3. Généralités sur les fonctions

Exercice 1. (m) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, puis tracer **sans étude de fonction** leurs graphes en utilisant les graphes des fonctions usuelles :

1) $f_1 : x \mapsto \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 2) $f_2 : x \mapsto (2+x)^2$ 3) $f_3 : x \mapsto (1-x)^2$

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{4}{2x+1} + 3$ 5) $f_5 : x \mapsto \sqrt{3x-2} - 1$ 6) $f_6 : x \mapsto 2\ln\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$

Exercice 2. (i) Donner un exemple de fonction $\dfrac{\pi}{6}$-périodique.

Exercice 3. (c) Montrer que $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right) \end{array}\right.$ est périodique.

Exercice 4. (c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ impaire et 2-périodique telle que $\forall x \in]0,1],\ f(x) = 1 - x^2$. Tracer le graphe de f et calculer $f(0)$, $f(5)$, $f(7/3)$, $f(-1/2)$ et $f(8/5)$.

Exercice 5. (i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6. (i) Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques et croissantes ? Le prouver !

Exercice 7. (m) Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ |\tan(x)| \geq |x|$.

Exercice 8. (i) Montrer que $\forall x, y \geq 0,\ \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 9. (m) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$. En déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 10. (m) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \dfrac{x+1}{x-1}\ln(x) \geq 2$.

Exercice 11. (m) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 12. (m) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1) Démontrer que $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

2) En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 13. (c) Pour chacune des expressions suivantes, dire pour quelles valeurs de x elle a un sens. On obtient ainsi une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ pour un certain sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$. Préciser l'ensemble $D' \subset D$ des points où l'on peut justifier que f est dérivable vue comme une composée de fonctions dérivables et la dériver.

1) $f_1 : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$
3) $f_3 : x \mapsto \sin\left(\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right)$
4) $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$
5) $f_5 : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
6) $f_6 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$
7) $f_7 : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
8) $f_8 : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$
9) $f_9 : x \mapsto (\sin(x^2))^3$
10) $f_{10} : x \mapsto (\tan(x))^2$
11) $f_{11} : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{\sin(x) + 2}$
12) $f_{12} : x \mapsto \cos\left(\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)\right)$
13) $f_{13} : x \mapsto \ln(\cos(x) + \sqrt{x^2 + 1})$
14) $f_{14} : x \mapsto \cos(\sqrt{\sin(x) + 1})$
15) $f_{15} : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2 + x + 1)}{\sin(x)}$

Exercice 14. (m) Étudier (domaine de définition, régularité, dérivée éventuelle, tableau de variation et graphe) les fonctions :

1) $f_1 : x \mapsto x^3 - 3x.$
2) $f_2 : x \mapsto x^2 + \dfrac{2}{x}.$
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}.$
4) $f_4 : x \mapsto xe^x.$
5) $f_5 : x \mapsto x\ln(x).$
6) $f_6 : x \mapsto \cos(x) + \sin(x).$

Exercice 15. (m) On pose $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

1) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Étudier la parité de f.
3) Déterminer la dérivée de f, ses variations, ses limites en $\pm\infty$ et tracer son graphe.

Exercice 16. (m) On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1 + |x|} \end{array} \right.$.

1) En revenant à la définition, justifier que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
2) Étudier f (domaine de définition, symétries éventuelles, dérivée, limites, graphe).

Exercice 17. (m) On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2} \end{array} \right.$.

1) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de f en $x = 1$.
2) Montrer que les autres tangentes de f ne sont pas parallèles à T_1.

Exercice 18. (i) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$. Intuiter une formule pour la dérivée n-ième de f et la prouver par récurrence.

Exercice 19. (m) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \leq f(x)$. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$, montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 20. (∗) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.