Programme de colle, semaine 1

Sommes et identités remarquables :

- Nous avons vu la définition du symbole Σ et les calculs de sommes arithmétiques. Les formules $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ sont à connaitre.
- Nous avons également vu les changements d'indice et les calculs de sommes télescopiques et géométriques.
- Nous avons étudié les sommes doubles et vu comment intervertir ces dernières (en passant par une somme unique).
- Nous avons défini $n!$ et le coefficient binomial $\displaystyle\binom{n}{k}$. Nous avons alors démontré la formule de Pascal et le binôme de Newton. Nous avons terminé la partie sur les égalités remarquables par la factorisation de $a^n - b^n$ et vu comment calculer des sommes géométriques à l'aide de ce résultat (cas $b = 1$).

Compétences :

- Identifier quel type de somme on étudie (géométrique, arithmétique, télescopique), avec des coefficients binomiaux).
- Savoir faire un changement d'indice.
- Reconnaitre les sommes arithmétiques/géométriques.
- Savoir intervertir deux sommes.

Remarques sur le programme : la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ n'est pas au programme. Commencez par évaluer le chapitre sur les sommes, ensuite vous pouvez si vous le voulez interroger sur le chapitre de logique.

Questions de cours :

1. Donner (pas de preuves) les formules de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et donner et démontrer celle d'une somme géométrique (si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$).
2. Donner la définition de la factorielle, du coefficient binomial, citer (pas de preuve) la propriété de symétrie des coefficients binomiaux et la formule de Pascal et illustrer ceci en construisant les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
3. Énoncer et démontrer la formule de Pascal.
4. Énoncer la formule du binôme de Newton (pas de preuve mais on expliquera brièvement à l'oral le plan de la preuve) puis énoncer et démontrer la formule de factorisation de $a^n - b^n$.
5. Donner la définition d'une fonction majorée, paire, impaire, T-périodique, croissante, d'une fonction strictement croissante et démontrer que si $f : D \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors, $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.
6. Déterminer l'équation de la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ et en déduire l'équation de la tangente au graphe de f (dérivable en x_0) en x_0 et illustrer graphiquement.
7. Donner les domaines de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions usuelles (cos, sin, tan, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \ln(x)$, etc.).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 2 : 16.1) et 3) et TD 3 : 4 et 9.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne !) :

- 1er du groupe : TD2 : 5.
- 2ieme du groupe : TD2 : 8.
- 3ieme du groupe : TD2 : 14.

Prochain programme : généralités sur les fonctions.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 5 :

- 2) Pour la première expression, utiliser le théorème des sommes télescopiques.
- 2) Pour la seconde expression, utiliser le binôme de Newton pour développer $(k+1)^3$ et séparer en trois sommes.
- 2) Transformer l'égalité en $S_2 = \dots$ en passant tout ce qui n'est pas S_2 de l'autre côté de l'égalité.
- 3) On recommence, en suivant les trois indications précédentes : changement d'indice, binôme de Newton et calcul et « isolement » de S_3.

Exo 8 :

- Séparer la somme en deux sommes, l'une utilisant les indices pairs, l'autre utilisant les indices impairs.
- Poser les changements de variables $k = 2j$ (dans la première somme) et $k = 2j - 1$ (dans la seconde).
- Simplifier le $(-1)^k$ (il ne peut prendre que deux valeurs : 1 ou -1 dépendant de la parité de k).
- Ne pas utiliser la formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$. Normalement ce terme se simplifie !

Exo 14 :

- 1) Revenir à la définition avec les factorielles. Vous pouvez partir du membre de gauche et le simplifier, puis partir du membre de droite et le simplifier et obtenir la même chose.
- 2) Justifier que vous avez bien le droit d'utiliser la relation précédente et remplacer.
- 2) Factoriser dans la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{k}$ tout ce qui ne dépend pas de p.
- 2) Utiliser un (des !) binôme(s) de Newton.