# 11. Suites, méthodologie

## I. Généralités

*I.1. Définition*

*I.2. Suites bornées*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
- bornée si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

**Remarque :** Un majorant/minorant / une borne d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit pas dépendre de $n$ ! Cette constante doit être la même pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$.

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.

*I.3. Suites monotones*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
- strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

$\boxed{\text{m}}$ Pour montrer qu'une suite est croissante (respectivement décroissante), on commence par prendre $n \in \mathbb{N}$ et on **étudie ensuite le signe de** $u_{n+1} - u_n$. Si cette quantité est toujours positive, la suite est croissante. Si elle est tout le temps négative, la suite est décroissante. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement positive** et qu'elle est définie avec des produits/quotients, on peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite est croissante et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite est décroissante. Cela peut permettre parfois de simplifier les calculs...

**Exercice d'application 1.** On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + (-1)^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Est-elle strictement croissante ?

**Exercice d'application 2.** On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Est-elle strictement croissante ?

(m) Pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$, on peut se ramener à l'étude des variations de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On peut également aussi pour déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ se ramener à une étude de fonction en étudiant $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $g$ est de signe constant (en étudiant ses variations) permet de trouver la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice d'application 3.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Est-elle strictement croissante ? *On rappelle que* $\ln(2) \approx 0.7$.

## II. Limite d'une suite

### *II.1. Définition*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l$ en $+\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.

**Proposition.** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$, alors $l_1 = l_2$. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est donc unique et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### *II.2. Suites convergentes et suites bornées*

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

### *II.3. Suites divergentes*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M.$$

De la même manière, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ u_n \leq m$.

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**. Sinon, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**. Elle peut alors diverger vers $+\infty$ (on notera alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$), diverger vers $-\infty$ (on notera alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) ou diverger et ne pas avoir de limite.

*II.4. Opérations sur les limites*

**Proposition.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$ avec $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, s'il n'y a pas de formes indéterminées, on a :

- $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |l_1|$.
- $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1 + l_2$.
- $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1 l_2$.
- $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{l_1}{l_2}$.

(m) Quand on a une forme indéterminée, on essaye de factoriser par le terme qui nous semble tendre le plus vite vers l'infini pour faire disparaitre la forme indéterminée et se ramener à une des formules précédentes.

**Exercice d'application 4.** Déterminer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3n^3 + 2 + \ln(n)}{(n+1)^4 - n^4}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{(e^n - n^5) \times ((\ln(n))^3 - n^2)}{3 + \cos(n)}$.

*II.5. Limites et inégalités*

**Proposition.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \end{cases}$.

Alors, $l_1 \leq l_2$.

(m) Autrement dit, on peut passer à la limite dans les inégalités larges (si les limites existent, alors $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$. Quand on a une inégalité stricte, passer à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges (si les limites existent, alors $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$.

**Théorème. Des gendarmes.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

(m) Ce théorème est très utile pour montrer que des suites convergent (en les encadrant entre deux suites qui convergent vers la même limite). Une conséquence utile est en particulier que si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq v_n$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

**Exercice d'application 5.** Déterminer les limites des suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{\sin(n^3) + 2}{\ln(n) + 1}$ et $v_n = \dfrac{n^{2\cos(n)}}{e^n}$.

**Théorème. D'encadrement.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$. On a alors :
- $(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty) \Rightarrow (v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty)$.
- $(v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty) \Rightarrow (u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty)$.

m Comme le théorème des gendarmes, ce théorème est utile pour prouver que des suites divergent vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

**Proposition.** Soit $A \subset \mathbb{R}$. $A$ est non majoré si et seulement si $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}\ /\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

## III. Suites monotones et adjacentes

### *III.1. Suites monotones*

**Théorème. De la limite monotone.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors :
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, elle converge.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

m Ce théorème est très utile pour justifier qu'une suite admet une limite ! Attention cependant, ce n'est pas parce qu'une suite est croissante et majorée par $M$ qu'elle tend vers $M$ ! Elle admet une limite qui est inférieure ou égale à $M$ mais ce n'est pas forcément $M$... On a de la même façon qu'une suite décroissante minorée converge (et qu'une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$).

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l$. Alors :
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < l$.

m On a donc qu'une suite croissante convergente est majorée par sa limite. Si elle est strictement croissante, elle ne l'atteint jamais. Ce résultat est utile pour encadrer les termes d'une suite monotone dont on connait la limite. Remarquons que ce résultat est faux si la suite n'est pas croissante...

**Exercice d'application 6.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ou diverge vers $+\infty$ quand $n$ tend vers l'infini. *La suite dans l'exercice d'application 8.*

### *III.2. Suites adjacentes*

**Définition.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit qu'elles sont adjacentes si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

**Théorème.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors, elles convergent vers la même limite.

## IV. Suites extraites

### *IV.1. Sous-suite*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite extraite (ou une sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite où l'on ne garde que certains termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Formellement, cela signifie qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et que cette suite est de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ où $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $l$.

m Ce résultat est surtout utile pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ! En effet, si on trouve deux suites extraites d'une suite qui tendent vers des limites différentes, alors la suite de départ n'admet pas de limite.

**Exercice d'application 7.** Montrer que la suite $((-1)^{\lfloor n/3 \rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**Exercice d'application 8.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$. *On commencera par écrire la différence comme une somme unique puis on minorera chacun des termes de la somme par un terme qui ne dépend pas de $k$.*

2) On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = l$. Montrer que ceci est absurde.

3) Que peut-on finalement dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$ ?

**Théorème. Des indices pairs et impairs.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

**Exercice d'application 9.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$ si $n$ est pair et $w_n = v_n$ si $n$ est impair. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

### *IV.2. Valeur d'adhérence*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $\lambda$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$. *Autrement dit, $\lambda$ est valeur d'adhérence si il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $\lambda$.*

### *IV.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass*

**Théorème.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors elle admet au moins une valeur d'adhérence, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

**Exercice d'application 10.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n$ si $n$ est pair et $u_n = \cos(n)$ si $n$ est impair.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente.

2) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

## V. Suites complexes

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

**Théorème. De Bolzano-Weierstrass.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors elle admet au moins une valeur d'adhérence, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

## VI. Suites récurrentes

### *VI.1. suites récurrentes linéaires d'ordre 1 à coefficients constants*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. *On a alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = rn + u_0$.
- géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. *On a alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$.
- arithmético-géométrique de paramètres $(q, r) \in \mathbb{C}^2$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n + r$.

**Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de paramètres $(q, r) \in \mathbb{C}^2$ avec $q \neq 1$. Alors, si on pose $\omega = \dfrac{r}{1-q}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n(u_0 - \omega) + \omega.$$

m Cette formule n'est pas à retenir. Il faut principalement retenir que l'étude est la même que pour l'étude des similitudes directes (voir le chapitre sur les complexes). On commence donc par chercher $\omega$ le point fixe (donc tel que $\omega = q\omega + r$) et on pose ensuite $v_n = u_n - \omega$. Cette suite est alors une suite géomtrique de raison $q$ ce qui permet de retrouver la formule annoncée.

**Exercice d'application 11.** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 2$. Expliciter $u_n$ en fonction de $n$.

*VI.2. suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants*

**Définition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

**Théorème.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$. On note alors $aX^2 + bX + c = 0$ l'équation caractéristique associée à cette équation et $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes $r_1$ et $r_2$ (donc si $\Delta \neq 0$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si l'équation caractéristique admet une racine complexe double $r$ (donc si $\Delta = 0$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.

m La résolution se fait de la même manière que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, mais attention, dans le cas des suites, il n'y a pas d'exponentielle ! Si on utilisait une exponentielle dans le cas des équations différentielles, c'est parce qu'en dérivant, $t \mapsto e^{rt}$ devenait $t \mapsto re^{rt}$ puis $t \mapsto r^2 e^{rt}$ (autrement dit dériver l'exponentielle revenait à multiplier la fonction par $r$) et on se ramenait alors à une équation polynomiale de degré 2. Multiplier par $r$ dans le cas des suites revient à avoir une suite géométrique de raison $r$, d'où les solutions qui s'expriment avec du $r^n$...

m Comme pour les équations différentielles, on a besoin de deux conditions initiales (en général les valeurs de $u_0$ et $u_1$) pour déterminer entièrement la suite et trouver les valeurs de $\lambda$ et $\mu$.

**Théorème.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On note alors $aX^2 + bX + c = 0$ l'équation caractéristique associée à cette équation et $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ (donc si $\Delta > 0$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double $r$ (donc si $\Delta = 0$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.
- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, qui sous forme trigonométrique s'écrivent $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (donc si $\Delta < 0$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta)$.

m La résolution se fait de la même manière que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, mais attention, il n'y a pas d'exponentielle et dans le cas d'un discriminant strictement négatif, ce n'est plus la partie réelle et la partie imaginaire des racines qui intervient mais le module et l'argument ! Pour retenir les formules dans le cas réel, on peut également procéder comme dans les équations différentielles et considérer les parties réelles et imaginaires des solutions complexes (ce qui permet de retrouver la forme énoncée ci-dessus).

**Exercice d'application 12.** Déterminer la forme générale des suites suivantes, dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 4v_{n+1} + 5v_n$.

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 2\sqrt{2}w_{n+1} - 4w_n$.

*VI.3. suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$*

On étudie les suites de la forme $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On cherche en général à déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle existe) en fonction de la valeur de $u_0$. Dans toute la suite de la partie, on considère une telle suite.

**Proposition.** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ avec $l \in I$ et que $f$ est continue sur $I$, alors $l = f(l)$. *Autrement dit, les limites possibles sont à chercher parmi les points fixes de $f$.*

(m) Pour étudier une telle suite dans le cas où $f$ est **croissante**, on procède de la manière suivante :

1. **On commence toujours par montrer que la suite est bien définie**, autrement dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ en vérifiant que $I$ est stable par $f$ (autrement dit que $f(I) \subset I$), ce qui assure par récurrence que la suite est bien définie.
2. **On effectue ensuite le tableau de signes de** $g : x \mapsto f(x) - x$ à l'aide d'une étude de fonctions. On note alors $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ les points fixes de $f$ (donc les valeurs telles que $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$).
3. On étudie alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de l'intervalle auquel appartient $u_0$ en séparant les cas $u_0 \in ]-\infty, x_0]$, $u_0 \in [x_0, x_1]$, $u_0 \in [x_1, x_2]$, etc.
4. Commençons par exemple par le cas $u_0 \in [x_0, x_1]$. Si la suite part d'un point fixe (ici $x_0$ ou $x_1$), alors elle est constante égale à ce point fixe. Si $u_0 \in ]x_0, x_1[$ :
   - **On montre alors par récurrence que si** $u_0 \in [x_0, x_1]$**, alors** $\forall n \in \mathbb{N},\ x_0 \leq u_n \leq x_1$, ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq 0 \Leftrightarrow f(u_n) - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1}$ si le signe de $g$ est positif sur $[x_0, x_1]$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$ si le signe de $g$ est négatif sur $[x_0, x_1]$. **La suite est donc monotone.**
   - **Puisque la suite est monotone et bornée, elle converge.** Elle converge vers un point fixe de $f$ d'après la proposition précédente, ce qui entraine que la limite est $x_0$ si la suite est décroissante et vers $x_1$ si la suite est croissante.
   - On procède de même pour chacun des intervalles. *La situation est différente si on est sur $]-\infty, x_0]$ ou $[x_2, +\infty[$ puisqu'alors la suite peut tendre vers $-\infty$ ou $+\infty$. En effet, si par exemple $u_0 < x_0$ et que la suite est décroissante, alors elle converge vers un point fixe de $f$ ou elle tend vers $-\infty$. Cependant, $x_0$ étant le plus petit point fixe de $f$ et la suite étant décroissante, elle ne peut pas converger vers un point fixe de $f$. Elle diverge donc vers $-\infty$.*

**Exercice d'application 13.** Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

## VII. Correction des exercices

**Exercice d'application 1.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & 2(n+1) + (-1)^{n+1} - (2n + (-1)^n) \\ & = & 2n + 2 + (-1)^{n+1} - 2n + (-1)^{n+1} \\ & = & 2(1 + (-1)^{n+1}). \end{array}$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^{n+1} \geq -1$, la suite est donc croissante. Elle n'est pas strictement croissante car par exemple $u_0 = u_1$. *Elle n'est d'ailleurs strictement croissante à partir d'aucun rang puisque pour tout* $k \in \mathbb{N},\ u_{2k} = u_{2k+1}$.

**Exercice d'application 2.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. La suite est strictement positive donc on va étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ce qui simpliera les calculs de factoriels. On a pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} & = & \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!} \\ & = & \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ & = & \dfrac{2(2n+1)}{n+1}. \end{array}$$

Or, on a $4n + 2 > n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

**Exercice d'application 3.** Si on pose $f : x \mapsto x - \ln(x)$ définie et dérivable sur $[1, +\infty[$. Pour $x \geq 1$, on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ et la seule valeur où la dérivée s'annule est en 1. On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (car elle est continue). La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

C'est plus compliqué mais on peut aussi étudier $u_{n+1} - u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = (n+1) - \ln(n+1) - (n - \ln(n)) = 1 - \ln(n+1) + \ln(n)$. Posons alors $g : x \mapsto 1 - \ln(x+1) + \ln(x)$. Cette fonction est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$ :

$$g'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} > 0.$$

On en déduit que $g$ est croissante sur $[1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 1 - \ln(2) > 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

**Exercice d'application 4.**

1) On peut développer le dénominateur à l'aide du binome de Newton. On a $(n+1)^4 - n^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \frac{3n^3}{4n^3} \times \frac{1 + \frac{2}{4n^3} + \frac{\ln(n)}{4n^3}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4n^3}}.$$

Par croissance comparée et puisque $\frac{3n^3}{4n^3} = \frac{3}{4}$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{4}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2 \leq 3 + \cos(n) \leq 4$ donc le dénominateur est strictement positif et ne tend pas vers l'infini (car il est borné). D'après les croissances comparées, on a $\lim_{n \to +\infty} e^n - n^5 = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (\ln(n))^3 - n^2 = -\infty$. On en déduit par produit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

**Exercice d'application 5.** Pour $n \geq 1$, on a $-1 \leq \sin(n^3) \leq 1$ d'où $\dfrac{1}{\ln(n)+1} \leq u_n \leq \dfrac{3}{\ln(n)+1}$ (car $\ln(n)+1 > 0$). Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(n)+1} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

De la même manière, pour $n \geq 1$, on a $-2 \leq 2\cos(n) \leq 2$. On en déduit par croissance de la fonction $x \mapsto n^x = e^{\ln(x)n}$ sur $[1, +\infty[$ (une rapide étude de fonction prouve que cette fonction est croissante) que pour $n \geq 1$, $n^{-2} \leq n^{2\cos(n)} \leq n^2$. On en déduit que pour $n \geq 1$ :

$$\frac{1}{n^2 e^n} \leq v_n \leq \frac{n^2}{e^n}.$$

On en déduit d'après le théorème des gendarmes (et les croissances comparées pour la limite de droite) que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

**Exercice d'application 6.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$. La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante, ce qui implique d'après le théorème de la limite monotone qu'elle converge ou diverge vers $+\infty$ quand $n$ tend vers l'infini.

**Exercice d'application 7.** On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{6n} = (-1)^{2n} = 1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui tend vers 1. On a de plus $u_{6n+3} = (-1)^{2n+1} = -1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui tend vers $-1$. On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

**Exercice d'application 8.**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Chacun des termes de la somme est plus grand que $\dfrac{1}{2n}$. Puisqu'il y a $n$ termes dans la somme, on en déduit par somme d'inégalité que $H_{2n} - H_n \geq n \times \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$.

2) On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = l$. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} H_{2n} = l$ (puisque toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite). Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient alors $0 \geq \dfrac{1}{2}$ : absurde !

3) Dans l'exercice 6, on a montré que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge ou tend vers $+\infty$. On vient de montrer qu'elle ne peut pas converger. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

**Exercice d'application 9.** Les deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite $l$. On a alors en particulier $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend aussi vers $l$ (suite extraite d'une suite convergente) et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend aussi vers $l$. Ceci entraine que $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l$ et que $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l$. D'après le théorème des suites extraites d'indices pairs et impairs, on en déduit que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l$.

**Exercice d'application 10.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n$ si $n$ est pair et $u_n = \cos(n)$ si $n$ est impair.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+1} = \cos(2n+1)$ donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après Bolzano-Weierstrass, elle admet donc une suite extraite convergente. Cette suite extraite est également une sous suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente.

2) D'après la question précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ car sinon toutes ses suites extraites convergeraient vers $\pm\infty$. De plus, on a $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (2n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers une limite finie (sinon pour la même raison, toutes les suites extraites devraient tendre vers la même limite). On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et n'admet pas de limite.

**Exercice d'application 11.** On résout $\omega = 3\omega - 2$ ce qui donne $\omega = 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= 3u_n - 2 - 1 \\ &= 3(u_n - 1) \\ &= 3v_n. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n v_0$ (suite géométrique de raison 3). On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 = 3^n(u_0 - 1)$, ce qui entraine que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 1$.

**Exercice d'application 12.**

1) L'équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui a 1 comme racine double. On en déduit que pour les suites complexes, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu n$. Pour les suites réelles, c'est la même chose, sauf que les constantes $\lambda$ et $\mu$ sont réelles.

2) L'équation caractéristique associée est $X^2 - 4X - 5 = 0$. Les racines sont $-1$ et 5. On en déduit que pour les suites complexes, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda(-1)^n + \mu 5^n$. Pour les suites réelles, c'est la même chose, sauf que les constantes $\lambda$ et $\mu$ sont réelles.

3) L'équation caractéristique associée est $X^2 - 2\sqrt{2}X + 4 = 0$. Les racines sont $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$. Sous forme trigonométrique, elles sont égales à $2e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $2e^{-\frac{i\pi}{4}}$. On en déduit que pour les suites complexes, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \lambda 2^n e^{\frac{in\pi}{4}} + \mu 2^n e^{\frac{-in\pi}{4}}$. Pour les suites réelles, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \lambda 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mu 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

**Exercice d'application 13.** Posons $f : x \mapsto e^x - 1$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et croissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. Une étude de fonction montre que la seule valeur pour laquelle $g$ s'annule est en 0 (c'est donc le seul point fixe de $f$) et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

Tout d'abord, si $u_0 = 0$, alors on a $u_1 = f(u_0) = 0$. Par récurrence directe, la suite est constante égale à 0 (et converge donc vers 0).

Supposons à présent $u_0 < 0$. On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0$. La propriété est vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang $n$. On a $u_n \leq 0$. On a alors par croissance de $f$ que $f(u_n) \leq f(0)$ et donc que $u_{n+1} \leq 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie à tout rang. Puisque la fonction $g$ est positive sur $]-\infty, 0]$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq 0 \Leftrightarrow f(u_n) - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 0, elle converge. De plus, on sait que si elle converge, alors c'est vers un point fixe de $f$ (car $f$ est continue) et le seul point fixe est 0. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Supposons à présent $u_0 > 0$. On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$. La propriété est vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang $n$. On a $u_n \geq 0$. On a alors par croissance de $f$ que $f(u_n) \geq f(0)$ et donc que $u_{n+1} \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie à tout rang. Puisque la fonction $g$ est positive sur $[0, +\infty[$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq 0 \Leftrightarrow f(u_n) - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie. Alors cette limite est un point fixe de $f$ (voir le point précédent). Or, le seul point fixe de $f$ est 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante avec $u_0 > 0$. Ceci est donc absurde. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.