TRAVAUX DIRIGÉS OS6
Oscillateur harmonique

Niveau 1

*Exercice 1. Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

Indiquer l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux :

a. $x_1(t) = 15\cos(100\pi t + 0{,}5)$

b. $x_2(t) = 5\sin(7{,}854.10^6 t)$

c. $x_3(t) = 2\sin\left(120\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

d. $x_4(t) = 15\cos(2{,}0.10^3 \pi t) - 5\sin(2{,}0.10^3 \pi t)$

<u>Rappel mathématique</u> : $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Niveau 2

Exercice 2. Solutions d'équations différentielles

Soit l'équation différentielle $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ où ω_0 est une constante.

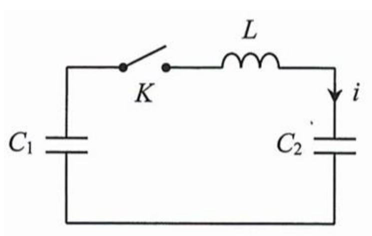
1. Vérifier que les fonctions suivantes sont bien des solutions.
   a. $x_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec A et B des constantes
   b. $x_2(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec C et φ des constantes
   c. $x_3(t) = D\sin(\omega_0 t + \psi)$ avec D et ψ des constantes
2. Que représentent les constantes C et φ pour le signal $x_2(t)$?
3. Représenter le graphe temporel de $x_3(t)$ pour $\psi = 0$, $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, $\psi = \pi$ et $\psi = 3\dfrac{\pi}{2}$.

Soit l'équation différentielle $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = a$ où ω_0 et a sont des constantes.

4. Déterminer la solution complète de cette équation et tracer son graphe.

Exercice 3. Circuit oscillant *LC*

Dans le circuit ci-dessous, le condensateur de capacité C_1 porte sur son armature supérieure une charge q_0, le condensateur de capacité C_2 étant déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On cherche à déterminer l'évolution temporelle de l'intensité $i(t)$ du courant parcourant le circuit.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par i(t) pour $t > 0$.

2. Déterminer, en les justifiant, les conditions initiales $i(0^+)$ et $\left(\dfrac{di}{dt}\right)_{t=0^+}$.
3. Déterminer l'expression de $i(t)$.
4. Représenter précisément le graphe temporel de $i(t)$.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

a. <u>Pour $x_1(t)$</u> : amplitude $X_M = 15$, période $T = \dfrac{2\pi}{100\pi} = 2{,}00.10^{-2}$ s, fréquence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{100\pi}{2\pi} = 50$ Hz, phase initiale $\varphi = 0{,}5$ rad

b. <u>Pour $x_2(t)$</u> : amplitude $X_M = 5$, période $T = \dfrac{2\pi}{7{,}854.10^6} = 8{,}000.10^{-7}$ s, fréquence $f = \dfrac{1}{T} = 1{,}250$ MHz, phase initiale $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ rad car $\sin(\theta) = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

c. <u>Pour $x_3(t)$</u> : amplitude $X_M = 2$, période $T = \dfrac{2\pi}{120\pi} = 1{,}67.10^{-2}$ s, fréquence $f = \dfrac{1}{T} = 60$ Hz, phase initiale $\varphi = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = -3\dfrac{\pi}{4}$ rad

d. <u>Pour $x_4(t)$</u> : $x_4(t) = X_M\cos(\omega_0 t + \varphi) = X_M\left(\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)\right)$

$x_4(t) = X_M\cos(\varphi)\cos(\omega_0 t) - X_M\sin(\varphi)\sin(\omega_0 t)$

<u>Identification</u> : $15\cos\left(2{,}0.10^3\pi t\right) = X_M\cos(\varphi)\cos(\omega_0 t)$ soit $X_M\cos(\varphi) = 15 \quad (1)$

et $-X_M\sin(\varphi)\sin(\omega_0 t) = -5\sin\left(2{,}0.10^3\pi t\right)$ soit $X_M\sin(\varphi) = 5 \quad (2)$

$$\begin{cases} X_M\cos(\varphi) = 15 \\ X_M\sin(\varphi) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {X_M}^2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = 15^2 + 5^2 \\ \tan(\varphi) = \dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} X_M = \sqrt{250} = 16 \\ \varphi = \tan^{-1}(0{,}33) = 0{,}32 \text{ rad} \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2{,}0.10^3\pi} = 1{,}0.10^{-3} \text{ s et } f = 1{,}0.10^3 \text{ Hz}$$

Exercice 2. Solutions d'équations différentielles

4. Solution complète : $x(t) = x_P + x_3(t) = x_P + x_2(t) = x_P + x_1(t)$ avec $x_P = \dfrac{a}{\omega_0^2}$

Exercice 3. Circuit oscillant *LC*

1. $\dfrac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ 2. $i(0^+) = 0$ et $\left(\dfrac{di}{dt}\right)_{t=0^+} = \dfrac{q_0}{LC_1}$

3. $i(t) = \dfrac{q_0}{LC_1\omega_0}\sin(\omega_0 t)$