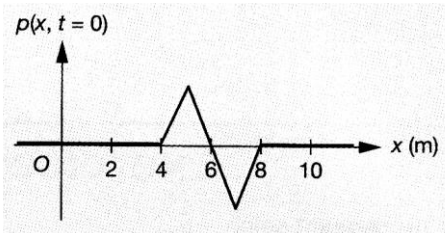
TRAVAUX DIRIGÉS OS8
Propagation d'un signal

Niveau 1

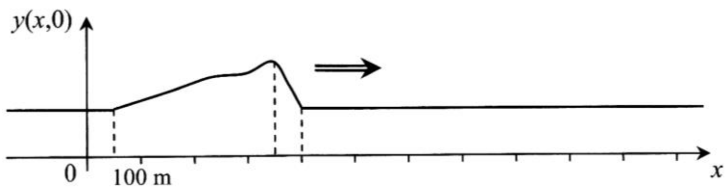
*Exercice 1. Évolution temporelle d'une onde

Pour l'onde $p(x,t=0)$ représentée ci-contre et se propageant à la célérité $c = 2\ \text{m.s}^{-1}$ selon $+\overrightarrow{u_x}$, tracer l'évolution de $p(x_0,t)$ en fonction du temps pour $x_0 = 10\ \text{m}$.



Exercice 2. Mascaret

Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve près de son estuaire, et provoquée par une interaction entre son écoulement et la marée montante.
Soit un mascaret se déplaçant à la vitesse $c = 20\ \text{km.h}^{-1}$ le long d'un fleuve rectiligne. On définit un axe (Ox) dans la direction et le sens de propagation du mascaret. À l'instant $t_0 = 0$, le profil du niveau de l'eau du fleuve est :



1. Faire un schéma du profil du niveau du fleuve à $t = 1{,}0\ \text{min}$, en supposant que l'onde se propage sans déformation.
2. Un surfeur attend avec sa planche à l'abscisse $x_S = 2{,}0\ \text{km}$. À quel instant τ va-t-il recevoir la vague ?
3. Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse $x_D = 1{,}4\ \text{km}$. Représenter l'allure des variations $y(x_D,t)$ en fonction du temps.
4. En réalité, l'onde se déforme petit à petit car la vitesse de propagation augmente avec la profondeur. Comment évolue le profil de la vague ?

Niveau 2

*Exercice 3. Ondes progressives harmoniques

ONDE N°1 : Une onde sinusoïdale se propage dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens positif avec la célérité c. L'expression du signal au point d'abscisse x_1 est $s_1(x_1,t) = A\cos(\omega t)$.

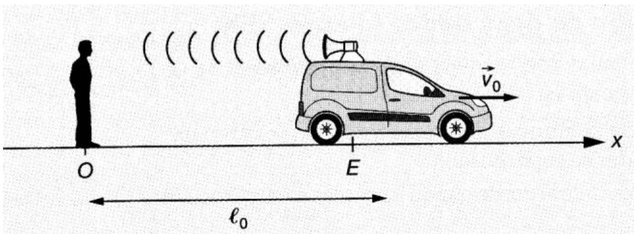
1. Déterminer l'expression de $s_1(x,t)$.
2. Représenter $s_1(x,0)$ en fonction de x, sachant que $x_1 = 2\lambda$.

ONDE N°2 : Une onde sinusoïdale se propage dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens négatif avec la célérité c. On donne $s_2(0,t) = A\sin(\omega t)$.

3. Déterminer l'expression de $s_2(x,t)$.
4. Représenter graphiquement $s_2(0,t)$, $s_2\left(\frac{\lambda}{4},t\right)$ et $s_2\left(\frac{\lambda}{2},t\right)$ en fonction de t.

Exercice 4. Effet Doppler

Un émetteur E émet une onde sonore se propageant à la vitesse c. Cet émetteur se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ et sa position initiale est $OE = l_0$. Un récepteur est fixe en O.



1. En imaginant que l'émetteur émet un bip tous les T à partir de $t = 0$, déterminer l'instant t'_n du $(n+1)^{\text{ème}}$ bip reçu par le récepteur.
2. Montrer que le récepteur reçoit les bips tous les T', et exprimer T' en fonction de T, v_0 et c. Ce résultat constitue l'effet Doppler.
3. Commenter le sens physique de l'effet Doppler. Comment faire pour que la période T' perçue par le récepteur soit plus faible que T ?

Exercice 5. Corde excitée de façon sinusoïdale

L'extrémité S d'une corde élastique est reliée à un vibreur qui lui impose un mouvement oscillatoire vertical, sinusoïdal, de fréquence $f = 100$ Hz et d'amplitude Y_m. Chaque point de la corde est repéré par son abscisse x et son élongation verticale y dans le repère ($Oxyz$), O désignant la position d'équilibre de S. Le mouvement de S débute à l'instant $t = 0$. Un dispositif amortisseur placé à l'autre extrémité de la corde empêche la réflexion de l'onde issue de S.

1. À l'instant $t = 0$, S passe par sa position d'équilibre avec une vitesse v_0 verticale ascendante de norme $v_0 = 2{,}5\ \text{m.s}^{-1}$. Donner l'équation horaire du mouvement de S, notée $y_S(t)$, en précisant les valeurs numériques de tous les paramètres.
2. La plus petite distance entre deux points vibrant en opposition de phase étant $d = 6{,}0\ \text{cm}$, en déduire la longueur d'onde λ et la célérité c des ondes le long de la corde.

On considère maintenant un point M de la corde, d'abscisse $x_M = 21\ \text{cm}$.

3. Quelle est son équation horaire $y_M(t)$? Calculer la valeur numérique de son retard par rapport à S.
4. Comparer les mouvements des points S et M.
5. Calculer les élongations des points S et M à l'instant de date $t_1 = 40\ \text{ms}$.

On étudie maintenant la corde globalement à l'instant $t_1 = 40\ \text{ms}$.

6. Déterminer la fonction $y_{t_1}(x)$ décrivant l'élongation le long de la corde à cet instant. Préciser les valeurs de la période spatiale et du vecteur d'onde.
7. Représenter précisément l'aspect de la corde à cet instant.

Niveau 3

*Exercice 6. Équation de d'Alembert

Montrer que l'onde progressive sinusoïdale $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$.

Remarque : $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ se nomme dérivée partielle de p par rapport à x (à t fixé) : elle s'obtient en dérivant p par rapport à x en considérant t comme constante.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Évolution temporelle d'une onde

Caractéristiques de l'onde à $t = 0$:

début (front) d'onde : $x_{déb} = 8\ \text{m}$; minimum de l'onde en $x_m = 7\ \text{m}$; maximum de l'onde en $x_M = 5\ \text{m}$; fin de l'onde en $x_{fin} = 4\ \text{m}$

L'onde se propage dans le sens des x croissants.

Caractéristiques de l'onde en $x = x_0$:

Pour $0 < t < \tau_{déb}$: $p(x_0,t) = 0$.

Le front d'onde arrive avec un retard $\tau_{déb} = \dfrac{x_0 - x_{déb}}{c} = 1\ \text{s}$

Le minimum de l'onde arrive avec un retard $\tau_m = \dfrac{x_0 - x_m}{c} = 1{,}5\ \text{s}$

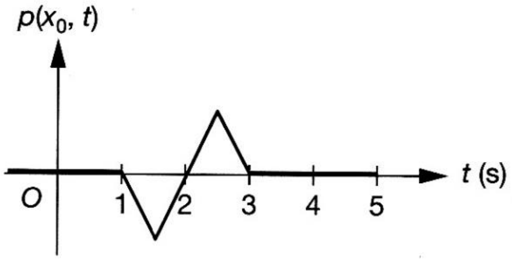
Le maximum de l'onde arrive avec un retard $\tau_M = \dfrac{x_0 - x_M}{c} = 2{,}5\ \text{s}$

La fin de l'onde arrive avec un retard $\tau_{fin} = \dfrac{x_0 - x_{fin}}{c} = 3\ \text{s}$

Pour $t > \tau_{fin}$: $p(x_0,t) = 0$

La perturbation s'étale sur une longueur $L = 4\ \text{m}$, soit une durée de $\Delta t = \dfrac{L}{c} = 2\ \text{s}$.

L'évolution de l'onde en fonction du temps est représentée ci-dessous.



Exercice 2. Mascaret

2. $\tau = 288\ \text{s} = 4\ \text{mn}\ 48\ \text{s}$ 3. Front de vague arrive à $\tau_F = 180\ \text{s} = 3\ \text{mn}$, sommet de vague à $\tau_{som} = 189\ \text{s} = 3\ \text{mn}\ 9\ \text{s}$, fin de vague à $\tau_{fin} = 243\ \text{s} = 4\ \text{mn}\ 3\ \text{s}$

*Exercice 3. Ondes progressives harmoniques

ONDE N°1

1. L'onde se propage dans les sens des x croissants.

$$s_1(x,t) = s_1(x_1, t - \Delta t) \text{ avec le retard temporel : } \Delta t = \frac{x - x_1}{c}$$

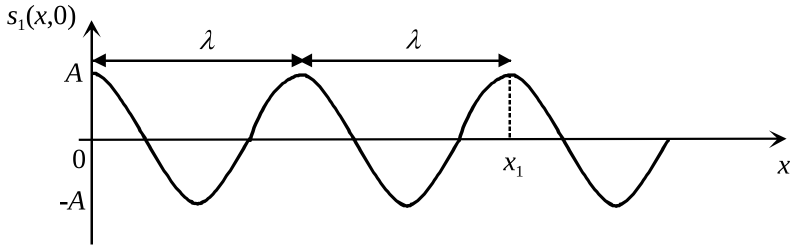
$$s_1(x,t) = A\cos(\omega(t - \Delta t)) = A\cos\left(\omega t - \omega\frac{x - x_1}{c}\right)$$

$$\boxed{s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + kx_1)} \text{ avec } \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Remarque : on vérifie que pour $x = x_1$, on retrouve bien l'expression $s_1(x_1,t) = A\cos(\omega t)$.

2. $x_1 = 2\lambda$ et $s_1(x,0) = A\cos(-kx + kx_1) = A\cos(-kx + k2\lambda)$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow k\lambda = 2\pi$

$s_1(x,0) = A\cos(-kx + 4\pi) = A\cos(-kx)$ soit $\boxed{s_1(x,0) = A\cos(kx)}$



ONDE N°2

3. L'onde se propage dans <u>les sens des x décroissants</u>.

$s_2(x,t) = s_1(0, t+\Delta t')$ avec $\Delta t' = \dfrac{x}{c}$ soit $s_2(x,t) = A\sin(\omega(t+\Delta t')) = A\cos\left(\omega t + \omega\dfrac{x}{c}\right)$

$$\boxed{s_2(x,t) = A\sin(\omega t + kx)} \text{ avec } \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

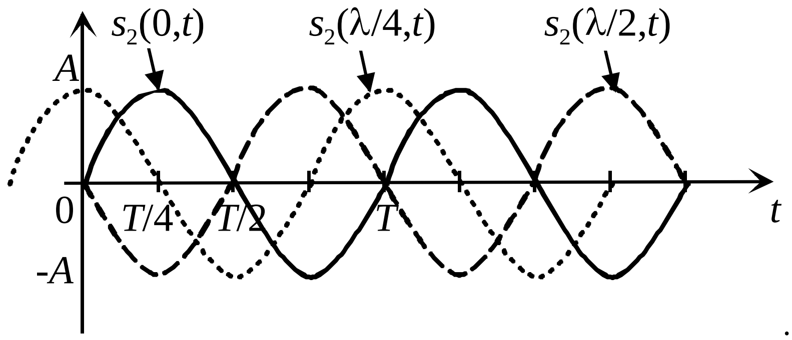
4. Pour $\boxed{x_2 = \dfrac{\lambda}{4}}$, le signal s'écrit :

$$s_2(x_2,t) = A\sin(\omega t + kx_2) = A\sin\left(\omega t + k\frac{\lambda}{4}\right) \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow k\lambda = 2\pi$$

$\boxed{s_2(x_2,t) = A\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -A\cos(\omega t)}$: $s_2\left(\dfrac{\lambda}{4}, t\right)$ est <u>déphasé</u> de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport $s_2(0,t)$ (<u>quadrature avance</u>, décalage temporel égal à $\dfrac{T}{4}$)

- Pour $\boxed{x_3 = \dfrac{\lambda}{2}}$, le signal s'écrit : $s_2(x_3,t) = A\sin(\omega t + kx_3) = A\sin\left(\omega t + k\dfrac{\lambda}{2}\right)$

$\boxed{s_2(x_3,t) = A\sin(\omega t + \pi) = -A\sin(\omega t)}$: $s_2\left(\dfrac{\lambda}{2}, t\right)$ est <u>déphasé</u> de π par rapport $s_2(0,t)$ (<u>opposition de phase</u>, décalage temporel égal à $\dfrac{T}{2}$)



Exercice 4. Effet Doppler

1. Bips reçus aux instants $t'_n = nT + \dfrac{l_0 + nv_0T}{c}$ 2. $T' = T\left(1 + \dfrac{v_0}{c}\right)$

Exercice 5. Corde excitée de façon sinusoïdale

1. $y_S(t) = y(0,t) = Y_m \sin(\omega t)$ avec $Y_m = 4{,}0$ mm, $\omega = 630$ rad.s^{-1} 2. $\lambda = 12$ cm $c = 12$ m.s^{-1} 3. $y_M(t) = y(x_M,t) = Y_m \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x_M\right)$ retard $\Delta t = 18$ ms 4. M en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à S. 6. $y_{t_1}(x) = y(x,t_1) = -Y_m \sin(kx)$ avec $k = 52$ rad.m^{-1}

*Exercice 6. Équation de d'Alembert

Le signal est : $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$

- Dérivées premières : $\frac{\partial p}{\partial x} = p_0 k \sin(\omega t - kx)$ et $\frac{\partial p}{\partial t} = -p_0 \omega \sin(\omega t - kx)$
- Dérivées secondes :
  $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -p_0 k^2 \cos(\omega t - kx) = -k^2 p(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 p(x,t)$$
- On remplace dans le membre de gauche de l'équation de d'Alembert :
  $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k^2 p(x,t) - \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2 p(x,t)\right) = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) p(x,t)$$

  Or, la double périodicité de l'onde impose que $k = \frac{\omega}{c}$ soit $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$. Donc, ***p*(*x*,*t*) vérifie bien l'équation de d'Alembert** (équation de propagation des ondes) : $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$