

CHAPITRE IPC2

Mesures et incertitudes

Faire des mesures est une activité de tous les jours, liée notamment au champ économique (la mesure du temps ou d'une distance a des conséquences financières par exemple).

Dans le champ de l'activité scientifique, comme en physique-chimie, la mesure a d'autres raisons d'être. Souvent on souhaite **quantifier des phénomènes** : quel poids peut supporter un pont sans céder ? Dans le cadre de la recherche scientifique, il peut également s'agir de **choisir entre deux théories concurrentes** – dans ce cas on espère que les mesures permettent de faire ce choix. Le processus de passage d'une théorie à une autre est le sujet d'intenses discussions au sein de la communauté scientifique, et une unique expérience, aussi précise soit-elle, ne suffit pas forcément à trancher.

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quelle que soit le niveau de l'expérience.

1 Variabilité de la mesure et incertitude-type

1.1 Variabilité de la mesure

➤ Mesure

Définition : En physique-chimie, on appelle **mesure** une procédure expérimentale qui conduit à attribuer un **ensemble de valeurs numériques** à une grandeur notée X , accompagné d'une unité appropriée.

➤ Variabilité

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une **variabilité de la mesure**, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Chacune de ces valeurs numériques est également appelée **observation** par la suite. **Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure**. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique ! Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure ;
- les variations de l'environnement ;
- les instruments de mesure ;

- le processus physique lui-même ;
- la personne réalisant l'expérience.

Généralement au niveau scolaire, la **personne réalisant l'expérience** est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Il est à noter que le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel, permet patiemment de faire diminuer cette variabilité. En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, l'étudiant(e) peut donc réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

1.2 Valeur mesurée

➤ **Définition** : La **valeur mesurée** est la **meilleure estimation possible** de la grandeur d'intérêt X .

➤ Plusieurs observations

Lorsqu'on répète des observations et qu'on constate qu'elles varient, on choisit leur **moyenne arithmétique** comme meilleur estimateur.

Pour N observations x_i :
$$X = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

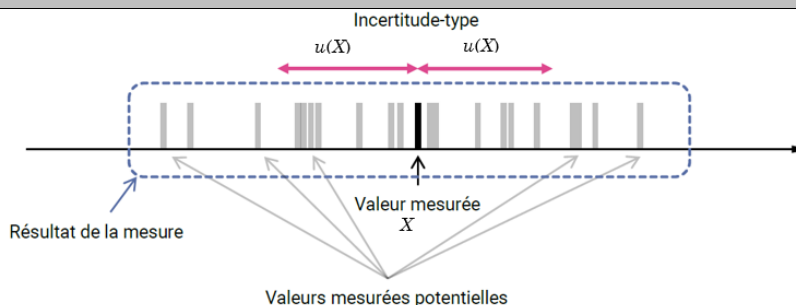
➤ Observation unique

Lors d'une **observation unique** x , la valeur mesurée est cette observation :

$$X = x$$

1.3 Incertitude-type

➤ **Définition** : La **quantification de la variabilité** d'une mesure d'une grandeur X est appelée **incertitude-type** et notée $u(X)$ (« *uncertainty* » en anglais). L'unité est la même que celle de X .



L'incertitude-type est l'estimation à l'aide d'un écart-type, de la **dispersion des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée**. La valeur mesurée est une de ces valeurs. L'incertitude-type quantifie donc la variabilité potentielle de la valeur mesurée.

1.4 Écriture du résultat de mesure

➤ Résultat de mesure

Le **résultat de la mesure** décrit l'ensemble des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur X , en le complétant par des explications sur la manière dont elles ont été obtenues.

Un **résultat de mesure** doit inclure trois informations :

- ❖ la **valeur mesurée**, sous la forme $X = \dots$ en précisant l'unité appropriée ;
- ❖ l'**incertitude-type associée à la valeur mesurée**, sous la forme $u(X) = \dots$ en utilisant la même puissance de 10 que celle de la valeur mesurée, et évidemment la même unité ;
- ❖ idéalement des informations concernant l'obtention des deux précédentes grandeurs, comme par exemple la **méthode** utilisée pour l'évaluation de l'incertitude, le **nombre d'observations** réalisées, etc.

Remarque : Il est possible de **condenser la valeur mesurée et l'incertitude-type** sous la forme $X \pm u(X)$, mais il faut alors bien préciser que ce qui suit le \pm est l'**incertitude-type**. Dans ce cas, la puissance de 10 doit être commune et en facteur.

➤ Chiffres significatifs pour l'incertitude-type

L'incertitude-type résulte d'une évaluation : on n'est jamais certain de sa valeur.

Propriété : Pour rappeler que l'**incertitude-type** est elle-même incertaine, on limite en général son **nombre de chiffres significatifs à deux**.

Pour diminuer le nombre de chiffres significatifs, on procède à un **arrondi à la valeur la plus proche** ; dans le cas où un 5 est le dernier chiffre, on arrondit par excès. Pour élever le nombre de chiffres significatifs, on rajoute des 0 à droite.

Remarque : Utiliser trop de chiffres significatifs rend plus difficile la lecture et l'écriture d'une valeur, et risque de faire croire à tort que l'incertitude est très faible. Ne pas en utiliser suffisamment conduit à des erreurs d'arrondi.

➤ Chiffres significatifs pour la valeur mesurée

- ❖ Lorsque l'incertitude-type est précisée, le nombre de chiffres significatifs de la **valeur mesurée** correspondante n'a plus de sens propre. On le choisit de manière à faciliter la lecture, en s'arrangeant pour que **le dernier chiffre de la valeur mesurée ait la même position** (dans la mantisse ou en écriture décimale) **que le dernier chiffre de l'incertitude-type**.
- ❖ Si les valeurs mesurées sont données sans les valeurs d'incertitude-type, le résultat d'un calcul (impliquant multiplications et/ou divisions) doit être écrit avec le **nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins**. Cette règle, de toute façon approximative, est rarement suivie en dehors du contexte scolaire et peut être adaptée selon la situation.

1.5 Comparaison avec une valeur de référence

➤ Valeur de référence

Définition : On appelle **valeur de référence** une valeur mesurée par une **méthode de référence**, c'est-à-dire par une méthode scientifiquement jugée comme étant supérieure à toute autre. Par extension, on appelle valeur de référence toute valeur mesurée dont l'incertitude-type est supposée négligeable devant celle obtenue par une autre méthode.

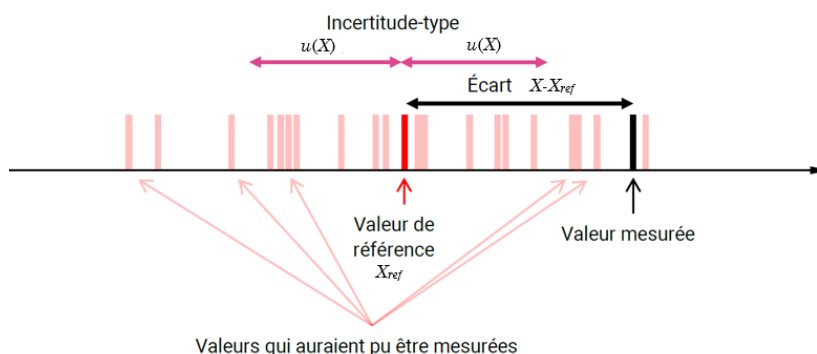
➤ Écart normalisé ou z-score

Par définition, l'incertitude-type quantifie les **fluctuations potentielles** de la valeur mesurée annoncée. Lorsque la méthode de mesure envisagée et la méthode de référence sont cohérentes, on s'attend à ce que la valeur de référence ne coïncide pas exactement avec la valeur mesurée, mais ne s'en écarte pas plus que de quelques incertitudes-type.

Définition : On définit le **z-score** comme l'écart absolu entre la valeur mesurée X et la valeur de référence X_{ref} , divisé par l'incertitude-type :

$$z = \frac{|X - X_{ref}|}{u(X)}$$

Il représente une évaluation de l'accord entre le résultat de la mesure et la valeur de référence.



➤ Compatibilité d'un résultat avec une valeur de référence

Critère de comparaison :

Lorsque $z \leq 2$, on considère que le résultat de la mesure est compatible avec la valeur de référence.

Lorsque $z > 2$, on considère qu'il ne l'est pas.

Remarque : Ce seuil à 2, d'origine historique, est fixé par convention. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Ce seuil peut différer : par exemple, en physique des particules, le seuil est fixé à 5.

➤ Que signifie « incompatibilité » (i.e. $z > 2$) ?

Des fluctuations élevées se produisent parfois : le résultat de mesure et la valeur de référence peuvent être compatibles même si le z -score est supérieur à 2. Cela arrive environ **une fois sur 20**.

❖ Il est possible que l'incertitude-type ait été **sous-estimée**, ou qu'une source d'incertitude ait été oubliée ; il convient donc de réexaminer les choix qui ont mené à son évaluation (à l'inverse si on a surestimé l'incertitude-type, on risque de conclure par erreur à un accord mesure/référence).

❖ Il est possible que **l'expérience** n'ait pas été correctement réalisée.

❖ La **modélisation** envisagée du phénomène observé n'est pas complète.

Si on ne comprend pas d'où vient un désaccord, ou si on n'est pas certain de sa provenance, il est toujours judicieux de **refaire une expérience**.

Dans tous les cas, il faut bien comprendre que la présence d'une **incompatibilité n'est pas synonyme d'échec**. La méthode de mesure peut tout à fait légitimement donner des résultats incompatibles avec une valeur de référence. Il est également possible qu'une loi physique ne soit valable que dans un domaine de paramètres plus restreint que celui qu'on explore.

➤ À retenir

En fin de compte, l'important est le soin accordé à la mesure, l'honnêteté des observations, et la complétude de leur documentation.

1.6 Comparaison de deux mesures

➤ Pour comparer deux mesures X_1 et X_2 de la même grandeur X , supposées de même valeurs moyennes mais d'incertitudes-type différentes $u(X_1)$ et $u(X_2)$, on utilise un critère quantitatif portant sur le z -score.

Définition : Le **z -score** ou écart-normalisé entre deux mesures est

$$z = \frac{|X_1 - X_2|}{\sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2)}}$$

➤ Compatibilité des mesures

Critère de comparaison :

Lorsque $z \leq 2$, on considère que les mesures sont **compatibles**.

2 Estimation de l'incertitude-type

2.1 Série de mesures : approche statistique (type A)

Dans le cas où on a effectué **plusieurs observations**, et qu'elles ne sont pas toutes identiques (la variabilité est observée), une **évaluation de nature statistique** peut alors être envisagée.

2.1.1 Histogramme

➤ **Définition** : Un **histogramme** est une représentation graphique en **colonnes jointives**, avec en abscisses une échelle des valeurs représentées, et en ordonnée le nombre (ou la proportion) de valeurs concernées.

➤ Caractéristiques

- ❖ **Étendue des observations** : la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale ;
- ❖ **Classe i** : un des intervalles au sein desquels on compte le nombre de mesures ;
- ❖ **Étendue w_i d'une classe i** est la largeur de l'intervalle correspondant ; toutes les classes ont en général la même étendue ;
- ❖ **Effectif n_i** : le nombre de mesures qui se trouve dans la classe i ;
- ❖ **Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$** la proportion des N mesures qui se trouve dans la classe i .

➤ Choix du nombre de classes

Le choix des classes doit être judicieusement fait. Trop de classes et il y aura des trous dans l'histogramme, et on ne verra plus correctement la répartition des observations ; pas assez et l'histogramme ne donnera plus d'information pertinente.

Il n'existe **pas de règle universelle** pour fixer le nombre de classes. Il faut s'en remettre au **bon sens**. Dans la mesure du possible, il faut choisir des classes dont les bornes sont faciles à lire.

➤ Tracé

Il est facile de tracer un histogramme à l'aide de **certains tableurs** (Excel de Microsoft Office ou Google Sheets), alors que c'est beaucoup moins aisé avec d'autres tableurs (Calc de LibreOffice). Un programme en **Python** permet également d'obtenir le tracé d'un histogramme.

2.1.2 Moyenne et écart-type expérimental

- Pour décrire un ensemble d'observations de manière encore plus économe qu'un histogramme, on peut se restreindre à seulement **deux paramètres** :
- ❖ le premier paramètre indique la **position** approximative de l'histogramme sur l'axe des abscisses ;
 - ❖ le second paramètre indique sa **dispersion**, autrement dit son **étalement**.
- Il existe plusieurs manières de calculer ces deux paramètres. En physique-chimie dans un cadre scolaire, on choisit souvent :
- ❖ pour la **position** : la **moyenne arithmétique**, ou **moyenne expérimentale**, des observations, notée \bar{x} ;
 - ❖ pour la **dispersion** : l'**écart-type** des observations, qu'on qualifie parfois d'**expérimental** ou d'**échantillon**, noté s_x ou σ .

Si on note x_i chacune des N observations, alors :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ et } s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

➤ Obtention des paramètres

La moyenne et l'écart-type sont calculables à l'aide de la calculatrice, de **tableurs** (Calc de LibreOffice, Google Sheets...), d'un programme en **Python**.

2.1.3 Incertitude-type

➤ Incertitude-type associée à une seule observation parmi N

L'incertitude-type associée à **une seule des N observations** exprime la variabilité potentielle de cette observation. Elle quantifie les fluctuations typiques d'une observation à l'autre. Comme on dispose de plusieurs observations, cette variabilité n'est autre que leur **dispersion**. Pour l'évaluer, on utilise **l'écart-type expérimental** de l'ensemble des N observations réalisées.

$$u(x) = s_x$$

Nota Bene : L'écart entre deux observations quelconques x_i et x_j , parmi les N observations, est de l'ordre de $u(x)$.

➤ Incertitude-type associée à la moyenne expérimentale de N observations

Quand la valeur mesurée est la moyenne de **N observations**, l'évaluation de l'incertitude-type associée à cette moyenne utilise un théorème mathématique qui, sous certaines conditions, presque toujours vérifiées en pratique, stipule que :

$$u(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Nota Bene : Si on refait une série de N observations, alors l'écart entre la nouvelle valeur moyenne et la précédente valeur moyenne sera de l'ordre de $u(\bar{x})$.

2.1.4 Écriture du résultat de mesure

- ❖ La **valeur mesurée** est $X = \bar{x} = \dots$,
- ❖ son **incertitude-type** est $u(X) = u(\bar{x}) = \dots$,
- ❖ pour **N observations** (évaluation de **type A**).

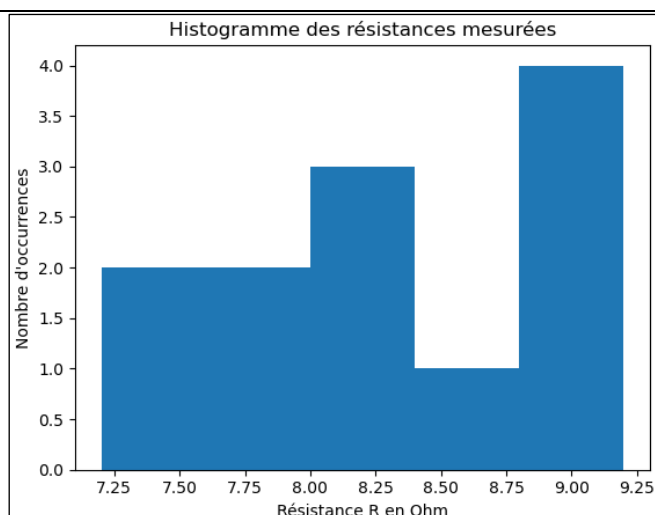
2.1.5 Exemple d'étude statistique

- La mesure d'une même résistance R est réalisée simultanément par 12 binômes d'étudiants. Les résultats obtenus sont exploités ci-dessous.

```

1  ## Importation des bibliothèques nécessaires
2  import numpy as np          # pour la manipulation des tableaux
3  import matplotlib.pyplot as plt # pour les représentations graphiques
4  from math import *
5
6  ## Données expérimentales
7  R = np.array([7.2,8.8,9.2,7.5,8.4,7.6,8.8,9.0,8.1,8.3,8.1,7.8]) # Tableau de valeurs de R en Ohm
8  N = len(R) # Longueur du vecteur R (vecteur = tableau 1D)
9
10 ## Histogramme
11 plt.hist(R,bins='rice') # Histogramme des valeurs de R, bins='rice' laisse le programme choisir le nombre de
12                          # classes de façon optimale
13 plt.xlabel('Résistance R en Ohm') # Nom de l'axe des abscisses
14 plt.ylabel("Nombre d'occurrences") # Nom de l'axe des ordonnées
15 plt.title('Histogramme des résistances mesurées') # Titre du graphique
16 plt.show() # Affichage du graphique
17
18 ## Etude statistique
19 Rmoy = np.mean(R) # Calcul de la valeur moyenne
20 u_R = np.std(R,ddof=1) # Calcul de l'écart-type expérimental
21 u_Rmoy = u_R / np.sqrt(N) # Calcul de l'incertitude-type sur la valeur moyenne
22
23 print("Le nombre de mesures est: N = ",N,"\n")
24 print(f"La valeur moyenne de R est Rmoy = {Rmoy:.5f} Ohm\n")
25 print(f"L'écart-type expérimental est uR = {u_R:.5f} Ohm \n")
26 print(f"L'incertitude-type sur la valeur moyenne est u_Rmoy = {u_Rmoy:.5f} Ohm \n")

```



Le nombre de mesures est: N = 12

La valeur moyenne de R est Rmoy = 8.23333 Ohm

L'écart-type expérimental est uR = 0.63437 Ohm

L'incertitude-type sur la valeur moyenne est u_Rmoy = 0.18313 Ohm

➤ Écriture du résultat de mesure

- ❖ Valeur mesurée : $R = 8,23 \, \Omega$
- ❖ Incertitude-type : $u(R) = 0,18 \, \Omega$
- ❖ Évaluation de type A pour $N = 12$ mesures

2.2 Mesure unique (type B)

Dans le cas où on n'a pu réaliser qu'une **observation unique**, ou bien dans le cas où la répétition des observations conduit exactement à la même valeur, c'est-à-dire que la **variabilité n'est pas observée** (mais elle existe !), on envisage une **évaluation probabiliste** de l'incertitude-type (type B).

La difficulté est de retrouver la variabilité intrinsèque à la mesure, qui est masquée par **l'appareil** employé. L'incertitude-type est évaluée par un **jugement scientifique** qui repose sur **l'expérience** et les **connaissances** générales de l'expérimentateur : c'est une compétence qui s'apprend par la pratique. Dans ce jugement, il demeure une part **d'arbitraire**, qui doit être assumée et documentée.

2.2.1 Plage de mesure

➤ **Définition** : Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la **plus petite plage de valeurs** $[x_{\min}; x_{\max}]$ dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note Δ la **demi-largeur de cet intervalle**.

➤ Construction de l'intervalle par l'expérimentateur

Si l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[x_{\min}; x_{\max}]$, on détermine x^* la **valeur centrale** de l'intervalle et Δ sa **demi-largeur** :

$$x^* = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \text{ et } \Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

La part **d'arbitraire** dans la construction d'un tel intervalle doit être assumée. Certaines personnes considéreront un intervalle plus ou moins étendu que d'autres. Tant que cela reste **raisonnable et explicité**, ce n'est pas un problème. La mesure reflète nécessairement les choix opérés.

➤ « Précision » / « tolérance » fournie par le constructeur

Très souvent, le fabricant indique une « précision » ou une « tolérance », termes vagues et mal définis, mais qui permettent d'établir un **intervalle de valeurs constituant le résultat de la mesure**. Cette indication, notée sous la forme suivante, correspond à la demi-largeur Δ :

$$\pm\Delta = \pm(p \% \cdot \text{lecture} + n \text{ UL})$$

« lecture » : unique valeur mesurée x

UL : Unité de Lecture (digit) (= UR = Unité de Représentation)

2.2.2 Incertitude-type

➤ À partir de l'intervalle construit par l'expérimentateur

Pour calculer l'écart-type de l'ensemble des valeurs comprises dans un intervalle, on fait le plus souvent l'hypothèse que ces valeurs y sont

équiréparties. Autrement dit, si on représentait un histogramme avec un grand nombre de valeurs dans cet intervalle, celui-ci serait **rectangulaire**.

Pour un intervalle $[x_{\min}; x_{\max}] = [x^* - \Delta; x^* + \Delta]$, où x^* est la **valeur centrale** de l'intervalle et Δ sa demi-largeur, **l'incertitude-type** est :

$$u(x^*) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}$$

- À partir de la précision » / « tolérance » fournie par le constructeur

Pour l'unique valeur mesurée x , **l'incertitude-type** est : $u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$

- Appareil de mesure avec incertitude-type

Dans de rares cas où le constructeur d'un appareil de mesure **fournit une incertitude-type** $u(X)$ (sans précision sur la loi de distribution), on considère que la distribution est **gaussienne** et on utilise directement $u(X)$.

2.2.3 Écriture du résultat de mesure

- ❖ La **valeur mesurée** est $X = x = \dots$, l'observation unique, ou bien $X = x^* = \dots$ la valeur centrale de l'intervalle de demi-largeur Δ ,
- ❖ **l'incertitude-type** est $u(X) = u(x) = \dots$ ou bien $u(X) = u(x^*) = \dots$,
- ❖ avec une évaluation de **type B** (distribution rectangulaire ou gaussienne).

Ce qui compte, ce n'est pas la valeur de l'incertitude-type obtenue, mais la justification des choix faits.

3 Incertitude-type composée

Si la mesure d'une grandeur X est obtenue par un calcul à partir de plusieurs autres grandeurs indépendantes, il faut déterminer **l'incertitude-type composée sur la grandeur**, i.e. effectuer une propagation des incertitudes.

3.1 Utilisation d'une formule mathématique

- Relation de type somme ou différence

Propriété : Si la grandeur recherchée s'écrit $X = \alpha X_1 \pm \beta X_2$, alors **l'incertitude-type** est $u(X) = \sqrt{\alpha^2 u^2(X_1) + \beta^2 u^2(X_2)}$

- Relation de type produit ou quotient

Propriété : Si la grandeur recherchée s'écrit $X = X_1^\alpha X_2^\beta$, alors **l'incertitude-type relative** est $\frac{u(X)}{X} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2}$

➤ Conditions d'utilisation

Ces formules mathématiques de propagation des incertitudes sont valables sous certaines hypothèses : il faut que les grandeurs soient indépendantes et, lorsque les relations ne sont pas linéaires (produit, quotient), que les incertitudes relatives restent modestes (de l'ordre du pourcent).

➤ Exemple de calcul d'incertitude-type composée

Sur le banc d'optique gradué en mm, la distance D entre l'objet et la lentille est obtenue en mesurant les abscisses x_1 de l'objet et x_2 de la lentille : $D = x_2 - x_1$. La source d'erreur associée aux mesures x_1 et x_2 étant la lecture sur le banc gradué. Comment déterminer l'incertitude-type associée à la mesure de D ?

L'expérimentateur estime que les mesures de x_1 et x_2 sont comprises dans un intervalle de demi-largeur $\Delta = 0,5$ mm. L'incertitude-type sur x_1 et x_2 est :

$$u(x_1) = u(x_2) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0,29 \text{ mm}$$

L'incertitude-type sur D est donnée par la formule de propagation des incertitudes :

$$u(D) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} = \sqrt{2u^2(x_1)} \text{ soit } u(D) = \sqrt{2}u(x_1) = 0,41 \text{ mm}$$

3.2 Simulation avec un algorithme de Monte-Carlo

- Il arrive parfois qu'on n'ait pas de formule mathématique à appliquer, ou que l'approximation qu'elle nécessite ne soit pas justifiée. Dans ce cas, on est amené à réaliser une simulation. À l'aide des informations dont on dispose, on **synthétise numériquement des observations fictives** correspondant aux mesures données. On travaille ensuite sur ces observations, pour estimer la valeur mesurée et l'écart-type. On se ramène alors à une situation où on peut faire une **évaluation de type A de l'incertitude-type**.

➤ **Définition** : Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait partie des algorithmes de type **Monte-Carlo**.

- ❖ Si l'**incertitude-type** de la mesure est connue, alors la génération des tirages aléatoires est effectuée selon une loi de distribution **gaussienne (normale)**.
- ❖ Si la **demi-largeur de la plage de valeurs** de la mesure est connue, alors la génération des tirages aléatoires est effectuée selon une loi de distribution **rectangulaire**.

➤ Exemple de simulation avec un algorithme de Monte-Carlo

Une lentille convergente, de distance focale image f'_0 , donne d'un objet AB placé dans son plan focal objet, une image située à l'infini, vue sous l'angle α tel que :

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{AB}{f'_0} \right). \text{ On ne peut pas utiliser une formule de propagation de}$$

composition des incertitudes pour déterminer l'incertitude-type composée sur

l'angle α à partir de celles sur AB et sur f_0 : on utilise la simulation de Monte-Carlo présentée ci-dessous.

```

1  ## Importation des bibliothèques
2  from matplotlib import pyplot as plt # pour les représentations graphiques
3  from math import *
4  import numpy as np                  # pour la manipulation des tableaux
5  import numpy.random as rd          # pour la génération de tirages aléatoires
6
7  ## Détermination de l'angle alpha et de son incertitude-type
8  # Grandeurs mesurées (mesures uniques)
9  AB = 3.05                           # Taille de l'objet mesurée en cm
10 fprim0 = 30.7                       # Distance focale mesurée en cm
11
12 # Incertitudes-type associées (à partir de plages de valeurs)
13 u_AB = 0.05/sqrt(3)                 # Incertitude-type associée à l'objet AB en cm
14 u_fprim0 = 0.2/sqrt(3)             # Incertitude-type associée à f_prim0 en cm
15
16 # Tirages aléatoires : simulation de Monte Carlo (MC)
17 N = 100000                          # Nombre de tirages
18 MC_AB = AB + u_AB*sqrt(3)*rd.uniform(-1,1,N) # Tirage aléatoire de N valeurs de AB avec une
19                                             # distribution uniforme sur l'intervalle
20                                             # [AB - Delta; AB + Delta] avec Delta = u(AB)*sqrt(3)
21 MC_fprim0 = fprim0 + u_fprim0*sqrt(3)*rd.uniform(-1,1,N)
22
23 # Calcul de la grandeur recherchée : angle alpha
24 MC_alpha = np.arctan(MC_AB/MC_fprim0) # N valeurs de alpha calculées à partir des N valeurs
25                                     # de AB et des N valeurs de fprim0
26
27 # Etude statistique : valeur moyenne et incertitude-type
28 alpha = np.mean(MC_alpha)           # Valeur moyenne des N valeurs simulées de alpha = meilleur
29                                     # estimateur de la mesure (unique)
30 u_alpha = np.std(MC_alpha,ddof=1)    # Incertitude-type sur alpha
31
32 # Affichage des résultats
33 print('Étude statistique après une simulation de Monte Carlo \n')
34 print(f'Valeur : alpha = {alpha:.4f} rad \n')
35 print(f'Incertitude-type : u(alpha) = {u_alpha:.4f} rad')

```

Étude statistique après une simulation de Monte Carlo

Valeur : alpha = 0.0990 rad

Incertitude-type : u(alpha) = 0.0010 rad

4 Adéquation entre le modèle et l'expérience

4.1 Régression linéaire

➤ **Définition** : Prenons des listes de mesures $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ avec leurs incertitudes. La **régression linéaire** est une opération mathématique qui consiste à trouver les meilleurs coefficients a et b tels que $ax_i + b$ soient les plus proches en moyenne des points de mesures y_i .

Remarque : En toute rigueur, il faudrait parler de **régression affine** plutôt que linéaire.

- Une régression linéaire permet de trouver la « **meilleure droite** » modélisant le mieux le comportement de ces points. Mathématiquement, on peut optimiser par un calcul dit « des moindres carrés » ce procédé.
- **Attention !** Le coefficient de corrélation R^2 n'a aucun intérêt pour valider un modèle physique ou pour estimer des incertitudes-type : il dépend de la pente !

4.2 Détermination des paramètres d'un modèle

4.2.1 Objectif

On cherche à **vérifier un modèle** $Y = aX + b$ où a est la **pente** (ou coefficient directeur) et b l'**ordonnée à l'origine**.

On dispose, après expérience, de listes de valeurs expérimentales $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$, chacune de ces valeurs possédant une certaine variabilité.

4.2.2 Obtention des paramètres

- La **régression linéaire** permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver **une valeur de a et une valeur de b** , qui constituent le résultat numérique de la **mesure**.

On nomme « régression ordinaire » la régression linéaire que les logiciels des calculatrices, des tableurs (**Calc de LibreOffice...**) et des langages de programmation (**Python...**) fournissent par défaut. Les algorithmes mis en œuvre s'appuient sur certaines hypothèses, que l'on considèrera vérifiées, en choisissant notamment les axes des abscisses et des ordonnées de façon à négliger l'incertitude associée aux abscisses x_i .

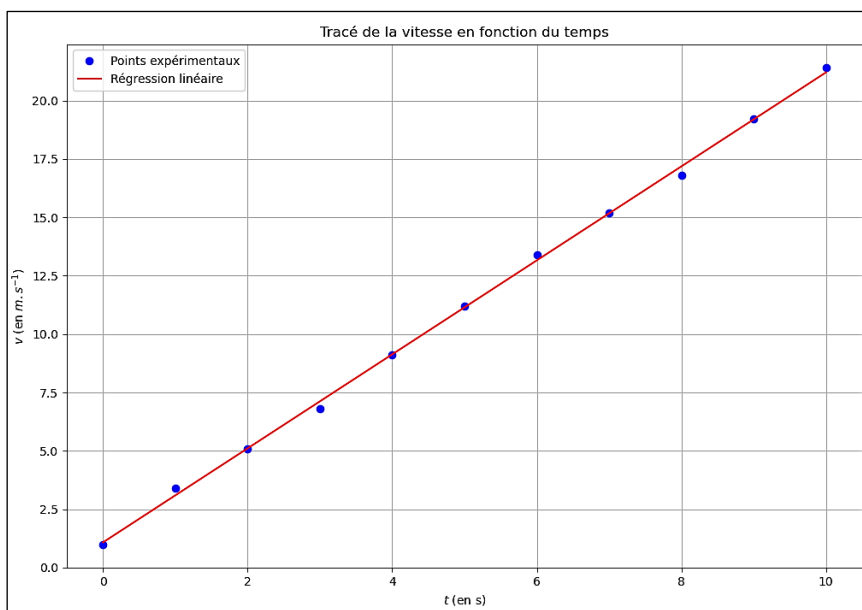
- Exemple d'obtention des paramètres

À partir de la mesure de la vitesse v à des différents instants t pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on détermine les paramètres de la régression linéaire : $v = a \cdot t + b$.

```

1  ## Importation des bibliothèques utiles
2  import numpy as np          # pour la manipulation des tableaux
3  import matplotlib.pyplot as plt  # pour les représentations graphiques
4  from math import *
5
6  ## Obtention des paramètres d'une régression linéaire
7  t = np.array([0.,1.,2.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,9.,10.]) # Tableau des valeurs des instants t
8  # = Tableau des abscisses
9  v = np.array([1.0,3.4,5.1,6.8,9.1,11.2,13.4,15.2,16.8,19.2,21.4]) # Tableau des valeurs de vitesses v
10 # = Tableau des ordonnées
11
12 p = np.polyfit(x, y, n)
13 Modélise la courbe y = f(x) par un polynôme de degré n
14 Arguments:
15     x : tableau des abscisses
16     y : tableau des ordonnées
17     n : degré du polynôme (pour n = 1 : régression linéaire)
18 Renvoie:
19     p : tableau des coefficients du polynôme tel que :
20     p[0] : coefficient de degré n, p[1] : coefficient de degré n-1...
21     p[n] : coefficient de degré 0
22
23 p = np.polyfit(t, v, 1) # Tableau des coefficients de la régression linéaire de v en fonction de t
24 vmodele = p[0]*t + p[1] # Equation de la régression linéaire vmodele en fonction de t
25
26 plt.figure(figsize = (12,8)) # Taille de la figure
27 plt.plot(t,v,'bo',label="Points expérimentaux") # Tracé des points expérimentaux avec des ronds bleus
28 plt.plot(t,vmodele,'r-',label="Régression linéaire") # Tracé de la régression linéaire en trait rouge
29 plt.xlabel(r"$t$ (en s)") # Nom de l'axe des abscisses
30 plt.ylabel(r"$v$ (en $m.s^{-1}$)") # Nom de l'axe des ordonnées
31 plt.title('Tracé de la vitesse en fonction du temps') # Titre du graphique
32 plt.grid() # Affichage de la grille
33 plt.legend(loc = 'upper left') # Affichage de la légende en haut à gauche
34 plt.show() # Affichage du graphique
35
36 # Affichage des coefficients de la régression linéaire
37 print(f'Pente = accélération: a = {p[0]:.2f} m.s-2 \n') # Affichage du résultat avec 2 décimales
38 print(f"Ordonnée à l'origine = vitesse initiale : b = v0 = {p[1]:.2f} m.s-1")

```



Pente = accélération: $a = 2.01 \text{ m.s}^{-2}$

Ordonnée à l'origine = vitesse initiale : $b = v_0 = 1.08 \text{ m.s}^{-1}$

4.2.3 Validation des paramètres du modèle

➤ Validation graphique

On commence par réaliser une régression linéaire **sans incertitudes** sur les valeurs mesurées avec un **tableur** (**Calc de LibreOffice...**) ou un programme **Python**. Pour s'assurer qu'une régression linéaire est correcte, on tracera **systématiquement** sur un **graphique** les **données mesurées** ainsi que la **droite de la régression linéaire**. Le modèle sera validé si, à l'œil, les points de mesure sont bien alignés et que la droite passe **le plus proche** possible de tous les points. Si l'on constate par exemple que les points ressemblent plus à une parabole qu'à une droite, la régression linéaire ne sera pas l'outil approprié.

➤ Validation avec les barres d'incertitudes

On représente ensuite les barres d'incertitudes sur les ordonnées y_i , associées aux **incertitudes-type** $u(y_i)$ sur chaque mesure. On vérifie, à l'œil, que la droite passe **à l'intérieur** des barres d'incertitudes.

➤ Validation avec les résidus

Pour préciser la validation graphique, et notamment si les barres d'incertitudes sont trop petites, on trace les **résidus**, qui représentent l'écart entre les valeurs mesurées et le modèle : $y_i - (ax_i + b)$. On vérifie qu'ils sont répartis aléatoirement autour de 0 et qu'ils ne s'en écartent pas plus de deux fois l'incertitude-type $u(y_i)$. La validation visuelle est complétée en représentant, soit les **barres d'incertitudes** associées à chaque résidu, soit le **z-score**

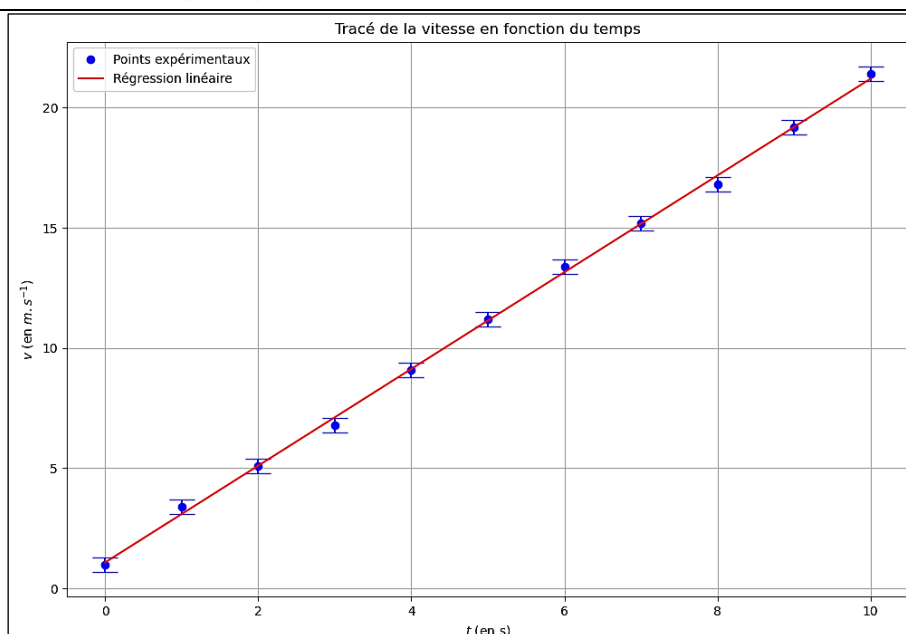
$$z = \left| \frac{y_i - (ax_i + b)}{u(y_i)} \right| \quad (\text{en s'assurant que } z \leq 2).$$

Remarque : On rappelle que l'incertitude-type est une estimation de la variabilité de la mesure. Ainsi, il est naturel que les points expérimentaux soient éloignés de la valeur de la modélisation de quelques incertitudes-type.

➤ Exemple de validation des paramètres du modèle (suite de l'exemple précédent)

❖ Avec les barres d'incertitudes

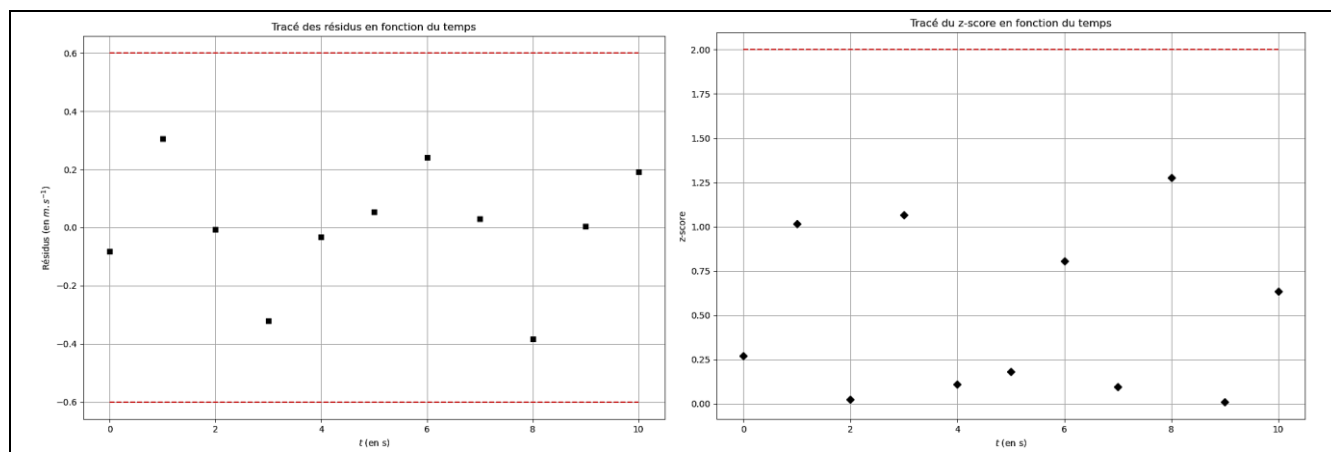
```
40 ## Validation des paramètres de la régression linéaire
41 # Tracé des barres d'incertitudes
42 u_v = 0.3*np.ones(len(v)) # Tableau des incertitudes-type sur la vitesse v
43 plt.figure(figsize = (12,8)) # Taille de la figure
44 plt.plot(t,v,'bo',label="Points expérimentaux") # Tracé des points expérimentaux avec des ronds bleus
45 plt.errorbar(t,v,yerr = u_v,fmt = 'none',capsize = 10,ecolor = 'blue') # Tracé des barres
46 # d'incertitudes sur la vitesse v, avec des limites horizontales
47 plt.plot(t,vmodele,'r-',label="Régression linéaire") # Tracé de la régression linéaire en trait rouge
48 plt.xlabel(r"$t$ (en s)") # Nom de l'axe des abscisses
49 plt.ylabel(r"$v$ (en $m.s^{-1}$)") # Nom de l'axe des ordonnées
50 plt.title('Tracé de la vitesse en fonction du temps') # Titre du graphique
51 plt.grid() # Affichage de la grille
52 plt.legend(loc = 'upper left') # Affichage de la légende en haut à gauche
53 plt.show() # Affichage du graphique
```



Commentaire : la droite passe quasiment à l'intérieur de toutes les barres d'incertitudes : le modèle linéaire est validé.

❖ Avec les résidus

```
55 # Tracé des résidus
56 res = v - vmodele # Calcul des résidus
57 plt.figure(figsize = (12,8)) # Taille de la figure
58 plt.plot(t,res,'ks') # Tracé des résidus avec des étoiles noires
59 plt.plot(t,2*u_v,'r--') # Tracé de la limite à 2 fois l'incertitude-type sur v en pointillé rouge
60 plt.plot(t,-2*u_v,'r--') # Tracé de la limite à -2 fois l'incertitude-type sur v en pointillé rouge
61 plt.xlabel(r"$t$ (en s)") # Nom de l'axe des abscisses
62 plt.ylabel(r"$Résidu$ (en $m.s^{-1}$)") # Nom de l'axe des ordonnées
63 plt.title('Tracé des résidus en fonction du temps') # Titre du graphique
64 plt.grid() # Affichage de la grille
65 plt.show() # Affichage du graphique
66
67 # Tracé du z-score pour les résidus
68 z = abs(res/u_v) # Calcul du z-score pour les résidus
69 plt.figure(figsize = (12,8)) # Taille de la figure
70 plt.plot(t,z,'kD') # Tracé du z-score avec des losanges noirs
71 plt.plot(t,2*np.ones(len(t)), 'r--') # Tracé de la limite à 2 en pointillé rouge
72 plt.xlabel(r"$t$ (en s)") # Nom de l'axe des abscisses
73 plt.ylabel(r"$z-score$") # Nom de l'axe des ordonnées
74 plt.title('Tracé du z-score en fonction du temps') # Titre du graphique
75 plt.grid() # Affichage de la grille
76 plt.show() # Affichage du graphique
```



Commentaire : sur la figure de gauche, on vérifie que les résidus sont répartis aléatoirement autour de 0 et qu'ils ne s'en écartent pas plus de deux fois l'incertitude-type $u(y_i)$; sur la figure de droite, on vérifie que le z-score est tel que $z \leq 2$: le modèle linéaire est validé.

4.3 Détermination des incertitudes-type des paramètres d'un modèle

➤ Détermination idéale des incertitudes-type

Pour estimer **l'incertitude-type** des paramètres a et b du modèle linéaire, il faut réaliser des ensembles de nouvelles mesures $\{x_i, y_i\}$ puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtiendra, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-type sur les paramètres. Bien souvent, un tel procédé est bien trop long et donc peu pratique.

➤ Détermination usuelle des incertitudes-type

- ❖ Lors d'une expérience identique réalisée par plusieurs expérimentateurs conduisant à une régression linéaire pour chacun des expérimentateurs, **l'incertitude-type finale** est uniquement évaluée par l'étude de la **variabilité des résultats de la régression linéaire**, via une étude **statistique**. Il n'est pas nécessaire d'étudier plus en détail la régression linéaire. Dans ce cas, la régression linéaire est une des **étapes du protocole** de mesure, et sa variabilité est intégrée lors du calcul de variabilité final.
- ❖ Si le modèle recherché implique $b=0$ (relation linéaire), on cherche uniquement à estimer a . On peut donc calculer un grand nombre de valeur de a par la relation $\frac{y_i}{x_i}$ puis réaliser un **traitement statistique** sur ces valeurs. Le grand intérêt est que, dans ce cas, les N points de mesures conduisent à N valeurs de a ayant une variabilité claire.
- ❖ Dans tous les autres cas, on peut estimer la variabilité de a et b par une **simulation Monte-Carlo**, réalisée avec un programme Python.