5. Applications, corrigé

Exercice 1.

1) Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$. f n'est alors par surjective car aucun élément ne s'envoie sur 0 (en effet, le seul antécédent possible pour 0 serait -1 et $-1 \notin \mathbb{N}$). Elle est cependant injective puisque si $f(n_1) = f(n_2)$ avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, alors on a $n_1 + 1 = n_2 + 1$, soit $n_1 = n_2$. La fonction f est donc injective.

2) Posons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$. Cette application est surjective et injective et est donc bijective. On peut montrer qu'elle est injective avec la même preuve qu'à la première question. Elle est également surjective puisqu'un antécédent de $y \in \mathbb{N}$ est $x = y - 1 \in \mathbb{Z}$.

3) Posons $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \right.$. Montrons que s est bijective (c'est à dire injective et surjective). Pour cela, fixons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et étudions l'équation $s(x,y) = (a,b)$. On a :

$$s(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = a \\ x = b \end{array} \right. .$$

Ceci entraine que l'équation $s(x,y) = (a,b)$ admet une unique solution, qui est $(x,y) = (b,a)$ qui est bien dans $\mathbb{R}^2$. Ceci entraine que s est surjective (car il existe au moins une solution) et injective (car la solution est unique). Elle est donc bijective.

On peut aussi remarquer que $s \circ s = Id_{\mathbb{R}^2}$ ce qui prouve que s est inversible (elle est son propre inverse). Ceci entraine que s est bijective.

4) Vérifions tout d'abord que h est injective. En effet, si $h(x_1,y_1) = h(x_2,y_2)$, alors on a le système $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \\ 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2 \end{array} \right.$. Avec les deux premières équations, on a $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$ ce qui prouve l'injectivité.

h n'est cependant pas surjective. On a par exemple $(0,0,0)$ qui n'a pas d'antécédent par h (puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 \neq 0$).

5) Posons $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{array} \right.$. En reprenant la même méthode qu'en cours, on a que c n'est pas injective (car par exemple $c(1) = c(e^{\frac{2i\pi}{5}})$ mais qu'elle est surjective (puisque tout nombre complexe admet une racine cinquième dans $\mathbb{C}$, si $z = \rho e^{i\theta}$, un antécédent est par exemple $\rho^{1/5} e^{i\theta/5}$ (ou 0 si $z = 0$).

6) Posons $d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ 2n & \mapsto & 2n+1 \\ 2n+1 & \mapsto & 2n \end{array} \right.$. La fonction d envoie donc les entiers pairs sur leur successeur et les entiers impairs sur leur prédécesseur. On va donc montrer que cette fonction est injective et surjective (et donc bijective).

d est surjective. En effet, si on fixe $y \in \mathbb{Z}$, alors soit y est pair et alors on a $f(y+1) = y$ (car $y+1$ est impair et est donc envoyé sur $y-1$) et si y est impair, alors on a $f(y-1) = y$ (car $y-1$ est pair et est envoyé sur $y-1+1$). Dans tous les cas, on a construit un antécédent appartenant à $\mathbb{Z}$ à y. On en déduit que f est surjective.

Montrons à présent l'injectivité. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 \neq x_2$. Montrons que $d(x_1) \neq d(x_2)$. Si x_1 et x_2 ne sont pas de même parité, alors $d(x_1)$ et $d(x_2)$ ne sont pas de même parités et ne peuvent donc pas être égaux. Supposons à présent que x_1 et x_2 sont de même parité. Alors, si ils sont pairs, on a $d(x_1) = x_1 + 1$ et $d(x_2) = x_2 + 1$ ce qui prouve que $d(x_1) \neq d(x_2)$ et si ils sont impairs, on a $d(x_1) = x_1 - 1$ et $d(x_2) = x_2 - 1$ ce qui prouve que $d(x_1) \neq d(x_2)$. Dans tous les cas, on a $d(x_1) \neq d(x_2)$ ce qui prouve que d est injective.

On peut aussi remarquer que $d \circ d = Id_{\mathbb{Z}}$ ce qui prouve que d est inversible (elle est son propre inverse). Ceci entraine que d est bijective.

Exercice 2.

1) voir cours.

2) La réciproque est fausse. Si on prend par exemple la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ x & \mapsto & 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, injective (elle est même bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) mais elle n'est pas strictement monotone.

Exercice 6.

1) Montrons le sens ($\Leftarrow$). Supposons par exemple f injective (la preuve est la même si g est injective). Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. On a alors $f(x_1) = f(x_2)$ et $g(x_1) = g(x_2)$. Puisque f est injective, on a donc $x_1 = x_2$. On a bien prouvé que h est injective.

Donnons un contre-exemple au sens ($\Rightarrow$). Prenons par exemple $f : x \mapsto x^2$ et $g : \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto -1 \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \geq 0 \end{array} \right.$. On a alors ni f injective (car $f(-1) = f(1)$) ni g injective (car $g(0) = g(1)$). Montrons cependant que h est injective.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. On a alors $f(x_1) = f(x_2)$ donc $x_1^2 = x_2^2$, soit $x_1 = \pm x_2$. Or, on a aussi $g(x_1) = g(x_2)$ donc x_1 et x_2 sont de même signe. On en déduit que $x_1 = x_2$ ce qui prouve l'injectivité de h.

2) Montrons le sens ($\Rightarrow$). Soient $b \in \mathbb{R}$. On a alors $(b, b) \in \mathbb{R}^2$ et il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = (b, b)$ si h est surjective. On a alors $f(x) = b$ et $g(x) = b$ ce qui prouve que f et g sont surjectives.

Le sens ($\Leftarrow$) est cependant faux. On va donner un contre exemple en prenant $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$. Les deux fonctions sont surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais h n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (par exemple le point $(1, 2)$ n'est jamais atteint).

Exercice 7. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (xy, x + y) \end{array} \right.$.

1) Commençons par chercher si f est surjective. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Essayons de résoudre le système $f(x, y) = (z_1, z_2)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} xy = z_1 \\ x + y = z_2 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(z_2 - x) = z_1 \\ y = z_2 - x \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - xz_2 + z_1 = 0 \\ y = z_2 - x \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Or, le discriminant de l'équation en x est $z_2^2 - 4z_1$. Il est alors direct qu'un couple tel que ce discriminant est strictement négatif (par exemple $(1, 0)$) n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par f.

f n'est donc pas surjective.

Montrons à présent que f n'est pas injective. Puisque dans l'équation précédente, x, dans le cas où le discriminant est strictement positif, peut prendre deux valeurs possibles (deux solutions réelles distinctes). On a donc de bonnes raisons de penser que f n'est pas injective. Cherchons par exemple dans un cas simple où par exemple $z_1 = -1$ et $z_2 = 0$. On a alors $f(-1,1) = f(1,-1) = (-1,0)$ et $(-1,1) \neq (1,-1)$. f n'est donc pas injective.

2) $\mathbb{R}$ étant un sous ensemble de $\mathbb{C}$ et f n'était pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle ne l'est pas non plus de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Par contre à présent, f est surjective. En effet, si on reprend le système utilisé en 1), le discriminant $\Delta = z_2^2 - 4z_1$ admet toujours une racine carrée dans $\mathbb{C}$. Notons δ une de ses racines carrées. On remarque alors que le système admet par exemple comme solution

$$\begin{cases} x = \dfrac{z_2+\delta}{2} \\ y = \dfrac{z_2-\delta}{2}. \end{cases}$$

Vérifions que le couple (x,y) ainsi trouvé vérifie bien $f(x,y) = (z_1,z_2)$. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{z_2+\delta}{2}, \frac{z_2-\delta}{2}\right) &= \left(\frac{z_2^2-\delta^2}{4}, z_2\right) \\ &= \left(\frac{z_2^2-(z_2^2-4z_1)}{4}, z_2\right) \\ &= (z_1,z_2) \end{aligned}$$

f est donc surjective de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 9. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & a + \dfrac{1}{b} \end{array} \right.$.

1) Montrons que f n'est pas surjective. Montrons par exemple que $\dfrac{2}{3}$ n'admet pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ tel que $a + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{3}$.

On a alors $3a + \dfrac{3}{b} = 2$. On doit donc avoir $\dfrac{3}{b}$ entier, ce qui implique $b = 3$ puisque b est strictement plus grand que 1. On a donc $3a = 2$ ce qui est absurde car a est entier !

f n'est donc pas surjective.

2) Montrons que f est injective. Soient (a,b) et (a',b') appartenant à $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ tels que $f(a,b) = f(a',b')$. On a donc :

$$a - a' = \frac{1}{b'} - \frac{1}{b}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b'} \leq 1 - \dfrac{1}{b'} < 1 (\text{car } b \text{ et } b' \text{ sont entiers}) \\ \\ \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b'} \geq \dfrac{1}{b} - 1 > -1 \text{ (idem)} \end{cases}$$

On a donc $a - a'$ entier strictement compris entre -1 et 1. On a donc $a - a' = 0$, ce qui entraîne $a = a'$ et $b = b'$.

f est donc injective.

Exercice 10. Tout d'abord f est bien définie car $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$ (en effet, on a $e^z \times e^{-z} = 1 \neq 0$). L'exponentielle est donc bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

Pour la surjectivité, on fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et on étudie l'équation $e^z = a$. Si on écrit $a = \rho_a e^{i\theta_a}$ avec $\rho_a > 0$ et $\theta_a \in \mathbb{R}$ (possible car a est non nul) et que l'on cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^z = a \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \rho_a e^{i\theta_a}.$$

Puisque $e^x > 0$ et $\rho_a > 0$, on peut identifier modules et arguments. On a donc :

$$e^z = a \Leftrightarrow e^x = \rho_a \text{ et } y \equiv \theta_a \ [2\pi].$$

On voit donc que $z = \ln(\rho_a) + i\theta_a \in \mathbb{C}$ est un antécédent de a. a ayant été pris quelconque dans $\mathbb{C}^*$, on a bien l'exponentielle surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

On a trouvé plusieurs solutions donc l'exponentielle n'est pas injective. Par exemple, $e^0 = e^{2i\pi} = 1$.

Exercice 12. φ n'est pas injective car par exemple les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto 2x$ ont la même intégrale entre 0 et 1. φ est surjective car toutes les valeurs réelles sont atteintes. Par exemple, si on prend $a \in \mathbb{R}$ et la fonction $f : x \mapsto a$, alors $\varphi(f) = a$.

Exercice 13. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$. Pour trouver une condition sur a, b, c, on étudie l'équation $f(x_1) = f(x_2)$ où $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\begin{array}{cl} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Leftrightarrow & ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c \\ \Leftrightarrow & a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_1 - x_2)(a(x_1 + x_2) + b) = 0. \end{array}$$

Or, on voudrait que ceci implique quelque soit les valeurs possibles pour x_1 et x_2 dans $\mathbb{Z}$ que $x_1 = x_2$. Autrement dit, il faut que le membre de droite ne s'annule jamais. On voit donc que la condition cherchée est très certainement que a ne divise pas b. Vérifions le :

Supposons dans un premier temps que a divise b. On a alors $b = ac$ avec $c \in \mathbb{N}$. Si $c \neq 0$, on remarque alors que si $x_1 = 0$ et $x_2 = -c$, on a $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$ d'après le calcul précédent. Si $c = 0$ (ce qui implique $b = 0$), on remarque que $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ vérifie alors $f(x_1) = f(x_2)$. Dans les deux cas, la fonction f n'est pas injective.

Supposons à présent que a ne divise pas b. Alors, on a pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $a(x_1+x_2)+b \neq 0$. Ceci entraine en reprenant le calcul initial que $f(x_1) = f(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$. On a donc f injective.

Exercice 15. Soit $f : E \to E$.

1) Si f est bijective, il est clair que f est injective. Réciproquement, supposons f injective. Montrons qu'elle est surjective. Fixons donc $y \in E$. On remarque que $f(f(y)) = f(y)$ (car $f \circ f = f$). Puisque f est injective, on a donc $f(y) = y$. On en déduit que f est surjective (car y admet lui-même comme antécédent). f est donc bijective.

On remarque que dans ce cas, on a $f = Id_E$ puisque l'on peut composer par f^{-1} l'égalité $f \circ f = f$, ce qui donne $f = Id_E$.

2) On suppose que $f \circ f \circ f = f$. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose f injective. Montrons que f est surjective. Pour cela, fixons $y \in E$. On a alors $f(y) = f(f(f(y)))$. Puisque f est injective, on a alors $y = f(f(y))$ ce qui prouve que f est surjective (puisque l'on a construit un antécédent à y par f).

($\Leftarrow$) On suppose f surjective. Montrons que f est injective. Pour cela, fixons $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Puisque f est surjective, il existe $y_1, y_2 \in E$ tels que $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$. Puisque $f(f(f(x_1))) = f(x_1)$, on en déduit que $f(f(y_1)) = y_1$. De même, $f(f(y_2)) = y_2$. Or, on a $f(f(y_1)) = f(x_1)$ et $f(f(y_2)) = f(x_2)$. On en déduit donc que $y_1 = y_2$ (car $f(x_1) = f(x_2)$). On a donc $f(y_1) = f(y_2$, ce qui entraine $x_1 = x_2$. On a donc bien f injective.

Exercice 17.

1) déjà fait

2) f_2 est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour $x > 0$, $f_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2-x}{x^3}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,2]$ et strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ (la dérivée ne s'annulant que en 2). On a enfin $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$. Puisque f_2 est continue (car dérivable), d'après les informations précédentes, le théorème de la bijection continue nous permet d'affirmer que f_2 est bijective de $]0,2]$ dans $\left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$ et bijective de $[2,+\infty[$ dans $\left[\dfrac{1}{4}, 0\right[$.

On en déduit que f_2 n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ (par exemple 1 n'a pas d'antécédent) et n'est pas injective non plus (par exemple $\dfrac{1}{8}$ admet deux antécédents par f_2, l'un dans $]0,2[$ et l'autre dans $]2,+\infty[$.

3) Remarquons déjà que f_3 n'est pas injective puisque $f_3(0) = f_3(\pi) = 0$. Pour la surjectivité, on remarque qu'en $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f_3(x_n) = e^{x_n} \times 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_3(x_n) = +\infty$. De la même manière, en $y_n = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_3(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} -e^{y_n} = -\infty$. Par théorème des valeurs intermédiaires (f_3 étant continue), on en déduit que f_3 est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Remarquons tout d'abord que f est impaire. On peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. On a donc f continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante, telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On en déduit que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1[$ (d'après le théorème de la bijection continue).

Par imparité, f est également bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $]-1,0]$. On en déduit finalement que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ (car elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue, et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$).

2) Soit $y \in]-1,1[$. On étudie l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que la question précédente nous garantit l'existence d'un unique x solution (puisque f est bijective, elle admet une réciproque). On a $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+|x|} = y$. On peut alors séparer deux cas :

- Si $y \geq 0$, alors on doit nécessairement avoir $x \geq 0$ (si $x < 0$, on a $f(x) < 0$ et $y \geq 0$: absurde). On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+x} = y \\ &\Leftrightarrow \quad x = y + xy \\ &\Leftrightarrow \quad x(1-y) = y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

  Remarquons que le x trouvé est bien positif puisque $y \in [0,1[$.

- De la même manière, si $y \leq 0$, on doit avoir $x \leq 0$ (même argument) et en résolvant de la même manière, on trouve que $f(x) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$ (on trouve bien x négatif car $y \in \,]-1,0]$.

On a donc trouvé que $f(x) = y$ si et seulement si $x = g(y)$ avec $g : \begin{cases}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1-y} \text{ si } y \geq 0 \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1+y} \text{ si } y \leq 0 \end{cases}$.

On a donc $f^{-1} = g$. Pour avoir une formule plus « compacte », on peut remarquer que pour tout $y \in \,]-1,1[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.

Exercice 19. On pose $f(x) = x^3 + x - 8$.

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc :

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ et croissante donc elle est surjective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim\limits_{-\infty} f(x), \lim\limits_{+\infty} f(x)[$. Or, on a pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}\right)$. Par composition de limites, on a donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

f est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) On a $f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ (car la fonction $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc $x_0 = 2$.

De plus, d'après la question précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas (discriminant strictement négatif). f^{-1} est donc dérivable sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et on a :

$$(f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

soit puisque $f(2) = 2$, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{13}$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n_x \in \mathbb{N}^* \ /\ f^{n_x}(x) = x$.

- Surjectivité. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(y) = y$ (par hypothèse sur f). On a donc $n - 1 \geq 0$ donc f^{n-1} existe et $f(f^{n-1}(y)) = y$. Puisque $f^{n-1}(y) \in \mathbb{R}$ (car f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a construit un antécédent à y par f. On en déduit que f est surjective.

- Injectivité. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n_1}(x_1) = x_1$ et $f^{n_2}(x_2) = x_2$. Le problème est qu'à priori n_1 et n_2 sont distincts et on ne « retombe » pas en même temps sur x_1 et x_2. Cependant, on remarque que :

$$\begin{array}{rcl} f^{2n_1}(x_1) & = & f^{n_1}(f^{n_1}(x_1)) \\ & = & f^{n_1}(x_1) \\ & = & x_1. \end{array}$$

De la même façon, on montre que $f^{3n_1}(x_1) = x_1$. On peut en fait montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{nn_1}(x_1) = x_1$. De la même manière, on montre que $f^{nn_2}(x_2) = x_2$. Posons alors $N = n_1 n_2 - 1 \in \mathbb{N}$. On a $f(x_1) = f(x_2)$ donc en composant par f^N, on trouve :

$$f^{n_1 n_2}(x_1) = f^{n_1 n_2}(x).$$

Or, d'après ce que l'on vient de démontrer, on a $f^{n_1 n_2}(x_1) = x_1$ et $f^{n_1 n_2}(x_2) = x_2$. On a donc bien $x_1 = x_2$, f est donc injective.

Exercice 21. Il est important pour bien comprendre cet exercice de faire un dessin en même temps, n'hésitez pas à venir me voir pour voir comment le faire. Puisque f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $f(a) = 0$. Tous les éléments qui sont dans $[\![0, a]\!]$ s'envoient sur des éléments de $\mathbb{N}$ (distincts car f est injective). Notons $M = \max(f(0), f(1), \ldots, f(a))$. On considère ensuite parmi les entiers $n > a$ le plus petit tel que $f(n)$ ne doit pas dans $[\![0, M]\!]$. On le note b. Il vérifie $a < b$ et $f(b) > 0$ (puisque $f(a) = 0$ et que $b \neq a$ et que f est injective. De plus, si on considère $2f(b)$, cet entier est strictement plus grand que b et il admet un antécédent par f que l'on note c. Où est situé cet élément c ? Il ne peut pas être égal à a ou b (car f est injective). Il ne peut pas être plus petit que M (car on a $2f(b) > f(b) > M$ et tous les éléments plus petits que a s'envoient dans $[\![0, M]\!]$. Il ne peut pas non plus être entre a et b sinon, on aurait $a < c < b$ et $f(c) > M$, ce qui contredit notre définition de b (le plus petit entier plus grand que a tel que $f(b) > M$). On en déduit que $c > b$.

Bilan : on a construit $a < b < c$ tels que $\dfrac{f(a) + f(c)}{2} = \dfrac{0 + 2f(b)}{2} = f(b)$.