À chercher pour lundi 10/10/2022, corrigé

TD 5 :

Exercice 4. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.

1) f n'est pas surjective. En effet, il n'existe pas de $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = 2$ par exemple (puisque $x^2 = 2$ implique $x = \pm\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$). f est par contre injective. En effet, si l'on prend $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors $x_1^2 = x_2^2$, ce qui entraine $x_1 = \pm x_2$. Puisque x_1 et x_2 sont tous les deux positifs, on a donc $x_1 = x_2$, ce qui entraine que f est injective.

2) Supposons par l'absurde qu'il existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est bijective, elle est en particulier surjective. Par théorème du cours, on a alors f surjective (puisque $f \circ g$ est surjective). Ceci est absurde car on a montré à la première question que f n'était pas surjective.

On peut par contre construire une fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. En effet, on va définir h de la manière suivante :

- Si $n \in \mathbb{N}$ est un carré (c'est à dire s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = n$), on pose $h(n) = m$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré, on pose $h(n) = 0$.

On a bien défini une fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} (h \circ f)(n) & = & h(f(n)) \\ & = & h(n^2) \\ & = & n \qquad \text{(par construction)} \\ & = & \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n). \end{array}$$

Ceci entraine que $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. On a donc construit une fonction h comme demandé.

Exercice 7. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x+y) \end{array} \right.$.

1) Commençons par chercher si f est surjective. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Essayons de résoudre le système $f(x,y) = (z_1, z_2)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = z_1 \\ x + y = z_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(z_2 - x) = z_1 \\ y = z_2 - x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - xz_2 + z_1 = 0 \\ y = z_2 - x \end{array} \right. .$$

Or, le discriminant de l'équation en x est $z_2^2 - 4z_1$. Il est alors direct qu'un couple tel que ce discriminant est strictement négatif (par exemple $(1,0)$) n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par f.

f n'est donc pas surjective.

Montrons à présent que f n'est pas injective. Puisque dans l'équation précédente, x, dans le cas où le discriminant est strictement positif, peut prendre deux valeurs possibles (deux solutions réelles distinctes). On a donc de bonnes raisons de penser que f n'est pas injective. Cherchons par exemple dans un cas simple où par exemple $z_1 = -1$ et $z_2 = 0$. On a alors $f(-1,1) = f(1,-1) = (-1,0)$ et $(-1,1) \neq (1,-1)$. f n'est donc pas injective.

2) $\mathbb{R}$ étant un sous ensemble de $\mathbb{C}$ et f n'était pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle ne l'est pas non plus de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Par contre à présent, f est surjective. En effet, si on reprend le système utilisé en 1),

le discriminant $\Delta = z_2^2 - 4z_1$ admet toujours une racine carrée dans $\mathbb{C}$. Notons δ une de ses racines carrées. On remarque alors que le système admet par exemple comme solution

$$\begin{cases} x = \dfrac{z_2 + \delta}{2} \\ y = \dfrac{z_2 - \delta}{2}. \end{cases}$$

Vérifions que le couple (x, y) ainsi trouvé vérifie bien $f(x, y) = (z_1, z_2)$. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{z_2 + \delta}{2}, \frac{z_2 - \delta}{2}\right) &= \left(\frac{z_2^2 - \delta^2}{4}, z_2\right) \\ &= \left(\frac{z_2^2 - (z_2^2 - 4z_1)}{4}, z_2\right) \\ &= (z_1, z_2) \end{aligned}$$

f est donc surjective de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 10. Tout d'abord f est bien définie car $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$ (en effet, on a $e^z \times e^{-z} = 1 \neq 0$). L'exponentielle est donc bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

Pour la surjectivité, on fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et on étudie l'équation $e^z = a$. Si on écrit $a = \rho_a e^{i\theta_a}$ avec $\rho_a > 0$ et $\theta_a \in \mathbb{R}$ (possible car a est non nul) et que l'on cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^z = a \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \rho_a e^{i\theta_a}.$$

Puisque $e^x > 0$ et $\rho_a > 0$, on peut identifier modules et arguments. On a donc :

$$e^z = a \Leftrightarrow e^x = \rho_a \text{ et } y \equiv \theta_a\ [2\pi].$$

On voit donc que $z = \ln(\rho_a) + i\theta_a \in \mathbb{C}$ est un antécédent de a. a ayant été pris quelconque dans $\mathbb{C}^*$, on a bien l'exponentielle surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

On a trouvé plusieurs solutions donc l'exponentielle n'est pas injective. Par exemple, $e^0 = e^{2i\pi} = 1$.