Programme de colle, semaine 8

Equations différentielles :

— Nous avons commencé le chapitre par l'étude des équations différentielles linéaires de la forme $y' + a(t)y = b(t)$ avec $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous avons commencé par étudier l'équation homogène associée et résolue entièrement cette dernière. Nous avons ensuite montré que la connaissance d'une solution particulière nous donne l'ensemble des solutions.

— Nous avons alors vu la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière quand il n'y a pas de solutions évidentes. Nous en avons déduit que les EDL d'ordre 1 admettent toujours des solutions. Nous avons également vu le principe de superposition pour la recherche d'une solution particulière. Nous avons étudié les EDLs d'ordre 1 avec condition initiale (problème de Cauchy) et avons démontré qu'il y avait existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy (toujours pour les équations différentielles de la forme précédente).

— Nous avons également traité les EDLs d'ordre 2 à coefficients constants : le cas réel, le cas complexe, la recherche de solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $\alpha e^{\beta t}$ et l'étude de la résolution dans le cas d'un problème de Cauchy.

— Nous avons terminé le chapitre par l'étude de recollement sur des ELDs d'ordre 1 et quelques exemples de changement d'inconnue.

Remarques sur le programme : Le cours sur les ensembles est presque fini mais le td n'a pas été fait (il sera fait mercredi prochain).

Compétences :

— Mettre en oeuvre la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
— Déterminer la forme des solutions (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$) d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ($y'' + ay' + by = 0$).
— Déterminer sous quelle forme chercher une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont le second membre est de la forme $x \mapsto Ce^{\gamma x}$ avec $(C, \gamma) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
— Utiliser le principe de superposition afin de simplifier la recherche des solutions particulières.
— Effectuer des raccordements d'EDLs d'ordre 1.

Questions de cours :

1. Énoncer (pas de preuve) les propriétés de l'union/intersection/complémentaire et en illustrer certaines avec un dessin (en patates) :
   - $\overline{\overline{A}} = A$.
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Donner la définition de $A \setminus B$ et montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
3. Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $B \subset C$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right.$.
4. Si $f : X \to Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$, donner la définition de l'image directe $f(A)$ et de l'image réciproque $f^{-1}(B)$. En particulier, préciser que $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \ / \ y = f(x)$ et $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.
5. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (par double inclusion).
6. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ (par équivalences).
7. Donner la définition d'une fonction indicatrice, d'un recouvrement disjoint et d'une partition.
8. Donner la définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'ordre totale et vérifier que l'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 9 : 6 et 13.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD8 : 2.2)
- 2ieme du groupe : TD8 : 4.6).
- 3ieme du groupe : TD8 : 6.

Prochain programme : ensembles.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 2.2) :

- Pour primitiver la tangente, penser à une forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Dans la méthode de la variation de la constante, normalement les termes en $\cos(x)$ se simplifient !
- La condition initiale vous permettra enfin de trouver la valeur de votre constante λ.

Exo 4.6) :

- Utiliser l'équation caractéristique pour trouver les solutions de l'équation homogène.
- Pour une solution particulière, commencer par étudier $z'' + z' + 2z = 8e^{2ix}$ et trouver une solution particulière.
- La solution particulière recherchée sera alors la partie imaginaire de la solution trouvée précédemment.

Exo 6 :

- Raisonner par analyse/synthèse en supposant f solution.
- Vous avez deux possibilités pour trouver des informations sur f :
    1. Soit vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y' + y = C$ où C est une constante et résoudre cette équation.
    2. Soit justifier que f est deux fois dérivable et dériver la relation de l'énoncé pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- Dans les deux cas, vous aurez alors une synthèse à faire pour vérifier si toutes les fonctions trouvées dans l'analyse sont solutions (normalement, vous devriez trouver que parmi vos deux constantes, l'une est nulle !).