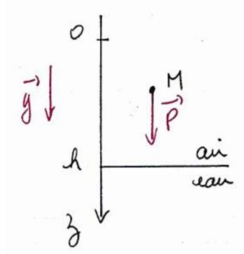
Corrigé du Devoir Surveillé 4

Exercice 1 – Saut et plongeon



1. Chute libre : $\vec{a} = \vec{g}$

   Projection sur $\overrightarrow{u_z}$: $\ddot{z} = a = g$

   Intégration : $\dot{z} = v = gt + cste$ et $\dot{z}(0) = 0 = cste$ donc $\boxed{v(t) = gt}$

   Intégration : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + cste$ et $z(0) = 0 = cste$ donc $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}gt^2}$

2. Entrée dans l'eau à l'instant t_c : $v(t_c) = v_e = gt_c$ et $z(t_c) = h = \frac{1}{2}gt_c^2$

   Temps de chute : $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}4 \text{ s}}$

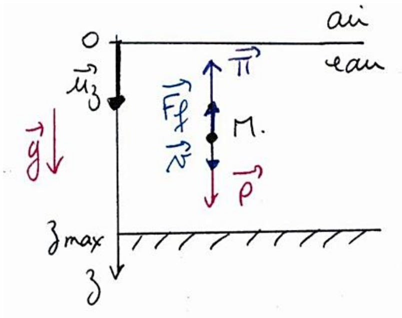
   Vitesse d'entrée : $\boxed{v_e = gt_c = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m.s}^{-1}}$

3. Analyse dimensionnelle : $[\lambda] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[ma]}{LT^{-1}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} \Rightarrow [\lambda] = MT^{-1}$: λ en kg.s^{-1}.

4. Système : baigneur assimilé à un point M

   Référentiel terrestre supposé galiléen, base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, origine O

   Mouvement rectiligne selon (Oz)

   Bilan des forces :

   - Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_z}$
   - Force de frottement fluide $\vec{F_f} = -\lambda\vec{v}$
   - Poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{m}{d_h}\vec{g} = -\frac{m}{d_h}g\overrightarrow{u_z}$

   PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f} + \vec{\Pi}$

   Cinématique : $\overrightarrow{OM} = z\overrightarrow{u_z}$ $\qquad \vec{v} = \dot{z}\overrightarrow{u_z} = v_z\overrightarrow{u_z}$ $\qquad \vec{a} = \ddot{z}\overrightarrow{u_z} = \dot{v}_z\overrightarrow{u_z}$

   Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_z}$: $m\dot{v}_z = mg - \lambda v_z - \frac{m}{d_h}g \Leftrightarrow m\dot{v}_z + \lambda v_z = mg\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$

   $$\frac{m}{\lambda}\dot{v}_z + v_z = \frac{m}{\lambda}g\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \Leftrightarrow \boxed{\tau\dot{v}_z + v_z = \tau g\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)} \text{ avec } \boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$$

5. *Solution de l'essm* : $v_z(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

   Solution particulière : $v_{zP} = \tau g\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$

Solution complète : $v_z(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)$

Condition initiale : $v_z(0) = v_e = K + \tau g\left(1-\frac{1}{d_h}\right) \Rightarrow K = v_e - \tau g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)$

Solution finale : $\boxed{v_z(t) = \left(v_e - \tau g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)}$

6. Vitesse limite v_L atteinte quand $t \to +\infty$, soit $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$: $v_L = v_{zP} = \tau g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)$

$$\boxed{v_L = \frac{m}{\lambda}g\left(1-\frac{1}{d_h}\right) = -0{,}35\ \text{m.s}^{-1}}$$

7. Vitesse : $\boxed{v_z(t) = \left(v_e + |v_L|\right)e^{-\frac{t}{\tau}} - |v_L| = \left(v_e - v_L\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_L}$

   Début de la remonté : $v_z(t_1) = 0 \Leftrightarrow \left(v_e + |v_L|\right)e^{-\frac{t_1}{\tau}} - |v_L| = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}$

$$\boxed{t_1 = -\tau\ln\left(\frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}\right) = \tau\ln\left(1+\frac{v_e}{|v_L|}\right) = 1{,}2\ \text{s}}$$

8. <u>Intégration</u> : $z(t) = -\tau\left(v_e + |v_L|\right)e^{-\frac{t}{\tau}} - |v_L|t + cste$

   CI : $z(0) = 0 = -\tau\left(v_e + |v_L|\right) + cste \Rightarrow cste = \tau\left(v_e + |v_L|\right)$

   Profondeur : $\boxed{z(t) = \tau\left(v_e + |v_L|\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - |v_L|t}$

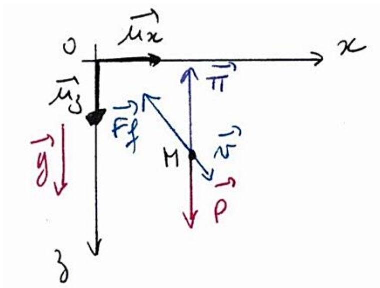
   Profondeur maximale atteinte : $\boxed{z_{\max} = z(t_1) = \tau\left(v_e + |v_L|\right)\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) - |v_L|t_1 = 4{,}1\ \text{m}}$

9. $v_z(t_2) = v_2 \Leftrightarrow \left(v_e + |v_L|\right)e^{-\frac{t_2}{\tau}} - |v_L| = v_2 \Leftrightarrow e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{v_2 + |v_L|}{v_e + |v_L|}$ $\boxed{t_2 = \tau\ln\left(\frac{v_e + |v_L|}{v_2 + |v_L|}\right) = 0{,}76\ \text{s}}$

   Profondeur minimale : $\boxed{z_{\min} = z(t_2) = \tau\left(v_e + |v_L|\right)\left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}}\right) - |v_L|t_2 = 3{,}9\ \text{m}}$

10. <u>Bilan des forces</u> :

   - Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$
   - Force de frottement fluide $\vec{F_f} = -\frac{\lambda}{2}\vec{v}$
   - Poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{m}{d_h}\vec{g} = -\frac{m}{d_h}g\vec{u_z}$



   <u>PFD</u> : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f} + \vec{\Pi}$

Cinématique : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + z\overrightarrow{u_z} \qquad \vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \qquad \vec{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

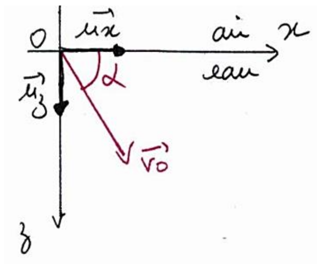
Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_x}$: $m\ddot{x} = -\dfrac{\lambda}{2}\dot{x} \Leftrightarrow m\dot{v}_x + \dfrac{\lambda}{2}v_x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2m}{\lambda}\dot{v}_x + v_x = 0$

$$\boxed{\tau'\dot{v}_x + v_x = 0} \text{ avec } \boxed{\tau' = \frac{2m}{\lambda}}$$

Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_z}$: $m\ddot{z} = mg - \dfrac{\lambda}{2}\dot{z} - \dfrac{m}{d_h}g \Leftrightarrow m\ddot{z} + \dfrac{\lambda}{2}\dot{z} = mg\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right)$

$$\boxed{\tau'\dot{v}_z + v_z = \tau' g\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)} \text{ avec } \boxed{\tau' = \frac{2m}{\lambda}}$$

11. *Solutions complètes* : $\begin{cases} v_x(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau'}} \\ v_z(t) = K_2 e^{-\frac{t}{\tau'}} + \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) \end{cases}$



Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0\cos(\alpha) = K_1 \\ v_z(0) = v_0\sin(\alpha) = K_2 + \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) \Rightarrow K_2 = v_0\sin(\alpha) - \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) \end{cases}$$

Solutions finales :

$$\boxed{\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha)e^{-\frac{t}{\tau'}} \\ v_z(t) = \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) + \left(v_0\sin(\alpha) - \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau'}} \end{cases}}$$

- Vitesse limite : $\begin{cases} v_x(t \to \infty) = 0 \\ v_z(t \to \infty) = \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) \end{cases}$ $\boxed{\overrightarrow{v'_L} = \tau' g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right)\overrightarrow{u_z} = \dfrac{2m}{\lambda}g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right)\overrightarrow{u_z}}$

12. Les expressions obtenues avec le saut sont applicables au plongeon en remplaçant v_e par $v_0\sin(\alpha)$ et τ par τ'.

On obtient : $\boxed{v'_L = \dfrac{2m}{\lambda}g\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) = -0{,}70 \text{ m.s}^{-1}}$

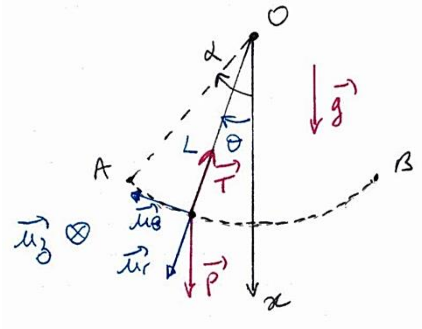
La vitesse s'annule en $\boxed{t_3 = \tau'\ln\left(1 + \dfrac{v_0\sin(\alpha)}{|v'_L|}\right) = 1{,}2 \text{ s}}$

Profondeur maximale atteinte :

$$\boxed{z'_{\max} = z(t_3) = \tau'\left(v_0\sin(\alpha) + |v'_L|\right)\left(1 - e^{-\frac{t_3}{\tau'}}\right) - |v'_L|t_3 = 1{,}7 \text{ m}}$$

Le plongeur <u>n'atteint pas le fond de la piscine</u> situé à 4 m.

Exercice 2 – Tarzan et Jane



1. Base <u>cylindrique</u> directe $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$

2. <u>Vecteur position</u> : $\boxed{\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{u_r}}$

   <u>Vecteur vitesse</u> : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$

   <u>Vecteur accélération</u> : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = L\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}}$

3. <u>Système</u> : Tarzan assimilé à son centre de gravité G

   <u>Référentiel</u> terrestre supposé galiléen, base cylindrique $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$, origine O : mouvement circulaire autour de (Oz)

   <u>Bilan des forces</u> :

   - Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_x} = mg\left(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right)$
   - Tension du fil : $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$

   PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

   <u>Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_r}$</u> : $\boxed{-mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \quad (1)}$

   <u>Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_\theta}$</u> : $mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{L\ddot{\theta} = -g\sin\theta \quad (2)}$

4. (2) multipliée par $\dot{\theta}$: $L\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\sin(\theta)\dot{\theta} \Leftrightarrow \dfrac{d\left(\frac{1}{2}L\dot{\theta}^2\right)}{dt} = \dfrac{d\left(g\cos(\theta)\right)}{dt}$

   Intégration (fonctions composées) : $\dfrac{1}{2}L\dot{\theta}^2 = g\cos(\theta) + K$

   CI : à $t = 0$: $\theta(0) = \alpha$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ soit $0 = g\cos(\alpha) + K \Rightarrow K = -g\cos(\alpha)$

   $$\boxed{\frac{1}{2}L\dot{\theta}^2 = g\left(\cos(\theta) - \cos(\alpha)\right)}$$

5. (1) : $T = mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + 2mg\left(\cos(\theta) - \cos(\alpha)\right)$

   $$\boxed{T = mg\left(3\cos(\theta) - 2\cos(\alpha)\right)}$$

6. Tension maximale pour $\theta = 0$: $\boxed{T_{\max} = mg\left(3 - 2\cos(\alpha)\right) = 9{,}9.10^2\ \text{N} < 2{,}0.10^3\ \text{N}}$

   <u>La liane ne casse pas et Tarzan peut rejoindre Jane</u> : il arrive au point B avec une vitesse angulaire $\boxed{\dot{\theta}_B = 0}$ (pour $\theta_B = -\alpha$, $\frac{1}{2}L\dot{\theta}_B{}^2 = g\left(\cos(\theta_B) - \cos(\alpha)\right) = 0$).

➢ Pour le trajet retour, seule la masse a changé : elle vaut $m + m'$.
   Tension maximale pour $\theta = 0$:

   $$\boxed{T'_{\max} = (m + m')g\left(3 - 2\cos(\alpha)\right) = 1{,}6.10^3\ \text{N} < 2{,}0.10^3\ \text{N}}$$

   <u>La liane ne casse pas !</u>