Programme de colle, semaine 28

Dénombrement + probabilités :

- Nous avons défini le cardinal d'un ensemble fini et étudié ses différentes propriétés (cardinal d'une union, du complémentaire, d'un produit d'ensemble, un ensemble inclus dans un autre a un cardinal inférieure, etc.). Nous avons montré que si $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles finis, alors f est injective ssi $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et f est surjective ssi $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$. Nous en avons déduit que si E et F sont deux ensembles de même cardinal, alors f est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.
- Nous avons également vu le principe des tiroirs et le lemme des bergers (et quelques exemples d'applications). Nous avons terminé avec les dénombrements usuels : nombre de fonctions d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p éléments, nombre de parties d'un ensemble à n éléments, nombre de fonctions injectives d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p éléments. Nous avons également dénombré le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments et montré que le nombre d'ensembles de cardinal p inclus dans un ensemble de cardinal n était $\binom{n}{p}$ ainsi que l'interprétation combinatoire de la formule de Pascal ainsi qu'une preuve combinatoire de la formule du binôme.

- Nous avons commencé le chapitre en définissant une expérience aléatoire ainsi que l'univers Ω associé (l'ensemble des résultats possibles). Les évènements sont les sous ensembles de Ω. Les évènements élémentaires sont les sous ensembles de Ω de cardinal 1. Nous avons alors revu rapidement la réunion, la conjonction d'évènements, le complémentaire d'un évènement, la définition de deux évènements incompatibles (disjoints) puis défini un système d'évènements complets (recouvrement disjoint de Ω).
- Nous avons défini les probabilités (sur un univers fini), vu leurs propriétés et démontré le théorème de construction d'une probabilité (si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $p_1, \ldots, p_n$ appartiennent à $\mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, alors il existe une unique probabilité telle que $\forall i,\ P(\{\omega_i\}) = p_i$).
- Nous avons ensuite défini pour A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B par $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(B)}$. Nous avons démontré que $\mathbb{P}_B$ était une probabilité sur Ω et vu quelques exemples. Nous avons alors démontré la formule des probabilités composées, des probabilités totales.
- Nous avons fini le cours avec la formule de Bayes et ensuite la définition pour deux évènements d'être indépendants ($\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$). Nous avons vu que A et B sont indépendants implique $\overline{A}$ et B indépendants puis avons étendu les définitions et propriétés à l'indépendance et l'indépendance 2 à 2 de n évènements. L'indépendance implique l'indépendance deux à deux (réciproque fausse pour $n \geq 3$).

Remarques sur le programme : le programme officiel pose à présent comme convention que $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = 0$ si $\mathbb{P}(A) = 0$. Il n'y a donc plus besoin de vérifier que les $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour utiliser les probabilités totales (ou les probabilités composées). Nous avons bien avancé le chapitre sur les variables aléatoires mais pas encore fait d'exercices dessus. Merci de privilégier les exercices de probas (avec éventuellement du dénombrement si la proba étudiée est la proba uniforme). J'ai surtout insisté sur l'importance de donner des noms aux évènements manipulés et de bien préciser le système complet d'évènement éventuellement utilisé plutôt que de construire l'univers avec précision...

Compétences :

— Déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini à l'aide de disjonctions de cas (si on décrit l'ensemble comme le nombre d'éléments vérifiant telle propriété **ou** vérifiant telle propriété **ou** vérifiant telle propriété **de manière disjointe**, c'est à dire sans rien compter en double).
— Déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini en raisonnant sur les différentes suites de possibilités possibles (on a tant de choix pour le premier élément **puis** tant de choix pour le second **puis** ... , en prenant garde à **ne rien compter en double**, auquel cas on effectue des produits pour compter le nombre total d'éléments).
— Déterminer éventuellement un univers associé à une expérience aléatoire donnée et surtout définir les événements permettant de répondre à la question posée.
— Utiliser la formule des probabilités composées pour calculer des probabilités quand on a une suite d'évènements en « cascade ».
— Utiliser la formule des probabilités totales quand on a un système complet d'événements qui permet d'étudier des événements plus simples.
— Utiliser la formule de Bayes pour « inverser » les conditionnements.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un système complet d'évènements puis énoncer et démontrer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
2. Donner la définition de deux évènements indépendants, de n évènements mutuellement indépendants ainsi que de n évènements 2 à 2 indépendants et démontrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Définir les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale), donner des exemples d'expériences aléatoires faisant intervenir ces lois (lancer d'un dé à n faces équilibré, lancer d'une pièce biaisée, nombre de succès lors de n essais indépendants d'une expérience ayant une probabilité p de succès).
4. Donner la définition de l'espérance, énoncer le théorème de transfert et montrer que l'espérance d'une va positive est positive et que l'espérance est croissante (en admettant la linéarité).
5. Donner la définition de la variance et démontrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ et que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
6. Donner l'expression des espérances/variances usuelles (uniforme sur $[\![1, n]\!]$, Bernoulli, binomiale) et expliciter le calcul pour une uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et une Bernoulli.
7. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov ainsi que l'inégalité de Tchebychev.

Exercices à chercher pour mardi : pour réviser, regardez le DM19 et TD 30 : 1 et 3.

Exercices à rédiger au propre et à me rendre mardi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD29 : 8 et 13.
- 2ieme du groupe : TD 29 : 9.
- 3ieme du groupe : TD 29 : 11.

Prochain programme : variables aléatoires.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

TD 29, exercice 8 et 13

- Pour le 8, raisonner par analyse/synthèse en supposant que $\mathbb{P}(A_k) = \lambda k^2$.
- Déterminer λ en utilisant $\mathbb{P}(A_n) = 1$.
- Justifier que $\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})$.
- Utiliser le théorème de construction des probabilités pour la synthèse pour justifier que $\mathbb{P}$ existe.
- Pour le 13, ce n'est pas très subtil. On a ici $\Omega = [\![1, 8]\!]$ avec la probabilité uniforme. Il faut alors calculer les probabilités de $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C$ et $A \cap B \cap C$ en regardant quels sont les résultats qui entrainent ces évènements.

TD 29, exercice 9

- Cet exercice est quasiment le même que l'exercice 14 corrigé en cours vendredi. On pourra reprendre la même démarche.
- On pourra noter A l'évènement : on choisit la pièce 1 et B_k l'évènement : on observe un pile au k-ième lancé.
- La famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements (pour utiliser les probas totales).
- Les évènements $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_A$ (et pour la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{A}}$).

TD 29, exercice 11 :

- Il faut bien poser des évènements pour partir. On pourra noter T l'évènement : il y a un trésor caché et C_k l'évènement : le coffre numéro k contient le trésor.
- On a alors $\mathbb{P}(T) = p$ et $\mathbb{P}_T(C_k) = \dfrac{1}{N}$.
- La probabilité recherchée est $\mathbb{P}_{\overline{C_1} \cap \ldots \cap \overline{C_{N-1}}}(C_N)$.
- Pour la calculer, on reviendra à la définition d'une probabilité conditionnelle et on calculera séparément le numérateur et le dénominateur en utilisant le sce $(T, \overline{T})$ et les probas totales.
- On a $\mathbb{P}_T(\overline{C_1} \cap \ldots \cap \overline{C_{N-1}}) = \dfrac{1}{N}$ (puisque le trésor est alors automatiquement dans le dernier coffre !).