Programme de colle, semaine 16

Convexité + début des polynômes :

— Nous avons vu la définition d'une fonction convexe (resp. d'une fonction concave) et vu que son graphe était toujours sous ses cordes (resp. au-dessus). Nous avons vu l'inégalité de Jensen (inégalité de convexité à n termes).

— Nous avons ensuite vu qu'une fonction convexe était croissante si et seulement si ses pentes étaient croissantes. Nous avons également vu la position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes et illustrés par des exemples.

— Nous avons terminé le chapitre par le fait qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert était continue puis les caractérisations de la convexité quand une fonction est dérivable/deux fois dérivables. Nous avons terminé le chapitre par la position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes.

— Nous avons étudié les polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) cette semaine. Nous avons commencé par la construction, les différentes lois (addition, multiplication, composition), ainsi que la structure de $\mathbb{K}[X]$ (anneau commutatif). Nous avons défini le degré et vu les propriétés du degré (du produit de deux polynômes, que peut-on dire sur la somme, sur la composée) et montré qu'un produit de polynômes non nul était non nul.

— Nous avons étudié la divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, démontré que si $B \neq 0$ et $A|B$, alors $\deg(A) \leq \deg(B)$ et la définition de polynômes associés. Nous avons démontré l'existence et l'unicité du couple (Q, R) dans la division euclidienne et vu des exemples de calculs et montré que B divise A ssi le reste de la division euclidienne de A par B était nul.

— Nous avons ensuite défini une racine d'un polynôme et vu la multiplicité d'une racine. Nous avons en particulier montré qu'un polynôme de degré n admettait au plus n racines distinctes et admis qu'ils admettaient au plus n racines comptées avec multiplicité. Nous avons vu en application le fait qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'annulant en $n+1$ points était égal au polynôme nul. Nous avons alors vu les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Remarques sur le programme : La notion de barycentre n'a pas été vue. Le TD sera sur les polynômes sera fait mardi mais nous avons fait plusieurs exercices sur la division euclidienne en cours. Le second critère pour déterminer l'ordre d'une racine n'a pas encore été vu.

Compétences :

— Utiliser l'inégalité de Jensen en une fonction convexe et des valeurs bien choisies pour démontrer des inégalités.
— Utiliser la position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes/tangentes pour étudier des limites.
— Poser la division euclidienne de A par B afin de déterminer le quotient et le reste.
— Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B en évaluant en les racines de B.
— Utiliser le degré et la recherche de racines de polynômes afin de trouver des informations sur un polynôme inconnu.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une fonction convexe/concave, citer les différentes caractérisations (pour les fonctions dérivables/deux fois dérivables), donner des exemples (exp, ln, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, etc.) et illustrer graphiquement :
   - la position du graphe par rapport aux cordes/sécantes au graphe.
   - position du graphe par rapport aux tangentes.
2. Citer l'inégalité de Jensen et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :
$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$
3. Retrouver/Justifier brièvement les équations de la sécante au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ et de la tangente au graphe de f en x_0. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ en utilisant (en justifiant) la concavité du sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On illustrera également cet encadrement graphiquement.
4. Citer les différentes formules sur le degré d'une somme / d'un produit / d'une composée de polynôme et démontrer celle sur le produit.
5. Citer le théorème de division euclidienne et démontrer l'unicité.
6. Citer le théorème de division euclidienne et déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 1$.
7. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $XP(X) = XP(X + 1)$.
8. Citer le théorème d'interpolation de Lagrange en donnant la forme du polynôme en fonction des polynômes de Lagrange, donner la forme de L_k et vérifier que $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 17 : 15 ; TD 18 : 2 et 4.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD17 : 15
- 2ieme du groupe : TD18 : 2
- 3ieme du groupe : TD18 : 4

Prochain programme : vacances puis polynômes

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 15 :

- Il n'y a pas d'hypothèses de dérivabilité donc il faut revenir à la définition de la monotonie en supposant $x_1 \leq x_2$ et en montrant que $g(x_1) \leq g(x_2)$.
- Vérifier que $a - x_1 \in [a - x_2, a + x_2]$ et que $a + x_1 \in [a - x_2, a + x_2]$ (on pourra faire un dessin).
- Démontrer/justifier que $\exists! t \in [0, 1] \ / \ a - x_1 = t(a - x_2) + (1 - t)(a + x_2)$ et déterminer la valeur de t en fonction de a, x_1 et x_2. Faire de même pour $a + x_1$.
- Utiliser alors la définition de la convexité de f en partant de $g(x_1)$ avec des suites d'inégalités, vous devriez arriver au résultat demandé !

Exo 2 :

- Raisonner par analyse/synthèse.
- Commencer par trouver le degré de P.
- Une fois le degré trouvé, vous pouvez vous ramener à un système relativement petit.
- Ne pas oublier la synthèse ! Ou alors, raisonnez bien par équivalence pour ne pas avoir à vérifier vos solutions !

Exo 4 :

- Vous avez deux manières d'attaquer cet exercice. Soit en calculant le reste de la division euclidienne de $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ par $X^2 + 2$ et en utilisant la proposition disant que $A|B$ si et seulement si le reste dans la division euclidienne de B par A est nul.
- Soit en utilisant le théorème de division euclidienne pour justifier que le reste existe, qu'il est de degré au plus 1 et le trouver en évaluant en les racines (complexes) de $X^2 + 2$.