14. Continuité, méthodologie

I. Étude locale

I.1. Limites

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I.

- On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$ si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ si :
$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I,\ f(x) \geq M.$$

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non majoré.

- On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$ si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a > 0 \ / \ \forall x \in [a, +\infty[\cap I,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si :
$$\forall M > 0,\ \exists a > 0 \ / \ \forall x \in [a, +\infty[\cap I,\ f(x) \geq M.$$

Exercice d'application 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les limites suivantes et leur négation :

1) $f(x) \underset{x \to -2}{\longrightarrow} 3$.
2) $f(x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} -\infty$.
3) $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. Alors, si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, l est unique. On note $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Alors, si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, on a $l = f(x_0)$. *Autrement dit, si f admet une limite en un point de son intervalle de définition, la limite est obligatoirement égale à la valeur de f en x_0.*

I.2. Limites à gauche et à droite

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I.

- On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures et on note $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}{\longrightarrow} l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta] \cap I,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures et on note $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} +\infty$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}{\longrightarrow} +\infty$ si :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta] \cap I,\ f(x) \geq M.$$

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I.

- On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures et on note $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}{\longrightarrow} l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in [x_0 - \eta, x_0[\cap I,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures et on note $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} +\infty$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}{\longrightarrow} +\infty$ si :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in [x_0 - \eta, x_0[\cap I,\ f(x) \geq M.$$

Proposition. Si elles existent, les limites à gauche et à droite de f en x_0 sont uniques et sont notées respectivement $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. Alors, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, f admet une limite à gauche et à droite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

m Ce résultat est en général utilisé pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en x_0 en montrant qu'elle admet des limites à gauche et à droite différentes.

Remarque : Assez souvent, les exercices faisant intervenir des limites à gauche et à droite font intervenir des parties entières. On se souviendra donc que :

- Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$.
- Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$.
- Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \lfloor x \rfloor = x_0$.

En particulier, si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor$ n'existe pas.

Exercice d'application 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lfloor -x \rfloor$ et $g(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

1) Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en x_0 ?

2) Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x)$. La fonction g admet-elle une limite en x_0 ?

3) Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existent et les déterminer.

I.3. Caractérisation séquentielle

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. Alors :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \ / \ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0,\ f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l.$$

m Ce théorème est principalement utilisé pour montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas en trouvant deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui tendent toutes les deux vers x_0 mais telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers des limites différentes.

Exercice d'application 3. Montrer que les limites suivantes n'existent pas :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos(x)$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan(x)$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \lfloor x \rfloor^2$.

I.4. Opérations sur les limites

Proposition. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_1$ et que $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_2$. Alors, s'il n'y a pas de forme indéterminée :
- $f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_1 + l_2$.
- $f(x) \times g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_1 \times l_2$.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{l_1}{l_2}$.

Proposition. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. Alors, si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} y_0$ et $g(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} l$, on a $g(f(x)) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.

I.5. Encadrements

Théorème. Des gendarmes. Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors, si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$ et $h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, on a $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.

m Ce théorème est utile pour montrer que des fonctions admettent une limite en les encadrant entre des fonctions qui tendent vers la même limite.

Exercice d'application 4. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin^2(x)}{x+1}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor \ln(x+2) \rfloor}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}$.

Théorème. D'encadrement. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$. Alors :

- $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
- $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Théorème. De passage à la limite dans les inégalités. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou au bord de I. On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_1$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l_2$. Alors, $l_1 \leq l_2$.

m On peut donc passer à la limite dans les inégalités larges. Attention cependant, le passage à la limite dans les inégalités transforme les inégalités strictes en inégalités larges (en reprenant les notations précédentes, on a pas $\forall x \in I,\ f(x) < g(x) \Rightarrow l_1 < l_2$ mais on a juste $l_1 \leq l_2$ (car $f(x) < g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ et on se ramène alors au théorème précédent)).

I.6. Cas des fonctions monotones

Théorème. De la limite monotone. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante.

- Si f est majorée, $\lim_{x \to b} f(x)$ existe et est finie.
- Si f n'est pas majorée, $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.
- Si f est minorée, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.
- Si f n'est pas minorée, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Proposition. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante majorée. Alors, $\lim_{x \to b} f(x) = l$ existe et est finie et :

- $\forall x \in]a, b[\,,\ f(x) \leq l$.
- Si f est strictement croissante, alors $\forall x \in]a, b[\,,\ f(x) < l$.

Remarque : Attention, les deux résultats précédents sont faux si l'intervalle de définition de f n'est pas ouvert (la limite pourrait ne pas exister).

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Alors, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent et sont finies et on a :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

On a un résultat similaire pour les fonctions décroissantes. Les limites à gauche et à droite existent aussi, seul change le sens des inégalités dans l'encadrement.

II. Continuité

II.1. Définition

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie. D'après la première partie, puisque $x_0 \in I$, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors cette limite est égale à $f(x_0)$.

On a donc f **continue en** x_0 **si et seulement si** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si $\forall x_0 \in I$, f est continue en x_0. On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

m D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a f continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers x_0, $f(u_n)$ tend vers $f(x_0)$. Pour montrer qu'une fonction est continue, il vaut mieux en général revenir à la définition plutôt que d'utiliser ce critère mais, par la contraposée, ce résultat permet de prouver qu'une fonction n'est pas continue en trouvant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers x_0 mais telle que $f(u_n)$ ne tend pas vers $f(x_0)$.

Exercice d'application 5. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

1) Montrer que si $x_0 \neq \frac{1}{2}$, f n'est pas continue en x_0. *On pourra séparer les cas $x_0 \in \mathbb{Q}$ et $x_0 \notin \mathbb{Q}$.*

2) Montrer que f est continue en $\frac{1}{2}$.

II.2. Continuité à gauche et à droite

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que :

- f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors, f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

m Ce résultat est utile quand il est plus facile de manipuler les limites à gauche et à droite (par exemple si la fonction f est monotone, car les limites à gauche et à droite existent toujours, ou si la fonction est composée de parties entières (car on connait alors les limites à gauche et à droite).

Exercice d'application 6. Étudier la continuité des deux fonctions suivantes en $x_0 \in \mathbb{R}$. *On séparera les cas $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*

1) $f(x) = x + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

2) $g(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

II.3. Prolongement par continuité

Proposition. Soit $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et $h :]b,c] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} l$ et $h(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} l$. Alors, la fonction $f : \left\{\begin{array}{cclc} [a,b] & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & g(x) & \text{si } x<b \\ x & \mapsto & l & \text{si } x=b \\ x & \mapsto & h(x) & \text{si } x>b \end{array}\right.$ est continue.

(m) Il suffit donc d'avoir les fonctions à gauche et à droite continues (en utilisant les théorèmes usuels) et d'avoir la même limite en b pour obtenir la fonction recollée continue.

Exercice d'application 7. Pour $a,b \in \mathbb{R}$, on pose $f : \left\{\begin{array}{cccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & a\cos(x)+x & \text{si } x<0 \\ x & \mapsto & e^x+b & \text{si } x\in[0,1] \\ x & \mapsto & \ln(x)+x^2 & \text{si } x>1 \end{array}\right.$. Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

II.4. Opérations sur les fonctions continues

Proposition. Soient $f,g : I \to \mathbb{R}$ continues en $x_0 \in I$. Alors, $f+g$, $f\times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en x_0 (à condition que $g(x_0)\neq 0$ dans le dernier cas).

Proposition. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f continue en $x_0 \in I$ et g continue en $f(x_0)$. Alors, $g\circ f$ est continue en x_0.

(m) La première proposition prouve qu'une somme/un produit/un quotient de fonctions continues sur le même domaine I est une fonction continue. Le second point permet d'affirmer qu'une composée de fonctions continues est continue (avec $f : I \to J$ continue et $g : J \to \mathbb{R}$ continue, **attention à bien avoir g continue sur un ensemble qui contient les valeurs que prend la fonction f !**). Quand on doit justifier qu'une fonction est continue, on écrit en général que c'est une somme/produit/quotient/composée de fonctions continues. Pour les valeurs où il reste une forme indéterminée, il faut réussir à simplifier cette forme indéterminée pour justifier la continuité.

Exercice d'application 8. Pour $x\neq 0$, on pose $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.

1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2) Déterminer la valeur que l'on doit poser pour $f(0)$ pour avoir f continue en 0.

II.5. Fonctions monotones

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit x_0 dans l'intérieur de I (c'est à dire $x_0 \in I$ et x_0 pas au bord de I). Alors, f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

(m) Une fonction monotone sur un intervalle I admet toujours des limites à gauche et à droite en toute valeur $x_0\in I$. L'encadrement $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ si f est croissante permet pour montrer la continuité de f en x_0 de ne montrer que l'égalité des limites à gauche et à droite en x_0, puisque l'encadrement donne alors que ces limites sont égales à $f(x_0)$, et donc que la fonction est continue à gauche et à droite en x_0, donc qu'elle est continue en x_0.

Exercice d'application 9. Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer en étudiant les limites à gauche et à droite en $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

III. Utilisation de la continuité

III.1. Lien avec la densité

III.2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème. TVI version 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors, il existe $c \in [a, b]$ / $f(c) = 0$.

Théorème. TVI version 2.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ (dans le cas où $f(a) \leq f(b)$, sinon c'est $[f(b), f(a)] \subset f([a, b])$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ continue. Alors, $f(I)$ est un intervalle.

m Le premier point du TVI permet d'affirmer que si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors elle atteint au moins toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (elle peut en atteindre plus). Le second point donne que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, ce qui rend compte du fait qu'une fonction continue ne peut pas « sauter » de valeurs. En particulier, une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas est de signe constant.

Exercice d'application 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = 1$. Démontrer que f est constante égale à 1 ou que f est constante égale à -1.

Exercice d'application 11. Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas. On suppose que pour tout $x \in I,\ |f(x)| = |g(x)|$. Montrer que $f = g$ ou que $f = -g$.

m Le théorème des valeurs intermédiaires est en général utilisé pour montrer qu'une fonction continue s'annule sans avoir à résoudre explicitement l'équation $f(x) = 0$ (puisqu'il suffit de justifier que f change de signe pour avoir un point d'annulation). Dès que l'on doit montrer qu'une fonction continue s'annule, c'est très souvent le TVI qu'il faut utiliser...

Exercice d'application 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{xto-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.

III.3. Extrema

Théorème. Des bornes atteintes. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f est bornée et elle atteint ses bornes. Elle admet donc un minimum et un maximum.

(m) Ce théorème permet d'affirmer qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Dès que l'on veut travailler avec les minima/maxima d'une fonction, c'est en général ce résultat qu'il faut utiliser, la difficulté étant de réussir à se ramener à un segment...

Exercice d'application 13. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice d'application 14. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

(m) Couplé avec le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que l'**image d'un segment par une fonction continue est un segment** (on a pour f continue, $f([a,b]) = [m, M]$ où $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$).

III.4. Théorème de la bijection continue

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **strictement monotone** et **continue** sur I. Alors, f est bijective de I dans $J = f(I)$ où J est un intervalle du même type que I, c'est à dire :

- Si f est strictement croissante :
  - si $I = [a, b]$, alors $J = [f(a), f(b)]$.
  - si $I =]a, b]$, alors $J =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$.
  - si $I = [a, b[$, alors $J = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
  - si $I =]a, b[$, alors $J =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
- Si f est strictement décroissante :
  - si $I = [a, b]$, alors $J = [f(b), f(a)]$.
  - si $I =]a, b]$, alors $J = [f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.
  - si $I = [a, b[$, alors $J =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$.
  - si $I =]a, b[$, alors $J =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.

Théorème. Régularité de la réciproque. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **strictement monotone** et **continue** sur I. Alors f est bijective de I dans $J = f(I)$ et f^{-1} est continue sur J.

Exercice d'application 15. Démontrer que :

1) $f : x \mapsto \ln(x) + x$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

2) $g : x \mapsto e^x - x$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans I avec I à déterminer.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) $f(x) \underset{x\to -2}{\longrightarrow} 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in [-2-\eta, -2+\eta],\ |f(x)-3| \leq \varepsilon$. La négation s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0\ /\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in [-2-\eta, -2+\eta]\ /\ |f(x)-3| > \varepsilon.$$

2) $f(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in [-1-\eta, -1+\eta],\ f(x) \leq M$. La négation s'écrit :

$$\exists M < 0\ /\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in [-1-\eta, -1+\eta]\ /\ f(x) > M.$$

3) $f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists a < 0\ /\ \forall x \leq a,\ f(x) \geq M$. La négation s'écrit :

$$\exists M > 0\ /\ \forall a < 0,\ \exists x \leq a\ /\ f(x) < M.$$

Exercice d'application 2. Dans les deux premières questions, on utilise le fait que pour $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} \lfloor x \rfloor = x_0$. Le point auquel il faut faire attention est que $\lim\limits_{x\to x_0^-} \lfloor -x \rfloor = \lim\limits_{y\to (-x_0)^+} \lfloor y \rfloor = -x_0$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} \lfloor -x \rfloor = \lim\limits_{y\to (-x_0)^-} \lfloor y \rfloor = -x_0 - 1$. *En effet, puisque l'on multiplie par -1, si x tend vers x_0 à droite (donc pour $x > x_0$), on aura $-x$ qui tend vers $-x_0$ à gauche (puisque $-x < -x_0$). On transforme donc les limites à droite en limites à gauche et les limites à gauche en limites à droite.*

1) Pour $x_0 \in \mathbb{Z}$, on a donc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = x_0 - 1 - (-x_0)) = 2x_0 - 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = x_0 - (-x_0 - 1) = 2x_0 + 1$. Puisque les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction f n'admet pas de limite en x_0.

2) Pour $x_0 \in \mathbb{Z}$, on a donc $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = x_0 - 1 + (-x_0)) = -1$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = x_0 + (-x_0 - 1) = -1$. Les limites à gauche et à droite sont égales mais on a $g(x_0) = x_0 + (-x_0)$ (car $x_0 \in \mathbb{Z}$) donc $g(x_0) = 0$. Or, si g admettait une limite en x_0, sa limite serait $g(x_0)$. Ceci entrainerait que les limites à gauche et à droite seraient égales à 0 : absurde ! La fonction g n'a donc pas de limite en x_0.

3) Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \lfloor -x \rfloor = \lfloor -x_0 \rfloor$ (puisque $-x_0 \notin \mathbb{Z}$ également). Ceci entraine que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Exercice d'application 3.

1) On considère la suite $u_n = -\pi n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n = -\infty$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(u_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$. Puisque $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$, on en déduit par caractérisation séquentielle que $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos(x)$ n'existe pas.

On aurait aussi pu considérer les suites u_{2n} et u_{2n+1} pour avoir des limites égales à -1 et 1, donc des limites différentes ce qui prouve également que cos *n'a pas de limite en $-\infty$.*

2) On considère pour $n \in \mathbb{N}$ les suites $u_n = \pi n$ et $v_n = \pi n + \dfrac{\pi}{4}$. Ces deux suites tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini. Or, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\tan(u_n) = 0$ et $\tan(v_n) = 1$. Ceci entraine que leurs limites sont égales à 0 et à 1 en $+\infty$, ce qui entraine que $\lim\limits_{x\to +\infty} \tan(x)$ n'existe pas par caractérisation séquentielle.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{2}$ qui tendent bien vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Si

on note $f(x) = \lfloor x \rfloor^2 - x^2$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = n^2 - n^2 = 0$ et $f(v_n) = n^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = -n - \frac{1}{4}$. On a donc $f(u_n)$ qui tend vers 0 et $f(v_n)$ qui tend vers $-\infty$. Ceci entraine par caractérisation séquentielle que $f(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice d'application 4.

1) Pour $x > 0$, on a $-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\sin^2(x)}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$. Par théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin^2(x)}{x+1} = 0$.

2) Par encadrements usuels sur la partie entière, on a :

$$\ln(x+2) - 1 \leq \lfloor \ln(x+2) \rfloor \leq \ln(x+2) \text{ et } \sqrt{x} - 1 \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}.$$

On en déduit que pour $x > 1$ (pour ne pas avoir de divisions par 0 et avoir tout strictement positif) :

$$\frac{\ln(x+2) - 1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\lfloor \ln(x+2) \rfloor}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \leq \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x} - 1}.$$

Par croissances comparées et théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor \ln(x+2) \rfloor}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} = 0$.

Exercice d'application 5.

1) Soit $x_0 \neq \frac{1}{2}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = x_0$. On a alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

De la même façon, puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est également dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} v_n = x_0$. On a alors $\lim_{n \to +\infty} f(v_n) = \lim_{n \to +\infty} 1 - v_n = 1 - x_0$.

Or, on a $x_0 \neq 1 - x_0$ car $x_0 \neq \frac{1}{2}$. Ceci entraine par caractérisation séquentielle que $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers x_0. On a donc f non continue en x_0.

2) On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a :

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}|.$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $|f(x) - \frac{1}{2}| = |1 - x - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}|$. Ceci entraine que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}|.$$

Ceci entraine que $\lim_{x \to \frac{1}{2}} |f(x) - \frac{1}{2}| = 0$ et donc que $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$. Puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on a donc bien f continue en $\frac{1}{2}$.

Exercice d'application 6. On utilise toujours le fait que si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \to x_0^-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$ et $\lim_{x \to x_0^+} \lfloor x \rfloor = x_0$.

1) Si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\lim_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$. Ceci entraine par composition de limites que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 + (x_0 - \lfloor x_0 \rfloor)^2 = f(x_0).$$

La fonction f est donc continue en x_0. A présent, si $x_0 \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = x_0 + (x_0 - (x_0 - 1))^2 = x_0 + 1 \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = x_0 + 0^2 = x_0.$$

Puisque les limites à gauche et à droite sont différentes, on en déduit que f n'est pas continue en x_0. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ seulement.

2) En reprenant le raisonnement du 1), on a pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ donc g est continue en x_0. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, on a cette fois :

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = x_0 - 1 + (x_0 - (x_0 - 1))^2 = x_0 - 1 + 1 = x_0 \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} g(x) = x_0 + 0^2 = x_0.$$

Puisque $g(x_0) = x_0$, on a donc g continue à gauche et à droite en x_0 donc g est continue en x_0. Ceci entraine donc finalement que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 7. Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues. Pour avoir f continue en 1, on doit avoir $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$. On doit donc avoir $e + b = e + b$ et $0 + 1 = e + b$. On doit donc avoir $b = 1 - e$. De la même façon, pour avoir la continuité en 0, on doit avoir $a + 0 = 1 + b$ donc $a = 1 + b = 2 - e$.

Réciproquement, le théorème de prolongement des fonctions continues assure que pour ces valeurs, la fonction f est continue en 0 et en 1. Par recollement, elle donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice d'application 8.

1) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2) On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0)$ puisque la fonction sinus est dérivable en 0. Puisque $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, cette limite vaut donc 1. D'après le théorème de prolongement des fonctions continues, si on pose $f(0) = 1$, f est prolongée en une fonction continue en 0 (et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 9. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque les fonctions f et g sont monotones, alors leurs limites à gauche et à droite existent en x_0 (c'est le théorème de la limite monotone). Puisque f est croissante, on a $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Puisque g est décroissante, on a $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) \leq g(x_0) \leq \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$. Notons $L_1 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $L_2 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. On a alors par quotient de limites que :

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \frac{L_1}{x_0} \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} g(x) = \frac{L_2}{x_0}.$$

On a donc $\dfrac{L_2}{x_0} \leq \dfrac{f(x_0)}{x_0} \leq \dfrac{L_1}{x_0}$, ce qui en multipliant par $x_0 > 0$, donne $L_2 \leq f(x_0) \leq L_1$. Puisque l'on avait déjà $L_1 \leq f(x_0) \leq L_2$, on a donc $L_1 = L_2 = f(x_0)$ ce qui prouve que f est continue en x_0, et on a alors g continue en x_0 par quotient de fonctions continues. Ceci étant vrai pour tout x_0 de $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice d'application 10. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ (sinon on aurait $0^2 = 1$: absurde). Ceci entraine par continuité de f sur $\mathbb{R}$ qu'elle est de signe constant. Elle est donc tout le temps positive ou tout le temps négative. Or, on a $f(x)^2 = 1 \Leftrightarrow |f(x)| = 1$ (en prenant la racine carrée).

Dans le cas où f est tout le temps positive, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |f(x)| = 1$. Dans le cas où f est tout le temps négative, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -|f(x)| = -1$.

Exercice d'application 11. On va utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, l'hypothèse entraine que pour tout $x \in I,\ f(x) \neq 0$. On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires (puisque f est **continue** sur un **intervalle**) qu'elle ne change pas de signe (sinon on pourrait construire un point où f s'annule). On en déduit que $\forall x \in I,\ |f(x)| = f(x)$ ou $\forall x \in I,\ |f(x)| = -f(x)$. On procède de même pour la fonction g. Ceci entraine en utilisant le fait que les valeurs absolues des deux fonctions sont égales que $f = g$ (si f et g sont toutes les deux de même signe) ou que $f = -g$ (si f et g sont de signes différents).

Exercice d'application 12. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) > 0$ (il suffit d'appliquer la définition de la limite en $M > 0$). Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$ (il suffit d'appliquer la définition de la limite en $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ par exemple). Puisque f est continue sur $[a, b]$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice d'application 13. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, si on utilise la définition de la limite en $\varepsilon = 1 > 0$ par exemple, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \geq a,\ f(x) \leq 1$. Puisque $f(1) = 3 > 1$, on a $1 < a$. Si on se place sur le **segment** $[0, a]$, on a par continuité de f que f admet un maximum sur ce segment. Si on note M ce maximum, puisque $1 \in [0, a]$, on a $M \geq f(1) = 3$ (par définition du maximum). On en déduit que $\forall x \geq a,\ M \geq 1 \geq f(x)$. On a donc bien M qui majore la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ et qui est atteint (car il est atteint sur $[0, a]$). On a donc bien prouvé que f admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice d'application 14. Soit M tel que pour tout $x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$ (puisque f est bornée). On a alors pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(g(x))| \leq M$ et donc $f \circ g$ est bornée. Pour l'autre fonction, on a pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [-M, M]$. Or, g est continue donc elle est bornée sur le segment $[-M, M]$ par un réel K. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R},\ |g(f(x))| \leq K$, ce qui entraine que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 15.

1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme d'applications continues/dérivables. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection continue, on a donc f bijective de $]0, +\infty[\, = \mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, +\infty[\, = \mathbb{R}$.

2) g est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions continues/dérivables. Pour $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - 1$. On a donc $g'(x) > 0$ pour $x > 0$ (puisque l'exponentielle est strictement croissante) et $g'(0) = 0$. Ceci entraine que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (puisque g est continue et que sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en un seul point). Enfin, on a $g(0) = 1$ et pour $x > 0$:

$$g(x) = e^x - x = e^x \times \left(1 - \frac{x}{e^x}\right).$$

Par théorème des croissances comparées, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Par théorème de la bijection continue, on a donc g bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $I = \left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [1, +\infty[$.