Programme de colle, semaine 4

Complexes (en entier) + début des applications :

- Nous avons continué le cours sur les complexes en définissant les racines n-ièmes de l'unité et montré que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. Nous avons montré qu'il y avait exactement n racines n-ièmes de l'unité et vu leur placement sur le cercle unité.
- Nous avons alors démontré différentes propriétés (somme des racines de l'unité nulle, application à la résolution de $z^n = z_0^n$ et de $z^n = a$). Nous avons alors vu comment trouver les racines carrées d'un complexe sous forme algébrique (la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe est **absolument interdite** !).
- Nous avons vu comment résoudre des équations de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Nous avons démontré l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ (avec le cas d'égalité).
- Nous avons continué avec l'application des complexes à la géométrie. Nous avons démontré l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ (avec le cas d'égalité). Nous avons vu les équations de cercle (et de disque). Nous avons vu comment le complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ pouvait nous aider à comparer les distances $||\vec{AC}||$ et $||\vec{AB}||$ et surtout l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$. Nous avons vu des applications (traduction de l'alignement, de l'orthogonalité, etc.). Enfin, nous avons terminé par l'étude des similitudes directes (translations, rotations, homothéties et le cas général).

- Nous avons défini les fonctions (ou applications) et donné un peu de vocabulaire (ensemble de départ, d'arrivée, image, antécédent, application identité). Nous avons également défini les restrictions et les prolongements de fonctions.
- Nous avons ensuite étudié l'opération de composition (loi $\circ$) (attention aux ensembles de départ et d'arrivée des fonctions !). Nous avons montré que la loi $\circ$ est associative et défini la composée n-ième pour $n \in \mathbb{N}$ (f^n) pour $f : X \to X$.
- Nous avons ensuite étudié les injections et les surjections. Définitions, méthodes de démonstrations et propriétés sur les compositions de fonctions.
- Nous avons alors défini les fonctions bijectives et les fonctions inversibles et montré que l'on avait équivalence entre les deux. Nous avons alors montré que si f était inversible, sa réciproque est unique, et que $(f^{-1})^{-1} = f$ ainsi que le calcul de la réciproque de $g \circ f$ (si g et f sont bijectives). Nous avons enfin vu comment rechercher la réciproque d'une fonction (étude de l'équation $f(x) = y$) et défini ce qu'était une involution.

Remarques sur le programme : nous n'avons pas encore vu le théorème de la bijection continue. Nous n'avons traité que deux exercices sur les applications (nous ferons le TD mercredi), merci d'interroger en priorité sur les complexes. Nous n'avons pas traité les ensembles, ni les images directes et réciproques.

Compétences :

— Déterminer les racines n-ième d'un complexe a.
— Résoudre une équation de degré 2 à coefficients complexes.
— Traduire à l'aide des complexes des propriétés géométriques telles que l'orthogonalité, le parallélisme, la distance entre deux points, etc.
— Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe à partir de son équation et réciproquement, savoir déterminer la forme d'une similitude directe à partir de son centre, rapport et angle.
— Bien définir les variables à utiliser avant de les manipuler (par exemple pour montrer la surjectivité, commencer par fixer y dans l'ensemble d'arrivée de la fonction ou pour l'injectivité, commencer par fixer x_1 et x_2 dans l'ensemble de départ de la fonction tels que $f(x_1) = f(x_2)$).
— Savoir poser les différentes méthodes de démonstration pour montrer l'injectivité d'une fonction (directe, par la contraposée).
— Savoir étudier la surjectivité d'une fonction (en résolvant $f(x) = y$ avec y dans l'ensemble d'arrivée d'inconnue x à trouver dans l'ensemble de départ ou en montrant que cette équation n'a pas de solution).

Questions de cours :

1. Étudier (déterminer le centre, rapport, angle, mettre sous forme réduite ($z \mapsto ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$) une similitude directe $z \mapsto az+b$ (valeurs choisies par le colleur).
2. Donner la définition d'une fonction injective, d'une fonction surjective, d'une fonction bijective et donner des exemples de telles fonctions.
3. Montrer que si f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, alors f est injective.
4. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective et que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective et que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Donner la définition d'une fonction inversible et démontrer que si une fonction est inversible, alors elle est bijective et son inverse est unique.
7. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont inversibles, alors $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 4 : 25. TD 5 : 4.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne !) :

- 1er du groupe : TD4 : 15.
- 2ieme du groupe : TD5 : 7.
- 3ieme du groupe : TD5 : 10.

Prochain programme : applications en entier (et début des fonctions usuelles).

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 15 :

- Commencer par vérifier que $z=1$ n'est pas solution pour pouvoir diviser par $1-z$ et transformer l'équation en $Z^n=1$ (avec Z qui dépend de z) pour pouvoir exprimer Z en fonction des racines n-ièmes de l'unité.
- Inverser l'expression $\dfrac{1+z}{1-z}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ en $z=\dots$ (on pourra tout multiplier par $1-z$ et isoler le z).
- Factoriser le quotient par l'arc moitié au numérateur et au dénominateur. On pourra normalement faire apparaitre la fonction tangente dans l'expression des résultats.

Exo 7 :

- Vous devriez trouver un contre exemple simple pour l'injectivité.
- Pour la surjectivité, il faut essayer de transformer le système $\left\{\begin{array}{l} xy=a \\ x+y=b \end{array}\right.$ en équation de degré 2.
- Discuter selon le signe du discriminant l'existence de solutions et en déduire que f n'est pas surjective.
- Dans le cas complexe, procéder de même sauf que cette fois, on sait résoudre les équations de degré 2 !

Exo 10 :

- Prouver que l'exponentielle ne s'annule pas en démontrant que $\forall z\in\mathbb{C},\ |e^z|\neq 0$.
- Reprendre le cours pour la résolution de $e^z=Z$ (on mettra Z sous forme exponentielle et z sous forme algébrique).
- Pour l'injectivité, on pourra chercher un contre exemple simple à l'aide des solutions précédentes.