31. Espaces préhilbertiens réels, méthodologie

Dans tout le chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I. Produit scalaire et orthogonalité

I.1. Produit scalaire

Définition. Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$. On dit que φ est forme bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses coordonnées. On dit de plus qu'elle est :

- symétrique si $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
- positive si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$.
- définie si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Définition. Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$. On dit que φ est un produit scalaire si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

(m) Quand on doit montrer qu'une application est un produit scalaire, on commence souvent par montrer la symétrie. Ainsi, il suffit de montrer la linéarité à gauche (ou à droite) pour en déduire la linéarité à droite (ou à gauche), ce qui donne une preuve plus courte. Le point le plus délicat est souvent la partie définie.

Exercice d'application 1. Montrer que $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{k=1}^{n} k x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice d'application 2. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue $2\pi -$ périodique$\}$. Vérifier que E est un espace vectoriel et que $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

Définition. On dit que E est un espace préhilbertien réel si c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On dit que E est un espace euclidien s'il est de plus de dimension finie.

I.2. Norme euclidienne

Définition. Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$. La norme euclidienne associée à ce produit scalaire est :

$$\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition. Soit $x \in E$. Si $||x|| = 1$, on dit que x est unitaire.

Proposition. La norme euclidienne est une norme, c'est à dire qu'elle vérifie :

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$.
- $\forall x \in E,\ ||x|| \geq 0$.
- $\forall x \in E,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- $\forall x, y \in E,\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (**inégalité triangulaire**). On a $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ si et seulement si x et y sont positivement colinéaires ($\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ /\ x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Proposition. Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E et $||.||$ la norme euclidienne associée. Alors, pour $x, y \in E$:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2.$$

Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Alors :

$$\forall x, y \in E,\ \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle.$$

On a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque : En notant $||.||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient $\forall x, y \in E,\ |\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \times ||y||$ (avec égalité si et seulement si x et y sont liés).

m Quand vous devez démontrer une inégalité qui fait intervenir des carrés ou des racines carrées, c'est très souvent l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'il faut utiliser. On utilisera alors en général un des produits scalaires « usuels » (ou celui suggéré par l'énoncé) en des vecteurs bien choisis.

Exercice d'application 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue positive. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer que $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

Exercice d'application 4. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$ et préciser le cas d'égalité.

I.3. Normes et distances (Hors Programme)

Définition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$. On dit que N est une norme sur E si elle vérifie :

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$.
- $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0$.
- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (**inégalité triangulaire**).

Remarque : Avoir une norme/une distance sur un espace vectoriel permet de donner un sens à la notion de longueur, puisque l'on peut mesurer la distance entre x et y en calculant $N(y-x)$ (la norme du vecteur $y-x$). On peut définir de nombreuses normes sur les espaces vectoriels mais on ne s'intéressera dans ce chapitre qu'aux normes euclidiennes.

I.4. Orthogonalité

Définition. SOit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux (noté $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition. Si A est un sous-ensemble de E et $x \in E$, on dit que x est orthogonal à A (noté $x \perp A$) si $\forall a \in A,\ \langle x, a \rangle = 0$.

Définition. Si A et B sont des sous-ensembles de E, on dit que A est orthogonal à B (noté $A \perp B$) si $\forall (a, b) \in A \times B,\ \langle a, b \rangle = 0$.

Exercice d'application 5. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $A, B \in E$, on pose $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$.

1) Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques et des matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Définition. Soit A un sous-ensemble de E. L'orthogonal de A est noté $A^\perp$ et est défini par

$$A^\perp = \{x \in E \ / \ x \perp A\} = \{x \in E \ / \ \forall a \in A,\ \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Proposition. Si A est un sous-ensemble de E, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice d'application 6. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer une base de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^\perp$. Que vaut alors $D^\perp$ si $D = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Proposition. On a :

- $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
- Si $A \subset B$ sont des sous-ensembles de E, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- Si $A \subset E$, $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- Si $A \subset E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

m On utilise parfois le fait que $E^\perp = \{0_E\}$ pour démontrer qu'un vecteur est nul en montrant qu'il est orthogonal à tous les vecteurs de E (et donc en particulier à lui-même et le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul).

Exercice d'application 7. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1) Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_0^1 P(t)t^k dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

m Si F est un sous-espace vectoriel de E, pour déterminer $F^\perp$, on essaye en général de trouver une base (ou une famille génératrice de F) pour avoir $F = \text{Vect}((f_k)_{1\leq k\leq p})$ et on utilise le fait que $\{(f_k)_{1\leq k\leq p}\}^\perp = F^\perp$. Être orthogonal à F est donc équivalent au fait d'être orthogonal à tous les vecteurs $f_1, \dots, f_p$.

Exercice d'application 8. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On pose $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Déterminer une base de $F^\perp$.

I.5. Famille orthogonale

Définition. Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

- La famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale si $\forall i,j \in I,\ i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$.
- La famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée si $\forall i,j \in I, \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$.

On rappelle que $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i = j$ *et* 0 *si* $i \neq j$.

m Pour démontrer qu'une famille est orthogonale/orthonormée, il faut donc calculer les produits scalaires $\langle e_i, e_j\rangle$. On remarquera que puisque $\langle e_i, e_i\rangle = ||e_i||^2$, une famille orthonormée a tous ses vecteurs unitaires.

Exercice d'application 9. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Vérifier que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormée ? Si non, la normaliser.

Proposition. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale telle que $\forall i \in I,\ e_i \neq 0_E$. Alors la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

Remarque : En particulier, toute famille orthonormée est libre.

Théorème. De Pythagore. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille orthogonale. Alors :

$$|| \sum_{i=1}^{n} e_i ||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2.$$

II. Espaces euclidiens

II.1. Base orthonormée

Proposition. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthonormée de E. Alors c'est une base de E.

Théorème. Soit E euclidien et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E *(abrégé dans la suite en bon de E)*. Alors, pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ représente les coordonnées de x dans la base e) et on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

De plus, toujours en notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a :

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ et } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(m) Ces formules ne sont valables que si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée ! L'intérêt de travailler avec une base orthonormée est donc que l'on peut calculer très rapidement les coordonnées d'un vecteur, la norme de ce vecteur ou le produit scalaire entre deux vecteurs.

Exercice d'application 10. Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in L(E)$. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. On pose $A = \mathrm{Mat}_e(u)$.

1) Laquelle de ces deux égalités est correcte ?

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k \text{ ou } \forall j \in [\![1, n]\!],\ u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} e_k.$$

2) À quel coefficient de la matrice A est égal $\langle u(e_j), e_i \rangle$?

Exercice d'application 11. Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in L(E)$. Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases orthonormées de E. On pose

$$T = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i \rangle.$$

Montrer en décomposant les vecteurs $f_1, \dots, f_n$ dans la base e que $\sum_{j=1}^{n} \langle u(f_j), f_j \rangle = T$.

Théorème. Existence d'une bon. Soit E un espace euclidien. Alors E admet une base orthonormée.

(m) Ainsi, en dimension finie on peut toujours considérer que l'on a une base orthonormée « de référence » et on effectue en général tous les calculs dans cette base (en utilisant les formules précédentes).

II.2. Supplémentaire orthogonal

Proposition. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F \oplus F^{\perp} = E$.

m En particulier, si E est un espace euclidien (donc de dimension finie) et que F est un sous-espace vectoriel de E, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires et $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$.

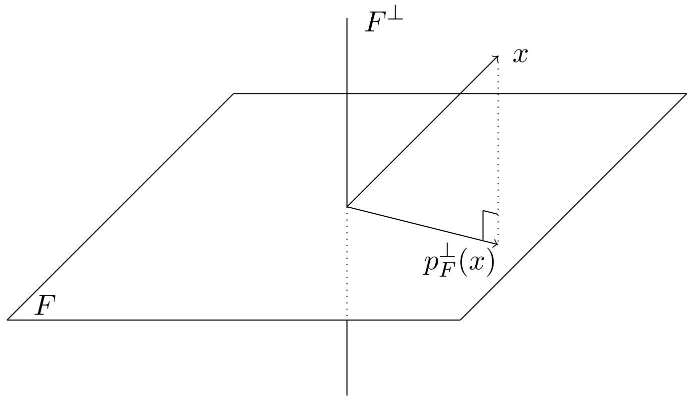
Exercice d'application 12. On reprend le produit scalaire de l'exercice d'application 5. Montrer que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Proposition. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

II.3. Projection et symétrie orthogonale

Proposition. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On a donc $E = F \oplus F^{\perp}$. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Elle est notée $p_F^{\perp}$. De plus, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors :

$$\forall x \in E,\ p_F^{\perp}(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

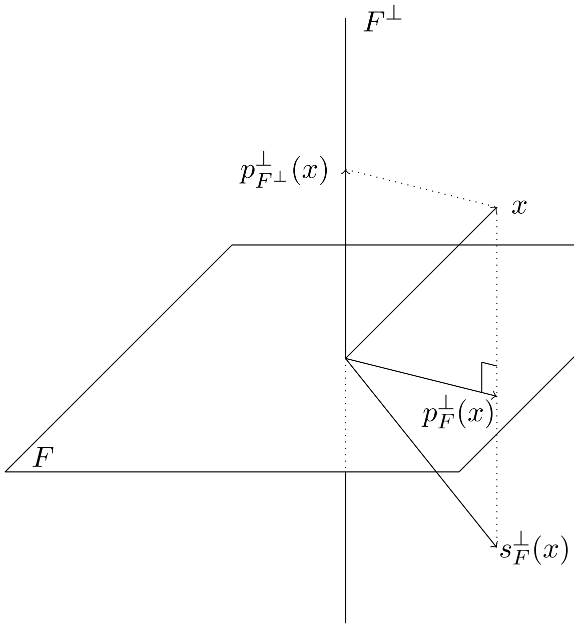


Remarque : On peut également définir la projection orthogonale sur $F^{\perp}$, qui vérifie alors :

$$\forall x \in E,\ p_{F^{\perp}}^{\perp}(x) = x - p_F^{\perp}(x).$$

Proposition. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On a donc $E = F \oplus F^{\perp}$. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$. Elle est notée $s_F^{\perp}$. De plus :

$$\forall x \in E,\ s_F^{\perp}(x) = p_F^{\perp}(x) - p_{F^{\perp}}^{\perp}(x) = x - 2p_{F^{\perp}}^{\perp}.$$



Remarque : Toutes les propriétés des projections et des symétries s'appliquent encore aux projections et aux symétries orthogonales. *Voir le chapitre 20 « Espaces vectoriels ».*

(m) Pour déterminer une projection orthogonale (ou une symétrie orthogonale), il faut donc tout d'abord trouver une base orthonormée de F. On utilise pour cela l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt (voir partie suivante).

Exercice d'application 13. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère le plan P d'équation $2x-y+3z=0$.

1) Déterminer une base de P.

2) Orthonormaliser cette base à l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt (voir partie suivante).

3) En déduire l'expression de $p_F^\perp\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$, puis écrire la matrice de $p_F^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(m) On a $\mathrm{Id}_E = p_F^\perp + p_{F^\perp}^\perp$. Ainsi, trouver la projection orthogonale sur F est équivalent à trouver la projection orthogonale sur $F^\perp$. On calcule en général la projection pour laquelle la dimension de l'espace sur lequel on projette est la plus petite (l'algorithme de Gram-Schmidt étant alors plus court à mettre en oeuvre). Ainsi, on déterminera en priorité les projections orthogonales sur des droites. *Ceci est très utilisé dans $\mathbb{R}^3$ puisqu'entre F et $F^\perp$, l'un des deux espaces est de dimension 1.*

Exercice d'application 14. On reprend l'exercice précédent.

1) Déterminer un vecteur normal au plan P et le normaliser.

2) En déduire la matrice de $p_{F^\perp}^\perp$ et celle de $p_F^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

II.4. Algorithme d'orthonormalisation de Gram- Schmidt

Théorème. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormée $(f_1,\dots,f_n)$ telle que :

- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\text{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \text{Vect}(f_1,\dots,f_k)$.
- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle e_k, f_k\rangle > 0$.

(m) Pour construire une base orthonormée d'un espace vectoriel $F = \text{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, on procède par récurrence de la manière suivante :

- On pose $f_1 = \dfrac{e_1}{||e_1||}$.
- On calcule $p^{\perp}_{\text{Vect}(f_1)}(e_2) = \langle e_2, f_1\rangle f_1$.
- On a alors $f_2' = e_2 - p^{\perp}_{\text{Vect}(f_1)}(e_2)$ orthogonal à f_1 et on pose $f_2 = \dfrac{f_2'}{||f_2'||}$.
- On continue et on suppose que l'on a ainsi construit $(f_1,\dots,f_k)$ une base orthonormée de $\text{Vect}(e_1,\dots,e_k)$.
- On calcule alors $p^{\perp}_{\text{Vect}(f_1,\dots,f_k)}(e_{k+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1}, f_i\rangle f_i$.
- On a alors $f_{k+1}' = e_{k+1} - p^{\perp}_{\text{Vect}(f_1,\dots,f_k)}(e_{k+1})$ orthogonal à $\text{Vect}(f_1,\dots,f_k)$ et on pose $f_{k+1} = \dfrac{f_{k+1}'}{||f_{k+1}'||}$.

(m) La méthode consiste donc à chaque fois à projeter, soustraire le projeté (pour être orthogonal aux vecteurs déjà construits) puis normaliser (pour avoir une famille orthonormée). Il faut faire TRÈS ATTENTION dans les calculs car on utilise tous les calculs effectués jusqu'à l'étape k pour construire le $k+1$-ième vecteur ! Ainsi la moindre erreur de calcul se répercute sur toute la suite et toute la suite du calcul est fausse...

Exercice d'application 15. On prend $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^2 P(t)Q(t)dt$. *On admet qu'il s'agit d'un produit scalaire, voir l'exercice d'application 7 pour un exercice identique.* Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$ pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire que l'on notera (Q_0, Q_1, Q_2).

II.5. Distance à un ensemble

Définition. Soient $x, y \in E$ où E est un espace préhilbertien réel. La distance entre x et y est $d(x,y) = ||y - x||$.

Définition. Soit E un espace préhilbertien réel, $x \in E$ et $A \subset E$ non vide. La distance de x à A est définie par :

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) = \inf_{a\in A} ||x-a||.$$

Proposition. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors, pour tout $x \in E$, la distance entre x et F est atteinte (c'est donc un minimum et pas une borne inférieure) en un unique vecteur qui est $p^{\perp}_F(x)$. On a donc :

$$d(x,F) = ||x - p^{\perp}_F(x)|| = ||p^{\perp}_{F^\perp}(x)||.$$

(m) Ainsi, pour calculer la distance d'un vecteur x à un espace vectoriel F, il faut calculer un des projetés orthogonaux $p^{\perp}_F(x)$ ou $p^{\perp}_{F^\perp}(x)$. En général, on calcule le projeté sur l'espace qui a la plus petite dimension (car il est plus facile/rapide d'en trouver une base orthonormée, voir l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt).

Exercice d'application 16. On reprend l'exercice d'application précédent. Déterminer de deux façons différentes la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

II.6. Applications aux hyperplans

Théorème. De représentation des formes linéaires. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E,\mathbb{R})$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $\vec{n} \in E$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) = \langle \vec{n}, x\rangle$.

Proposition. Soit E un espace euclidien et H un hyperplan de E. Alors il existe $\vec{n} \in E$ non nul tel que $H = \{x \in E \ / \ \langle \vec{n}, x\rangle\} = (\mathrm{Vect}(\vec{n}))^{\perp}$. $\vec{n}$ est appelé un vecteur normal à l'hyperplan H.

m Dans $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel, quand un hyperplan est donné par une équation donnée dans la base canonique (par exemple sous la forme $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\right\}$), on peut « lire » directement le vecteur normal en prenant $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

m Si H est un hyperplan de E un espace euclidien, puisque l'on connait un vecteur normal $\vec{n}$ à H, on peut calculer très rapidement la distance de $x \in E$ à H car le projeté orthogonal sur $H^{\perp}$ est rapide à calculer (car de dimension 1 de base $\vec{n}$) et on a donc $d(x,H) = \dfrac{|\langle x, \vec{n}\rangle|}{||\vec{n}||}$.

Exercice d'application 17. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et on considère

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ / \ \sum_{k=1}^{n} k x_k = 0 \right\}.$$

Déterminer un vecteur normal unitaire à H et en déduire la distance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ à H.

III. Espaces affines

III.1. Structure affine

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $a \in E$. La translation de vecteur a est l'application $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x+a \end{array} \right.$.

Définition. Soit $\mathcal{V} \subset E$. On dit que $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de E si il existe V un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$ tel que $\mathcal{V} = \tau_a(V)$.

Proposition. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de E. Alors, l'espace V défini ci-dessus est unique et $V = \{y - x,\ x, y \in \mathcal{V}\}$ (V est appelé la direction de $\mathcal{V}$. De plus, on a que $\forall a \in \mathcal{V},\ \mathcal{V} = \tau_a(V)$.

(m) Ainsi pour caractériser un espace affine, faut connaitre un point A par lequel il passe (que l'on peut identifier au vecteur a) et un espace directeur (l'espace V). Les espaces affines peuvent se visualiser comme des espaces vectoriels mais qui ne « passent pas par O ».

Exercice d'application 18. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+2y-3z=3$. Justifier que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ et déterminer un point par lequel il passe et sa direction.

Définition. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de E. La dimension de $\mathcal{V}$ est égale à la dimension de sa direction. Si $\mathcal{V}$ est de dimension 0, on dit que $\mathcal{V}$ est un point, s'il est de dimension 1, que c'est une droite affine et s'il est de dimension 2 que c'est un plan affine.

Proposition. Une intersection d'espace affine est soit vide, soit un espace affine de direction l'intersection des directions.

III.2. Lien avec les applications linéaires

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in L(E,F)$ et $y \in F$. Alors, $\{x \in E\ /\ u(x) = y\}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(u)$ et passant par x_0 où $u(x_0) = y$ (x_0 est une solution particulière de l'équation).

III.3. Systèmes linéaires

(m) Comme dans la proposition précédente, les solutions de systèmes linéaires de la forme $AX = Y$ sont soit vide (pas de solution), soit des sous-espaces affines de la forme $\mathcal{S} = \{X_0 + X,\ X \in \ker(A)\}$ où X_0 vérifie $AX_0 = Y$ (X_0 est une solution particulière).

III.4. Distance à un hyperplan/à une droite affine

Proposition. Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine passant par A. Alors, pour tout $B \in E$, on a :

$$d(B,\mathcal{H}) = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{n}\rangle|}{||\vec{n}||}.$$

Exercice d'application 19. Déterminer la distance de $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-3z=3$.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1. On a bien la symétrie puisque $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{k=1}^{n} k x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} k y_k x_k = \langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle$. On a également la linéarité à gauche puisque :

$$\begin{aligned}
\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) z_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k z_k + \mu y_k z_k) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \\
&= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle.
\end{aligned}$$

Avec la symétrie, on en déduit qu'on a également la linéarité à droite. On a enfin pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} k x_k^2 \geq 0$ (somme de termes positifs) donc on a la positivité. De plus, puisque tous les termes de la somme sont positifs, on a que la somme est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul, et puisque $k \neq 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ ce qui entraine $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. On a donc bien montré que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice d'application 2. E contient la fonction nulle (il est donc non vide), il est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel. De plus, si $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue (comme somme de fonctions continues) et est 2π-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)(x + 2\pi) = \lambda f(x + 2\pi) + \mu g(x + 2\pi) = \lambda f(x) + \mu g(x).$$

On a donc bien $\lambda f + \mu g \in E$, ce qui prouve que E est un espace vectoriel.

Remarquons que $\langle ., . \rangle$ est bien défini sur E car un produit de fonctions continues est continue et l'intégrale existe donc. Cette application est clairement symétrique et linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\forall f, g, h \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \langle \lambda f + \mu g, h \rangle &= \int_0^{2\pi} (\lambda f(t) + \mu g(t)) h(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\lambda f(t) h(t) + \mu g(t) h(t)) dt \\
&= \lambda \int_0^{2\pi} f(t) h(t) dt + \mu \int_0^{2\pi} g(t) h(t)) dt \\
&= \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle.
\end{aligned}$$

Puisqu'on l'on a la symétrie, on en déduit la linéarité à droite. De plus, on a bien une forme positive car pour $f \in E$, $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \geq 0$ par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens).

Pour la définition, supposons $\langle f, f\rangle = 0$. Puisque f^2 est **continue et positive** et d'intégrale nulle, on en déduit que $\forall t \in [0, 2\pi],\ f^2(t) = 0$. On a donc f nulle sur $[0, 2\pi]$. Par 2π-**périodicité**, f est nulle sur $\mathbb{R}$, ce qu'il fallait montrer. On a donc bien $\langle ., \rangle$ qui est un produit scalaire sur E.

Exercice d'application 3. Sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, le produit scalaire usuel est $\langle g, h\rangle = \displaystyle\int_0^1 g(t)h(t)dt$. Puisque f est positive, on a $I_{2n} = \displaystyle\int_0^1 t^{2n} f(t)dt = \int_0^1 (t^n\sqrt{f(t)})^2 dt$. De même, $I_{2p} = \displaystyle\int_0^1 (t^p\sqrt{f(t)})^2 dt$. On utilise alors Cauchy-Schwarz en $g : t \mapsto t^n\sqrt{f(t)}$ et $h : t \mapsto t^p\sqrt{f(t)}$ qui sont bien continues sur $[0,1]$ comme produit/composée de fonctions continues. On a alors :

$$\int_0^1 t^{n+p}(\sqrt{f(t)})^2 dt \leq \sqrt{I_{2n}} \times \sqrt{I_{2p}}$$

ce qui est l'inégalité voulue puisque $(\sqrt{f(t)})^2 = f(t)$ et donc $\displaystyle\int_0^1 t^{n+p}(\sqrt{f(t)})^2 dt = I_{n+p}$.

Exercice d'application 4. On va utiliser le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Si on écrit l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des vecteurs quelconques $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} & \langle y, z\rangle^2 \leq \langle y, y\rangle \times \langle z, z\rangle \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\sum_{k=1}^n y_k z_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^n z_k^2\right). \end{aligned}$$

Pour faire apparaitre l'inégalité de l'énoncé, on voit qu'en prenant $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = \sqrt{x_k}$ et $z_k = \dfrac{1}{\sqrt{x_k}}$ (possible car les x_k sont strictement positifs), on a alors :

$$\left(\sum_{k=1}^n 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right).$$

Ceci entraine que $n^2 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$ car on a supposé que $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k = 1$.

On a égalité dans Cauchy-Schwarz si et seulement si nos vecteurs y et z sont liés. Puisqu'ils sont non nuls (car les x_k sont non nuls), cela est équivalent au fait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda z$, soit :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sqrt{x_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_k}} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \lambda.$$

On a donc égalité si et seulement si les x_k sont tous égaux. Or, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k = 1$ donc si tous les x_k sont égaux, ils doivent être tous égaux à $\dfrac{1}{n}$ (car il y a n termes dans la somme). On a donc égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \dfrac{1}{n}$.

Exercice d'application 5.

1) Commençons par la symétrie. La trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée (car on somme les coefficients diagonaux). On a donc pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle.$$

Une fois la symétrie démontrée, pour montrer la bilinéarité, il ne reste plus qu'à montrer la linéarité à droite. On a alors, en utilisant la linéarité de la trace que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl}\langle A, \lambda B_1 + \mu B_2\rangle & = & \mathrm{Tr}({}^tA(\lambda B_1 + \mu B_2)) \\ & = & \mathrm{Tr}(\lambda {}^tAB_1 + \mu {}^tAB_2) \\ & = & \lambda \mathrm{Tr}({}^tAB_1) + \mu \mathrm{Tr}({}^tAB_2) \\ & = & \lambda\langle A, B_1\rangle + \mu\langle A, B_2\rangle.\end{array}$$

Il ne reste plus qu'à montrer la positivité et la définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en revenant à la définition de la trace :

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2.$$

Une somme de carrée étant positive (la matrice étant réelle), on a bien la positivité du produit scalaire. Si $\langle A, A\rangle = 0$, alors on a une somme de termes positifs qui est nulle donc tous les termes sont nuls d'où $\forall i, k \in [\![1, n]\!]$, $a_{k,i}^2 = 0$, et donc $a_{k,i} = 0$. A est donc bien la matrice nulle, le produit scalaire est donc bien défini.

2) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a tout d'abord puisque A est symétrique :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB).$$

De plus, on a également par symétrie du produit scalaire et antisymétrie de B :

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}(-BA) = -\mathrm{Tr}(BA).$$

Par propriété de la trace, on a $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$. On a donc finalement que $\langle A, B\rangle = -\langle A, B\rangle$, ce qui entraine bien que $\langle A, B\rangle = 0$. Les matrices symétriques et antisymétriques sont bien des espaces orthogonaux pour ce produit scalaire.

Exercice d'application 6. On cherche les vecteurs orthogonaux à $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Ce sont les vecteurs $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que :

$$\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\rangle = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0.$$

Ceci donne donc une équation de plan dans $\mathbb{R}^3$. On a donc ici :

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = x + 2y\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Ces deux vecteurs étant libres, ils forment une base de l'orthogonal de $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

D'après le point de cours suivant, puisque $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est une base de D, $D^{\perp}$ est le plan trouvé ci-dessus (et on peut prendre les mêmes vecteurs comme base).

Exercice d'application 7.

1) Une fonction polynômiale étant continue, on peut calculer l'intégrale. La symétrie, bilinéarité, positivité se font de la même manière que pour le produit scalaire usuel sur les fonctions continues. La seule différence est pour la définition. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. On a alors $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2 dt = 0$. Puisque P^2 est continue et positive sur $[0,1]$, on a alors $\forall t \in [0,1]$, $(P(t))^2 = 0$. Le polynôme P s'annule donc en une infinité de valeurs donc plus que son degré, ce qui entraine $P = 0$ (en tant que polynôme). On a donc bien montré la partie définie du produit scalaire.

2) Soit P comme défini par l'énoncé. Alors, si $Q \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire Q sous la forme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t) \sum_{k=0}^{n} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 P(t) t^k dt = 0.$$

P est donc orthogonal à tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On en déduit que P est le polynôme nul (car il est en particulier orthogonal à lui-même).

Exercice d'application 8. On commence par chercher un système d'équation qui caractérise $F^\perp$. On a :

$$\begin{aligned}
F^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rangle = 0 \text{ et } \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + z = 0 \text{ et } -x + 2y + t = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = -x \text{ et } t = x - 2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ x - 2y \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment bien une base de $F^\perp$.

Exercice d'application 9. On a par exemple $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1+2-3+0 = 0$. On vérifie de la même manière que le premier vecteur est orthogonal au troisième et que le second est orthogonal au troisième. On a donc bien une famille orthogonale. Elle n'est cependant pas orthonormée. Pour la normaliser, il faut diviser chacun des vecteurs par sa norme. On a par exemple $|| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} || = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$.

On a après calcul comme famille orthonormée :

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice d'application 10.

1) $u(e_j)$ est représenté par la j-ième colonne de la matrice A. On a donc $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k$. C'est la première égalité qui est correcte.

2) Puisque la base e est orthonormée, on a $\langle u(e_j), e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \langle e_k, e_i \rangle = a_{i,j}$. Ainsi, $\langle u(e_j), e_i \rangle$ est le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A.

Exercice d'application 11. Puisque e est une base orthonormée de E, on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f_j = \sum_{k=1}^{n} \langle f_j, e_k \rangle e_k$. On en déduit, en utilisant la linéarité de u et la bilinéarité du produit scalaire, que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \langle u(f_j), f_j \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle \sum_{k=1}^{n} \langle f_j, e_k \rangle u(e_k), \sum_{p=1}^{n} \langle f_j, e_p \rangle e_p \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j,k,p \leq n} \langle f_j, e_k \rangle \langle f_j, e_p \rangle \langle u(e_k), e_p \rangle \\ &= \sum_{1 \leq k,p \leq n} \left(\langle u(e_k), e_p \rangle \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, e_k \rangle \langle f_j, e_p \rangle \right). \end{aligned}$$

Or, puisque la famille f est elle aussi orthonormée, on a :

$$\langle e_p, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e_p, f_j \rangle \langle e_k, f_j \rangle.$$

Ceci entraine (les indices de sommes sont indépendants donc on peut tout intervertir) :

$$\sum_{j=1}^{n} \langle u(f_j), f_j \rangle = \sum_{1 \leq k,p \leq n} \langle e_p, e_k \rangle \langle u(e_k), e_p \rangle = \sum_{1 \leq k,p \leq n} \delta_{k,p} \langle u(e_k), u(e_p) \rangle.$$

Ceci entraine qu'il ne faut garder dans la double somme que les termes où $k = p$, ce qui redonne bien T.

En utilisant l'exercice précédent, on peut aussi remarquer que $\langle u(e_i), e_i \rangle$ correspond par définition des coordonnées au coefficient d'indice (i,i) de la matrice de u dans la base e (puisque e est une base orthonormée de u). Ainsi, la quantité T définie n'est autre que la trace de u (quand la base e est orthonormée). Puisque les bases e et f sont toutes les deux orthonormées, la trace étant invariante par changement de base, les deux sommes sont égales.

Exercice d'application 12. Dans l'exercice 5, on a montré que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ étaient orthogonaux. On a donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ (c'est à dire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ mais que l'on a à priori pas d'égalité).

Pour conclure sur l'égalité, il ne reste plus qu'à montrer l'égalité des dimensions. Or, on sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. Or, on a aussi $\dim((\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp) = n^2 - \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ car on est en dimension finie. On a une inclusion et l'égalité des dimensions donc les deux espaces sont égaux. On en déduit que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice d'application 13.

1) On a $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 2x + 3z \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ces deux vecteurs sont libres (car non colinéaires) donc ils forment une base de P.

2) On note e_1 et e_2 ces deux vecteurs pour reprendre les notations du cours. On a alors

$$f_1 = \frac{e_1}{||e_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite $f_2' = e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Puisque $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, on a que (f_1, f_2) est une base orthonormée de P.

Si vous êtes partis d'autres vecteurs e_1 et e_2, vous aurez aussi des vecteurs différents pour f_1 et f_2. Par contre votre réponse à la question suivante devrait être la même et vous permettre de vérifier vos calculs !

3) On en déduit que pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
p_F^\perp\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f_1 \rangle f_1 + \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f_2 \rangle f_2 \\
&= \frac{x + 2y}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-6x + 3y + 5z}{70} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 50x + 10y - 30z \\ 10x + 65y + 15z \\ -30x + 15y + 25z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10x + 2y - 6z \\ 2x + 13y + 3z \\ -6x + 3y + 5z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour trouver la matrice demandée, il suffit de calculer l'image par $p_F^\perp$ des vecteurs de la base canonique donc de prendre $x = 1$ et $y = z = 0$ pour la première colonne, puis $x = 0$, $y = 1$ et $z = 0$ pour la seconde et enfin $x = y = 0$ et $z = 1$ pour la dernière colonne. On obtient finalement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{cano}}(p_F^{\perp}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 13 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 14.

1) Puisque P est d'équation $2x - y + 3z = 0$, un vecteur normal à P est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. En le normalisant, on obtient comme vecteur unitaire normal à P :

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2) On en déduit que pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} p_{F^\perp}^{\perp}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f_3\rangle f_3 \\ &= \frac{2x - y + 3z}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathrm{cano}}(p_{F^\perp}^{\perp}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ et enfin :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{cano}}(p_F^{\perp}) = I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathrm{cano}}(p_{F^\perp}^{\perp}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 13 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien entendu la même matrice, mais avec beaucoup moins de calculs !

Exercice d'application 15. On a tout d'abord $Q_0 = \frac{1}{||1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, on calcule :

$$P_1 = X - \langle X, Q_0\rangle Q_0 = X - \frac{1}{2}\int_0^2 t dt = X - 1.$$

On a donc $Q_1 = \frac{P_1}{||P_1||}$ où $||P_1||^2 = \int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{2}{3}$. On a donc :

$$Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(X - 1).$$

Enfin, on calcule :

$$\begin{aligned} P_2 &= X^2 - \langle X^2, Q_0\rangle Q_0 - \langle X^2, Q_1\rangle Q_1 \\ &= X^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt - \frac{3}{2}\int_0^2 (t^3 - t^2) dt (X - 1) \\ &= X^2 - \frac{4}{3} - 2(X - 1) \\ &= X^2 - 2X + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Enfin, on calcule $||P_2|| = \sqrt{\int_0^2 \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{8}{45}}$ ce qui donne :

$$Q_2 = \frac{P_2}{||P_2||} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(X^2 - 2X + \frac{2}{3}\right).$$

Exercice d'application 16. Tout d'abord, on peut projeter X^2 sur $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(Q_0, Q_1)$ et où (Q_0, Q_1) est une base orthonormée de cet espace. On a alors :

$$p^{\perp}_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \langle X^2, Q_0 \rangle Q_0 + \langle X^2, Q_1 \rangle Q_1 = 2X - \frac{2}{3}.$$

La distance recherchée est alors :

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = ||X^2 - 2X + \frac{2}{3}|| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}.$$

On peut aussi remarquer que si on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, alors $\text{Vect}(Q_2)$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}_1[X]$. On a donc en projetant X^2 sur $\text{Vect}(Q_2)$:

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = ||\langle X^2, Q_2 \rangle Q_2|| = \sqrt{\int_0^2 t^2(t^2 - 2t + \frac{2}{3})dt} = \sqrt{\frac{8}{45}}.$$

On retrouve bien sûr dans les deux cas le même résultat.

Exercice d'application 17.

1) Un vecteur normal à H est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$d(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, H) = \frac{|\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle|}{||\vec{n}||} = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n k^2}} = \sqrt{\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}}.$$

Exercice d'application 18. $\mathcal{P}$ est le plan passant par exemple par le point $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction l'espace vectoriel P d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Une base de P est par exemple $(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Attention, $\mathcal{P}$ n'a pas de base ! Ce n'est pas un espace vectoriel !

Exercice d'application 19. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}$ passe par $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc en notant $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ce qui entraine $d(B, \mathcal{P}) = \dfrac{|\langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle|}{||\vec{n}||} = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$.