3. Généralités sur les fonctions, méthodologie

I. Fonctions à valeurs réelles

I.1. Ensemble de définition

Définition. L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ existe. On le note en général D_f.

Exercice d'application 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt{|x| - 2}$.
2) $g : x \mapsto \ln(2 - \sqrt{x+1})$.

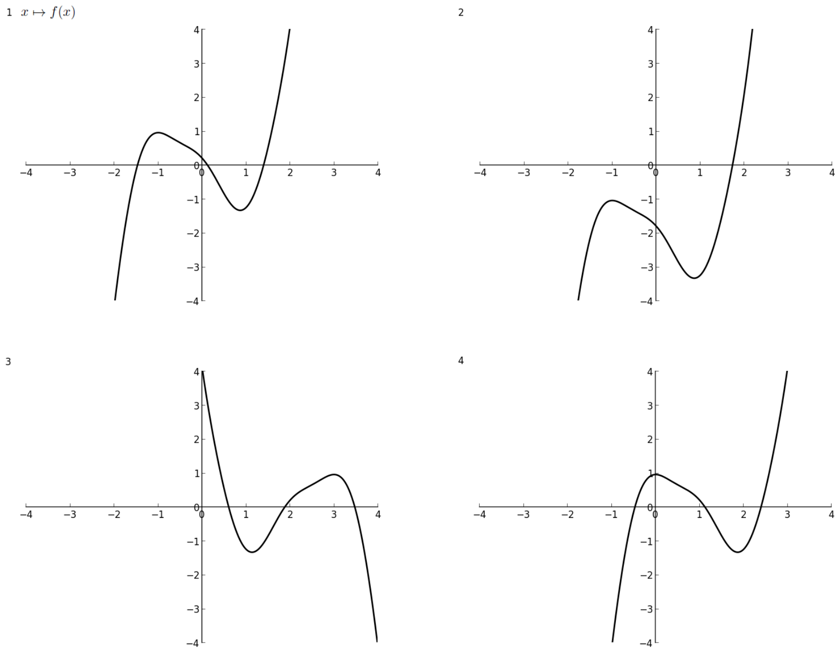
I.2. Graphe

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Le graphe de f (ou la courbe représentative de f) est l'ensemble $\{(x, f(x)),\ x \in D\}$. On le représente en général dans un repère orthonormé.

Proposition. On se place dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- Le graphe de la fonction $f_1 : x \mapsto f(x) + a$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de la fonction $f_2 : x \mapsto f(x + a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- Le graphe de la fonction $f_3 : x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (la droite d'équation $y = 0$).
- Le graphe de la fonction $f_4 : x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$).
- Le graphe de la fonction $f_5 : x \mapsto af(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction/dilatation de rapport a selon l'axe des ordonnées.
- Le graphe de la fonction $f_6 : x \mapsto f(ax)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction/dilatation de rapport $1/a$ selon l'axe des abscisses.
- Le graphe de la fonction $f_7 : x \mapsto f(a - x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
- Le graphe de la fonction $f_8 : x \mapsto a - f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$.

Exercice d'application 2. Exprimer en fonction de f (tracée en haut à gauche) les fonctions dont les graphes sont représentées.



I.3. Opérations sur les fonctions

(m) Pour déterminer le domaine de définition de $g \circ f$, il faut déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ soit dans le domaine de définition de g.

Exercice d'application 3. Donner un exemple de deux fonctions f et g telles que $(g \circ f)(x)$ n'existe pour aucun réel x.

I.4. Propriétés des fonctions

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D, \ f(x) \leq M$. Un tel M est un **majorant** de f.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D, \ m \leq f(x)$. Un tel m est un **minorant** de f.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est bornée sur D si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D, \ |f(x)| \leq M$. *La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.*

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que M est un **maximum** de f si

$$\begin{cases} M \text{ majore } f \\ \exists x_0 \in D \ / \ f(x_0) = M \end{cases}.$$

On dit que m est un **minimum** de f si $\begin{cases} m \text{ minore } f \\ \exists x_0 \in D \ / \ f(x_0) = m \end{cases}$.

On dit que f admet un **extremum** en $x_0 \in D$ si $f(x_0)$ est un minimum ou un maximum de f.

(m) Pour déterminer les éventuels extrema d'une fonction, on effectue une étude de fonction.

Exercice d'application 4. Déterminer les extrema de $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ sur $[-1, 4]$.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que f est T**-périodique** si

$$\begin{cases} \forall x \in D,\ x + T \in D \text{ et } x - T \in D \\ \forall x \in D,\ f(x+T) = f(x) \end{cases}.$$

On dit que f est **périodique** sur D s'il existe $T > 0$ tel que f est T-périodique sur D.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **paire** si $\begin{cases} \forall x \in D,\ -x \in D \\ \forall x \in D,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$. Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$).
- On dit que f est **impaire** si $\begin{cases} \forall x \in D,\ -x \in D \\ \forall x \in D,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$. Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

(m) Pour démontrer qu'une fonction est paire/impaire/T-périodique, il faut tout d'abord vérifier le premier point (souvent une remarque suffit, c'est par exemple vérifié automatiquement si $D = \mathbb{R}$) et ensuite définir un $x \in D$ et calculer $f(-x)$ (ou $f(x+T)$ pour une fonction T-périodique) et arriver à $f(x)$ (ou à $-f(x)$ pour une fonction impaire).

Exercice d'application 5. Déterminer si les fonctions suivantes sont paires/impaires :

1) $f : x \mapsto x^3 + \sin(2x)(e^x + e^{-x})$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice d'application 6. Soit $f : x \mapsto \sin^3(2x)$. Déterminer un intervalle de longueur la plus petite possible sur lequel on peut étudier f et construire le reste du graphe par périodicité/à l'aide de symétries.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

- **croissante** sur D si $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- **strictement croissante** sur D si $\forall x, y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- décroissante sur D si $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- strictement décroissante sur D si $\forall x, y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Proposition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ strictement croissante. Alors, $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

(m) Quand on étudie des inégalités, si l'on veut raisonner par **implications** ($x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$), il faut dans la rédaction préciser/justifier que f est croissante sur un ensemble qui contient x et y. Si l'on veut raisonner par **équivalences** ($x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$), il faut dans la rédaction préciser/justifier que f est **strictement** croissante sur un ensemble qui contient x et y.

Exercice d'application 7. Déterminer dans chacun des cas le plus grand intervalle I contenant 0 tel que :

1) $\forall x, y \in I,\ x \leq y \Leftrightarrow \sin(x) \leq \sin(y)$.

2) $\forall x, y \in I,\ x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

3) $\forall x, y \in I,\ x \leq y \Leftrightarrow \tan(x) \leq \tan(y)$.

4) $\forall x, y \in I,\ x \leq y \Rightarrow \tan^2(x) \leq \tan^2(y)$.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue** sur D si pour tout $x_0 \in D$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(m) Toutes les fonctions usuelles que vous connaissez sont des fonctions continues sur leur ensemble de définition. Pour justifier qu'une fonction est continue, on l'écrit comme une somme/un produit/une composée de fonctions continues. *L'étude de la continuité sera faite en détail plus tard dans l'année.*

II. Dérivation

II.1. Dérivée en un point

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On dit que f est **dérivable** en x_0 si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ (autrement dit si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x tend vers une limite finie tend vers une limite finie quand x tend vers x_0).

On dit que l est la dérivée de f en x_0 et on note $l = f'(x_0)$.

(m) On se servira surtout de cette définition dans le sens inverse. Si l'on sait qu'une fonction est dérivable, on peut revenir à la définition pour étudier des limites de formes indéterminées. En particulier, si f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$.

Exercice d'application 8. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$.

II.2. Interprétation graphique

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in D$. Alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x_0 est la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Exercice d'application 9. Déterminer la tangente à la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2}$ en $x_0 = 2$.

II.3. Fonction dérivée

(m) L'ensemble de dérivabilité d'une fonction f est le plus grand ensemble sur lequel elle est dérivable. Pour le déterminer, il faut d'abord déterminer le domaine de définition de f et enlever les valeurs en lesquelles f n'est pas dérivable. Il faut le déterminer **avant** de calculer f' ! On ne peut pas pour déterminer le domaine de dérivabilité de f commencer par calculer f' puis trouver son domaine de définition car le calcul de f' suppose que l'on connait déjà le domaine de dérivabilité...

Exercice d'application 10. Quel est le domaine de dérivabilité de ln ? Quel est le domaine de dérivabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$? Que remarquez-vous ?

Remarque : Les seules fonctions (pour le moment) dont le domaine de définition n'est pas le domaine de dérivabilité sont les fonctions racine et valeur absolue (qui ne sont pas dérivables en 0). Attention donc avec les expressions contenant des racines et des valeurs absolues !

Tableau des dérivées usuelles :

$f(x)$	D_f	D'	$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(f(x))$
1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n (avec $n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
x^n (avec $n \in \mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

(m) Quand plusieurs variables apparaissent dans la fonction f, il est parfois utile de préciser par rapport à quelle variable on dérive. On pourra donc noter $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(f(x))$ pour préciser que l'on dérive par rapport à la variable x.

Exercice d'application 11. On pose pour $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2e^y + \sin(xy)$. Calculer $\dfrac{d}{dx}(f(x,y))$ et $\dfrac{d}{dy}(f(x,y))$.

Exercice d'application 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

1) Dériver la relation vérifiée par f par rapport à la variable x.
2) Déterminer alors toutes les fonctions f vérifiant la propriété précédente telles que $f'(0) = 1$.
3) Même question avec $f'(0) = 2$.

II.4. Opérations sur les dérivées

Proposition. Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables sur D et

$$(f+g)' = f' + g' \text{ et } (f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

Proposition. Soit $f : D_1 \to \mathbb{R}$ dérivable et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(D_1) \subset D_2$ (autrement dit que l'ensemble des valeurs que prend la fonction f est inclus dans l'ensemble de dérivabilité de g). Alors, $g \circ f$ est dérivable sur D_1 et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

(m) Autrement dit, $g \circ f$ est dérivable au moins sur l'ensemble des x tels que f soit dérivable en x et tels que g soit dérivable en $f(x)$. *Attention, $g \circ f$ peut parfois être dérivable en plus de points ! Il faut, pour calculer le plus grand domaine sur lequel $g \circ f$ est dérivable, étudier ces valeurs particulières* *à part en revenant à la définition de la dérivée et en calculant la limite du taux d'accroissement. Les outils permettant de réaliser ce calcul seront l'objet d'un autre chapitre.*

(m) Pour justifier la dérivabilité d'une fonction sur un ensemble D, on essaye de se ramener à une somme/un produit/une composée de fonctions que l'on sait dérivables sur D (en général des fonctions usuelles). Le calcul de la dérivée s'effectue alors en utilisant les formules précédentes.

Exercice d'application 13. Vérifier que les fonctions suivantes sont définies sur les ensembles D proposés, dérivables sur les ensembles D' et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \ln(1+\sqrt{3+x})$, $D_f = [-3, +\infty[$, $D'_f =]-3, +\infty[$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$, $D_g = [-2, -1[\cup]-1, +\infty[$, $D'_g =]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$.

3) $h : x \mapsto \sqrt{\ln(x)\sin(x)}$, $D_h = [1, \pi]\cup(\cup_{k\in\mathbb{N}^*}[2k\pi, (2k+1)\pi])$, $D'_h =]1, \pi[\cup(\cup_{k\in\mathbb{N}^*}]2k\pi, (2k+1)\pi[)$.

II.5. Dérivée d'ordre supérieur

(m) Les fonctions usuelles vues précédemment sont en fait infiniment dérivables sur leur domaine de dérivabilité. Pour montrer qu'une fonction est infiniment dérivable, on essaye de l'écrire comme une somme/un produit/une composée de fonctions usuelles.

III. Lien entre dérivabilité et monotonie

Proposition. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Proposition. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

- $\forall x \in I,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I.
- $\forall x \in I,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

(m) Pour étudier les variations d'une fonction, on commence donc par déterminer son domaine de dérivabilité (en l'écrivant comme somme/produit/composée de fonctions dérivables) et on étudie le signe de la dérivée sur chacun des intervalles qui composent le domaine de dérivabilité.

Proposition. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_n \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **continue** sur I et **dérivable** sur $I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors :

- $\forall x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I.
- $\forall x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

(m) Pour montrer qu'une fonction continue est strictement croissante sur un intervalle, il suffit donc de montrer que sa dérivée existe et est strictement positive sauf en un nombre fini de points. Ceci permet de justifier par exemple qu'une fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est strictement positive et nulle en un nombre fini de points est strictement croissante sur cet intervalle.

Exercice d'application 14. Démontrer que les fonctions suivantes sont strictement croissantes sur l'intervalle précisé :

1) $f_1 : x \mapsto x^5$ sur $\mathbb{R}$.

2) $f_2 : x \mapsto 2x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3) $f_3 : x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) $f_4 : x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

IV. Plan d'étude d'une fonction

(m) **Étudier une fonction, c'est :**

- Déterminer son domaine de définition.
- Étudier les symétries de la fonction (parité, imparité, périodicité) afin de réduire le domaine d'étude.
- Déterminer son domaine de dérivabilité.
- Calculer la dérivée et étudier son signe.
- Effectuer le tableau de variations de la fonction.
- Déterminer les limites de la fonction aux bords du domaine de définition et aux valeurs où la fonction n'est pas définie (en les justifiant s'il y a des formes indéterminées), puis les reporter sur le tableau de variations.
- Faire le tracé.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soient $x_0, l \in \mathbb{R}$. On dit que :

- La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$.
- La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.
- On dit que la courbe représentative de f admet en $\pm\infty$ une branche parabolique suivant l'axe (Ox) si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
- On dit que la courbe représentative de f admet en $\pm\infty$ une branche parabolique suivant l'axe (Oy) si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$.
- La courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote à la courbe représentative de f en $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$ (si $g(x) = ax + b$, on parle de droite asymptote).

Exercice d'application 15. Étudier les fonctions suivantes et déterminer leurs asymptotes éventuelles :

1) $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2 - 9}$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$.

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1. On a $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ donc on cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| - 2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$. On en déduit que le domaine de définition de f est $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.
2. On a ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. On cherche donc les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x+1} > 0 \end{cases}$. La première inégalité nous donne $x \in [-1, +\infty[$. On peut alors manipuler la seconde inégalité pour obtenir une condition sur x :

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{x+1} > 0 &\Leftrightarrow 2 > \sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow 4 > x+1 \qquad \text{(car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\text{)} \\ &\Leftrightarrow 3 > x. \end{aligned}$$

L'intersection des deux conditions nous donne donc que le domaine de définition de g est $[-1, 3[$.

Exercice d'application 2.

1. $x \mapsto f(x)$.
2. $x \mapsto f(x) - 2$ (translation de vecteur $-2\vec{j}$).
3. $x \mapsto f(2-x)$ (symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 1$).
4. $x \mapsto f(x-1)$ (translation de vecteur $\vec{i}$).

Exercice d'application 3. On peut prendre par exemple $g : x \mapsto \sqrt{x}$ (définie sur $\mathbb{R}_+$) et $f : x \mapsto -e^x$ (définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$). $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ n'existe ici pour aucun x réel.

Exercice d'application 4. f est dérivable sur $[-1, 4]$ et pour $x \in [-1, 4]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-2).$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		$-\frac{2}{3}$		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$\frac{67}{27}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	17

On en déduit que sur $[-1, 4]$, f admet -7 comme minimum et 17 comme maximum. Attention à ne pas oublier de tester les valeurs aux bords !

Sur $[-1, 4]$, $\frac{67}{27}$ est un maximum local de la fonction (mais pas global !), nous étudierons plus tard cette notion...

Exercice d'application 5.

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et f est impaire. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + \sin(2(-x))(e^{-x} + e^{-(-x)}) \\ &= -x^3 - \sin(2x)(e^x + e^{-x}) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

2. g est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $x \in D$, on a bien $-x \in D$ (puisque si x n'est pas un multiple de π, alors $-x$ aussi. g est paire sur D. En effet, si on fixe $x \in D$, alors :

$$g(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin^2(-x)} = \frac{\cos(x)}{(-\sin(x))^2} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = f(x).$$

Exercice d'application 6. Tout d'abord f est définie sur $\mathbb{R}$. On peut vérifier que f est π-périodique puisque pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+\pi) = \sin^3(2x + 2\pi) = \sin^3(2x) = f(x).$$

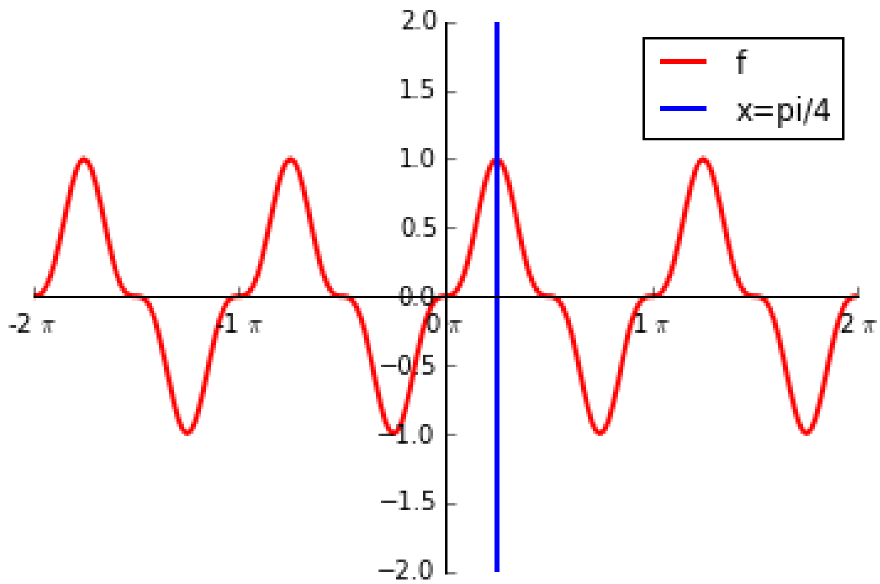
On peut donc déjà étudier f sur $[0, \pi]$ (ou sur n'importe quel intervalle de longueur π). On peut réduire cet intervalle une première fois en remarquant que f est impaire (ce que l'on peut vérifier rapidement). On peut donc étudier f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, utiliser une symétrie par rapport à l'origine pour obtenir le graphe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et ensuite compléter sur $\mathbb{R}$ par π-périodicité.

Il serait cependant dommage de s'arrêter là ! En effet, on remarque que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^3(\pi - 2x) = \sin^3(2x) = f(x).$$

Ceci signifie que le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{4}$ de la manière suivante :

- Tracer le graphe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
- Utiliser la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir le graphe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Utiliser la symétrie par rapport à l'origine pour obtenir le graphe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et utiliser la périodicité pour obtenir le graphe sur $\mathbb{R}$.



Exercice d'application 7.

1) sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et c'est le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel elle est strictement croissante. On a donc $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) On cherche le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel la fonction carrée est croissante. Il s'agit ici de $I = \mathbb{R}_+$. *On aurait d'ailleurs une équivalence car la fonction carrée y est strictement croissante.*

3) Pour avoir la fonction tangente strictement croissante sur un intervalle contenant 0, il faut prendre $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En effet, $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$ et tan n'est pas définie en $\pm\frac{\pi}{2}$ donc on ne peut pas agrandir l'intervalle.

4) D'après la question 3, si on prend $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $x \leq y \Leftrightarrow \tan(x) \leq \tan(y)$. Pour ensuite avoir le droit d'élever au carré et de préserver l'ordre, il faut que $\tan(x)$ et $\tan(y)$ soit positifs. Ceci n'est le cas que pour $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice d'application 8.

1. sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. On en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = 1.$$

2. ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. On en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = 1.$$

Exercice d'application 9. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ comme quotient de fonction dérivable. On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}.$$

On a donc $f'(2) = -\frac{4}{4} = -1$ et $f(2) = \frac{1}{2}$. La tangente à f en $x_0 = 2$ est donc d'équation $y = -(x-2) + \frac{1}{2}$, c'est à dire $y = -x + \frac{5}{2}$.

Exercice d'application 10. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. On remarque cependant que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est elle définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$. Le domaine de dérivabilité du logarithme est bien $\mathbb{R}_+^*$ et pas $\mathbb{R}^*$, bien que l'expression $\frac{1}{x}$ existe sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice d'application 11. On a $\frac{d}{dx}(f(x,y)) = 2xe^y + y\cos(xy)$ et :

$$\frac{d}{dy}(f(x,y)) = x^2e^y + x\cos(xy).$$

Exercice d'application 12.

1) En dérivant par rapport à x (y est donc constante), on obtient pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx}(f(xy)) = \frac{d}{dx}(f(x)f(y)) \Leftrightarrow yf'(xy) = f'(x)f(y).$$

2) En évaluant en $x = 0$, on obtient alors que si f vérifie l'équation et vérifie $f'(0) = 1$, alors $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = y$. Réciproquement, on voit que si $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = y$, alors f est bien dérivable et vérifie l'équation et vérifie également $f'(0) = 1$. C'est donc l'unique solution à l'équation (par analyse/synthèse).

3) En procédant de même, on trouve que pour $y \in \mathbb{R}$, alors $2y = 2f(y)$, soit $f(y) = y$. Réciproquement, f vérifie bien l'équation mais ne vérifie plus $f'(0) = 2$. On en déduit qu'il n'y a aucune fonction dérivable vérifiant l'équation telle que $f'(0) = 2$!

Exercice d'application 13.

1. Le domaine de définition de f est $[-3, +\infty[$. Le domaine de dérivabilité est $]-3, +\infty[$ (la fonction racine n'est pas dérivable en 0). On a pour $x \in]-3, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} \times \frac{1}{1+\sqrt{3+x}}.$$

2. Pour le numérateur, on doit avoir $x \in [-2, +\infty[$ et pour le dénominateur $x \neq -1$. On en déduit que g est définie sur $[-2, -1[\cup]-1, +\infty[$. g est dérivable sur $]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$ (puisque la fonction racine n'est pas dérivable en 0). On a pour $x \in]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(x+1)} - \frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)^2}.$$

3. Le domaine de définition de h est $[1, \pi] \cup (\cup_{k\in\mathbb{N}^*}[2k\pi, (2k+1)\pi])$ (le logarithme est négatif sur $]0, 1[$ et le sinus est positif). Le domaine de dérivabilité est $]1, \pi[\cup (\cup_{k\in\mathbb{N}^*}]2k\pi, (2k+1)\pi[)$ (car la racine n'est pas dérivable en 0). On a pour x dans ce domaine :

$$h'(x) = \frac{\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)}{2\sqrt{\ln(x)\sin(x)}}.$$

Exercice d'application 14.

1) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 4x^4$. On remarque que la dérivée de f_1 est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0 (une seule valeur). On a donc f_1 strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_2'(x) = 2 - \cos(x) \geq 1 > 0 \text{ car } \cos(x) \geq -1.$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) > 0$ donc f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme somme de fonctions dérivables). On a pour $x > 0$:

$$f_3'(x) = 4x - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pour $x \geq \frac{1}{4}$, on a $f_3'(x) > 0$. Pour $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$, on a $\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$. On a donc $f_3'(x) > 4x$, ce qui entraine que f_3' est strictement positive sur cet intervalle également.

On a donc $\forall x > 0,\ f_3'(x) > 0$ donc f_3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) D'après la question précédente, f_3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme de fonctions continues), on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice d'application 15.

1. f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ et dérivable sur cet ensemble comme quotient de fonctions dérivables. Pour $x \in D$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2-9} - \frac{2x(x+2)}{(x^2-9)^2} \\ &= \frac{x^2-9-2x^2-4x}{(x^2-9)^2} \\ &= -\frac{x^2+4x+9}{(x^2-9)^2} \\ &= -\frac{x^2+4x+9}{(x^2-9)^2}. \end{aligned}$$

Au numérateur, la fonction polynomiale de degré 2 a un discriminant strictement négatif et est donc de signe strictement positif sur $\mathbb{R}$ tout en entier. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

Les limites en $-\infty$, -3, 3 s'obtiennent ainsi. Pour les limites en $\pm\infty$, on écrit pour $x < -3$ ou $x > 3$:

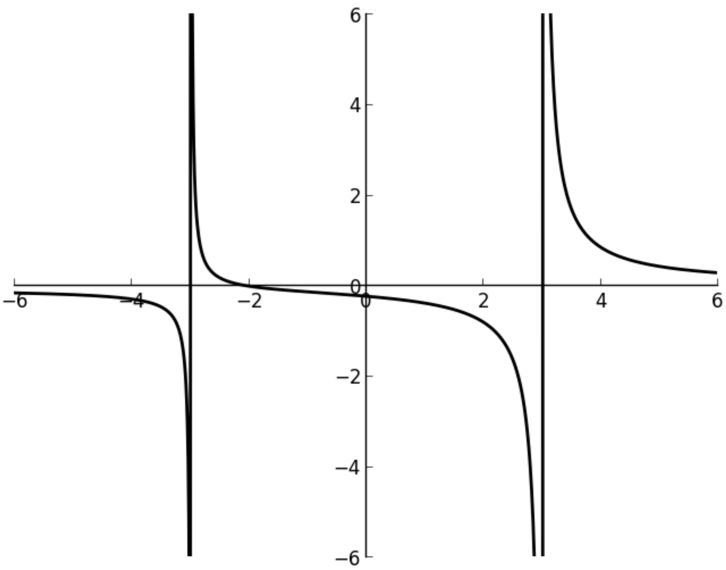
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-9} = \frac{x}{x^2} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{9}{x^2}}.$$

Ainsi il n'y a plus de formes indéterminées et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Pour les limites en -3 et en 3, il est plus facile d'écrire pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$:

$$f(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+3)}.$$

Ainsi par exemple, on a $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ puisque $x+2$ et $x+3$ tendent 5 et 6 (qui sont positifs) et $x-3$ tend vers 0 mais négativement (puisque $x < 3$ quand on regarde la limite en 3^-, c'est à dire en 3 par valeurs inférieures). On procède de même pour les trois autres limites.

On a donc 2 asymptotes verticales d'équations $x = -3$ et $x = 3$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $\pm\infty$. On a le graphe suivant :



2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de $g'(x)$ et le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Pour les limites en $\pm\infty$ (qui sont des formes indéterminées), il suffit d'écrire pour $x \neq -1$:

$$g(x) = \frac{x^2}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Les limites en $(-1)^-$ et $(-1)^+$ s'obtiennent sans difficultés, le numérateur étant toujours positif.

On a la droite $x = -1$ asymptote horizontale au graphe de g en -1. Pour les asymptotes en $\pm\infty$, il faut écrire la fonction g de manière un peu différente. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^2+x-x}{x+1} \\
&= x - \frac{x}{x+1} \\
&= x - \frac{x+1-1}{x+1} \\
&= x - 1 + \frac{1}{x+1}.
\end{aligned}
$$

Ceci entraine que $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)-(x-1)=0$. La droite d'équation $y=x-1$ est donc asymptote au graphe de g au voisinage de $\pm\infty$. *On peut même dire que le graphe de g est en dessous de cette droite au voisinage de $-\infty$ et au dessus au voisinage de $+\infty$ puisque la différence entre $g(x)$ et l'équation de la droite est négative au voisinage de $-\infty$ et positive au voisinage de $+\infty$.*

On a alors le graphe suivant :