DM 18, pour le mardi 30/05/2023

PROBLÈME
Marche dans New-York

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

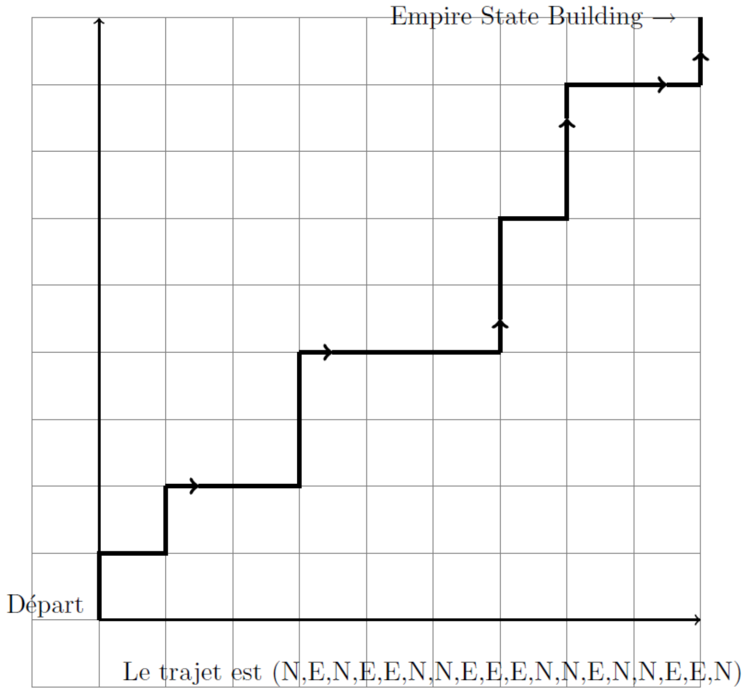
À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle *étape* le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit l un entier naturel **non nul**. Un trajet de l étapes est représenté par une suite $(e_1, e_2, \ldots, e_l)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et l, $e_i = E$ si, au i-ième croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $e_i = N$ si, au i-ième croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.

On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. À chaque trajet de l étapes (l est un entier naturel **non nul**), on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leq k \leq l$ définies par récurrence par :

- $x_0 = y_0 = 0$
- pour $1 \leq k \leq l,\ (x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



1)

a) Écrire en langage Python une fonction $deplacement(L, a, b)$ dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L = "N"$ et $(a+1, b)$ si $L = "E"$.

b) Écrire une fonction $chemin(m)$ où m est une chaîne constituée des caractères "N" et "E" et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre c_l de trajets comportant exactement l étapes où $l \in \mathbb{N}^*$.

3)

a) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ étant égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.

b) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de chemins de longueur $2n$ passant pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$.

a) Déterminer u_1.

b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geq 2$.

c) Soit $n \geq 2$. On admet, pour des raisons de symétrie, que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. *Vous pouvez démontrer cette affirmation en fin de devoir s'il vous reste du temps...*
Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d. On note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ et ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_n = 2 \times \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

Pour $n \geq 1$, on note v_n la probabilité que le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$ si on suppose tous les chemins équiprobables (autrement dit si à chaque étape, le piéton a une chance sur deux d'aller vers le nord et une chance sur deux d'aller vers l'est).

g) Vérifier que $v_1 = \dfrac{1}{2}$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

5)

a) Déterminer le réel a tel que quand n tend vers $+\infty$:

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N).$$

c) En étudiant la monotonie de la suite $w_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln(N)$, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

d) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}.$$

e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Que peut-on en déduire ?