DEVOIR SURVEILLÉ 4 (1 HEURE)

Conseils de rédaction (À LIRE !)

- Le sujet comporte **2 pages**.
- Les **schémas** sont indispensables ! Les raisonnements doivent être **méthodiques** !
- Soyez attentif à **l'énoncé** et aux **notations** utilisées : adaptez-vous !
- La **calculatrice** est autorisée.

Exercice 1 – Saut et plongeon (≈ 35/40 mn)

SITUATION 1 : Saut dans l'eau

Un baigneur assimilé à un point *M*, de masse $m = 80\text{ kg}$, saute d'un plongeoir situé à une hauteur $h = 10\text{ m}$ au-dessus de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur (on prendra $g = 9{,}8\text{ m.s}^{-2}$) durant la chute. On note (*Oz*), l'axe vertical descendant, l'origine *O* étant le point de saut.

1. Déterminer les expressions de la vitesse $v(t)$ et de la cote $z(t)$ du baigneur lorsqu'il est en chute libre dans l'air.
2. Déterminer la vitesse d'entrée dans l'eau, notée v_e, ainsi que le temps de chute noté t_c. Effectuer les applications numériques.

Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement. Il subit, en plus de la pesanteur :

- une force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -\lambda \vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse et $\lambda = 250$ USI) ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\dfrac{m}{d_h}\vec{g}$ ($d_h = 0{,}9$ est la densité du corps humain).

3. Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI du coefficient de frottement λ.
4. Établir l'équation différentielle d'ordre 1 à laquelle obéit la composante v_z de la vitesse selon (*Oz*). On posera $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$.
5. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme origine des temps l'instant où le baigneur entre dans l'eau.
6. Déterminer l'expression, en fonction de m, g, d_h et λ, de la vitesse limite v_L atteinte $(v_L < 0)$. Effectuer l'application numérique.
7. Exprimer la vitesse v_z en fonction de v_e, $|v_L|$ et t. Déterminer à quel instant t_1 le baigneur commence à remonter.
8. En prenant la surface de l'eau comme nouvelle origine de l'axe (*Oz*), exprimer $z(t)$. En déduire la profondeur maximale z_{max} pouvant être atteinte.
9. En fait, il suffit que le baigneur arrive au fond de la piscine avec une vitesse de l'ordre de $v_2 = 1\text{ m.s}^{-1}$ pour qu'il puisse se repousser avec ses pieds sans risque

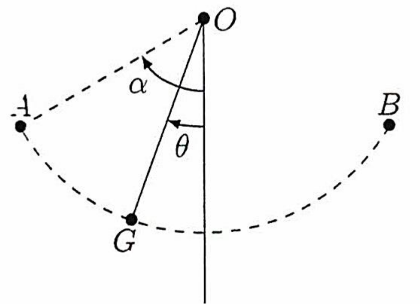
de blessure ; à quel instant t_2 atteint-il cette vitesse et quelle est la profondeur minimale du bassin ?

SITUATION 2 : Plongeon dans l'eau (à traiter après avoir répondu à l'exercice 2)

Le même baigneur décide maintenant d'effectuer un plongeon. On suppose qu'il entre dans l'eau avec un angle $\alpha = 60\ °$ par rapport à l'horizontale et une vitesse $v_0 = 8\ \text{m.s}^{-1}$. Les forces qui s'exercent sur lui sont les mêmes que précédemment mais le coefficient λ est divisé par deux en raison d'une meilleure pénétration dans l'eau. On repère le mouvement par les axes (Ox) (axe horizontal de même sens que $\overrightarrow{v_0}$) et (Oz) (vertical descendant comme précédemment) ; l'origine O est le point de pénétration dans l'eau.

10. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les projections des équations du mouvement sur (Ox) et (Oz).
11. En déduire les composantes de la vitesse dans l'eau en fonction du temps. Existe-t-il une vitesse limite ? Si oui, l'exprimer.
12. Le plongeur peut-il atteindre le fond de la piscine situé à 4 m ?

Exercice 2 – Tarzan et Jane (≈ 20/25 mn)



Tarzan, de masse $m = 80\ \text{kg}$, assimilé à son centre de gravité G, est accroché à une liane inextensible (et sans masse), fixée en O et de longueur $OG = L = 10\ \text{m}$. Sa position est repérée par l'angle θ et sa trajectoire est représentée en pointillés. Il part du point A, repéré par l'angle $\alpha = 30°$, sans vitesse initiale. Jane, de masse $m' = 50\ \text{kg}$, se trouve au point B, repéré par l'angle $\theta_B = -\alpha$. Le champ de pesanteur est $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$. Les frottements de l'air sont négligés. La liane utilisée par Tarzan est usée et ne pourra résister à une tension supérieure à 2,0 kN. Le but de l'exercice est de déterminer si Tarzan pourra retrouver Jane, et s'il pourra la ramener en A.

1. Représenter la base cylindrique sur le schéma.
2. Exprimer dans cette base les vecteurs position, vitesse et accélération de G.
3. Effectuer un bilan des forces et projeter le principe fondamental de la dynamique sur la base cylindrique, afin d'obtenir deux relations, l'une correspondant à l'équation du mouvement de Tarzan, l'autre renseignant sur la tension T de la liane.
4. Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ puis l'intégrer pour obtenir une relation liant $\dot{\theta}^2$, θ et les données de l'énoncé.
5. En déduire une expression de la tension de la corde en fonction de θ et des données de l'énoncé.
6. Effectuer les applications numériques nécessaires pour répondre aux questions constituant le but de l'exercice.