18. Polynômes, méthodologie

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions et opérations

I.1. $\mathbb{K}[X]$

Définition. Un polynôme P à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une expression $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une **suite nulle à partir d'un certain rang** (c'est la suite des coefficients de P). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Notation. On peut noter un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ soit P, soit $P(X)$ (car l'indéterminée est X).

I.2. Opérations

Définition. Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors, on pose les polynômes :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)X^k \text{ et } P \times Q = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) X^k.$$

On a alors $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ qui est un anneau commutatif de neutre 0 pour $+$ et de neutre 1 pour $\times$.

m L'addition et la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ fonctionnent comme l'addition et la multiplication usuelles, en utilisant $X^0 = 1$ et $X^i \times X^j = X^{i+j}$.

Définition. Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P \circ Q = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Q(X))^k$ (qui est bien un polynôme).

I.3. Degré

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Le degré de P est défini par :

- $\deg(P) = -\infty$ si $P = 0$.
- $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \ / \ a_k \neq 0\}$. Si on note $n = \deg(P)$, on a alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on dit que $a_n = \mathrm{dom}(P)$ est le coefficient dominant de P.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

Proposition. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. On a égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ ou si $\deg(P) = \deg(Q)$ et que la somme des coefficients dominants est non nul.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\mathrm{dom}(P \times Q) = \mathrm{dom}(P) \times \mathrm{dom}(Q)$.
- Si Q n'est pas constant, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exercice d'application 1. On pose $P = 3X^2 - 3X + 1$ et $Q = 2X^3 + 2X - 1$. Déterminer sans calculer explicitement les polynômes le degré des polynômes suivants et leur coefficient dominant :

1) $P^2 \times Q^3$.

2) $XP^4 - 3X^5Q^2$.

3) $P(X^4+1)$. *Il s'agit bien d'une composition ici et pas d'un produit.*

4) $P(Q(X)) + X^6$.

(m) Le degré est en général la première chose que l'on cherche quand on veut trouver un polynôme inconnu qui vérifie une égalité. On raisonne par analyse/synthèse et on applique le degré de chaque côté de l'égalité et on trouve en général une condition qui facilite la recherche et on peut alors chercher un système d'équations vérifiés par les coefficients. On peut également chercher au préalable une relation sur le coefficient dominant pour faciliter les calculs.

Exercice d'application 2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) = X^2$.

Exercice d'application 3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) \times (X+1) = X^2$.

Exercice d'application 4. Déterminer tous les couples $(P, a) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$ tels que $(P(X))^3 = aX^2$.

Exercice d'application 5. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X+1) = P(X)$

Proposition. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors, $P \times Q = 0 \Leftrightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$.

(m) Ce résultat est très utile car il permet de diviser par un polynôme différent du polynôme nul dans une égalité.

Exercice d'application 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X-1)P(X) + (X^2-1) = 0$. Déterminer $P(1)$.

II. Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

II.1. Définitions

Définition. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que Q divise P et on note $Q|P$ si il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q \times R$.

(m) Les propriétés de la divisibilité pour les polynômes sont les mêmes que les propriétés vues en arithmétique pour les entiers. La principale différence est que quand on étudie la divisibilité entre polynômes, multiplier un polynôme par une constante non nulle ne change rien (de la même manière que pour les entiers, multiplier par ± 1 ne changeait rien). Ainsi, les polynômes qui divisent tous les polynômes sont les polynômes constants non nuls (c'est à dire les polynômes de degré 0).

Proposition. Si $Q|P$ et $P \neq 0$, alors $\deg(Q) \leq \deg(P)$.

Exercice d'application 7. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^3|Q^2$ et $Q^4|P^3$. Que peut-on dire de P et Q ?

II.2. Division euclidienne

Théorème. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg(R) < \deg(B)$ et $A = BQ + R$.

(m) Pour effectuer la division euclidienne de A par B, on peut poser la division euclidienne comme une division entre entiers en simplifiant les puissances de X les plus grandes en premier. On obtient alors le quotient et le reste de la division euclidienne.

Exercice d'application 8. On pose $A = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 3$ par $B = X^2 + 2X + 2$. Poser la division euclidienne de A par B et la division euclidienne de B par A.

(m) Si on ne veut que le **reste** de la division euclidienne de A par B, on commence par justifier l'existence du quotient et du reste avec le théorème de division euclidienne. On a donc $\deg(R) < \deg(B)$, soit $R = \sum_{k=0}^{\deg(B)-1} a_k X^k$. On évalue ensuite la relation $A = QB + R$ en les **racines** x_j de B (calculées au préalable). On a ainsi :

$$\begin{aligned} A(x_j) = Q(x_j)B(x_j) + R(x_j) \quad &\Leftrightarrow \quad A(x_j) = Q(x_j) \times 0 + R(x_j) \\ &\Leftrightarrow \quad A(x_j) = R(x_j). \end{aligned}$$

On obtient alors un système linéaire vérifié que l'on résout pour obtenir le polynôme R.

Exercice d'application 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 5X - 6$.

(m) On a $B|A$ si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul. Ainsi, la division euclidienne sert à tester la divisibilité entre deux polynômes.

Exercice d'application 10. Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^2 - 1$ divise $X^n - X^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

III. Racines et fonctions polynomiales

III.1. Fonction polynomiale

III.2. Racines

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, α est une racine de P si et seulement si $(X-\alpha)|P$.

III.3. Multiplicité des racines

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\{n \in \mathbb{N} \ / \ (X-\alpha)^n|P\}$ est un ensemble d'entiers non vide et majoré. Il admet donc un maximum $r_\alpha \in \mathbb{N}$. On dit que r_α est la multiplicité de α comme racine de P. On a donc que si $r \in \mathbb{N}$, alors r est la multiplicité de α comme racine de P si et seulement si $(X-\alpha)^r|P$ et $(X-\alpha)^{r+1} \nmid P$.

Théorème. Premier critère de multiplicité. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\alpha \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } r \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = (X-\alpha)^r Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

m Pour déterminer la multiplicité d'une racine α d'un polynôme P, on commence par calculer $P(\alpha)$. Si $P(\alpha) \neq 0$, α n'est pas racine de P (multiplicité 0). Si $P(\alpha) = 0$, alors on peut factoriser $P = (X-\alpha)Q$ (par exemple en effectuant la division euclidienne de P par $X-\alpha$). Si $Q(\alpha) \neq 0$, α est racine simple de P (multiplicité 1). Si $Q(\alpha) = 0$, alors on peut factoriser Q par $X-\alpha$ ce qui donne $P = (X-\alpha)^2 R$. Si $R(\alpha) \neq 0$, α est racine double de P (multiplicité 2) et si $R(\alpha) = 0$, on peut continuer à factoriser, etc.

Exercice d'application 11. Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de $X^4+X^3-2X^2-3X+3$.

Théorème. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ des racines distinctes de P de multiplicité $r_1, \dots, r_k$. Alors :

$$\prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i)^{r_i} | P.$$

Proposition. Si un polynôme admet plus de racines que son degré, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité, alors c'est le polynôme nul.

m Ce résultat implique que deux polynômes égaux en plus de points que leur degré sont égaux en tant que polynômes (c'est à dire qu'ils ont des coefficients identiques). Ce sont en général ces deux points que l'on utilise pour justifier qu'un polynôme est nul, ou constant, ou égal à un polynôme connu.

Exercice d'application 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+3) = P(X)$.

1) On pose $\lambda = P(0) \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(3n) = \lambda$.
2) En déduire l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+3) = P(X)$.

III.4. Interpolation de Lagrange

Théorème. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. Soient $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Alors, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!], \ P(x_i) = y_i$.

Si pour $i \in [\![0,n]\!]$ on note $L_i = \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X-x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i-x_k)}$ le i-ième polynôme d'interpolation de Lagrange , alors :

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

(m) Ce résultat nous permet de construire un polynôme qui passe par des valeurs données en des points donnés. L'unicité vient du fait qu'il y a au plus un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui passe par $n+1$ points donnés (car deux polynômes égaux en plus de points que leur degré sont égaux). Pour se souvenir de la formule de L_i, il faut visualiser L_i comme le polynôme qui s'annule en tous les x_k sauf x_i (d'où le produit au numérateur) et qui vaut 1 en x_i (d'où le dénominateur qui compense exactement le numérateur quand $X = x_i$).

Exercice d'application 13. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(0) = 7$, $P(1) = 3$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 1$. Déterminer une expression de ce polynôme ainsi que son degré.

IV. Polynôme dérivé

IV.1. Définition

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de la forme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Le polynôme dérivé de P est défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

On pose $P'' = (P')'$, etc. et $P^{(n)}$ le polynôme dérivé n-fois du polynôme P.

Proposition. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\deg(P') = \deg(P) - 1$ si $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(P') = -\infty$ (autrement dit $P' = 0$) si $\deg(P) \leq 0$ (autrement dit si P est constant).

(m) Toutes les règles de calcul sur les polynômes dérivées sont les mêmes que pour la dérivation usuelle. On a par exemple $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$, $(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$, etc. Ce sont des égalités formelles (c'est à dire qu'on a égalité sur les coefficients des polynômes) et il n'y a donc pas besoin de justifier la dérivabilité d'une somme ou d'un produit quand on utilise ces formules.

Exercice d'application 14. Déterminer le polynôme dérivé $(X^n)^{(k)}$ pour $k, n \in \mathbb{N}$.

Exercice d'application 15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Justifier que $Q = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}$ est bien défini, qu'il s'agit d'un polynôme et déterminer son degré en fonction du degré de P.

2) Vérifier que $P = Q - Q'$.

(m) Attention quand on calcule P' à bien commencer la somme à $k = 1$ pour ne pas écrire de termes en X^{-1}. L'expression peut quand même avoir du sens car en $k = 0$, on a $ka_k = 0$ et on peut ainsi supprimer ce terme mais commencer la somme à 0 peut parfois causer des erreurs de calcul.

Exercice d'application 16. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Déterminer P'.

IV.2. Formule de Taylor

Théorème. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

De plus, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $P(a + X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$.

Remarque : On a d'après le dernier point appliqué en $X - a$, $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$.

(m) Ce théorème permet de déterminer les dérivées successives d'un polynôme en 0 si on connait les coefficients du polynômes puisque si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, on a $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Il permet également, si on connait les dérivées successives d'un polynôme en 0 ou en $a \in \mathbb{K}$ de retrouver les coefficients du polynôme.

Exercice d'application 17.

1) Déterminer la forme développée du polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré possible tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P''(0) = 2$ et $P'''(0) = 3$.

2) Même question avec cette fois $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$ et $P'''(1) = 3$.

IV.3. Critère de multiplicité

Théorème. Second critère de multiplicité. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors :

$$a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } r \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![0, r-1]\!], \ P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(r)}(a) \neq 0 \end{cases}.$$

(m) Si P est facile à dériver (par exemple s'il est sous forme développée), ce critère est très utile pour déterminer la multiplicité d'une racine de P. On a tout d'abord $P(a) = 0$ (si a est racine de P). Si on a de plus $P'(a) \neq 0$, alors a est racine simple de P. Dans le cas où $P'(a) = 0$, a est racine au moins double de P. Dans ce cas, si $P''(a) \neq 0$, a est une racine double de P, si $P''(a) = 0$, a est racine au moins triple de P, etc.

Exercice d'application 18. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 24X + 24$. Sans les calculer, montrer que P ne peut pas avoir de racines de multiplicité supérieure ou égale à 2.

V. Relations coefficients/racines

V.1. Polynôme scindé

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il admet n racines $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ (pas forcément distinctes). On a donc P qui se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ sous la forme :

$$P = \mathrm{dom}(P) \times \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

On dit que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ s'il admet n racines $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distinctes.

Remarque : Un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ est donc un polynôme qui se factorise en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{K}[X]$. Par exemple, $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (car il n'a aucune racine réelle) mais il est scindé sur $\mathbb{C}$ (car $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$).

V.2. Fonctions symétriques élémentaires

Définition. Les fonctions symétriques élémentaires à n variables $x_1, \ldots, x_n$ sont définies par :
- $\sigma_0 = 1$.
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_i = \displaystyle\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_i \leq n} x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_i}$.
- En particulier, $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\sigma_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i$.

m La i-ième fonction symétrique élémentaire est donc obtenu en réalisant la somme de tous les produits de i termes possibles à partir des variables $x_1, \ldots, x_n$. N'importe quelle fonction symétrique polynomiale en les $x_1, \ldots, x_n$ peut s'écrire en fonction des $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (d'où le nom de fonctions symétriques « élémentaires »). On les obtient parfois à partir d'identité remarquable, ou en réalisant des opérations symétriques sur l'expression de départ.

Exercice d'application 19. Écrire en fonction des fonctions symétriques élémentaires les expressions $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.

V.3. Relations coefficients/racines

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé. On note $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ ses racines (pas forcément distinctes). Alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sigma_k.$$

Remarque : Il est important de visualiser très rapidement ces relations coefficients/racines dans le cas des polynômes de degré 2 et 3 :

- Si $P = aX^2 + bX + c$, on a $\dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ et $\dfrac{c}{a} = x_1x_2$.
- Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $\dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $\dfrac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $\dfrac{d}{a} = -x_1x_2x_3$.

Dans le cas d'un polynôme de degré n, il est important de voir quel coefficient du polynôme permet d'obtenir la somme des racines du polynôme et quel coefficient permet d'obtenir le produit des racines. Dans le cas où le polynôme est **unitaire**, les formules sont plus simples car $a_n = 1$. Avant d'utiliser les relations coefficients/racines, c'est donc souvent une bonne idée de factoriser par le coefficient dominant pour ne pas se tromper.

Exercice d'application 20. Soit $P = 2X^2 + 7X - 4$.

1) Déterminer la somme et le produit des racines de P (sans calculer les racines).

2) Toujours sans calculer les racines, justifier que les deux racines sont réelles.

3) Toujours sans calculer les racines, justifier qu'elles sont de signe différent, puis que l'une est inférieure à -3 et que l'autre est entre 0 et 1.

Exercice d'application 21. Soit $P = X^3 + 2X - \pi$. On note a, b, c ses racines complexes. Déterminer sans calculer les racines les valeurs de $a + b + c$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ et $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

m Pour résoudre un système symétrique, il est parfois intéressant de voir les solutions de ce système comme les racines d'un polynôme. À l'aide des fonctions symétriques élémentaires, on détermine alors le polynôme unitaire (c'est plus simple) dont les solutions du système sont racines et on détermine explicitement ces racines (en général on a une racine évidente ou le polynôme se factorise bien) ce qui permet de résoudre le système initial.

Exercice d'application 22. Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xyz = 6 \end{cases}$.

VI. Polynômes irréductibles

VI.1. Définition

Définition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On dit que P est irréductible si P n'admet comme diviseur dans $\mathbb{K}[X]$ que les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Remarque : Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ jouent le rôle des nombres premiers en arithmétique (de la même manière qu'un nombre non premier peut être factorisé comme produit de deux entiers différents de 1, un polynôme non irréductible de $\mathbb{K}[X]$ peut être factorisé comme produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$).

VI.2. Étude dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème. De d'Alembert. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(m) Ce résultat est très utile pour chercher des informations sur un polynôme inconnu vérifiant une relation. Si P n'est pas constant, il admet au moins une racine complexe ce qui permet parfois à partir de la relation vérifiée par le polynôme d'en trouver une autre et ainsi de trouver des racines de P.

Exercice d'application 23. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaires tels que $P(2X+1) = 2^n P(X)$.

1) En comparant les coefficients dominants dans l'équation, justifier qu'un tel polynôme P est de degré n et déterminer tous les polynômes qui conviennent dans le cas $n = 0$.

2) On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $P(\omega) = 0$.

b) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \omega \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = 2u_k + 1 \end{array}\right.$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(u_k) = 0$.

c) Déterminer u_k en fonction de k.

d) En déduire que la seule valeur possible pour ω est -1.

e) Déterminer finalement tous les polynômes qui vérifient l'équation.

Proposition. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Théorème. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors P est scindé sur $\mathbb{C}$. Si on note $n = \deg(P)$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ ses racines et $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités, on a :

$$P = \mathrm{dom}(P) \times \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{r_i}.$$

VI.3. Étude dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors, $\overline{\alpha}$ est également une racine de P.

Proposition. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Théorème. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Alors P s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = \mathrm{dom}(P) \times \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{k'} (X^2 + a_j X + b_j)^{r'_j}$$

où $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ sont les racines réelles de P de multiplicité $r_1, \dots r_k \in \mathbb{N}^*$ et où pour $j \in [\![1, k']\!]$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ sont tels que $\Delta_j = a_j^2 - 4b_j < 0$ et $r_j \in \mathbb{N}^*$.

(m) Pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ on peut :

- soit le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ en cherchant ses racines complexes et ensuite développer chaque racine complexe avec son conjugué pour obtenir un polynôme irréductible réel de degré 2.
- soit pour les polynômes n'ayant que des termes de degré pair, on peut parfois faire apparaitre une identité remarquable de la forme $a^2+\ldots+b^2=(a+b)^2-c^2$ afin de factoriser plus rapidement le polynôme.

Exercice d'application 24. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme X^4+4 en produits de polynômes irréductibles en utilisant les deux méthodes précédentes.

VII. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On a $\deg(P) = 2$ et $\deg(Q) = 3$ donc $\deg(P^2) = 4$ et $\deg(Q^3) = 9$. Ceci entraine que $\deg(P^2 \times Q^3) = 13$.

2) On a $\deg(P^4) = 8$ donc $\deg(XP^4) = 9$ et $\deg(Q^2) = 6$ donc $\deg(3X^5Q^2) = 11$. Puisque les degrés sont différents, on en déduit que $\deg(XP^4 - 3X^5Q^2) = 11$.

3) On a $\deg(P) = 2$ et $\deg(X^4 + 1) = 4$ donc $\deg(P(X^4 + 1)) = 4 \times 2 = 8$.

4) On a $\deg(P(Q(X))) = 3 \times 2 = 6$ et $\deg(X^6) = 6$. Il faut alors tester les coefficients dominants. On a $\mathrm{dom}(P(Q(X))) = 3 \times 2^2 = 12$ (puisque le terme dominant apparait dans le terme en $3(Q(X))^2 = 3(2X^3 + 2X - 1)^2 = 12X^6 + \ldots$). Puisque $12 + 1 = 13 \neq 0$, on en déduit que le degré de $P(Q(X)) + X^6$ vaut 6.

Exercice d'application 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X + 1) = X^2$. Si on note $n = \deg(P)$, on a alors en prenant les degrés de chaque côté que $n = 2$. Ceci entraine qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On a donc en réinjectant dans l'équation :

$$a(X + 1)^2 + b(X + 1) + c = X^2 \Leftrightarrow aX^2 + (2a + b)X + (a + b + c) = X^2.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on en déduit que $a = 1$, $2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2$ et $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$. Ce calcul prouve que ce polynôme est bien solution de l'équation initiale. On en déduit que l'unique polynôme vérifiant $P(X + 1) = X^2$ est $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Exercice d'application 3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) \times (X + 1) = X^2$. Notons $n = \deg(P)$. En évaluant dans l'égalité précédente les degrés de chaque côté, on trouve que $n + 1 = 2 \Leftrightarrow n = 1$. On en déduit qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ tels que $P = aX + b$. En réinjectant dans l'égalité, on a donc :

$$(aX + b)(X + 1) = X^2 \Leftrightarrow aX^2 + (a + b)X + b = X^2.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on a donc $a = 1$, $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$ et $b = 0$: absurde ! On en déduit qu'il n'existe aucun polynôme vérifiant l'égalité demandée.

On aurait pu aller beaucoup plus vite en remarquant qu'en évaluant en $X = -1$, on obtient à gauche de l'égalité 0 et à droite 1 ce qui est absurde. On retrouve donc le fait qu'un tel polynôme n'existe pas.

Exercice d'application 4. Supposons qu'il existe $(P, a) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$ tel que $(P(X))^3 = aX^2$. Notons $n = \deg(P)$. On a $\deg((P(X))^3) = \deg(aX^2)$, d'où $3n = \deg(aX^2)$. Si $a = 0$, on a alors $3n = -\infty$, ce qui entraine $P = 0$. On a effectivement bien le couple $(0, 0)$ (le 0 de gauche est le polynôme nul) qui est solution de l'équation demandée. Supposons à présent $a \neq 0$. On a alors $3n = 2$ ce qui est absurde car 3 ne divise pas 2. On en déduit que le seul couple solution de l'équation demandée est $(0, 0)$.

Exercice d'application 5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(2X + 1) = P(X)$. Notons $n = \deg(P)$. On a alors en calculant les degrés des deux côtés que $n = n$ ce qui ne donne pas d'informations. Remarquons que si $P = 0$, alors P est solution. Si $P \neq 0$, notons $a_n = \mathrm{dom}(P) \neq 0$. On a alors en comparant les coefficients dominants à gauche et à droite que $2^n a_n = a_n$ (car le coefficient dominant de $P(2X + 1)$ s'obtient en développant $a_n(2X + 1)^n = a_n 2^n X^n + \ldots$), ce qui entraine $2^n = 1$ (car $a_n \neq 0$). On a donc $n = 0$ ce qui entraine que P est constant non nul. Réciproquement, on voit que tous les polynômes constants non nuls vérifient l'équation proposée.

Pour conclure, on en déduit que les polynômes solutions de l'équation demandée sont les polynômes constants (le polynôme nul étant lui aussi un polynôme constant).

Exercice d'application 6. On a $(X-1)P(X)+(X^2-1)=0 \Leftrightarrow (X-1)(P(X)+X+1)=0$. Puisque $X-1$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit que $P(X)+X+1=0$, soit $P(X)=-X-1$. On a donc en particulier $P(1)=-2$.

Exercice d'application 7. Remarquons tout d'abord que si $P=0$, alors on a $0^3|Q^2$ donc $Q^2=0$ (seul polynôme divisible par le polynôme nul). Ceci entraine que Q est lui aussi le polynôme nul (car $Q\times Q=0$ et que $\mathbb{R}[X]$ est intègre donc on a une absurdité si $Q\neq 0$). On a alors $P=Q=0$ qui est bien solution car 0 divise 0. De même, si $Q=0$, alors on a $0^4|P^3$ donc $P^3=0$. On a donc $P=0$ (sinon on a une absurdité). On retrouve encore la solution $(0,0)$.

Supposons à présent $P\neq 0$ et $Q\neq 0$. Notons $p=\deg(P)$ et $q=\deg(Q)$. Puisque $P^3|Q^2$ et que les polynômes sont non nuls, on a donc $3p\leq 2q$. De même, puisque $Q^4|P^3$, on a $4q\leq 3p$. Ceci entraine que $4q\leq 2q$ par transitivité et donc que $q=0$ sinon on a une absurdité. On a alors $p=0$. Réciproquement, si P et Q sont de degrés 0 (et donc constants non nuls), alors les relations de divisibilité sont vraies.

Pour conclure, les polynômes vérifiants la relation demandée sont soit $P=Q=0$, soit $P=\lambda$ et $Q=\mu$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^*$.

Exercice d'application 8. On pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & X^4 & - & X^3 & + & 2X^2 & + & X & - & 3 & & X^2+2X+2 \\
\hline
-(& X^4 & + & 2X^3 & + & 2X^2 & & & & &) & X^2-3X+6 \\
 & & - & 3X^3 & & & + & X & - & 3 & & \\
 & & -(& -3X^3 & - & 6X^2 & - & 6X & & &) & \\
 & & & & & 6X^2 & + & 7X & - & 3 & & \\
 & & & & -(& 6X^2 & + & 12X & + & 12 &) & \\
 & & & & & & - & 5X & - & 15 & &
\end{array}$$

On en dédui que le quotient de la division euclidienne de A par B est X^2-3X+6 et que le reste est $-5X-15$. On a :

$$A=(X^2-3X+6)\times B+(-5X-15).$$

Puisque $\deg(B)<\deg(A)$, le reste de la division euclidienne de B par A est B (et le quotient 0). On a donc :

$$B=0\times A+B.$$

Exercice d'application 9. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par théorème de division euclidienne, il existe des uniques $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $R\in\mathbb{R}_1[X]$ tels que $X^n=Q\times(X^2+5X-6)+R$. Puisque R est de degré inférieur ou égal à 1, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $R=aX+b$. Les racines de X^2+5X-6 sont 1 et -6. On a donc en évaluant en ces racines :

$$1=a+b \text{ et } (-6)^n=-6a+b.$$

On a donc $a=\dfrac{1-(-6)^n}{7}$ et $b=\dfrac{6+(-6)^n}{7}$. On en déduit que le reste de la division euclidienne de X^n par X^2+5X-6 est donc $\dfrac{1-(-6)^n}{7}X+\dfrac{6+(-6)^n}{7}$.

Exercice d'application 10. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par théorème de division euclidienne, il existe des uniques $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $R\in\mathbb{R}_1[X]$ tels que $X^n-X^{\lfloor n/2\rfloor}=Q\times(X^2-1)+R$. Puisque R est de degré inférieur ou égal à 1, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $R=aX+b$. On va alors évaluer en 1 et -1 pour déterminer a et b. On a :

$$0 = a + b \text{ et } (-1)^n - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} = -a + b.$$

On a donc $a = \dfrac{(-1)^n - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ et $b = -a$. On en déduit que $X^2 - 1$ divise $X^n - X^{\lfloor n/2 \rfloor}$ si et seulement si $aX + b = 0$ si et seulement si $(-1)^n - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} = 0$.

On va étudier cette condition selon si n est pair ou pas. Si n est pair, on a $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a donc $(-1)^n - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} = 0 \Leftrightarrow 1 - (-1)^k = 0$. Cette condition est vraie si k est pair et fausse si k est impair. On en déduit que si n est pair, il faut n multiple de 4 pour que la propriété soit vraie.

Si n est impair, on a $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a donc $(-1)^n - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} = 0 \Leftrightarrow -1 - (-1)^k = 0$. Cette propriété est donc vraie si k est impair (donc de la forme $k = 2q+1$) et fausse si k est pair. Pour les entiers impairs, il n'y a donc que les n de la forme $n = 4q + 3$ qui conviennent.

Pour conclure, on a $X^2 - 1$ qui divise $X^n - X^{\lfloor n/2 \rfloor}$ si et seulement si $n \equiv 0$ [4] ou $n \equiv 3$ [4].

Exercice d'application 11. Notons $P = X^4 + X^3 - 2X^2 - 3X + 3$. On a $P(1) = 0$ donc 1 est racine de multiplicité au moins 1. On a :

$$P = (X - 1)(X^3 + 2X^2 - 3).$$

Si on note $Q = X^3 + 2X^2 - 3$, on a $Q(1) = 0$. On a donc $Q = (X - 1)(X^2 + 3)$. Ceci entraine que :

$$P = (X - 1)^2(X^2 + 3).$$

Ce dernier polynôme ne s'annule pas en 1. On en déduit que 1 est racine de P de multiplicité 2.

Exercice d'application 12.

1) On procède par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la propriété est vraie au rang n, alors $P(3(n + 1)) = P(3n + 3) = P(3n) = \lambda$ par hypothèse de récurrence. Elle est donc vraie au rang $n + 1$ et puisqu'elle est initialisée, elle est vraie à tout rang.

2) Le polynôme P et le polynôme constant λ sont égaux en une infinité de valeurs (et donc plus de points que leur degré). Ceci entraine que $P = \lambda$ et donc que P est un polynôme constant. Réciproquement, tous les polynômes constants vérifient $P(X + 3) = P(X)$. On en déduit que les solutions de cette équation sont les polynômes constants.

Exercice d'application 13. Le théorème d'interpolation de Lagrange donne exactement le résultat demandé (appliqué en $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $y_0 = 7$, $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$). On a donc l'unique polynôme P qui s'écrit sous la forme :

$$P = 7 \times \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{-6} + 3 \times \frac{X(X-2)(X-3)}{2} + 1 \times \frac{X(X-1)(X-3)}{-2} + 1 \times \frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

Si on fait la somme des coefficients des termes en X^3, on obtient $-\frac{7}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$. Le polynôme est donc en fait de degré inférieur ou égal à 2. Ce polynôme ne peut pas être de degré 1 ou inférieur (car sinon la condition $P(2) = P(3) = 1$ impliquerait que le polynôme serait constant égal à 1 ce qui n'est pas le cas), on en déduit que P est de degré 2. *L'expression développée de P est $X^2 - 5X + 7$.*

Exercice d'application 14. Si $k > n$, on a $(X^n)^{(k)} = 0$. Supposons à présent $k \leq n$. On a alors :

$$(X^n)' = nX^{n-1}, \ (X^n)'' = n(n-1)X^{n-2}, \ldots$$

Ceci implique (on pourrait le montrer proprement par récurrence) que :

$$(X^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}.$$

Exercice d'application 15.

1) Si P est le polynôme nul, alors Q est également le polynôme nul. Supposons $P \neq 0$ et notons $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$. On a alors que pour $k > n$, $P^{(k)} = 0$. Ceci entraine que la somme qui définie Q est finie et on a donc :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}.$$

Q est donc un polynôme en tant que somme finie de polynômes. On a pour $k > 0$, $\deg(P^{(k)}) < \deg(P)$. Ceci entraine que Q est du même degré que n (aucun terme ne vient compenser dans la somme le terme de degré n).

2) Puisque la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, on en déduit que :

$$Q' = \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)}.$$

Or, on a $P^{(n+1)} = 0$ (on a encore noté dans cette question $n = \deg(P)$). On a donc $Q' = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}$ par changement d'indice. On a donc :

$$Q - Q' = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} P^{(k)} = P^{(0)} = P.$$

On aurait aussi montrer ce résultat avec une somme télescopique et le fait que $P^{(n+1)} = 0$.

Exercice d'application 16. On a $P = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Puisque pour $k \geq 1$, on a $(X^k)' = kX^{k-1}$ et que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, on a :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}.$$

Exercice d'application 17.

1) D'après la formule de Taylor, il s'agit du polynôme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$ et pour $k > 3$, $a_k = 0$ (car on veut P de degré le plus petit possible). On a donc P de degré 3 :

$$P = X + X^2 + \frac{X^3}{2}.$$

2) On a cette fois, toujours d'après la formule de Taylor :

$$P(1+X) = X + X^2 + \frac{X^3}{2}.$$

Ceci entraine, en évaluant en $X - 1$, que :

$$
\begin{aligned}
P(X) &= (X-1)+(X-1)^2+\frac{(X-1)^3}{2} \\
&= X-1+X^2-2X+1+\frac{X^3-3X^2+3X-1}{2} \\
&= \frac{X^3}{2}-\frac{X^2}{2}+\frac{X}{2}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Exercice d'application 18. Supposons que P ait une racine au moins double a. On a alors $P(a)=0$ et $P'(a)=0$. Or, on a ici $P'=4X^3-12X^2+24X-24$. On a donc a qui vérifie le système :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a^4-4a^3+12a^2-24a+24=0 \\
4a^3-12a^2+24a-24=0
\end{array}
\right.
$$

On en déduit que $a^4=0$, ce qui entraine $a=0$. Puisque 0 n'est pas racine de P (car $P(0)=24\neq 0$), on obtient une absurdité ce qui entraine que P ne peut avoir que des racines simples.

Exercice d'application 19. On a $\sigma_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = S_1 + 2\sigma_2$. Ceci entraine que :

$$S_1 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Si on met au même dénominateur, on a :

$$S_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}.$$

Exercice d'application 20. On a $P=2(X^2+\frac{7}{2}X-2)$.

1) On en déduit que la somme des racines vaut $-\frac{7}{2}$ et le produit vaut -2.

2) On a $\Delta = 49+32=81>0$. Les deux racines sont donc réelles et distinctes.

3) Puisque le produit des racines est strictement négatif, il y a une racine strictement négative et l'autre strictement positive. Puisque la somme fait $-\frac{7}{2}$ et qu'une racine est positive, on en déduit que la racine négative est forcément strictement inférieure à $-\frac{7}{2}$. Puisque $-\frac{7}{2}<-3$, on a bien une racine inférieure à -3. Puisque le produit des racines vaut -2, la racine positive est donc forcément comprise entre 0 et $\frac{2}{3}$ (sinon le produit ne peut pas être égal à -2 mais serait strictement plus grand que 2 en valeur absolue). On a donc la racine positive comprise entre 0 et 1.

Exercice d'application 21. On a $P=X^3+2X-\pi$ qui est unitaire et de degré 3. D'après les relations coefficients/racines, on a en regardant le coefficient en X^2 :

$$a+b+c=0.$$

On a de plus $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{2}{\pi}$. Enfin, on a en élevant au carré l'égalité précédente :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right).$$

On a donc $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{\pi^2}-2\frac{a+b+c}{abc}=\frac{4}{\pi^2}$.

Exercice d'application 22. Si on suppose que x, y, z sont les racines de $P = (X-x)(X-y)(X-z)$ (polynôme unitaire de degré 3), on a alors $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$. On a ici $\sigma_1 = 6$ et $\sigma_3 = 6$ d'après le système. De plus, on a $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) = 14+2\sigma_2$. Ceci entraine que $\sigma_2 = \dfrac{36-14}{2} = 11$. On en déduit que :

$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

On remarque que 1 est racine évidente de P. On a donc :

$$P = (X-1)(X^2 - 5X + 6).$$

On remarque que 2 est racine évidente de ce second polynôme donc après factorisation $P = (X-1)(X-2)(X-3)$. Ceci entraine que les solutions au système de départ sont $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ et toutes les permutations de ces solutions ($x = 2, y = 1, z = 3$, $x = 3, y = 1, z = 2$, etc.).

Exercice d'application 23. Puisque l'on cherche P unitaire, on a P qui n'est pas le polynôme nul. On suppose donc P non nul et on note k son degré. Si on note $P = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j$ et si on isole les termes de plus haut degré :

$$P(2X+1) = a_k(2X+1)^k + \ldots = 2^k a_k X^k + \ldots$$

(on a mis dans $\ldots$ les termes de degrés strictement inférieurs à k). Quand on compare les termes de plus haut degré (ici de degré k) et que l'on compare les coefficients dominants dans la relation $P(2X+1) = 2^n P(X)$, on obtient :

$$2^k a_k = 2^n a_k.$$

Puisque $a_k \neq 0$ (on a même $a_k = 1$ car on cherche un polynôme unitaire), on en déduit $2^k = 2^n$, ce qui entraine $k = n$. On en déduit que P est de degré n.

Si $n = 0$, on cherche P constant unitaire tel que $P(2X+1) = P(X)$. Puisque l'on veut P unitaire, on a donc $P = 1$ (qui réciproquement est bien solution de l'équation).

1) On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

a) P est non constant donc d'après le théorème de d'Alembert, il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $P(\omega) = 0$.

b) On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(u_k) = 0$. La propriété est vraie au rang 0 car $u_0 = \omega$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(u_k) = 0$. On a alors :

$$P(u_{k+1}) = P(2u_k + 1) = 2^n P(u_k) = 0.$$

Ceci entraine que la propriété est vraie au rang $k+1$. Puisqu'elle est initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

2) On a une suite arithmético-géométrique. On commence donc par chercher le point fixe (que l'on notera c ici) qui vérifie $c = 2c + 1 \Leftrightarrow c = -1$. Si on note $v_k = u_k - c = u_k + 1$, on a donc que pour $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} = 2v_k$ (suite géométrique de raison 2). On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ v_k = 2^k v_0 = 2^k(u_0 + 1).$$

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 2^k(\omega + 1) - 1$.

3) Supposons par l'absurde que $\omega \neq -1$. Alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ prend une infinité de valeurs distinctes. En effet, si $\omega \neq -1$, alors on a $v_0 \neq 0$ et puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ v_k = 2^k v_0$, la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne prend que des valeurs deux à deux distinctes. Puisque $u_k = v_k - 1$, si la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne prend que des valeurs distinctes, alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aussi. Ceci entraine que le polynôme P a une infinité de racines distinctes ce qui est absurde car il en a alors plus que son degré ! Ceci entraine que $\omega = -1$.

4) Si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que la seule racine de P est -1. Puisque l'on veut P unitaire, de degré n et que sa seule racine est -1, on a $P(X) = (X+1)^n$. Réciproquement, supposons $P(X) = (X+1)^n$. On a alors $P(2X+1) = (2X+1+1)^n = 2^n(X+1)^n = 2^n P(X)$ et donc P est solution.

Pour conclure, les polynômes solutions de l'équation sont les polynômes de la forme $(X+1)^n$ (où le n est le même que dans l'équation, on a donc une unique solution pour chaque équation).

Exercice d'application 24. Remarquons déjà que le polynôme n'a aucune racine réelle (car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4+4 > 0$), ce qui entraine qu'il se factorise comme produit de deux polynômes irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$) de degré 2.

1) Factorisons X^4+4 dans $\mathbb{C}$ en résolvant $z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4 = -4 = 4e^{i\pi}$. Les racines complexes de cette équation sont donc les :

$$z_k = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}e^{\frac{2ik\pi}{4}},\ k \in [\![0,3]\!].$$

Puisque le polynôme est unitaire, on a donc $X^4+4 = (X-z_0)(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$. On a ici $z_3 = \overline{z_0}$ et $z_2 = \overline{z_1}$. Ceci entraine que :

$$\begin{aligned} X^4+4 &= (X-z_0)(X-\overline{z_0})(X-z_1)(X-\overline{z_1}) \\ &= (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)X + |z_0|^2)(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1) + |z_1|^2) \\ &= (X^2-2X+2)(X^2+2X+2). \end{aligned}$$

On a bien les discriminants de ces deux polynômes strictement négatifs donc ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

2) Avec une identité remarquable :

$$\begin{aligned} X^4+4 &= (X^2+2)^2 - 4X^2 \\ &= (X^2+2-2X)(X^2+2+2X) \\ &= (X^2-2X+2)(X^2+2X+2). \end{aligned}$$

On retrouve bien la même factorisation.