8. Équations différentielles linéaires

Exercice 1. (m) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' + 2y = x^2 - x + 2$.
2) $y' - y = \cos(x)$.
3) $y' + y = \sin(2x)$.
4) $y' - xy = x^3$.
5) $y' + \sin(x)y = \sin(2x)$.
6) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.
7) $(1+x^2)y' - xy = 0$.
8) $y' + \tan(x)y = \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

Exercice 2. (m) Pour chacune des équations différentielles suivantes, écrire la solution qui passe par le point M et tracer sommairement le graphe de la fonction :

1) $y' + 2xy = 0$, $M = (0, 1)$.
2) $y' + y\tan(x) = \sin(x)\cos(x)$, $M = \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

Exercice 3. (m) Résoudre l'équation différentielle $y' - \ln(x)y = x^x$.

Exercice 4. (m) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 3y' + 4y = 3e^{2x}$.
2) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.
3) $y'' + y' = 3e^{-x}$.
4) $y'' + y' + y = 2e^{-3x}$.
5) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} + e^{2x}$.
6) $y'' + y' + 2y = 8\sin(2x)$.
7) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + 3\cos(x)$.
8) $y'' - 2y' + 5y = \text{ch}(2x)$.
9) $y'' + y' - 6y = 4e^{-x}\cos(x)$.

Exercice 5. (m) Résoudre les équations différentielles suivantes, avec condition initiale.

1) $y'' + 9y = \cos(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
2) $y'' - 3y' + 2y = e^{-\frac{x}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
3) $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 6. (i) Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 7. (i) Déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 8. (m) On cherche les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$. On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction f existe.

1) Justifier que f est deux fois dérivable, puis pour $x > 0$, exprimer $f''(x)$ en fonction de $f(x)$.

2) On pose $g : t \mapsto f(e^t)$. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable et déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par g. En déduire l'expression de f.

3) Quelles sont finalement les fonctions f solutions de l'équation de départ ?

Exercice 9. (m) On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$.

1) Soit y solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On pose $z : x \mapsto xy(x)$. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par z.

2) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. (i) Résoudre $(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$ à l'aide de la fonction $z : x \mapsto y'(x) + y(x)$.

Exercice 11. (m) Soient $a, b, \mu \in \mathbb{R}$. Discuter l'existence de solutions non nulles y de l'équation différentielle $y'' = \mu y$ vérifiant $y(a) = y(b) = 0$.

Exercice 12. (m) On considère l'équation différentielle $xy' - (1+x)y = -x^2$.

1) Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle.

Exercice 13. (m) Soit l'équation différentielle $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$.

1) Trouver une solution particulière polynômiale.

2) Résoudre l'équation sans second membre sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

3) Procéder au recollement des solutions pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 14. (m) Résoudre et raccorder éventuellement :

1) $xy' - 2y = x^4$.

2) $(1-x^2)y' + xy = 1$.

3) $\sin(x)y' = \cos(x)y + 2x\sin^2(x)$.

Exercice 15. (m) Résoudre $|x|y' - 2x^2y = x^4$ sur $\mathbb{R}$.