Programme de colle, semaine 10

Réels + début des suites :

- Nous avons effectué de brefs rappels sur la valeur absolue, les majorants/minorants et maxima/minima. Nous avons ensuite défini la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ et vu différentes caractérisations (epsilonesques et séquentielles). Nous avons ensuite admis que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admettait une borne supérieure et admis que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admettait un maximum.

- Nous avons ensuite défini la partie entière. Nous avons ensuite vu la définition d'une suite convergente, le théorème des gendarmes, démontré que $1/n \to 0$ et la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

- Nous avons continué le chapitre sur les réels avec la densité. Définition d'un ensemble dense, caractérisation epsilonesque et caractérisation séquentielle. Nous avons montré que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et avons défini l'approximation d'un réel à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

- Nous avons ensuite défini $\overline{\mathbb{R}}$, la convexité pour les parties de $\mathbb{R}$ et démontré qu'une partie de $\mathbb{R}$ était convexe si et seulement si c'était un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Nous avons revu le vocabulaire usuel (sommes de deux suites, produits de deux suites, suite majorée, minorée, monotone, etc.). Nous avons donné la définition d'une propriété vraie à partir d'un certain rang.

- Nous avons revu la définition de la convergence d'une suite , démontré l'unicité de la limite et montré que si une suite converge alors elle est bornée. Nous avons ensuite donné la définition d'une suite divergente, ainsi que les cas où la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous avons ensuite démontré les opérations sur les limites usuelles (addition, produit, passage à l'inverse, etc. quand il n'y a pas de formes indéterminées). Nous avons vu les liens entre limites et inégalité (passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes, une suite inférieure à une suite qui tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$).

- Nous avons continué le chapitre sur les suites avec l'étude des suites monotones (suite croissante majorée converge, suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$). Nous avons également démontré qu'une suite croissante convergente est majorée par sa limite, l'inégalité pouvant être stricte si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Nous avons enfin donné la définition de suites adjacentes et démontré que des suites adjacentes convergent vers la même limite.

Remarques sur le programme : le td sur les suites n'a pas été fait (il sera fait mercredi prochain). J'ai encouragé les étudiants à utiliser au maximum les caractérisations séquentielles pour la borne supérieure et la densité, et le chapitre sur les suites a quasiment été terminé, les étudiants peuvent donc utiliser toutes les propriétés du chapitre sur les suites (somme de suites convergentes, produit de suites convergentes, etc.) pour les calculs.

Compétences :

— Maitriser les différentes caractérisations de la bornes supérieure et choisir la plus adaptée en fonction de l'exercice étudié.
— Maitriser les différentes caractérisations de la densité et choisir la plus adaptée en fonction de l'exercice étudié.
— Manipuler des parties entières en raisonnant à l'aide d'encadrements ou par disjonction de cas.
— Savoir écrire la négation de $u_n \to l$, $u_n \to +\infty$, (u_n) n'est pas majorée, etc.
— Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ afin de montrer qu'une suite (u_n) est croissante (ou décroissante).

Questions de cours :

1. Montrer l'unicité de la limite.
2. Montrer que si (u_n) et (v_n) convergent vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_1{+}l_2$.
3. Citer le théorème de la limite monotone et montrer qu'une suite croissante majorée converge.
4. Donner la définition de suites adjacentes et montrer le théorème des suites adjacentes (c'est à dire que des suites adjacentes convergent vers la même limite).
5. Montrer que si (u_n) converge, alors toutes ses sous suites convergent vers la même limite (en remontrant que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$).
6. Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite.
7. Étudier une suite arithmético-géométrique (exemple choisi par le colleur).
8. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, donner la forme des solutions d'une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ (pas de preuve) et l'appliquer dans le cas de la suite de Fibonacci ($u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$)

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 11 : 13 et 18.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD10 : 19
- 2ieme du groupe : TD10 : 12
- 3ieme du groupe : TD10 : 4

Prochain programme : suites en entier.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 19 :

— Utiliser la propriété de l'énoncé en des valeurs précises de pour montrer que $f(0) = 0$ puis faire une récurrence pour montrer la première propriété sur $\mathbb{N}$.
— Pour étendre à $\mathbb{Z}$, on pourra utiliser la propriété en $x = n$ et $y = -n$.
— Pour la deuxième question, on pourra poser $q = \dfrac{a}{b}$ avec $b \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $b \times f\left(\dfrac{a}{b}\right) = af(1)$ en utilisant un raisonnement similaire au début de la première question.
— Utiliser l'encadrement (que l'on rejustifiera) $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$. En notant alors $q_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = x$, que $q_n \in \mathbb{Q}$ et que $q_n f(1) \leq f(x) \leq \left(q_n + \dfrac{1}{n}\right) f(1)$ ce qui vous permettra de conclure.

Exo 12 :

— Commencer par le cas où $x \in [0, 1[$. On pourra pour cela étudier le cas où $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$, $x \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right[$, etc.
— Autrement dit, on sépare selon dans quel intervalle de la forme $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ se trouve x.
— Une fois le résultat prouvé pour $x \in [0, 1[$, revenir au cas général $x \in \mathbb{R}$ et écrire $x = p + x_0$ avec $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \in [0, 1[$. En utilisant la propriété $\lfloor p + y \rfloor = p + \lfloor y \rfloor$ pour $p \in \mathbb{Z}$, vous devriez tomber sur le bon résultat.

Exo 5 :

— L'étude de fonction ne pose pas de souci, vous devriez trouver une fonction décroissante puis croissante.
— L'ensemble étudié est juste $\{f(k),\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Utiliser l'étude de fonction pour prouver que cet ensemble est non vide et minoré (ici n est fixé donc le minorant peut dépendre de n ! Par contre, il ne doit pas dépendre de k).
— Dans la seconde question, on étudie bien la borne inférieure et supérieure de l'ensemble $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
— Pour la borne inférieure, vous devriez rapidement trouver qu'il s'agit d'un minimum car la suite (a_n) est vite « grande » (utiliser la minoration de la Q1).
— Pour la borne supérieure, utiliser un théorème de comparaison pour prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ ce qui devrait vous permettre de conclure.