À chercher pour lundi 27/03/2023, corrigé

Exercice 1.

1) On a $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 = -\sum_{k=2}^{n} x_k \right\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - \ldots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

2) On va raisonner par analyse/synthèse.

Analyse : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $X = Y + Z$ où $Y \in H$ et $Z \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Z = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit donc que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 + \lambda \\ x_2 = y_2 + \lambda \\ \ldots \\ x_n = y_n + \lambda \end{array} \right.$$

Or, on a aussi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in H$ donc $\sum_{k=1}^{n} y_k = 0$. En sommant les différentes lignes du système, on obtient donc que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 + n\lambda$. On en déduit que :

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = x_k - \lambda$.

On ne trouve donc qu'une possibilité pour Y et Z.

Synthèse : Réciproquement, si $X \in \mathbb{R}^n$, on définit λ et Y comme précisé dans l'analyse et on pose donc $Z = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On a clairement que $Z \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $X = Y + Z$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $Y \in H$, ce qui est direct car :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda) = \sum_{k=1}^{n} x_k - n\lambda = 0.$$

On a donc bien $\mathbb{R}^n = H \oplus \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'analyse prouve que la somme est directe et la synthèse que $\mathbb{R}^n = H + \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$).

Exercice 2. E est un espace vectoriel puisqu'il contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire (une combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^1$ est $\mathcal{C}^1$). On procède de même pour les deux autres :

$F \subset E$, f est non vide car il contient la fonction nulle et si $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a $(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$ et $(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$ donc $\lambda f + \mu g \in F$.

De même, on a $G \subset E$ car les fonctions affines sont $\mathcal{C}^1$, la fonction nulle est bien affine (prendre $a = b = 0$) et si $f, g \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a que $f : x \mapsto a_1 x + b_1$ et $g : x \mapsto a_2 x + b_2$ avec $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\lambda f + \mu g : x \mapsto (\lambda a_1 + \mu a_2)x + \lambda b_1 + \mu b_2.$$

On a donc $\lambda f + \mu g \in G$. Au final, on a bien que F et G sont des sevs de E.

Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, on commence par montrer que $F \cap G = \{0_E\}$. L'inclusion $\supset$ est toujours vraie car $F \cap G$ est un espace vectoriel. Réciproquement, si $f \in F \cap G$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto ax + b$. On a alors $f(0) = b$ et $f'(0) = a$. Puisque $f \in F$, on a donc $a = b = 0$ soit $f = 0_E$, ce qu'il fallait montrer. La somme est donc directe.

Il reste à montrer que $F + G = E$, l'inclusion $\subset$ étant toujours vraie car F et G sont des sevs de E. Réciproquement, soit $h \in E$.

Analyse : si $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors en notant $g : x \mapsto ax + b$, on a $h(0) = f(0) + b = b$ et on a $h'(0) = f'(0) + a = a$.

Synthèse : on pose $g : x \mapsto ax + b$ où $b = h(0)$ et $a = h'(0)$ et $f = h - g$. On a alors directement que $h = g + f$ et que $g \in G$. Il reste à vérifier que $f \in F$, ce qui est direct car $f(0) = h(0) - b = 0$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$. On a donc bien montrer que $E \subset F + G$, ce qu'il fallait montrer.

Au final, on a bien que $F \oplus G = E$.

Exercice 3. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X) = 0$.

1) La famille est échelonnée en degré et est donc libre.

2) On évalue $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X) = 0$ en $X = k_0$ où $k_0 \in [\![0, n]\!]$. On remarque alors que $P_k(k_0) = 0$ si $k \neq k_0$ et que $P_{k_0}(k_0) = \prod_{i=0, i\neq k_0}^{n} (k_0 - i) \neq 0$. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(k_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{k_0} \prod_{i=0, i\neq k_0}^{n} (k_0 - i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{k_0} = 0.$$

Au final, on a bien $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ donc la famille est bien libre.

3) On a cette fois en échangeant les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \lambda_k X^i \\ & \Leftrightarrow \quad \sum_{0\leq k\leq i\leq n} \lambda_k X^i \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i} \lambda_k \right) X^i. \end{aligned}$$

Puisque la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est libre, on a alors que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{k=0}^{i} \lambda_k = 0$. En $i = 0$, on obtient que $\lambda_0 = 0$, en $i = 1$, on obtient $\lambda_0 + \lambda_1 = 0$, soit $\lambda_1 = 0$. En continuant par récurrence forte, on obtient que tous les λ_i sont nuls et donc que la famille est libre.

4) On évalue la relation $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} = 0$ en $X = 0$. On obtient alors que $\lambda_0(-1)^n + 0 = 0$, soit que $\lambda_0 = 0$. On en déduit en factorisant par X que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} & = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} \\ & = X \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^{k-1} (X-1)^{n-k} \\ & = X \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} X^k (X-1)^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Puisque X est différent du polynôme nul et que tout ce polynôme est nul, on a alors que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} X^k (X-1)^{n-k-1} = 0$. En évaluant en $X = 0$, on obtient que $\lambda_1 = 0$. On recommence en factorisant et simplifiant par X. On obtient finalement par récurrence forte que tous les λ_i sont nuls et donc que la famille est libre.