Problème 1 : Polynômes de Tchebychev et équation différentielle

Partie I : Polynômes de Tchebychev

Q1) On procède par récurrence double en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} ».

- La propriété est vraie au rang 1 (car $T_1 = X$) et au rang 2 (car $T_2 = 2X^2 - 1$).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On a alors :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

  On a $\deg(2XT_{n+1}) = n+2 > \deg(T_n) = n$. Ceci entraîne que le degré de T_{n+2} est $n+2$. Pour obtenir son coefficient dominant, seul le terme $2XT_{n+1}$ contribue au degré $n+2$. On en déduit que le coefficient dominant de T_{n+2} est $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n+2$.
- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

Q2) Rappelons tout d'abord que $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$ et donc que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.$$

On montre alors à nouveau par récurrence double que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ».

- La propriété est vraie au rang 0 (car $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$) et au rang 1 (car $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On a alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+1+1)\theta) + \cos((n+1-1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

Q3) *Factorisation de* T_n *et une égalité.*

a) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta_k)) &= \cos(n\theta_k) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= 0 \qquad (\text{car } \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]). \end{aligned}$$

On a donc bien $\cos(\theta_k)$ racine de T_n.

b) On remarque que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\frac{\pi}{2n} \leqslant \theta_k \leqslant \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{2n}$. On a donc tous les θ_k distincts 2 à 2 et tous les θ_k sont dans $[0, \pi]$. Puisque cos est strictement décroissante sur cet intervalle, on en déduit que les $\cos(\theta_k)$ sont tous distincts deux à deux. On a donc trouvé n racines distinctes et T_n est de degré n. On a donc trouvé toutes les racines de T_n et elles sont toutes simples. Puisque le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, on en déduit que :

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\theta_k)).$$

c) On a $T_0(0) = 1$, $T_1(0) = 0$. De plus, d'après la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev évaluée en 0, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T_{m+2} = 2 \times 0 \times T_{m+1}(0) - T_m(0) = -T_m(0)$. Par récurrence directe, on a alors que pour $m \in \mathbb{N}$, $T_{2m}(0) = (-1)^m$ et $T_{2m+1} = 0$.

Puisque $T_n(0)$ correspond au coefficient constant du polynôme T_n, on en déduit d'après les relations coefficients/racines que :

$$2^{n-1}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\theta_k) = T_n(0).$$

On en déduit que si n est impair, $\prod_{k=0}^{n-1} \cos(\theta_k) = 0$ et que si n est pair de la forme $n = 2m$, on a :

$$\prod_{k=0}^{2m-1} \cos(\theta_k) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}.$$

Q4) *L'équation différentielle.*

a) Si on dérive l'égalité de la question 2 par rapport à θ (tout est dérivable comme composée de fonctions dérivables), on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$-\sin(\theta) T_n'(\cos(\theta)) = -n \sin(n\theta).$$

On va alors élever au carré cette propriété et utiliser la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} & \sin^2(\theta)(T_n'(\cos(\theta)))^2 = n^2 \sin^2(n\theta) \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2(\theta)(T_n'(\cos(\theta)))^2 = n^2(1-\cos^2(n\theta)) \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2(\theta)(T_n'(\cos(\theta)))^2 = n^2(1-T_n(\cos(\theta))). \end{aligned}$$

De plus, puisque $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$, on en déduit en posant $y = \cos(\theta)$ que l'égalité précédente est vraie pour toutes les valeurs de $y \in [-1,1]$ (on remplace au préalable $\sin^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta) = 1-y^2$. En divisant ensuite par $n^2 \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in [-1,1]$:

$$(1-y^2)\left(\frac{T_n'(y)}{n}\right)^2 = 1 - T_n^2(y).$$

b) L'égalité précédente est vraie en une infinité de valeurs (tout l'intervalle $[-1,1]$). Puisque l'on a des polynômes de part et d'autre de l'égalité égaux en plus de points que leur degré, ils sont égaux en tant que polynômes d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1-X^2)\left(\frac{T_n'}{n}\right)^2 = 1 - T_n^2$.

Partie II : Détermination de Q

Q5) Si P est constant, on en déduit que $(1-X^2)Q^2$ est aussi un polynôme constant. Or, si Q n'est pas nul, ce polynôme est de degré supérieur ou égal à 2. On a donc $Q = 0$, ce qui force alors P a être égal à 1 ou à -1.

Q6) On a $\deg(1-P^2) = 2n$ puisque P est de degré n et $\deg((1-X^2)Q^2) = 2 + 2\deg(Q)$ (le degré d'un produit est la somme des degrés). On a donc $2n = 2 + 2\deg(Q)$, soit $\deg(Q) = n-1$.

Q7) a) Puisque $\deg(Q) = n-1$, on a $\sum_{i=1}^r k_i = n-1$. On a de plus $r \leqslant n-1$ (Q ne peut pas avoir plus de racines que son degré).

b) Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Si on évalue l'équation (E) en α_i, on obtient $1-\alpha_i^2)(Q^2(\alpha_i)) = 1-P^2(\alpha_i)$, soit $0 = 1-P^2(\alpha_i)$. On a donc $P(\alpha_i) \neq 0$ donc α_i n'est pas racine de P.

c) D'après le critère de multiplicité portant sur le polynôme dérivé, si α_i est racine de multiplicité k_i de Q, alors α_i est racine de multiplicité $k_i - 1$ de Q'. Par produit de polynôme, on en déduit que α_i est racine de multiplicité $2k_i - 1$ dans le polynôme QQ', et donc à fortiori de multiplicité supérieure ou égale à $2k_i - 1$ dans le polynôme $2(1-X^2)QQ'$.

Puisque α_i est racine de multiplicité k_i de Q, alors elle est racine de multiplicité $2k_i$ dans Q^2 (si Q s'écrit sous la forme $(X-\alpha_i)^{k_i} \times Q_2$ où α_i n'est pas racine de Q_2, alors Q^2 s'écrit sous la forme $(X-\alpha_i)^{2k_i} \times Q_2^2$). En multipliant par X, on ne perd pas d'ordre de multiplicité et α_i est donc racine de $-2XQ^2$ de multiplicité supérieure ou égale à $2k_i$.

d) En dérivant (E), on obtient :
$$-2XQ^2 + 2(1-X^2)Q'Q = -2P'P.$$
D'après la question précédente, α_i est racine de multiplicité supérieure ou égale à $2k_i - 1$ des deux polynômes de gauche. On peut donc factoriser ces deux polynômes par $(X-\alpha_i)^{2k_i-1}$. Ceci entraîne que α_i est aussi racine de multiplicité supérieure ou égale à $2k_i - 1$ du polynôme $-2P'P$. Puisqu'elle n'est pas racine de P, c'est donc qu'elle est racine de P' avec une multiplicité supérieure ou égale à $2k_i - 1$.

e) D'après la question précédente, si on compte combien de fois les $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ sont racines de P' (avec multiplicité), on trouve un nombre de racines supérieur ou égal à $\sum_{i=1}^{r}(2k_i-1) = 2\sum_{i=1}^{r} k_i - r = 2(n-1) - r$. Puisque P' est de degré $n-1$ et qu'il ne peut pas avoir plus de racines (avec multiplicité) que son degré, on a donc $2(n-1) - r \leqslant n-1$, ce qui entraîne $n-1 \leqslant r$. Or, on a montré dans la question II.3.a que $r \leqslant n-1$. On a donc bien $r = n-1$.

f) Ceci entraîne que Q qui est de degré $n-1$ a $n-1$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$ (puisque $r = n-1$). Elles sont donc toutes simples (sinon Q serait de degré strictement supérieur à $n-1$), ce qui entraîne que tous les k_i sont égaux à 1. On en déduit alors, puisque P' est de degré $n-1$ et qu'il admet les α_i comme racines avec une multiplicité supérieure ou égale à $2k_i - 1 = 1$ que tous les α_i sont racines de P' avec une multiplicité au moins égale à 1 et exactement égale à 1 car sinon P' aurait plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

Q8) Si on note $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P, alors P' a un coefficient dominant égal à $n\lambda$ (par dérivation de X^n en nX^{n-1}). De plus, puisque (P,Q) est solution de (E), on en déduit que les deux polynômes qui apparaissent dans l'équation ont le même coefficient dominant. Puisque le coefficient dominant de $1-P^2$ est $-\lambda^2$ (coefficient du terme de degré $2n$) et que celui de $(1-X^2)Q^2$ est égal à $-\lambda_1^2$ (où λ_1 est le coefficient dominant de Q), on en déduit que $\lambda_1^2 = \lambda^2$, soit $\lambda_1 = \pm\lambda$, ce qui entraîne que le coefficient dominant de Q est égal à $\pm\frac{1}{n}\mathrm{dom}(P')$ où $\mathrm{dom}(P')$ est le coefficient dominant de P'.
Puisque Q a exactement $n-1$ racines simples qui sont les $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$, et que Q n'est pas nul (car il est de degré $n-1 \geqslant 0$), on en déduit que Q s'écrit sous la forme $Q = \lambda_1 \prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i)$ où $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant de Q. On peut factoriser de même P' avec les mêmes arguments (toutes les racines sont simples et ce sont exactement les $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$. Ces deux polynômes ne diffèrent donc que par leur coefficient dominant, ce qui entraîne d'après le calcul précédent que :
$$Q = \pm\frac{1}{n}P'.$$

Partie III : Détermination de P

Q9) *Des propriétés de h.*

a) h est une composée/produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi]$. Pour $\theta \in [0,\pi]$, on a :
$$h'(\theta) = -2\sin(\theta)P'(\cos(\theta))P(\cos(\theta)).$$
En évaluant la relation (E) en 1, on trouve que $0 = 1 - P^2(1)$, soit $P^2(1) = 1$ et donc $h(0) = 1$. Puisque $\sin(0) = 0$, on a aussi $h'(0) = 0$.

b) La fonction sinus ne s'annule que 2 fois sur $[0,\pi]$. De plus, P et P' sont des polynômes et ne s'annulent donc qu'un nombre fini de fois sur $[-1,1]$ et ici $\cos(\theta)$ ne prend que des valeurs entre -1 et 1 sur $[0,\pi]$ (et il ne prend qu'une seule fois ces valeurs car cos est strictement décroissant sur cet intervalle). Par produit de fonctions qui s'annulent un nombre fini de fois, on en déduit que h' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0,\pi]$.

Q10) On a pour $\theta \in [0,\pi]$:
$$h'(\theta)^2 = 4\sin^2(\theta)(P'(\cos(\theta)))^2(P(\cos(\theta)))^2.$$
En évaluant la relation (E) en $\cos(\theta)$, on trouve (en utilisant $1-\cos^2 = \sin^2$ et en multipliant par n^2) :
$$\sin^2(\theta)(P'(\cos(\theta)))^2 = n^2(1-(P(\cos(\theta)))^2).$$
On a donc :
$$(h'(\theta))^2 = 4n^2(P(\cos(\theta)))^2(1-(P(\cos(\theta)))^2) = 4n^2h(\theta)(1-h(\theta)).$$

Q11) Tout est dérivable car h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi]$, et on a donc pour tout $\theta \in [0,\pi]$:

$$2h''(\theta)h'(\theta) = 4n^2(h'(\theta)(1-h(\theta)) - h(\theta)h'(\theta)).$$

Notons A l'ensemble (fini) des valeurs où h' s'annule sur $[0,\pi]$. On a donc pour tout $\theta \in [0,\pi] \setminus \mathrm{A}$:

$$2h''(\theta) = 4n^2(1-2h(\theta)).$$

En divisant par 2, on obtient que pour tout $\theta \in [0,\pi] \setminus \mathrm{A}$, $h''(\theta) + 4n^2 h(\theta) = 2n^2$. Puisque cette égalité est vraie sur un sous-ensemble dense de $[0,\pi]$ (on a retiré un nombre fini de points de l'intervalle) et que toutes les fonctions qui appraissent dans l'égalité sont continues (car h est $\mathscr{C}^2$), on en déduit que cette égalité est valable sur tout $[0,\pi]$ (pour tous les éléments $a \in \mathrm{A}$, on peut trouver une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0,\pi] \setminus \mathrm{A}$ qui tend vers a et puisqu'on a l'égalité $h''(a_k) + 4n^2 h(a_k) = 2n^2$, on a par passage à la limite que $h''(a) + 4n^2 h(a) = 2n^2$ pour tout $a \in \mathrm{A}$).

Q12) L'équation caractéristique associée à cette équation est $\mathrm{X}^2 + 4n^2 = 0$ de racines $\pm 2in$. Une solution particulière est $h(\theta) = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall \theta \in [0,\pi],\ h(\theta) = \lambda \cos(2n\theta) + \mu \sin(2n\theta) + \frac{1}{2}.$$

On utilise alors les conditions initiales $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$ pour obtenir $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = 0$. On a donc pour $\theta \in [0,\pi]$:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \frac{1}{2}(\cos(2n\theta) + 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos^2(n\theta) - \sin^2(n\theta) + 1\right) \\ &= \cos^2(n\theta). \end{aligned}$$

Q13) D'après la partie I, on a pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. On a donc pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $\mathrm{P}^2(\cos(\theta)) = \mathrm{T}_n^2(\cos(\theta))$. On a donc P^2 et T_n^2 qui sont deux polynômes égaux en une infinité de valeurs donc ils sont égaux en tant que polynômes d'où $\mathrm{P}^2 = \mathrm{T}_n^2$. On a donc :

$$\mathrm{P}^2 - \mathrm{T}_n^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{P} - \mathrm{T}_n)(\mathrm{P} + \mathrm{T}_n) = 0.$$

Un produit de polynôme nul implique que l'un des deux polynômes est nul (on a un anneau intègre). On en déduit que $\mathrm{P} = \mathrm{T}_n$ ou $\mathrm{P} = -\mathrm{T}_n$.

Q14) Soit $n \geqslant 1$. D'après les deux parties précédentes, si $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ est solution de (E), alors on a $\mathrm{P} = \pm\mathrm{T}_n$ (d'après le III) et d'après le II, $\mathrm{Q} = \pm\frac{\mathrm{P}'}{n} = \pm\frac{\mathrm{T}_n'}{n}$ (mais pas forcément le même signe). Réciproquement, d'après la partie I, tous ces couples sont solutions. On a donc 4 couples solutions qui sont $(-\frac{\mathrm{T}_n'}{n}, -\mathrm{T}_n)$, $(-\frac{\mathrm{T}_n'}{n}, \mathrm{T}_n)$, $(\frac{\mathrm{T}_n'}{n}, -\mathrm{T}_n)$ et $(\frac{\mathrm{T}_n'}{n}, \mathrm{T}_n)$

Problème 2 : Analyse

Partie I : Dérivation sous le signe intégrale

Q1) Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, soient x, x_0 dans I.
La fonction $t \mapsto (x-t)f''(t)$ est continue sur I, on peut donc l'intégrer entre x_0 et x. On procède à une IPP en posant $u(t) = x - t$ et $v(t) = f'(t)$ (u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I, $u'(t) = -1$ et $v'(t) = f''(t)$) :

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = \left[(x-t)f'(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne :

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = -(x-x_0)f'(x_0) + \left[f(t)\right]_{x_0}^{x} = \boxed{f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)}$$

Q2) On considère deux nombres complexes α et β avec $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant 0$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) = \beta e^{-x\alpha}$.

a) La fonction $x \mapsto -x\alpha$ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que la composée $x \mapsto e^{-x\alpha}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$$

On a $f'(x) = -\alpha\beta e^{-x\alpha}$ et donc $f''(x) = \alpha^2\beta e^{-x\alpha}$, d'où $|f''(x)| = |\alpha^2\beta| \times |e^{-x\alpha}|$, en posant $\alpha = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x\alpha} = e^{-ax}e^{-ibx}$, or $|e^{ibx}| = 1$ et $|e^{-ax}| \leqslant 1$ car $a = \mathrm{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}^+$, d'où $-ax \leqslant 0$. Finalement :

$$\boxed{|f''(x)| \leqslant |\alpha^2\beta|.}$$

b) Soient x, $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Supposons $x_0 \leqslant x$, alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{x_0}^{x} \left|(x-t)f''(t)\right|\mathrm{d}t \quad \text{(majoration en module)}\\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} (x-t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t \quad (\text{car } x-t \geqslant 0)\\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} (x-t)|\alpha^2\beta|\,\mathrm{d}t \quad (\text{car } |f''(t)| \leqslant |\alpha^2\beta|)\\
&\leqslant |\alpha^2\beta| \int_{x_0}^{x} (x-t)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant |\alpha^2\beta| \left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = |\alpha^2\beta|\frac{(x-x_0)^2}{2}
\end{aligned}$$

Supposons $x_0 \geqslant x$, alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{x}^{x_0} \left|(x-t)f''(t)\right|\mathrm{d}t \quad \text{(majoration en module)}\\
&\leqslant \int_{x}^{x_0} (t-x)|f''(t)|\,\mathrm{d}t \quad (\text{car } x-t \leqslant 0)\\
&\leqslant \int_{x}^{x_0} (t-x)|\alpha^2\beta|\,\mathrm{d}t \quad (\text{car } |f''(t)| \leqslant |\alpha^2\beta|)\\
&\leqslant |\alpha^2\beta| \int_{x}^{x_0} (t-x)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant |\alpha^2\beta| \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = |\alpha^2\beta|\frac{(x_0-x)^2}{2} = |\alpha^2\beta|\frac{(x-x_0)^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dans les deux cas, } \left|\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|\alpha^2\beta|(x-x_0)^2}$$

c) Soient, x et x_0 dans $\mathbb{R}^+$, d'après Q1, on sait que $\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)$, ce qui donne $\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = \beta e^{-x\alpha} - \beta e^{-x_0\alpha} + (x-x_0)\alpha\beta e^{-x_0\alpha}$, en appliquant l'inégalité de la question précédente, on a :

$$\boxed{\left|\beta e^{-x\alpha} - \beta e^{-x_0\alpha} + (x-x_0)\alpha\beta e^{-x_0\alpha}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|\alpha^2\beta|(x-x_0)^2.}$$

Q3) Soient $\alpha, \beta : [a;b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ $(a < b)$, avec $\mathrm{Re}(\alpha(t)) \geqslant 0$.

a) Les fonctions α et β sont continues, donc les fonctions $|\beta|$ et $|\alpha|$ sont continues sur le segment $[a;b]$ et à valeurs réelles, elles sont donc bornées (et atteignent leur borne).

$$\boxed{\text{Il existe donc deux réels } \mathrm{M}_1 \text{ et } \mathrm{M}_2 \text{ tels que } \forall t \in [a;b],\ |\beta(t)| \leqslant \mathrm{M}_1 \text{ et } |\alpha(t)| \leqslant \mathrm{M}_2.}$$

b) Soit $t \in [a;b]$, puisque $\mathrm{Re}(\alpha(t)) \geqslant 0$, on peut appliquer le résultat de la question précédente (Q2c), ce qui donne : $\left|\beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x-x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha(t)^2\beta(t)|(x-x_0)^2$, or $|\beta(t)| \leqslant \mathrm{M}_1$ et $|\alpha(t)| \leqslant \mathrm{M}_2$, donc $|\alpha(t)^2\beta(t)| = |\alpha(t)|^2|\beta(t)| \leqslant \mathrm{M}_2^2 \times \mathrm{M}_1$.

$$\boxed{\left|\beta(t)e^{-x\alpha(t)}-\beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}+(x-x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right|\leqslant \tfrac{1}{2}M_1M_2^2(x-x_0)^2.}$$

c) Soient x, x_0 dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t-\int_a^b \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t+(x-x_0)\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\Big| \\ =\left|\int_a^b \left(\beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t-\beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}+(x-x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right)\mathrm{d}t\right| \\ \leqslant \int_0^b \left|\beta(t)e^{-x\alpha(t)}-\beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}+(x-x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right|\mathrm{d}t \\ \leqslant \int_a^b \frac{1}{2}M_1M_2^2(x-x_0)^2\,\mathrm{d}t=\frac{b-a}{2}M_1M_2^2(x-x_0)^2\end{aligned}$$

d) Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.

i) Avec cette notation, l'inégalité de la question précédente devient :

$$\left|F(x)-F(x_0)+(x-x_0)\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \frac{b-a}{2}M_1M_2^2(x-x_0)^2$$

En multipliant de part et d'autre par $\frac{1}{|x-x_0|}$, on obtient :

$$\boxed{\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}+\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \frac{b-a}{2}M_1M_2^2|x-x_0|}$$

ii) On a $\frac{b-a}{2}M_1M_2^2|x-x_0|\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$, donc $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}+\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right|\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$, ce qui signifie que $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}-\displaystyle\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire :

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+,\text{ et } \forall x\in\mathbb{R}^+,\ F'(x)=-\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t.}$$

iii) F est dérivable 0 fois sur $\mathbb{R}^+$, et $F^{(0)}(x)=(-1)^0\int_a^b \beta(t)\alpha^0(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.
Supposons pour un entier n, que F est dérivable n fois sur $\mathbb{R}^+$ et que $F^{(n)}(x)=(-1)^n\int_a^b \beta(t)\alpha^n(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $\delta\colon t\mapsto \beta(t)\alpha^n(t)$ est continue sur $[a;b]$, donc d'après ce qui précède, la fonction $H\colon x\mapsto \int_a^b \delta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée est $H'(x)=-\int_a^b \delta(t)\alpha(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, donc $F^{(n)}=(-1)^nH$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée est :
$F^{(n)\prime}(x)=(-1)^nH'(x)=(-1)^{n+1}\int_a^b \delta(t)\alpha^n(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t=(-1)^{n+1}\int_a^b \beta(t)\alpha^{n+1}(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$. Ce qui montre que F est dérivable $n+1$ sur $\mathbb{R}^+$, et que $F^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\int_a^b \beta(t)\alpha^{n+1}(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.
Puisque F est dérivable n fois pour tout $n\in\mathbb{N}$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ avec } F^{(n)}(x)=(-1)^n\int_a^b \beta(t)\alpha^n(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t,\text{ pour } x\geqslant 0 \text{ et } n\in\mathbb{N}.}$$

Pour $m>0$, en remarquant que $F(x)=G(x+m)$ *où* $G(x)=\displaystyle\int_a^b \gamma(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, *avec* $\gamma(t)=\beta(t)e^{m\alpha(t)}$, *on montrerait qu'en fait* F *est définie et* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *avec la même formule pour* $F^{(n)}(x)$. *On admettra ce résultat pour la suite.*

Partie II : Un premier exemple : intégrale de Gauss

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $G(x)=F(x^2)=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *et* $H(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q4) Posons pour $t\in[0;1]$, $\alpha(t)=1+t^2$ et $\beta(t)=\frac{1}{1+t^2}$, par les théorèmes généraux, ces fonctions sont continues sur $[0;1]$, et $\forall t\in[0;1]$, $\mathrm{Re}(\alpha(t))=1+t^2\geqslant 0$, donc d'après la partie I, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=-\int_0^1 \beta(t)\alpha(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire $\boxed{F'(x)=-\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t}$.

La fonction G est une composée de deux fonctions dérivables, donc G est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}'(x) = 2x\mathrm{F}'(x^2)$, c'est à dire $\boxed{\mathrm{G}'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t}$.

La fonction H est la primitive de la fonction $f\colon\ t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0 (cette fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc H existe). On en déduit que H est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{H}'(x) = e^{-x^2}}$.

Q5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{G}'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2xe^{x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$, on procède à un changement de variable en posant $u(t) = tx$ (qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), ce qui donne $du = xdt$, quand $t = 0$ alors $u = 0$ et quand $t = 1$ alors $u = x$, ce qui donne :

$$\mathrm{G}'(x) = -2e^{x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}x\,\mathrm{d}t = -2e^{x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \boxed{-2\mathrm{H}'(x)\mathrm{H}(x)}$$

b) On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}'(x) = \left[-\mathrm{H}^2(x)\right]'$, et donc il existe un constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}(x) = -\mathrm{H}^2(x) + c$. On évalue en 0 pour trouver c, ce qui donne $\mathrm{G}(0) = -\mathrm{H}^2(0) + c$, or $\mathrm{H}(0) = 0$ et $\mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{G}(x) = -\mathrm{H}^2(x) + \tfrac{\pi}{4}.}$$

Q6) a) Soit x réel, $|\mathrm{G}(x)| = |e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t| = e^{-x^2}|\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t|$, or pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et $e^{-x^2t^2} \leqslant 1$, donc $|\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t| \leqslant \int_0^1 |\frac{1}{1+t^2}e^{-x^2t^2}|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel, on a } |\mathrm{G}(x)| \leqslant e^{-x^2}.}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = 0}$.

b) On a pour tout réel x, $\mathrm{H}^2(x) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{G(X)}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{H}^2(x) = \frac{\pi}{4}$, par continuité de la fonction racine carrée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} |\mathrm{H}(x)| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, or lorsque x est positif, on a $\mathrm{H}(x) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale car e^{-t^2} est positive. Par conséquent, pour x positif, $|\mathrm{H}(x)| = \mathrm{H}(x)$ et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Partie III : Un autre exemple

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xe^{it}}\,\mathrm{d}t$.

Q7) a) Pour $t \in \mathrm{I} = [0;\frac{\pi}{2}]$, on pose $\beta(t) = 1$ et $\alpha(t) = e^{it}$, ces deux fonctions sont continues sur l'intervalle I et $\mathrm{Re}(\alpha(t)) = \cos(t)$ qui est positif sur I. D'après la partie I, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) et $\mathrm{F}'(x) = -\int_0^{\pi/2}\beta(t)\alpha(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}e^{-xe^{it}}\,\mathrm{d}t.}$$

Q8) a) On évalue cette dérivée en 0, $\mathrm{F}'(0) = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,\mathrm{d}t = \left[ie^{it}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{-1-i}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $ix\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-ixe^{it})e^{-xe^{it}}\,\mathrm{d}t$, or $-ixe^{it}$ est la dérivée par rapport à t de $e^{-xe^{it}}$, (on intègre donc une fonction de la forme $u'e^u$), d'où $ix\mathrm{F}'(x) = \left[e^{-xe^{it}}\right]_0^{\pi/2} = e^{-ix} - e^{-x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ ix\mathrm{F}'(x) = e^{-ix} - e^{-x}.}$$

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *et* $g(x) = \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x}$.

Q9) La fonction sin admet un $\mathrm{dl}_2(0)$ qui est $\sin(x) = x + \underset{0}{o}(x^2)$, et donc $\boxed{f(x) = 1 + \underset{0}{o}(x)}$, d'après le cours, on en déduit que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$, et ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

On a $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}\left(x^2\right)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}\left(x^2\right)$, d'où $g(x) = \frac{-x+x^2+\underset{0}{o}(x^2)}{x} = \boxed{-1 + x + \underset{0}{o}(x)}$. D'après le cours, on en déduit que g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = -1$, et ce prolongement est dérivable en 0 avec $g'(0) = 1$.

Dans la suite, on suppose que f et g ont été prolongées par continuité en 0.

Q10) Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) On sait que $ix\mathrm{F}'(x) = e^{-ix} - e^{-x}$, donc si $x \neq 0$, alors $\mathrm{F}'(x) = \frac{e^{-ix}-e^{-x}}{ix} = \frac{\cos(x)-e^{-x}-i\sin(x)}{ix} = \frac{-\sin(x)}{x} + i\frac{e^{-x}-\cos(x)}{x} = -f(x) + g(x)$.
Si $x = 0$, alors $\mathrm{F}'(0) = -1 - i$, or $f(0) = 1$ et $g(0) = -1$, donc $-f(0) + ig(0) = -1 - i = \mathrm{F}'(0)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = -f(x) + ig(x).}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, en intégrant de 0 à x on a $\int_0^x \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, c'est à dire $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = -\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\mathrm{F}(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Q11) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0$. On a donc $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - i\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, on en déduit que la partie réelle tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, et la partie imaginaire tend vers 0, c'est à dire (f et g étant à valeurs réelles) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \text{ et que } \lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

Q12) a) D'après la partie I, on sait que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc F' est également de classe $\mathscr{C}^\infty$, et donc sa partie réelle et sa partie imaginaire sont aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, or $\mathrm{F}' = -f + ig$ (avec f et g à valeurs réelles), donc :

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

i) On écrit le développement d'ordre $2n+1$ en 0 de sin : $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$, en divisant par x, on obtient :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n}\right), \text{ c'est le } \mathrm{dl}_{2n}(0) \text{ de } f.}$$

ii) La fonction f étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le $\mathrm{dl}_{2n}(0)$ est également donné par la formule de Taylor-Young : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \underset{0}{o}\left(x^{2n}\right)$, par unicité du développement limité, on peut identifier les coefficients en prenant garde à la parité :

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!],\ f^{(2k+1)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2k)}(0) = (2k)!\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2k+1}.}$$