10. Nombres réels, corrigé

Exercice 1. Puisque A et B sont non vides, il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. On remarque alors avec la propriété que pour tout $a \in A$, $a \leq b_0$ donc b_0 majore A et que pour tout $b \in B$, $a_0 \leq b$ donc a_0 minore B. On a donc A non vide et majoré donc $\sup(A)$ existe et B non vide et minoré donc $\inf(B)$ existe.

Fixons $a \in A$. Puisque pour tout $b \in B$, on a $a \leq b$, ceci signifie que a minore B. Puisque $\inf(B)$ est le plus grand minorant de B, on a $a \leq \inf(B)$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on en déduit que $\inf(B)$ majore A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, on a alors $\sup(A) \leq \inf(B)$.

On a pas toujours égalité. Il suffit par exemple de prendre $A = [0,1]$ et $B = [2,3]$. On a bien la propriété de l'énoncé et on a $\sup(A) = 1 < \inf(B) = 2$.

Exercice 2. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ non vide. On note $D = \{|x-y|,\ x, y \in A\}$.

1) Remarquons que puisque A est bornée non vide, alors $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent. Montrons à présent que D est majoré. Pour cela, considérons $d \in D$. Il existe alors $x, y \in A$ tels que $d = |x-y|$.

On a $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$ et $\inf(A) \leq y \leq \sup(A)$ d'où $-\sup(A) \leq -y \leq -\inf(A)$. Par somme, on a donc :

$$\inf(A) - \sup(A) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A).$$

Ceci entraine que $|x-y| \leq \sup(A) - \inf(A)$.

Ceci entraine que D est majoré par $\sup(A) - \inf(A)$ (l'élément d étant pris quelconque dans D). Cet ensemble étant non vide (car A est non vide) et majoré, on en déduit que $\sup(D)$ existe. Puisque $\sup(D)$ est le plus petit des majorants de D et $\sup(A) - \inf(A)$ étant un majorant de D, on en déduit que $\sup(D) \leq \sup(A) - \inf(A)$.

2) On utilise la caractérisation séquentielle. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf(A)$ et il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sup(A)$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = \sup(A) - \inf(A)$. Puisque $\inf(A) \leq \sup(A)$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} |b_n - a_n| = |\sup(A) - \inf(A)| = \sup(A) - \inf(A).$$

En posant pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = |b_n - a_n| \in D$, on a alors par caractérisation séquentielle de $\sup(D)$ que $\sup(A) - \inf(A)$ est la borne supérieure de D (on a montré dans la question 1 que c'était un majorant).

On a 0 qui minore D (car c'est un ensemble de valeurs absolues) et $0 \in D$ car puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ donc $|a-a| = 0 \in D$. On en déduit que D admet 0 comme minimum et donc que $0 = \inf(B)$.

Exercice 3. Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1) Remarquons tout d'abord que puisque A et B sont non vides bornées, alors elles admettent une borne inférieure et une borne supérieure. Posons $C = A \cup B$. Soit $c \in C$. On a alors $c \in A$ ou $c \in B$. Dans le premier cas, on a $c \leq \sup(A)$ et dans le second cas, on a $c \leq \sup(B)$. Dans les deux cas, on a $c \leq \max(\sup(A), \sup(B))$. On en déduit que $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de C.

C est donc non vide majoré, il admet une borne supérieure et cette borne supérieure est donc inférieure ou égale à $\max(\sup(A), \sup(B))$.

Montrons à présent que $\sup(C) = \max(\sup(A), \sup(B))$. On a déjà montré que $\max(\sup(A), \sup(B))$ majore C. On va montrer que c'est le plus petit des majorants de C.

Soit donc M un majorant de $C = A \cup B$. Puisque $A \subset C$, on a alors M qui majore A et donc $\sup(A) \leq M$ (car $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A). De même, M majore B et donc $\sup(B) \leq M$. On en déduit donc que $\max(\sup(A), \sup(B)) \leq M$. On a donc bien montré que $\max(\sup(A), \sup(B))$ est le plus petit majorant de C, c'est donc sa borne supérieure.

2) De même, montrons que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$. Pour le fait que C soit minoré par le minimum des deux bornes inférieures, ceci se montre de la même façon que dans la première question. On en déduit que $\inf(C)$ existe et qu'elle est supérieure ou égale à $\min(\inf(A), \inf(B))$.

Pour montrer que c'est la borne inférieure, considérons un autre minorant m de C. On a alors m qui minore A et qui minore B donc m est plus petit que $\inf(A)$ et plus petit que $\inf(B)$ (car la borne inférieure est le plus grand des minorants). On a donc m inférieur à $\min(\inf(A), \inf(B))$, ce qui prouve bien que $\min(\inf(A), \inf(B))$ est le plus grand minorant de C (et donc sa borne inférieure).

3) Pour $A \cap B$, on ne peut cette fois plus rien dire. Déjà, rien ne garantit que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors, on peut montrer que $A \cap B$ est minoré par $\max(\inf(A), \inf(B))$ et majoré par $\min(\sup(A), \sup(B))$. On a cependant aucune égalité possible comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \{-1, 0, 1\} \text{ et } B = \{-2, 0, 2\}.$$

Exercice 4. Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Après quelques essais, on observe que si $\lambda = 0$, alors $\inf(A) = \sup(\lambda A) = 0$ (ce qui est vrai car alors $\lambda A = \{0\}$). Si $\lambda > 0$, on observe que $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$ et $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ (ce que l'on va démontrer). Si $\lambda < 0$, alors, on observe que $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ et $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$ (ce que l'on va démontrer).

- Soit $\lambda > 0$. Notons déjà que λA est non vide (puisque A est non vide). Soit $b \in \lambda A$. Alors, il existe $a \in A$ tel que $b = \lambda a$. Puisque $a \in A$, alors, on a $\inf(A) \leq a \leq \sup(A)$. Puisque $\lambda > 0$, alors, on a $\lambda \inf(A) \leq b \leq \lambda \sup(A)$. L'élément b étant quelconque dans λA, on en déduit que $\lambda \inf(A)$ minore A et que $\lambda \sup(A)$ le majore. Puisqu'il est non vide, on en déduit que $\inf(\lambda A)$ et $\sup(\lambda A)$ existent.

  Soit M un majorant de λA. Soit $a \in A$. On a alors $\lambda a \in \lambda A$ et donc $\lambda a \leq M$. On en déduit alors que $a \leq \dfrac{M}{\lambda}$. L'élément a étant quelconque dans A, on en déduit que $\dfrac{M}{\lambda}$ est un majorant de A. Il en découle, puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, que $\sup(A) \leq \dfrac{M}{\lambda}$. On a donc $\lambda \sup(A) \leq M$. On a donc montré que $\lambda \sup(A)$ est le plus petit des majorants de λA. Il s'agit donc de sa borne supérieure. On a donc montré que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

  Soit m un minorant de λA. Soit $a \in A$. On a alors $\lambda a \in \lambda A$ et donc $m \leq \lambda a$. On en déduit alors que $\dfrac{m}{\lambda} \leq a$. L'élément a étant quelconque dans A, on en déduit que $\dfrac{m}{\lambda}$ est un minorant de A. Il en découle, puisque la borne inférieure est le plus grand des minorants, que $\dfrac{m}{\lambda} \leq \inf(A)$. On a donc $m \leq \lambda \inf(A)$. On a donc montré que $\lambda \inf(A)$ est le plus grand des minorants de λA. Il s'agit donc de sa borne inférieure. On a donc montré que $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

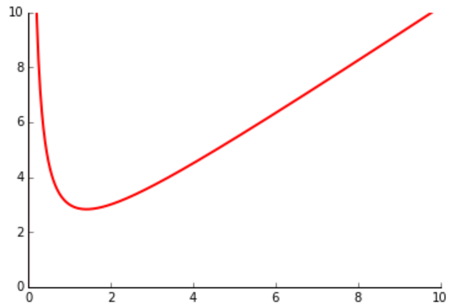
- Si $\lambda < 0$. Notons déjà que λA est non vide (puisque A est non vide). Soit $b \in \lambda A$. Alors, il existe $a \in A$ tel que $b = \lambda a$. Puisque $a \in A$, alors, on a $\inf(A) \leq a \leq \sup(A)$. Puisque $\lambda < 0$, alors, on a $\lambda \sup(A) \leq b \leq \lambda \inf(A)$. L'élément b étant quelconque dans λA, on en déduit que $\lambda \sup(A)$ minore A et que $\lambda \inf(A)$ le majore. Puisqu'il est non vide, on en déduit que $\inf(\lambda A)$ et $\sup(\lambda A)$ existent.

  Soit M un majorant de λA. Soit $a \in A$. On a alors $\lambda a \in \lambda A$ et donc $\lambda a \leq M$. On en déduit alors que $a \geq \frac{M}{\lambda}$. L'élément a étant quelconque dans A, on en déduit que $\frac{M}{\lambda}$ est un minorant de A. Il en découle, puisque la borne inférieure est le plus grand des minorants, que $\inf(A) \geq \frac{M}{\lambda}$. On a donc $\lambda \inf(A) \leq M$. On a donc montré que $\lambda \inf(A)$ est le plus petit des majorants de λA. Il s'agit donc de sa borne supérieure. On a donc montré que $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

On procède exactement de la même façon pour montrer que $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Exercice 5.

1) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = -\frac{n}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - n}{x^2}$. On en déduit que f_n est décroissante sur $]0, \sqrt{n}]$ et croissante sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Les limites en 0 et $+\infty$ valent $+\infty$ donc on a le graphe suivant :



On remarque que f_n admet un minimum en $x = \sqrt{n}$. Puisque $\{\frac{n}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^*\} \subset \{f(x),\ x > 0\}$, on en déduit que $f(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}$ minore $\{\frac{n}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble étant clairement non vide (il contient $n+1$ (pour $k = 1$)) et minoré, il admet une borne inférieure d'où l'existence de a_n.

a_n étant le plus grand des minorants et $2\sqrt{n}$ étant un minorant, on en déduit que $a_n \geq 2\sqrt{n}$.

2) Pour $n = 1$, on remarque que l'on a $a_1 \geq 2$ et que $2 \in \left\{\frac{1}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$. On en déduit que $a_1 = 2$ (et c'est même un minimum).

On étudie ici l'ensemble $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 2\sqrt{n} \geq 2 = a_1$, on a que a_1 minore cet ensemble (et appartient à l'ensemble en $n = 1$). On a donc $\inf_{n \in \mathbb{N}^*}(a_n) = \min_{n \in \mathbb{N}^*}(a_n) = a_1 = 2$.

Enfin, on a puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geq 2\sqrt{n}$ que $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ donc $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas majoré. On en déduit que $\sup_{n \in \mathbb{N}^*}(a_n) = +\infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$) ou n'existe pas (dans $\mathbb{R}$).

Exercice 6.

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $A_1 = \{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, on en déduit que a minore A_1 et $a+b$ le majore. Puisque A_1 est non vide, on en déduit qu'il admet une borne inférieure et une borne supérieure. On a de plus $a + b \in A_1$ (on prend $n = 1$) donc la borne supérieure est atteinte et vaut $a + b$.

On a enfin $a + \frac{b}{n} \to a$ donc on a une suite d'éléments de A_1 qui converge vers a qui est un minorant de A_1. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on en déduit que $a = \inf(A_1)$.

2) Posons $A_2 = \{\frac{\ln(n)}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. On étudie alors la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$. Cette fonction est dérivable (quotient de fonctions dérivables) et pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. On en déduit

que f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. On a de plus $f(1) = 0$ et par croissances comparées, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

D'après l'étude des variations de f, on en déduit que A_2 admet comme maximum soit $f(2) = \frac{\ln(2)}{2}$, soit $f(3) = \frac{\ln(3)}{3}$. On remarque que $f(2) = f(4)$ (car $\ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$) et d'après l'étude des variations de f, $f(3) > f(4)$. On en déduit que le maximum est $\frac{\ln(3)}{3}$.

De plus, on a A_2 minoré par 0 (car la fonction f est positive sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{N}^*$) et puisque $f(1) = 0$, on a $0 \in A_2$. On en déduit que A_2 admet 0 comme minimum.

3) Tout d'abord, on a $\lim_{n \to +\infty} ne^n = +\infty$ donc cet ensemble n'a pas de borne supérieure. Pour la borne inférieure, on étudie $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable et pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x(x+1)$. La fonction est donc décroissante puis croissante avec un minimum en $n = -1$. Puisque -1 est entier, on en déduit que l'ensemble étudié a un minimum qui est $-e^{-1}$.

4) Notons A_4 l'ensemble étudié. Pour les entiers pairs, on remarque que $\frac{(-1)^n}{n}$ est positif et inférieur à $\frac{1}{n}$. Pour les entiers impairs, on a $\frac{(-1)^n}{n}$ négatif et supérieur à $-\frac{1}{n}$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que A_4 admet comme minimum $\frac{(-1)^1}{1} = -1$ et admet comme maximum $\frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$ (ce sont bien des minorants/majorants et ils appartiennent à l'ensemble).

5) Notons $A_5 = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$. On a A_3 qui est minoré par -1 et majoré par 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|1 - \frac{1}{n}\right| \leq 1$, ce qui prouve bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 \leq (-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \leq 1.$$

A_5 étant borné et non vide, il admet donc une borne inférieure et une borne supérieure. De plus, si on considère la suite des termes pairs $u_n = 1 - \frac{1}{2n}$ qui est une suite d'éléments de A_5, on a $u_n \to 1$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on en déduit que $\sup(A_5) = 1$. De même, en considérant les termes impairs, en posant $v_n = -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$, on a $v_n \to -1$. On en déduit, toujours par caractérisation séquentielle de la borne supérieure que $\inf(A_5) = -1$.

6) Posons $A_6 = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, on en déduit que tous les éléments de A_6 sont compris entre -1 et 1. A_6 est donc borné et non vide. Il admet donc une borne inférieure et une borne supérieure.

Si on considère la suite d'éléments de A_6, $u_n = \frac{1}{n} - 1$, on a que cette suite tend vers -1 qui est un minorant de A_6. On en déduit que $\inf(A_6) = -1$. Si on considère la suite $v_p = 1 - \frac{1}{p}$ qui est aussi une suite d'éléments de A_6, on montre cette fois que $\sup(A_6) = 1$.

Exercice 7. Soit I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ non disjoints. Montrons que $I_1 \cup I_2$ est intervalle de $\mathbb{R}$ en montrant qu'il s'agit d'un ensemble convexe. Pour cela fixons $a, b \in I_1 \cup I_2$ avec $a \leq b$:

- Si $a, b \in I_1$ alors puisque I_1 est convexe (c'est un intervalle), on a alors $[a, b] \subset I_1$ et en particulier $[a, b] \subset I_1 \cup I_2$.
- On raisonne de même si $a, b \in I_2$.

- Si on a $a \in I_1$ et $b \in I_2$, alors puisque I_1 et I_2 sont non disjoints, il existe $c \in I_1 \cap I_2$. On a alors $[a, c] \subset I_1$ (car I_1 est convexe) et $[c, b] \subset I_2$ (car I_2 est convexe). On en déduit par réunion que $[a, b] \subset I_1 \cup I_2$.

Dans tous les cas, on a $[a, b] \subset I_1 \cup I_2$, ce qui entraine que $I_1 \cup I_2$ est convexe. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

On procède de même pour l'intersection. $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ et si $a, b \in I_1 \cap I_2$, alors par convexité de I_1, on a $[a, b] \subset I_1$ et $[a, b] \subset I_2$ d'où $[a, b] \subset I_1 \cap I_2$. On a donc $I_1 \cap I_2$ qui est convexe et qui est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

1) Supposons par l'absurde que $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ soit rationnel. Alors, a^2 est aussi rationnel. On en déduit que $2 + 2\sqrt{6} + 3$ est rationnel, ce qui implique que $\sqrt{6}$ est rationnel. Ceci est absurde. On peut utiliser la même preuve que pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons $\sqrt{6} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. On a alors $6q^2 = p^2$. On en déduit que $6|p^2$. On a donc $2|p^2$ et $3|p^2$. Ceci implique, puisque 2 et 3 sont premiers que $2|p$ et que $3|p$. On a donc, puisque 2 et 3 sont premiers entre eux que $6|p$. On a donc $36|p^2$. On en déduit alors en réinjectant dans l'expression $6q^2 = p^2$ que 6 divise q^2. On montre alors de même que 6 divise q ce qui est absurde car on avait supposé p et q premier entre eux. On a donc $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

On a donc montré par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

2) Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ soit rationnel. On a alors que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (b-\sqrt{6})^2$ avec $b \in \mathbb{Q}$. On a donc $2 + 2\sqrt{6} + 3 = b^2 - 2b\sqrt{6} + 6$, c'est à dire que $2(1 + b)\sqrt{6} = 1 + b^2$. Or, on a $b \neq -1$ (sinon on obtient $0 = 1 + b^2$: absurde). On a donc $\sqrt{6} = \dfrac{1 + b^2}{2(1 + b)}$, ce qui implique que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$: c'est absurde !

On a donc montré par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ est irrationnel.

Exercice 9. Soit $\lambda \in [0, 1[$ et $n \geq 1$. Posons $f(n) = \dfrac{n-1}{n}$. On veut montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) \leq \lambda < f(n + 1)$. On va ici étudier la fonction f :

On a pour $x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$. f est continue sur $[1, +\infty[$, dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante. On a $f(1) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On en déduit que f est bijective de $[1, +\infty[$ dans $[0, 1[$ d'aprÃ¨s le théorème de la bijection continue. On a alors f^{-1} strictement croissante (car f est strictement croissante). On a donc :

$$\begin{aligned} f(n) \leq \lambda < f(n+1) &\Leftrightarrow n \leq f^{-1}(\lambda) < n+1 \\ &\Leftrightarrow n = \lfloor f^{-1}(\lambda) \rfloor . \end{aligned}$$

Puisque $f^{-1}(\lambda) \in [1, +\infty[$, on a alors l'existence et l'unicité du $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété voulue.

Pour avoir l'expression de n, il suffit de trouver la fonction réciproque de f. On a pour $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = y \\ &\Leftrightarrow 1 - y = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y} . \end{aligned}$$

On en déduit que $n = \lfloor \frac{1}{1-\lambda} \rfloor$.

Exercice 10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Commençons par le cas où $x, y \in [0, 1[$. On doit donc montrer dans ce cas que $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

On va alors étudier quatre cas en fonction de si x et y sont plus petits ou plus grands que 1/2.

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ alors toutes les parties entières valent 0 donc l'inégalité est vraie.

- Supposons $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (le cas symétrique se traite de même). On a alors $\frac{1}{2} \leq x + y < \frac{3}{2}$ donc $\lfloor x + y \rfloor$ vaut 0 ou 1. On a de plus $\lfloor 2x \rfloor = 0$ et $\lfloor 2y \rfloor = 1$ donc l'inégalité est vraie.

- Supposons $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. On a alors $x + y \in [1, 2[$ donc $\lfloor x + y \rfloor = 1$ et $\lfloor 2x \rfloor = 1$ et $\lfloor 2y \rfloor = 1$ donc l'inégalité est vraie (on a $1 \leq 2$).

Pour le cas général où $x, y \in \mathbb{R}$, on décompose $x = n + x_0$ et $y = m + y_0$ où $n, m \in \mathbb{Z}$ (ce sont les parties entières de x et de y) et $x_0, y_0 \in [0, 1[$. On a alors en utilisant la première partie :

$$\begin{array}{rcll} \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor & = & n + \lfloor n + m + x_0 + y_0 \rfloor + m & \\ & = & n + (n + m) + \lfloor x_0 + y_0 \rfloor + m & \text{car } n + m \in \mathbb{Z} \\ & \leq & 2n + 2m + \lfloor 2x_0 \rfloor + \lfloor 2y_0 \rfloor & \\ & \leq & \lfloor 2(n + x_0) \rfloor + \lfloor 2(m + y_0) \rfloor & \text{car } 2n \text{ et } 2m \text{ sont dans } \mathbb{Z} \\ & \leq & \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor. & \end{array}$$

L'inégalité demandée est donc vraie.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On commence par étudier le cas où $x \in [0, 1[$. On a alors $0 \leq nx < n$ donc $0 \leq \lfloor nx \rfloor \leq n - 1$. En divisant par $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors :

$$0 \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < 1.$$

On en déduit donc que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$, ce qui montre la formule voulue car on a supposé $x \in [0, 1[$ donc $\lfloor x \rfloor = 0$.

Supposons à présent $x \in \mathbb{R}$. On peut alors toujours écrire $x = k + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [0, 1[$ (k est la partie entière de x). On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor & = & \left\lfloor \frac{\lfloor nk + ny \rfloor}{n} \right\rfloor & \\ & = & \left\lfloor \frac{nk + \lfloor ny \rfloor}{n} \right\rfloor & (\text{car } nk \in \mathbb{Z}) \\ & = & \left\lfloor k + \frac{\lfloor ny \rfloor}{n} \right\rfloor & \\ & = & k + \left\lfloor \frac{\lfloor ny \rfloor}{n} \right\rfloor & (\text{car } k \in \mathbb{Z}) \\ & = & k. & \end{array}$$

La dernière égalité est vraie d'après l'étude précédente (puisque $y \in [0, 1[$). Puisque $k = \lfloor x \rfloor$, on a bien montré l'égalité voulue.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ forme une partition de $[0,1[$ et que $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$, on en déduit qu'il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x = \lfloor x \rfloor + \frac{k_0}{n} + \alpha$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$.

Essayons alors de déterminer $\lfloor \left(x + \frac{k}{n}\right) \rfloor$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Cette partie entière est soit égale à $\lfloor x \rfloor$, soit égale à $\lfloor x \rfloor + 1$, selon les valeurs que prend k. En effet, on a toujours l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + 2$.

Supposons que $k \in [\![0, n - k_0 - 1]\!]$, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} x + \frac{k}{n} & = & \lfloor x \rfloor + \frac{k_0 + k}{n} + \alpha \\ & \leq & \lfloor x \rfloor + \frac{n-1}{n} + \alpha \\ & \leq & \lfloor x \rfloor + 1 + \alpha - \frac{1}{n} \\ & < & \lfloor x \rfloor + 1. \end{array}$$

On en déduit alors que $\lfloor \left(x + \frac{k}{n}\right) \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Supposons à présent que $k \in [\![n - k_0, n-1]\!]$, alors, on a :

$$\begin{array}{rcl} x + \frac{k}{n} & = & \lfloor x \rfloor + \frac{k_0 + k}{n} + \alpha \\ & \geq & \lfloor x \rfloor + 1 + \alpha \\ & \geq & \lfloor x \rfloor + 1. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor \left(x + \frac{k}{n}\right) \rfloor & = & \sum_{k=0}^{n-k_0-1} \lfloor \left(x + \frac{k}{n}\right) \rfloor + \sum_{k=n-k_0}^{n-1} \lfloor \left(x + \frac{k}{n}\right) \rfloor \\ & = & \sum_{k=0}^{n-k_0-1} \lfloor x \rfloor + \sum_{k=n-k_0}^{n-1} (\lfloor x \rfloor + 1) \\ & = & (n - k_0 - 1 + 1)\lfloor x \rfloor + (n - 1 - (n - k_0) + 1)(\lfloor x \rfloor + 1) \\ & = & (n - k_0)\lfloor x \rfloor + k_0(\lfloor x \rfloor + 1) \\ & = & n\lfloor x \rfloor + k_0. \end{array}$$

De plus, on a :

$$\begin{array}{rcl} \lfloor nx \rfloor & = & \lfloor (n\lfloor x \rfloor + k_0 + n\alpha) \rfloor \\ & = & n\lfloor x \rfloor + k_0. \end{array}$$

La dernière égalité étant valable puisque $0 \leq n\alpha < 1$. On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor \left(x + \frac{k}{n}\right) \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) D'après la formule du binôme, on a $(2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k 2^{n-k}$. On peut alors séparer cette

somme entre les indices pairs et impairs. On a alors que :

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n &= \sum_{j=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2j} 3^j 2^{n-2j} + \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} (\sqrt{3})^{2p+1} 2^{n-(2p+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2j} 3^j 2^{n-2j} + \sqrt{3} \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} 3^p 2^{n-(2p+1)}.\end{aligned}$$

Puisque les sommes considérées sont entières, on a alors bien l'écriture $(2+\sqrt{3})^n = p_n + \sqrt{3}q_n$ avec p_n et q_n entier en posant :

$$p_n = \sum_{j=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2j} 3^j 2^{n-2j} \text{ et } q_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} 3^p 2^{n-(2p+1)}.$$

Avec la même écriture, on remarque que l'on a également $(2-\sqrt{3})^n = p_n - \sqrt{3}q_n$. En effet, si on réutilise le binome de Newton, en séparant les termes pairs et impairs, on fait apparaître exactement les mêmes termes que dans la décomposition de $(2+\sqrt{3})^n$, mais avec un signe « $-$ » devant les termes en $\sqrt{3}$. On a alors $(2+\sqrt{3})^n \cdot (2-\sqrt{3})^n = (p_n+\sqrt{3}q_n)\cdot(p_n-\sqrt{3}q_n)$, ce qui implique :

$$((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^n = p_n^2 - 3q_n^2,$$

c'est à dire que $1 = p_n^2 - 3q_n^2$. On a donc bien l'égalité voulue.

2) On a alors que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2p_n$. Ceci implique que $(2+\sqrt{3})^n = 2p_n - (2-\sqrt{3})^n$. Or, on a $0 < 2-\sqrt{3} < 1$. On en déduit que $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$, ce qui implique :

$$E((2+\sqrt{3})^n) = 2p_n - 1.$$

Ceci implique que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est impair.

Exercice 14. On a deux moyens de montrer ce résultat. On peut essayer de se ramener à des égalités pour simplifier les parties entières en séparant la somme en 3, selon que l'indice de sommation soit de la forme $3j$, $3j+1$ ou $3j+2$ avec j entier. On peut aussi essayer de montrer ce résultat par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{2k}{3}\right) = E\left(\frac{n^2}{3}\right)$. »

On note ici $E(x) = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On va alors montrer $\mathcal{P}(n+1)$ en effectuant une disjonction de cas selon le reste modulo 3 de n.

  — Si $n \equiv 0$ [3]. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3j$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} E\left(\frac{2k}{3}\right) &= \sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{2k}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) \\ &= E\left(\frac{n^2}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= E\left(3j^2\right) + E\left(2j+\frac{1}{3}\right) \\ &= 3j^2 + 2j.\end{aligned}$$

  Or, on a également que :

$$\begin{aligned}E\left(\frac{(n+1)^2}{3}\right) &= E\left(\frac{(3j+1)^2}{3}\right) \\ &= E\left(3j^2+2j+\frac{1}{3}\right) \\ &= 3j^2+2j.\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité voulue.

— Supposons à présent que $n \equiv 1$ [3]. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3j+1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} E\left(\frac{2k}{3}\right) &= \sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{2k}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) \\
&= E\left(\frac{n^2}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= E\left(3j^2+2j+\frac{1}{3}\right) + E\left(2j+1+\frac{1}{3}\right) \\
&= 3j^2+4j+1.
\end{aligned}$$

Or, on a également que :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{(n+1)^2}{3}\right) &= E\left(\frac{(3j+2)^2}{3}\right) \\
&= E\left(3j^2+4j+1+\frac{1}{3}\right) \\
&= 3j^2+4j+1.
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité voulue.

— Supposons à présent que $n \equiv 2$ [3]. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3j+2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} E\left(\frac{2k}{3}\right) &= \sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{2k}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) \\
&= E\left(\frac{n^2}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= E\left(3j^2+4j+1+\frac{1}{3}\right) + E\left(2(j+1)\right) \\
&= 3j^2+6j+3.
\end{aligned}$$

Or, on a également que :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{(n+1)^2}{3}\right) &= E\left(3(j+1)^2\right) \\
&= 3j^2+6j+3.
\end{aligned}$$

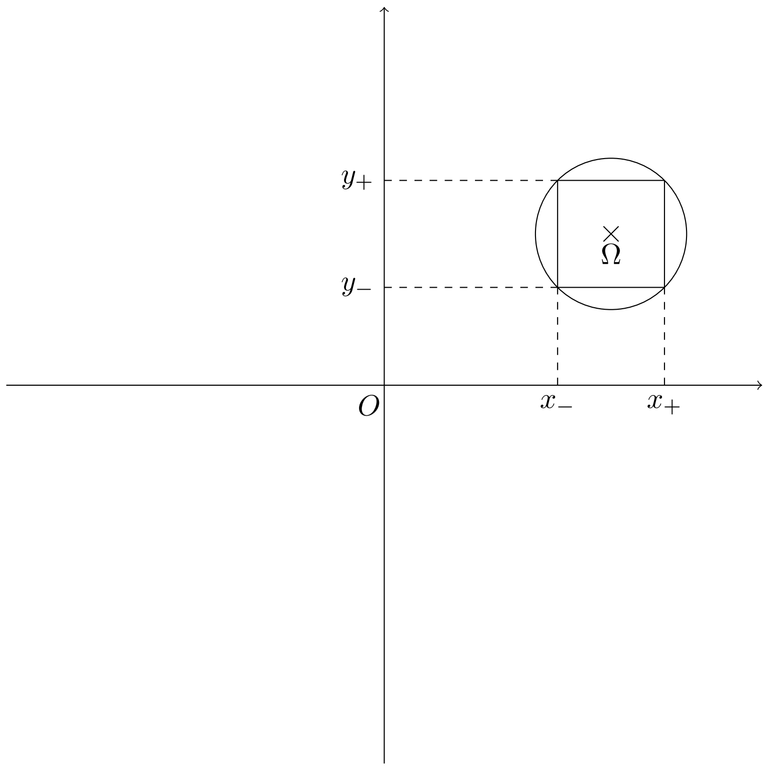
On a donc bien l'égalité voulue.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. C'est ce que l'on voulait montrer.

Exercice 15. Soit D un disque ouvert du plan. Notons Ω son centre et $r > 0$ son rayon. On a alors $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ (x-x_\omega)^2 + (y-y_\omega)^2 < r^2 \right\}$.

L'idée va être ici d'utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. L'idée de la preuve tient dans le dessin suivant :



En effet, on peut montrer que dans le disque considéré, on peut toujours inscrire un carré dedans (on considère ici le carré centré en Ω dont les diagonales sont de longueur le diamètre du cercle (donc ici de longueur $2r$)). On peut déterminer explicitement les coordonnées du bord du carré (à l'aide du théorème de Pythagore, on peut par exemple montrer que le coin en haut à droite du carré à pour coordonnées $\left(x_\omega + \frac{r}{\sqrt{2}}, y_\omega + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ et on peut déterminer les autres coordonnées de la même manière. Notons (x_+, y_+) les coordonnées du point en haut à droite du carré et (x_-, y_-) les coordonnées du point en bas à gauche.

On sait à présent que dans tout intervalle de $\mathbb{R}$, il existe un rationnel (puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). On en déduit qu'il existe un rationnel q_1 strictement compris entre x_- et x_+. De même, il existe $q_2 \in \mathbb{Q}$ strictement compris entre y_- et y_+. On en déduit alors que le point (q_1, q_2) est rationnel et est dans le disque considéré. On a bien montré le résultat voulu.

Exercice 16. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenant un ensemble dense B. Fixons x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Puisque B est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $b \in B$ tel que $b \in [x_1, x_2]$. Puisque $B \subset A$, on a donc $b \in A$, ce qui entraine qu'il existe un élément de A entre x_1 et x_2. On en déduit que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Notons $A = \{x^3, x \in \mathbb{Q}\}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue et elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$). Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} (qui est en fait la fonction $x \mapsto x^{1/3}$, que l'on a définie sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongée par 0 en 0 et qui est $x \mapsto -|x|^{1/3}$ pour $x < 0$). Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = x$ et tels que $f(b) = y$. Puisque f est strictement croissante et que $f(a) < f(b)$, on a alors que $a < b$.

Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $a < p < b$. On en déduit que $a^3 < p^3 < b^3$, c'est à dire que $x < p^3 < y$. Or, puisque $p \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $p^3 \in A$, ce qui implique que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18. m

On utilise la caractérisation séquentielle de la densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque A est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$. Puisque B est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. On en déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = x$. On a donc construit une suite de $A+B$ qui tend vers x pour tout x dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve la densité de $A+B$.

On procède de même pour AB en gardant la même suite (a_n) mais en prenant cette fois $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = x$, ce qui prouve, x étant quelconque dans $\mathbb{R}$, que AB est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1) Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $f(n) = nf(1)$ ».

- La propriété est vraie au rang 0. En effet, on a $f(0+0) = 2f(0)$, ce qui entraine $f(0) = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors, en utilisant la relation vérifiée par f et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + f(1) \\ &= nf(1) + f(1) \\ &= (n+1)f(1). \end{aligned}$$

  On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout n entier.

2) La propriété demandée est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ d'après la question 1. Soit à présent $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a alors $-n \in \mathbb{N}$ et, d'après la relation vérifiée par f, on a $f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$. Or, $f(0) = 0$. On en déduit que :

$$0 = f(n) + f(-n),$$

ce qui entraine que $f(n) = -f(-n)$. Or, d'après la question 1, puisque $-n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = (-n)f(1)$. On en déduit finalement que $f(n) = nf(1)$.

3) Soit $q \in \mathbb{Q}$. On a alors $q = \dfrac{n}{m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(mq) &= f(n) \\ &= nf(1). \end{aligned}$$

Or, on peut montrer par récurrence, de la même manière qu'à la question 1 que $f(mq) = mf(q)$. On en déduit finalement que $f(q) = \dfrac{n}{m} f(1)$, ce qui entraine $f(q) = qf(1)$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous n'avons pour l'instant pas encore utilisé la croissance de f. Nous allons nous en servir maintenant ! Nous avons démontré que $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x$ quand n tend vers l'infini. D'après les inégalités usuelles sur les parties entières, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(nx-1)}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

On en déduit que $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$. Posons donc $q_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et $p_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$. Puisque f est croissante, on a alors :

$$f(p_n) \leq f(x) \leq f(q_n).$$

Or, d'après la question 3, on a donc $p_n f(1) \leq f(x) \leq q_n f(1)$. Puisque $p_n \to x$ et $q_n \to x$, on en déduit en passant à la limite dans les inégalités larges que $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$. Ceci entraine que $f(x) = xf(1)$ ce qui termine la preuve.

Exercice 20. Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang. On peut donc écrire $x - \lfloor x \rfloor$ sous la forme $y = 0.a_1a_2 \dots a_pb_1b_2 \dots b_nb_1b_2 \dots b_nb_1b_2 \dots b_nb_1 \dots$ avec les a_i et les b_i dans $[\![0, 9]\!]$. Montrer que x est rationnel revient à montrer que ce nombre est rationnel. Notons alors $z = 0.b_1b_2 \dots b_nb_1b_2 \dots b_nb_1 \dots$. On remarque alors que :

$$10^py - \lfloor 10^py \rfloor = z.$$

Autrement dit, montrer que z est rationnel suffit pour montrer que y est rationnel (puisque y peut s'écrire comme z plus un entier divisé par 10^p). Or, on remarque que z vérifie la relation suivante (par périodicité de son développement) :

$$10^nz - \lfloor 10^nz \rfloor = z.$$

On en déduit donc que $(10^n - 1)z$ est entier, ce qui entraine z rationnel, ce qui était le résultat voulu.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons x rationnel. On a donc x sous la forme $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On peut alors effectuer la division euclidienne de p par q pour écrire :

$$p = aq + b$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in [\![0, q-1]\!]$. On a donc $x = a + \dfrac{b}{q}$. Pour obtenir les décimales de x, il faut donc trouver celles de $\dfrac{b}{q}$. Or, si on « pose » la division (comme vous le faisiez il y a une dizaine d'années), on remarque la chose suivante :

- Pour déterminer les décimales, on commence par multiplier b par des puissances de 10 jusqu'à obtenir $10^kb \geq q$. On effectue alors la division euclidienne de 10^kb par q pour obtenir $10^kb = a_1q + b_1$ avec $b_1 \in [\![0, q-1]\!]$.
- Les « premières » décimales de $\dfrac{b}{q}$ sont donc données par $\dfrac{a_1}{10^k}$. Pour les suivantes, il faut alors recommencer le processus avec $\dfrac{b_1}{q}$.
- Pour cela, on multiplie encore b_1 par des puissances de 10 jusqu'à avoir $10^{k_1}b_1 \geq q$, on effectue la division euclidienne pour obtenir $10^{k_1}b_1 = a_2q + b_2$ avec $b_2 \in [\![0, q-1]\!]$, les décimales suivantes étant données par $\dfrac{a_2}{10^{k_1}}$ et il faut encore recommencer le procédé avec $\dfrac{b_2}{q}$.
- L'argument clef réside alors dans le fait que la suite des $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (puisque ce sont des valeurs comprises entre 0 et $q - 1$. On en déduit qu'on finira donc par retomber sur un reste déjà obtenu auparavant. Puisque la suite du calcul des décimales est ensuite entièrement déterminée par la valeur initiale de b, on recommencera les mêmes calculs, on obtiendra les mêmes restes, etc. Ceci entraine que le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 21. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application croissante. Posons $A = \{x \in [0, 1] \ / \ f(x) \geq x\}$. Commençons par montrer que A admet une borne supérieure.

On a $f(0) \geq 0$ (car f est à valeurs dans $[0, 1]$). On en déduit que A est non vide. De plus, A est majoré par 1. On déduit donc de ces deux informations que A admet une borne supérieure α et que $\alpha \leq 1$. On va alors montrer que α est un point fixe de f.

Il est important pour cet exercice de faire une figure ! Pour le premier cas, si $f(\alpha) > \alpha$, si on trace la fonction f et la droite $y = x$, on place alors le point $(\alpha, f(\alpha))$ strictement au-dessus de cette droite. On remarque alors que si on prend un point un peu plus grand que α, puisque f est croissante, on construira un élément de A strictement plus grand que α : absurde ! De même, si $f(\alpha) < \alpha$, alors, on place le point $((\alpha, f(\alpha))$ strictement en dessous de la droite $y = x$. On voit alors que si on prend un point plus petit que α (mais avant la première bissectrice), alors ce point sera aussi un majorant de A ce qui sera absurde ! La preuve suivante traduit ces deux remarques.

- Supposons par l'absurde que $f(\alpha) > \alpha$. Posons $y = f(\alpha)$. Remarquons que $y > \alpha$ par hypothèse et que $y \leq 1$ (car f est à valeurs dans $[0, 1]$). On a donc le droit de considérer $f(y)$.

  Puisque f est croissante, on a donc $f(y) \geq f(\alpha)$, c'est à dire $f(y) \geq y$. On a donc $y \in A$ et $y > \alpha$. Ceci contredit le fait que α est la borne supérieure de A.

  On a donc montré que $f(\alpha) \leq \alpha$.

- Supposons par l'absurde que $f(\alpha) < \alpha$. Posons alors $\varepsilon = \alpha - f(\alpha) > 0$. D'après la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, il existe $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a$. Autrement dit, a vérifie $f(\alpha) < a$. Or, puisque $a \in A$, on a aussi $a \leq \alpha$, ce qui implique, puisque f est croissante que $f(a) \leq f(\alpha)$. On en déduit que $f(a) < a$, ce qui implique que $a \notin A$: c'est absurde !

  On en déduit que $f(\alpha) \geq \alpha$.

- On en déduit que $f(\alpha) = \alpha$. La fonction f admet donc au moins un point fixe.