10. Nombres réels

Exercice 1. (c) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b$.

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$. A-t-on égalité ?

Exercice 2. (m) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ non vide. On note $D = \{|x-y|,\ x, y \in A\}$.

1) Montrer que D est non vide et majorée et que $\sup(D) \leq \sup(A) - \inf(A)$.

2) Montrer que $\sup(D) = \sup(A) - \inf(A)$. Que peut-on dire de $\inf(D)$?

Exercice 3. (m) Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

2) Enoncer et montrer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.

3) Qu'en est-il de $A \cap B$?

Exercice 4. (i) Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Que pensez-vous de $\sup(\lambda A)$ et $\inf(\lambda A)$ où $\lambda A = \{\lambda a,\ a \in A\}$? Le démontrer.

Exercice 5. (m) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n}{x} + x \end{array} \right.$.

1) Tracer le graphe de f_n. En déduire que $\left\{ \dfrac{n}{k} + k,\ k \in \mathbb{N}^* \right\}$ admet une borne inférieure que l'on note a_n et vérifier que $a_n \geq 2\sqrt{n}$.

2) Préciser la valeur de a_1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n)$ et de $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n)$.

Exercice 6. (c) Déterminer les bornes supérieures/inférieures des ensembles suivants, si elles existent. On précisera également si ce sont des maxima/minima :

1) $\left\{ a + \dfrac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

2) $\left\{ \dfrac{\ln(n)}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

3) $\{ne^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

4) $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

5) $\left\{ (-1)^n (1 - \dfrac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

6) $\left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p}, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

Exercice 7. (m) Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Montrer que $I_1 \cap I_2$ et $I_1 \cup I_2$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (i) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel puis que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ est irrationnel.

Exercice 9. (m) Soit $\lambda \in [0,1[$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{n-1}{n} \leq \lambda < \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 10. (m) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 11. (m) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 12. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 13. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Démontrer qu'il existe deux entiers p_n et q_n tels que $(2+\sqrt{3})^n = p_n + \sqrt{3}q_n$.

2) Démontrer que pour ces mêmes entiers, on a $(2-\sqrt{3})^n = p_n - \sqrt{3}q_n$.

3) En déduire que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est impair.

Exercice 14. (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$.

Exercice 15. (i) Montrer que tout disque ouvert du plan contient un point à coordonnées rationnelles.

Exercice 16. (c) Montrer que toute partie A contenant une partie dense de $\mathbb{R}$ est dense.

Exercice 17. (m) Montrer que $\{x^3, x \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18. (m) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On note :

$$A+B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\} \text{ et } AB = \{ab,\ (a,b) \in A \times B\}.$$

Montrer que si A et B sont denses dans $\mathbb{R}$, il en est de même pour $A+B$ et AB.

Exercice 19. (m) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$, puis que $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = nf(1)$.

2) En déduire que $\forall q \in \mathbb{Q},\ f(q) = qf(1)$.

3) Montrer enfin que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$.

Exercice 20. (i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si x est rationnel.

Exercice 21. (∗) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On pose $A = \{x \in [0,1] \ /\ f(x) \geq x\}$.

1) Montrer que A admet une borne supérieure.

2) Montrer que $\sup(A)$ est un point fixe de f. *On rappelle que α est un point fixe de f si $f(\alpha) = \alpha$.*