

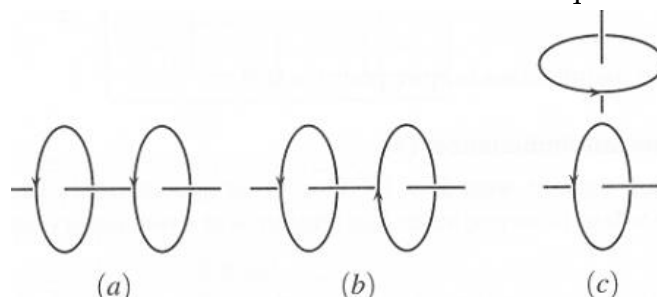
TRAVAUX DIRIGÉS OS15

Circuit fixe dans un champ magnétique variable

Niveau 1

*Exercice 1. Inductances propre et mutuelle

- Deux spires orientées sont placées suivant trois dispositions (a), (b) et (c). Les spires sont coaxiales dans les cas (a) et (b) et d'axes orthogonaux dans le cas (c). Indiquer le signe de l'inductance mutuelle M dans chaque cas.



- Calculer l'inductance propre d'une bobine de longueur l , comportant N spires de surface S . On précisera clairement les hypothèses de calcul.

*Exercice 2. Mesure d'une inductance mutuelle

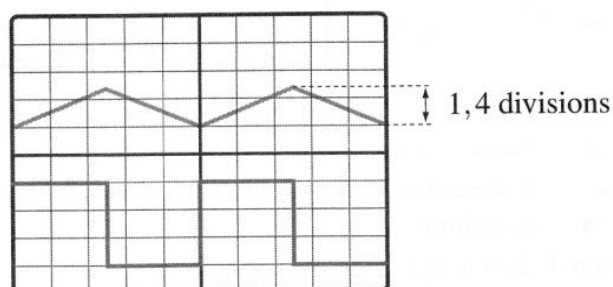
On considère deux bobines identiques, formées de N spires circulaires de rayon R_0 (bobinées sur une seule épaisseur), d'inductance L , que l'on place de façon que les deux bobinages soient coaxiaux, avec le même sens d'enroulement, la distance entre leurs centres étant repérée le long de l'axe commun (Oz) par la longueur d . On se propose de mesurer le couplage entre les deux bobines en envoyant dans l'une d'elles, dite la première, une tension triangulaire et en comparant à l'oscilloscope cette tension avec la tension induite dans l'autre, celle-ci étant en circuit ouvert. On a branché en série entre le générateur de fonction et la première bobine une résistance $R = 100 \, \Omega$. On néglige la résistance r des bobines.

- Devant quoi la résistance r des bobines est-elle négligeable ?
- Dessiner le schéma du montage.

Les traces observées à l'oscilloscope ont l'allure suivante :

Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- balayage horizontal : $0,2 \, \text{ms/div}$;
- trace supérieure : $1 \, \text{V/div}$;
- trace inférieure : variable (voir tableau).



En faisant varier la distance d entre les bobines, on observe pour l'amplitude crête à crête A du signal induit, mesurée en divisions de l'écran, les valeurs suivantes :

Calibre	0,01 V/div			5 mV/div			2 mV/div		1 mV/div
d (cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A (div)	4,3	3,3	2,6	4,3	3,4	2,3	4	2,1	2,4

3. Écrire les équations électriques du circuit.
4. Établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les deux bobines en fonction de la période T du signal d'entrée, de son amplitude crête à crête Δe , de l'amplitude crête à crête A du signal induit et de la résistance R . Calculer alors, en mH, l'inductance mutuelle M entre les deux bobines pour chaque valeur de d .

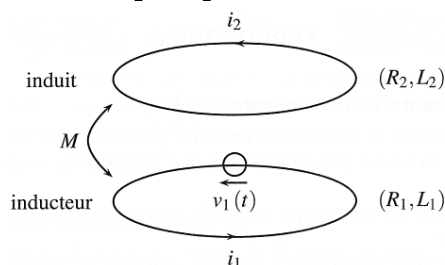
Exercice 3. Table à induction

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé l'inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même, situé au fond d'une casserole.

L'inducteur, de 5 cm de rayon, comporte 20 spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega$ et d'auto-inductance $L_1 = 30 \mu\text{H}$.

La plaque de résistance $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$, nommée l'induit, est assimilable à une spire unique refermée sur elle-même. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$. L'ensemble plaque (induit) – inducteur se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle M .



1. Écrire les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre i_1 et i_2).
2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$.

3. En déduire l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe du système

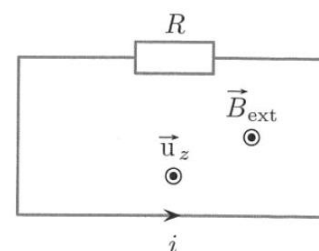
$$\underline{Z}_e = \frac{V_1}{I_1}.$$

4. On choisit ω telle que $R_1 \ll L_1\omega$ et $R_2 \ll L_2\omega$. Simplifier les deux expressions littérales précédentes, puis effectuer le calcul numérique de leur module, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $M = 2 \mu\text{H}$ et que la fréquence du courant sinusoïdal est $f = 26 \text{ kHz}$.
5. On soulève la plaque à chauffer ; on demande un raisonnement purement qualitatif. L'amplitude du courant i_1 appelé par l'inducteur augmente-t-elle ou décroît-elle ?

Niveau 2

Exercice 4. Quand peut-on négliger l'auto-induction?

On considère un circuit électrique fixe rectangulaire, d'aire S , plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$, d'amplitude B_0 et dépendant du temps à la pulsation temporelle ω . On note L le coefficient d'auto-inductance du circuit.

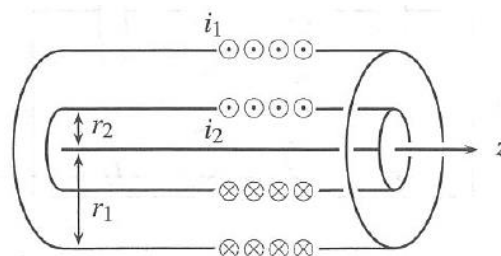


- Établir l'équation électrique vérifiée par l'intensité i .
Mettre cette équation sous forme canonique en faisant intervenir un temps caractéristique, noté τ , à exprimer en fonction des données.
- Expliquer pourquoi, au bout d'un certain temps de fonctionnement (notion à expliciter), il est légitime de chercher la solution sous la forme $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$. En expliquant la méthode utilisée (méthode au choix), déterminer l'amplitude i_0 (prise positive) de l'intensité.
- Exprimer le rapport $\frac{e_L}{e_{\text{ext}}}$ des amplitudes de la fem auto-induite et de la fem extérieure. En déduire à quelle condition la fem auto-induite est négligeable (condition sur la pulsation ω).
- Pour $R = 10 \Omega$ et $L = 1 \text{ mH}$, déterminer la pulsation critique qui délimite les deux régimes (auto-induction négligeable ou pas). Afin de préciser ce résultat numérique, déterminer pour quelle pulsation, notée ω_1 , l'amplitude de la fem auto-induite ne représente que 1,0 % de l'amplitude de la fem externe. Donner la fréquence f_1 correspondante.

*Exercice 5. Écrantage d'un champ magnétique

On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On considère deux solénoïdes Σ_1 et Σ_2 coaxiaux, d'axe (Oz) , de même longueur $L = 20 \text{ cm}$, de rayons $r_1 = 10 \text{ cm}$ et $r_2 = 5,0 \text{ cm}$ et comportant respectivement $N_1 = 700$ et $N_2 = 500$ spires jointives, enroulées dans le même sens.



Dans toute la suite on négligera les effets de bord ; on considérera donc les solénoïdes comme très longs. Ces deux bobines ont pour résistance respectivement R_1 et R_2 , égales à 50Ω . On pourra introduire les nombres de spires par unité de longueur $n_i = \frac{N_i}{L}$. On prendra $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

1. Le solénoïde Σ_1 est parcouru par un courant d'intensité i , Σ_2 étant en circuit ouvert

- a. Exprimer le champ magnétique \vec{B}_1 créé dans tout l'espace.
- b. En déduire que le coefficient d'inductance L_1 de Σ_1 vaut $\mu_0 \frac{N_1^2}{L} \pi r_1^2$; donner l'expression de L_2 , inductance de Σ_2 et calculer sa valeur numérique.
- c. Définir le coefficient de mutuelle inductance M entre les deux solénoïdes.

Montrer que $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2$.

2. Le solénoïde Σ_1 est alimenté par un générateur idéal de courant électromoteur $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ avec $I_0 = 1,0 \text{ A}$; les deux extrémités du solénoïde Σ_2 sont reliées par un fil sans résistance.

- a. Déterminer l'amplitude complexe du courant $i_2(t)$ circulant dans Σ_2 en

fonction de M , L_2 et R_2 . La mettre sous la forme $\underline{i}_2 = K \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \underline{i}_1$. On donnera

l'expression de K en fonction de N_1 et N_2 et celle de ω_c en fonction de R_2 et L_2 .

- b. En déduire l'expression de l'amplitude complexe \underline{B}_2 du champ magnétique total à l'intérieur du solénoïde Σ_2 . Montrer que ce champ tend vers 0 à haute fréquence. Commenter.
- c. A.N. Calculer ω_c ainsi que les amplitudes de i_2 et de B_2 pour une fréquence de 11 kHz. Calculer le rapport des amplitudes $\frac{B_2}{B_1}$.

Niveau 3

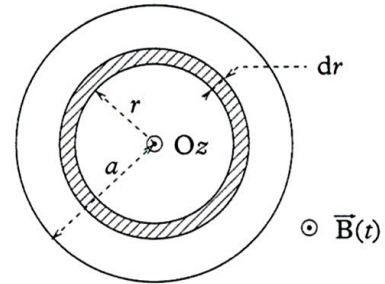
Exercice 6. Puissance d'une plaque à induction

On cherche dans cet exercice à déterminer la puissance thermique reçue par le fond d'une casserole posée sur une plaque à induction. On assimile le fond de la casserole à un cylindre de rayon a , d'épaisseur h et d'axe (Oz) . La plaque à induction crée en son sein un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

Pour étudier les courants créés dans le fond de la casserole, on modélise ce dernier par un ensemble de spires circulaires concentriques d'axe (Oz) , d'épaisseur h et de largeur dr . On admettra que la conductance électrique dG (inverse de la résistance)

d'une de ces spires, de rayon r , s'écrit $dG = \frac{h}{2\pi r} \gamma dr$,

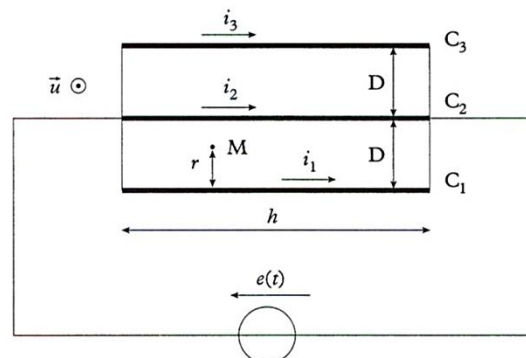
où γ est la conductivité du métal utilisé.



1. Exprimer le courant élémentaire di induit dans une spire, assimilée à un circuit filiforme de conductance dG .
2. En déduire la puissance moyenne dP dissipée par effet Joule dans une spire.
3. Déterminer alors la puissance totale P dissipée dans le fond de la casserole en fonction de B_0 , ω , h , γ et a .
4. A.N. Calculer P avec $\gamma = 10^7$ S/m, $h = 5$ mm, $a = 10$ cm, $B_0 = 0,1$ T, $\omega = 100\pi$ rad/s.

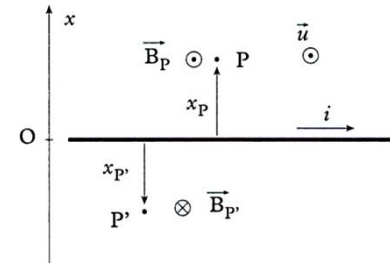
***Exercice 7. Intensité dans 3 conducteurs parallèles**

On dispose de 3 conducteurs cylindriques identiques, C_1 , C_2 et C_3 , de rayon a , de longueur h et de résistance R . Ces 3 conducteurs sont disposés parallèlement entre eux dans un même plan et espacés d'une distance D . Ils sont branchés en parallèle à un même générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω . On se propose de montrer que, à cause des phénomènes d'induction, l'intensité dans le conducteur central est différente de celle dans les deux autres.



On note i_2 l'intensité dans le conducteur central et $i_1 = i_3$ l'intensité dans les deux autres conducteurs. Un point M du plan des conducteurs est repéré par sa distance r à l'axe de C_1 . On note \vec{u} un vecteur unitaire orthogonal au plan des conducteurs et dirigé vers l'avant de la figure.

On admettra que le champ magnétique \vec{B}_P créé par un conducteur cylindrique parcouru par un courant i en un point P extérieur au conducteur, repéré par son abscisse x_P (positive ou négative) suivant un axe orthogonal au conducteur s'écrit $\vec{B}_P = \frac{\mu_0 i}{2\pi x_P} \vec{u}$.



1. Montrer que le champ magnétique au point M s'écrit :

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D-r} - \frac{i_3}{2D-r} \right) \vec{u}$$

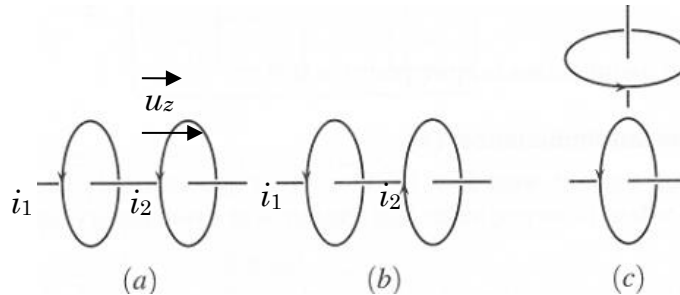
2. On considère la surface élémentaire dS , de largeur dr et de longueur h , parallèle aux conducteurs et contenant le point M . On oriente cette surface de façon à ce que $d\vec{S}$ et \vec{u} soient de même sens. En considérant que le champ magnétique est constant sur cette surface, exprimer son flux $d\phi$ en fonction de μ_0 , i_1 , i_2 , r , h et dr .
3. Soit la surface plane S , de longueur h , délimitée par C_1 et C_2 . Pour tout point M sur cette surface, on a donc $a \leq r \leq D-a$. Montrer que le flux ϕ du champ magnétique à travers S s'écrit : $\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left((i_1 - i_2) \ln \left(\frac{D-a}{a} \right) + i_1 \ln \left(\frac{D+a}{2D-a} \right) \right)$.
4. Simplifier l'expression de ϕ sachant que $a \ll D$. On utilisera cette expression dans la suite de l'exercice.
5. On considère la maille formée par C_1 , C_2 et les conducteurs qui les relient. Représenter le schéma électrique équivalent et déterminer une relation entre R , i_1 , i_2 et ϕ .
6. On pose, en notation complexe, $i_1(t) = \underline{I}_1 e^{j\omega t}$, $i_2(t) = \underline{I}_2 e^{j\omega t}$ et $\phi(t) = \underline{\phi}_0 e^{j\omega t}$. Exprimer $\underline{\phi}_0$ en fonction, entre autres, de \underline{I}_1 et \underline{I}_2 puis montrer que :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} \text{ où } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

7. Avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\frac{R}{h} = 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m}$ et $D = 10a$, calculer $\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|$ ainsi que le déphasage φ de i_2 par rapport à i_1 dans les 2 cas suivants :
 - a. $\omega \gg \omega_1$ et $\omega \gg \omega_2$
 - b. $\omega = 2000\pi \text{ rad/s}$

SOLUTIONS

*Exercice 1. Inductances propre et mutuelle

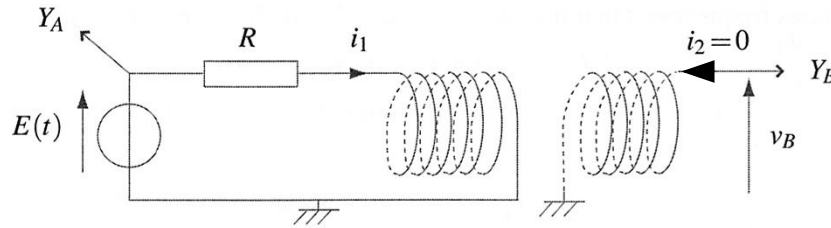


1. Cas (a) : vecteurs surfaces $\vec{S}_1 = S_1 \vec{u}_z$ et $\vec{S}_2 = S_2 \vec{u}_z$. Les champs magnétiques créés par chaque bobine sont orientés selon \vec{u}_z (pour les points qui sont sur l'axe). Ils ne sont pas uniformes mais leur composante selon \vec{u}_z est positive. Le flux magnétique mutuel s'écrit : $\Phi_{1/2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot dS_2 \vec{u}_z > 0$. Par définition, $\Phi_{1/2} = M i_1 > 0$. Comme $i_1 > 0$, alors $\boxed{M > 0}$.
- Cas (b) : vecteurs surfaces $\vec{S}_1 = S_1 \vec{u}_z$ et $\vec{S}_2 = -S_2 \vec{u}_z$. Le champ magnétique \vec{B}_1 n'est pas uniforme mais sa composante selon \vec{u}_z est positive. Le flux magnétique mutuel s'écrit : $\Phi_{1/2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = -\iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot dS_2 \vec{u}_z < 0$. Par définition, $\Phi_{1/2} = M i_1 < 0$. Comme $i_1 > 0$, alors $\boxed{M < 0}$.
- Cas (c) : les champs magnétiques et les vecteurs surfaces sont orthogonaux : $\Phi_{1/2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = 0$ donc $\boxed{M = 0}$
2. On suppose que la bobine d'axe (Oz) est assez longue pour l'assimiler à un solénoïde infini (on néglige les effets de bord). La bobine parcourue par un courant i crée un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{u}_z$.
- Flux propre à travers une spire : $\varphi_p = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S = \mu_0 \frac{N}{l} i S$
- Flux propre à travers les N spires : $\Phi_p = N \varphi_p = \mu_0 \frac{N^2}{l} i S$ et $\Phi_p = L i$

L'inductance propre est : $\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S}$

*Exercice 2. Mesure d'une inductance mutuelle

1. $\boxed{r \ll R}$
2. Schéma du montage :



3. Bobine 1 : Flux total : $\Phi_1(t) = Li_1(t) + Mi_2(t)$ et $i_2(t) = 0$

Loi de Faraday : $e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L\frac{di_1}{dt}$

- Bobine 2 : Flux total : $\Phi_2(t) = Li_2(t) + Mi_1(t)$ et $i_2(t) = 0$

Loi de Faraday : $e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$

- Équations électriques : $E(t) = Ri_1(t) - e_1(t) \Leftrightarrow E(t) = Ri_1(t) + L\frac{di_1}{dt} \quad (1)$

$$v_B(t) = -e_2(t) \Leftrightarrow v_B(t) = M\frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

4. Sur chaque demi-période, $v_B(t) = cste$ d'où $\frac{di_1}{dt} = cste' = \frac{v_B}{M}$

On dérive la relation (1) : $\frac{dE(t)}{dt} = R\frac{di_1(t)}{dt} = R\frac{v_B}{M}$

Pour la 1^{ère} demi-période : $\frac{2\Delta e}{T} = R\frac{v_{B1}}{M}$ et pour la 2^{ème} demi-période :

$-\frac{2\Delta e}{T} = R\frac{v_{B2}}{M}$. En soustrayant ces deux relations : $\frac{4\Delta e}{T} = R\frac{(v_{B1} - v_{B2})}{M} = \frac{RA}{M}$

Inductance mutuelle : $M = \frac{RAT}{4\Delta e}$

On lit $\Delta e = 1,4 \text{ V}$ et $T = 1,0 \text{ ms}$

$d \text{ (cm)}$	4	5	6	7	8	10	12	16	20
$A \text{ (mV)}$	43	33	26	21,5	17	11,5	8	4,2	2,4
$M \text{ (mH)}$	0,77	0,59	0,46	0,38	0,30	0,21	0,14	0,075	0,043

Plus les bobines sont éloignées, plus l'inductance mutuelle diminue.

Exercice 3. Table à induction

2. $\frac{I_2}{I_1} = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$ 3. $\underline{Z}_e = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$ 4. $\left|\frac{I_2}{I_1}\right| = 8$ et $|\underline{Z}_e| = 2 \Omega$

Exercice 4. Quand peut-on négliger l'auto-induction?

1. $\tau \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{B_0 S \omega}{R} \sin(\omega t)$ $\tau = \frac{L}{R}$ 2. $i_0 = \frac{B_0 S \omega}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$ 3. $\frac{e_L}{e_{ext}} = \left(1 + \left(\frac{1}{\tau\omega}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

*Exercice 5. Écrantage d'un champ magnétique

1. a. Pour un solénoïde infini :
$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 n_1 i \vec{u}_z & \text{pour } r < r_1 \\ \vec{0} & \text{pour } r > r_1 \end{cases}$$

b. Le flux propre de \vec{B}_1 à travers les N_1 spires de Σ_1 est

$$\Phi_1 = N_1 \varphi_p = N_1 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = N_1 \mu_0 n_1 i S_1 \quad \text{soit} \quad \Phi_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} \pi r_1^2 i \quad \text{et} \quad \Phi_1 = Li \quad \text{donc}$$

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} \pi r_1^2$$

De même, on montre que
$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{L} \pi r_2^2 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

c. Le flux mutuel de \vec{B}_1 à travers les N_2 spires de Σ_2 est

$$\Phi_{1/2} = N_2 \varphi_{1/2} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = N_2 \mu_0 n_1 i S_2 \quad \text{soit} \quad \Phi_{1/2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2 i \quad \text{et} \quad \Phi_{1/2} = Mi$$

donc
$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2$$

2. a. Explication physique : Le courant $i_1(t)$ variable crée un champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ variable. Le circuit Σ_2 est fixe dans $\vec{B}_1(t)$ variable : il est le siège d'une fem induite variable

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_{1/2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad \text{Le circuit étant fermé, un courant induit } i_2(t) \text{ peut}$$

circuler : il est variable et crée un champ magnétique $\vec{B}_2(t)$ variable. Le circuit Σ_2 est fixe dans $\vec{B}_2(t)$ variable : il est le siège d'une fem auto-induite variable

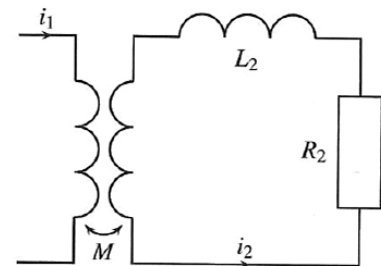
$$e'_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

➤ Équation électrique sur le circuit Σ_2 : $0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$

➤ En régime sinusoïdal à la pulsation ω : $(R_2 + jL_2\omega)i_2 + jM\omega i_1 = 0$

$$i_2 = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} i_1 = -\frac{1}{R_2} \frac{jM\omega}{1 + j\frac{L_2}{R_2}\omega} i_1 = -\frac{M}{L_2} \frac{j\frac{L_2}{R_2}\omega}{1 + j\frac{L_2}{R_2}\omega} i_1$$

$$\boxed{i_2 = K \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} i_1} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_c = \frac{R_2}{L_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{K = -\frac{M}{L_2} = -\frac{N_1}{N_2}}$$



- b. Le champ magnétique total \vec{B}_2 est créé par i_1 et par i_2 $\vec{B}_2 = \mu_0(n_1 i_1 + n_2 i_2) \vec{u}_z$

En régime harmonique : $\underline{B}_2 = \frac{\mu_0}{L}(N_1 i_1 + N_2 i_2) = \frac{\mu_0}{L} \left(N_1 + N_2 K \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \right) i_1$

$$\underline{B}_2 = \frac{\mu_0}{L} N_1 \left(1 - \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \right) i_1 \text{ soit } \underline{B}_2 = \frac{\mu_0}{L} N_1 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} i_1$$

Quand $\omega \gg \omega_c$, $\underline{B}_2 \rightarrow 0$. D'après la loi de Lenz, le circuit Σ_2 réagit par induction en créant un champ magnétique qui s'oppose à celui imposé par Σ_1 .

c. A.N. : $\omega_c = 4,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

Pour $\omega = 2\pi f = 6,9 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ et $|i_1| = I_0 = 1,0 \text{ A}$:

$$i_2 = |i_2| = |K| \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} |i_1| = 1,4 \text{ A}, \quad B_2 = |\underline{B}_2| = \frac{\mu_0}{L} N_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} |i_1| = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$B_1 = |\underline{B}_1| = \mu_0 n_1 |i_1| = \mu_0 \frac{N_1}{L} |i_1| = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ T} \text{ et } \frac{B_1}{B_2} = 17$$

Exercice 6. Puissance d'une plaque à induction

1. $di(t) = \frac{h\gamma B_0 \omega}{2} r dr \sin(\omega t)$ 4. $P = 970 \text{ W}$

*Exercice 7. Intensité dans 3 conducteurs parallèles

1. Le champ résultant \vec{B}_M au point M est la somme des trois champs créés en M par les trois conducteurs. Celui créé par C_1 est orienté selon \vec{u} et ceux créés par C_2 et C_3 sont orientés selon $-\vec{u}$. Les distances entre M et C_1 , respectivement C_2 et C_3 sont : r , $D - r$ et $2D - r$.

On a donc $\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D - r} - \frac{i_3}{2D - r} \right) \vec{u}$

2. Vecteur surface élémentaire : $d\vec{S} = h dr \vec{u}$

Flux élémentaire : $d\phi = \vec{B}_M d\vec{S} = h dr \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D - r} - \frac{i_3}{2D - r} \right)$ et $i_1 = i_3$ donc

$$d\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D - r} - \frac{i_1}{2D - r} \right) dr$$

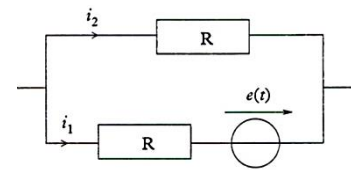
3. Intégration sur la surface : $\phi = \iint_S d\phi = \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D-r} - \frac{i_1}{2D-r} \right) dr$

$$\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left(i_1 \ln \left(\frac{D-a}{a} \right) + i_2 \ln \left(\frac{a}{D-a} \right) + i_1 \ln \left(\frac{D+a}{2D-a} \right) \right)$$

$$\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left((i_1 - i_2) \ln \left(\frac{D-a}{a} \right) + i_1 \ln \left(\frac{D+a}{2D-a} \right) \right)$$

4. Avec $a \ll D$, $\phi \approx \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left((i_1 - i_2) \ln \left(\frac{D}{a} \right) - i_1 \ln(2) \right)$

5. Chaque conducteur a une résistance R et l'induction crée une fem $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$, orientée dans le sens correspondant au sens positif de la surface S .



Loi des mailles : $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -Ri_2 + Ri_1$

6. D'après l'expression approchée de ϕ , en notation complexe :

$$\phi_0 = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left((\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \ln \left(\frac{D}{a} \right) - \underline{I}_1 \ln(2) \right)$$

En reportant cette expression dans la loi des mailles :

$$-j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left((\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \ln \left(\frac{D}{a} \right) - \underline{I}_1 \ln(2) \right) = -R\underline{I}_2 + R\underline{I}_1$$

$$\left(R + j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{a} \right) \right) \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \left(R + j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{2a} \right) \right)$$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1 + j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi R} \ln \left(\frac{D}{2a} \right)}{1 + j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi R} \ln \left(\frac{D}{a} \right)} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi R}{\mu_0 h \ln \left(\frac{D}{a} \right)} \text{ et } \omega_2 = \frac{2\pi R}{\mu_0 h \ln \left(\frac{D}{2a} \right)}$$

7. $\omega_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \ln(10)} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ $\omega_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \ln(5)} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

a. $\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \approx \frac{j \frac{\omega}{\omega_2}}{j \frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ d'où $\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = 0,7$ et $\varphi = 0$

b. $\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2}} = 0,74$ et $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) = -0,13 \text{ rad} = -7,2^\circ$