DM 16, pour le mardi 09/05/2023

PROBLÈME
Matrices semblables à leur inverse

Partie I. Matrices semblables

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A est semblable à B si et seulement si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ / \ A = P \times B \times P^{-1}.$$

1) Montrer que la relation « être semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Quelles sont les matrices semblables à la matrice I_n ? *On justifiera.*

3) Vérifier que si A est semblable à B alors $I_n + A$ est semblable à $I_n + B$.

4) Prouver que si A est semblable à B et que B est inversible, alors A est inversible et A^{-1} est semblable à B^{-1}.

5) Montrer que si A est semblable à B, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. La réciproque est-elle vraie ? *On justifiera.*

Partie II. Matrice d'un endomorphisme nilpotent en dimension 3

E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans cette base.

6) Soient i et j deux entiers naturels. On note $w : \left\{ \begin{array}{ccc} \ker(u^{i+j}) & \to & E \\ x & \mapsto & u^j(x) \end{array} \right.$.

a) Justifier que w est une application linéaire et que $\mathrm{Im}(w) \subset \ker(u^i)$.
b) Établir que $\dim(\ker(u^{i+j})) \leq \dim(\ker(u^i)) + \dim(\ker(u^j))$.

7) On suppose dans cette question que $u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\mathrm{rg}(u) = 2$.

a) En utilisant deux fois le résultat de la question précédente, prouver que $\dim(\ker(u^2)) = 2$.
b) En déduire qu'il existe un vecteur $e \in E$ tel que $u^2(e) \neq 0_E$, et prouver que la famille $(e, u(e), u^2(e))$ est une base de E.
c) Écrire la matrice de u dans cette base et justifier que A est semblable à cette matrice.

8) On suppose dans cette question que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\mathrm{rg}(u) = 1$.

a) Justifier que l'on peut trouver un vecteur $e \in E$ tel que $u(e) \neq 0_E$, et un vecteur $f \in \ker(u)$ tel que la famille $(u(e), f)$ soit libre, puis prouver que la famille $(e, u(e), f)$ est une base de E.
b) Écrire la matrice de u dans cette base et justifier que A est semblable à cette matrice.

Partie III. Matrices semblables à leur inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

On se propose de prouver que A est alors semblable à son inverse A^{-1}. On pose :

$$N = T - I_3 \text{ et } M = N^2 - N.$$

9) Expliciter les matrices N et M et vérifier que $N^3 = M^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

10) En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes, montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$. *On rappelle/admet que les opérations élémentaires sur les lignes/colonnes préservent le rang.*

11) Vérifier que $\mathrm{rg}(N) = 2 \Leftrightarrow (\alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0)$. Quelles sont les autres possibilités pour $\mathrm{rg}(N)$? *On précisera à chaque fois une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ.*

12) *N et M sont semblables.*

a) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à N et $v \in L(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à M.

i) En utilisant la questions 6, montrer que N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Montrer le même résultat pour M et en déduire que N et M sont semblables.

b) Montrer en utilisant un raisonnement similaire que pour les autres valeurs possibles de $\mathrm{rg}(N)$, on a encore N et M semblables.

13) Montrer que T est inversible et que $T^{-1} = I_3 + M$. En déduire que T est semblable à T^{-1}.

14) Conclure que la matrice A est inversible et que A est semblable à A^{-1}.

15) Réciproquement, toute matrice inversible semblable à son inverse est-elle semblable à une matrice de la forme T ? *On justifiera.*