# 4. Nombres complexes

**Exercice 1.** (c) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants et déterminer leur module :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i},\ z_2 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \text{ et } z_3 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2.$$

**Exercice 2.** (m) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

1) $3z - (3-i)\bar{z} = 1-2i$.

2) $(3+4i)z - 5\bar{z} = 2i$.

**Exercice 3.** (m) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} |1+z| \leq 1 \\ |1-z| \leq 1 \end{cases}$.

**Exercice 4.** (i) A-t-on $\exists a, b \in \mathbb{C} \ / \ \forall z \in \mathbb{C},\ \bar{z} = az + b$ ?

**Exercice 5.** (m) Déterminer les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les modules de $z$, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ soient égaux.

**Exercice 6.** (m) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

**Exercice 7.** (m) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants et en déduire leur forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2}{1-i\sqrt{3}},\ z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \text{ et } z_3 = \frac{(1-i)^9}{(1+i)^7}.$$

**Exercice 8.** (m) Écrire $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ sous forme algébrique et exponentielle. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 9.** (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $z = (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$.

**Exercice 10.** (c) Calculer les puissances $n$-ièmes des nombres complexes (on fixe $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i},\ z_2 = \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)} \text{ et } z_3 = 1+j \text{ où } j = e^{2i\pi/3}.$$

**Exercice 11.** (m) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Mettre sous forme exponentielle les complexes :

$$z_1 = e^{e^{i\theta}},\ z_2 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} \text{ et } z_3 = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

**Exercice 12.** (m) Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

1) $e^z = i$.　　2) $e^z = 1+i$.　　3) $e^z + e^{-z} = 1$.

**Exercice 13.** (m) Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

**Exercice 14.** (i) Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$.

**Exercice 15.** (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+z)^n = (1-z)^n$.

**Exercice 16.** (m) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ de deux manières. En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

**Exercice 17.** (m) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$
2) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
3) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$
4) $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$

**Exercice 18.** (m) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^{2n} - 2\cos(n\theta)z^n + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

**Exercice 19.** (m) On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1) Montrer que $S$ et $T$ sont conjugués et que la partie imaginaire de $S$ est positive.
2) Calculer $S + T$ et $ST$. En déduire $S$ et $T$.

**Exercice 20.** (i) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$.

**Exercice 21.** (i) Soient $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^{k-1}} \neq 0$.

**Exercice 22.** (m) Déterminer et représenter graphiquement les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

**Exercice 23.** (m) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que :

1) $\dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.
2) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$.
3) $\left|\dfrac{z-2}{z+1}\right| = 2$.
4) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$.

**Exercice 24.** (∗) Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z$ pour que $z$, $z^2$ et $z^3$ soient trois complexes distincts. *On suppose ceci vérifié et on note $T_z$ le triangle de sommets $z$, $z^2$ et $z^3$.*

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $T_z$ soit plat. Même question avec rectangle en $z$. Même question avec équilatéral.

**Exercice 25.** (c) Déterminer l'écriture complexe des transformations ou identifier les transformations du plan complexe suivantes :

1) La rotation $r$ de centre $1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et l'homothétie $h$ de centre 1 et de rapport $\sqrt{2}$.
2) $f : z \mapsto 2z + i$ et $g : z \mapsto (1+i)z + 2 - i$.