CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 – Électron dans un champ magnétique

(d'après Centrale MP 2016)

1. Dimension d'une charge électrique : $I = \dfrac{dq}{dt}$ soit $I = \dfrac{[q]}{T} \Leftrightarrow [q] = IT$

➢ Dimension d'une force : $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ soit $[F] = MLT^{-2}$

➢ Dimension du champ magnétique : $F_m = qvB$ soit $[B] = \dfrac{[F]}{[q][v]} = \dfrac{MLT^{-2}}{ITLT^{-1}}$

$\boxed{[B] = MI^{-1}T^{-2}}$: B s'exprime en kg.A-1.s-2 ou en Tesla (T)

2. Dimension d'une énergie : $E = \dfrac{1}{2}mv^2$ soit $[E] = ML^2T^{-2}$

➢ Dimension d'une puissance : $P = \dfrac{dE}{dt}$ soit $\boxed{[P] = \dfrac{[E]}{T} = ML^2T^{-3}}$

3. $[\varepsilon_0] = I^2T^4M^{-1}L^{-3}$, $[e] = [q] = IT$, $[c] = [v] = LT^{-1}$

➢ Équation aux dimensions : $[P] = \left[\dfrac{2}{3}\right]\left[\dfrac{1}{4\pi}\right][\varepsilon_0]^{-1}[e]^{\alpha}[c]^{\beta}\left(\dfrac{[v]}{T}\right)^{\gamma}$

$$ML^2T^{-3} = I^{-2}T^{-4}M^1L^3(IT)^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta}(LT^{-2})^{\gamma} \Leftrightarrow ML^2T^{-3} = I^{-2+\alpha}T^{-4+\alpha-\beta-2\gamma}ML^{3+\beta+\gamma}$$

$$\begin{cases} \text{pour } M : 1 = 1 \\ \text{pour } L : 2 = 3 + \beta + \gamma \\ \text{pour } T : -3 = -4 + \alpha - \beta - 2\gamma \\ \text{pour } I : 0 = -2 + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = -1 \\ \beta + 2\gamma = -1 + \alpha = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases}}$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

4. Dimension de la pulsation : $[\omega_C] = \dfrac{[e][B]}{[m]} = \dfrac{ITMI^{-1}T^{-2}}{M}$ soit $\boxed{[\omega_C] = T^{-1}}$.

➢ Une pulsation s'écrit : $\boxed{\omega_C = \dfrac{2\pi}{T_C}}$ où T_C est une période, soit $[\omega_C] = T^{-1}$

5. $[\Delta] = \dfrac{[6\pi][\varepsilon_0][c]^3[B]}{[e][\omega_C]^3} = \dfrac{I^2T^4M^{-1}L^{-3}(LT^{-1})^3MI^{-1}T^{-2}}{ITT^{-3}} = T$

Δ est homogène à un temps : c'est une durée caractéristique, notée τ, de la décroissance du rayon de la trajectoire de l'électron (due à la perte d'énergie par rayonnement) qui varie selon $e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Exercice 2. Arc-en-ciel *(d'après Banque PT 2010)*

1. Hypothèses de l'optique géométrique : On décrit la propagation de la lumière en ne tenant pas compte de sa nature ondulatoire, grâce à des lignes orientées perpendiculaires au front d'onde : ce sont les rayons lumineux, qui matérialisent la direction de propagation de l'onde. Il y a indépendance des rayons lumineux et ils peuvent être étudiés séparément.

➢ Limites de l'optique géométrique : L'approximation de l'optique géométrique est valable en l'absence de phénomène de diffraction, i.e. tant que la longueur d'onde λ est très petite devant les dimensions du milieu.

2. Dans le vide :

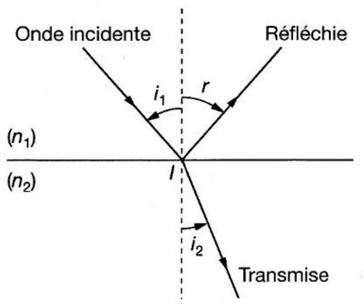
Couleur	**Violet**	**Rouge**
λ_0 (nm)	400	630-800

3. Dans un milieu matériel : $\boxed{\lambda_{milieu} = \frac{\lambda_0}{n} \leq \lambda_0}$

avec $n = \frac{c}{v} \geq 1$ l'indice de réfraction du milieu, c : célérité de la lumière dans le vide et v : vitesse de propagation dans le milieu

4. Lois de Snell-Descartes :

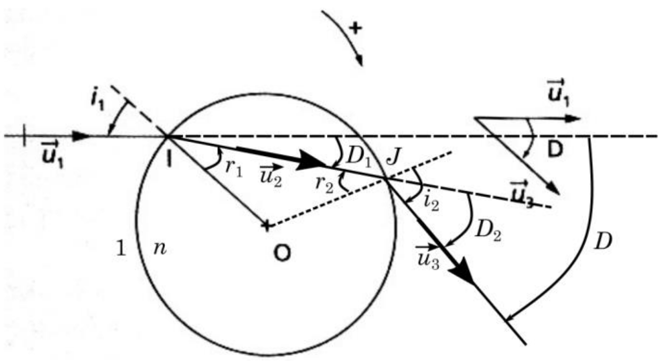
➢ Les rayons réfléchi (dans le milieu d'indice n_1) et réfracté (dans le milieu d'indice n_2) sont dans le plan d'incidence.



➢ L'angle i_1 entre la normale et le rayon incident est opposé à l'angle r entre la normale et le rayon réfléchi : $r = -i_1$

L'angle i_1 entre la normale et le rayon incident et l'angle i_2 entre la normale et le rayon réfracté vérifient : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$

5. Trajet du rayon lumineux sur la figure ci-dessous.



En I : $\sin(i_1) = n\sin(r_1)$ et $n > 1$ d'où $|r_1| < |i_1|$

en J : $\sin(i_2) = n\sin(r_2)$ et $n > 1$ d'où $|r_2| < |i_2|$

6. Réfraction en I : déviation : $D_1 = r_1 - i_1 \quad (1)$

➢ Triangle OIJ isocèle : $r_2 = -r_1 \quad (2)$

- $3^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes en J : $\sin(i_2) = n\sin(r_2)$ soit $\sin(i_2) = -n\sin(r_1)$ (3)
- $3^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes en I : $\sin(i_1) = n\sin(r_1) = -n\sin(i_2)$ soit $i_2 = -i_1$ (4)
- Réfraction en J : déviation : $D_2 = i_2 - r_2$ (5)
- Avec (5), (4) et (2) : $D_2 = -i_1 + r_1$ (6)
- Déviation totale : relation de Chasles : $D = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\right) = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) + \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right) = D_1 + D_2$

  Avec (1) et (6) : $D = r_1 - i_1 - i_1 + r_1$ soit $\boxed{D = 2(r_1 - i_1)}$

7. $3^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes en I : $\sin(i_1) = n\sin(r_1) \Leftrightarrow r_1 = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sin(i_1)}{n}\right)$

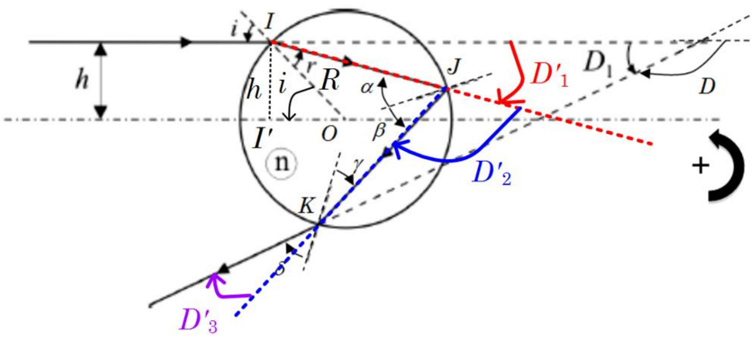
$$\boxed{D = 2\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) - i_1\right) = 26\ \text{deg}}$$

   On vérifie bien sur le schéma que $D > 0$

8. Valeurs algébriques des angles :

- Triangle OIJ isocèle : $\boxed{\alpha = -r}$
- Réflexion en J ($2^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes) : $\boxed{\beta = -\alpha = r}$
- Triangle OJK isocèle : $\boxed{\gamma = -\beta = -r}$
- $3^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes en K : $\sin(\delta) = n\sin(\gamma) = n\sin(-r) = -n\sin(r)$ et $3^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes en I : $n\sin(r) = \sin(i)$, d'où : $\sin(\delta) = -\sin(i)$ et $\boxed{\delta = -i}$

9. Déviations pour chaque réfraction / réflexion



- Réfraction en I : $D'_1 = r - i$
- Réflexion en J : $D'_2 = -\pi - \alpha + \beta = -\pi + 2r$
- Réfraction en K : $D'_3 = \delta - \gamma = -i + r = r - i$
- <u>Déviation totale</u> : $D = D'_1 + D'_2 + D'_3$ soit $\boxed{D = -\pi - 2i + 4r}$

10. On a $\boxed{D_1 = \pi + D = -2i + 4r = 2(2r - i)}$

- Dans le triangle rectangle OII' : $x = \dfrac{h}{R} = \sin(i)$ soit $i = \arcsin(x)$
- Loi de Snell-Descartes en I : $n\sin(r) = \sin(i) = x$ soit $r = \arcsin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

$$\boxed{D_1(x) = 2\left(2\arcsin\left(\frac{x}{n}\right) - \arcsin(x)\right)}$$

11. $D_1(x)$ passe par un extrémum si $\left(\frac{dD_1}{dx}\right)_{x_m}=0$

$$\frac{dD_1(x)}{dx}=2\left(2\frac{d\arcsin\left(\frac{x}{n}\right)}{dx}-\frac{d\arcsin(x)}{dx}\right)=2\left(2\frac{\frac{x}{n}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\frac{dD_1(x)}{dx}=2\left(2\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=2x\left(\frac{2}{\sqrt{n^2-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

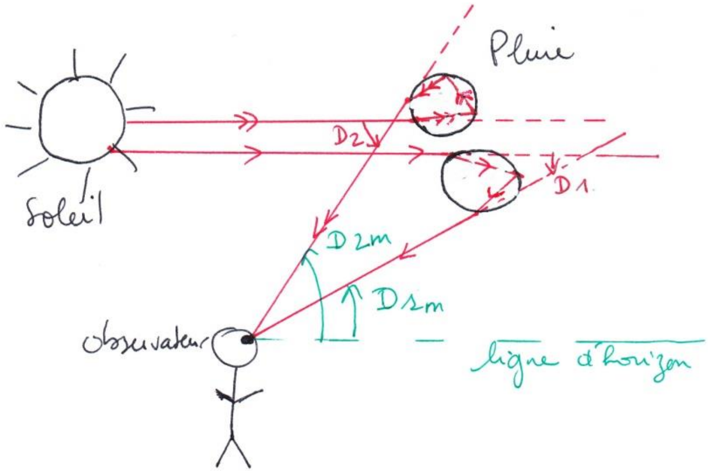
$$\left(\frac{dD_1}{dx}\right)_{x_m}=0\Leftrightarrow x_m=0 \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{n^2-x_m{}^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x_m{}^2}}=0$$

La solution $x_m=0$ n'ayant pas d'intérêt (les rayons sont en incidence normale), on en déduit que la solution recherchée vérifie :

$$\frac{2}{\sqrt{n^2-x_m{}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_m{}^2}}\Leftrightarrow\frac{4}{n^2-x_m{}^2}=\frac{1}{1-x_m{}^2}\Leftrightarrow 4-4x_m{}^2=n^2-x_m{}^2$$

$$4-n^2=3x_m{}^2\Leftrightarrow x_m{}^2=\frac{4-n^2}{3}\text{ soit }\boxed{x_m=\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$$

12. Positions relatives du soleil, de la pluie et de l'observateur pour pouvoir observer des arcs-en-ciel :



13. L'arc externe correspond à la plus grande des deux valeurs de déviation, soit D_{2m}, i.e. lorsqu'il y a deux réflexions dans la goutte d'eau ; l'arc interne correspond à la plus petite des deux valeurs de déviation, soit D_{1m}, i.e. lorsqu'il y a une seule réflexion dans la goutte d'eau.

➢ Sachant que de l'énergie lumineuse est perdue par réfraction aux points où il y a réflexion (ce n'est pas une réflexion totale, les deux phénomènes coexistent), le plus lumineux des deux arcs est celui où il n'y a qu'une seule réflexion, à savoir l'arc primaire (c'est celui qu'on observe le plus souvent !)

14. Loi de Cauchy : $\boxed{n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}}$, où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide : n diminue lorsque λ_0 augmente.

- Arc primaire : l'angle sous lequel est vu l'arc est D_1 tel que :

$$D_1(x) = 2\left(2\arcsin\left(\frac{x}{n}\right) - \arcsin(x)\right)$$

D_1 augmente si n diminue, i.e. si λ_0 augmente : en partant de l'intérieur de l'arc, les couleurs vont du violet au rouge.

- Arc secondaire : l'angle sous lequel est vu l'arc est D_2 tel que :

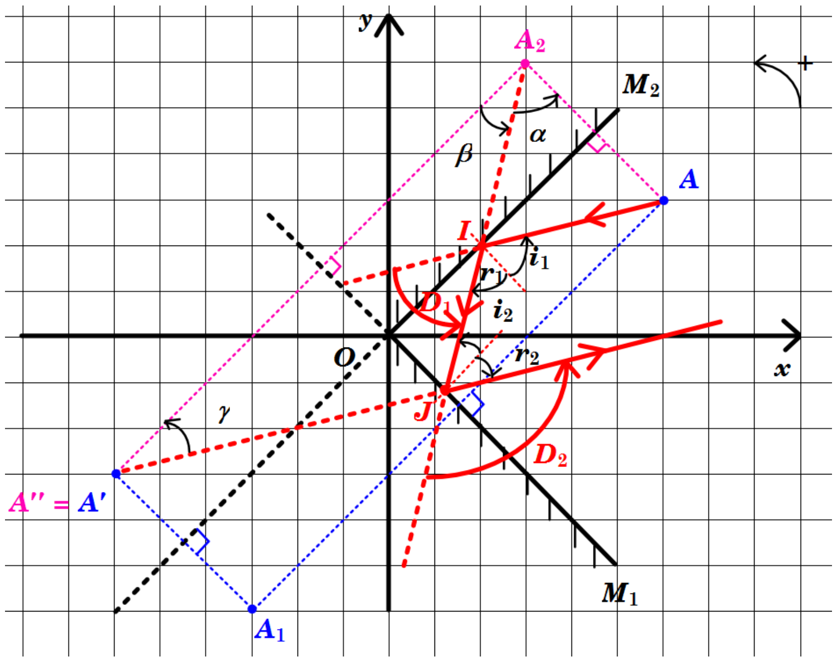
$$D_1(x) = \pi - 6\arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2\arcsin(x)$$

D_2 augmente si n augmente, i.e. si λ_0 diminue : en partant de l'intérieur de l'arc, les couleurs vont du rouge au violet (il est inversé par rapport à l'arc primaire).


Arc-en-ciel primaire (à gauche) et arcs primaire et secondaire (à droite)

Exercice 3. Deux miroirs en coin

1. Points conjugués : $A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$.



- A est un objet réel pour M_1. L'image virtuelle A_1 est symétrique de A par rapport au plan du miroir M_1.

- A_1 est un objet réel pour M_2. L'image virtuelle A' est symétrique de A_1 par rapport au plan du miroir M_2.

2. L'équation de M_1 est $y=-x$. Par symétrie, les coordonnées de A_1 sont $\boxed{\left(x_{A_1}=-y_A, y_{A_1}=-x_A\right)}$.

- L'équation de M_2 est $y=x$. Par symétrie, les coordonnées de A' sont $\left(x_{A'}=y_{A_1}, y_{A'}=x_{A_1}\right)$ Donc $\boxed{\left(x_{A'}=-x_A, y_{A'}=-y_A\right)}$

3. Il s'agit d'une rotation de π autour de O (symétrie centrale de centre O).
4. Relation de conjugaison : $A \xrightarrow{M_2} A_2 \xrightarrow{M_1} A''$. On constate que $\boxed{A' = A''}$
5. Le rayon ne se réfléchit qu'une seule fois s'il est en incidence normale par rapport à M_1 ou à M_2 : il est alors réfléchi normalement au miroir qu'il rencontre et se trouve donc parallèle au second miroir (qu'il ne rencontre jamais). C'est également le cas pour le rayon passant par O.
6. Rayon incident AI sur M_2 : il se réfléchit de façon symétrique par rapport à la normale à M_2 en I tel que $r_1=-i_1$ (loi de Snell-Descartes) : il émerge en passant virtuellement par A_2 (cf. figure ci-dessus).

- Ce rayon atteint M_1 en J et se réfléchit de façon symétrique par rapport à la normale à M_1 en J tel que $r_2=-i_2$: il émerge en passant virtuellement par A''

7. Déviation D_1 sur le miroir M_2 : $D_1=\pi-i_1+r_1=\pi-2i_1$ car $r_1=-i_1$

- Déviation D_2 sur le miroir M_1 : $D_2=\pi-i_2+r_2=\pi-2i_2$ car $r_2=-i_2$
- Déviation totale : $D=D_1+D_2=2\pi-2\left(i_1+i_2\right)$
- Triangle JA_2A' isocèle donc $\gamma=\beta$. Or, $\gamma=-r_2=i_2$ et $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ avec $\alpha=-r_1=i_1$

  D'où $i_2=\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\dfrac{\pi}{2}-i_1 \Leftrightarrow i_1+i_2=\dfrac{\pi}{2}$

  Autre méthode : triangle rectangle OIJ : $\pi=\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-i_2\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}+r_1\right)$ et $r_1=-i_1$

  $\pi=\pi+\dfrac{\pi}{2}-\left(i_2+i_1\right) \Leftrightarrow i_1+i_2=\dfrac{\pi}{2}$

- Déviation totale : $D=2\pi-2\left(i_1+i_2\right)=2\pi-2\dfrac{\pi}{2}$ soit $\boxed{D=\pi}$
- On vérifie sur la construction que le rayon émergent est parallèle au rayon incident, de sens opposé.