# Corrigé du DEVOIR À LA MAISON 7

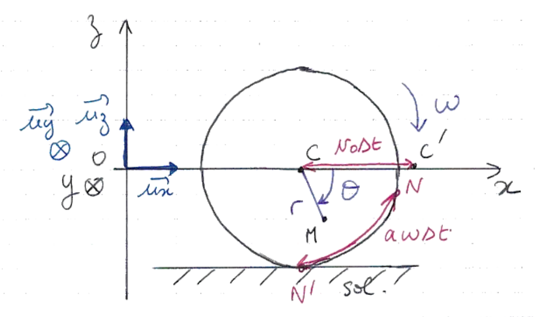
## Exercice 1 – Mouvement cycloïdal

1. L'origine $O$ est choisie de sorte que $\overrightarrow{OC} = x_C \overrightarrow{u_x} = v_0 t\ \overrightarrow{u_x}$

   Relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$

   On définit l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{u_x}\right)$ tel que $\dot{\theta} = \omega$, soit $\theta = \omega t$

   Projection sur la base $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z}\right)$ :




   $$\overrightarrow{CM} = r\cos(\theta)\overrightarrow{u_x} - r\sin(\theta)\overrightarrow{u_z} = r\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} - r\sin(\omega t)\overrightarrow{u_z}$$

   Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = v_0 t\ \overrightarrow{u_x} + r\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} - r\sin(\omega t)\overrightarrow{u_z}$

   Coordonnées du point $M$ (qui correspondent aux composantes du vecteur position en coordonnées cartésiennes) :

   $$\boxed{M : \begin{cases} x = v_0 t \ + r\cos(\omega t) \\ y = 0 \\ z = -r\sin(\omega t) \end{cases}}$$

   Vecteur vitesse :

   $$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(v_0 \ - r\omega\sin(\omega t)\right)\overrightarrow{u_x} - r\omega\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}} \text{ ou } \boxed{\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{x} = v_0 \ - r\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -r\omega\cos(\omega t) \end{vmatrix}}$$

2. Pendant un intervalle de temps $\Delta t$, le centre $C$ de la roue parcourt la distance $CC' = v_0\Delta t$ et un point $N$ situé à la périphérie de la roue, à la distance $a$ de $C$, parcourt un arc de cercle de longueur $NN' = a\Delta\theta = a\omega\Delta t$.
   La condition de non-dérapage, ou de non glissement, est que ces deux distances soient identiques : $a\omega\Delta t = v_0\Delta t$ soit $\boxed{v_0 = a\omega}$.

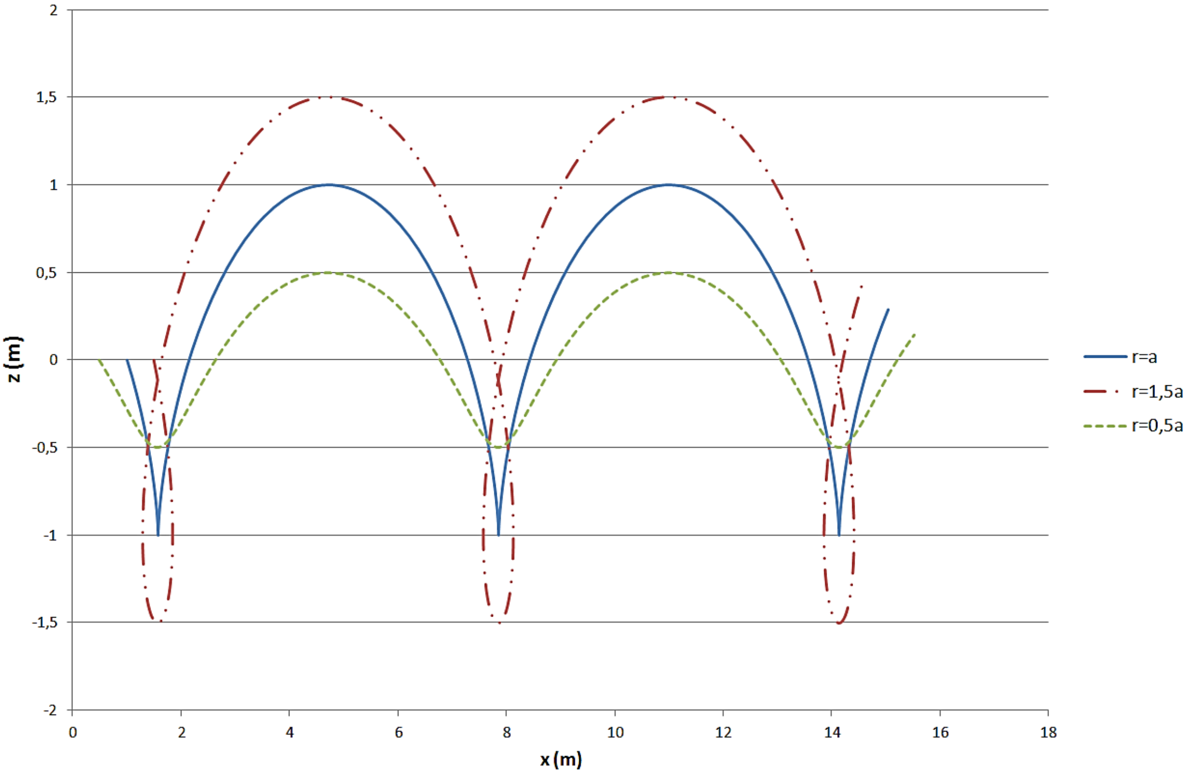
3. Équations horaires :

   $$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \ + r\cos(\omega t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -r\sin(\omega t) \end{cases}}$$

4. Les trajectoires tracées avec Excel ou Python sont des cycloïdes.
   Pour $r = 0{,}5a < a$, le point $M$ à l'intérieur de la roue avance dans le même sens que la roue.

Pour $r = a$, les points de rebroussement de la courbe correspondent aux points d'annulation de la vitesse, lorsque $M$ est en contact avec le sol.
Pour $r = 1{,}5a > a$, le point $M$ revient en arrière.

Les courbes ci-dessous sont tracées avec $a = 1$ m, $v_0 = 1$ m.s$^{-1}$ (donc $\omega = 1$ rad.s$^{-1}$)




# Exercice 2 – Course de voitures

1. La trajectoire de la voiture A est un demi-cercle de centre $O$ et de rayon $r_A$ donc : $\boxed{L_A = \pi r_A = 283 \text{ m}}$.

➢ La trajectoire de la voiture B est constituée par deux segments de droite de longueur $OO'$ (au début et à la fin de la trajectoire) et d'un demi-cercle de centre $O'$ et de rayon $r_B$ donc : $\boxed{L_B = 2OO' + \pi r_B = 2(r_A - r_B) + \pi r_B = 266 \text{ m}}$

➢ <u>Conclusion</u> : la <u>trajectoire de B semble la meilleure</u> puisque plus courte de 17 m (= 6 %).

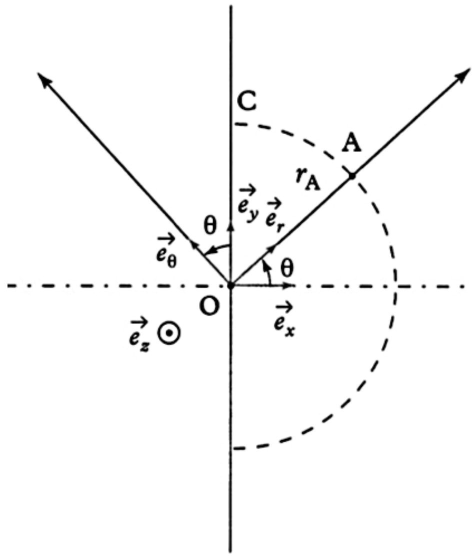
2. Le mouvement étant circulaire, on utilise les coordonnées polaires.

➢ <u>Voiture A</u> :
<u>Vecteur position</u> : $\overrightarrow{OA} = r_A \overrightarrow{u_r}$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = r_A \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = r_A \dot{\theta}_A \overrightarrow{u_\theta} \text{ car } r_a = cste$$

Vitesse angulaire : $\dot{\theta}_A = \dfrac{v_A}{r_A} = cste$ car $v_A = cste$ (mouvement uniforme)




Accélération :

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = r_A \ddot{\theta}_A \overrightarrow{u_\theta} - r_A \dot{\theta}_A{}^2 \overrightarrow{u_r} = -r_A \dot{\theta}_A{}^2 \overrightarrow{u_r} \quad \text{car}$$

$\ddot{\theta}_A = 0$.

$$\vec{a}_A = -r_A \left(\frac{v_A}{r_A}\right)^2 \overrightarrow{u_r} \text{ soit } \boxed{\vec{a}_A = -\frac{v_A{}^2}{r_A} \overrightarrow{u_r}}$$

Cas limite : $a_A = 0{,}8g = \dfrac{v_A{}^2}{r_A} \Leftrightarrow v_A = \sqrt{0{,}8 g r_A}$

$$\boxed{a_A < 0{,}8g \Leftrightarrow v_A < v_{A\lim} = \sqrt{0{,}8 g r_A} = 27 \text{ m.s}^{-1} = 96 \text{ km.h}^{-1}}$$

- Voiture B :

  Vecteur position : $\overrightarrow{O'B} = r_B \overrightarrow{u_r}$

  Vecteur vitesse : $\vec{v}_B = \dfrac{d\overrightarrow{O'B}}{dt} = r_B \dot{\theta}_B \overrightarrow{u_\theta}$

  Vitesse angulaire : $\dot{\theta}_B = \dfrac{v_B}{r_B} = cste$ car $v_B = cste$ (mouvement uniforme)

  Accélération : $\vec{a}_B = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = -r_B \dot{\theta}_B{}^2 \overrightarrow{u_r}$ soit $\boxed{\vec{a}_B = -\dfrac{v_B{}^2}{r_B} \overrightarrow{u_r}}$

  Condition à satisfaire : $\boxed{a_B < 0{,}8g \Leftrightarrow v_B < v_{B\lim} = \sqrt{0{,}8 g r_B} = 24 \text{ m.s}^{-1} = 87 \text{ km.h}^{-1}}$

3. Comme les vitesses sont constantes sur les deux trajectoires, et égales aux vitesses limites (il faut aller le plus vite possible pour gagner la course, tout en respectant la condition $a < 0{,}8g$ !), les durées pour aller de *C'* à *C* sont telles que $\Delta t = \dfrac{L}{v_{\lim}}$

   Voiture A : $\boxed{\Delta t_A = \dfrac{L_A}{v_{A\lim}} = \pi \sqrt{\dfrac{r_A}{0{,}8g}} = 10{,}6 \text{ s}}$

   Voiture B : $\boxed{\Delta t_B = \dfrac{L_B}{v_{B\lim}} = \dfrac{2(r_A - r_B) + \pi r_B}{0{,}8 g r_B} = 10{,}9 \text{ s}}$

   Conclusion : Même si la trajectoire de B est plus courte, la voiture B met plus de temps. C'est donc la trajectoire de la voiture A qui est la meilleure, dans le cadre d'une course de voitures !