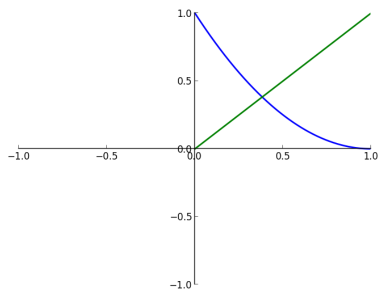
12. suites 2, corrigé

Exercice 1. Étude du cas f décroissant. On pose $f : x \mapsto (1-x)^2$ et on considère la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Commençons par un petit dessin :



1) Pour tout $x \in [0,1]$, $(1-x) \in [0,1]$ donc $(1-x)^2 \in [0,1]$. On a donc montré que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$. L'intervalle $[0,1]$ est donc stable par f. On en déduit par récurrence (la récurrence étant directe, notre hypothèse étant : $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ») que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, minorée par 0 et majorée par 1.

2) On a $f(x) - x = x^2 - 3x + 1$. On a alors $\Delta = 5$. Les points fixes de f sont donc $x_- = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_+ = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. La seule solution dans l'intervalle $[0,1]$ est donc $x_- = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, que l'on notera x_0 dans la suite.

3) f est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 2(x-1) \leq 0$. On en déduit que f est décroissante sur $[0,1]$. Puisque qu'une composée de fonctions décroissantes est croissante, on en déduit que $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.

Supposons $u_0 \geq u_2$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_{2n} \geq u_{2n+2}$ ». La propriété est vraie au rang 0 (c'est l'hypothèse de l'énoncé). Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors $u_{2n} \geq u_{2n+2}$ par hypothèse de récurrence. Puisque $f \circ f$ est croissante, on en déduit que :

$$(f \circ f)(u_{2n}) \geq (f \circ f)(u_{2n+2}).$$

Ceci entraine que $u_{2n+2} \geq u_{2n+4}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$ (puisque $2(n+1)+2 = 2n+4$). On a donc montré que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Que se passe-t-il à ce moment là pour la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$? Puisque $u_0 \geq u_2$, alors en composant par f (qui est décroissante), on trouve que $f(u_0) \leq f(u_2)$, c'est à dire que $u_1 \leq u_3$. On montre alors, encore une fois par récurrence que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (toujours en utilisant le fait que $f \circ f$ est croissante).

Dans le cas $u_0 \leq u_2$, c'est le contraire. On trouve que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (toujours par récurrence) et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On remarquera que le résultat de cette question est vraie quelque soit la fonction f décroissante ! Les sous suites des termes impairs/pairs sont toujours monotones et de monotonie contraire !

4) Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
(f\circ f)(x)-x &= (f(x)-1)^2-x \\
&= ((x-1)^2-1)^2-x \\
&= (x^2-2x)^2-x \\
&= x^4-4x^3+4x^2-x \\
&= x(x^3-4x^2+4x-1) \\
&= x(x-1)(x^2-3x+1) \\
&= x(x-1)(x-x_0)(x-x_+).
\end{aligned}$$

On rappelle que l'on avait $x_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_+=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ceci entraine que les points fixes de $f\circ f$ qui sont dans $[0,1]$ sont $0, x_0$ et 1. Pour le signe, on a $(f\circ f)(x)-x$ négatif pour $x\in[0,x_0]$ et $(f\circ f)(x)$ positif pour $x\in[x_0,1]$.

5) Supposons $u_0\in[0,x_0[$. On a alors d'après la question précédente que $(f\circ f)(u_0)-u_0\leq 0$, ce qui entraine que $u_2\leq u_0$. D'après la question 3, on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puisque ces suites sont minorées (par 0) et majorée (par 1), on en déduit qu'elles convergent.

Or, ces suites convergent nécessairement vers un point fixe de $f\circ f$. En effet, si on note par exemple L la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puisque $f\circ f$ est continue et que $u_{2(n+1)}=(f\circ f)(u_{2n})$, on en déduit en passant à la limite que $L=(f\circ f)(L)$. Or, puisque la suite (u_{2n}) est décroissante et que $u_0<x_0$, on ne peut avoir que $L=0$.

De même, la suite (u_{2n+1}) est croissante donc toujours supérieure ou égal à $u_1=f(u_0)>x_0$ (on peut utiliser la stricte décroissance de f pour montrer ceci et le fait que $u_0<x_0$). On en déduit que la seule limite possible pour (u_{2n+1}) est 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc deux sous suites qui convergent vers des limites différentes. On en déduit qu'elle ne converge pas.

Si $u_0\in]x_0,1]$, le raisonnement s'inverse. C'est cette fois (u_{2n}) qui est croissante convergente vers 1 et (u_{2n+1}) qui est décroissante convergente vers 0. La suite (u_n) ne converge donc pas.

Finalement, le seul cas où la suite (u_n) converge est quand $u_0=x_0$. On a alors (u_n) qui est la suite constante égale à x_0.

Je vous recommande de faire l'exercice 4 qui se traite de la même manière mais où cette fois la suite (u_n) est convergente car les sous suites de ses termes pairs et impairs convergeront vers la même limite.

Exercice 2. Étude du cas f décroissant 2. On pose $f:x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ et on considère la suite définie par $u_0\in[0,1]$ et pour $n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

1) On a f strictement décroissante et continue sur $[0,1]$. On a $f(0)=1$ et $f(1)=\dfrac{1}{2}$. On en déduit d'après le théorème de la bijection continue que $f([0,1])=\left[\dfrac{1}{2},1\right]\subset[0,1]$. Ceci entraine que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f. On en déduit par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$. La suite (u_n) est donc bornée.

2) On a $f(x_0)=x_0$ ssi $\dfrac{1}{1+x_0}=x_0$. On en déduit que x_0 est une des racines du polynôme X^2+X-1. Les racines de ce polynôme sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. On a alors, puisque $x_0\in[0,1]$ qu'il y a un unique point fixe dans $[0,1]$ et que ce point fixe est $x_0=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3) cf exercice 3. La preuve ne dépend pas de la fonction f mais uniquement de sa monotonie.

4) On a pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
(fof)(x) - x &= \frac{1}{1+f(x)} - x \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} - x \\
&= \frac{1+x}{2+x} - x \\
&= \frac{1+x-x(2+x)}{2+x} \\
&= -\frac{x^2+x-1}{2+x} \\
&= -\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2+x}.
\end{aligned}$$

où $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ qui est l'autre racine du polynôme. On en déduit que l'unique point fixe de fof sur $[0,1]$ est x_0. On a également le signe de $x \mapsto (fof)(x) - x$. Cette fonction est positive sur $[0, x_0]$ et négative sur $[x_0, 1]$.

5) Supposons $u_0 \in [0, x_0]$. On a alors d'après la question précédente que $(fof)(u_0) - u_0 \geq 0$, ce qui entraine que $u_2 \geq u_0$. On en déduit que la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante. Puisqu'elles sont majorées/minorées (majorée par 1 et minorée par 0), on en déduit qu'elles sont convergentes. Or, elles convergent vers un point fixe de fof (ce que l'on obtient en utilisant la continuité de fof et en passant à la limite dans la relation $u_{2(n+1)} = (fof)(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = (fof)(u_{2n+1})$). Puisque le seul point fixe de fof est x_0, on en déduit que $u_{2n} \to x_0$ et $u_{2n+1} \to x_0$. Puisque la suite des termes pairs et des termes impairs tend vers la même limite, alors la suite (u_n) tend vers x_0.

La raisonnement est identique si $u_0 \in [x_0, 1]$. On a encore une fois que (u_n) converge vers x_0. Dans tous les cas, on a montré que la suite (u_n) converge vers x_0.

Exercice 3.

1) Ce résultat est vrai. En effet, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ revient à dire que $nu_n \to 1$ et $v_n \sim \dfrac{2}{n}$ revient à dire que $nv_n \to 2$. On en déduit que $n(u_n + v_n) \to 3$ (par somme de suites convergentes), ce qui entraine que $u_n + v_n \sim \dfrac{3}{n}$.

2) Ce résultat est vrai mais l'équivalent obtenu n'est pas le plus simple possible. En effet, en retraduisant les hypothèses, on a $nu_n \to 1$ et $n^2 v_n \to 1$. Ceci entraine, par produit de suites convergentes, que :

$$nv_n = \frac{1}{n} \times n^2 v_n \to 0.$$

On en déduit que $n(u_n + v_n) \to 1$ d'où $u_n + v_n \sim \dfrac{1}{n}$. Or, on $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$. Par transitivité du fait d'être équivalent, on en déduit le résultat voulu.

3) Ce résultat est faux. Remarquons tout d'abord que $u_n \sim \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ revient uniquement à $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ puisque $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ (ce résultat est vrai, il suffit de diviser le terme de gauche par $\dfrac{1}{n}$, c'est à dire de

le multiplier par n pour obtenir que la limite du rapport tend vers 1). Posons alors $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a alors :

$$u_n - v_n \sim \frac{1}{n^{3/2}} \text{ et } \frac{1}{n^{3/2}} \not\sim \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 4. Tout est strictement positif donc l'encadrement de l'énoncé est équivalent à :

$$1 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq \frac{w_n}{u_n}.$$

Par théorème des gendarmes, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{u_n} = 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, ce qui implique que $v_n \sim_{+\infty} u_n$.

Exercice 6.

1) On a en factorisant par les termes dominant au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2}{n} \times \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Ceci montre que $u_n \sim n$.

2) En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3) En mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{2}{n^2 - 1} \\ &= \frac{2}{n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $u_n \sim \frac{2}{n^2}$.

4) Par composition de limites, on a $u_n \to \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Puisque $\frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$ et qu'une suite qui tend vers une limite non nulle est équivalente à sa limite, on en déduit que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5) On a $\frac{1}{n^2} \to 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. On en déduit par produit d'équivalents que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

6) En regroupant les logarithmes, on trouve :

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

En utilisant le taux d'accroissement de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 (puisque $\frac{1}{n} \to 0$), on en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 9. L'idée de tout l'exercice va être de se ramener à des compositions de limites. Dès qu'on a une puissance, on utilise la forme exponentielle pour simplifier les calculs.

1) On a :

$$\begin{aligned} \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)} &= \frac{e^{\ln(n)\times\ln(n)}}{e^{n\ln(\ln(n))}} \\ &= e^{(\ln(n))^2 - n\ln(\ln(n))} \\ &= e^{n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right)}. \end{aligned}$$

Or, on a $\frac{\ln(n)^2}{n} \to 0$ d'après les croissances comparées. Puisque $\ln(\ln(n)) \to +\infty$, on en déduit que le terme dans l'exponentielle tend vers $-\infty$. Ceci entraine par composition de limites que la suite considérée tend vers 0 quand n tend vers l'infini (puisque l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$).

2) On a :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^2} &= (n^2)^{1/n} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)} \\ &= e^{\frac{2\ln(n)}{n^2}}. \end{aligned}$$

Par croissance comparée, le terme dans l'exponentielle tend vers 0. On en déduit par composition de limites que $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ quand n tend vers l'infini.

3) On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n &= \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n \\ &= e^{n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}. \end{aligned}$$

Attention à ne pas faire de compositions d'équivalents ici ! Pour ne faire que des compositions de limites, on utilise le fait que puisque $-\frac{2}{n+1} \to 0$, alors :

$$\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim -\frac{2}{n+1}.$$

Ceci entraine par produit d'équivalents que $n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim -\frac{2n}{n+1}$. Or, ce terme tend vers -2. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = -2.$$

Ceci entraine par composition de limites que la suite considérée tend vers e^{-2}.

4) On a :

$$n^{\frac{\sin(n)}{n}} = e^{\frac{\sin(n)}{n}\ln(n)}.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, puisque le sinus est compris entre -1 et 1, on a :

$$-\frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n}\ln(n) \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

On en déduit, par croissance comparée et par théorème des gendarmes que $\frac{\sin(n)}{n}\ln(n) \to 0$. Ceci entraine alors par composition de limites que la suite considérée tend vers 1.

Exercice 10. posons $v_n = \sum_{k=1}^{n} k!$.

Tout d'abord, puisque (v_n) est une somme de termes positifs, on a $n! \leq v_n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{n!} &= \frac{n! + (n-1)! + \sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} \\
&\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n-2}(n-2)!}{n!} \\
&\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} \\
&\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $1 \leq \frac{v_n}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n}$. Le terme de droite tend vers 1. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{v_n}{n!} \to 1$, c'est à dire que $v_n \sim n!$.

Exercice 11. Soit $u_n = \frac{1}{n^n}$. Posons $v_n = \sum_{k=n}^{2n} u_k$.

Tout d'abord, puisque (v_n) est une somme de termes positifs, on a $u_n \leq v_n$. De plus, la suite (u_n) étant décroissante, on a que pour tout $k \in [\![n+2, 2n]\!]$, $u_k \geq u_{n+2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{u_n} &= \frac{u_n + u_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} u_k}{u_n} \\
&\leq 1 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\sum_{k=n+2}^{2n} u_{n+2}}{u_n} \\
&\leq 1 + \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} + \frac{(n+1)u_{n+2}}{u_n} \\
&\leq 1 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \frac{(n+1)n^n}{(n+2)^{n+2}} \\
&\leq 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{(n+2)(n+2)^n}{(n+2)^{n+2}} \\
&\leq 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $1 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$. Le terme de droite tend vers 1. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{v_n}{u_n} \to 1$, c'est à dire que $v_n \sim u_n$.

Exercice 12. On a le droit de faire des produits d'équivalents et d'élever un équivalent à une puissance fixée (indépendante de n). On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&\sim \frac{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{2\pi(2n)}}{\left(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\right)^2} \\
&\sim \frac{2^{2n}n^{2n}\sqrt{4\pi n}}{e^{2n}} \times \frac{e^{2n}}{n^{2n}2\pi n} \\
&\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \\
&\sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.
\end{aligned}$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \sqrt[n]{(n!)}$. On va majorer $n!$ en coupant le produit en deux. On va minorer les $\frac{n}{2}$ premiers termes par 1 et minorer chacun des autres termes par $\frac{n}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\prod_{k=E\left(\frac{n}{2}\right)+1}^{n} \frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{(n-2)}{2n}} \\
&\geq \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

On a donc minoré (u_n) par une suite qui tend vers $+\infty$ (le premier terme du produit diverge vers $+\infty$ et le second tend vers 1 : il suffit de le mettre sous forme exponentielle pour le prouver). La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

On ne peut pas utiliser la formule de Stirling car on ne peut pas élever des équivalents à des puissances qui dépendent de n...

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1) Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On a alors pour tout $n \geq 2$, $u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-1}$. En multipliant ces inégalités par n, on en déduit que :

$$n(u_n + u_{n+1}) \leq 2nu_n \leq n(u_n + u_{n-1}).$$

Le terme de gauche tend vers 1 par hypothèse. Le terme de droite tend également vers 1 (il suffit de le réécrire sous la forme $\frac{n}{n-1} \cdot (n-1)(u_{n-1} + u_n)$). D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $2nu_n \to 1$, c'est à dire que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

2) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Cette suite tend bien vers 0. Vérifions que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

On a :

$$\begin{aligned}
n(u_n+u_{n+1}) &= \frac{1}{2}+n\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{n}{2n+2}+n\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{n+1-1}{2n+2}+n(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= 1-\frac{1}{2n+2}+n(-1)^n\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}\right)\\
&= 1-\frac{1}{2n+2}+n(-1)^n\left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)\\
&= 1-\frac{1}{2n+2}+(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right).
\end{aligned}$$

Ceci implique alors, par somme de limites, que $n(u_n+u_{n+1})\to 1$. On a donc bien $u_n+u_{n+1}\sim\frac{1}{n}$.

Cependant, on n'a pas que $u_n\sim\frac{1}{2n}$. En effet, on a $u_n\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La suite (u_n) n'est donc pas décroissante.

Exercice 15. Pour $n\geq 3$, on pose $f_n:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^n+nx-1\end{array}\right.$.

1) f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f_n'(x)=n(x^{n-1}+1)$. f_n' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. On a $f_n(0)=-1$ et f_n tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Puisqu'elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$. Puisqu'elle est strictement croissante, elle s'annule au plus une fois. Il existe donc un unique réel $u_n\geq 0$ tel que $f_n(u_n)=0$.

2) Remarquons tout d'abord que $f_n(1)=n>0$. La suite (u_n) est donc à valeurs dans $]0,1[$ et est donc bornée. On peut être un peu plus précis. On a en effet que $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}>0$ puisque $n\geq 3$. On a donc $\forall n\geq 3$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$. Par théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Utilisons à présent le fait que $u_n^n+nu_n-1=0$. On a alors $nu_n=1-u_n^n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n^n=0$. On a alors que $nu_n\to 1$. La suite (u_n) tend donc vers 0 et on a plus précisément que $u_n\sim\frac{1}{n}$.

Exercice 16. Soit $f:\left\{\begin{array}{l}[1,+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x\ln(x)}{x+1}\end{array}\right.$.

1) f est dérivable sur $[1,+\infty[$. Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1+\ln(x)}{x+1}-\frac{x\ln(x)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{(x+1)\ln(x)-x\ln(x)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que f' est strictement positive sur $]1,+\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et donc injective. On a $f(1)=0$ et f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Puisque f est continue et strictement croissante, on en déduit que f est bijective de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution u_n.

2) Puisque f est strictement croissante, la suite (u_n) est strictement croissante (la stricte croissance de f entraine que si $f(u_n) < f(u_{n+1})$, alors $u_n < u_{n+1}$). La suite u_n ne converge pas (si elle convergeait vers α, on aurait alors par continuité de f, $f(\alpha) = +\infty$ ce qui serait absurde). La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

Cherchons à présent un équivalent de u_n. On remarque que la fonction f n'est pas si éloignée de la fonction ln, puisque le rapport $\dfrac{x}{x+1}$ se rapproche de plus en plus de 1 quand x tend vers l'infini. Il est donc raisonnable de penser que la suite u_n se comporte comme e^n. On va montrer que $u_n \sim e^n$ en utilisant un encadrement. Soit $x \in [1, +\infty[$. On a tout d'abord, puisque $\dfrac{x}{x+1} \leq 1$, que $f(x) \leq \ln(x)$. Cherchons à présent une minoration. On a $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1} \geq 1 - \dfrac{1}{x}$. On en déduit que $f(x) \geq \ln(x) - \dfrac{\ln(x)}{x}$. On a donc que :

$$\ln(u_n) - \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq f(u_n) \leq \ln(u_n).$$

Puisque $f(u_n) = n$, on en déduit alors que :

$$n \leq \ln(u_n) \leq n + \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

Par croissance de l'exponentielle, on en déduit que $e^n \leq u_n \leq e^n \cdot e^{\frac{\ln(u_n)}{u_n}}$. On a alors l'encadrement :

$$1 \leq \frac{u_n}{e^n} \leq e^{\frac{\ln(u_n)}{u_n}}.$$

Par croissances comparées, puisque $u_n \to +\infty$, on a $\dfrac{\ln(u_n)}{u_n} \to 0$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc que $e^{\frac{\ln(u_n)}{u_n}} \to 1$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\dfrac{u_n}{e^n} \to 1$, ce qui prouve que $u_n \sim e^n$.