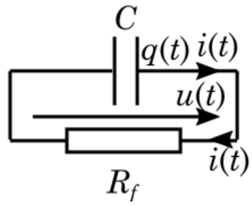
CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 6

Entrée – Condensateur réel

1. Énergie initiale stockée par le condensateur : $\boxed{\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = 4{,}5.10^{-6}\ \text{J} = 4{,}5\ \mu\text{J}}$

2. Schéma pour $t > 0$ ci-contre :



➢ Aux bornes de C en convention générateur (**Attention** !) :
$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$ et $u(t) = \frac{1}{C}q(t)$

➢ Loi d'Ohm aux bornes de R_f en convention récepteur : $u(t) = R_f i(t)$ soit $\frac{1}{C}q(t) = -R_f\frac{dq(t)}{dt} \Leftrightarrow R_f C\frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0$

$$\boxed{\tau\frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0 \text{ avec } \tau = R_f C}$$

① *Solution de l'essm* : $q(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

② *Solution particulière* : $q(t) = cste = 0$

③ *Solution complète* : $q(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

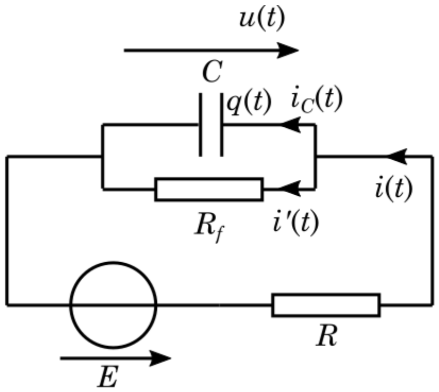
④ *Condition initiale* : C chargé et pas de discontinuité de la charge : $q(0^+) = q(0^-) = q_0$ et $q(0) = K$ donc $K = q_0$

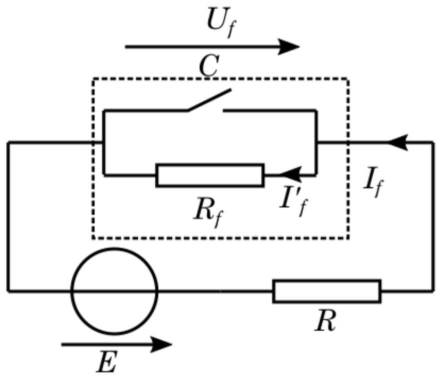
⑤ *Solution finale* : $\boxed{q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$

3. Le condensateur se décharge à 95% en $\Delta t = 3\tau = 3R_f C$

   Résistance de fuite : $\boxed{R_f = \frac{\Delta t}{3C} = 10.10^6\ \Omega = 10\ \text{M}\Omega}$

4. Schéma du montage pour $t > 0$ ci-dessous à gauche





5. En régime permanent, le condensateur idéal est chargé et se comporte comme un interrupteur ouvert (cf. schéma ci-dessus à droite) : $I_f = I'_f$: R et R_f sont en série

DDT : $\boxed{U_f = \dfrac{R_f}{R+R_f}E}$ et $\boxed{Q_f = CU_f = C\dfrac{R_f}{R+R_f}E}$

6. Loi des mailles : $E = Ri(t)+u(t)$

- Aux bornes de C en convention récepteur : $i_C(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ et $u(t) = \dfrac{1}{C}q(t)$
- Loi des nœuds : $i(t) = i_C(t)+i'(t)$
- Loi d'Ohm aux bornes de R_f en convention récepteur : $u(t) = R_f i'(t)$ soit $i'(t) = \dfrac{u(t)}{R_f}$

$$E = R\big(i_C(t)+i'(t)\big)+u(t) \Leftrightarrow E = R\left(\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{CR_f}q(t)\right)+\frac{1}{C}q(t)$$

$$E = R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{R}{CR_f}q(t)+\frac{1}{C}q(t) \Leftrightarrow R\frac{dq(t)}{dt}+\left(\frac{R}{R_f}+1\right)\frac{1}{C}q(t) = E$$

$$\frac{RR_fC}{R+R_f}\frac{dq(t)}{dt}+q(t) = \frac{R_fC}{R+R_f}E$$

$$\boxed{\tau'\frac{dq(t)}{dt}+q(t) = Q_f \text{ avec } \tau' = \frac{RR_fC}{R+R_f} \text{ et } Q_f = \frac{R_fC}{R+R_f}E}$$

① *Solution de l'essm* : $q(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau'}}$

② *Solution particulière* : $q(t) = cste = \dfrac{R_fC}{R+R_f}E = Q_f$

③ *Solution complète* : $q(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau'}}+Q_f$

④ *Condition initiale* : C initialement déchargé et pas de discontinuité de la charge : $q(0^+) = q(0^-) = 0$ et $q(0) = K+Q_f$ donc $K = -Q_f$

⑤ *Solution finale* : $\boxed{q(t) = Q_f\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau'}}\right)}$

<u>*Remarque*</u> :

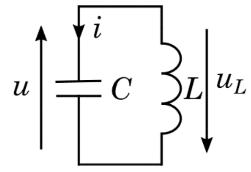
$$\boxed{R_f >> R} \text{ donc } \tau' = \frac{RR_fC}{R+R_f} \simeq \frac{RR_fC}{R_f} = RC \text{ et } Q_f = \frac{R_fC}{R+R_f}E \simeq \frac{R_fC}{R_f}E \simeq CE$$

On retrouve les résultats habituels de la charge d'un condensateur C à travers une résistance R.

Plat 1 – Oscillateur harmonique amorti ou non amorti

1. Loi des mailles : $u_L(t)+u(t)=0$

   Relations courant-tension :



$$u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt} \text{ et } i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$$

   Dérivation de la LDM : $\dfrac{du_L(t)}{dt}+\dfrac{du(t)}{dt}=0 \Leftrightarrow L\dfrac{d^2i(t)}{dt^2}+\dfrac{i(t)}{C}=0$

$$\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}i(t)=0} \text{ soit } \boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\omega_0^2 i(t)=0} \text{ avec } \boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

2. *Solution de l'essm et solution complète* : $i(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$

   Conditions initiales :

   - $i(0^+)=i(0^-)=I_0$ (pas de discontinuité du courant dans L) et $i(0)=A$ soit $A=I_0$
   - $\left(\dfrac{di}{dt}\right)_{t=0^+}=\dfrac{u_L(0^+)}{L}=-\dfrac{u_C(0^+)}{L}=0$ (pas de discontinuité de tension aux bornes de C déchargé) et $\dfrac{di(t)}{dt}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ soit $\left(\dfrac{di}{dt}\right)_{t=0^+}=B\omega_0=0$ d'où $B=0$

   Solution finale : $\boxed{i(t)=I_0\cos(\omega_0 t)=I_M\cos(\omega_0 t+\varphi)}$ avec $\boxed{I_M=I_0}$, $\boxed{\varphi=0}$, $\boxed{\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

➢ Expression de la tension : $u(t)=-u_L(t)=-L\dfrac{di(t)}{dt}=LI_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$$\boxed{u(t)=LI_0\omega_0\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)=U_M\cos(\omega_0 t+\psi)} \text{ avec } \boxed{U_M=LI_0\omega_0=I_0\sqrt{\frac{L}{C}}} \text{ et } \boxed{\psi=-\frac{\pi}{2}}$$

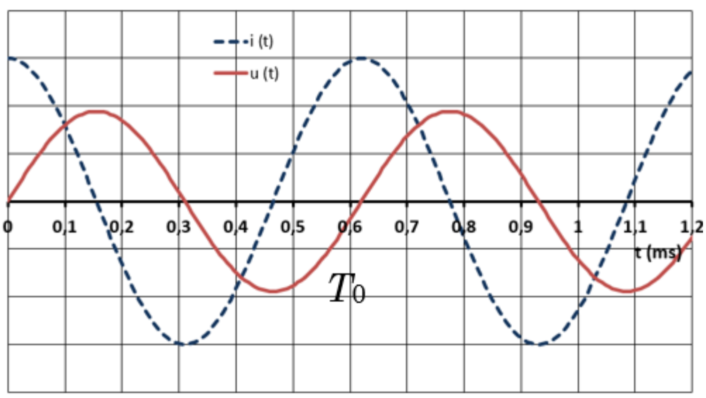
3. Graphes ci-dessous : signaux sinusoïdaux de période $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

4. Énergie électrostatique :

   $\mathscr{E}_e(t)=\dfrac{1}{2}Cu^2(t)$ et en $t=0$,

   $\mathscr{E}_e(0)=\dfrac{1}{2}Cu^2(0)=0$: courbe

   3.



- <u>Énergie magnétique</u> :

$$\mathscr{E}_m(t)=\frac{1}{2}Li^2(t) \text{ et en } t=0,\ \mathscr{E}_m(0)=\frac{1}{2}Li^2(0)=\frac{1}{2}LI_0^2$$ maximale : <u>courbe 2.</u>

- <u>Énergie totale :</u> $\mathscr{E}_{totale}=\mathscr{E}_m(t)+\mathscr{E}_e(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)+\frac{1}{2}Li^2(t)$

$$\mathscr{E}_{totale}=\frac{1}{2}C\left(LI_0\omega_0\right)^2\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}LI_0^2\cos^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}LI_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t)+\sin^2(\omega_0 t)\right)$$

$$\boxed{\mathscr{E}_{totale}=\frac{1}{2}LI_0^2=cste}$$: <u>courbe 1</u>

5. $\mathscr{E}_m(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)=\frac{1}{2}LI_0^2\cos^2(\omega_0 t)=\frac{1}{4}LI_0^2\left(1+\cos(2\omega_0 t)\right)$. L'énergie magnétique est périodique de période $\boxed{T=\frac{2\pi}{2\omega_0}=\frac{T_0}{2}}$

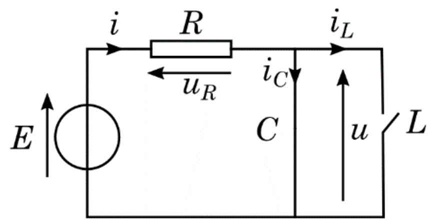
   On lit sur le graphe $T=0{,}31$ ms donc $\boxed{T_0=2T=0{,}62\text{ ms}}$

6. À $t=0^-$, K ouvert : $\boxed{i(0^-)=0}$

   C déchargé : $\boxed{u(0^-)=0}$, L démagnétisée : $\boxed{i_L(0^-)=0}$

   Loi d'Ohm : $\boxed{u_R(0^-)=Ri(0^-)=0}$, loi des nœuds : $\boxed{i_C(0^-)=i(0^-)-i_L(0^-)=0}$

- À $t=0^+$, pas de discontinuité de tension aux bornes de C : $\boxed{u(0^+)=u(0^-)=0}$ (C équivalent à un interrupteur fermé)
  Pas de discontinuité du courant dans L : $\boxed{i_L(0^+)=i_L(0^-)=0}$ (L équivalente à un interrupteur ouvert)



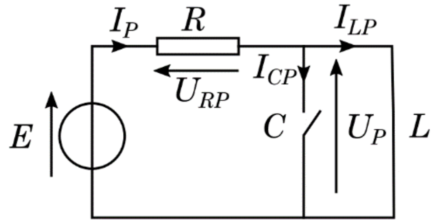
  Loi des mailles : $\boxed{u_R(0^+)=E-u(0^+)=E}$ et loi d'Ohm : $\boxed{i(0^+)=\frac{u_R(0^+)}{R}=\frac{E}{R}}$

  Loi des nœuds : $\boxed{i_C(0^+)=i(0^+)-i_L(0^+)=\frac{E}{R}}$

7. En régime permanent, toutes les grandeurs sont <u>constantes</u>

   $\boxed{u(\infty)=U_P=L\frac{dI_{LP}}{dt}=0}$: L équivalente à un interrupteur fermé

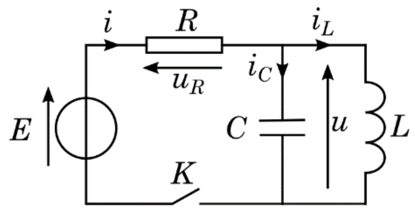
   $\boxed{i_C(\infty)=I_{CP}=C\frac{dU_P}{dt}=0}$: C équivalent à un interrupteur ouvert



   Loi des mailles : $\boxed{U_{RP}=E-U_P=E}$ et loi d'Ohm : $\boxed{I_P=\frac{U_{RP}}{R}=\frac{E}{R}}$

Loi des nœuds : $\boxed{I_{LP} = I_P - I_{CP} = \dfrac{E}{R}}$

8. Relation courant-tension pour L : $u = L\dfrac{di_L}{dt}$ (1)



Loi des mailles : $E = u_R + u$ (2) soit $E - u_R = u$ (2)

Loi d'Ohm : $u_R = Ri$ (3)

Loi des nœuds : $i = i_C + i_L$ (4)

Relation courant-tension pour C : $i_C = C\dfrac{du}{dt}$ (5)

Relations (1), (2) et (3) : $E - Ri = L\dfrac{di_L}{dt}$

Avec (4) : $E - R\left(i_C + i_L\right) = L\dfrac{di_L}{dt}$ et avec (5) : $E - RC\dfrac{du}{dt} - Ri_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

On dérive (1) : $\dfrac{du}{dt} = L\dfrac{d^2 i_L}{dt^2}$ et on remplace dans la relation précédente :

$$E - RCL\frac{d^2 i_L}{dt^2} - Ri_L = L\frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{E}{RLC}}$$

9. L'équation différentielle est de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \omega_0^2\frac{E}{R}} \text{ avec } \boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \text{ et } \boxed{2\xi\omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

- Pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

  Coefficient d'amortissement : $\boxed{\xi = \dfrac{1}{2RC\omega_0} = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

  Facteur de qualité : $\boxed{Q = \dfrac{1}{2\xi} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

- Influence de R : le coefficient d'amortissement diminue quand R augmente, ce qui est contraire à ce qu'il se passe dans le circuit RLC série. Si R tend vers l'infini, le courant i qui la traverse est nul et le circuit LC parallèle constitue un oscillateur harmonique non amorti, ce qui est cohérent avec $\xi = 0$.

10. *Solution de l'essm*

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

Le discriminant réduit est : $\Delta' = \dfrac{\Delta}{4} = \omega_0^2\left(\xi^2 - 1\right)$

Le régime transitoire est critique pour $\Delta' = 0$ soit $\boxed{\xi = 1}$

$\xi = \dfrac{1}{2R_c}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 1$ d'où $\boxed{R_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 0{,}50\ \text{k}\Omega}$ $i_L(t) = (At+B)e^{-\xi\omega_0 t} = (At+B)e^{-\omega_0 t}$

<u>*Solution particulière*</u> : $i_L = cste = \dfrac{E}{R} = I_{LP}$

<u>*Solution complète*</u> : $\boxed{i_L(t) = (At+B)e^{-\omega_0 t} + \dfrac{E}{R}}$

11. Pour $R = 5{,}0\ \text{k}\Omega$, $\boxed{\xi = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 0{,}10 < 1}$: $\Delta' = \omega_0^2\left(\xi^2 - 1\right) < 0$: régime transitoire <u>pseudo-périodique</u>.

<u>*Solution de l'essm*</u>

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\sqrt{|\Delta'|} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_P$ avec $\omega_P = \sqrt{|\Delta'|} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ la <u>pseudo-pulsation</u>

$$\boxed{i_L(t) = \left(A\cos(\omega_P t) + B\sin(\omega_P t)\right)e^{-\xi\omega_0 t}}$$

<u>*Solution particulière*</u> : $i_L = cste = \dfrac{E}{R} = I_{LP}$

<u>*Solution complète*</u> : $\boxed{i_L(t) = \left(A\cos(\omega_P t) + B\sin(\omega_P t)\right)e^{-\xi\omega_0 t} + \dfrac{E}{R}}$

- Constante de temps caractéristique de ce régime τ telle que $\tau = \dfrac{1}{\xi\omega_0}$

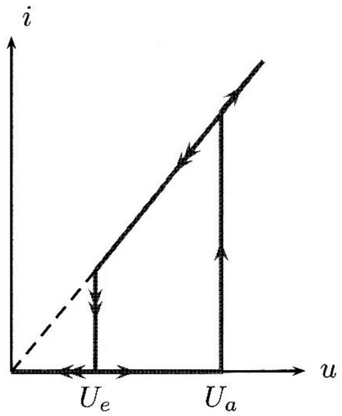
  Durée observable du régime transitoire : $\boxed{t_R = 5\tau = \dfrac{5}{\xi\omega_0}}$

  A.N : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}0.10^4\ \text{rad.s}^{-1}$ et $\boxed{t_R = 5{,}0\ \text{ms}}$

- Régime pseudo-périodique ou <u>oscillant amorti</u> : on observe des oscillations de pseudo-période : $T_P = \dfrac{2\pi}{\omega_P} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = 0{,}63\ \text{ms}$

- <u>Nombre d'oscillations</u> : $\boxed{N = \dfrac{t_R}{T_P} \simeq 8}$

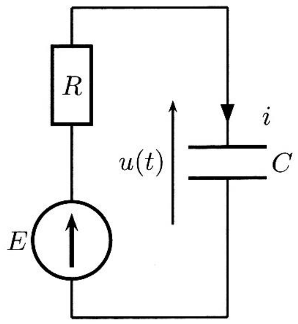
Plat 2 – Étude d'un tube à décharge



1. Lorsque le tube est éteint, la résistance est infinie, donc $i = 0$.
   Si on augmente la tension (flèche simple sur la caractéristique), $i = 0$ tant que $u < U_a$. Lorsque $u = U_a$, le tube s'allume et la loi d'Ohm est vérifiée $i = \frac{u}{r}$. Tant que la tension augmente, le point de fonctionnement reste sur la droite d'équation $i = \frac{u}{r}$.
   C'est aussi le cas lorsqu'on diminue la tension (flèche double sur la caractéristique), tant que $u > U_e$. Lorsque $u = U_e$, le tube s'éteint et $i = 0$.

- Dipôle non linéaire (mais linéaire par morceaux).
- Dipôle passif car la caractéristique passe par 0.

2. Le tube est éteint : il est équivalent à un interrupteur ouvert. Le circuit étudié est un circuit *RC* (cf. schéma).



- Loi des mailles : $E = Ri(t) + u(t)$ et $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$.
- Équation différentielle :

$$\boxed{\tau\frac{du}{dt} + u = E \text{ avec } \tau = RC}$$

- Résolution :

  Solution de l'essm : $u(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

  Solution particulière : $u(t) = E$

  Solution complète : $u(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$

  Condition initiale : *C* est déchargé et la tension est continue à ses bornes :

$$u(0^-) = 0 = u(0^+) = K + E \text{ soit } K = -E$$

  Solution finale : $\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

3. Pour que le tube s'allume, sachant que la valeur finale de $u(t)$ est E, il faut $\boxed{E > U_a}$.
4. Le tube s'allume à l'instant t_0 tel que $u(t_0) = U_a$:

$$u(t_0) = E\left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) = U_a \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} = \frac{U_a}{E}$$

$$1-\frac{U_a}{E}=e^{-\frac{t_0}{\tau}} \Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{U_a}{E}\right)=-\frac{t_0}{\tau} \Leftrightarrow -\tau\ln\left(\frac{E-U_a}{E}\right)=t_0$$

$$\boxed{t_0=\tau\ln\left(\frac{E}{E-U_a}\right)}$$

5. Variation d'énergie $\Delta\mathscr{E}_e=\mathscr{E}_e(t_0)-\mathscr{E}_e(0)=\frac{1}{2}C\left(u^2(t_0)-u^2(0)\right)$ soit $\boxed{\Delta\mathscr{E}_e=\frac{1}{2}CU_a^2}$

6. Énergie fournie par le générateur :

$$\mathscr{E}_g=\int_0^{t_0}\mathscr{P}_g dt=\int_0^{t_0}Ei(t)dt=E\int_0^{t_0}C\frac{du(t)}{dt}dt=CE\left(u(t_0)-u(0)\right) \text{ soit } \boxed{\mathscr{E}_g=CEU_a}$$

7. Bilan de puissance : $Ei(t)=Ri^2(t)+u(t)i(t) \Leftrightarrow \mathscr{P}_g=\mathscr{P}_J+\frac{d\mathscr{E}_e}{dt}$

Bilan d'énergie : $\int_0^{t_0}\mathscr{P}_g dt=\int_0^{t_0}\mathscr{P}_J dt+\int_0^{t_0}\frac{d\mathscr{E}_e}{dt}dt \Leftrightarrow \mathscr{E}_g=\mathscr{E}_J+\left(\mathscr{E}_e(t_0)-\mathscr{E}_e(0)\right)$

$$\mathscr{E}_g=\mathscr{E}_J+\Delta\mathscr{E}_e \Leftrightarrow \mathscr{E}_J=\mathscr{E}_g-\Delta\mathscr{E}_e \text{ soit } \mathscr{E}_J=CEU_a-\frac{1}{2}CU_a^2 \Leftrightarrow \boxed{\mathscr{E}_J=CU_a\left(E-\frac{1}{2}U_a\right)}$$

<u>Autre méthode (plus calculatoire) :</u>

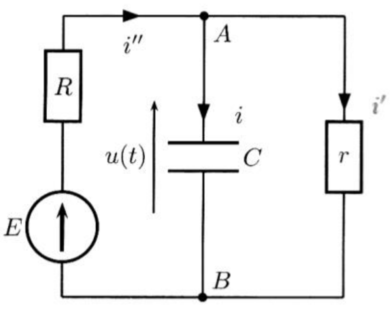
$$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}=C\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ et } \mathscr{P}_J=Ri^2(t)=\frac{E^2}{R}e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

$$\mathscr{E}_J=\int_0^{t_0}\mathscr{P}_J dt=\frac{E^2}{R}\int_0^{t_0}e^{-2\frac{t}{\tau}}dt=-\frac{\tau}{2}\frac{E^2}{R}\left(e^{-2\frac{t_0}{\tau}}-1\right)$$

Or, ; d'après la question 4 : $e^{-2\frac{t_0}{\tau}}=\left(1-\frac{U_a}{E}\right)^2=1-2\frac{U_a}{E}+\left(\frac{U_a}{E}\right)^2$

$$\mathscr{E}_J=-\frac{\tau}{2}\frac{E^2}{R}\left(-2\frac{U_a}{E}+\left(\frac{U_a}{E}\right)^2\right)=CEU_a-\frac{1}{2}CU_a^2 \text{ soit } \boxed{\mathscr{E}_J=CU_a\left(E-\frac{1}{2}U_a\right)} \text{ CQFD !}$$

8. Après allumage, le tube est équivalent à une résistance r (cf. schéma).



- <u>Loi des mailles</u> : $E=Ri''(t)+u(t)$
- <u>Loi des nœuds</u> : $i''(t)=i(t)+i'(t)$ et $i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$
- <u>Loi d'Ohm</u> : $i'(t)=\frac{u(t)}{r}$
- <u>Équation différentielle</u>

$$E=R\left(C\frac{du(t)}{dt}+\frac{u(t)}{r}\right)+u(t) \Leftrightarrow E=RC\frac{du(t)}{dt}+\left(1+\frac{R}{r}\right)u(t)$$

$$RC\frac{du(t)}{dt}+\left(\frac{r+R}{r}\right)u(t)=E \Leftrightarrow \frac{Rr}{r+R}C\frac{du(t)}{dt}+u(t)=\frac{r}{r+R}E$$

$$\boxed{\tau'\frac{du(t)}{dt}+u(t)=\frac{r}{r+R}E \text{ avec } \tau'=\frac{Rr}{r+R}C}$$

9. L'équation précédente n'est valable que pour $t>t_0$, sachant que $u(t_0)=U_a$.

➢ Résolution de l'équation différentielle

Solution de l'essm : $u(t)=K'e^{-\frac{t}{\tau'}}$

Solution particulière : $u(t)=\frac{r}{r+R}E$

Solution complète : $u(t)=K'e^{-\frac{t}{\tau'}}+\frac{r}{r+R}E$

Condition initiale : **<u>Attention, l'instant initial correspond à</u>** $\boxed{t=t_0}$!

$$u(t_0)=U_a=K'e^{-\frac{t_0}{\tau'}}+\frac{r}{r+R}E \text{ soit } K'=\left(U_a-\frac{r}{r+R}E\right)e^{\frac{t_0}{\tau'}}$$

Solution finale : $u(t)=\left(U_a-\frac{r}{r+R}E\right)e^{\frac{t_0}{\tau'}}e^{-\frac{t}{\tau'}}+\frac{r}{r+R}E$

$$\boxed{u(t)=\left(U_a-\frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{t-t_0}{\tau'}}+\frac{r}{r+R}E}$$

<u>Nota Bene : autre façon de raisonner :</u>

Procéder à un changement de variable, en notant le temps *t'* avec $\boxed{t'=t-t_0}$. Résoudre l'équation différentielle avec la variable *t'*. L'instant initial correspond bien à $t'=0$. Dans la solution finale, remplacer *t'* par son expression en fonction de *t* : on retrouve la même expression…

10. D'après l'expression précédente, si $U_a<\frac{r}{r+R}E$, l'exponentielle sera une fonction croissante et $u(t)$ également : le tube ne pourra pas s'éteindre. Il faut donc que $\boxed{U_a>\frac{r}{r+R}E}$.

➢ Si la condition précédente est satisfaite, l'exponentielle est décroissante et la tension $u(t)$ également. La valeur finale de $u(t)$ est $u(\infty)=\frac{r}{r+R}E$. Pour que le tube s'éteigne, il faut que $\boxed{\frac{r}{r+R}E<U_e}$.

➢ Sachant que $U_e<U_a$, les conditions se ramènent à : $\boxed{\frac{r}{r+R}E<U_e<U_a}$

11. Le <u>tube s'éteint</u> à l'instant t_1 tel que $u(t_1)=U_e$.

$$u(t_1)=\left(U_a-\frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau'}}+\frac{r}{r+R}E=U_e$$

$$\left(U_a-\frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau'}}=U_e-\frac{r}{r+R}E \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau'}}=\frac{U_e-\frac{r}{r+R}E}{U_a-\frac{r}{r+R}E}$$

$$-\frac{t_1-t_0}{\tau'}=\ln\left(\frac{(r+R)U_e-rE}{(r+R)U_a-rE}\right)\Leftrightarrow t_1-t_0=-\tau'\ln\left(\frac{(r+R)U_e-rE}{(r+R)U_a-rE}\right)$$

$$\boxed{t_1=t_0+\tau'\ln\left(\frac{(r+R)U_a-rE}{(r+R)U_e-rE}\right)>t_0}$$

12. À partir de l'instant t_1, <u>le tube s'éteint</u> et le circuit est équivalent au schéma de la question 2. La solution complète est : $u(t)=K''e^{-\frac{t}{\tau}}+E$

Condition initiale : $u(t_1)=U_e$: $u(t_1)=K''e^{-\frac{t_1}{\tau}}+E=U_e$ soit $K''=(U_e-E)e^{\frac{t_1}{\tau}}$

La solution finale est : $u(t)=(U_e-E)e^{\frac{t_1}{\tau}}e^{-\frac{t}{\tau}}+E$ soit $\boxed{u(t)=E+(U_e-E)e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}}$

- La tension augmente jusqu'à atteindre U_a à l'instant t_2 où le <u>tube s'allume</u>.

$$u(t_2)=U_a \Leftrightarrow E+(U_e-E)e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}}=U_a$$

$$e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}}=\frac{U_a-E}{U_e-E}\Leftrightarrow t_2-t_1=-\tau\ln\left(\frac{U_a-E}{U_e-E}\right)$$

$$\boxed{t_2=t_1+\tau\ln\left(\frac{U_e-E}{U_a-E}\right)=t_1+\tau\ln\left(\frac{E-U_e}{E-U_a}\right)>t_1}$$

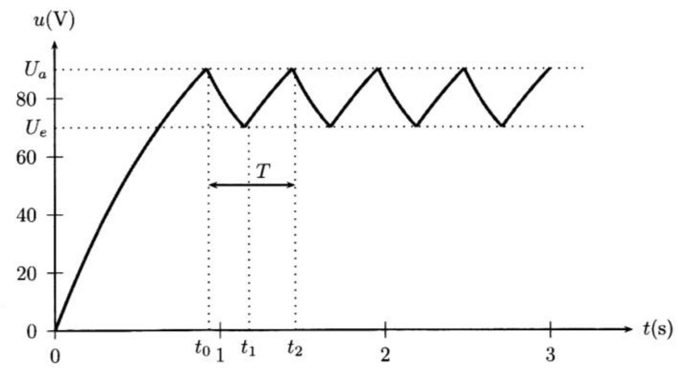
- Ensuite la tension diminue à nouveau jusqu'à atteindre U_e (extinction) etc…
- La tension est donc périodique de période :

$$T=t_2-t_0=t_1+\tau\ln\left(\frac{E-U_e}{E-U_a}\right)-t_0=t_0+\tau'\ln\left(\frac{(r+R)U_a-rE}{(r+R)U_e-rE}\right)+\tau\ln\left(\frac{E-U_e}{E-U_a}\right)-t_0$$

$$T=\tau'\ln\left(\frac{(r+R)U_a-rE}{(r+R)U_e-rE}\right)+\tau\ln\left(\frac{E-U_e}{E-U_a}\right)$$

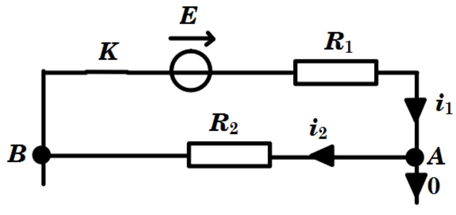
$$\boxed{T=\frac{Rr}{r+R}C\ln\left(\frac{(r+R)U_a-rE}{(r+R)U_e-rE}\right)+RC\ln\left(\frac{E-U_e}{E-U_a}\right)}$$

13. Allure de la courbe représentative de $u(t)$ (cf. ci-contre)
14. $\boxed{T=0{,}52\text{ s}}$



Dessert – Circuit inductif

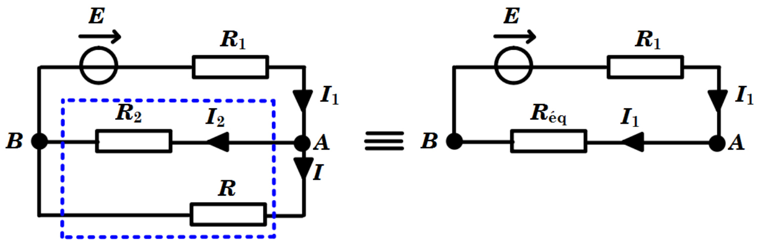
1. À $t=0^-$, L est démagnétisée : $i(0^-)=0$; K ouvert : $i_1(0^-)=0$ et $i_2(0^-)=0$



➢ À $t=0^+$, pas de discontinuité de courant dans L : $\boxed{i(0^+)=0}$: L est équivalente à un interrupteur ouvert.

Loi d'Ohm $\boxed{i_1(0^+)=i_2(0^+)=\dfrac{E}{R_1+R_2}}$

2. En régime permanent, L est équivalente à un <u>interrupteur fermé</u>



<u>Diviseur de courant</u> (schéma de gauche) : $I=\dfrac{R_2}{R+R_2}I_1$

Association de R et R_2 en parallèle : $R_{éq}=\dfrac{RR_2}{R+R_2}$

<u>Loi d'Ohm</u> (schéma de droite) : $I_1=\dfrac{E}{R_1+R_{éq}}$

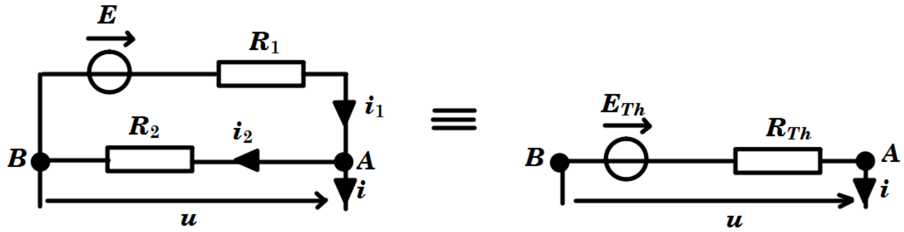
$$I_1=\frac{E}{R_1+\dfrac{RR_2}{R+R_2}}=\frac{R+R_2}{R_1(R+R_2)+RR_2}E \text{ soit } \boxed{I_1=\frac{R+R_2}{R_1R+R_1R_2+RR_2}E}$$

Donc : $I=\dfrac{R_2}{R+R_2}\dfrac{R+R_2}{R_1(R+R_2)+RR_2}E$ soit $\boxed{I=\dfrac{R_2}{R_1R+R_1R_2+RR_2}E}$

<u>Loi des nœuds</u> : $I_2=I_1-I=\dfrac{R+R_2}{R_1R+R_1R_2+RR_2}E-\dfrac{R_2}{R_1R+R_1R_2+RR_2}E$

$$\boxed{I_2=\frac{R}{R_1R+R_1R_2+RR_2}E}$$

3. Pour $t>0$, K est fermé.



➢ <u>Schéma de gauche</u> :

Loi d'Ohm : $u=R_2i_2$ (1)

Loi des mailles et loi d'Ohm : $u = E - R_1 i_1 \quad (2)$

Loi des nœuds : $i_1 = i + i_2 \quad (3)$

(2) et (3) : $u = E - R_1\left(i + i_2\right)$ et (1) : $i_2 = \dfrac{u}{R_2}$ soit $u = E - R_1\left(i + \dfrac{u}{R_2}\right)$

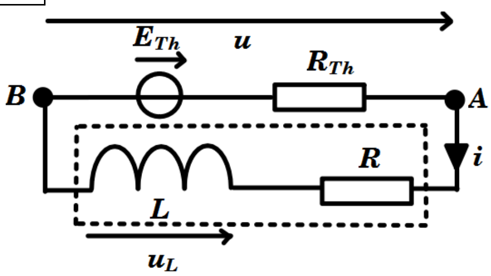
$$u = E - R_1 i - R_1\frac{u}{R_2} \Leftrightarrow u\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = E - R_1 i \Leftrightarrow u\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) = E - R_1 i$$

$$\boxed{u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}i}$$

- <u>Schéma de droite</u> : modèle de Thévenin
  Loi des mailles et loi d'Ohm : $\boxed{u = E_{Th} - R_{Th} i}$
- <u>Identification</u> : $\boxed{E_{Th} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}E \text{ et } R_{Th} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

4. Loi des mailles et loi d'Ohm : $u(t) = E_{Th} - R_{Th} i(t)$

   Loi des mailles et loi d'Ohm : $u(t) = Ri(t) + u_L(t)$



   Pour l'inductance : $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

$$E_{Th} - R_{Th} i(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow L\frac{di(t)}{dt} + \left(R + R_{Th}\right)i(t) = E_{Th}$$

$$\boxed{\frac{L}{R + R_{Th}}\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}} \Leftrightarrow \tau\frac{di(t)}{dt} + i(t) = I}$$

$$\text{avec } \boxed{\tau = \frac{L}{R + R_{Th}} \text{ et } I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}}}$$

   N.B. : on retrouve pour I l'expression déterminée à la question 2 !

5. <u>Résolution de l'équation différentielle :</u>

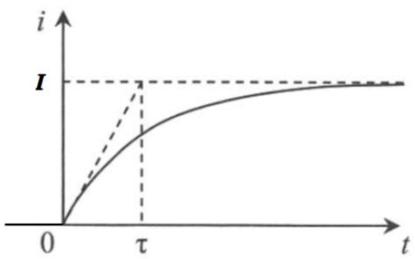
   Solution de l'essm : $i(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

   Solution particulière : $i(t) = cste = I$

   Solution complète : $i(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + I$

   Condition initiale : $i(0) = K + I$ et $i(0^+) = 0$ soit $K = -I$

   Solution finale : $\boxed{i(t) = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$



6. Allure de $i(t)$ ci-contre