

## DEVOIR SURVEILLÉ 5 (3 HEURES)

### Conseils de rédaction

- ❖ Le sujet comporte **9 pages**, dont 1 page en **ANNEXE**, à rendre avec la copie.
- ❖ Les raisonnements doivent s'appuyer sur des **schémas** !
- ❖ Soyez attentif à l'**énoncé** et aux **notations** utilisées : adaptez-vous !
- ❖ Les questions avec un double trait dans la marge sont **optionnelles**.
- ❖ La **calculatrice** est autorisée.

### Problème 1 – Proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN (ATS 2015) ( $\approx 40$ mn)

*Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.*

*Dans ce problème, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.*

Données :

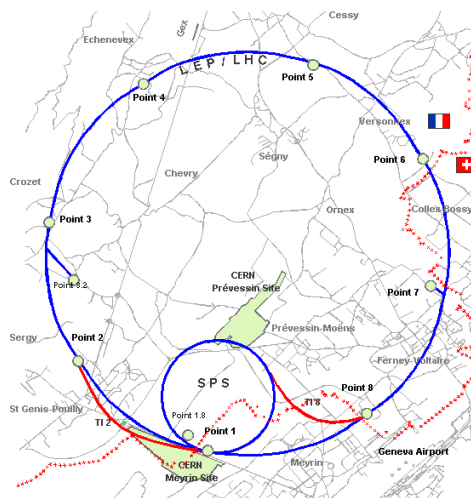
Champ de pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Masse du proton :  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Charge élémentaire :  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

***La partie C est totalement indépendante des parties A et B.***



## PARTIE A : PARTICULE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE CONSTANT ET UNIFORME

1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  ?

2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ  $E = 100 \text{ kV.m}^{-1}$ .

3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ .

4. La zone de l'espace où règne le champ  $\vec{E}$  a une longueur  $L$ . En considérant que le potentiel  $V_0$  du plan  $x = 0$  est nul, déterminer l'expression du potentiel  $V_L$  du plan  $x = L$ .

5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de  $V_L$  puis en fonction de  $E$ .

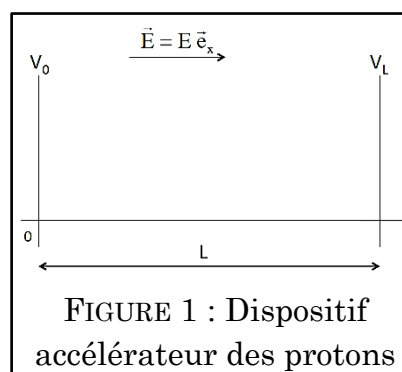


FIGURE 1 : Dispositif accélérateur des protons

## PARTIE B : UN ACCÉLÉRATEUR LINÉAIRE DE PARTICULES : LE LINAC 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale  $U_C$  toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$  parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accelératrice  $U_0$ .

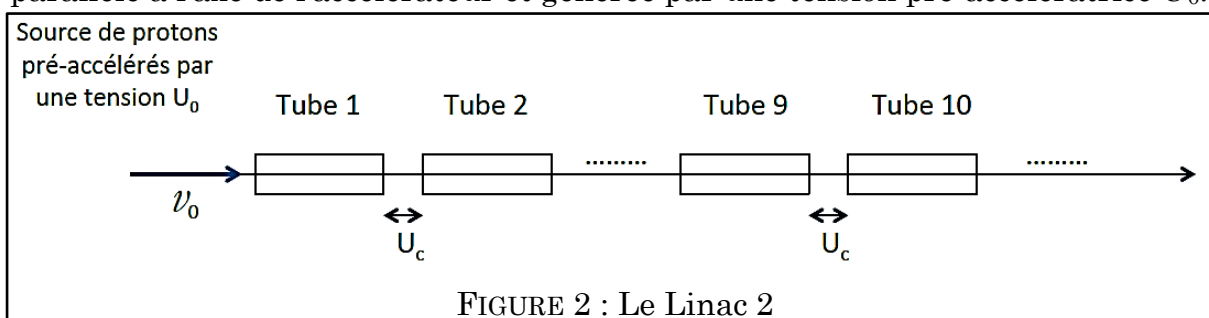


FIGURE 2 : Le Linac 2

6. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

7. Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du  $n^{\text{ème}}$  tube en fonction de  $U_C$  et  $U_0$ .

8. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10<sup>ème</sup> tube pour  $U_0 = 200 \text{ kV}$  et  $U_C = 2000 \text{ kV}$ .

9. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

### PARTIE C : DU LINAC 2 AU SYNCHROTON À PROTONS (PS)

*Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.*

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . À  $t=0$  sa vitesse  $\vec{v}_0$ , de norme  $v_0$ , est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la FIGURE 3.

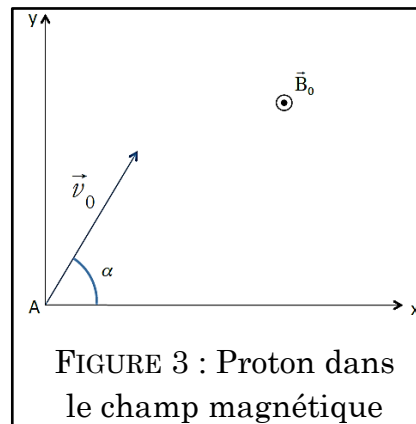


FIGURE 3 : Proton dans le champ magnétique

10. Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique  $\vec{B}_0$ .

Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

11. Représenter sur la FIGURE 3 en ANNEXE (à rendre avec la copie) la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.
12. Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.
13. On considère que la trajectoire du proton est un cercle. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de la masse du proton  $m_p$ , du champ magnétique  $B_0$ , de la charge élémentaire  $e$  et de la norme  $v_0$  de la vitesse.
14. Représenter sur la FIGURE 3 en ANNEXE l'allure de la trajectoire du proton.
15. Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique ?

## **Problème 2 – Le buggy : trajectoire et sécurité (≈ 1h30)**

*Les deux parties A et B sont totalement indépendantes.*

### PARTIE A : MODÉLISATION DU COMPORTEMENT D'UN BUGGY (CNAGEI 2017)

Dans cette partie, on étudie le mouvement d'un buggy se déplaçant sur une piste curviligne (cf. FIGURES ci-contre).

À chaque point de la piste, on associe un vecteur unitaire tangent ( $\vec{u}$ ) et un vecteur unitaire normal ( $\vec{n}$ ) (cf. FIGURE 4).

On peut, en première approche, comprendre le comportement d'un véhicule se déplaçant à la vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}$  ( $v > 0$ ) en considérant que la piste exerce sur la roue motrice une force normale  $\vec{N} = N \vec{n}$  avec  $N > 0$  et une force tangentielle  $\vec{T} = T \vec{u}$ .



Selon la vitesse d'avancement du véhicule :

- si  $\vec{T} \cdot \vec{v} > 0$ , la force  $\vec{T}$  est motrice (le moteur est sollicité) ;
- si  $\vec{T} \cdot \vec{v} < 0$ , la force  $\vec{T}$  est résistante (freinage).

Dans toute la suite de la Partie A, on adopte le modèle suivant :

- le buggy sera considéré comme un objet ponctuel  $M$ , de masse  $m$ , soumis uniquement à la pesanteur et à l'action de la piste (se ramenant aux forces  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  décrites précédemment) ;
- $M$  se déplace sur la piste représentée FIGURE 4 : cette piste est contenue dans le plan  $xAz$  du repère terrestre  $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ ,  $\vec{u}_x$  étant horizontal et  $\vec{u}_z$  étant la verticale ascendante ;
- la vitesse  $\vec{v}$  conserve une norme  $v$  constante tout au long du trajet.

Les expressions seront déterminées en fonction des données suivantes : masse  $m$ , distance  $L$ , intensité du champ de pesanteur  $g$ , rayon  $R$ , angle  $\alpha$ .

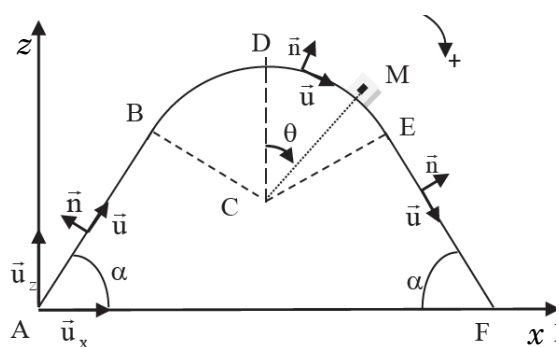


FIGURE 4 : Profil de la piste curviligne

**AB** : portion rectiligne, de longueur  $L$ , inclinée de  $\alpha$  par rapport à  $(Ax)$ .

**BDE** : arc de cercle de rayon  $R$  et de centre  $C$ .

**EF** : portion rectiligne, de longueur  $L$ , inclinée de  $\alpha$ .

Les portions **AB** et **EF** se raccordent tangentiellement à l'arc de cercle **BDE**. Les points **B** et **E** ont même cote ( $z_B = z_E$ )

1. Justifier que l'angle  $(BCD)$  est égal à  $\alpha$ . Déterminer littéralement les coordonnées  $(x, z)$  des points **B**, **D**, **E** et **F**.
2. Trajet AB : déterminer les expressions littérales de  $N$  et de  $T$ , en complétant le schéma de la FIGURE 4 en **ANNEXE (à rendre avec la copie)**.
3. Trajet EF : déterminer les expressions littérales de  $N$  et de  $T$  en complétant le schéma de la FIGURE 4 en **ANNEXE**.

#### Étude du trajet sur la portion circulaire BDE

On se place dans le repère polaire  $(C, \vec{n}, \vec{u})$  dans lequel les coordonnées de  $M$  sont  $R$  et  $\theta$  (cf. FIGURE 4).

4. Déterminer, dans ce repère polaire, les expressions des vecteurs position, vitesse  $\vec{v}$  et accélération  $\vec{a}$  de  $M$ .
5. Préciser l'expression de la norme  $v$  de la vitesse et exprimer le vecteur accélération  $\vec{a}$  en fonction de  $v$ . Quelle est la nature du mouvement ?

6. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer les expressions littérales de  $N$  et  $T$  en fonction de  $\theta$ ,  $v$  et des données, en complétant le schéma de la **FIGURE 4 en ANNEXE**.
7. Montrer qu'il faut que  $v$  vérifie  $v < v_{\text{lim}}$  pour que  $M$  ne quitte jamais la piste,  $v_{\text{lim}}$  étant une vitesse limite qu'on exprimera en fonction des données.

### Travail de la force $\vec{T}$

8. Pour chacune des quatre portions de la piste :  $AB$ ,  $BD$ ,  $DE$  et  $EF$ , déterminer l'expression littérale du travail  $W$  de la force tangentielle  $\vec{T}$  ainsi que sa qualité (motrice ou résistante). En déduire le travail  $W_{A \rightarrow F}(\vec{T})$  sur la totalité du trajet  $AF$ , ainsi que sa qualité. Commenter.

### Amélioration du modèle

On prend en compte la résistance de l'air sur le mobile par une force de frottements fluides type visqueux :  $\vec{F}_a = -h\vec{v} = -hv \vec{u}$  soit  $\vec{F}_a = -F_a \vec{u}$  de norme  $F_a$  constante puisque la norme  $v$  est constante. On note  $\vec{T}' = T' \vec{u}$  la réaction tangentielle de la piste dans ce cas et on cherche à évaluer le travail de  $\vec{T}'$  par le théorème de l'énergie mécanique.

9. Montrer que, pour toutes les portions de la piste,  $T' = T + F_a$ .
10. Déterminer le travail  $W(\vec{F}_a)$  de la force  $\vec{F}_a$  sur chacun des deux tronçons  $AD$  et  $DF$ .
11. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique afin d'en déduire le travail  $W(\vec{T}')$  de la force  $\vec{T}'$  sur chacun des deux tronçons  $AD$  et  $DF$ .
12. En déduire le travail  $W_{A \rightarrow F}(\vec{T}')$  sur le trajet total  $AF$  et commenter.

### PARTIE B : DANGER LIÉ À UN PENDULE SUSPENDU DANS UN VÉHICULE (E3A MP 2017)

Certains conducteurs aiment suspendre des objets à proximité de leur rétroviseur intérieur (porte-bonheurs...). On se propose de s'intéresser aux dangers associés à cette pratique. Pour simplifier l'étude, on considère que l'objet est assimilé à un point  $M$ , de masse  $m$ , suspendu à un fil inextensible, sans raideur, de masse négligeable devant  $m$  et de longueur  $\ell$  dont l'autre extrémité est attachée au rétroviseur (cf. FIGURE 5). On suppose que la voiture roule en ligne droite à vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  quand surgit un obstacle sur la route. Le conducteur freine brutalement avec une accélération constante  $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{e}_x$ . On négligera les frottements de l'air.

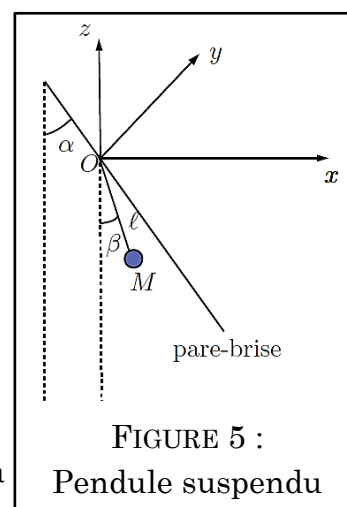


FIGURE 5 :  
Pendule suspendu

Le point de suspension  $O$  du fil est situé sur le pare-brise, ce dernier étant incliné d'un angle  $\alpha = 15^\circ$  par rapport à la verticale.

13. On considère que le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  est galiléen. Justifier que le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la voiture est galiléen lors du mouvement du véhicule à vitesse constante mais qu'il n'est pas galiléen lors de la phase de freinage.

On étudie le mouvement de  $M$  lors de la phase de freinage dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la voiture. Pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel  $\mathcal{R}'$ , il convient de rajouter, dans le bilan des forces, une force supplémentaire, appelée force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_0 = m\vec{a}_0 \vec{e}_x$ .

Le point  $M$  étant initialement au repos et la trajectoire de la voiture étant rigoureusement rectiligne, le mouvement est contenu dans le plan  $(xOz)$  lors du freinage.

14. À partir d'un bilan de forces, déterminer l'expression littérale de la position angulaire  $\beta_{eq}$  d'équilibre lors de la phase de freinage.

15. À partir d'un bilan de forces, déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la position angulaire  $\beta(t)$  du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la voiture lors de la phase de freinage.

16. La force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie}$  étant conservative, déterminer, en fonction de  $\beta$  et des données de l'énoncé, l'expression de l'énergie potentielle d'entraînement  $E_{P,ie}$ .

17. Déterminer, en fonction de  $\beta$  et des données de l'énoncé, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{P,pes}$ .

18. À l'aide d'un théorème énergétique, retrouver l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\beta(t)$ .

On se place dorénavant dans l'approximation des petits angles.

19. Montrer que l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\beta(t)$  se met sous la forme :  $\ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = \omega_0^2 \beta_{eq}$  et préciser l'expression de  $\omega_0$ .

20. Déterminer l'expression de  $\beta(t)$  en supposant qu'initialement le pendule est immobile et vertical.

21. Déterminer la valeur  $a_1$  de l'accélération maximale du véhicule pour que la masse ne heurte pas le pare-brise.

### Exercice 3 – Bille sur un cerceau ( $\approx 40$ mn)

On considère le mouvement d'une bille  $M$  de masse  $m$  pouvant coulisser sans frottement sur un cerceau de centre  $O$  et de rayon  $R$  disposé dans un plan vertical (cf. FIGURE 6). On note  $AB$  le diamètre horizontal du cerceau,  $(Ox)$  l'axe horizontal,  $(Oy)$  l'axe vertical descendant et  $\theta$  l'angle entre  $(Ox)$  et  $OM$ . La bille est attachée à un ressort de longueur à vide nulle et de raideur  $k$  dont la seconde extrémité est fixée en  $B$ . Elle ne peut se déplacer que sur le demi-cercle inférieur.

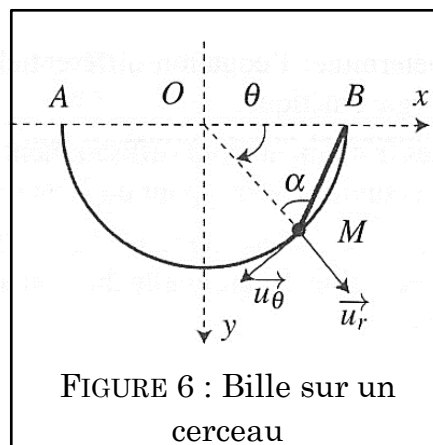


FIGURE 6 : Bille sur un cerceau

Rappels mathématiques :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

1. Montrer que la longueur du ressort s'écrit  $BM = 2R \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$ .
2. Exprimer l'énergie potentielle totale  $E_P$  du système en fonction de  $\theta$ . On choisira  $E_P(\theta = 0) = 0$ .
3. En déduire les positions d'équilibres éventuelles et leur stabilité.
4. Si l'on écarte faiblement la bille de sa position d'équilibre stable  $\theta_{eq}$  et qu'on la lâche sans vitesse initiale, à quel type de mouvement peut-on s'attendre ?
5. À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement.
6. On note  $\varepsilon$  l'écart  $\theta - \theta_{eq}$ . Initialement, on écarte la bille d'un angle  $\varepsilon_0 \ll \frac{\pi}{2}$  à partir de sa position d'équilibre stable et on la lâche sans vitesse initiale. Linéariser l'équation du mouvement et la mettre sous forme normalisée.
7. Résoudre l'équation différentielle précédente. En déduire l'expression de  $\theta(t)$  et décrire le mouvement de la bille.





## ANNEXE (à rendre avec la copie)

**NOM :**

**Problème 1 – Partie C – Questions 11 et 14**

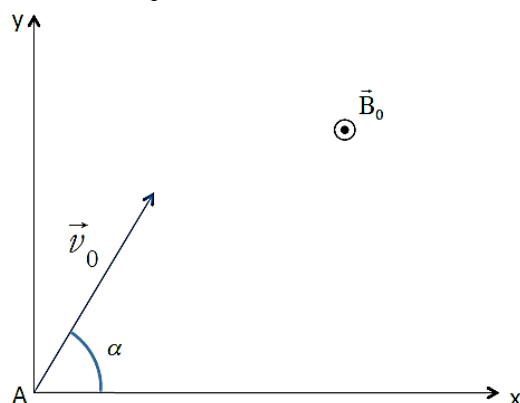


FIGURE 3 : Proton dans le champ magnétique

**Problème 2 – Partie A – Questions 2, 3, 6**

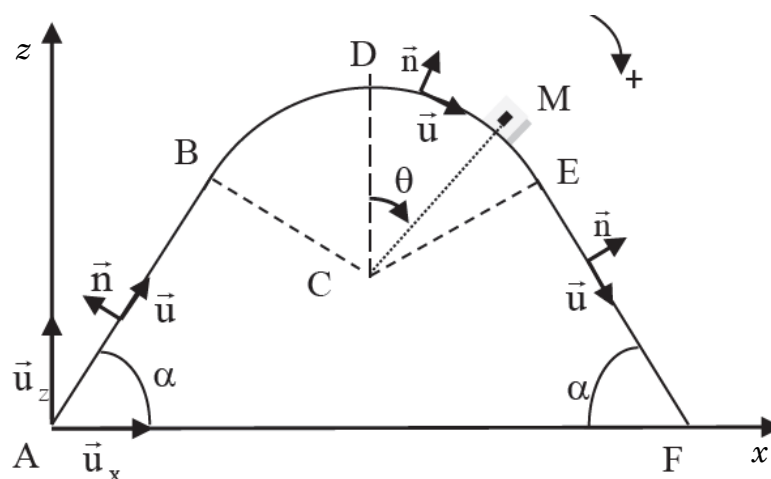


FIGURE 4 : Profil de la piste curviligne