24. Dimension des espaces vectoriels, méthodologie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I. Dimension

I.1. Lemme fondamental

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre de E et $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille génératrice de E. Alors, $p \leq n$. Autrement dit, une famille libre contient toujours moins de vecteurs qu'une famille génératrice.

I.2. Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie (c'est à dire une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Alors, E admet une base finie. De plus, toutes les bases de E ont le même cardinal (c'est à dire le même nombre de vecteurs). La dimension de E, notée $\dim(E)$, est le nombre de vecteurs dans une base de E. *Si* $E = \{0_E\}$, *on pose* $\dim(E) = 0$.

m Pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie, il faut donc en donner une base (donc une famille libre et génératrice) finie et pour déterminer sa dimension, il faut compter le nombre de vecteurs dans cette base. On a donc $\dim(E) \in \mathbb{N}$, avec $\dim(E) = 0 \Leftrightarrow E = \{0_E\}$. Le corps $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille est en général sous-entendu.

Exercice d'application 1. Montrer que les espaces vectoriels suivants sont de dimension finie en en donnant une base et déterminer leur dimension.

1) $E = \mathbb{R}^5$.
2) $E = \mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3) $E = \mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4) $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$.
5) $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ y'' + y = 0\}$.

I.3. Construction de bases

Théorème. De la base extraite. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille génératrice de E. Alors, on peut enlever des vecteurs à cette famille pour obtenir une base de E de la forme $(e_i)_{i\in I}$ avec $I \subset [\![1, p]\!]$ de cardinal n.

Théorème. De la base incomplète. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre de E et $(f_j)_{1\leq j\leq q}$ une famille génératrice de E. Alors, on peut compléter la famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ en une base de E en lui rajoutant des vecteurs appartenant à la famille $(f_j)_{1\leq j\leq q}$.

I.4. Bilan

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :
- Les familles libres de E ont moins de n vecteurs.
- Les bases de E ont exactement n vecteurs.
- Les familles génératrices de E ont plus de n vecteurs.

De plus, si $(e_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n$ est une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$\begin{aligned}(e_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est libre } &\Leftrightarrow (e_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est génératrice}\\ &\Leftrightarrow (e_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est une base de } E.\end{aligned}$$

m Pour montrer qu'une famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, on montre en général que c'est une famille libre et qu'elle a autant de vecteurs que la dimension de E. *Il est en général plus facile de montrer qu'une famille est libre plutôt que de montrer qu'elle est génératrice.*

Exercice d'application 2. Montrer que les familles suivantes sont des bases de E.

1) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right)$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

2) $\left((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\right)$ avec $E = \mathbb{R}_3[X]$.

II. Calculs de dimension

II.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :
- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- On a $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

m Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux, on prouve en général qu'ils ont la même dimension et que l'un des deux est inclus dans l'autre. La proposition précédente assure alors qu'ils sont égaux.

Exercice d'application 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$P_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \text{ et } P_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; 4x - 5y + 2z = 0\right\}.$$

1) Justifier que P_1 et P_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de ces deux espaces vectoriels. En déduire $\dim(P_1)$ et $\dim(P_2)$.

2) Vérifier que $P_1 \subset P_2$ et en déduire que $P_1 = P_2$.

Théorème. Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, il existe G un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$.

(m) Pour construire un supplémentaire dans E d'un sous-espace vectoriel F, on déterminer une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F et on la complète en base $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ de E avec le théorème de la base incomplète. On aura alors $E = F \oplus G$ où $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_q)$.

Exercice d'application 4. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on pose $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

II.2. Produit cartésien d'espaces vectoriels

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie. Alors, $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

II.3. Somme de sous-espaces vectoriels

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors, $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

(m) Ceci permet de calculer instantanément la dimension d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors les supplémentaires de F sont de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Théorème. Formule de Grassmann. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels. Alors, $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exercice d'application 5.

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et P_1, P_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension 2. Montrer que $P_1 \cap P_2 \neq \{0_E\}$.

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension $n + 1$. Quelle est la dimension minimale de $F \cap G$? Construire deux sous-espaces vectoriels F et G où cette dimension minimale est atteinte.

(m) Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E de dimension finie sont supplémentaires, on procède en général ainsi :

- On prouve que $F \cap G = \{0_E\}$.
- On montre que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

La formule de Grassmann assure alors que $\dim(F+G) = \dim(E)$. Puisque $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E, on a $F + G = E$, ce qui permet de prouver $E = F + G$ sans faire de preuve par analyse/synthèse.

Exercice d'application 6. Soit $D = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}$ et $P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x+z=0 \right\}$. Montrer que $D \oplus P_1 = \mathbb{R}^3$ et que $D \oplus P_2 = \mathbb{R}^3$. A-t-on $P_1 \oplus P_2 = \mathbb{R}^3$?

III. Applications linéaires

III.1. Construction d'applications linéaires

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de F. Alors :

$$\exists! u \in L(E,F) \ / \ \forall i \in [\![1,n]\!],\ u(e_i) = f_i.$$

De plus, $\begin{cases} (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est libre} \Leftrightarrow u \text{ est injective} \\ (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est génératrice de } F \Leftrightarrow u \text{ est surjective} \\ (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est une base de } F \Leftrightarrow u \text{ est bijective} \end{cases}$.

m Ce théorème est en général utilisé pour construire des applications linéaires qui vérifient des propriétés particulières.

Exercice d'application 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Construire $u \in L(E)$ telle que $u^3 = \text{Id}_E$ et $u \neq \text{Id}_E$.

Exercice d'application 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Construire $u \in L(E)$ telle que $\text{Im}(u) = F$.

2) Construire $u \in L(E)$ telle que $\ker(u) = F$.

III.2. Injections, surjections et isomorphismes

Proposition. Soit $u \in L(E,F)$. Alors :
- Si u est injective, elle envoie les familles libres de E sur des familles libres de F.
- Si u est surjective, elle envoie les familles génératrices de E sur des familles génératrices de F.
- Si u est bijective, elle envoie les bases de E sur des bases de F.

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

IV. Rang

IV.1. Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{1\leq i\leq p} \in E^p$ une famille de vecteurs de E. Alors, le rang de $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est $\text{rg}((e_i)_{1\leq i\leq p}) = \dim(\text{Vect}((e_i)_{1\leq i\leq p}))$.

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

- $\mathrm{rg}((e_i)_{1\leq i\leq p}) \leq p$ avec égalité si et seulement si la famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre.
- $\mathrm{rg}((e_i)_{1\leq i\leq p}) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si la famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est génératrice de E.

(m) Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on essaye de montrer qu'ils sont libres. S'ils le sont, le rang est égal au nombre de vecteurs, sinon, on élimine les vecteurs qui dépendent des autres pour ne garder que les vecteurs indépendants.

Exercice d'application 9. Calculer le rang des vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

IV.2. Rang d'une application linéaire

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $u \in L(E,F)$. Alors, $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie et le rang de u est $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Remarque : Si $u \in L(E,F)$ est linéaire avec E de dimension finie et que G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(G)$ est de dimension finie et $\dim(u(G)) \leq \dim(G)$. Autrement dit, quand on calcule des images d'espaces vectoriels par une application linéaire, on ne peut que perdre des dimensions. Si u est injective, on a $\dim(u(G)) = \dim(G)$.

IV.3. Théorème du rang

Théorème. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $u \in L(E,F)$. Alors, $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u))$.

Remarque : En particulier, on a $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(E)$ ce qui prouve que l'image de u a une dimension inférieure ou égale à $\dim(E)$. Ainsi, on ne peut que « perdre » des dimensions quand on applique une application linéaire.

(m) Ce théorème est très utilisé pour faire le lien entre la dimension de l'image et du noyau d'une application linéaire.

Exercice d'application 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in L(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.

Exercice d'application 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ telle que $f^4 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

IV.4. Lien avec l'injectivité et la surjectivité

Proposition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $u \in L(E,F)$. Alors :

- $\mathrm{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.
- $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) \Leftrightarrow u$ est injective.

- Si F est de dimension finie, $\text{rg}(u) = \dim(F) \Leftrightarrow u$ est surjective.

Proposition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $u \in L(E, F)$. Alors :

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow u \text{ est surjective} \Leftrightarrow u \text{ est bijective.}$$

m Pour démontrer qu'une application linéaire est bijective, on prouve en général que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension et que l'application est injective (c'est souvent ce qui est le plus facile à démontrer, car il suffit de montrer que $\ker(u) = \{0_E\}$, et donc de prouver que $u(x) = 0_F \Leftrightarrow x = 0_E$).

Exercice d'application 12. Soit $u : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_5[X] & \to & \mathbb{R}^6 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P(1), P'(1), P''(1)) \end{array} \right.$.

1) Vérifier que u est un isomorphisme.

2) Déterminer $u^{-1}(0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

IV.5. Composition et inverse

Proposition. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E et F de dimension finie. Soient $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$. Alors :
- $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(v), \text{rg}(u))$.
- Si v est injective, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.
- Si u est surjective, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$.

En particulier, composer par un isomorphisme (application linéaire bijective) préserve le rang.

Proposition. Soit $u \in L(E, F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors :

$$u \text{ est inversible} \Leftrightarrow u \text{ est inversible à gauche} \Leftrightarrow u \text{ est inversible à droite.}$$

Remarque : Ce résultat sera très utilisé dans le chapitre sur les matrices.

V. Hyperplans et formes linéaires

V.1. Hyperplan

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E si il admet un supplémentaire D dans E tel que $\dim(D) = 1$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit H un hyperplan de E et $a \notin H$ un vecteur de E. Alors, $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.

(m) Pour construire un supplémentaire d'un hyperplan H, il suffit donc de trouver un vecteur a qui n'est pas dans H et de considérer $\mathrm{Vect}(a)$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Exercice d'application 13. On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$. Vérifier que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et en déterminer deux supplémentaires.

V.2. Formes linéaires

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire est un élément de $L(E, \mathbb{K})$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, $\dim(L(E, \mathbb{K})) = \dim(E)$. Si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim(L(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

V.3. Lien entre hyperplans et formes linéaires

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. Alors :

$$H \text{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists \varphi \in L(E, \mathbb{K}) \text{ non nulle } / \ H = \ker(\varphi).$$

Remarque : Autrement dit, si on note un vecteur $x \in E$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors un hyperplan de E est de la forme $\{x \in E \ / \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Il est donc caractérisé par **une** équation linéaire.

V.4. Équations d'hyperplans et de sous-espaces vectoriels de E

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$. Alors, il existe $H_1, \ldots, H_p$ des hyperplans de E tels que $F = \cap_{i=1}^{p} H_i$.

Remarque : Autrement dit, si on note un vecteur $x \in E$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors un sous espace vectoriel de E de dimension $n - p$ est de la forme :

$$F = \{x \in E \ / \ \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0 \\ \qquad \cdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 \end{array} \right. \}$$

où on a p équations indépendantes (on perd donc une dimension par équation indépendante par rapport à la dimension de E).

VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) $\mathbb{R}^5$ est de dimension 5 est une base de $\mathbb{R}^5$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2) $\mathbb{C}^3$ est de dimension 3 en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel et une base de $\mathbb{C}^3$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

3) $\mathbb{C}^3$ est de dimension 6 s'il est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et une base de $\mathbb{C}^3$ est alors $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)$.

4) $\mathbb{R}_{2n}[X]$ est de dimension $2n+1$ et une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ est $(X^k)_{0\leq k\leq 2n}$.

5) $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ y'' + y = 0\}$ est de dimension 2. En effet, on a $E = \text{Vect}(\cos,\sin)$ et la famille $(\cos,\sin)$ est libre (il suffit par exemple d'évaluer en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$ pour justifier que $a\cos + b\sin = 0 \Rightarrow a = b = 0$).

Exercice d'application 2. Montrer que les familles suivantes sont des bases de E.

1) Puisque l'on a 3 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on montre que la famille est libre. Pour cela, on utilise la méthode du pivot :

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \\ 3a + 3b - 2c = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} a - b + c = 0 & \\ 4b + c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 6b - 4c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} a - b + c = 0 & \\ 4b + c = 0 & \\ 22b = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}\right.$$

On a donc bien $a = b = c = 0$. La famille est libre et de 3 vecteurs en dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On a 4 polynômes et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Montrer que la famille est libre implique donc que la famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(X-1)^3 + b(X-1)^2(X+1) + c(X-1)(X+1)^2 + d(X+1)^3 = 0.$$

En évaluant en 1, on a $d2^3 = 0$ donc $d = 0$. En évaluant en -1, on trouve $a = 0$. On en déduit que :

$$b(X-1)^2(X+1) + c(X-1)(X+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+1)(b(X-1) + c(X+1)) = 0.$$

Puisque $(X-1)(X+1)$ est différent du polynôme nul, on a alors $b(X-1) + c(X+1) = 0$, et en évaluant en $X = 1$, on trouve $c = 0$ et en évaluant en $X = -1$, on trouve $b = 0$. On a donc bien $a = b = c = d = 0$: la famille est donc libre.

Exercice d'application 3.

1) P_1 est un espace vectoriel engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il est de dimension 2 car les deux vecteurs étudiés sont libres (ils sont non colinéaires) et forment donc une base de P_1.

On peut déterminer une base de P_2 de la manière habituelle. On a :

$$\begin{aligned} P_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 4x - 5y + 2z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \frac{5y}{4} - \frac{z}{2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5y}{4} - \frac{z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

On a donc bien P_2 sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 aussi car les deux vecteurs trouvés sont libres (car non colinéaires).

2) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont dans P_2 car ils vérifient l'équation $4x - 5y + 2z = 0$. Puisque P_2 est un espace vectoriel, on a alors $P_1 \subset P_2$ (car P_2 contient une famille génératrice de P_1). Puisque l'on a aussi égalité des dimensions d'après la question précédente, on a donc $P_1 = P_2$.

Exercice d'application 4. Remarquons tout d'abord que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ forment une base de F car ils sont non colinéaires donc libres. Cette famille peut donc être complétée à partir de la base canonique en base de $\mathbb{R}^4$ d'après le théorème de la base incomplète.

Montrons par exemple que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Cette famille a 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour avoir une base. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a = 0 \\ 3a + 2b + d = 0 \\ 4a - 3b = 0 \end{cases}$. On a donc $a = 0$, puis $b = 0$, puis $d = 0$, puis $c = 0$. La famille est donc libre.

On en déduit finalement que $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est un supplémentaire de F.

On aurait pu prendre d'autres vecteurs, l'important est que les calculs pour montrer que la famille est libre ne soient pas trop longs... On remarquera que puisque $\dim(F)=2$*, un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^4$ *sera forcément de dimension 2 et il aura donc toujours une base formée de 2 vecteurs.*

Exercice d'application 5.

1) D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(P_1+P_2)=\dim(P_1)+\dim(P_2)-\dim(P_1\cap P_2)$. Or, on a $P_1+P_2\subset E$ et donc $\dim(P_1+P_2)\leq 3$.

On a donc finalement $\dim(P_1\cap P_2)\geq 4-3=1$. On a donc bien $P_1\cap P_2\neq\{0_E\}$.

Autrement dit, dans un espace vectoriel de dimension 3, deux plans s'intersectent au moins sur une droite.

2) En procédant de même et en utilisant le fait que $F+G\subset E$ et donc que $\dim(F+G)\leq 2n$, on obtient que $\dim(F\cap G)\geq (n+1)+(n+1)-2n=2$.

Si on considère une base de E $(e_1,\dots,e_{2n})$ et que l'on pose par exemple $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n+1})$ et $G=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_{n+2},e_{n+3},\dots,e_{2n})$, on a bien F et G des sevs de E, on a $\dim(F)=\dim(G)=n+1$ (ils ont tous les deux une base à $n+1$ vecteurs) et on a $F\cap G=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ qui est bien de dimension 2.

Cette dernière égalité peut être montrée avec la formule de Grassmann car on a $F+G=E$ (car $F\cup G$ contient une base de E donc n'importe quel vecteur de E peut se décomposer comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G) et on a donc $\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)=(n+1)+(n+1)-2n=2$.

Exercice d'application 6. Soit $X\in D\cap P_1$. On a alors qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $X=\begin{pmatrix}2a\\a\\-2a\end{pmatrix}$ (car $X\in D$) et que $2a+a+(-2a)=0\Leftrightarrow a=0$. On a donc $X=0_{\mathbb{R}^3}$. Enfin, on a $\dim(D)=1$ (le vecteur qui engendre D étant non nul) et $\dim(P_1)=2$ (en utilisant la méthode habituelle, on trouve par exemple que $P_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils sont libres).

On a donc $\dim(D)+\dim(P_1)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$. Ces deux espaces étant en somme directe, on en déduit que $D\oplus P_1=\mathbb{R}^3$.

En effectuant des calculs similaires, on trouve également que $D\cap P_2=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et que $\dim(P_2)=2$. On a donc également $D\cap P_2=\mathbb{R}^3$.

On a par contre pas $P_1\oplus P_2=\mathbb{R}^3$. En effet, si ceci était vrai, on aurait $\dim(P_1)+\dim(P_2)=\dim(R^3)$ et donc $4=3$: absurde !

Exercice d'application 7. On note (e_1,e_2,e_3) une base de E. On pose alors l'application $u\in L(E)$ telle que $u(e_1)=e_2$, $u(e_2)=e_3$ et $u(e_3)=e_1$. On a alors $u\neq\mathrm{Id}_E$ et $u^3(e_1)=e_1$, $u^3(e_2)=e_2$ et $u^3(e_3)=e_3$. On a donc u^3 et Id_E qui sont deux applications linéaires égales sur une base de E. Elles sont donc égales.

Exercice d'application 8. Notons $p=\dim(F)$. Posons alors $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F, que l'on complète en base de E $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ d'après le théorème de l base incomplète.

1) On pose $u\in L(E)$ telle que $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $u(e_i)=e_i$ et $\forall i\in[\![p+1,n]\!]$, $u(e_i)=0_E$. u existe par théorème de construction des applications linéaires.

On a alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = F$.

On remarque ici que $u = p_{F//G}$ où $G =$ Vect$(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

2) On procède de la même façon mais en posant cette fois $u \in L(E)$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) = 0_E$ et $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$, $u(e_i) = e_i$.

On peut alors montrer que $\ker(u) = F$ par double inclusion. En effet, si $x \in \ker(u)$, alors puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a alors $u(x) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i = 0_E$ par linéarité de u. Puisque la famille $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre, on en déduit que $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$. On a donc $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in F$.

Réciproquement, si $x \in F$, alors il existe $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i) = 0_E$ donc $x \in \ker(u)$.

On remarque ici que $u = p_{G//F}$ où $G =$ Vect$(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Exercice d'application 9. On essaye de montrer que la famille est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors le système

$$\begin{cases} ax - c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$$

On a alors $b = 2a$ et $c = -3a$ et $a(x+3) = 0$. On en déduit que si $x \neq -3$, les 3 vecteurs sont libres et le rang de la famille est donc 3. *Ils forment alors une base de* $\mathbb{R}^3$ *car* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Si $x = -3$, la dernière équation n'est pas utile. Nos vecteurs sont donc liés et on a par exemple $e_1 = -2e_2 + 3e_3$. On a donc $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Puisque e_2 et e_3 sont non colinéaires, ils sont libres et on a donc que le rang de la famille (e_1, e_2, e_3) vaut 2.

Exercice d'application 10. D'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f))$. Or, on a $f^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ (si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $f(y) = f^2(x) = 0_E$ d'où l'inclusion). On a donc $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(\ker(f))$. En utilisant l'égalité dans le théorème du rang, on a donc :

$$4 \geq 2\mathrm{rg}(f) \Leftrightarrow 2 \geq \mathrm{rg}(f).$$

Exercice d'application 11. Tout d'abord, on a d'après le théorème du rang que $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Pour montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, il ne reste donc plus qu'à montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\supset$ est toujours vraie, montrons l'inclusion réciproque.

Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On a donc $f(y) = 0_E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $f^2(x) = 0_E$. En composant par f^2, on obtient alors $f^4(x) = f^2(0_E) = 0_E$ (car f est linéaire). Puisque $f^4 = f$, on a donc $f(x) = 0_E$, soit $y = 0_E$ ce qui prouve l'inclusion inverse.

Par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on a donc bien $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice d'application 12.

1) Remarquons tout d'abord que u est bien linéaire puisque la dérivation l'est. De plus, on a $\dim(\mathbb{R}_5[X]) = 6 = \dim(\mathbb{R}^6)$ donc il suffit de montrer que u est injective pour prouver qu'elle est bijective.

Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $u(P) = 0_{\mathbb{R}^6}$. On a alors 0 qui est racine (au moins) triple de P (car $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$) et 1 qui est racine (au moins) triple de P (car $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$). On a donc 6 racines de P (comptées avec multiplicité) alors que $\deg(P) \leq 5$. Ceci entraine que $P = 0$. u est donc injective. D'après la remarque précédente, c'est donc un isomorphisme.

2) On sait qu'il y a un unique polynôme de degré inférieur à 5 qui convient d'après la question précédente. On a 1 racine triple et 0 racine double. On doit donc avoir P de la forme $P = \lambda X^2(X-1)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut aussi $P''(0) = 1$, ce qui entraine $\lambda = -\frac{1}{2}$. On en déduit que :

$$u^{-1}(0,0,1,0,0,0) = \frac{X^2(1-X)^3}{2}.$$

Exercice d'application 13. Toujours avec la méthode habituelle, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sum_{i=2}^{n} x_i$. On a donc que :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Or, ces $n-1$ vecteurs sont libres (la résolution est directe, les différentes lignes du système étant indépendantes). On a donc $\dim(F) = n-1$, ce qui prouve que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ car $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Pour trouver un supplémentaire de F, il suffit de trouver un vecteur qui n'est pas dans F, autrement dit un vecteur ne vérifiant pas que la somme de ses coordonnées est nulle. On a donc par exemple $\text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est un supplémentaire de F, mais aussi $\text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ par exemple (ces deux supplémentaires sont bien différents car les deux vecteurs choisis sont non colinéaires).