18. Polynômes, corrigé

Exercice 1. Soit (P, Q) un couple de polynômes solution. Notons d_1 et d_2 leurs degrés. En considérant les degrés dans la relation proposé, on a alors $2d_1 = 1 + 2d_2$. On en déduit que d_1 et d_2 ne peuvent pas être entiers (on aurait un nombre pair égal à un nombre impair). Ils sont donc tous les deux égaux à $-\infty$. La seule solution de cette équation est donc $P = Q = 0$.

Exercice 6. On sait à chaque fois que le reste sera un polynôme de degré 1 à coefficients réels

1) Pour le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2-5X+4 = (X-1)(X-4)$, il suffit d'évaluer la relation $X^n = Q(X) \times (X^2 - 5X + 4) + aX + b$. On obtient alors que $1 = a + b$ et $4^n = 4a + b$, ce qui donne $a = (4^n - 1)/3$ et $b = 1 - (4^n - 1)/3$.

2) Pour le reste par $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$, il suffit d'évaluer en i. On obtient donc $i^n = ai + b$, ce qui donne, si n est pair de la forme $2k$, $a = 0$ et $b = (-1)^k$ et si n est impair de la forme $2k + 1$, $a = (-1)^k$ et $b = 0$.

3) Pour le reste par $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, on commence par évaluer en 1 pour obtenir $1 = a + b$. Pour obtenir la seconde équation, on dérive (car on a une racine double !) la relation $X^n = Q \times (X - 1)^2 + aX + b$ pour obtenir $nX^{n-1} = Q' \times (X - 1)^2 + 2Q \times (X - 1) + a$ et on évalue en 1 ce qui donne $n = a$. On a donc $a = n$ et $b = 1 - n$.

Exercice 10. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine au moins double de P, on a $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Or, on a $P' = 5X^4 - 1$. Ceci entraine que $\alpha^4 = \frac{1}{5}$. Si on réinjecte dans $P(\alpha)$, on trouve :

$$P(\alpha) = \alpha^5 - \alpha - 1 = \frac{\alpha}{5} - \alpha - 1 = -\frac{4\alpha}{5} - 1.$$

Ceci entraine que $\alpha = -\frac{5}{4}$. On vérifie alors facilement que cette valeur n'est pas racine de P, ce qui entraine que P n'a pas de racines au moins doubles. Toutes les racines de P sont donc simples.

Exercice 13. Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{z}$. On en déduit que $zP(z) + 1 = |z|^2 + 1$. Le polynôme $Q = XP(X) + 1$ n'admet donc aucune racine dans $\mathbb{C}$. Ceci est absurde d'après le théorème de d'Alembert !

Exercice 15.

1) On remarque que le polynôme nul et les polynômes constants ne sont pas surjectif. Soit à présent P un pôlynôme de degré supérieur ou égal à 1. Soit $y \in \mathbb{C}$. Alors, si on considère le polynôme $Q = P - y$, d'après le théorème de d'Alembert, ce polynôme admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. On a alors $P(\alpha) = y$ et on a bien construit un antécédent à y. On a donc montré que les polynômes surjectifs de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont tous les polynômes de degré supérieur ou égal à 1.

2) Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme injectif. Remarquons tout d'abord que P n'est pas nul et pas constant. Il est donc de degré supérieur ou égal à 1 et admet au moins une racine α. Si il admet une autre racine $\beta \neq \alpha$, on a alors $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, ce qui est absurde (0 a alors au moins 2 antécédents). On en déduit que P n'a qu'une racine, et est donc de la forme $\lambda(X - \alpha)^r$ avec $\lambda \neq 0$. Supposons que $r \geq 2$. Alors, on remarque que $P(\alpha + 1) = P(\alpha + \omega_r)$ où ω_r est une racine r-ième de l'unité différente de 1. On en déduit que P n'est pas injectif. On a donc trouvé que P devait être de la forme $\lambda(X - \alpha)$ avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

On vérifie réciproquement que tous les polynômes de degré 1 sont injectifs de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 16. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.

1) Notons $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les racines réelles distinctes de P. Puisque P est infiniment dérivable, on peut utiliser le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ ce qui entraine qu'il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a donc trouvé $n-1$ racines réelles distinctes de P'. Puisque $\deg(P') = \deg(P) - 1 = n - 1$, on a toutes les racines de P' ce qui entraine que P' a toutes ses racines réelles (et elles sont bien distinctes car les y_k appartiennent à des intervalles disjoints).

2) On remarque qu'en appliquant plusieurs fois le résultat précédent, on a que P'' a toutes ses racines réelles distinctes, P''' aussi, etc. Tous les polynômes dérivées de P de degré supérieur ou égal à 1 ont donc des racines réelles distinctes. Supposons par l'absurde que P ait deux coefficient consécutifs nuls, par exemple a_k et a_{k+1}. On a donc $P(X) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j + \sum_{j=k+2}^{n} a_j X^j$. Dérivons alors P k fois. On obtient alors que $P^{(k)} = \sum_{j=k+2}^{n} a_j j(j-1)\ldots(j-k+1)X^{j-k}$. Or, on voit que ce polynôme se factorise par X^2, ce qui entraine qu'il admet 0 comme racine double. C'est absurde car toutes les dérivées devaient avoir des racines réelles simples (car distinctes).

3) On suppose que P admet n racines réelles (comptées avec multiplicité). On a donc P de la forme $P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - x_k)^{r_k}$ où $x_1 < \ldots < x_p$ sont les racines réelles distinctes de P et $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}^*$ leur multiplicité. On remarque que $\deg(P) = n = \sum_{k=1}^{p} r_k$.

Étudions à présent les racines de P'. Avec le théorème de Rolle, on peut construire $p-1$ racines réelles distinctes (car on a p racines différentes de P). On va à présent utiliser le second critère de multiplicité pour trouver d'autres racines de P'. Puisque x_1 est racines de multiplicité r_1 dans P, on a $\forall k \in [\![0, r_1 - 1]\!],\ P(x_1) = 0$ et $P^{(r_1)}(x_1) \neq 0$. On en déduit que $\forall k \in [\![0, r_1 - 2]\!]$, $(P')^{(k)}(x_1) = 0$ et $(P')^{(r_1-1)}(x_1) \neq 0$. On en déduit que x_1 est racine de P' de multiplicité $r_1 - 1$. On procède de même pour $x_2, \ldots, x_p$ pour montrer qu'elles sont chacune racine de P' de multiplicité $r_2 - 1, \ldots, r_p - 1$.

Comptons à présent le nombre de racines de P'. On en a trouvé $(p-1)$ (avec le théorème de Rolle) et $\sum_{k=1}^{p} (r_k - 1)$ (avec les racines multiples). On en a donc :

$$(p-1) + \sum_{k=1}^{p} (r_k - 1) = \sum_{k=1}^{p} r_k + (p-1) - p = n - 1 = \deg(P').$$

On a donc trouvé autant de racines que le degré de P'. On a donc toutes les racines de P'. P' a donc bien toutes ses racines réelles.

Montrer que P' a également toutes ses racines réelles.

Exercice 17. (m) Considérons le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x, y et z. On a alors :

$$P = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+xz+yz)X - xyz.$$

Or, puisque (x, y, z) est solution du système de l'énoncé, et que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+xz+yz}{xyz}$, on en déduit que trouver x, y, z revient à trouver les racines du polynômes :

$$X^3 - X^2 - 4X + 4.$$

On a 1 comme racine évidente et alors $X^3 - X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X^2-4) = (X-1)(X-2)(X+2)$. Les solutions du système sont donc toutes les permutations possibles du triplet $(-2, 2, 1)$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers ayant toutes ses racines (complexes) de module inférieur ou égal à 1. On en déduit que $P = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ avec $|x_k| \leq 1$. Or, sous forme développée, on a également $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ (P est unitaire) et $a_{n-k} = (-1)^k \sigma_k$. Or, on a pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
|a_{n-k}| &= |\sigma_k| \\
&= \left| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \right| \\
&\leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}| \qquad \text{(par inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} 1 \\
&\leq \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n} 1 \\
&\leq n^k.
\end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient a_{n-k} ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs entières (puisqu'il est à valeurs dans $[\![-n^k, n^k]\!]$). Tous les coefficients ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs et on a un nombre fini de coefficients, ce qui entraine que l'on a qu'un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 21. Soient x, y, z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. On peut exprimer x, y, z comme les racines de :

$$\begin{aligned}
(X - x)(X - y)(X - z) &= X^3 - (x + y + z)X^2 + xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)X - xyz \\
&= X^3 - xyz.
\end{aligned}$$

Posons alors $\lambda = xyz$. On a donc que $x^3 - \lambda = 0$ (car x est une racine de P). On a donc en prenant le module que $|x|^3 = |\lambda|$, c'est à dire que $|x| = |\lambda|^{1/3}$. On procède de même pour y et z, ce qui montre que les trois racines ont même module.

Exercice 22.

1) On a $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ (avec une identité remarquable). Ces deux polynômes ont un discriminant strictement négatif. Ils sont donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et on a bien factorisé $X^4 + X^2 + 1$.

2) On a 1 comme racine évidente. On a ici $X^5 - X^4 + X - 1 = (X - 1)(X^4 + 1)$. En reprenant la factorisation de $X^4 + 1$ du cours, on obtient $X^5 - X^4 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$.

3) On remarque que $P_3(X) = P_1(X^2)$. On en déduit, en gardant les notations précédentes que :

$$\begin{aligned}
P_3(X) &= (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1) \\
&= (X^4 - X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à décomposer le polynôme $X^4 - X^2 + 1$. On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
X^4 - X^2 + 1 &= \left(X^2 + 1\right)^2 - 3X^2 \\
&= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).
\end{aligned}$$

Ces deux polynômes sont alors de discriminant strictement négatif. On en déduit que :

$$P_3(X) = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Exercice 24. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

Pour tester la divisibilité de $P_n(X)$ par $Q(X) = (X^2+X+1)^2$, on va utiliser les nombres complexes. En effet, on a $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$ avec $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = e^{4i\pi/3}$. On a donc $Q(X) = (X-j)^2(X-j^2)^2$. La question est donc de savoir si j et j^2 sont racines doubles de P_n.

On rappelle que $j^3 = 1$ (puisque j est la première racine troisième de l'unité) et $j^2 + j + 1 = 0$. On a alors :

$$P_n(j) = (j+1)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = (-j^2)^{6n+1} - j - 1.$$

Or, $(-j^2)^{6n+1} = -j^2 \times (-j^2)^{6n} = -j^2 \times 1$. On a donc :

$$P_n(j) = -j^2 - j - 1 = 0.$$

De plus, puisque P_n est Ã coefficients réels, on a $P(\overline{j}) = 0$ donc $P_n(j^2) = 0$.

Pour tester si ces racines sont doubles, on va tester si ce sont des racines de P'. On a $P_n'(X) = (6n+1)(X+1)^{6n} - (6n+1)X^{6n}$. On a alors :

$$P_n'(j) = (6n+1)(j+1)^{6n} - (6n+1)j^{6n} = (6n+1)((-j^2)^{6n} - 1) = 0.$$

De la même manière, P_n' étant à coefficients réels, $j^2 = \overline{j}$ est encore racine de P_n'. On en déduit que j et j^2 sont racines doubles de P_n et donc que $(X^2+X+1)^2$ divise P_n.

Exercice 25. On pose $Y = X^n$. On a alors $X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1 = Y^2 - 2\cos(\alpha)Y + 1$. Le discriminant est $4\cos^2(\alpha) - 4 = -4\sin^2(\alpha)$. Les racines sont donc $\dfrac{2\cos(\alpha) \pm i\sin(\alpha)}{2} = e^{\pm i\alpha}$. On en déduit que :

$$X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1 = (X^n - e^{i\alpha})(X^n - e^{-i\alpha}).$$

Les racines n-ièmes de $e^{i\alpha}$ sont $e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ et les racines n-ièmes de $e^{-i\alpha}$ sont $e^{-\frac{i\alpha}{n} - \frac{2ik\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ (on utilise un signe $-$ pour obtenir exactement le conjugué du terme précédent, on remarque que l'on parcoure toujours n termes consécutifs). On en déduit la factorisation du polynôme demandé dans $\mathbb{C}[X]$ (puisque l'on a trouvé exactement $2n$ racines pour un polynôme de degré $2n$ unitaire) :

$$X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i\alpha}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\alpha}{n} - \frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

En regroupant chaque terme avec son conjugué, on obtient :

$$X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

Ceci est la factorisation en produit de polynômes irréductibles si $\cos\left(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) \neq \pm 1$. Si certains termes valent ± 1, on peut factoriser $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ et $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$. Dans tous les autres cas, le discriminant est strictement négatif.

Exercice 26.

1) A l'aide du binome de Newton, on a $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(X^{n-k} - (-1)^k X^{n-k})$. Le terme d'indice $k = 0$ est nul et le terme d'indice $k = 1$ est $2nX^{n-1}$. On en déduit que P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$.

On cherche ensuite les racines complexes de P. On a $P(z)=0$ si et seulement si $(z+1)^n=(z-1)^n$. On remarque que $z=1$ n'est pas racine (car $2^n \neq 0$). On suppose donc $z \neq 1$, ce qui nous ramène à chercher les $z \neq 1$ tels que :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

On en déduit qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On remarque que l'on doit avoir $k \neq 0$ puisque sinon on a $\dfrac{z+1}{z-1} = 1$, ce qui revient $z+1 = z-1$, soit $2=0$: absurde. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors :

$$z+1 = (z-1)e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z = -\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

On utilise alors l'arc moitié pour obtenir :

$$z = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

On en déduit que $P(X) = 2n\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$.

2) On va poser $n = 2p+1$ et utiliser les relations coefficients/racines dans le polynôme précédent. En utilisant le produit des racines, on a alors :

$$2(2p+1)(-1)^{2p}\prod_{k=1}^{2p} i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = P(0) = 1-(-1)^{2p+1} = 2.$$

On a alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{2p}\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{(-1)^p}{2p+1}$ d'où :

$$\prod_{k=1}^{2p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = (-1)^p(2p+1).$$

De plus, en utilisant le changement d'indice $k' = 2p+1-k$, on a :

$$\prod_{k=p+1}^{2p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{(2p+1-k)\pi}{2p+1}\right) = \prod_{k=1}^{p}\left(-\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right) = (-1)^p\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right).$$

On en déduit que $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^2 = (2p+1)$. De plus, toutes les tangentes dans le produit sont positives (l'angle est dans $]0, \pi/2[$. On en déduit donc que :

$$\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \sqrt{2p+1}.$$

Exercice 27. *Polynômes de Hermite.*

1) Pour l'unicité, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(x)e^{-x^2} = G_n(x)e^{-x^2}$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) = G_n(x)$ avec H_n et G_n deux polynômes. Ils sont égaux en une infinité de valeurs et donc sont égaux comme polynômes.

Pour l'existence, on peut procéder par récurrence. En effet, g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et si on a $g^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2}$, alors en dérivant, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \left(H_n'(x) - 2xH_n(x)\right) e^{-x^2}.$$

On peut alors poser $H_{n+1}(X) = H_n'(X) - 2XH_n(X)$ qui est bien un polynôme comme somme/produit de polynômes.

2) On a $H_0 = 1$, $H_1 = -2X$. On va donc montrer par récurrence simple que H_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. La propriété est vraie au rang 0. Si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors on a H_n' de degré $n-1$ et $2XH_n(X)$ de degré $n+1$. On en déduit d'après la relation précédente que H_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-2) \times (-2)^n = (-2)^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Pour la parité, on va vérifier que $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$. La propriété est vraie au rang 0 et 1. Si la propriété est vraie au rang n fixé, alors, en dérivant, on obtient que $-H_n'(-X) = (-1)^n H_n'(X)$, soit $H_n'(-X) = (-1)^{n+1} H_n'(X)$. On a alors :

$$H_{n+1}(-X) = H_n'(-X) - 2(-X)H_n(-X) = (-1)^{n+1}(H_n'(X) - 2XH_n(X) = (-1)^{n+1}H_{n+1}(X).$$

On en déduit que H_n est pair et n est pair et impair si n est impair.

3) La propriété demandée est vraie au rang 0 (puisque $H_0 = 1$ et $H_1 = -2X$ donc $H_1' = -2H_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} H_{n+2}' & = & (H_{n+1}' - 2XH_{n+1})' \\ & = & H_{n+1}'' - 2H_{n+1} - 2XH_{n+1}' \\ & = & -2(n+1)H_n' - 2H_{n+1} - 2X(-2(n+1))H_n \\ & = & -2(n+1)(H_n' - 2XH_n) - 2H_{n+1} \\ & = & -2(n+1)H_{n+1} - 2H_{n+1} \\ & = & -2(n+2)H_{n+1}. \end{array}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

4) On a $g^{(n)}(0) = H_n(0)$. De plus, d'après la définition des H_n et la question 3 évaluées en 0, on a $H_{n+1}(0) = H_n'(0)$ et $H_{n+1}'(0) = -2(n+1)H_n(0)$. On en déduit que $H_{n+2}(0) = -2(n+1)H_n(0)$.

Si n est impair, puisque H_n est impair, on a $H_n(0) = 0$. Si n est pair, de la forme $n = 2p$, on a alors :

$$H_{2(p+1)}(0) = -2(2p+1)H_{2p}(0).$$

Par récurrence, on montre donc que $H_{2p}(0) = (-2)^p \prod_{k=0}^{p-1}(2k+1) = (-2)^p(2p)! \frac{1}{\prod_{k=1}^{p} 2k}$. On a donc :

$$g^{(2p)}(0) = H_{2p}(0) = \frac{(-2)^p(2p)!}{2^p p!} = \frac{(-1)^p(2p)!}{p!}.$$

Exercice 28. Remarquons tout d'abord que le polynôme nul est solution de cette équation. Pour déterminer les autres solutions, on va raisonner par analyse/synthèse.

Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ différent du polynôme nul vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. Notons d le degré de P. On a alors, en considérant le degré dans l'équation précédente, que $2d = 2d$. Ceci ne nous apporte aucune information. Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit une racine de P (on sait qu'elle existe, si P n'est pas constant, d'après le théorème de d'Alembert). On a alors $P(\alpha^2) = 0$ donc α^2 est aussi une racine de P. Par récurrence, on montre alors que $\left(\alpha^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont toutes des racines de P. Supposons par l'absurde que $|\alpha| \neq 1$ et que $\alpha \neq 0$. Alors, les éléments de la famille $\left(\alpha^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont tous distincts (leur module est à chaque fois différent). On en déduit que P admet une infinité de racines, donc plus que son degré, ce qui est absurde !

On a donc montré que les racines de P sont soit 0, soit de module 1. Supposons cette fois que α soit une racine de P de module 1. En appliquant la relation de l'énoncé en $\alpha - 1$, on a alors que $P((\alpha-1)^2) = 0$. Puisque $(\alpha-1)^2$ est racine de P, l'étude précédente montre que son module vaut soit 0, soit 1. Or, on a (on rappelle que $|\alpha| = 1$) :

$$\begin{array}{rcl} |(\alpha-1)^2| & = & (\alpha-1)(\bar{\alpha}-1) \\ & = & |\alpha|^2 + 1 - \alpha - \bar{\alpha} \\ & = & 2 - 2\mathrm{Re}(\alpha). \end{array}$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(\alpha) = 1$ ou $\mathrm{Re}(\alpha) = \dfrac{1}{2}$. Puisque $|\alpha| = 1$, on en déduit que $\alpha = 1$ ou $\alpha = e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$.

On peut encore limiter les racines de P. En effet, si $e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$ était racine de P, alors d'après la première étude, on aurait $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$ qui serait racine de P, ce qui est absurde d'après la seconde étude ! On en déduit que les seules racines complexes possibles de P sont 0 et 1. On en déduit que $P(X) = \lambda X^n (X-1)^m$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

En réinjectant cette expression dans l'équation de départ, on trouve que :

$$\begin{array}{rcl} \lambda X^{2n}(X^2-1)^m & = & P(X)P(X+1) \\ & = & \lambda^2 X^n (X-1)^m (X+1)^n X^m \end{array}$$

Ces deux polynômes ont même coefficient dominant donc on a $\lambda^2 = \lambda$, soit $\lambda = 1$ (puisque si $\lambda = 0$, alors le polynôme est nul). De plus, les racines de ces deux polynômes doivent avoir la même multiplicité. On en déduit que $2n = n + m$, c'est à dire $n = m$. On en déduit que P est de la forme $P(X) = X^n (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Synthèse : Réciproquement, supposons que $P(X) = X^n (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X^2) & = & X^{2n}(X^2-1)^n \\ & = & X^n (X-1)^2 \cdot (X+1)^2 X^n \\ & = & P(X) \cdot P(X+1). \end{array}$$

P est donc solution de l'équation. On en déduit que l'ensemble des solutions est le polynôme nul et les polynômes de la forme $X^n (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.