Programme de colle, semaine 15

Fin de l'arithmétique + Dérivabilité :

— Nous avons terminé le chapitre d'arithmétique en donnant la définition de la valuation p-adique d'un entier, nous avons démontré le théorème de factorisation en produits de nombres premiers, ainsi que l'application au calcul du pgcd, du ppcm et à la recherche des diviseurs d'un entier.

— Nous avons vu la définition d'une fonction dérivable en un point (ainsi que l'interprétation graphique). Nous avons montré qu'une fonction dérivable en a était continue en ce point et que la réciproque était fausse. Nous avons vu qu'une fonction était dérivable en un point ssi elle y était dérivable à droite et à gauche avec les dérivées égales.

— Nous avons alors défini la fonction dérivée f', vu un exemple de fonction dérivable avec f' non continue. Nous avons démontré les propriétés usuelles sur les fonctions dérivables (stabilité par somme, par produit, par composition et les formules correspondantes). Nous avons montré que si f était dérivable strictement monotone et que $f'(a) \neq 0$, alors elle admettait une réciproque dérivable en $f(a)$ et que $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$ (autrement dit $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$).

— Nous avons ensuite démontré qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable qui admettait un extremum local en un point de l'intérieur de I avait une dérivée nulle en ce point. Nous en avons déduit le théorème de Rolle, l'égalité ainsi que l'inégalité des accroissements finis (et le lien avec les fonctions lipschitziennes).

— Nous avons continué le chapitre sur la dérivabilité en montrant qu'une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I était croissante ssi $f' \geq 0$ sur l'intérieur de I (et les énoncés similaires si f est décroissante ou f est constante). Nous avons énoncé un théorème similaire si f est strictement croissante (ssi f' est positive et n'est nulle sur aucun intervalle non réduit à un point de l'intérieur de I).

— Nous avons terminé la partie sur les fonctions dérivables avec le théorème de la limite de la dérivée (si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{c\}$ et que f' admet la même limite finie à gauche et à droite de c, alors f est dérivable en c et $f'(c)$ vaut la limite commune).

— Nous avons ensuite terminé le chapitre avec les dérivées d'ordre supérieur. La notation pour f dérivée n fois, les différentes opérations (stabilité par somme, produit (formule de Leibniz), composition, le cas des fonctions réciproques) ainsi que le théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarques sur le programme : nous n'avons fait aucun exercice sur les fonctions $\mathcal{C}^n$, toute cette partie a été vue en cours uniquement le vendredi. Les développements limités ainsi que l'extension aux fonctions à valeurs complexes n'ont pas été vus.

Compétences :

— Étudier la limite des taux d'accroissements pour étudier la dérivabilité en cas de forme indéterminée (c'est à dire si on ne peut l'obtenir comme composée/produit/somme/quotient de fonctions dérivables).

— Savoir dériver une composée de fonctions dérivables.
— Utiliser le théorème de Rolle pour trouver des zéros de la dérivée en connaissant des zéros de f.
— Étudier le signe de la dérivée afin de prouver la (stricte) croissance/décroissance d'une fonction dérivable **sur un intervalle**.
— Utiliser le théorème de la limite de la dérivée (respectivement le théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^n$) pour prolonger des fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ en fonction régulières sur $\mathbb{R}$, ou pour montrer qu'une fonction n'est pas dérivable (si les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes ou sont infinies par exemple).

Questions de cours :

1. Montrer que $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ prolongée par 0 en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec une dérivée non continue.
2. Donner les formules (pas de preuve) pour la dérivée en a (ou en $b = f(a)$ pour f^{-1}) de $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, $g \circ f$ et f^{-1} (en précisant les hypothèses sous lesquelles ces formules sont valables).
3. Énoncer et démontrer la condition nécessaire d'extremum local.
4. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
5. Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.
6. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne et utiliser l'inégalité des accroissements finis (que l'on citera) pour montrer que sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. On expliquera aussi brièvement l'autre preuve vue en exemple (en utilisant $\displaystyle\int_x^y \cos(t)dt = \sin(y) - \sin(x)$).
7. Citer la formule de Leibniz (pas de preuve) et retrouver en expliquant l'expression de la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^k$ (ne pas poser de récurrence mais expliquer le principe)
8. Citer le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ est prolongeable sur $\mathbb{R}_+$ en fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 16 : 13, 16 et 18.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD16 : 18 (sans le 4))
- 2ieme du groupe : TD16 : 13
- 3ieme du groupe : TD16 : 16

Prochain programme : convexité+début des polynômes

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 13 :

- Un moyen de faire est de raisonner par récurrence sur n. Commencer par montrer que l'équation $a_0 = e^t$ a au plus une solution sur $\mathbb{R}$.
- Pour l'hérédité, considérez la fonction $g(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k t^k - e^t$. Montrez qu'elle vérifie les hypothèse du théorème de Rolle pour montrer que si $g(x_1) = g(x_2) = 0$, alors g' s'annule entre x_1 et x_2.
- En déduire que si g s'annule $n+1$ fois, alors g' s'annule au moins n fois.
- Calculez $g'(t)$ et utilisez l'hypothèse de récurrence pour montrer que g ne peut pas s'annuler une infinité de fois.

Exo 16 :

- Pour la continuité et la dérivabilité en 0, cela ressemble beaucoup à l'exemple fait en cours. Vous devriez trouver $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
- Pour la deuxième partie de la question 1), calculez pour $x \neq 0$ l'expression de $f'(x)$. Essayez ensuite de montrer que $\forall a > 0,\ \exists x \in [-a, a] \ /\ f'(a) < 0$.
- On pourra utiliser comme dans la preuve de cours une suite de la forme $x_n = \dfrac{1}{2\pi n + a}$ avec a bien choisi.
- Pour la deuxième question, utilisez la continuité de f' pour justifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [-\eta, \eta],\ f'(x) > 0$ en revenant à la définition de la limite avec des quantificateurs et en choisissant bien le ε.

Exo 18 :

- Nous n'avons pas encore vu les polynômes. Vous avez uniquement besoin de savoir que la dérivée d'un polynôme est un polynôme et qu'une somme/un produit de polynôme est un polynôme. Vous pourrez écrire si besoin $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ où $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$.
- Procéder par récurrence pour la question 2. Commencez par trouver un polynôme simple pour le cas $n = 0$. Puis pour l'hérédité, essayez de trouver une formule simple entre Q et P où $f^{(n)}(x) = P(1/x)e^{-1/x}$ et $f^{(n+1)}(x) = Q(1/x)e^{-1/x}$ en dérivant $f^{(n)}(x)$.
- Utilisez alors les croissances comparées pour justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
- Utilisez alors le théorème des prolongements des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ pour justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ f$ est $\mathcal{C}^n$.
- Pour la question 4) : on a alors f nulle sur $\mathbb{R}_-$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{C}^\infty$. On remarque que si on pose $h_1(x) = f(x+1)$, on a alors h_1 nulle sur $]-\infty, -1]$, infiniment dérivable et strictement positive sur $]-1, +\infty[$. Procédez de manière similaire pour construire une fonction h_2 strictement positive sur $]-\infty, 1[$ et nulle sur $[1, +\infty$ et essayez de construire g de manière simple à l'aide de h_1 et h_2.