

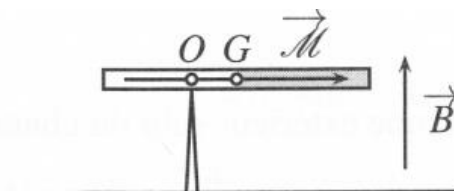
## TRAVAUX DIRIGÉS OS13

### Actions d'un champ magnétique

#### Niveau 1

#### \*Exercice 1. Aimant en équilibre

Un aimant très fin, de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$ , de masse  $m$ , repose en équilibre sur une pointe en  $O$ . Il est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  et à la gravité, de direction opposée au champ magnétique.



Évaluer la distance  $d = OG$  pour que l'aimant reste en équilibre horizontal.

#### \*Exercice 2. Petites oscillations d'un aimant

Un aimant homogène, de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$ , de moment d'inertie  $J$  par rapport à son centre de gravité  $G$ , est libre de tourner autour de  $G$  dans un plan horizontal. Il est soumis à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme.

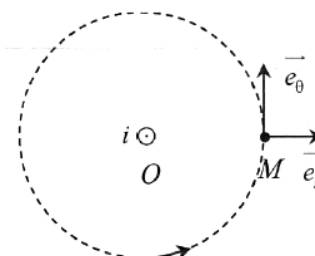
1. L'aimant est légèrement tourné par rapport à sa position d'équilibre, tout en restant dans le plan horizontal, puis il est lâché. Quelle est la période des petites oscillations ultérieures ?
2. Afin d'en déduire la valeur du champ magnétique  $\vec{B}$ , sans connaître ni le moment d'inertie, ni le moment magnétique de l'aimant, on ajoute au champ  $\vec{B}$  un champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par une bobine longue. On place d'abord la bobine telle que  $\vec{B}'$  et le champ  $\vec{B}$  soient parallèles et de même sens et on mesure la période  $\tau_1$  des petites oscillations de l'aimant. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur  $\tau_2$  de la période des petites oscillations. En déduire  $B$  en fonction de l'intensité  $B'$  du champ créé par la bobine et du rapport  $\frac{\tau_1}{\tau_2}$  sachant que  $B < B'$ .

#### Exercice 3. Forces de Laplace entre deux fils parallèles

Deux fils parallèles distants de  $a$  sont parcourus par le même courant  $i$ . Pour évaluer le champ magnétique créé par l'un des fils, on se placera dans l'approximation d'un fil infini, le champ est alors donné par la relation :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \text{ avec } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \text{ la perméabilité}$$

magnétique du vide.

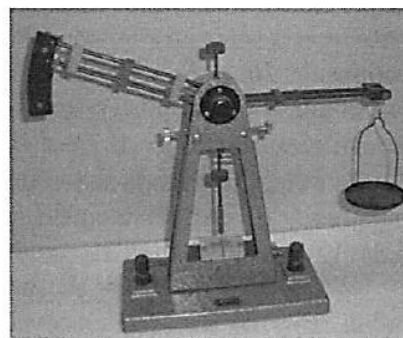
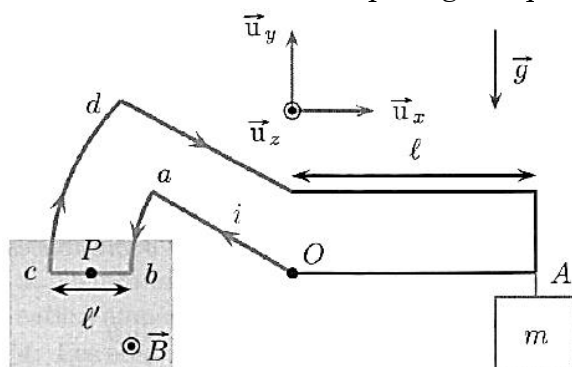


1. Pour que la force soit attractive, les courants doivent-ils être dans le même sens ou dans le sens inverse ?
2. Donner l'expression de la force sur une longueur  $l$  de fil. Comment cette force dépend-elle du courant  $i$  ?
3. Calculer numériquement cette force pour une longueur  $l = 20$  cm de fil, les fils étant distants de  $a = 1$  cm et le courant valant  $i = 12$  A.
4. Calculer la valeur nécessaire de  $i$  pour que, la distance entre les fils étant de 1 m, la force d'attraction entre les deux fils soit égale à  $2 \cdot 10^{-7}$  N par mètre de fil.

## Niveau 2

### Exercice 4. Balance de Cotton

De nos jours, on utilise des teslamètres à effet Hall ou des méthodes de résonance magnétique pour mesurer les champs magnétiques. La balance de Cotton, appareil un peu désuet, est l'ancêtre du teslamètre. Son principe consiste à mesurer les forces de Laplace exercées par le champ magnétique duquel on cherche à déterminer l'intensité. Une balance de Cotton fonctionne comme une balance de pesée à deux plateaux (voir figure ci-dessous). Le dispositif peut pivoter sans frottements autour de l'axe horizontal  $(O, \vec{u}_z)$ . La partie de droite, en noir, peut recevoir des masses marquées sur un plateau suspendu en A. La partie de gauche, en gris, est parcourue par un système de fils électriques alimentés par un courant  $i$  connu. Il règne, dans la région grisée, un champ magnétique horizontal uniforme (entrefer d'un aimant, par exemple) dont on veut déterminer la valeur. Le champ magnétique est nul ailleurs. Les portions  $ab$  et  $cd$  de fil électrique sont des arcs de cercle de centre  $O$ . Les autres parties du câblage sont rectilignes. On note  $P$  le milieu de  $[bc]$ . Cette partie gauche de la balance est soumise à des forces de Laplace. L'idée de la mesure est de placer des masses marquées à droite pour compenser exactement les forces de Laplace, de manière à équilibrer la balance. On montre, dans cet exercice, que la connaissance de la masse  $m$  permet de remonter à la valeur du champ magnétique.

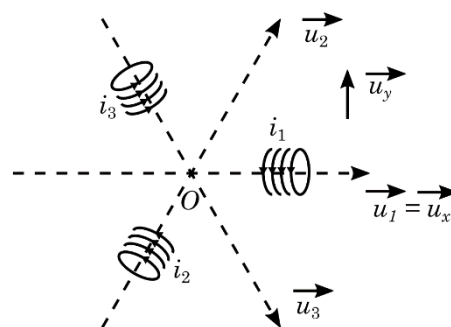


1. Exprimer le moment par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  du poids de la masse  $m$  située sur le plateau.
2. Exprimer le moment par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  des forces de Laplace s'appliquant sur la partie du câblage qui baigne dans  $\vec{B}$ .
3. En traduisant l'équilibre de la balance, donner la relation entre  $B$ ,  $i$ ,  $g$ ,  $m$  et les dimensions de la balance. Si le champ magnétique  $\vec{B}$  pointe comme indiqué sur le schéma, quel signe faut-il donner au courant  $i$  pour observer l'équilibre de la balance ?
4. Avec un courant  $i = 1,0 \text{ A}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $l' = 1,0 \text{ cm}$ ,  $OP = 10 \text{ cm}$ , quelle intensité de champ magnétique peut-on mesurer, sachant que les masses marquées à disposition sont d'un décigramme ?

### \*Exercice 5. Création d'un champ magnétique tournant

Trois bobines identiques sont placées à égale distance du point  $O$ . Leurs axes  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  sont

tels que  $(\vec{u}_2, \vec{u}_1) = \frac{\pi}{3}$  et  $(\vec{u}_3, \vec{u}_1) = -\frac{\pi}{3}$ .



1. Comment est dirigé le champ magnétique créé par une bobine en un point de son axe ?
2. Les trois bobines sont parcourues par le même courant  $i_1(t) = i_0 \cos(\omega t)$  ( $i_0$  et  $\omega$  sont des constantes). Que vaut le champ magnétique en  $O$  ?
3. La première bobine est alimentée par le courant  $i_1(t)$  précédent, la deuxième par  $i_2(t) = i_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$  et la troisième par  $i_3(t) = i_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ . Montrer que le champ magnétique en  $O$  tourne à la pulsation  $\omega$ .

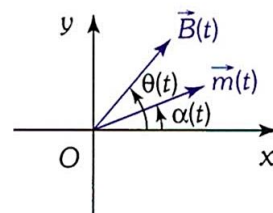
Rappels mathématiques :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

### Exercice 6. Moteur synchrone

Un aimant de moment dipolaire (moment magnétique)  $\vec{m}$  peut tourner sans frottement dans le plan  $(xOy)$  autour de l'axe  $(Oz)$ . Cet aimant est soumis au champ magnétique tournant  $\vec{B} = B\vec{u}(t)$  où le vecteur  $\vec{u}(t)$  fait un angle

$\theta(t) = \Omega t + \theta_0$  avec l'axe  $(Ox)$ , où  $\Omega \geq 0$  et  $\theta_0$  sont des constantes. L'aimant est supposé tourner à la vitesse angulaire constante  $\omega$  positive.



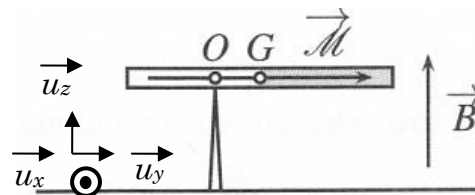
1. Quel est l'angle  $\alpha(t)$  entre  $\vec{m}$  et l'axe  $(Ox)$ , en supposant sa valeur initiale nulle ?
2. Quel est le couple  $C_{Lapl}$  exercé par le champ magnétique sur le dipôle ?
3. À quelle condition sa valeur moyenne est-elle non nulle ? On se placera désormais dans ce cas. Quelles sont les valeurs possibles de  $\theta_0$  pour que ce couple soit moteur ?
4. L'aimant entraîne une charge en rotation. Le couple exercé par la charge sur l'aimant est supposé constant et noté  $-C_u$ , avec  $C_u \geq 0$ . À quelle condition sur  $C_u$  le moteur peut-il entraîner cette charge ?
5. Dans ce dernier cas, quelles sont les valeurs de  $\theta_0$  possibles ? Discuter de la stabilité de fonctionnement du moteur dans chacun de ces cas.

Rappel mathématique :  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

## SOLUTIONS

### \*Exercice 1. Aimant en équilibre

Système : aimant étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni de la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . L'axe de rotation est  $(Ox)$



Bilan des forces :

- Poids au centre de gravité  $G$   $\vec{P} = m\vec{g}$  de moment par rapport à  $(Ox)$  :  

$$\Gamma_{(Ox)}(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{u}_x = (d\vec{u}_y \wedge (-mg\vec{u}_z)) \cdot \vec{u}_x = -mgd$$
 (aimant horizontal)
- Réaction de la pointe en  $O$  telle que  $\Gamma_{(Ox)}(\vec{R}) = 0$
- Couple électromagnétique de moment :  

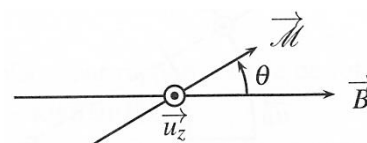
$$\Gamma_L = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_x = (\mathcal{M}\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_x = \mathcal{M}B$$

Loi scalaire du moment cinétique à l'équilibre :

$$\Gamma_{(Ox)}(\vec{P}) + \Gamma_{(Ox)}(\vec{R}) + \Gamma_L = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}B - mgd = 0 \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{\mathcal{M}B}{mg}}$$

### \*Exercice 2. Petites oscillations d'un aimant

1. Système : aimant étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni de la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  : l'axe de rotation  $(Gz)$  est vertical et on note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{\mathcal{M}}$  et  $\vec{B}$ .



➤ Bilan des forces :

- Poids au centre de gravité  $G$  tel que  $\Gamma_{(Gz)}(\vec{P}) = 0$
- Réaction du support en  $G$  telle que  $\Gamma_{(Gz)}(\vec{R}) = 0$
- Couple électromagnétique de moment  $\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}B \sin \theta \vec{u}_z$

(Attention au sens de l'angle !)

➤ Loi scalaire du moment cinétique :

$$\frac{dL_{(Gz)}}{dt} = \Gamma_{(Gz)}(\vec{P}) + \Gamma_{(Gz)}(\vec{R}) + \Gamma_{L,(Oz)} \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B}{J} \sin \theta = 0$$

Pour les petites oscillations,  $\sin \theta \approx \theta$  et l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0} \text{ avec } \boxed{\omega_0^2 = \frac{\mathcal{M}B}{J}}$$

Oscillations sinusoïdales de période  $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}}$ .

2. Expérience 1 :  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'$  de même sens : champ magnétique total  $\vec{B}_{tot} = \vec{B} + \vec{B}'$  et

$$B_{tot} = B + B' \text{ d'où } \boxed{\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B+B')}}}$$

➤ Expérience 2 :  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'$  de sens opposés : champ magnétique total  $\vec{B}_{tot} = \vec{B}' - \vec{B}$

$$\text{et } B_{tot} = B' - B > 0 \text{ car } B < B' \text{ d'où } \boxed{\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B'-B)}}}$$

➤ Expression de  $B$  :  $B + B' = \frac{4\pi^2 J}{\mathcal{M}\tau_1^2}$  (1) et  $B' - B = \frac{4\pi^2 J}{\mathcal{M}\tau_2^2}$  (2)

$$(1)+(2) : B' = \frac{4\pi^2 J}{2\mathcal{M}} \left( \frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} \right) \quad (3) \text{ et } (1)-(2) : B = \frac{4\pi^2 J}{2\mathcal{M}} \left( \frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{(4)}{(3)} : B = B' \frac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2}}{\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2}} = B' \frac{\frac{1}{\tau_1^2} \left( 1 - \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \right)}{\frac{1}{\tau_1^2} \left( 1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \right)} \text{ soit } \boxed{B = B' \frac{1 - \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^2}{1 + \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^2}}$$

### Exercice 3. Forces de Laplace entre deux fils parallèles

$$2. \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 l i^2}{2\pi a} \vec{u}_r \quad 4. i = 1 \text{ A}$$

### Exercice 4. Balance de Cotton

$$1. \Gamma_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgl \quad 2. \Gamma_{L,Oz} = -OP \, il' B \quad 3. B = -\frac{mgl}{OP \, il'}$$

## \*Exercice 5. Création d'un champ magnétique tournant

1. Le champ magnétique appartient à l'axe de révolution de la bobine : il est donc colinéaire à l'axe en tout point de l'axe.

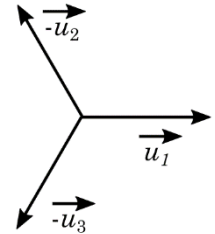
2. Champ magnétique créé par la bobine 1 en  $O$  :  $\vec{B}_1(O) = k i_1(t) \vec{u}_1$  (orienté par la règle de la main droite)

Champ magnétique créé par la bobine 2 en  $O$  :  $\vec{B}_2(O) = -k i_1(t) \vec{u}_2$

Champ magnétique créé par la bobine 3 en  $O$  :  $\vec{B}_3(O) = -k i_1(t) \vec{u}_3$

Champ magnétique résultant en  $O$  :

$$\vec{B}(O) = \vec{B}_1(O) + \vec{B}_2(O) + \vec{B}_3(O) = k i_1(t) (\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3) \text{ soit } \boxed{\vec{B}(O) = \vec{0}}$$



3. Champ magnétique résultant en  $O$  :

$$\boxed{\vec{B}(O) = k i_0 \left( \cos(\omega t) \vec{u}_1 - \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \vec{u}_2 - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{u}_3 \right)}$$

➤ Projection sur  $\vec{u}_x = \vec{u}_1$  :  $(\vec{u}_2, \vec{u}_x) = \frac{\pi}{3}$  et  $(\vec{u}_3, \vec{u}_x) = -\frac{\pi}{3}$

$$B_x(O) = k i_0 \left( \cos(\omega t) - \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$B_x(O) = k i_0 \left( \cos(\omega t) - \frac{1}{2} 2 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = k i_0 \left( \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right)$$

$$\boxed{B_x(O) = \frac{3}{2} k i_0 \cos(\omega t)}$$

➤ Projection sur  $\vec{u}_y$  :  $(\vec{u}_2, \vec{u}_y) = \frac{\pi}{6}$  et  $(\vec{u}_3, \vec{u}_y) = \frac{5\pi}{6}$

$$B_y(O) = k i_0 \left( -\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$$

$$B_y(O) = k i_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \right) = k i_0 \frac{\sqrt{3}}{2} 2 \sin(\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{B_y(O) = \frac{3}{2} k i_0 \sin(\omega t)}$$

➤ Champ résultant :  $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{3}{2} k i_0 (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y)}$  : champ tournant dans le plan  $(xOy)$  à la vitesse angulaire (pulsation)  $\omega$ .

## Exercice 6. Moteur synchrone

1.  $\alpha(t) = \omega t$  2.  $\vec{C}_{Lapl} = m B \sin((\Omega - \omega)t + \theta_0) \vec{u}_z$  3.  $\Omega = \omega$  4.  $C_u \leq mB$