Devoir de cours autocorrigé, révisions vacances

1) *Logique.*

a) La négation de $A \Rightarrow B$ est :

b) Écrire la négation de $\forall M > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \geq a,\ f(x) \geq M$:

c) Écrire avec des quantificateurs « la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$ » et sa négation :

2) *Sommes.*

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k =$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 =$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k =$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n! =$

e) Pour $k, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{k} =$

f) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n =$

g) Écrire la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j}$ comme deux sommes consécutives, avec l'indice i en premier puis l'indice j puis avec l'indice j en premier puis l'indice i :

3) *Généralités sur les fonctions.*

a) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner la définition de f est paire et de f est impaire. Quelle est l'interprétation graphique de ces propriétés ?

b) Quelle propriété de sin doit-on utiliser pour calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$? Que vaut cette limite ?

c) Donner l'équation de la tangente à f en x_0 (on suppose f dérivable en x_0) :

4) *Trigo et complexes.*

a) $\begin{cases} \sin(a+b) = \\ \\ \cos(a+b) = \\ \\ \tan(a+b) = \end{cases}$

b) Pour $a \in \mathbb{R}$, factoriser $1 - e^{ia}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $z^n = -1 + i$.

d) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k.

e) Réciproquement, si $s(z) = az + b$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$, comment trouve-t-on le centre de cette similitude directe, son angle et son rapport ?

5) *Applications.* Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

a) Donner la définition de f est injective.

b) Donner la définition de f est surjective.

c) Si $g \circ f$ est bijective, quelle fonction est injective ? Surjective ?

d) Si f et g sont bijectives, justifier que $g \circ f$ est bijective et donner l'expression de $(g \circ f)^{-1}$.

6) *Fonctions usuelles.*

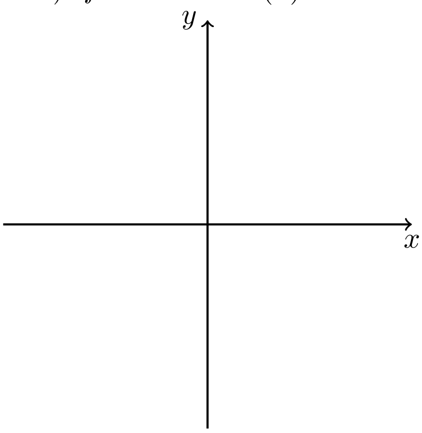
a) Montrer que $\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) *Dérivées usuelles.* Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition, de dérivabilité et sa dérivée.

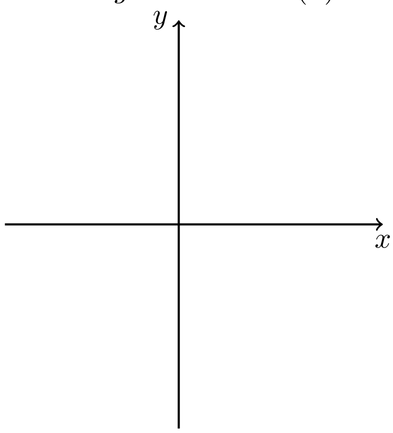
$f(x)$	D_f	D'	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$			
x^n où $n \in \mathbb{N}$			
x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$			
$\sqrt{x}$			
$\mathrm{ch}(x)$			
$\mathrm{sh}(x)$			
$\mathrm{th}(x)$			
$\ln(x)$			
$\sin(x)$			
$\cos(x)$			
$\arcsin(x)$			
$\arccos(x)$			
$\tan(x)$			
$\arctan(x)$			

c) Tracer les graphes des fonctions suivantes en faisant apparaitre également les valeurs aux bords/les limites :

i) $f : x \mapsto \arcsin(x)$

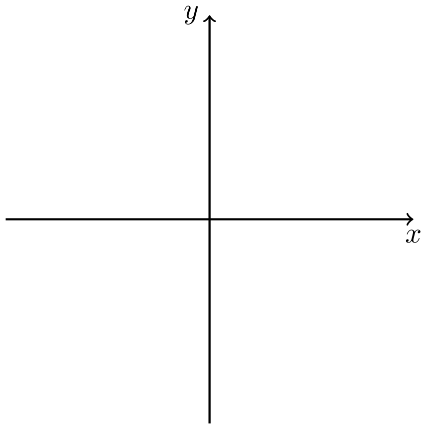


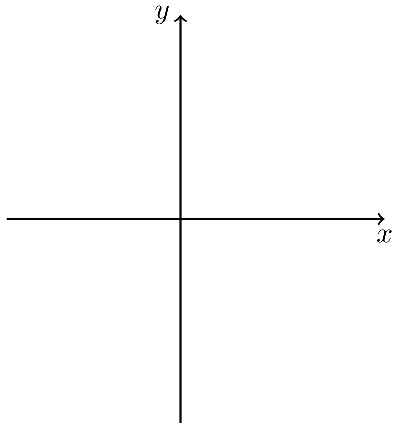
$g : x \mapsto \arctan(x)$



ii) $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $g : x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

$h : x \mapsto \mathrm{th}(x)$





d) *Théorème de la bijection.* Soient $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

i) Que faut-il vérifier pour montrer que f est une bijection de $[a, b[$ dans un intervalle I (que l'on précisera en fonction de la monotonie de f) ?

ii) À quelle(s) condition(s) sur f la réciproque de f est-elle continue sur I ? À quelle(s) condition(s) sur f la réciproque de f est-elle dérivable sur I ?

7) *Intégration.*

a) Déterminer $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^{3t} dt$ en utilisant une IPP (et en donner les hypothèses !).

b) Déterminer $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(t))^3}{t} dt$ en utilisant le changement de variable $x = \ln(t)$ (en donner les hypothèses !).

c) *Primitives usuelles.* Pour chacune des fonctions suivantes, donner l(es) intervalle(s) sur le(s)quel(s) elles sont continues et une primitive sur ce(s) intervalle(s).

f	I	$\int^x f(t)dt$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		
$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$		
$x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$		
$\sin$		
$\cos$		
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$		
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	I où u ne s'annule pas	
$x \mapsto u'(x)u(x)$	I	
$x \mapsto \ln(x)$		

d) Déterminer $\displaystyle\int_0^x \frac{t+1}{t^2+t+1}dt$.

e) Déterminer $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\sin(t)dt$ (en utilisant les complexes).