Devoir Surveillé 9, corrigé

PROBLÈME
Matrices de trace nulle

Question préliminaire : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme (S). On a alors $M = XY - YX$ avec $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(XY) - \mathrm{Tr}(YX).$$

Puisque $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, on a donc bien $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.

Partie I. Les matrices de diagonale nulle sont de la forme (S).

1) *Une somme directe.*

a) On a $\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{R})) = n$ (voir cours).

b) Soit $A \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. Puisque tous les coefficients diagonaux de M sont nuls, on a $A = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} a_{i,j}E_{i,j}$ où on note $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire ayant un 1 en position (i, j) et des 0 ailleurs. On a donc $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Vect}((E_{i,j})_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}}$. Réciproquement, il est clair que toutes les matrices $E_{i,j}$ pour $i \neq j$ sont à diagonale nulle et que si on effectue une combinaison linéaire de matrices à diagonale nulle, alors on obtient une matrice dont la diagonale est nulle. On a donc :

$$\mathcal{E}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}((E_{i,j})_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}}.$$

On a donc bien $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel (et c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Puisque la famille $((E_{i,j}))_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}}$ est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre. C'est donc une base de $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que :

$$\dim(\mathcal{E}_n(\mathbb{R})) = \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} 1 = \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1).$$

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, si on note $D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, on a $A = D + (A - D)$ avec $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $A - D \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

De plus, il est clair que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ (puisque la seule matrice diagonale qui a tous ses coefficients diagonaux nuls est la matrice nulle). On a donc bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. *On retrouve bien avec les calculs de dimension précédents que* $n^2 = n + n(n-1)$.

2)

a) Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda B + \mu C) & = & A(\lambda B + \mu C) - (\lambda B + \mu C)A \\ & = & \lambda AB + \mu AC - \lambda BA - \mu CA \\ & = & \lambda\varphi(B) + \mu\varphi(C). \end{array}$$

φ est donc bien une application linéaire.

b) *Calcul de* $\text{rg}(\varphi)$.

i) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$B \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow AB = BA.$$

Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a puisque A est diagonale :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = i \times b_{i,j}.$$

De la même façon, $(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = b_{i,j} \times j$. On a donc $(AB)_{i,j} = (BA)_{i,j} \Leftrightarrow i b_{i,j} = j b_{i,j}$. On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} AB = BA & \Leftrightarrow & \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (i-j) b_{i,j} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall i \neq j,\ b_{i,j} = 0 \\ & \Leftrightarrow & B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}). \end{array}$$

On a procédé par équivalence, ce qui entraine que $\ker(\varphi) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

ii) On va utiliser le théorème du rang (possible car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie n^2). On a donc :

$$n^2 = \text{rg}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \text{rg}(\varphi) + n$$

puisque $\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{R})) = n$. On en déduit que $\text{rg}(\varphi) = n^2 - n = n(n-1)$.

c) Soit $B \in \text{Im}(\varphi)$. Il existe alors $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \varphi(C) = AC - CA$. On a alors pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} b_{i,i} & = & (AC)_{i,i} - (CA)_{i,i} \\ & = & \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} c_{k,i} - \sum_{k=1}^{n} c_{i,k} a_{i,k} \\ & = & i \times c_{i,i} - c_{i,i} \times i \quad \text{(puisque la matrice } A \text{ est diagonale)} \\ & = & 0. \end{array}$$

On a donc bien tous les coefficients diagonaux de B nuls, d'où $\text{Im}(\varphi) \subset \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

d) On a montré une inclusion et d'après les questions 1.b et 2.b.ii, on a l'égalité des dimensions. On a donc $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que :

$$\forall B \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R}),\ \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /B = \varphi(M) = AM - MA.$$

e) Fixons $B \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = AM - MA$. Or, d'après la question 1.c, on peut écrire $M = D + N$ avec $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. On a donc :

$$M = \varphi(D + N) = \varphi(D) + \varphi(N) = \varphi(N)$$

puisque $D \in \ker(\varphi)$. On a donc l'antécédent voulu. Supposons que l'on ait $N_1, N_2 \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ tels que $M = \varphi(N_1) = \varphi(N_2)$. On a alors :

$$\varphi(N_1) - \varphi(N_2) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \varphi(N_1 - N_2) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

par linéarité de φ. On a donc $N_1 - N_2 \in \ker(\varphi) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Or, puisque $N_1 - N_2 \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ (car on a un espace vectoriel) et que la somme entre $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est directe d'après la question 2, on a $N_1 - N_2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, ce qui entraine $N_1 = N_2$. On a donc bien l'unicité de l'antécédent dans $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

Partie II. Caractérisation des homothéties.

3) Supposons $u = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Alors, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = \lambda x$ et la famille $(x, u(x))$ est donc liée.

4)

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a alors $(x, u(x))$ liée. Il existe donc une famille $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ non nulle telle que $ax + bu(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Si $b \neq 0$, on a alors $u(x) = -\dfrac{a}{b}x$ ce qui donne le λ_x voulu. Si $b = 0$, alors on a $a \neq 0$, ce qui donne $ax = 0_{\mathbb{R}^n}$. On a donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui donne $u(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ par linéarité de u donc $\lambda_x = 0$ convient.

b) Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on a d'après la question précédente $u(e_1 + e_i) = \lambda_{e_1+e_i}(e_1 + e_i)$ et par linéarité de u, on a aussi :

$$u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_{e_1} e_1 + \lambda_{e_i} e_i.$$

En identifiant ces deux expressions, on obtient $(\lambda_{e_1+e_i} - \lambda_{e_1})e_1 + (\lambda_{e_1+e_i} - \lambda_{e_i})e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par liberté de la famille (e_1, e_i), on en déduit que $\lambda_{e_1+e_i} = \lambda_{e_1}$ et $\lambda_{e_1+e_i} = \lambda_{e_i}$ ce qui prouve l'égalité demandée.

c) On a donc que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_{e_1} e_i$. On a donc u et $\lambda_{e_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ qui sont des applications linéaires égales sur une base de $\mathbb{R}^n$. Elles sont donc égales.

Partie III. Les matrices de trace nulle sont semblables aux matrices de diagonale nulle.

5) Si $M \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R})$, M est une matrice 1×1 de trace nulle. Elle est donc nulle et est donc en particulier à diagonale nulle. On a donc la propriété voulue avec $P = I_1$.

6)

a) On a dans ce cas $\mathrm{Tr}(M) = \lambda n$. Puisque M est de trace nulle, on a $\lambda = 0$ ce qui entraine $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. On a alors M qui est en particulier à diagonale nulle, donc la propriété est vraie pour $P = I_n$.

b) Par l'absurde, si pour tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, u(x))$ était liée, alors d'après la partie II, on aurait que u est une homothétie ce qui entrainerait $M = \lambda I_n$. Puisque l'on a exclu ce cas, on en déduit qu'il existe existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x_1, u(x_1))$ est libre. Si on pose $x_2 = u(x_1)$, on en déduit alors d'après le théorème de la base incomplète (puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie) qu'il existe $(x_3, \ldots, x_n)$ tels que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Puisque $u(x_1) = x_2$, la première colonne de M' est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de base, on a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u) = P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{can}} = P_1 M' P_1^{-1} \quad \text{car } P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{can}} = (P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{B}})^{-1}.$$

d)

i) Puisque M et M' sont semblables, on a $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M')$. On peut redétailler ce calcul :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(M) & = & \mathrm{Tr}(P_1 M' P_1^{-1}) \\ & = & \mathrm{Tr}(P_1^{-1} P_1 M') \\ & = & \mathrm{Tr}(M'). \end{array}$$

On a alors $\mathrm{Tr}(N) = 0 + \mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(M) = 0$ car M est de trace nulle. D'après $\mathcal{P}(n-1)$, on en déduit qu'il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}NQ \in \mathcal{E}_{n-1}(\mathbb{R})$.

ii) On pose la matrice bloc $P_2' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & Q^{-1} \end{array}\right)$. Par produits blocs, on a alors $P_2 P_2' = P_2' P_2 = I_n$. Ceci entraine que P_2 est inversible et que $P_2^{-1} = P_2'$.

iii) $P = P_1P_2$ est inversible comme produit de matrices inversibles. On a $P^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$. On en déduit, en utilisant l'associativité du produit matriciel et les produits blocs, que :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P_2^{-1}P_1^{-1}P_1M'P_1^{-1}P_1P_2 \\ &= P_2^{-1}M'P_2 \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & LQ \\ \hline Q^{-1}C & Q^{-1}NQ \end{array}\right). \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a $Q^{-1}NQ$ qui est à diagonale nulle ce qui entraine que $P^{-1}MP$ est aussi à diagonale nulle. On a donc terminé l'hérédité de la récurrence en montrant que M est semblable à une matrice à diagonale nulle, ce qui achève la récurrence.

Partie IV. La conclusion.

7) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PM'P^{-1}$ et il existe également $X', Y' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M' = X'Y' - Y'X'$. On a alors :

$$\begin{aligned} M = PM'P^{-1} &= P(X'Y' - Y'X')P^{-1} \\ &= PX'Y'P^{-1} - PY'X'P^{-1} \\ &= (PX'P^{-1}) \times (PY'P^{-1}) - (PY'P^{-1}) \times (PX'P^{-1}). \end{aligned}$$

On a donc bien M de la forme (S) en posant $X = PX'P^{-1}$ et $Y = PX'P^{-1}$.

8) Soit $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$. D'après la partie III, on sait alors que M est semblable à une matrice à diagonale nulle. Or, d'après la partie I, les matrices à diagonale nulle sont de la forme (S). Puisque d'après la question précédente, si une matrice est semblable à une matrice de la forme (S), c'est qu'elle est elle-même de la forme (S), alors on a bien M de la forme (S), ce qui termine le fait que les matrices de $\mathrm{T}_n^0(\mathbb{R})$ sont de la forme (S) (l'autre sens ayant été fait en question préliminaire).