Programme de colle, semaine 21

Séries :

— Nous avons défini la série $\sum u_n$ comme la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons dit que la série est convergente (resp. divergente) si la suite des sommes partielles est convergente (resp. divergente). Dans le cas où la série converge, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite des sommes partielles et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n.

— Nous avons montré qu'une série à termes complexes est convergente ssi les séries de terme général $\text{Re}(u_n)$ et $\text{Im}(u_n)$ sont convergentes. Nous avons également vu que la nature (étude de la convergence/divergence) d'une série ne dépend pas des premiers termes de la série. Nous avons montré que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

— Nous avons montré que $\sum u_n$ converge implique que $u_n \to 0$ (réciproque fausse). Si $u_n \not\to 0$, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement. Nous avons également étudié les séries géométriques (convergence ssi la raison est en module strictement plus petite que 1). Nous avons également vu le lien suite/série : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, ce qui permet de voir les suites comme des séries ou les séries comme des suites.

— Nous avons étudié les SATPs et les différents résultats permettant d'étudier leur nature à l'aide d'un équivalent / une domination.

— Nous avons ensuite étudié l'absolue convergence. Nous avons démontré qu'une série absolument convergente était convergente. Nous avons démontré le critère des séries alternées afin de donner des exemples de séries convergentes mais non absolument convergentes (semi-convergentes).

— Nous avons alors vu la comparaison série/intégrale ainsi que son utilisation pour obtenir des équivalents de sommes partielles (ou de restes de séries convergentes). Nous avons alors montré que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. Nous avons vu sur des exemples comment utiliser cette méthode pour trouver des équivalents de sommes partielles (dans le cas où la série diverge).

— Nous avons terminé le chapitre par les formules de Taylor (Égalité de Taylor Reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange) et l'application au calcul de $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ pour $z \in \mathbb{R}$.

Remarques sur le programme : Tous les théorèmes de sommation par paquets, réarrangement des termes, de sommation des relations de comparaisons sont hors programme.

Compétences :

— Déterminer la nature d'une SATP à l'aide d'un équivalent du terme général et en le comparant à une série de référence (Riemann ou géométrique). En particulier, quand on pense que la série va converger, montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (ou $o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$) et quand on pense que la série va diverger, montrer que $\frac{1}{n} = o(u_n)$.

— Utiliser l'absolue convergence ou le théorème des séries alternées pour étudier les séries qui ne sont pas des SATPs.

— Si aucune des méthodes précédentes ne fonctionnent, faire un développement asymptotique de u_n jusqu'à un terme de signe constant ou absolument convergent.

— Utiliser une comparaison série/intégrale pour étudier une série $\sum f(n)$ avec f monotone (et en déduire éventuellement un équivalent des sommes partielles en cas de divergence).

Questions de cours :

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ convergent en utilisant les critères de comparaisons des SATPS en comparant avec des séries de Riemann divergente/convergente.
2. Énoncer le théorème des séries alternées et démontrer la première partie (on ne montrera pas la majoration/le signe du reste mais on l'énoncera).
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente et expliquer en quoi cet exemple illustre le fait que l'on a besoin de l'hypothèse du signe constant pour avoir $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature si $u_n \sim v_n$.
4. Utiliser une comparaison série/intégrale (en refaisant la preuve appliquée à $f(t)=\dfrac{1}{t}$ sur $[1,n]$) pour montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
5. Citer (pas de preuve) la formule de Taylor Reste Intégral, l'inégalité de Taylor Lagrange et le fait que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.
6. Montrer de deux manières (en utilisant la caractérisation et en l'écrivant comme un espace vectoriel engendré) que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer que si $(F_i)_{i\in I}$ et une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors $\cap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD23 : 1,2. N'hésitez pas si vous avez un peu de temps à regarder les exercices que ceux qui n'ont pas de colle doivent chercher.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD22 : 11.
- 2ieme du groupe : TD22 : 12 et nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.
- 3ieme du groupe : TD22 : 13.

Prochain programme : espaces vectoriels

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

TD22 : 11

- Q1 : cf cours.
- La comparaison série/intégrale vous donnera normalement directement que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$. Pour la monotonie, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Toujours pour la monotonie, on pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$ en la dérivant pour trouver ses variations/son signe. On pourra regrouper les logarithmes pour trouver sa limite en l'infini.
- Une fois que (u_n) converge, on pourra poser γ sa limite pour obtenir le résultat demandé.
- Pour justifier que la limite de H'_n existe, on pourra utiliser les séries alternées.
- Pour trouver la valeur, montrer en séparant les indices pairs/impairs de la somme que $H'_{2n} = H_{2n} - H_n$.
- Utiliser ensuite le résultat montré sur $H_{2n} - H_n$ pour obtenir $H'_{2n} = \ln(2) + o(1)$.

TD22 : 12

- Je sais que j'ai corrigé très très vite cet exercice donc c'est pour cela que je le donne à rédiger.
- Pour la comparaison/série intégrale, bien introduire la fonction $f(t) = \dfrac{a}{a^2+t^2}$.
- Utiliser la comparaison pour trouver un encadrement de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2+k^2}$ et ensuite utiliser le théorème des gendarmes pour trouver la limite quand a tend vers l'infini de cette quantité.
- On remarquera que si on échange les limites, on obtient 0 comme limite.
- Pour la seconde somme, trouver un équivalent en remplaçant les coefficients binomiaux par des factorielles (revenir à la définition) et utiliser la formule de Stirling. On utilisera alors le critère de comparaison des SATPs.

TD22 : 13

- Pour la Q1, justifier que (u_n) est croissante àpcr puis justifier que (u_n) ne peut pas tendre vers 0. *On rappelle que* (u_n) *est strictement positive.*
- Pour la Q2, utiliser la définition de la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec un $\varepsilon > 0$ bien choisi.
- Pour la deuxième partie de Q2, faire la preuve par récurrence (initialisation à $n = N$).
- Pour la Q3, chercher des séries simples (séries de Riemann par exemple).