Programme de colle, semaine 7

Intégration en entier et équations différentielles (début) :

— Tout le cours d'intégration a été fait, ainsi que l'extension aux fonctions à valeurs complexes.

— Nous avons commencé le chapitre par l'étude des équations différentielles linéaires de la forme $y' + a(t)y = b(t)$ avec $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous avons commencé par étudier l'équation homogène associée et résolue entièrement cette dernière. Nous avons ensuite montré que la connaissance d'une solution particulière nous donne l'ensemble des solutions.

— Nous avons alors vu la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière quand il n'y a pas de solutions évidentes. Nous en avons déduit que les EDL d'ordre 1 admettent toujours des solutions. Nous avons également vu le principe de superposition pour la recherche d'une solution particulière. Nous avons étudié les EDLs d'ordre 1 avec condition initiale (problème de Cauchy) et avons démontré qu'il y avait existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy (toujours pour les équations différentielles de la forme précédente).

— Nous avons également traité les EDLs d'ordre 2 à coefficients constants : le cas réel, le cas complexe, la recherche de solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $\alpha e^{\beta t}$ et l'étude de la résolution dans le cas d'un problème de Cauchy.

— N'a pas été abordé : le recollement de solutions et les changements d'inconnues/de variables.

Remarques sur le programme : Le TD sur les équations différentielles n'a pas été fait (il sera fait mercredi prochain). Merci d'interroger en priorité sur l'intégration.

Compétences :

— Utiliser un changement de variable pour simplifier un calcul d'intégrale/de primitive.
— Utiliser une intégration par partie pour simplifier un calcul d'intégrale/de primitive ou pour trouver des relations de récurrences entre différentes intégrales.
— Savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, soit avec une double intégration par partie, soit à l'aide des complexes.
— Utiliser la linéarisation (en remplaçant cos et sin par leur expression avec les formules d'Euler) pour déterminer des primitives du type $\displaystyle\int^x \cos^n(t)dt$ et $\displaystyle\int^x \sin^n(t)dt$.
— Savoir mettre en oeuvre la méthode permettant de calculer des primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{Q(x)}$ où Q est un polynôme de degré au plus 2.

Questions de cours :

1. Justifier l'existence de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ et la calculer avec le changement de variable $x = \sin(t)$.
2. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{t+1}{t^2+t+1}dt$ (en expliquant la méthode).
3. Déterminer la primitive $\int^x \frac{1}{t+i}dt$ (en séparant le calcul en partie réelle/imaginaire).
4. Énoncer le théorème donnant la forme des solutions sur un intervalle I de l'équation $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont continues sur I connaissant une solution particulière de l'équation et l'utiliser pour déterminer les solutions de $y' + ay = b$ dans le cas où $a, b \in \mathbb{C}$ sont constants. *Pour une solution particulière, on séparera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.*
5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$ en déterminer une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
6. Énoncer le théorème donnant la forme des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ dans $\mathbb{C}$ ainsi que dans $\mathbb{R}$ (pas de preuve). Expliquer sous quelle forme chercher une solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $t \mapsto \alpha e^{\beta t}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 8 : 1.3), 1.7), 4.1), 4.2) et 4.3). On donnera à chaque fois les solutions à valeurs réelles.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD7 : 9.
- 2ieme du groupe : TD7 : 10.
- 3ieme du groupe : TD7 : 11.

Prochain programme : équations différentielles.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 9 :

- Pour l'existence, bien commencer par fixer $x \in \mathbb{R}$ et justifier que la fonction sous l'intégrale est continue (par rapport à la variable t).
- Vous n'avez pas le droit d'intervertir la dérivation et l'intégrale (on pourra en discuter lundi ou vous pourrez vous référer à votre cours de 2ieme année). Il faut pour pouvoir dériver f commencer par écrire f sous la forme $f(x) = \sin(x) \times \int_0^x \dots dt + \cos(x) \int_0^x \dots dt$ en utilisant des formules de trigonométrie usuelles et en ne laissant que des fonctions qui dépendent de t sous l'intégrale.
- Il vous reste alors à justifier que toutes les fonctions apparaissant ci-dessus sont dérivables à dériver comme somme/produit de fonctions dérivables.
- Une dernière formule de trigonométrie vous permettra alors de refaire rentrer les x dans l'intégrale.

Exo 10 :

- Commencer par déterminer le domaine de définition de $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ puis déterminer pour quelles valeurs de x on a x^2 et x^3 dans le même intervalle de définition de f.
- Pour vérifier vos calculs, on trouve normalement $f'(x) = \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)}$.
- Pour les limites en 0 et en l'infini, puisqu'on ne peut pas calculer l'intégrale, il faut essayer d'encadrer le $\dfrac{1}{\ln(t)}$. Par exemple, si vous savez que cette fonction est décroissante sur $[a, b]$, alors on a $\dfrac{1}{\ln(b)} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{\ln(a)}$ et par croissance de l'intégrale, on a donc $\dfrac{b-a}{\ln(b)} \leq \int_a^b \dfrac{1}{\ln(t)} dt \leq \dfrac{b-a}{\ln(a)}$. En utilisant alors un encadrement de ce genre et les croissances comparées, vous devriez arriver à trouver les limites en 0 et en l'infini.

Exo 11 :

- Utiliser les croissances comparées pour déterminer $\lim_{x \to 0} x^n \ln(x)$ et trouver ainsi quelle valeur poser pour $f(0)$ pour avoir f prolongée en fonction continue sur $[0, 1]$.
- On pourra faire une IPP pour calculer l'intégrale mais il faudra bien se placer sur un intervalle où les fonctions sont $\mathcal{C}^1$, par exemple sur un intervalle de la forme $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$.
- Une fois ce calcul fait, il ne restera plus qu'à faire tendre ε vers 0 (en justifiant) pour obtenir le résultat voulu.