pour $x \geq -\dfrac{1}{2}$. f est donc décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Or, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$. f est donc bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On étudie l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = y \\ &\Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{4} - y\right) = 0. \end{aligned}$$

   On doit donc trouver les racines d'une équation polynomiale de degré 2. On a $\Delta = 1 - 4\left(\dfrac{1}{4} - y\right) = 4y \geq 0$. Les racines sont donc réelles (de la forme $x_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4y}}{2}$). On peut donc trouver au moins une valeur $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = y$, et ceci pour tout $y \in \mathbb{R}_+$. f est donc surjective.

3. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc il existe $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_1) > y$. Puisque $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et que f est continue, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in \left[-\frac{1}{2}, x_1\right]$ tel que $f(x) = y$. y étant pris quelconque dans $\mathbb{R}_+$, on a bien prouvé que f est surjective.

Exercice d'application 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a soit n pair, soit n impair et alors $n + 1$ pair. On en déduit que $n(n + 1)$ est divisible par 2 (un autre moyen de le voir est de voir que c'est le produit de deux entiers consécutifs donc c'est forcément un nombre pair). On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \in \mathbb{N}$, f est donc bien définie.

Pour la non-surjectivité, on peut faire deux méthodes différentes :

- On teste pour quelques valeurs $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, etc. De plus, on peut voir que f est strictement croissante (puisque c'est la restriction de la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (on peut le montrer en calculant sa dérivée)). On en déduit qu'il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 2$. La valeur 2 n'étant pas atteinte, f n'est pas surjective.

- On peut aussi fixer $y \in \mathbb{N}$ et étudier l'équation $f(n) = y$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f(n) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = y \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 2y = 0. \end{aligned}$$

  On a une équation de degré 2 en n. On a $\Delta = 1 + 8y > 0$. Les solutions réelles de cette équation sont donc $x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+8y}}{2}$. Ceci entraine que si on prend $y \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{1+8y}$ n'est pas entier, alors il n'y a pas de solutions entières. Pour $y = 2$, on a $\sqrt{1+8y} = \sqrt{17}$ qui est irrationnel et donc non entier. Il n'y a donc pas de solutions entières à l'équation $f(n) = 2$. f n'est pas surjective.

Exercice d'application 9. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a deux cas possibles :

- Si $y \leq 0$, alors puisque f est surjective de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_-$, il existe $x \in \mathbb{R}_-$ tel que $f(x) = y$. Puisque $x \leq 0$, on a $h(x) = f(x) = y$.
- Si $y > 0$, alors puisque g est surjective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(x) = y$. Puisque $x > 0$, on a $h(x) = g(x) = y$.

Dans tous les cas, on a construit $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = y$. On en déduit que h est surjective.

Exercice d'application 10. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $f(X) = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a :

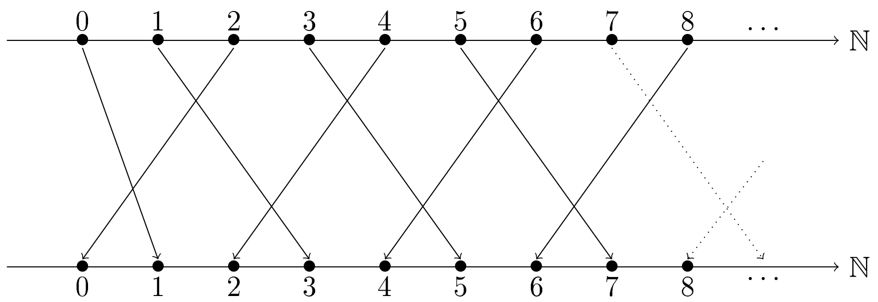
$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1+x_2=y_1\\ x_1-3x_2=y_2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} & 7x_2=y_1-2y_2\\ x_1- & 3x_2=y_2\end{array}\right. \qquad L_1\leftarrow L_1-2L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=\dfrac{y_1-2y_2}{7}\\ x_1=\dfrac{3y_1+y_2}{7}\end{array}\right. .$$

On obtient donc une unique solution à l'équation $f(X)=Y$ qui est $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3y_1+y_2\\y_1-2y_2\end{pmatrix}$. f est donc bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice d'application 11. Remarquons tout d'abord que f est bien définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ puisque toutes les images de f sont des entiers positifs. Un petit dessin nous permet de voir comment fonctionne f :



Pour déterminer l'inverse, on « remonte » les flèches dans l'autre sens. Ceci nous conduit à poser :

$$g:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ 1 & \mapsto & 0\\ n & \mapsto & n-2 \text{ si } n\geq 3 \text{ est impair.}\\ n & \mapsto & n+2 \text{ si } n \text{ est pair.}\end{array}\right. .$$

De même que pour f, on a bien g définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Il reste à vérifier que $g=f^{-1}$. Commençons par montrer que $f\circ g=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

- Si $n=1$, $(f\circ g)(n)=f(g(1))=f(0)=1=n$.
- Si $n\geq 3$ est impair, $(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(n-2)$. On a alors $n-2$ impair (et supérieur ou égal à 1). On a donc $f(n-2)=(n-2)+2=n$.
- Enfin, si n est pair, on a $(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(n+2)$. On a alors $n+2$ pair et $n+2\geq 2$. On a donc $f(n+2)=(n+2)-2=n$.

On a fait tous les cas possibles. On a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ (f\circ g)(n)=n$, d'où $f\circ g=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Il reste à montrer que $g\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. On procède exactement de même. Pour $n\in\mathbb{N}$:

- Si $n=0$, $(g\circ f)(n)=f(g(0))=f(1)=0=n$.
- Si n est impair, $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(n+2)$. On a alors $n+2$ impair (et supérieur ou égal à 3). On a donc $g(n+2)=(n+2)-2=n$.
- Enfin, si n est pair et $n\geq 2$, on a $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(n-2)$. On a alors $n-2$ pair et $n-2\in\mathbb{N}$. On a donc $g(n-2)=(n-2)+2=n$.

On a fait tous les cas possibles. On a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ (g\circ f)(n)=n$, d'où $g\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

On en déduit que f est inversible (donc bijective) et que $g=f^{-1}$.

Quand vous avez à rédiger une telle question à l'écrit, vous pouvez vous contenter de définir la fonction g, d'expliquer pourquoi elle est bien définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, de vérifier un des deux points précédents et de dire que l'autre s'obtient de la même façon sans le détailler...

Exercice d'application 12. La résolution de l'équation dans l'exercice 10 a donné :

$$f^1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} \dfrac{3x+y}{7} \\ \dfrac{x-2y}{7} \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Exercice d'application 13. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.

1. $f \circ g \circ f$ est une application qui va de X (espace de départ) dans Y (espace d'arrivée).
2. On a $f \circ g \circ f = (f \circ g) \circ f$ qui est injective (car bijective) donc la fonction f (la fonction « la plus à droite ») est injective.
   De plus, on a $f \circ g \circ f = f \circ (g \circ f)$ qui est surjective (car bijective) donc la fonction f (la foncton « la plus à gauche ») est surjective.

   On en déduit que f est bien bijective de X dans Y.
3. On a donc f^{-1} bijective de Y dans X. Par composition d'applications bijectives, on a $f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ qui est bijective. Or, par associativité de la loi $\circ$:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1} &= (f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= \mathrm{Id}_X \circ g \circ \mathrm{Id}_Y \\ &= g. \end{aligned}$$

   On en déduit que g est bijective de Y dans X.

Exercice d'application 14.

1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme d'applications continues/dérivables. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   D'après le théorème de la bijection continue, on a donc f bijective de $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
2. g est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions continues/dérivables. Pour $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - 1$. On a donc $g'(x) > 0$ pour $x > 0$ (puisque l'exponentielle est strictement croissante) et $g'(0) = 0$. Ceci entraine que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (puisque g est continue et que sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en un seul point). Enfin, on a $g(0) = 1$ et pour $x > 0$:

$$g(x) = e^x - x = e^x \times \left(1 - \frac{x}{e^x}\right).$$

   Par théorème des croissances comparées, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

   Par théorème de la bijection continue, on a donc g bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $I = \left[g(0), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[= [1, +\infty[$.

Quand vous rédigez un tel exercice, il est important de mettre en valeurs les hypothèses des théorèmes que vous utilisez et le nom du théorème que vous utilisez.

Exercice d'application 15. On reprend les notations de l'exercice 14.

1. On a f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. On a donc f^{-1} dérivable sur tout son domaine de définition, c'est à dire $\mathbb{R}$.

   On a g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x > 0$, $g'(x) > 0$ mais $g'(0) = 0$. Ceci entraine que g^{-1} n'est dérivable que sur $]1, +\infty[$ (il faut enlever la valeur $g(0) = 1$ du domaine de définition).
2. On a $f(1) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 1$. On a donc :
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$
   Enfin, on a $g(2) = e^2 - 2$ donc $g^{-1}(e^2 - 2) = 2$. On a donc :
$$(g^{-1})'(e^2 - 2) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(e^2 - 2)\right)} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{e^2 - 1}.$$