DM 9, pour le vendredi 03/02/2023

Cherchez en priorité le problème 1 ! Si vraiment vous le voulez (ET que vous avez fini tout dans toutes les matières), cherchez le problème 2.

Concernant la rédaction, rédigez surtout les parties I et II du problème 1. La partie III ressemble beaucoup et est plus pour la « culture ». Pour le problème 2, rédigez surtout les questions sur lesquelles vous n'êtes vraiment pas sûrs (pour gagner du temps !)

PROBLÈME
Des nombres irrationnels célèbres

On rappelle que si f est k fois dérivable, $f^{(k)}$ représente la dérivée k-ième de f.

Partie I. Une certaine fonction

1) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

   a) Vérifier que $\forall x \in [0,1]\,,\ 0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}$ et que f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer qu'il existe des entiers relatifs $e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n} \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e_k x^k$.

   c) En déduire que $\forall m \in \mathbb{N},\ f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$.

2) Déterminer un lien entre $f_n(x)$ et $f_n(1-x)$ et en déduire que $\forall m \in \mathbb{N},\ f_n^{(m)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Partie II. π et π^2 sont irrationnels

On suppose par l'absurde que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers naturels non nuls. On définit la fonction H_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x).$$

3) Vérifier que H_n est $\mathcal{C}^\infty$ et que $H_n(0)$ et $H_n(1)$ sont des entiers relatifs. *On rappelle que* $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ *ici !*

4) On définit la fonction K_n par $\forall x \in \mathbb{R},\ K_n(x) = H_n'(x)\sin(\pi x) - \pi H_n(x)\cos(\pi x)$. Vérifier que K_n est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R},\ K_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

5) Montrer que $A_n = \pi \displaystyle\int_0^1 a^n \sin(\pi x) f_n(x)dx$ est un entier.

On admet le résultat suivant (que l'on démontrera en fin d'année) : si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et positive, alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ g(x) = 0$.

6) En utilisant la question I.1.a, montrer d'une part que $A_n > 0$ et d'autre part que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$. En déduire une absurdité.

7) Montrer que π est irrationnel.

Partie III. e^r est irrationnel pour $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit $h \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $e^h = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls. On définit la fonction F_n par $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k h^{2n-k} f_n^{(k)}(x)$.

8) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

9) Soit $G_n : x \mapsto e^{hx} F_n(x)$. Montrer que G_n est dérivable et simplifier $G_n'(x)$.

10) Simplifier l'intégrale $b \displaystyle\int_0^1 h^{2n+1} e^{hx} f_n(x)dx$.

11) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b \int_0^1 h^{2n+1} e^{hx} f_n(x)dx$.

12) Montrer que $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $e^h \notin \mathbb{Q}$.

13) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}^*$, $e^r \notin \mathbb{Q}$.

14) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r \neq 1 \Rightarrow \ln(r) \notin \mathbb{Q}$.

PROBLÈME
La fonction de Van Der Waerden

L'objectif de ce problème est de construire une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en aucun point.

« **Je me détourne avec effroi et horreur, de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée.** » *Charles Hermite, 1822-1901*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

- f_n est périodique de période $\dfrac{1}{2^n}$.
- $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] \\ \dfrac{1}{2^n} - x & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right] \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f_i(x)$.

1) *Construction de la fonction g.*
   a) Tracer les graphes de f_0, f_1, f_2 sur $[0,1]$ (aucune justification attendue).
   b) Vérifier que $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f_i(x) \leq \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq g_n(x) \leq 1$.
   d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $g(x)$ sa limite.

2) *Continuité de g.*
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n, m \in \mathbb{N} \ /\ n < m,\ |g_m(x) - g_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |g(x) - g_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |g(x) - g(y)| \leq \dfrac{1}{2^n} + |g_n(x) - g_n(y)|$.

d) En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) *Non dérivabilité de g.*

a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ g\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right).$$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0, n]\!], \forall k \in \mathbb{Z},\ f_i$ est affine sur $\left[\dfrac{k}{2^{n+1}}, \dfrac{k+1}{2^{n+1}}\right]$ de pente 1 ou -1.

c) En déduire que $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{g\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}$ est un entier relatif dont on précisera la parité en fonction de celle de n.

On ne demande que la parité de cet entier, pas sa valeur exacte.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \lfloor 2^{n+1} x \rfloor$ et $y_n = x_n + 1$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{2^{n+1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_n}{2^{n+1}}$.

e) On suppose g dérivable en x.

i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que :

$$\exists \eta > 0 \ /\ \forall y \in [x - \eta, x + \eta]\,,\ |g(y) - g(x) - (y - x)g'(x)| \leq |y - x| \times \varepsilon.$$

ii) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{g\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{x_n}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}} = g'(x)$.

On pourra poser $u_n = \dfrac{x_n}{2^{n+1}}$ et $v_n = \dfrac{y_n}{2^{n+1}}$ afin d'alléger les notations.

f) Montrer que g n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.