Problème 1 : Algèbre

Q1) a) On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &= \{\begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1}\end{pmatrix} \mid (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib\end{pmatrix} \mid (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\} \quad \text{(en notant } z_1 = a+ib \text{ et } z_2 = c+id) \\ &= \{a\mathrm{I}+c\mathrm{J}+b\mathrm{K}+d\mathrm{L} \mid (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\} \\ &= \mathrm{vect}(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L}).\end{aligned}$$

Comme $(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L})$ est une famille de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on sait que $\mathbb{H}$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel}}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, et que la famille $(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L})$ est génératrice de $\mathbb{H}$.
Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

$$a\mathrm{I}+c\mathrm{J}+b\mathrm{K}+d\mathrm{L} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib\end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow \begin{cases} a+ib=0 \\ c+id=0\end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=0$$

Ainsi, la famille $(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L})$ est bien $\boxed{\text{une base}}$ de $\mathbb{H}$.

b) On sait que la trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, elle l'est donc aussi sur $\mathbb{H}$. De plus, cette forme linéaire n'est pas nulle sur $\mathbb{H}$ puisque $\mathrm{I}\in\mathbb{H}$ et que $\mathrm{tr}(\mathrm{I}) = 2 \neq 0$. En tant que noyau d'une forme linéaire non nulle, F est donc bien un $\boxed{\text{hyperplan}}$ de $\mathbb{H}$.

Comme $\mathbb{H}$ est de dimension 4 d'après Q1a, on sait que F est de dimension 3. Or la famille $\boxed{(\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L})}$, de cardinal 3, est clairement dans F, et libre en tant que sous-famille de $(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L})$, donc c'est une $\boxed{\text{base}}$ de F.

c) Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{H}^2$. Notons $\mathrm{A} = \mathrm{M}(z_1,z_2)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{M}(z_1',z_2')$. On obtient

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} z_1' & -\overline{z_2'} \\ z_2' & \overline{z_1'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_1' - z_2'\overline{z_2} & -z_1\overline{z_2'} - \overline{z_2}\,\overline{z_1'} \\ z_2z_1' + \overline{z_1}z_2' & -z_2\overline{z_2'} + \overline{z_1}\,\overline{z_1'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -\overline{y_2} \\ y_2 & \overline{y_1}\end{pmatrix}$$

en posant $y_1 = z_1z_1' - z_2'\overline{z_2}$ et $y_2 = z_2z_1' + \overline{z_1}z_2'$.
On a donc $\boxed{\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \mathrm{M}(y_1,y_2)\in\mathbb{H}}$.
Montrons que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

- $(\mathbb{H},+)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}),+)$ puisque nous avons vu que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$;
- $\forall\,(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{H}^2$, $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\in\mathbb{H}$;
- $\mathrm{I}\in\mathbb{H}$ (élément neutre de la multiplication).

Ainsi, $(\mathbb{H},+,\times)$ est bien un $\boxed{\text{anneau}}$. Il n'est **pas commutatif** car, par exemple $\underbrace{\mathrm{K}\times\mathrm{L}}_{=\mathrm{J}} \neq \underbrace{\mathrm{L}\times\mathrm{K}}_{=-\mathrm{J}}$.

Q2) a) En notant $\mathrm{A} = \mathrm{M}(z_1,z_2)$ on a

$$\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{Com}(\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & -z_2 \\ \overline{z_2} & z_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -z_2 & z_1\end{pmatrix} = \mathrm{M}(\overline{z_1},-z_2)$$

donc $\boxed{\sigma(\mathrm{A})\in\mathbb{H}}$.

b) En notant encore $\mathrm{A} = \mathrm{M}(z_1,z_2)$ on a

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1}\end{vmatrix} = z_1\times\overline{z_1} + z_2\times\overline{z_2} = |z_1|^2+|z_2|^2.$$

Cette somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes son nuls, ie. $|z_1| = |z_2| = 0$, c'est-à-dire si $z_1 = z_2 = 0$, ce qui correspond à la matrice nulle.
Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathbb{H}$ non nulle, son déterminant est non nul, et donc A est $\boxed{\text{inversible}}$.
D'autre part, on sait que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{Com}(A)^T = \frac{1}{\det(A)}\sigma(A) \in \boxed{\mathbb{H}}$$

puisque $\sigma(A) \in \mathbb{H}$, que $\frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{R}$ (cf calcul précédent), et que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Malgré cette propriété, $(\mathbb{H}, +, \times)$ n'est $\boxed{\text{pas un corps}}$ car il n'est pas commutatif.

c) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boxed{\mathrm{tr}(A)I - A}.$$

Cette expression donne immédiatement la linéarité de σ, et Q2a justifie qu'il s'agit bien d'un $\boxed{\text{endomorphisme}}$ de $\mathbb{H}$.
On écrit

$$\begin{aligned}
\sigma(I) &= \underbrace{\mathrm{tr}(I)}_{2} I - I = I \\
\sigma(J) &= \underbrace{\mathrm{tr}(J)}_{0} I - J = -J \\
\sigma(K) &= \underbrace{\mathrm{tr}(K)}_{0} I - K = -K \\
\sigma(L) &= \underbrace{\mathrm{tr}(L)}_{0} I - L = -L
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

d) On constate que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma)^2 = I_4$, donc $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$, ce qui prouve que σ est une $\boxed{\text{symétrie}}$ de $\mathbb{H}$.
C'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\mathbb{H}})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{id}_{\mathbb{H}})$.
Or

$$\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{id}_{\mathbb{H}}) = \{A \in \mathbb{H} \mid \sigma(A) = -A\} = \{A \in \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}(A)I - A = -A\} = \{A \in \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} = F.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{id}_{\mathbb{H}})$ est de dimension 3, donc $\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\mathbb{H}})$ est de dimension 1 (car ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{H}$). On constate de $I \in \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\mathbb{H}})$ puisque $\sigma(I) = I$, donc la famille (I) (de cardinal 1 et libre car I n'est pas nulle) est une base de $\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\mathbb{H}})$.
Bilan : $\boxed{\sigma \text{ est la symétrie par rapport à vect(I) et parallèlement à } F}$.
(Notez que ce résultat peut aussi se retrouver presque immédiatement à partir de la matrice.)

Q3) a) En notant toujours $A = M(z_1, z_2)$ on a

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\begin{vmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{vmatrix}) = z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}(z_1) \in \boxed{\mathbb{R}}$$

et

$$(A \mid A) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A\sigma(A)) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\det(A)I) = \frac{\det(A)}{2}\mathrm{tr}(I) = \boxed{\det(A)}.$$

Montrons que $(.\mid.)$ est un $\boxed{\text{produit scalaire}}$ sur $\mathbb{H}$.

- $(.\mid.) : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ car
$$\forall (A,B) \in \mathbb{H}^2,\ (A \mid B) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A\sigma(B) + B\sigma(A)) \in \mathbb{R}$$
puisque $\sigma(B) \in \mathbb{H}$ d'après Q2a, et donc $A\sigma(B) \in \mathbb{H}$ d'après Q1c, on obtient de même que $B\sigma(A) \in \mathbb{H}$,

puis finalement $A\sigma(B)+B\sigma(A)\in\mathbb{H}$ puisque $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel, ce qui permet de conclure que $\mathrm{tr}(A\sigma(B)+B\sigma(A))\in\mathbb{R}$;

- la symétrie du produit scalaire est immédiate (l'expression $(A\,|\,B)$ étant symétrique en A et B) ;
- la linéarité à gauche provient de celles de σ et tr, et par symétrie on obtient aussi celle à droite ;
- la positivité provient du fait que $(A\,|\,A)=\det(A)\in\mathbb{R}^+$ (justifié en Q2b) ;
- la définition provient du fait que $\det(A)$ est nul uniquement pour la matrice nulle (justifié aussi en Q2b).

b) On écrit

$$\|A\times B\|=\sqrt{(AB\,|AB)}=\sqrt{\det(AB)}=\sqrt{\det(A)\det(B)}=\sqrt{\det(A)}\sqrt{\det(B)}=\boxed{\|A\|\times\|B\|}.$$

c) Comme F est de dimension 3, on sait que $F^\perp$ est de dimension 1. Or $I\in F^\perp$ puisque

$$\forall A\in F,\ (A\,|\,I)=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A\underbrace{\sigma(I)}_{I}+I\underbrace{\sigma(A)}_{=-A(\text{Q2d})})=0.$$

La famille (I), libre et de cardinal 1, est donc une base de $F^\perp$ donc

$$\boxed{F^\perp=\mathrm{vect}(I)}.$$

d) En utilisant que $\|A\|=\sqrt{\det(A)}$ on constate que les matrices I,J,K,L sont unitaires.
Ensuite $(I|J)=(I|K)=(I|L)=0$ puisque J,K,L sont dans F et I dans $F^\perp$.
Restent

$$(J|K)=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(J\underbrace{\sigma(K)}_{-K}+K\underbrace{\sigma(J)}_{=-J})=0\quad(\text{car } JK=-KJ)$$
$$(J|L)=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(J\underbrace{\sigma(L)}_{-L}+L\underbrace{\sigma(J)}_{=-J})=0\quad(\text{car } JL=-LJ)$$
$$(L|K)=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(L\underbrace{\sigma(K)}_{-K}+K\underbrace{\sigma(L)}_{=-L})=0\quad(\text{car } LK=-KL)$$

Donc (I,J,K,L) est une famille orthonormale de $\mathbb{H}$, et donc une $\boxed{\text{base orthonormale}}$ puisque son cardinal vaut la dimension de $\mathbb{H}$.

e) D'après Q2d, σ est la symétrie par rapport à vect(I) parallèlement à F, donc $-\sigma$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à vect(I), ie. c'est la symétrie associée au projecteur π, donc

$$\pi=\frac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathbb{H}}-\sigma).$$

Ainsi,

$$\boxed{\pi(A)=\frac{1}{2}(A-\sigma(A))}.$$

Problème 2 : Probabilités

Q1) *Premiers calculs.*

a) D'après la définition de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X_1)=1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0$. D'après la définition de la variance, on a $\mathbb{V}(X_1)=\mathbb{E}(X_1^2)-(\mathbb{E}(X_1))^2$. Or, X_1^2 est toujours égal à 1 donc $\mathbb{V}(X_1)=1$.

b) Les $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ ont la même loi donc elles ont même espérance et même variance. Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}(X_k)=0$. Puisque ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, on a de plus :

$$\mathbb{V}(S_n)=\mathbb{V}(\sum_{k=1}^n X_k)=\sum_{k=1}^n\mathbb{V}(X_k)=n.$$

Q2) *Deux applications.*

a) On a $\mathbb{V}(|S_n|) \geqslant 0$ car une variance est positive. De plus, on a $\mathbb{V}(|S_n|) = \mathbb{E}(|S_n|^2) - \mathbb{E}(|S_n|)^2$, ce qui entraine que $\mathbb{E}(S_n^2) \geqslant \mathbb{E}(|S_n|)^2$. En utilisant le fait que $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{V}(S_n) = n$ (d'après la question précédente et en utilisant le fait que $\mathbb{E}(S_n) = 0$) et le fait que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\mathbb{E}(|S_n|) \leqslant \sqrt{n}$.

b) Puisque $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = n$, on en déduit d'après l'inégalité de Tchebychev que pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2},$$

soit $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant \frac{n}{a^2}$.

Si (u_n) est une suite strictement positive, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(|S_n| \geqslant u_n) \leqslant \frac{n}{u_n^2}.$$

Or, si $\sqrt{n} = o_{+\infty}(u_n)$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{u_n} = 0$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n^2} = 0$. Par théorème des gendarmes (puisqu'une probabilité est positive), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n| \geqslant u_n) = 0$.

De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant u_n) + \mathbb{P}(|S_n| < u_n) = 1$ (puisque pour tout évènement A, $A \subset \overline{A} = \Omega$). On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n| < u_n) = 1$.

Q3) *Équivalent de* $E(|S_n|)$.

a) Puisque $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et que chaque variable aléatoire X_k est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, on en déduit que $|S_n|(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. On a alors $E(|S_n|) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} sP(|S_n| = s)$. Certaines valeurs de $[\![0, n]\!]$ ne sont pas prises par S_n (on voit par exemple que si n est impair, S_n ne peut pas s'annuler) mais on peut quand même les comptabiliser dans la somme puisqu'elles sont alors comptées avec une probabilité nulle. On peut de plus faire commencer la somme à 1 car le premier terme de la somme fera de toute façon 0. On a donc bien $E(|S_n|) = \sum_{k=1}^n kP(|S_n| = k)$.

b) Soit $k > 1$. On utilise le fait que $(X_{n+1} = 1)$ et $(X_{n+1} = -1)$ forment un système complet d'évènements. D'après les probabilités totales, cela entraine que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(S_{n+1} = k) & = & \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = k) \\ & = & \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(S_n + X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}_{X_{n+1}=-1}(S_n + X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) \\ & = & \frac{\mathbb{P}(S_n = k-1) + \mathbb{P}(S_n = k+1)}{2}. \end{array}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(S_{n+1} = -k) & = & \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = -k) \\ & = & \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(S_n + X_{n+1} = -k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}_{X_{n+1}=-1}(S_n + X_{n+1} = -k)\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) \\ & = & \frac{\mathbb{P}(S_n = -k-1) + \mathbb{P}(S_n = -k+1)}{2}. \end{array}$$

On utilise alors le fait que $(S_{n+1} = k) \subset (S_{n+1} = -k) = (|S_{n+1}| = k)$ (et l'union est disjointe car les évènements sont incompatibles) pour obtenir en sommant :

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(S_n = -k-1) + \mathbb{P}(S_n = -k+1) + \mathbb{P}(S_n = -k-1) + \mathbb{P}(S_n = -k+1)\right).$$

En regroupant alors $(S_n = k+1) \subset (S_n = -k-1) = (|S_n| = k+1)$ et $(S_n = k-1) \subset (S_n = -k+1) = (|S_n| = k-1)$, on obtient alors le résultat voulu, à savoir :

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(|S_n| = k-1) + \mathbb{P}(|S_n| = k+1)\right).$$

c) Si $k=1$, on peut procéder de même, la seule différence étant cette fois que $(S_n=0)=(S_n=-0)=(S_n=0)$, ce qui fait que l'on ne sépare plus en deux unions disjointes mais que cet évènement apparait deux fois. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(|S_{n+1}|=1) &=& \mathbb{P}(S_{n+1}=1)+\mathbb{P}(S_{n+1}=-1)\\ &=& \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(S_n+1=1)+\mathbb{P}(S_n-1=1)\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(S_n+1=-1)+\mathbb{P}(S_n-1=-1)\right)\\ &=& \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(S_n=0)+\mathbb{P}(S_n=2)+\mathbb{P}(S_n=-2)+\mathbb{P}(S_n=0)\right)\\ &=& \mathbb{P}(|S_n|=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n|=2).\end{array}$$

d) On a alors par changement d'indice :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(|S_{n+1}|) &=& \sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)\\ &=& \mathbb{P}(|S_n|=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n|=2)+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}k(\mathbb{P}(|S_n|=k-1)+\mathbb{P}(|S_n|=k+1))\\ &=& \mathbb{P}(|S_n|=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n|=2)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\mathbb{P}(|S_n|=k)+\sum_{k=3}^{n+2}(k-1)\mathbb{P}(|S_n|=k)\right)\\ &=& \mathbb{P}(|S_n|=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n|=2)+\mathbb{P}(|S_n|=1)+\frac{3}{2}\mathbb{P}(|S_n|=2)\\ && +\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}2k\mathbb{P}(|S_n|=k)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n|=n+1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n|=n+2)\\ &=& \mathbb{P}(|S_n|=0)+\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(|S_n|=k)+0+0\\ &=& \mathbb{P}(|S_n|=0)+\mathbb{E}(|S_n|).\end{array}$$

e) Si n est impair, $|S_n|$ ne peut être pair (on fait une somme d'un nombre impair de termes égaux à ±1). On a donc dans ce cas $\mathbb{P}(S_n=0)=0$. Si n est pair, la seule possibilité pour avoir $S_n=0$ (ce qui est équivalent à $|S_n|=0$) est d'avoir parmi les n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ réalisés $n/2$ succès et $n/2$ échecs. On est donc ramené à l'étude de n expériences indépendantes avec une probabilité de succès égale à $\frac{1}{2}$. On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n=0)=\binom{n}{n/2}\frac{1}{2^n}.$$

On a donc $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

f) On a $|S_1|=|X_1|=1$ donc pour $n=0$, $\mathbb{E}(|S_1|)=1$ donc la propriété est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors, en utilisant les questions précédentes :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(|S_{2n+3}|) &=& \mathbb{E}(|S_{2n+2}|)+\mathbb{P}(|S_{2n+2}|=0)\\ &=& \mathbb{E}(|S_{2n+1}|)+\mathbb{P}(|S_{2n+1}|=0)+\mathbb{P}(|S_{2n+2}|=0)\\ &=& \frac{n+1}{4^n}\binom{2n+1}{n}+0+\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}\\ &=& \frac{1}{4^{n+1}}\left(\frac{(4n+4)(2n+1)!}{(n+1)!n!}+\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\right)\\ &=& \frac{(2n+1)!}{4^{n+1}(n+1)!n!}(4n+6)\\ &=& \frac{(2n+1)!}{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}(2n+3)(2n+2)\\ &=& \frac{(n+2)(2n+3)!}{4^{n+1}(n+1)!(n+2)!}\\ &=& \frac{(n+2)\binom{2n+3}{n+1}}{4^{n+1}}\end{array}$$

ce qui prouve l'égalité au rang $n+1$ et achève la récurrence.

g) On rappelle que $n!\sim_{+\infty}\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$.

D'après la question précédente et la formule de Stirling :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(|S_{2n+1}|) & = & \frac{(2n+1)!}{4^n(n!)^2} \\ & = & \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ & \sim & \frac{2n}{4^n} \times \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{2n}}{n^n e^{2n}(2\pi n)} \\ & \sim & \frac{2n}{4^n} \times \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \\ & \sim & \sqrt{\frac{2\times(2n)}{\pi}}. \end{array}$$

De plus, on a $\mathbb{E}(|S_{2n+2}|) = \mathbb{E}(|S_{2n+1}|)$ (puisque $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$) donc on a équivalence entre deux termes consécutifs de la suite. On en déduit que :

$$\mathbb{E}(|S_{2n+2}| \sim \sqrt{\frac{2\times(2n)}{\pi}}.$$

Puisque $2n \sim (2n+1)$, et que $2n \sim (2n+2)$, on en déduit que :

$$\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) \sim \sqrt{\frac{2\times(2n+1)}{\pi}} \text{ et } \mathbb{E}(|S_{2n+2}| \sim \sqrt{\frac{2\times(2n+2)}{\pi}}.$$

En passant au quotient qui tend vers 1, on en déduit, d'après le théorème des indices pairs et impairs que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(|S_n|)}{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}} = 1$, ce qui entraine que $\mathbb{E}(|S_n|) \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

Problème 3 : Analyse

Q1) Une involution est bijective (et est sa propre réciproque), donc $\mathrm{Inv(E)} \subset \mathrm{S(E)}$ (inclusion dans l'ensemble des permutations de E), or S(E) est fini de cardinal $n!$ où $n = \mathrm{card(E)}$, donc :

$$\boxed{\text{Inv(E) est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à } n!.}$$

Q2)
- Si $n = 1$, alors il y a une seule permutation de E, $\mathrm{id_E}$ et celle-ci est involutive, donc $\boxed{I_1 = 1}$.
- Si $n = 2$, par exemple $E = [\![1;2]\!]$, alors il y a deux permutations de E, $\mathrm{id_E}$ et la transposition $(1\ 2)$, celles-ci sont involutives, donc $\boxed{I_2 = 2}$.
- Si $n = 3$, par exemple $E = [\![1;3]\!]$, alors il y a six permutations de E, $\mathrm{id_E}$ et les transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$ sont involutives, mais pas le cycle $(1\ 2\ 3)$ ni $(1\ 3\ 2)$, donc $\boxed{I_3 = 4}$.

Q3) Soit $n \geqslant 2$ et $E = [\![1;n+1]\!]$.

a) Soit A_{n+1} l'ensemble des involutions de E pour lesquelles $n+1$ est un point fixe. Pour $f \in A_{n+1}$, posons $\varphi(f)$ l'application de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même définie par $\varphi(f)(k) = f(k)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. Lorsque $k \neq n+1$, on a bien $f(k) \in [\![1;n]\!]$ puisque $f(n+1) = n+1$ et que f est injective. On peut alors vérifier que $\varphi(f)$ est une involution de $[\![1;n]\!]$ puisque $f(f(k)) = k$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. On a donc bien défini une application $\varphi\colon A_{n+1} \to \mathrm{Inv}(E \setminus \{n+1\})$.

Cette application φ est injective, car si $\varphi(f) = \varphi(g)$ pour $f, g \in A_{n+1}$, alors pour $k \in [\![1;n]\!]$ on a $f(k) = g(k)$, de plus on sait que $f(n+1) = n+1 = g(n+1)$, donc $f = g$.

Cette application φ est surjective, car si $g \in \mathrm{Inv}(E \setminus \{n+1\})$, alors $g = \varphi(f)$ où f est définie par $f(k) = g(k)$ si $k \in [\![1;n]\!]$, et $f(n+1) = n+1$; cette application f est une involution de $[\![1;n+1]\!]$ pour laquelle $n+1$ est fixe, donc $f \in A_{n+1}$.

$$\boxed{\text{En conclusion, } \varphi \text{ est une bijection entre } A_{n+1} \text{ et } \mathrm{Inv}(E \setminus \{n+1\}).}$$

On en déduit que A_{n+1} est un ensemble fini de cardinal I_n.

b) Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note A_k l'ensemble des involutions de E pour lesquelles l'image de $n+1$ est k. Notons $F = E \setminus \{n+1, k\}$, pour $f \in A_k$, on pose $\psi(f)\colon F \to F$ définie par $\psi(f)(j) = f(j)$ pour $j \in F$. Cette application est bien définie car $f(n+1) = k$ et $f(k) = n+1$ (f est involutive), donc si $j \in F$, on a $f(j) \in F$ (f et injective). On peut alors vérifier que $\psi(f)$ est une involution de F puisque $f(f(j)) = j$ pour $j \in F$. On a donc bien défini une application $\psi\colon A_k \to \mathrm{Inv(F)}$.

Cette application ψ est injective, car si $\psi(f) = \psi(g)$ pour $f, g \in A_k$, alors pour $j \in F$ on a $f(j) = g(j)$, de plus on sait que $f(n+1) = k = g(n+1)$, et $f(k) = n+1 = g(k)$, donc $f = g$.

Cette application ψ est surjective, car si $g \in \mathrm{Inv}(\mathrm{F})$, alors $g = \varphi(f)$ où f est définie par $f(j) = g(j)$ si $j \in \mathrm{F}$, $f(n+1) = k$ et $f(k) = n+1$; cette application f est une involution de $[\![1\,;n+1]\!]$ qui échange $n+1$ et k, donc $f \in \mathrm{A}_k$.

$$\boxed{\text{En conclusion, } \psi \text{ est une bijection entre } \mathrm{A}_k \text{ et } \mathrm{Inv}(\mathrm{E} \setminus \{n+1, k\}).}$$

On en déduit que A_k est un ensemble fini de cardinal I_{n-1} $(n-1 \geqslant 1)$.

c) Les ensembles $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{n+1}$ forment une partition de $\mathrm{Inv}([\![1\,;n+1]\!])$. On en déduit que le cardinal de $\mathrm{Inv}([\![1\,;n+1]\!])$ est la somme des cardinaux des A_k, c'est à dire : $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_1 + \cdots + \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1}$. D'après les question précédentes, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{I}_{n+1} = n\mathrm{I}_{n-1} + \mathrm{I}_n.}$$

d) On a posé $\mathrm{I}_0 = 1$, on a $\mathrm{I}_1 = 1$, et $\mathrm{I}_2 = 2$, donc :

$$\boxed{\text{la relation ci-dessus reste vraie quand } n = 1.\ \forall n \geqslant 1, \mathrm{I}_{n+1} = n\mathrm{I}_{n-1} + \mathrm{I}_n.}$$

e) On en déduit (avec $n = 3$) que $\mathrm{I}_4 = 3\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 = 3\times 2 + 4 = \boxed{10}$. Et avec $n = 5$, $\mathrm{I}_5 = 4\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4 = 4\times 4 + 10 = \boxed{26}$.

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n\right| = \frac{\mathrm{I}_n}{n!}|x|^n \leqslant |x|^n$ car $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant n!$. La série de terme général $|x|^n$ est géométrique de raison $|x| \in]-1\,;1[$, elle est donc convergente. D'après les théorèmes de comparaison des SATP, la série de terme général $\left|\frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n\right|$ est convergente, autrement dit :

$$\boxed{\text{pour } x \in]-1\,;1[\text{, la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n \text{ est absolument convergente (et donc convergente).}}$$

Q5) D'après le résultat admis, on a pour $x \in]-1\,;1[$:
$\mathrm{S}'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n!}x^n = \mathrm{I}_1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mathrm{I}_{n-1}+\mathrm{I}_n}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mathrm{I}_{n-1}}{n!}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mathrm{I}_{n-1}}{n!}x^n$ (somme de séries convergentes), ce qui donne :
$\mathrm{S}'(x) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n = 1 + x\mathrm{S}(x) + \mathrm{S}(x) - 1 = (1+x)\mathrm{S}(x)$, donc :

$$\boxed{\text{la fonction S est solution de l'équation différentielle } y' = (x+1)y \text{ sur }]-1\,;1[.}$$

Q6) On a $\mathrm{S}(0) = \mathrm{I}_0 = 1$, S est donc solution du problème de Cauchy : $y' = (x+1)y$ avec $y(0) = 1$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et homogène, les solutions sont donc les fonctions $y\colon x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}+x}$, la condition initiale donne $\lambda = 1$ et donc :

$$\boxed{\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{T}_n}{n!}x^n = e^{\frac{x^2}{2}+x} \text{ pour } x \in]-1;1[.}$$

Q7) On considère les développements limités en 0 suivants :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{0}{o}(x^n) \text{ et } e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \underset{0}{o}(x^n)$$

a) La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto e^{x^2/2}$ aussi car composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, elles admettent donc un développement limité en 0 à n'importe quel ordre d'après le théorème de Taylor-Young, de plus on a $a_k = \frac{1}{k!}$, pour avoir le DL de l'autre fonction, on substitue $\frac{x^2}{2}$ à x dans celui de l'exponentielle et on tronque à l'ordre n ($\frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$), ce qui donne $e^{x^2/2} = \sum\limits_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2i}}{2^i(2i)!} + \underset{0}{o}(x^n)$, par conséquent on a :

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!},\ b_k = 0 \text{ si } k = 2i+1, \text{ et } b_k = \frac{1}{2^i(2i)!} \text{ si } k = 2i.}$$

b) La partie régulière du produit des deux DL est le produit des deux parties régulières (produit de deux polynômes) tronqué au degré n, par conséquent, par définition du produit de deux polynômes :

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(n-2i)!2^i(2i)!}.}$$

c) On sait d'après le théorème de Taylor-Young que $\boxed{c_n = \dfrac{\mathrm{S}^{(n)}(0)}{n!}}$.

d) D'après le résultat admis dans l'énoncé, $S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-k)!} x^n$, d'où $S^{(k)}(0) = I_k$. , on obtient donc $c_n = \frac{I_n}{n!}$, d'où :

$$\boxed{I_n = n! c_n = n! \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(n-2i)! 2^i (2i)!}.}$$