Chapitre OS10

Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

➢ Problématique

FIGURE 1 : Chauffage avec une plaque à induction

Pourquoi un changement de fréquence de la tension d'alimentation permet de modifier l'intensité du courant dans la bobine ?

➢ Influence d'une **excitation sinusoïdale** sur la réponse **d'un oscillateur électrique amorti** (ou mécanique)

1 Régime transitoire et régime permanent sinusoïdal

1.1 Observations

➢ Oscillateur élec / méca. (syst. du 2ème ordre)

+ entrée sinusoïdale $\boxed{e(t) = E_0 \cos(\omega t) = E_0 \cos(2\pi f t)}$

⇨ Observation de la gdr de sortie $s(t)$

👁 Animation 1 : Physique et simulations numériques / Mécanique / Oscillateurs / Oscillateur harmonique excité

http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/pendexi.html

1 Régime transitoire et régime permanent sinusoïdal

1.1 Observations

➢ Graphes temporels

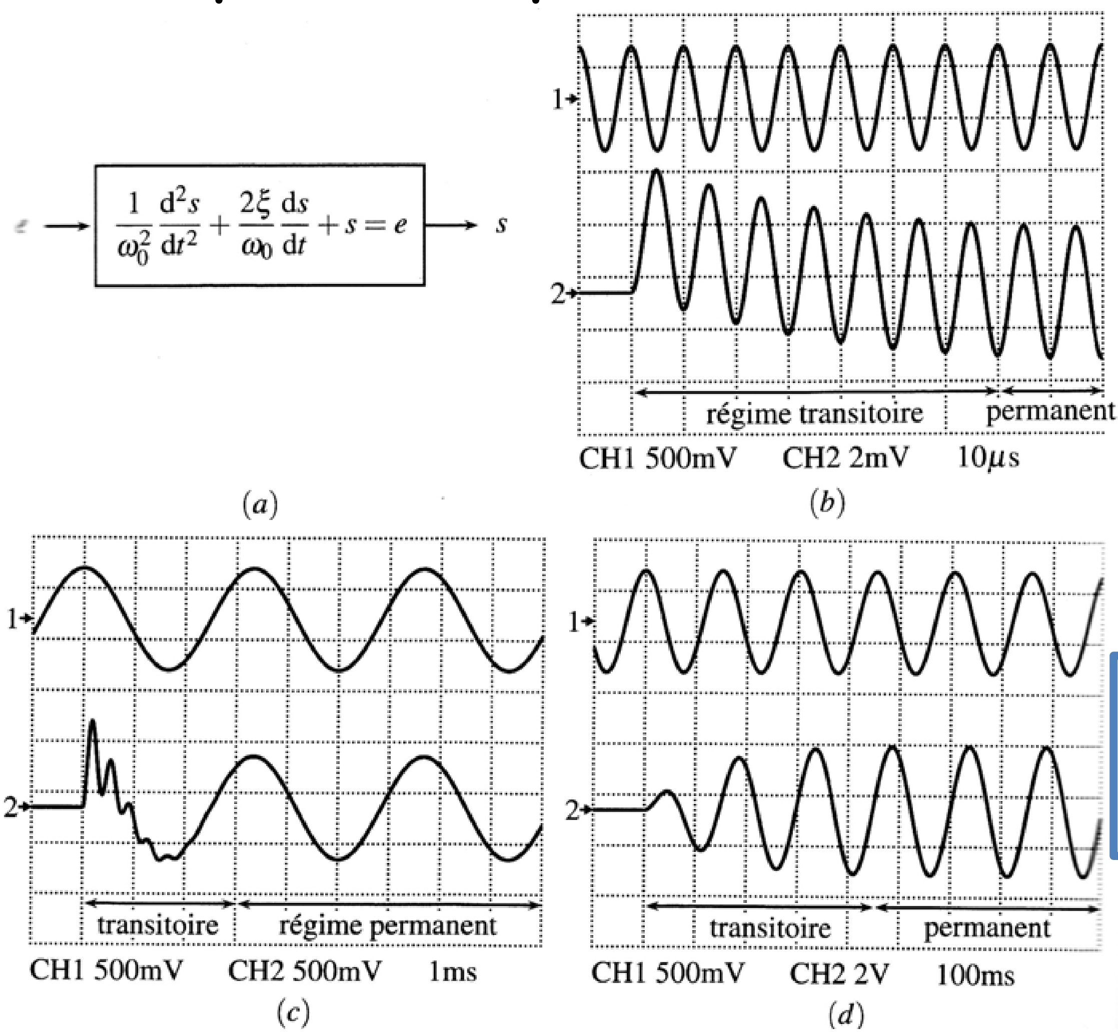


FIGURE 2 : Réponses d'un système du second ordre
(a) Système étudié : équation différentielle
(b) Système électrique : $f_0 = 5{,}0$ kHz , $\xi = 0{,}8$, $f = 100$ kHz
(c) Système électrique : $f_0 = 2{,}7$ kHz , $\xi = 0{,}1$, $f = 300$ Hz
(d) Système mécanique : $f_0 = 7$ Hz , $\xi = 0{,}2$, $f = 6{,}6$ Hz

Oscillateur = système

Excitation = entrée

1.2 Interprétation

- **Allure des réponses**
  - Allures variées
  - 2 régimes :
    - **régime établi ou permanent**
      = régime sinusoïdal forcé ou permanent
    - **régime transitoire : allures variées**
- **Expression de *s*(*t*)**

$$\boxed{s(t) = s_l(t) + s_f(t)}$$

2 Régime sinusoïdal permanent

2.1 Expression du signal sinusoïdal

En rég. sinus. forcé, expression réponse *s*(*t*):

$$\boxed{s(t) = S_M \cos(\omega t + \varphi)}$$

S_M : **amplitude de la réponse *s*(*t*)** (tjrs > 0)

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$: **pulsation de l'entrée *e*(*t*)** (rad.s^{-1})

φ : **phase à l'origine de *s*(*t*)** (rad)

2.2 Nombre complexe associé à un signal sinusoïdal

- <u>Nombre complexe $\underline{s}(t)$</u>

À tt signal $s(t) = S_M \cos(\omega t + \varphi)$ on associe:

$$\boxed{\underline{s}(t) = S_M e^{j(\omega t + \varphi)}}$$

3 infos caractéristiques : S_M ET ω ET φ

- <u>Expression du signal sinusoïdal associé à ce nombre complexe</u>

$$\boxed{s(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{s}(t)\right) = S_M \cos(\omega t + \varphi)}$$

2.2 Nombre complexe associé à un signal sinusoïdal

- **Autre expression du nombre complexe $\underline{s}(t)$**

Définition :

$$\boxed{\underline{s}(t) = S_M e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \underline{S} e^{j\omega t}}$$

$\underline{S}$ est l'**amplitude complexe** du nbre cplxe $\underline{s}(t)$

$$\boxed{\underline{S} = S_M e^{j\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\underline{S}\right| = S_M \text{ : amplitude du signal } s(t) \\ \arg(\underline{S}) = \varphi \text{ : phase du signal } s(t) \end{cases}}$$

- **Utilisation de la notation complexe**

Association d'1 **nb complexe** à ch. grandeur sinusoïdale

Ttes les gdrs (rég. sinus. perm) : **même fréq**. (= fréq. entrée)

Factorisation par le terme $e^{j\omega t}$ puis simplification

Travail uniquement avec les amplitudes complexes

Outils mathématiques 7 : Nombres complexes

2.3 Intérêt de la notation complexe

- En RSP : éq. diff. remplacées par **équations algébriques complexes**
- 1 équation complexe conduit à **2 équations réelles**
  - soit : égalité des **modules ET** égalité des **arguments**
  - soit : égalité des **parties réelles ET** égalité des **parties imaginaires**

3 Circuit électrique en régime sinusoïdal forcé

3.1 Impédance complexe

3.1.1 Définition

- Dipôle passif linéaire en RSP

éq. diff. entre $u(t)$ et $i(t)$

remplacée par **relation de proportionnalité**

- Loi d'Ohm complexe $\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$

Définitions

- $\underline{Z}$: **impédance cplxe** du dipôle (module en Ω)
- $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ **admittance cplxe** (module en Ω^{-1} ou S)

➢ Forme cartésienne de l'impédance complexe

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX}$$

Définitions

$R = \mathrm{Re}(\underline{Z})$ **résistance** (en Ω)

$X = \mathrm{Im}(\underline{Z})$ **réactance** (en Ω)

➢ Forme exponentielle de l'impédance complexe

$$\boxed{\underline{Z} = \left|\underline{Z}\right| e^{j\arg(\underline{Z})}}$$

$$\boxed{\left|\underline{Z}\right| = \frac{\left|\underline{U}\right|}{\left|\underline{I}\right|} = \frac{U_M}{I_M}}$$

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i}$$

3.1.2 Résistance

$$\boxed{\underline{Z} = R} \text{ et } \boxed{\underline{Y} = \frac{1}{R}}$$

3.1.3 Condensateur idéal

$$\boxed{\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}} \text{ et } \boxed{\underline{Y_C} = jC\omega}$$

3.1.4 Inductance idéale

$$\boxed{\underline{Z_L} = jL\omega} \text{ et } \boxed{\underline{Y_L} = \frac{1}{jL\omega}}$$

3.2 Associations de dipôles

- **En série**

$$\boxed{\underline{Z}_{éq} = \sum_k \underline{Z}_k = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \ldots + \underline{Z}_n}$$

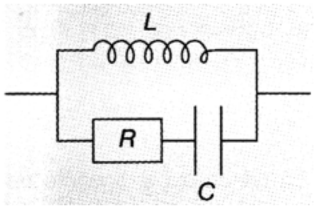
- **En parallèle**

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{éq}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} \Leftrightarrow \underline{Y}_{éq} = \sum_k \underline{Y}_k}$$

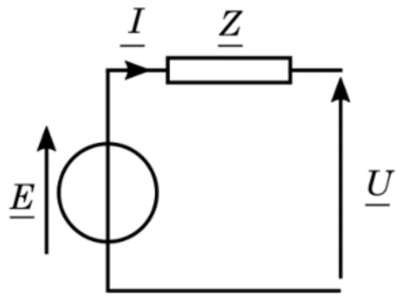
- **Conséquence**

Exercice d'application

1. Déterminer l'expression de l'impédance et de l'admittance complexes du dipôle ci-contre.
2. Vérifier le comportement du dipôle aux pulsations faibles et élevées.



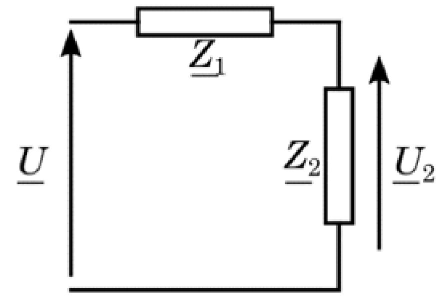
3.3 Générateur équivalent de Thévenin



$$\boxed{\underline{U} = \underline{E} - \underline{Z}\,\underline{I}}$$

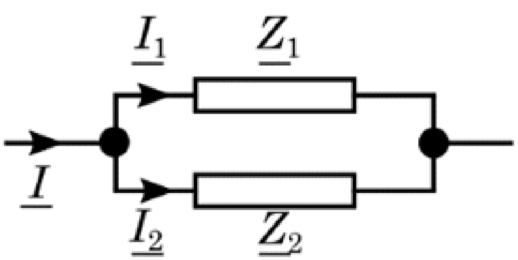
3.4 Diviseurs de tension et de courant

- **Diviseur de tension**



$$\boxed{\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}}$$

- **Diviseur de courant**



$$\boxed{\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I}}$$

4 Oscillateur électrique en régime sinusoïdal forcé

4.1 Étude expérimentale

➢ Circuit étudié

$R = 1,0\ \mathrm{k\Omega}$

$L = 20\ \mathrm{mH}$

$C = 51\ \mathrm{nF}$

$$e(t) = E_M \cos(\omega t)$$

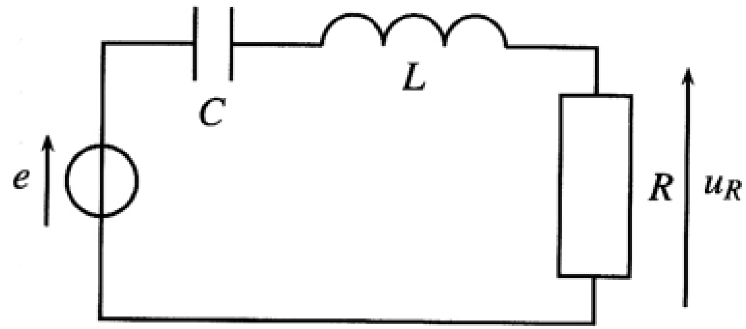


FIGURE 3 : Circuit RLC étudié

- Observation de $u_R(t)$: **image de $i(t)$** $\quad i(t) = \dfrac{u_R(t)}{R}$
- **Fréquence propre** $\quad f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5,0\ \mathrm{kHz}$
- **Facteur de qualité** $\quad Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

➢ Observations expérimentales

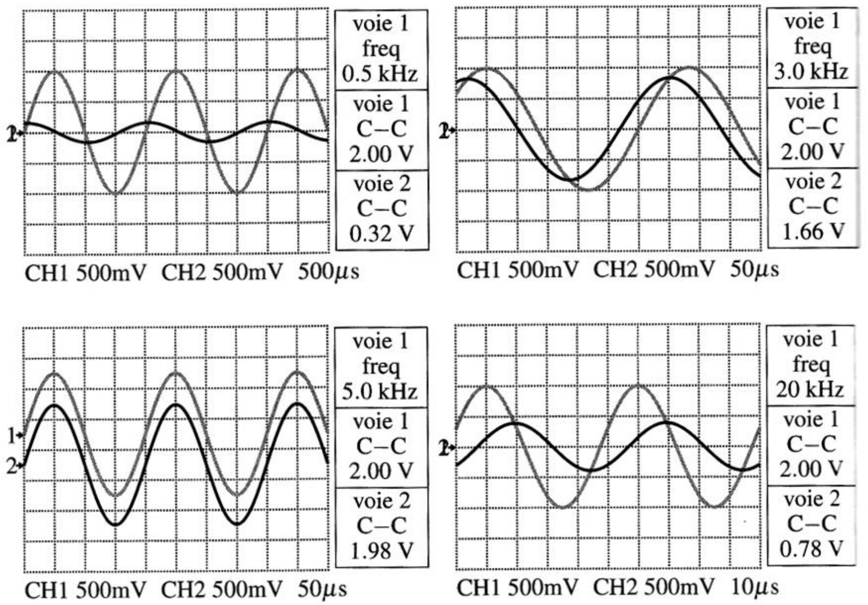


FIGURE 4 : Formes d'onde de la tension d'entrée $e(t)$ sur la voie 1 (en gris) et de $u_R(t)$ sur la voie 2 (en noir) pour quatre fréquences différentes : $f = 0{,}5$ kHz, $f = 3{,}0$ kHz, $f = 5{,}0$ kHz, $f = 20$ kHz

➢ Commentaires

- **régime sinusoïdal forcé**
- **amplitude de *i*(*t*) dépend de la fréquence *f***

Définition : **résonance**

- **Déphasage entre *i*(*t*) et *e*(*t*)**
- **Allure amplitude en fct de *f* dépend de *Q***

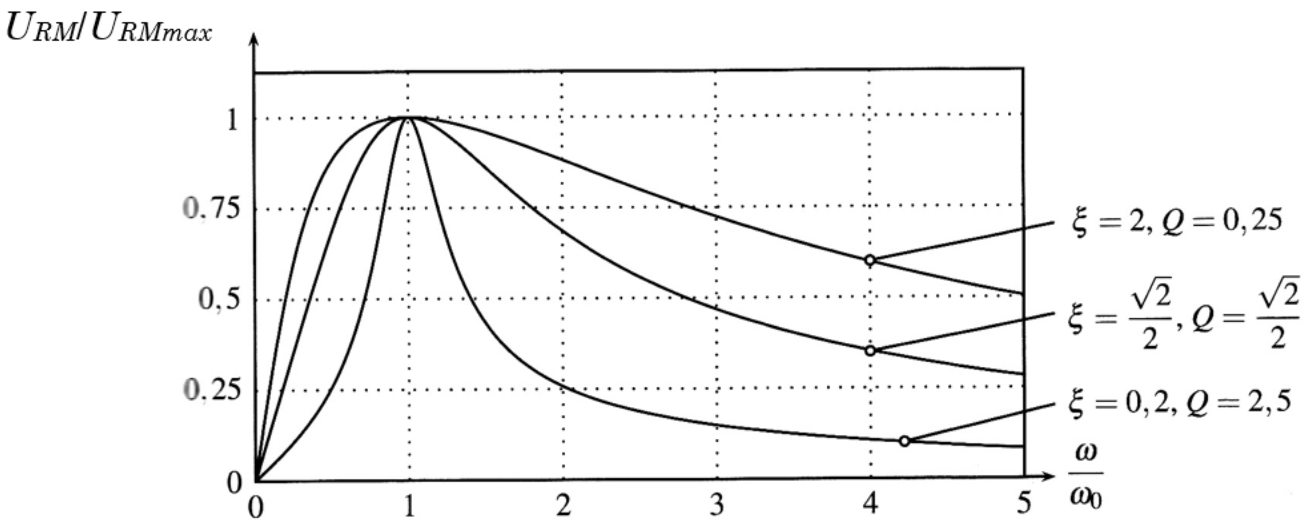


FIGURE 5 : Allures de l'amplitude U_{RM} rapportée à sa valeur maximale U_{RMmax} pour R variable

Propriété :

Acuité forte de la résonance

⟷ facteur de qualité *Q* **élevé**

4.2 Interprétation graphique du facteur de qualité

➤ Bande passante – Pulsation de coupure

Définition : **Bande passante**

$$\boxed{\forall\,\omega \in \Delta\omega,\quad \frac{X_{M\max}}{\sqrt{2}} \leq X_M(\omega) \leq X_{M\max}}$$

$X_{M\,\max}$ étant la valeur maximale de l'amplitude X_M

Définition : **Pulsation de coupure ω_C**

$$\boxed{X_M(\omega_C) = \frac{X_{M\max}}{\sqrt{2}}}$$

➢ Lien entre bande passante et facteur de qualité

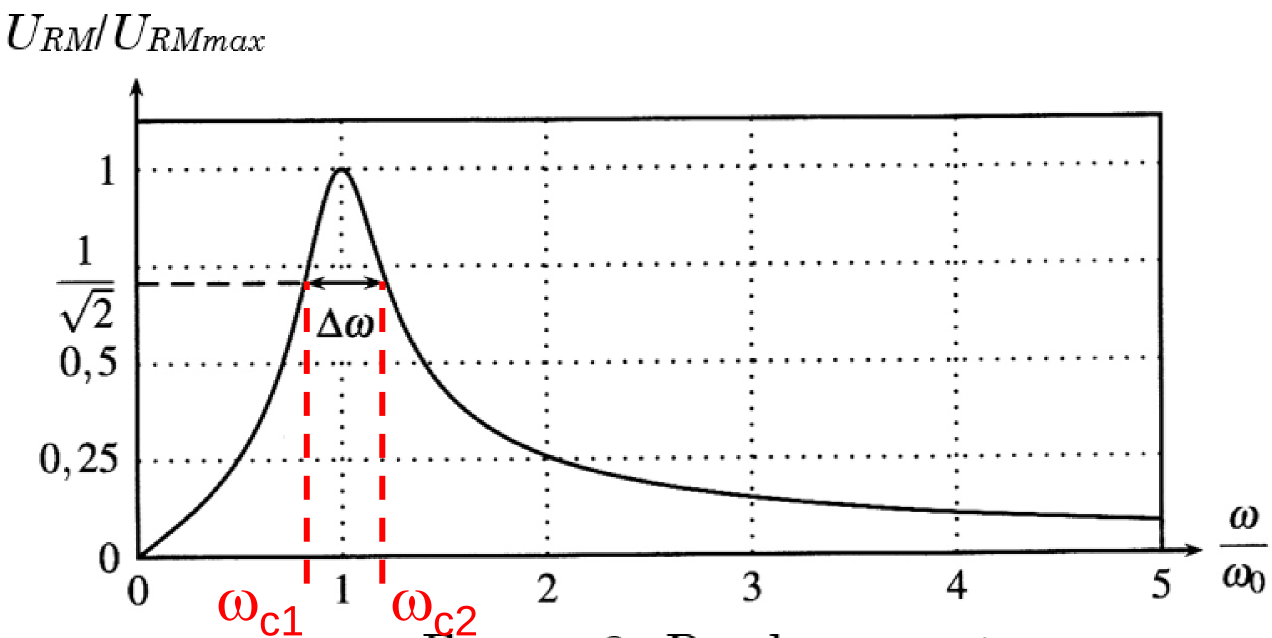


FIGURE 6 : Bande passante

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

ω_0 = pulsation **propre** = $2\pi f_0$

Bande passante en pulsations : $\boxed{\Delta\omega = \omega_{C2} - \omega_{C1}}$

Bande passante en fréquences : $\boxed{\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = f_{C2} - f_{C1}}$

➢ Lien entre bande passante et facteur de qualité

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

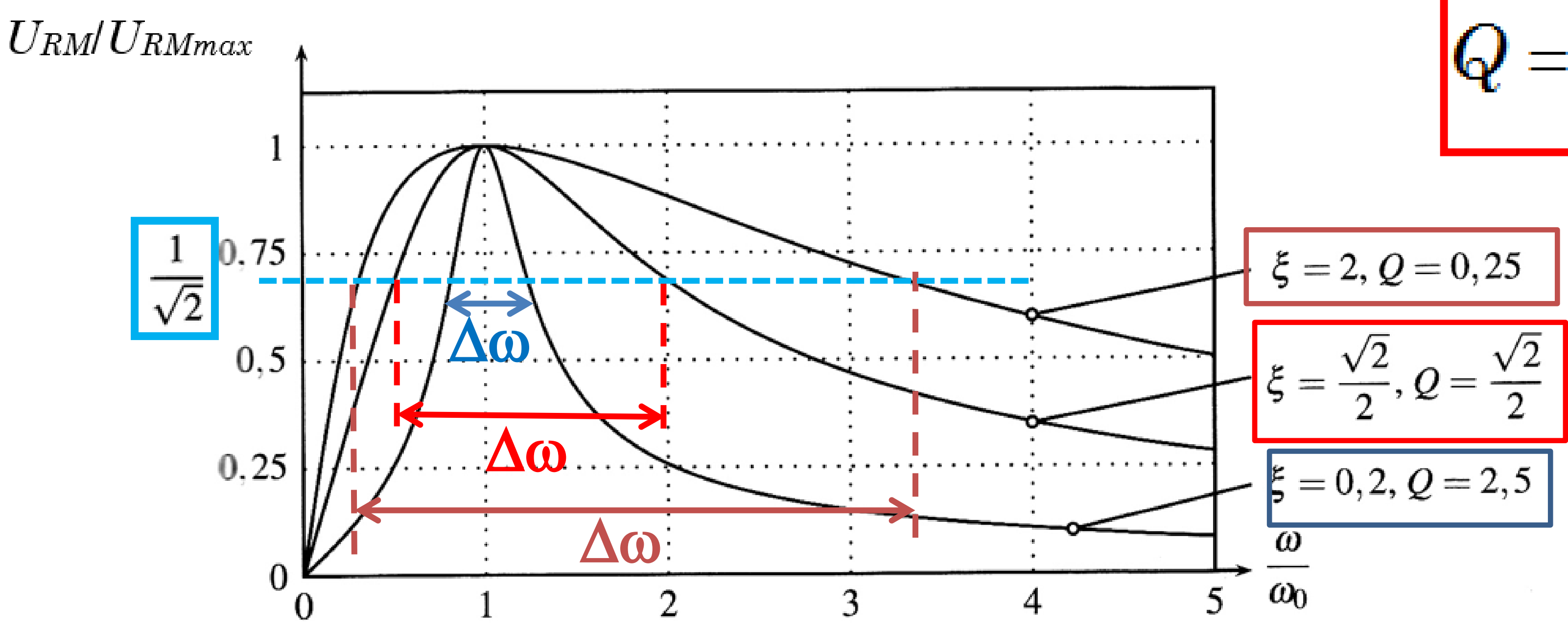


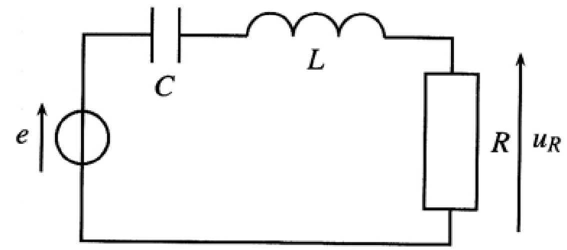
FIGURE 5 : Allures de l'amplitude U_{RM} rapportée à sa valeur maximale U_{RMmax} pour R variable

Pour compléter... Pour approfondir...

[1] A. Deiber *et al.*, Du réveil à la montre à quartz, *B.U.P*, n°799, p. 2023-2050, Décembre 1997

4.3 Expression de l'intensité du courant

4.3.1 Position du problème



3 : Circuit RLC étudié

- Circuit étudié
- Éq. diff. vérifiée par $u_C(t)$
- Équation différentielle vérifiée par $i(t)$
- Résolution de l'équation différentielle

Sol. part : régime permanent sinusoïdal forcé

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$ ⇨ Notation cplxe

- Amplitudes complexes associées aux grandeurs temporelles

Déterminer $\underline{I}$

4.3.2 Méthodes avec la notation complexe

➢ Méthode 1 : avec circuit en RSF

- Association gdrs temporelles ↔ cplxes
- Circuit en cplxe
- LDM, LDN, LDOhm, DDT, $Z_{éq}$… : ampl. cplxe $\underline{I}$
- Module ⇒ amplitude I_M, argument ⇒ phase φ

➢ Méthode 2 : avec éq. diff.

- Association gdrs temporelles ↔ cplxes
- Éq. diff ↔ cplxe
- Ampl. cplxe $\underline{I}$
- Module ⇒ amplitude I_M, argument ⇒ phase φ

4.3.3 Expression de l'amplitude complexe $\underline{I}$

- **Méthode 1:** à partir du circuit **directement** étudié en RSF

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1}{R}\frac{\underline{E}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

- **Méthode 2:** à partir de l'équation différentielle

4.3.4 Expression de l'amplitude I_M

$$\underline{I} = I_M e^{j\varphi}$$

$$\boxed{I_M = \left|\underline{I}\right| = \frac{E_M}{R\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

Propriété :

Circuit RLC série: **résonance pour *i* existe** $\forall$ Q

Pulsa° de résonance = pulsa° propre, **indpdte** de Q

- À la résonance, l'amplitude est **maximale** : $I_{M\,\max}$
- Amplitude :

$$\boxed{I_M = \left|\underline{I}\right| = \frac{I_{M\,\max}}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

4.3.5 Expression de la phase à l'origine φ

$$\underline{I} = I_M e^{j\varphi}$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

4.3.6 Graphes de l'amplitude I_M et de la phase φ

➢ Allures des graphes

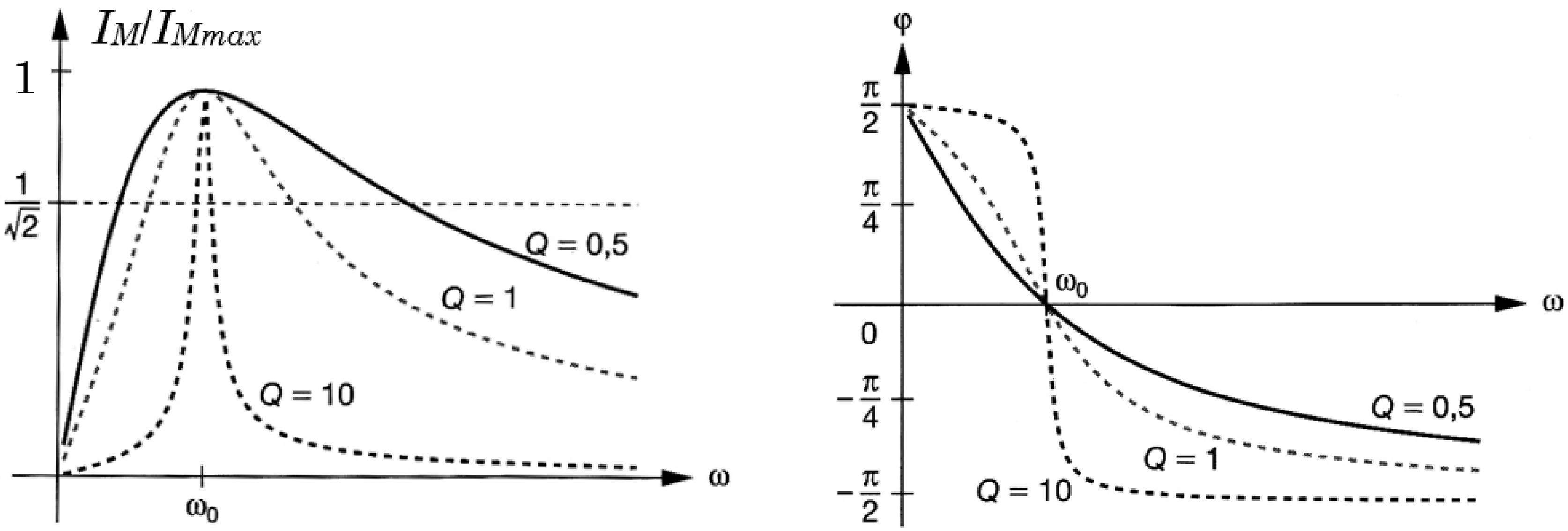


FIGURE 7 : Allures de l'amplitude I_M et de la phase φ en fonction de la pulsation ω pour différents facteurs de qualité Q

➢ Déterminations graphiques

➢ Retour à la problématique

4.4 Expression de la tension aux bornes du condensateur

4.4.1 Expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_C$

- **Méthode 1:** à partir du circuit **directement** étudié en RSF

$$\boxed{\underline{U_C} = \frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}\underline{E}}$$

- **Méthode 2:** à partir de l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C(t)}{dt}+\omega_0^2u_C(t)=\omega_0^2e(t)=\omega_0^2E_M\cos(\omega t)}$$

4.4.2 Expression de l'amplitude U_{CM}

$$\underline{U_C} = U_{CM} e^{j\psi}$$

$$\boxed{U_{CM} = \frac{E_M}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Propriété : Pour U_C (ou q) ds circuit RLC série:

- pas de résonance (circuit forte^t amorti)

$$\boxed{Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

- résonance (circuit faible^t amorti) $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

pulsation de résonance $\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$

4.4.3 Expression de phase à l'origine ψ

$$\underline{U_C} = U_{CM} e^{j\psi}$$

$$\boxed{\psi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{Q\omega_0\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right)} \quad \text{si } 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$$

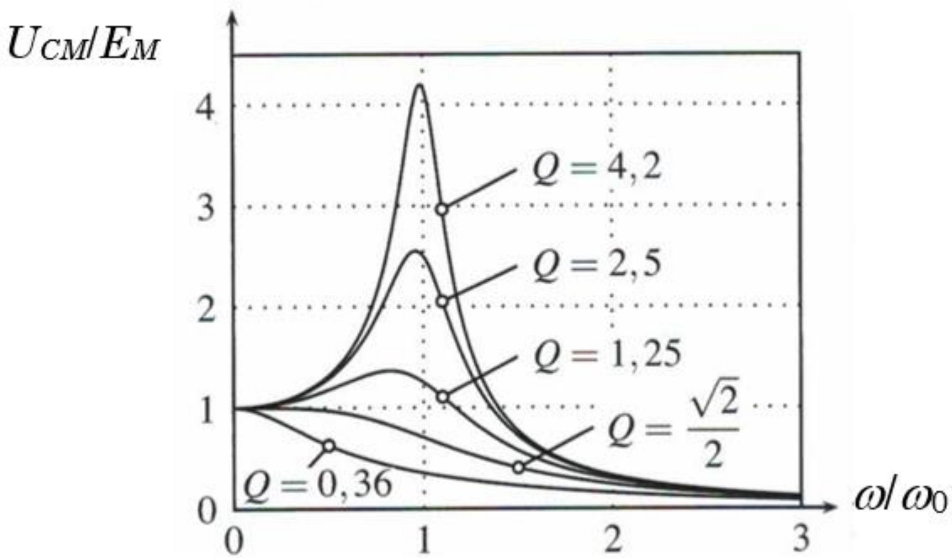
$$\boxed{\psi = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{Q\omega_0\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right)} \quad \text{si } 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$$

À la **pulsation propre** ω_0:

$$\boxed{\psi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$$

4.4.4 Graphes de l'amplitude U_{CM}, de la phase ψ

➢ Allures des graphes



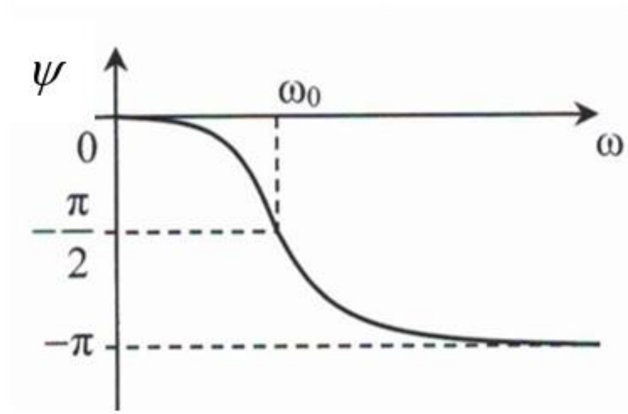


FIGURE 8 : Allures de l'amplitude U_{CM} et de la phase ψ en fonction de la pulsation ω pour différents facteurs de qualité Q

➢ Déterminations graphiques

[2] J.-M. Courty, É. Kierlik, Rouler sans être secoué, *Pour la Science*, n°498, p. 88-90, Avril 2019
[3] J.-M. Courty, É. Kierlik, Pont de Tacoma : la contre-enquête, *Pour la Science*, n°364, p. 98-99, Février 2008
[4] R. Lehoucq, É. Kierlik, Le diapason, *Dossiers Pour la Science*, n°32, p. 30-31, Juillet 2001

5 Analogie électromécanique

Réponse électrique ou mécanique	Intensité du courant i ou vitesse v	Charge q (ou tension u) ou élongation x
Notation temporelle	$s(t) = S_M \cos(\omega t + \varphi) = \dfrac{dr(t)}{dt}$	$r(t) = R_M \cos(\omega t + \psi)$
Notation complexe	$\underline{S} = S_M e^{j\varphi} = j\omega \underline{R}$	$\underline{R} = R_M e^{j\psi}$
Amplitude complexe de la réponse	$\underline{S} = \dfrac{\underline{E}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$	$\underline{R} = \dfrac{\underline{F}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Condition de résonance	$\forall Q$	$Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
Pulsation de résonance	$\omega_r = \omega_0$	$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}} < \omega_0$

FIGURE 8 : Analogie électromécanique