DM 14, pour le mardi 04/04/2023, non ramassé (entrainement CB)

Exercice 1. Puissances d'endomorphismes. On rappelle que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois).

On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. On admet que f est linéaire.

1) Vérifier que $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = 0$.

2) Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

3) On pose $p = f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $q = -f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Déduire de la première question que p et q sont des projecteurs vérifiant $p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $p \circ q = q \circ p = 0$

4) *Calcul des puissances de f.*
   a) Déterminer deux réels α et β tels que $f = \alpha p + \beta q$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \alpha^n p + \beta^n q$.
   c) Établir que l'on a aussi $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$.

5) On considère les suites u et v définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - v_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{array} \right.$.
   a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ en fonction de p, q, n, u_0 et v_0.
   b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 et v_0 pour que u et v soient dominées par 2^n.

PROBLÈME
Noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$.

On pose $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^n)$ et $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(f^n)$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.

Partie I. Étude de C et N

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ker(f^n) \subset \ker(f^{n+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(f^n)$.

2) Donner une raison simple pour laquelle C est un sous-espace vectoriel de E et montrer soigneusement que N est également un sous-espace vectoriel de E.

3) Montrer que C et N sont stables par f.

4) Montrer que f est injective si et seulement si $N = \{0_E\}$.

5) Montrer que f est surjective si et seulement si $C = E$.

6) *Exemples :*

a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et f la projection sur F parallèlement à G. Déterminer C et N.

b) On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP(X) \end{array} \right.$. Déterminer N. Caractériser pour un entier $n \in \mathbb{N}$ l'endomorphisme f^n et en déduire $\mathrm{Im}(f^n)$. Que vaut C ?

c) On prend $E = \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x,y,z)) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}, z\right)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et caractériser géométriquement f. En déduire C et N.

Partie II. Temps d'arrêt

On suppose dans cette partie qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^m) = \mathrm{Im}(f^{m+1})$.

7) Montrer que $\ker(f^{n+1}) = \ker(f^{n+2})$ et que $\mathrm{Im}(f^{m+1}) = \mathrm{Im}(f^{m+2})$.

8) En déduire qu'il existe des uniques s et r entiers tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} \ker(f^0) & \subsetneq & \ker(f) & \subsetneq & \ker(f^2) & \subsetneq & \dots & \subsetneq & \ker(f^s) & = & \ker(f^{s+1}) & = & \ker(f^{s+2}) & = & \dots \\ \mathrm{Im}(f^0) & \supsetneq & \mathrm{Im}(f) & \supsetneq & \mathrm{Im}(f^2) & \supsetneq & \dots & \supsetneq & \mathrm{Im}(f^r) & = & \mathrm{Im}(f^{r+1}) & = & \mathrm{Im}(f^{r+2}) & = & \dots \end{array} \right.$$

Justifier alors que $N = \ker(f^s)$ et que $C = \mathrm{Im}(f^r)$.

9) Montrer que $N \cap \mathrm{Im}(f^s) = \{0_E\}$. *On pourra utiliser* $\ker(f^{2s}) = \ker(f^s)$.

10) Montrer que $E = C + \ker(f^r)$. *On pourra utiliser* $\mathrm{Im}(f^{2r}) = \mathrm{Im}(f^r)$.

11) Montrer que C et N sont supplémentaires.

12) Montrer que $f|_C$ est un automorphisme de C.

13) Montrer que $r = s$.