29. Probabilités, corrigé

Exercice 1. (c) **Calculs d'univers.**

1) On tire les cartes successivement et avec remise. On a donc 32 possibilités à chaque tirage et l'ordre est important. On a donc $\Omega = [\![1, 32]\!]^3$. Son cardinal est 32^3.

2) Il n'y a pas de remise cette fois. On a donc $\Omega = \{(x, y, z) \in [\![1, 32]\!]^3 \ / \ x \neq y, x \neq z, y \neq z\}$. On a 32 possibilités pour le tirage de la première carte, puis 31 pour la seconde et 30 pour la dernière. On a donc $\text{Card}(\Omega) = 32 \times 31 \times 30$.

3) Cette fois ci, l'ordre des cartes n'est pas important. On a donc $\Omega = \{A \in \mathcal{P}([\![1, 32]\!]) \ / \ \text{Card}(A) = 3\}$ (donc l'ensemble des ensembles à 3 éléments inclus dans $[\![1, 32]\!]$). On a alors $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{3}$.

Exercice 2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et P une probabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ telle que $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = x$ et $P(\{\omega_2, \omega_3\}) = y$. Puisqu'une probabilité est toujours positive, on doit avoir $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$. Si on pose $P(\{\omega_1\}) = a$, $P(\{\omega_2\}) = b$ et $P(\{\omega_3\}) = c$, on doit alors avoir :

$$\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \\ a + b = x \\ b + c = y \end{cases}$$

En sommant les deux dernières égalités et en utilisant le fait que $a+b+c = 1$, on obtient $b = x+y-1$. On en déduit alors que $a = 1 - y$ et $c = 1 - x$. On en déduit que l'on doit avoir $x + y - 1 \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ et $x \in [0, 1]$. Si x et y sont dans $[0, 1]$, on remarque que la première condition revient juste à imposer $1 \leq x + y$.

Réciproquement, si x et y vérifient $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ et $1 \leq x + y$, alors en posant a, b, c comme ci-dessus, on définit une probabilité sur Ω (car elle est définie sur les évènements élémentaires et puisque $a + b + c = 1$). On vérifie qu'elle vérifie les deux conditions voulues par l'énoncé.

Exercice 3. Soit (Ω, P) un espace de probabilité. Soient A et B deux évènements. On a $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. De même, $P(A \cap B) \leq P(B)$. On en déduit que $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$.

Pour l'autre inégalité, on utilise la relation $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. On a donc $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Or, P étant une probabilité et puisque $A \cup B \subset \Omega$, on a $P(A \cup B) \leq 1$. Ceci entraine que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$. Puisqu'une probabilité est toujours positive, on en déduit que $\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B)$.

Exercice 5. On note R_1 l'évènement « la boule rouge est dans l'urne 1 ». On note B_1 l'évènement la première boule tirée est blanche et B_2 l'évènement la deuxième boule tirée est blanche. On a $(R_1, \overline{R_1})$ qui est un système complet d'évènements (avec les probabilités de ces évènements strictement positives). On a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1 \cap B_2) = P_{R_1}(B_1 \cap B_2)P(R_1) + P_{\overline{R_1}}(B_1 \cap B_2)P(\overline{R_1}).$$

On a $P(R_1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(\overline{R_1}) = 1 - \dfrac{1}{n}$. De plus, $P_{\overline{R_1}}(B_1 \cap B_2) = 1$ (car il n'y a que des boules blanches dans l'urne). Pour déterminer la dernière probabilité, on peut utiliser les probabilités composées :

$$P_{R_1}(B_1 \cap B_2) = P_{R_1 \cap B_1}(B_2) \times P_{R_1}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}.$$

On a donc $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{3n} + 1 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 9. On pose T_1 et T_2 les évènements « on choisit la pièce P_1 (respectivement P_2) » et P l'évènement « on fait pile avec la pièce ». D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_P(T_1) = \frac{P_{T_1}(P)P(T_1)}{P(P)}.$$

Puisque (T_1, T_2) forme un système complet d'évènements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(P) = P(T_1)P_{T_1}(P) + P(T_2)P_{T_2}(P) = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}.$$

On en déduit finalement que $P_P(T_1) = \dfrac{9}{17}$.

En reprenant le même raisonnement avec l'évènement P_n : « on fait n pile de suite », on obtient, en utilisant le fait que les tirages successifs sont indépendants :

$$P_{P_n}(T_1) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

On a donc $P_{P_n}(T_1) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n} \to 1$. La probabilité d'avoir choisi la pièce P_1 tend donc vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 11. On note T l'évènement « il y a un trésor » et pour $k \in [\![1, n]\!]$, C_k l'évènement « le trésor est dans le coffre k ». On cherche à déterminer l'évènement $P_{\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}}}(C_n)$. Par définition, on a :

$$P_{\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}}}(C_n) = \frac{P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \ldots \overline{C_{n-1}} \cap C_n)}{P(\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}})}.$$

$$\begin{aligned} P(\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}}) &= P_T(\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}})P(T) + P_{\overline{T}}(\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}})P(\overline{T}) \\ &= p \times \frac{1}{n} + (1-p) \times 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $P_{\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{n-1}}}(C_n) = \dfrac{p}{p + (1-p)n}$.

Exercice 12. On pose L l'évènement « rencontrer un lion » (et de même E et Z pour rencontrer un éléphant et un zèbre). On note A l'évènement « l'animal rencontré est affamé ». On a (L, E, Z) qui forme un système complet d'évènements avec $P(L) = 0.2 > 0$, $P(E) = 0.3 > 0$ et $P(Z) = 0.5 > 0$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(A) = P(L)P_L(A) + P(E)P_E(A) + P(Z)P_Z(A).$$

On a donc $P(A) = 0.2 \times 0.5 + 0.3 \times 0.2 + 0.5 \times 0.3 = 0.31$.

La question qui nous intéresse est à présent la probabilité de croiser un lion si l'animal rencontré est affamé. On veut donc calculer $P_A(L)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_A(L) = \frac{P_L(A)P(L)}{P(A)}.$$

On a calculé $P(A)$ avec la formule des probabilités totales et on connait $P(L)$ et $P_L(A)$. On a donc $P_A(L) = \dfrac{0.5 \times 0.2}{0.31} = 0.32$. On voit bien que si la probabilité de rencontrer un lion n'est que de 0.2, le fait de savoir qu'on rencontre un animal affamé augmente la probabilité qu'il s'agisse d'un lion car les lions sont plus affamés que les autres animaux (dans notre modèle en tout cas).

Exercice 13. On considère un dé équilibré à 8 faces numérotées de 1 à 8. On considère les évènements A : obtenir un nombre compris entre 1 et 4, B : obtenir un nombre pair C : obtenir 1,2,5 ou 6.

Tout d'abord, on a $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$. Pour montrer que A, B, C sont mutuellement indépendants, il faut vérifier que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \dfrac{1}{4}$ et que $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{8}$.

$A \cap B \cap C$ correspond à l'évènement « obtenir 2 » qui a donc une probabilité égale à $\dfrac{1}{8}$ (le dé est équilibré). L'évènement $A \cap B$ correspond à « obtenir 2 ou 4 » qui a bien une probabilité égale à $\dfrac{1}{4}$. L'évènement $A \cap C$ correspond à « obtenir 1 ou 2 » qui a bien une probabilité égale à $\dfrac{1}{4}$. Enfin, l'évènement $B \cap C$ correspond à « obtenir 2 ou 6 » qui a bien une probabilité égale à $\dfrac{1}{4}$. Les évènements A, B, C sont donc mutuellement indépendants.

Exercice 14. On note A l'évènement « tirer la pièce double-face parmi les trois pièces » et B_n l'évènement « faire n lancers face sur les n premiers lancers ».

D'après la formule des probabilités totales (A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements), on a $P(B_1) = P(B_1|A) \times P(A) + P(B_1|\overline{A})P(\overline{A})$. Ceci entraine que :

$$P(B_1) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

On utilise de même la formule des probabilités totales pour calculer $P(B_n)$. On a (puisque les lancers de pièce sont indépendants entre eux, les lancers de pièce suivent une loi binomiale de paramètre n et $1/2$ dans le cas des pièces non truquées) :

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|A)P(A) + P(B_n|\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}{3}. \end{aligned}$$

On désire ensuite calculer, sachant que l'on a obtenu n fois de suite « face », la probabilité d'avoir pris la pièce double-face. On veut donc calculer $P_{B_n}(A)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_{B_n}(A) = \frac{P_A(B_n)P(A)}{P(B_n)}.$$

On a $P_A(B_n) = 1$. D'après le calcul précédent, on en déduit que :

$$P_A(B_n) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+\frac{1}{2^{n-1}}}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

On remarque que cette probabilité est croissante en n et qu'elle tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Le premier rang pour lequel elle dépasse 0.95 est $n = 6$.

Exercice 15. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. La probabilité recherchée est la probabilité de $B = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$. Puisque les A_i sont mutuellement indépendants, alors les $\overline{A_i}$ aussi. On a donc :

$$P(B) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)).$$

Or, une rapide étude de fonction permet de montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $1 - x \leq e^{-x}$. En utilisant cette inégalité en $x = P(A_i)$ et en multipliant les inégalités (elles ne font intervenir que des nombres positifs), on obtient :

$$P(B) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{-P(A_i)} = e^{-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

Exercice 17. Soit $n \geq 2$. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Si $p|n$, on pose l'évènement $A_p = \{1 \leq k \leq n \ / \ p \text{ divise } k\}$.

1) A_p contient l'ensemble des multiples de p compris dans $[\![1,n]\!]$. On a donc :

$$A_p = \{kp, \ k[\![1, \lfloor n/p \rfloor\}.$$

Puisque la probabilité est unfirme, on en déduit que $P(A_p) = \dfrac{\lfloor n/p \rfloor}{n} = \dfrac{1}{p}$ (car p divise n donc $\lfloor n/p \rfloor = n/p$).

2) Supposons $p \wedge q = 1$. Les éléments de $A_p \cap A_q$ sont les entiers de $[\![1,n]\!]$ divisibles à la fois par p et q. Puisque p et q sont premiers entre eux, il s'agit exactement des multiples de $p \vee q$ (le ppcm de p et q). Ce dernier est égal à pq car p et q sont premiers entre eux. On en déduit d'après la première question que :

$$P(A_p \cap A_q) = \frac{1}{pq} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = P(A_p)P(A_q).$$

Les évènements A_p et A_q sont donc indépendants. On peut aussi le justifier en remarquant que puisque p et q divisent n et sont premiers entre eux, alors pq divise également n et on a $A_p \cap A_q = A_{pq}$.

De la même manière, si $p_1, \ldots, p_r$ sont des diviseurs de n premiers entre eux 2 à 2, alors on a $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_r} = A_{p_1 \ldots p_r}$ (et $p_1 \ldots p_r$ divise bien n car tous les p_i sont premiers entre eux deux à deux et divisent n). On peut justifier cette égalité en utilisant la décomposition en facteurs premiers d'un entier (qui est divisible par le produit $p_1 \ldots p_r$ si et seulement si il est divisble par chacun des p_i car ces derniers sont premiers entre eux deux à deux). On a donc :

$$P(A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_r}) = P(A_{p_1}) \ldots P(A_{p_r}).$$

Remarquons que ceci est vrai quelque soit le nombre sous ensembles A_j que l'on choisit donc on a bien l'indépendance mutuelle.

3) Notons $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$ les diviseurs premiers de n. Ils sont premiers entre eux deux à deux donc d'après la question précédente, les évènements $(A_{p_i})_{1 \leq i \leq r}$ sont mutuellement indépendants. De plus, les entiers de $[\![1,n]\!]$ premiers avec n (donc les éléments de B) sont exactement les entiers qui n'admettent aucun des p_i comme diviseurs (car les p_i sont des nombres premiers). On en déduit que :

$$B = \overline{A_{p_1}} \cap \ldots \overline{A_{p_r}}.$$

Les compléments des A_{p_i} sont mutuellement indépendants car les A_i le sont. Ceci entraine que :

$$P(B) = \prod_{i=1}^{r} P(A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 18. Notons D_1 le premier dé et D_2 le second. On note $P(D_1 = i) = p_i$ et $P(D_2 = j) = q_j$. Supposons par l'absurde que les dés soient de telle sorte que $D_1 + D_2$ suive une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On a donc puisque les évènements $(D_1 = 1)$ et $D_2 = 1$ sont indépendants que $P((D_1 = 1) \cap (D_2 = 1)) = p_1 q_1 = \dfrac{1}{11}$. De même, on a $P(D_1 + D_2 = 3) = P(((D_1 = 1) \cap (D_2 = 2)) \cup ((D_1 = 2) \cap (D_2 = 1)))$. Les évènements étant disjoints, on peut écrire ceci comme une somme de probabilité et en utilisant à nouveau l'indépendance, on a $p_1q_2 + p_2q_1 = \dfrac{1}{11}$. Pour obtenir une absurdité, on va regarder les probabilités extrèmes (faire 2 et 12) et la probabilité qui est, si les dés sont équilibrés, la plus probable (faire 7). On a :

$$\begin{cases} p_1q_1 = 1/11 \\ p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1 = 1/11 \\ p_6q_6 = 1/11 \end{cases}$$

En notant $x = q_1/q_6$ (bien défini car $q_6 > 0$ et strictement positif), on a alors en remplaçant p_1 et p_6 dans la seconde égalité :

$$\frac{1}{11x} + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + \frac{x}{11} = \frac{1}{11}.$$

Or, la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est toujours supérieure ou égale à 2 sur $\mathbb{R}_+^*$ (une étude de fonction rapide montre qu'elle atteint son minimum en $x = 1$). On obtient alors $\dfrac{1}{11} \geq \dfrac{2}{11} + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2$ ce qui est absurde car les autres termes sont des termes positifs. Il n'est donc pas possible de piper deux dés indépendants de manière à ce que la somme des deux résultats soit uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.