27. Déterminant

Exercice 1. (c) Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & b+c \\ ab & ac & bc \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 2. (c) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est impair, alors A n'est pas inversible et que si n est pair, A peut être inversible en donnant un exemple.

Exercice 3. (m) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det((a_{\max(i,j)})_{1\leq i,j\leq n})$. En dÃ©duire en particulier $\det((\max(i,j)_{1\leq i,j\leq n})$ et $\det((\min(i,j)_{1\leq i,j\leq n})$

Exercice 4. (m) Calculer, à l'aide d'une relation de récurrence les déterminants $n \times n$ suivants :

$$a_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_n, \quad b_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n \text{ et } c_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_n.$$

Exercice 5. (m) On pose $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) En utilisant des opérations élémentaires, justifier que $P(x) = \det(A_n + xJ)$ est un polynôme en x de degré au plus 1. *On notera dans la suite $P(x) = ax + b$.*

2) En évaluant en des valeurs de x particulières, déterminer a et b et en déduire finalement $\det(A_n)$.

3) En procédant de la même façon, déterminer $\det(B_n)$ où $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 3 \\ 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. (c) Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ (a+1)^3 & (b+1)^3 & (c+1)^3 & (d+1)^3 \\ (a+2)^3 & (b+2)^3 & (c+2)^3 & (d+2)^3 \\ (a+3)^3 & (b+3)^3 & (c+3)^3 & (d+3)^3 \end{vmatrix}$

Exercice 7. (i) Factoriser le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

Exercice 8. (m) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $C = A + iB$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\overline{C} = A - iB$.

1) Montrer que $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$.

2) En déduire que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AB = BA, \ \det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 9. (c) Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{Com}(A)$ est inversible.

2) Montrer que $\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

Exercice 10. (c)/ (m) **Rang de la comatrice.** Justifier que si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$. On suppose dans la suite $\mathrm{rg}(A) < n$.

1) Montrer en revenant à la définition que si $\mathrm{rg}(A) \leq n - 2$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0$.

2) On suppose $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A)^T) \subset \ker(A)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1$. En revenant à la définition, montrer que $\mathrm{Com}(A) \neq 0$ et en déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.

Exercice 11. (m) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices définies par $a_{i,j} = \dfrac{i^{j-1}}{(j-1)!}$ et $b_{i,j} = \dfrac{j^{n-i}}{(n-i)!}$.

1) Écrire les matrices A et B. À l'aide d'un déterminant de Vandermonde, montrer que $\det(A) = 1$ et que $\det(B) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

2) Déterminer le coefficient (i, j) de la matrice AB. En déduire le déterminant de la matrice M de taille n de terme général $m_{i,j} = (i + j)^{n-1}$.

Exercice 12. (c) Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par $\varphi(P) = P(2X)$. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 13. (c) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions engendré par $x \mapsto e^x \cos(x)$ et $x \mapsto e^x \sin(x)$. Vérifier que $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$ est bien définie, écrire sa matrice dans une base de E et calculer son déterminant.

Exercice 14. (m) On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = M^T$. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 15. (m)/ (i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \det(A + xI_n)$.

1) Montrer que P est un polynôme de degré n en x et déterminer son coefficient dominant.

2) Déterminer le coefficient constant de P et montrer que le coefficient de x^{n-1} est $\mathrm{Tr}(A)$.

3) Montrer que A est limite d'une suite de matrices inversibles (autrement dit qu'il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*} \in GL_n(\mathbb{R}) \ / \ \lim\limits_{p \to +\infty} A_p = A$). Que peut-on dire de $GL_n(\mathbb{R})$ par rapport à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 16. (i) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On construira judicieusement deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nécessairement inversibles U et V telles que $AU = UB$ et $AV = VB$. Puis, on montrera que l'on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda V$ soit inversible.*