À chercher pour lundi 03/10/2022, corrigé

TD 4 :

Exercice 13. L'équation $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ se simplifie à l'aide de la forme trigonométrique. En effet, on a :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i} & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}} \\ & = & 2^{-1/2} \cdot \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{i\pi}{6}}} \\ & = & 2^{-1/2} \cdot e^{\frac{5i\pi}{12}}. \end{array}$$

On doit donc résoudre l'équation $z^8 = 2^{-1/2} \cdot e^{\frac{5i\pi}{12}}$. Pour résoudre cette équation, il suffit de trouver une solution particulière et on obtient les autres solutions en multipliant par les racines huitièmes de l'unité. On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ 2^{-\frac{1}{16}} \cdot e^{\frac{5i\pi}{96}} \cdot e^{\frac{ik\pi}{4}},\ k \in [\![0,7]\!] \right\}.$$

Exercice 17. La difficulté pour résoudre ces équations est en général de trouver une racine carrée du discriminant. Attention, quand un polynôme de degré 2 est à coefficients complexes, les racines n'ont aucune raison d'être conjuguées !

1) Soit **(E')** $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$. On a $\Delta = -4 - 4(2-4i) = -12 + 16i$. Une racine carrée de $\Delta = 2 + 4i$ (on la trouve avec la méthode habituelle). Les solutions de **(E)** sont donc :

$$\frac{2i - (2+4i)}{2} = -1 - i \text{ et } \frac{2i + (2+4i)}{2} = 1 + 3i.$$

2) Soit **(E')** $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$. On a $\Delta = -4 - 4(-1+2i) = -8i$. On a donc $\Delta = 8e^{\frac{3i\pi}{2}}$. Une racine carrée de Δ est donc par exemple $2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}} = -2 + 2i$. Les solutions de **(E')** sont donc :

$$\frac{2i - (-2+2i)}{2} = 1 \text{ et } \frac{2i + (-2+2i)}{2} = -1 + 2i.$$

3) Soit (E) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$. On a $\Delta = (-16)^2 - 16(11-12i) = 16(16-11+12i) = 16(5+12i)$. En cherchant une racine carrée de $5 + 12i$ sous forme algébrique, on trouve qu'une racine carrée de Δ est $\delta = 4(3+2i)$. On en déduit que les racines sont :

$$\frac{16 + 4(3+2i)}{8} = \frac{7}{2} + i \text{ et } \frac{16 - 4(3+2i)}{8} = \frac{1}{2} - i.$$

4) Soit **(E")** $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0,\ \theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & 4e^{2i\theta} - 8i\sin(\theta)e^{i\theta} \\ & = & 4e^{i\theta} \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta) - 2i\sin(\theta)) \\ & = & 4e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} \\ & = & 4. \end{array}$$

Les solutions de **(E")** sont donc :

$$\frac{2e^{i\theta}+2}{2} = 1+e^{i\theta} \text{ et } \frac{2e^{i\theta}-2}{2} = -1+e^{i\theta}.$$

Exercice 18. Pour résoudre l'équation $z^{2n}-2\cos(n\theta)z^n+1=0$ où $\theta \in \mathbb{R}$, nous allons commencer par résoudre l'équation $Z^2-2\cos(n\theta)Z+1=0$. Son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2(n\theta)-1) = 4i^2\sin^2(n\theta)$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$Z_- = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta) \text{ et } Z_+ = \cos(n\theta)-i\sin(n\theta).$$

Sous forme trigonométrique, on trouve donc $Z_- = e^{in\theta}$ et $Z_+ = e^{-in\theta}$. Il reste à calculer les racines n-ièmes de ces complexes afin de résoudre l'équation initiale. On en déduit que l'ensemble des solution de l'équation de l'énoncé est :

$$\left\{e^{i\theta+\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0,n-1]\!]\right\} \cup \left\{e^{-i\theta+\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0,n-1]\!]\right\}.$$

On remarque que l'on trouve à priori $2n$ solutions, ce qui est normal car on résout une équation de degré $2n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $T=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.

1) On a $\overline{\omega}=\omega^6$, $\overline{\omega^2}=\omega^5$, $\overline{\omega^3}=\omega^4$, etc. On a donc :

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{\omega}+\overline{\omega^2}+\overline{\omega^4} \\ &= \omega^6+\omega^5+\omega^3 \\ &= T \end{aligned}$$

S et T sont donc conjugués. Étudions à présent la partie imaginaire de S. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(S) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

On a $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 0$ car la fonction sinus est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Le terme $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ est positif car la fonction sinus est positive sur $[0,\pi]$. On en déduit que la partie imaginaire de S est positive.

2) Puisque la somme des racines septiemes de l'unité est nulle, on en déduit que $S+T=-1$. De plus, on a (on utilise pour simplifier $\omega^7=1$) :

$$\begin{aligned} ST &= (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6) \\ &= \omega^4+\omega^6+1+\omega^5+1+\omega+1+\omega^2+\omega^3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ceci entraine que S vérifie l'équation $S(-1-S)=2$, c'est à dire l'équation de degré 2 $S^2+S+2=0$. Cette équation admet deux racines complexes qui sont $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Puisque l'on sait que S a une partie imaginaire positive, on a alors que $S=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. On en déduit que $T=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

TD 4bis trigo :

Exercice 9. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) Posons $A = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $B = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on a $A = n+1$ et $B = 0$. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}
A + iB &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \cdot \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \cdot \frac{2i\sin((n+1)\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} \\
&= (\cos(n\theta/2) + i\sin(n\theta/2)) \cdot \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on en déduit A et B.

2) Notons $A = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $B = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$. On a alors $A + B = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
A - B &= \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(k\theta) - \sin^2(k\theta)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{2ik\theta}) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{2i\theta}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors on a $A = n+1$ et $B = 0$. Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $e^{2i\theta} \neq 1$. On a donc, en calculant la somme géométrique et en factorisant ensuite par l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
A - B &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i\theta(n+1)} - 1}{e^{2i\theta} - 1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}} \cdot \left(\frac{2i\sin((n+1)\theta)}{2i\sin(\theta)}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\theta}\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right) \\
&= \frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

On a donc, pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$:

$$A = \frac{n+1+\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}{2} \text{ et } B = \frac{n+1-\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}{2}.$$

3) On procède toujours de la même façon. Posons $C = \sum_{k=0}^{n} \cos((2k-1)\theta)$. On a :

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{(2k-1)i\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{2i\theta}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

On a donc deux cas. Si $2\theta \equiv 0\ [2\pi]$, autrement dit si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors on a $C = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}(n+1))$. On a donc $C = (n+1)\cos(\theta)$. Sinon, on a (on utilise encore une fois l'arc moitié et on calcule ensuite la partie réelle) :

$$\begin{aligned}
C &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\frac{e^{2(n+1)i\theta}-1}{e^{2i\theta}-1}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}e^{in\theta}\cdot\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right)\\
&= \cos((n-1)\theta)\cdot\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

4) Posons $D = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\cos^k(\theta)e^{ik\theta}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(\theta)e^{i\theta}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

On a donc deux cas. Si $\cos(\theta)e^{i\theta} = 1$, c'est à dire ssi $\theta \equiv 0\ [\pi]$ (on doit avoir $e^{i\theta}$ réel, donc égal à ± 1. Il ne reste plus qu'à vérifier que le produit est toujours égal à 1, les deux termes étant toujours de même signe). Dans ce cas, on a alors $D = n+1$. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}
D &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}\cos^{n+1}(\theta)-1}{e^{i\theta}\cos(\theta)-1}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(e^{i(n+1)\theta}\cos^{n+1}(\theta)-1)(e^{-i\theta}\cos(\theta)-1)}{|e^{i\theta}\cos(\theta)-1|^2}\right)\\
&= \frac{\cos(n\theta)\cos^{n+2}(\theta)-\cos((n+1)\theta)\cos^{n+1}(\theta)-\cos^2(\theta)+1}{\sin^2(\theta)}\\
&= 1+\cos^{n+1}(\theta)\cdot\frac{\cos(n\theta)\cos(\theta)-\cos((n+1)\theta)}{\sin^2(\theta)}\\
&= 1+\cos^{n+1}(\theta)\cdot\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$