1. Logique et Calculs

Exercice 1. (m) Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations lorsque f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1) f n'est pas la fonction nulle.
2) f s'annule au moins une fois.
3) f n'est pas constante.
4) f est constante à partir d'un certain réel.
5) f n'est pas de signe constant.
6) f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 2. (m) Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse, faire une preuve ou donner un contre exemple le cas échéant et donner sa négation.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ /\ x + y > 0.$
3) $\exists x \in \mathbb{R} \ /\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
4) $\exists x \in \mathbb{R} \ /\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x.$

Exercice 3. (m) Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Écrire les négations des propriétés suivantes.

1) $\exists M \in \mathbb{R} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$
2) $\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M.$
3) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - 3| \leq \varepsilon.$
4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ /\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

Exercice 4. (c) A-t-on $x = \sqrt{x^2 + x - 1} \Leftrightarrow x = 1$? Si non, une des implications est-elle vraie ?

Exercice 5. (m) **Analyse/Synthèse.** Pour $a \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\sqrt{x - a} = x.$$

1) En supposant que $x \in \mathbb{R}$ est solution, déterminer des inégalités portant sur a devant être réalisées.
2) En déduire alors pour quelles valeurs de a l'équation étudiée a au moins une solution réelle.
3) Déterminer en fonction des valeurs de a le nombre exact de solutions réelles de l'équation.

Exercice 6. (m) On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$ est la valeur absolue de x. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *bornée* sur $\mathbb{R}$ si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M.$$

1) Dessiner l'allure d'une fonction bornée en faisant apparaitre M sur votre dessin. Que pensez-vous d'une fonction qui vérifierait $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R} \ /\ |f(x)| \leq M$?
2) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists a, b \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \leq f(x) \leq b$.
3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists a, b \in \mathbb{R} \ /\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ a \leq f(x) - f(y) \leq b$.

Exercice 7. (m) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (xy > 0 \text{ et } x + y > 0) \Rightarrow (x > 0 \text{ et } y > 0)$. Déterminer si la réciproque est vraie ou fausse.

Exercice 8. (m) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \Rightarrow (x > 1 \text{ ou } y > 1)$. Déterminer si la réciproque est vraie ou fausse.

Exercice 9. (m) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geq x$. Montrer que $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

Exercice 10. (m) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 11. (m) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \exists n \in \mathbb{N}^* \ /\ nx \in \mathbb{Z})$.

Exercice 12. (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que :

$$(\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ u_N \geq A) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ u_N > A).$$

Exercice 13. (m) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

Exercice 14. (m) On cherche par analyse/synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xf(x) + y^2 + f(xy) = (f(x+y))^2 - f(x)f(y).$$

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété énoncée.
   a) En choisissant des valeurs pertinentes de x et y, déterminer $f(0)$.
   b) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ (f(y))^2 = y^2$. Que peut-on en déduire sur f ?
   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
2) Conclure.

Exercice 15. (i) Montrons que n points quelconques du plan sont toujours alignés. C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons que ce soit vrai à l'ordre n et considérons alors $n+1$ points $A_1, \dots, A_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1, \dots, A_n$ sont alignés sur une certaine droite $\mathcal{D}$. De même, les points $A_2, \dots, A_{n+1}$ sont alignés sur une certaine droite $\mathcal{D}'$. Mais alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent toutes les deux les points A_2 et A_n donc sont égales et tous les points $A_1, \dots, A_{n+1}$ sont alignés. L'hypothèse est donc vraie au rang $n+1$. Que pensez-vous de cette preuve ?

Exercice 16. (m) Montrer que $\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 17. (i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2n+1} \leq n + 1$.

Exercice 18. (∗) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. Déterminer un réel différent de ± 1 vérifiant cette propriété.

Exercice 19. (m) Montrer que tout entier $n \geq 8$ s'écrit sous la forme $3a + 5b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. (m) **et** (i) On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est à dire qu'il ne peut pas s'écrire comme un quotient d'entiers.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. *On rappelle que par convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.*

2) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniques.

3) Montrer que pour ces mêmes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n - 1} + \sqrt{p_n}$.

Exercice 21. (m) Démontrer que :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$. 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) + 2 \leq 2\sqrt{x}$. 3) $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

Exercice 22. (c) Les expressions suivantes (où x, y sont des nombres réels) ne sont pas tout à fait synonymes. Préciser dans chacun des cas les valeurs des variables pour lesquelles elles ont un sens et celles pour lesquelles on peut sans problème remplacer l'une par l'autre.

1) $\sqrt{xy}$ et $\sqrt{x}\sqrt{y}$. 2) $\ln(xy)$ et $\ln(x) + \ln(y)$. 3) $\dfrac{x^2}{x}$ et x.

4) x et $\sqrt{x^2}$. 5) x et $(\sqrt{x})^2$. 6) $\dfrac{xy}{x+y}$ et $\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

Exercice 23. (m) Factoriser/simplifier les expressions suivantes faisant intervenir des réels. *On précisera pour quelles valeurs des variables les expressions sont bien définies.*

1) a) $x^2 + 18x + 81$. b) $x^4 + 4x^3 - 12x^2$. c) $(x^2+1)^2 - 4x^2$.

2) a) $xy + \alpha x + \beta y + \alpha\beta$. b) $\dfrac{2}{(x+1)^2(x+3)} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ c) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

3) a) $\dfrac{\frac{x^2-x-6}{2xy}}{\frac{x^2-9}{2x^2y}}$. b) $\dfrac{1}{2x^2-2x+1} - \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$. c) $\dfrac{x^2 + x^{-2} - 2}{x^2 - x^{-2}}$.

Exercice 24. (c) Soient $\lambda, x, y, m_1, M_1, m_2, M_2 \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $m_1 \leq x \leq M_1$ et $m_2 \leq y \leq M_2$.

1) Encadrer alors (par des valeurs indépendantes de x et y) les quantités λx, $x + y$, $x - y$ et $|x|$.

2) On suppose à présent $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$. Encadrer alors de même $\ln(x)$, $\dfrac{1}{y}$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

Exercice 25. (c) **et** (i) Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$. Démontrer ou donner un contre exemple aux relations suivantes :

1) $x_1^2 \leq y_1^2$. 2) $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. 3) $x_1 - x_2 \leq y_1 - y_2$.

4) $x_1 x_2 \leq y_1 y_2$. 5) $\dfrac{x_1}{x_2} \leq \dfrac{y_1}{y_2}$. 6) $x_1 e^{x_2} \leq y_1 e^{y_2}$.

Reprendre les questions précédentes en supposant x_1, x_2, y_1, y_2 dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 26. (m) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations :

1) $|x-1| + x^2 = 0$. 2) $||x+1| + 2| = 4$.

3) $x^2 - |x| - 2 = 0$. 4) $\ln(x) = x - 1$.

Exercice 27. (m) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $x^2 + 5x + 5 \leq 4x + 11$ 2) $\dfrac{12}{x+2} \leq x + 3$.

3) $|x^2 - 2| \leq 5$. 4) $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \leq 2$.

Exercice 28. (i) Dans une île isolée vivent cent suédois. Ils ne communiquent jamais entre eux de quelque manière que ce soit et ne se voient que le jour pour manger tous ensemble. Si un suédois apprend qu'il n'a pas les yeux bleus, il doit quitter l'ile à minuit. Les suédois ne possèdent pas de miroir. Tout allait bien jusqu'à ce qu'un jour, un touriste arrive sur leur île et annonce au déjeuner général : « Il y a au moins un d'entre vous qui n'a pas les yeux bleus. » Le touriste repart ensuite chez lui. 99 jours plus tard, tous les suédois quittent l'ile. Expliquer.