1. Logique, corrigé

Exercice 3. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

1) « $\exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$ » signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Sa négation s'écrit « $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}$ / $|u_n| > M$ ».

2) La proposition signifie que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini (quelque soit le réel M, il existe un rang à partir duquel la suite reste toujours au-dessus de ce réel). Sa négation s'écrit « $\exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N$ / $u_n < M$ ».

3) « $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - 3| \leq \varepsilon$ » signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 3 quand n tend vers l'infini. Sa négation s'écrit « $\exists \varepsilon > 0$ / $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}$ / $n \geq N$ et $|u_n - 3| > \varepsilon$ ». La négation signifie bien qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que quelque soit l'entier N, il existe un indice de la suite n plus grand tel que u_n soit loin de 3 (à une distance plus grande que ε).

4) « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ / $\forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ » signifie que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, quelque soit le réel x choisi, quelque soit le $\varepsilon > 0$ choisi alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y proche de x (à une distance inférieure à η), alors $f(y)$ est proche de $f(x)$ (à une distance inférieure à ε). Sa négation signifie qu'il existe un réel où la fonction f n'est pas continue, c'est à dire que « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0$ / $\forall \eta > 0,\ \exists y \in \mathbb{R}$ / $|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ ».

Exercice 4. Il est clair que si $x = 1$, alors $x = \sqrt{x^2 + x - 1}$. On en déduit que pour que $x = \sqrt{x^2 + x - 1}$, il suffit que $x = 1$. Il reste à voir si cette condition est également nécessaire. Essayons donc de résoudre l'équation $x = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

Remarquons que cette équation n'est définie que si $x^2 + x - 1 \geq 0$. On trouve deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. La variable x doit donc appartenir à $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.

Pour x dans cet ensemble, cette proposition implique (on élève au carré) que $x^2 = x^2 + x - 1$. Après simplification, ceci entraine que $x = 1$. On a bien $1 \geq x_2$, donc cette solution est dans l'ensemble de définition. La condition $x = 1$ est donc bien nécessaire à la proposition $x = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

Finalement, pour que $x = \sqrt{x^2 + x - 1}$, il faut et il suffit que x soit égal à 1, on a bien une équivalence.

Exercice 5. On procède dans cet exercice par analyse/synthèse. Dans la première question, on cherche des conditions sur a et dans la seconde, on vérifie si, une fois ces conditions réalisées, on a bien des solutions (et dans la troisième question leur nombre exact).

1) **Analyse.** On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on suppose que $x \in \mathbb{R}$ est solution. Remarquons tout d'abord qu'une éventuelle solution est obligatoirement supérieure ou égale à a (car on doit avoir $x - a \geq 0$) et positive (car une racine carrée est toujours positive donc on doit aussi avoir $x \geq 0$). En élevant l'équation $(*)$ au carré, et en passant tout du même côté de l'égalité, on obtient l'équation :

$$x^2 - x + a = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 4a$. Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles. On doit donc avoir $\Delta \geq 0$, ce qui entraine $a \leq \dfrac{1}{4}$. Dans ce cas, les solutions de l'équation sont $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}$.

On doit donc avoir finalement $a \leq \frac{1}{4}$ (pour le discriminant) et ensuite $x_1 \geq a$ et $x_1 \geq 0$ (si on veut que x_1 soit solution) ou $x_2 \geq a$ et $x_2 \geq 0$ (si on veut que x_2 soit solution).

2) **Synthèse.** On impose d'abord $a \leq \frac{1}{4}$. On peut ensuite remarquer, une racine carrée étant toujours positive que x_1 est la plus grande des racines et qu'il suffit donc de vérifier si x_1 vérifie $x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq a$. x_1 est clairement positif (somme de termes positifs) et puisque $a \leq \frac{1}{4}$, il suffit donc de vérifier que $x_1 \geq \frac{1}{4}$, ce qui est vrai car on a $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \geq \frac{1}{2}$. On en déduit que x_1 est bien solution du problème initial.

On a donc au moins une solution à l'équation si et seulement si $a \leq \frac{1}{4}$. Une solution est alors $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$.

3) On va ensuite voir dans quels cas la seconde solution trouvée est aussi solution. Pour avoir $x_2 \geq 0$, on doit avoir :

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{1-4a} \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1-4a} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq 1-4a \qquad \text{(la fonction } x \mapsto x^2 \text{ étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow a \geq 0. \end{aligned}$$

On doit donc déjà avoir a positif. Pour avoir ensuite $x_2 \geq a$, on doit avoir :

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{1-4a} \geq 2a &\Leftrightarrow 1-2a \geq \sqrt{1-4a} \\ &\Leftrightarrow (1-2a)^2 \geq 1-4a \qquad \text{(la fonction } x \mapsto x^2 \text{ étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow 4a^2 \geq 0. \qquad \text{et } 1-2a \geq 0 \text{ car } a \leq 1/4 \leq 1/2\ ) \end{aligned}$$

La condition trouvée est donc toujours vraie. On peut donc en déduire que dans ce cas, x_2 est solution.

En résumé, l'équation a au moins une solution si et seulement si $a \leq \frac{1}{4}$. Si $a < 0$, alors x_1 est la seule solution de l'équation. Si $0 \leq a < \frac{1}{4}$, alors x_1 et x_2 sont toutes les deux solutions et sont bien distinctes car le discriminant est non nul. Si $a = \frac{1}{4}$, on a $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ et il n'y a donc qu'une unique solution !

Exercice 7. Soient x et y réels tels que $xy > 0$ et $x+y > 0$. Le premier point implique déjà que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Supposons par l'absurde que l'on ait $x < 0$. Alors, le premier point implique que $y < 0$ et le second point est alors faux (la somme de deux réels négatifs est négative). On a donc une absurdité. Ceci entraine que $x > 0$, ce qui entraine, toujours d'après le premier point que $y > 0$.

On a bien démontré la propriété voulue.

Exercice 9. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geq x$. On a alors $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$. En effectuant un tableau de signes, on remarque que si $x \in]0,1[$, alors $x(x-1) < 0$. On en déduit donc que $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

Exercice 11. On procède par disjonction de cas. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \mathbb{Q}$, la preuve est finie. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. On a alors $bx = a \in \mathbb{Z}$. En prenant $n = b \in \mathbb{N}^*$, on a donc montré le résultat voulu.

Exercice 13. On procède par analyse/synthèse. Analyse : supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)+f(y)$. En appliquant cette propriété en $y = 0$, on obtient que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = f(0) + f(x)$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

Réciproquement (c'est la synthèse), si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, alors on a bien $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$ (puisque $0 = 0 + 0$).

La seule fonction vérifiant la propriété demandée est donc la fonction nulle.

Exercice 15. Cette preuve est fausse. Il est en effet assez facile de placer 3 points non alignés dans le plan. Le problème est dans l'hérédité dans la phrase « Mais alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent toutes les deux les points A_2 et A_n donc sont égales ». En effet, si $n = 2$, on a $A_2 = A_n$ et les deux droites sont donc juste sécantes et n'ont alors aucune raison d'être confondues ! L'hérédité est donc fausse pour passer du rang 2 au rang 3, ce qui invalide toute la suite de la récurrence.

Exercice 16. Soit $x \geq 0$. On va procéder par récurrence simple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ».

- La proposition est vraie au rang 0. En effet, on a toujours $1 \leq 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)\cdot(1+x)^n & \\ & \geq & (1+x)\cdot(1+nx) & \text{(par hypothèse de récurrence et puisque } 1+x \geq 0) \\ & \geq & 1+(n+1)x+nx^2 & \\ & \geq & 1+(n+1)x & \text{(car } nx^2 \geq 0). \end{array}$$

  On en déduit que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie. Puisque x est choisi quelconque dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la proposition demandée est vraie.

On aurait aussi pu poser comme hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n \geq 1+nx$ ». On aurait du alors définir à chaque étape un $x \geq 0$ quelconque mais la même preuve fonctionne.

Exercice 17. On peut ici ne pas procéder par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\sqrt{2n+1}$ et $n+1$ sont des réels positifs et que la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement** croissante (attention, seulement croissante ne suffit pas ici) sur $\mathbb{R}_+$, alors, on en déduit que $\sqrt{2n+1} \leq n+1$ **si et seulement si** $2n+1 \leq (n+1)^2$. Or, on a :

$$\begin{array}{rcl} (n+1)^2 - (2n+1) & = & n^2 + 2n + 1 - 2n - 1 \\ & = & n^2 \\ & \geq & 0. \end{array}$$

Ceci entraine que $2n + 1 \leq (n + 1)^2$, ce qui entraine d'après ce qui a été dit précédemment que $\sqrt{2n+1} \leq n + 1$ (on aurait aussi pu utiliser ici la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$). Puisque n est choisi quelconque dans $\mathbb{N}$, on en déduit que « $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2n+1} \leq n + 1$ ».

Exercice 18. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Pour$n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ».

La propriété est vraie au rang 0 (on a $1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$) et au rang 1 (par hypothèse).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$ et au rang n (récurrence double). On a alors :

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}}.$$

On en déduit que $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) \times \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}\right)$. Or, par hypothèse de récurrence et d'après la propriété montrée au rang 1, tous les termes à droite de l'égalité sont dans $\mathbb{Z}$ donc, puisque $\mathbb{Z}$ est stable par somme et produit, on en déduit que $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}$ est aussi dans $\mathbb{Z}$, ce qui prouve l'hypothèse au rang $n+1$.

On en déduit donc par récurrence que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour déterminer un réel x qui convient, on peut par exemple résoudre l'équation $x + \dfrac{1}{x} = 3$ par exemple, ce qui revient à résoudre $x^2 - 3x + 1 = 0$. Le discriminant vaut 8. On en déduit que les racines sont :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{8}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3-\sqrt{8}}{2}.$$

Ces deux racines vérifient donc la propriété de l'énoncé.

Exercice 19. On procède par récurrence. Pour $n \geq 8$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\exists a, b \in \mathbb{N} \ / \ n = 3a + 5b$ ».

La propriété est vraie au rang 8. En effet, on a $8 = 3 + 5$ (on prend $a = b = 1$). La propriété est également vraie au rang 9 (puisque $9 = 3 \times 3 + 5 \times 0$) et au rang 10 (puisque $10 = 3 \times 0 + 5 \times 2$).

Fixons à présent $n \geq 10$ et supposons la propriété vraie jusqu'au rang n (donc entre les rangs 8 et n). Pour montrer la propriété au rang $n+1$, on va utiliser la propriété au rang $n-2$ (qui est bien supérieur ou égal à 8). D'après $\mathcal{P}(n-2)$, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n - 2 = 3a + 5b$. On a alors $n + 1 = 3(a+1) + 5b$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (on a bien $a + 1 \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$).

La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tous les rangs supérieurs ou égaux à 8.

Exercice 20.

1) Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\exists a_n, b_n \in \mathbb{N} \ / \ (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ».

- Pour $n = 0$, il suffit de prendre $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} (1+\sqrt{2})^{n+1} & = & (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n & \\ & = & (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) & \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ & = & a_n + b_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{2} + 2b_n & \\ & = & (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}. & \end{array}$$

  On remarque alors qu'en posant $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, on a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$ (ces nouvelles valeurs sont bien entières et positives ou nulles car par hypothèse de récurrence, a_n et b_n le sont donc par somme, a_{n+1} et b_{n+1} le sont aussi).

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang, ce qui justifie l'existence des deux suites.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe plusieurs possibilités au rang n pour a_n et b_n, c'est à dire supposons qu'il existe $a'_n, b'_n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n = a'_n + \sqrt{2}b'_n$. On en déduit alors que :

$$(a_n - a'_n) = \sqrt{2}(b'_n - b_n).$$

Supposons que $b'_n \neq b_n$. On a alors $\sqrt{2} = \dfrac{a_n - a'_n}{b'_n - b_n} \in \mathbb{Q}$ (car a_n, a'_n, b_n, b'_n sont des entiers). Ceci est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On en déduit que $b'_n = b_n$, ce qui entraine après simplification que $a_n = a'_n$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien uniques.

3) On peut refaire une récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ ».

- Pour $n = 0$, on a bien $1 = 1 - 0$ (car $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$) donc la propriété est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
(1-\sqrt{2})^{n+1} & = & (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n & \\
& = & (1-\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) & \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
& = & a_n - b_n\sqrt{2} - a_n\sqrt{2} + 2b_n & \\
& = & (a_n + 2b_n) - (a_n + b_n)\sqrt{2} & \\
& = & a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2} & \text{d'après les relations de récurrence de la question 1.}
\end{array}$$

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On va multiplier les expressions de la question 1 et de la question 3. On a donc :

$$(1+\sqrt{2})^n \times (1-\sqrt{2})^n = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}).$$

On en déduit que $((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = a_n^2 - 2b_n^2$, c'est à dire que :

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (1-2)^n = (-1)^n.$$

5) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Séparons alors les cas n pair et n impair.

- Si n est pair, on a alors $a_n^2 = 2b_n^2 + 1$. Posons $p_n = a_n^2$. On a alors $p_n \in \mathbb{N}^*$ (car a_n est entier et différent de 0 puisque $a_n^2 = 2b_n^2 + 1 > 0$). De plus, puisque $b_n \geq 0$ (b_n est un entier naturel d'après la question 1), on a alors $\sqrt{p_n - 1} = b_n\sqrt{2}$. Puisque a_n est positif, on a également que $a_n = \sqrt{p_n}$. Ceci entraine d'après la question 1 que :

$$(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n} + \sqrt{p_n - 1}.$$

- Supposons à présent n impair. On a cette fois $a_n^2 = 2b_n^2 - 1$. Posons cette fois $p_n = a_n^2 + 1$. On a bien $p_n \in \mathbb{N}^*$ car a_n est entier et $a_n^2 + 1 > 0$. Puisque a_n, b_n et p_n sont positifs, en passant à la racine carrée, on obtient que $a_n = \sqrt{p_n - 1}$ et que $\sqrt{2}b_n = \sqrt{p_n}$. On en déduit donc, toujours d'après la question 1 que :

$$(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n - 1} + \sqrt{p_n}.$$

Par disjonction de cas, on a donc bien montré la propriété voulue. $(1+\sqrt{2})^n$ peut donc s'écrire comme une somme de racines carrées de deux entiers consécutifs.

Exercice 22.

1) $\sqrt{xy}$ est bien défini quand x et y sont de même signe (donc $x, y \in \mathbb{R}_+$ ou $x, y \in \mathbb{R}_-$) alors que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ n'est bien définie que quand x et y sont positifs ! Dans ce cas, les deux expressions sont égales.

2) De même, $\ln(xy)$ est bien défini quand $xy > 0$, soit quand $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x, y \in \mathbb{R}_-^*$ alors que $\ln(x) + \ln(y)$ n'a de sens que quand $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, les deux expressions sont égales.

3) $\dfrac{x^2}{x}$ n'est bien défini que si $x \neq 0$, alors que x est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, les deux expressions sont égales.

4) Les deux expressions sont bien définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais on a $\sqrt{x^2} = x$ seulement pour $x \geq 0$. En effet, on a $\sqrt{x^2} = |x|$ donc si $x < 0$, on a $\sqrt{x^2} = -x$.

5) On a $(\sqrt{x})^2$ qui n'est défini que pour $x \geq 0$. Dans ce cas, on a bien $(\sqrt{x})^2 = x$.

6) $\dfrac{xy}{x+y}$ n'est bien définie que si $x + y \neq 0$, soit $x \neq -y$. L'expression $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ n'est par contre bien définie que si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et qu'en plus $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \neq 0$, ce qui revient à $\dfrac{x+y}{xy} \neq 0$, soit $x + y \neq 0$. Si on suppose ces trois conditions réunies, alors on a :

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{xy}{x+y}.$$

Exercice 23.

1)

a) On a $\Delta = 18^2 - 4 \times 81 = (9 \times 2)^2 - 4 \times 9^2 = 0$. On a donc une racine double qui est $x_0 = -\dfrac{18}{2} = -9$. On a donc $x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$ qui est toujours positif.

b) On a $x^4 + 4x^3 - 12x^2 = x^2(x^2 + 4x - 12) = x^2(x-2)(x+6)$ (on a vu que 2 était racine évidente). On en déduit que cette expression est négative sur $[-6, 2]$ et positive en dehors (elle s'annule en -6, 0 et 2).

c) On a :

$$\begin{aligned} (x^2+1)^2 - 4x^2 &= (x^2+1-2x)(x^2+1+2x) \\ &= (x-1)^2(x+1)^2. \end{aligned}$$

Cette expression est donc toujours positive.

2)

a) On a :

$$xy + \alpha x + \beta y + \alpha\beta = x(y+\alpha) + \beta(y+\alpha) = (x+\beta)(y+\alpha).$$

Cette expression est donc positive quand $x + \beta$ et $y + \alpha$ sont de même signe et négative sinon.

b) L'expression est bien définie pour x différent de -1, -2 et -3. Pour x différent de ces valeurs, on commence par factoriser un peu les dénominateurs :

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+1)^2(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{(x+1)(x+3)} \times \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{1}{(x+1)(x+3)} \times \frac{2(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}. \end{aligned}$$

On en déduit que l'expression est donc négative si $x < -2$, positive si $x > -2$ mais n'est bien définie que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$.

c) Cette expression n'est définie que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. On a alors :

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}.$$

On en déduit que cette expression est positive pour $x\in]-1,0[$ et négative pour $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

3) Pour que cette expression soit bien définie, il faut tout d'abord que $x\neq 0$ et $y\neq 0$. Il faut également que $x^2-9\neq 0$, c'est à dire que $x\neq -3$ et $x\neq 3$. Une fois toutes ces conditions réalisées, on a :

$$\frac{\frac{x^2-x-6}{2xy}}{\frac{x^2-9}{2x^2y}}=\frac{x^2-x-6}{2xy}\times\frac{2x^2y}{x^2-9}=\frac{x(x^2-x-6)}{x^2-9}.$$

Or, $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ et $x^2-9=(x-3)(x+3)$. On en déduit donc que :

$$\frac{\frac{x^2-x-6}{2xy}}{\frac{x^2-9}{2x^2y}}=\frac{x(x+2)}{x+3}.$$

On en déduit alors le signe de cette expression (toujours pour $y\neq 0$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$) : elle est strictement négative pour $x\in]-\infty,-3[\cup]-2,0[$, nulle en $x=-2$ et strictement positive pour $x\in]-3,-2[\cup]0,+\infty[$.

a) Pour que l'expression soit bien définie, on doit avoir $2x^2-2x+1\neq 0$ et $2x^2+2x+1\neq 0$. Dans les deux cas, le discriminant vaut $4-8=-4<0$ donc tout est bien défini pour $x\in\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2-2x+1}-\frac{1}{2x^2+2x+1}&=\frac{2x^2+2x+1-(2x^2-2x+1)}{(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)}\\&=\frac{4x}{(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)}.\end{aligned}$$

Ainsi, le dénominateur étant toujours strictement positif (pas de racine réelle), cette expression est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et nulle en $x=0$.

b) On doit tout d'abord avoir $x\neq 0$ pour que $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ soit bien défini. Enfin, il faut aussi que x^2-x^{-2} soit non nul. Or, $x^2-x^{-2}=\frac{x^4-1}{x^2}$. On doit donc avoir x différent de ± 1. L'expression est donc bien définie pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x^{-2}-2}{x^2-x^{-2}}&=\frac{x^2-2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}\times\frac{x^2}{x^2}\\&=\frac{x^4-2x^2+1}{x^4-1}\\&=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)}\\&=\frac{x^2-1}{x^2+1}\\&=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}.\end{aligned}$$

On en déduit que cette expression est strictement positive pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et strictement négative pour $x\in]-1,0[\cup]0,1[$.

Exercice 24.

1)

a) Quand on multiplie des inégalités, il faut faire attention au signe de ce par quoi on multiplie. Ainsi, si $\lambda \geq 0$, on a $\lambda m_1 \leq \lambda x \leq \lambda M_1$. Si $\lambda \leq 0$, alors les inégalités s'inversent et on a $\lambda M_1 \leq \lambda x \leq \lambda m_1$.

b) On peut sommer des inégalités de même sens donc on a $m_1 + m_2 \leq x + y \leq M_1 + M_2$.

c) On ne peut pas soustraire des inégalités, par contre en multipliant par -1, on a $-M_2 \leq -y \leq -m_2$ et par somme, on a alors :

$$m_1 - M_2 \leq x - y \leq M_1 - m_2.$$

d) En multipliant par -1 l'encadrement sur x, on a $-M_1 \leq -x \leq -m_1$. Puisque $|x| = \max(-x, x) \geq 0$. On en déduit que :

$$\max(-M_1, m_1, 0) \leq |x| \leq \max(-m_1, M_1).$$

En pratique, on utilise surtout la majoration de droite, il est très rare que l'on cherche à minorer des valeurs absolues...

2) Dans cette situation, toutes les quantités sont strictement positives et on peut alors multiplier des inégalités.

a) Puisque ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(m_1) \leq \ln(x) \leq \ln(M_1)$.

b) Puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a cette fois $\dfrac{1}{M_2} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{m_2}$. *Remarquons que la fonction inverse n'est pas décroissante sur* $\mathbb{R}^*$*...*

c) Par produit d'inégalités par des termes positifs, on a $m_1 m_2 \leq xy \leq M_1 M_2$.

d) De la même manière, en utilisant le second encadrement, on a $\dfrac{m_1}{M_2} \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{M_1}{m_2}$.

Exercice 25. Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$.

1) Cette proposition est fausse en général. On peut ainsi prendre $x_1 = -2$ et $y_1 = 1$ pour obtenir un contre exemple. Cette proposition est par contre vraie si x_1 et y_1 appartiennent à $\mathbb{R}_+$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) Cette proposition est vraie (on a le droit de sommer des inégalités).

3) Cette proposition est fausse en général. Prenons comme contre exemple $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $y_2 = 2$. On remarque que notre contre exemple est encore valable dans le cas où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$.

4) Cette proposition est fausse en général. Prenons comme contre exemple $x_1 = x_2 = -2$ et $y_1 = y_2 = 1$. Cette proposition est cependant vraie si x_1, x_2, y_1, y_2 sont dans $\mathbb{R}_+$. En effet, on a $x_1 \leq y_1$ que l'on peut multiplier par x_2 (puisque x_2 est positif). On a donc $x_1 x_2 \leq y_1 x_2$. Enfin, puisque y_1 est positif, on peut multiplier l'inégalité $x_2 \leq y_2$ par y_1 ce qui donne $y_1 x_2 \leq y_1 y_2$. En utilisant ces deux inégalités, on a bien montré $x_1 x_2 \leq y_1 y_2$.

5) Cette proposition est fausse en général. Prenons comme contre exemple $x_1 = x_2 = 1$, $y_1 = 1$ et $y_2 = 2$. On remarque que notre contre exemple est encore valable dans le cas où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$. *On remarque également que l'inégalité est mal définie,* x_2 *et* y_2 *pouvant être nuls...*

6) Cette proposition est fausse en général. Prenons comme contre exemple $x_1 = -2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $y_2 = \ln(3)$. Cependant, si $y_1 \in \mathbb{R}_+$, la proposition est vraie. En effet, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a $e^{x_2} \leq e^{y_2}$. De plus, on a $x_1 \leq y_1$. On peut alors raisonner comme à la question 4 (on multiplie par $e^{x_2} > 0$ ce qui ne change pas le signe de l'inégalité et ensuite on a $y_1 e^{x_2} \leq y_1 e^{y_2}$ car y_1 est positif).

Exercice 26.

1) Considérons l'équation $|x-1|+x^2=0$. Une somme de deux termes positifs n'est nulle que si les deux termes de la somme sont nuls. On doit donc avoir $x=0$ et $x=1$ ce qui est impossible. Il n'y a donc aucune solution à cette équation.

2) On a $||x+1|+2|=4$ si et seulement si $|x+1|+2=4$ ou si $|x+1|+2=-4$. La deuxième équation n'a pas de solution car $|x+1|\geq 0$. Il ne reste donc plus que la première équation à étudier qui est équivalente à $|x+1|=2 \Leftrightarrow x+1=\pm 2 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-3$. Ce sont donc les deux seules solutions de cette équation.

3) Pour résoudre $x^2-|x|-2=0$, on va étudier deux cas, selon si x est positif ou négatif.

- Si $x\geq 0$. Alors l'équation à résoudre est $x^2-x-2=0$, qui est équivalente à $(x+1)(x-2)=0$. La seule solution supérieure ou égale à 0 est donc $x=2$.

- Si $x\leq 0$. Alors l'équation à résoudre est $x^2+x-2=0$, qui est équivalente à $(x-1)(x+2)=0$. La seule solution valable est alors $x=-2$.

Finalement, l'équation proposée à deux solutions : 2 et -2. *On aurait pu remarquer que l'équation initiale étant paire, il suffisait de résoudre sur $\mathbb{R}_+$ et d'obtenir l'autre solution par symétrie.*

4) L'équation est équivalente à l'équation $0=x-1-\ln(x)$. Cherchons à la résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ (car ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$). On remarque que l'on a une solution évidente en $x=1$. Pour savoir si il y en a d'autres, on va étudier la fonction $x\mapsto x-1-\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui est bien dérivable). On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}.$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Puisque $f(1)=0$, on en déduit que f ne s'annule en aucun autre réel. L'équation a donc une unique solution, qui est $x=1$.

Exercice 28. Supposons que tous aient les yeux bleus. Alors il ne se passerait rien. Supposons à présent qu'une personne n'ait pas les yeux bleus. Alors, il voit au premier déjeuner que tout le monde a les yeux bleus et l'annonce de l'étranger signifie que lui n'a pas les yeux bleus. Il devrait donc quitter l'ile le premier soir, ce qui n'est pas ce qui est observé. On remarque que l'annonce de l'étranger ne donne aucune information aux autres qui savaient déjà qu'il y avait un suédois aux yeux non bleus.

Supposons que deux personnes n'aient pas les yeux bleus. Il ne se passerait alors rien le premier soir (étant donné que les deux personnes qui n'ont pas les yeux bleus voient une autre personne avec des yeux non bleus, ils ne peuvent rien en déduire). Cependant, le lendemain, puisque personne n'a quitté l'ile, cela veut dire que nous ne sommes pas dans la situation décrite précédemment (un seul suédois aux yeux non bleus). Les deux suédois aux yeux non bleus en déduisent donc tous les deux qu'ils ont les yeux non bleus (sinon on serait dans la première situation) et quittent l'ile donc tous les deux ce soir là. Les autres ne font rien (ils savaient déjà tous qu'il y avait au moins deux suédois aux yeux non bleus).

On peut recommencer le raisonnement pour 3,4,5,etc. Si on part de n suédois aux yeux non bleus, ils quittent tous l'ile tous après $n-1$ jours (en raisonnant par récurrence, si au premier soir, personne n'a quitté l'ile, il y a plus d'une personne avec les yeux non bleus, s'il ne se passe rien le second soir, il y en a au moins deux, le troisième soir, au moins trois, etc. L'histoire se termine quand le dernier jour, les suédois comprennent qu'ils ont tous les yeux non bleus. Ils partent donc tous de l'ile après 99 jours (ce qui correspond au 100ième soir après l'annonce de l'étranger).