À chercher pour lundi 30/01/2023, corrigé

Exercice 2. Remarquons tout d'abord que le polynôme nul est solution de cette équation. Pour déterminer les autres solutions, on va raisonner par analyse/synthèse.

Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ différent du polynôme nul vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Notons d le degré de P. On a alors, en considérant le degré dans l'équation précédente, que $2d = d+2$, c'est à dire que $d = 2$. Cherchons à présent des racines de P. En évaluant la relation donnée en $X = i$, on trouve que $P(-1) = 0$. -1 est donc racine de P. En ré-évaluant la relation, mais cette fois en $X = -1$, on trouve alors que 1 est racine de P. Puisque P est de degré 2, on en déduit que P est de la forme $\lambda(X+1)(X-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (sinon P est le polynôme nul). On remarque qu'en $\lambda = 0$, on retrouve le polynôme nul.

Synthèse : Réciproquement, supposons que $P(X) = \lambda(X+1)(X-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X^2) & = & \lambda(X^2+1)(X^2-1) \\ & = & (X^2+1)\cdot\lambda(X+1)(X-1) \\ & = & (X^2+1)P(X). \end{array}$$

On a donc trouvé l'ensemble des solutions de l'équation proposée. Il s'agit des polynômes s'écrivant $\lambda(X+1)(X-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 4. Par théorème de division euclidienne, on sait qu'il existe $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $\deg(R) < 2$ tel que :

$$X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = Q(X)(X^2+2) + R(X).$$

On peut calculer $Q(X)$ et $R(X)$ en posant la division euclidienne. On trouve :

$$X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = (X^2+2)(X^2+X+(a-2)) + (b-2)X - 2a + 6.$$

On a alors que X^2+2 divise le polynôme étudié si et seulement si le reste est nul, autrement dit si et seulement si $b-2 = 0$ et $-2a+6 = 0$, soit si et seulement si $b = 2$ et $a = 3$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $a \in \mathbb{R}$. Pour montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on fixe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_1 < x_2$. Puisque $0 \leq x_1 \leq x_2$, on a :

$$a - x_2 \leq a - x_1 \leq a \leq a + x_1 \leq a + x_2.$$

Puisque tout est dans l'intervalle $[a-x_2, a+x_2]$, on peut écrire $a - x_1$ et $a + x_1$ comme une combinaison convexe de $a - x_2$ et de $a + x_2$, c'est à dire qu'il existe $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que :

$$a - x_1 = t_1(a-x_2) + (1-t_1)(a+x_2) \text{ et } a + x_1 = t_2(a-x_2) + (1-t_2)(a+x_2).$$

On a alors puisque f est convexe que :

$$\begin{array}{rcl} g(x_1) & = & f(a-x_1) + f(a+x_1) \\ & = & f(t_1(a-x_2) + (1-t_1)(a+x_2)) + f(t_2(a-x_2) + (1-t_2)(a+x_2)) \\ & \leq & t_1 f(a-x_2) + (1-t_1)f(a+x_2) + t_2 f(a-x_2) + (1-t_2)f(a+x_2) \\ & \leq & (t_1+t_2)f(a-x_2) + (2-t_1-t_2)f(a+x_2). \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à calculer explicitement t_1 et t_2 pour simplifier cette expression. On a :

$$\begin{aligned}
a - x_1 = t_1(a - x_2) + (1 - t_1)(a + x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad -x_2 - x_1 = t_1(-2x_2) \\
&\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{x_1 + x_2}{2x_2}.
\end{aligned}$$

Remarquons que ceci est possible puisque $0 \leq x_1 < x_2$ donc on a bien $x_2 \neq 0$. On a de même :

$$\begin{aligned}
a + x_1 = t_2(a - x_2) + (1 - t_2)(a + x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad -x_2 + x_1 = t_2(-2x_2) \\
&\Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{x_2 - x_1}{2x_2}.
\end{aligned}$$

On a alors que $t_1 + t_2 = \dfrac{2x_2}{2x_2} = 1$. On a alors :

$$g(x_1) \leq f(a - x_2) + f(a + x_2) = g(x_2).$$

On en déduit que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.