Programme de colle, semaine 18

Fractions rationnelles et début des matrices/systèmes linéaires

— Nous avons commencé le chapitre sur les fractions rationnelles en traitant tout d'abord l'arithmétique des polynômes. Définition du PGCD, du PPCM, de polynômes premiers entre eux (pour deux polynômes et pour plusieurs polynômes). Nous avons revu rapidement les différents théorèmes déjà vus en arithmétique (Bezout, Gauss, propriétés usuelles du PGCD).

— Nous avons défini $\mathbb{K}(X)$ pour le corps des fractions rationnelles, puis le degré d'une fraction rationnelle, ses racines et ses pôles (avec multiplicité), la dérivée formelle d'une fraction rationnelle. Nous avons montré l'unicité de la forme réduite (sous la forme $\frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire).

— Nous avons ensuite défini la partie entière d'une fraction rationnelle et admis les théorèmes de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$ (existence et unicité).

— Nous avons ensuite vu les différentes méthodes de calculs pour trouver les coefficients (multiplication/évaluation, limites en l'infini, utilisation de la parité/imparité, décomposition dans $\mathbb{C}$ d'une fraction rationnelle réelle, dérivation tête en bas : si $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et λ un pôle simple, alors le coefficient dans la DES de $\frac{a}{X-\lambda}$ est $a = \frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}$). Nous avons vu l'application de ceci à la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$, ainsi que la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

— Nous avons terminé le chapitre par un bref rappel sur la méthode pour primitiver une fraction rationnelle.

— Nous avons défini les matrices rectangulaires, les matrices élémentaires, vu les opérations d'addition et de multiplication. Nous avons défini la transposée d'une matrice A^T, vu la définition du noyau et de l'image d'une matrice et le lien avec la résolution des systèmes linéaires (mise sous la forme $AX = Y$ et ensemble des solutions de la forme $X_0 + X_H$ si $Y \in \mathrm{Im}(A)$ avec X_0 une solution particulière et où X_H parcourt $\ker(A)$.

— Nous avons vu brièvement la méthode du pivot pour résoudre des systèmes linéaires.

Remarques sur le programme : Merci d'interroger en priorité sur les fractions rationnelles ! Nous sommes allés assez vite sur l'arithmétique des polynômes, les résultats étant similaires à l'arithmétique et ce n'est pas forcément un chapitre sur lequel il faut beaucoup insister. Vous pouvez ensuite donner un petit calcul matriciel/petit système linéaire pour mettre en oeuvre la méthode du pivot (même si le TD sur les matrices ne sera fait que mardi et que nous n'avons pas fini le chapitre !)

Compétences :

— Déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}(X)$ et sur $\mathbb{R}(X)$. Attention à ne pas oublier les différentes puissances dans la décomposition quand on a un pôle multiple !

— Utiliser les différentes symétries d'une fraction rationnelle (parité/imparité, décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction rationnelle réelle) pour simplifier les calculs.

- Utiliser la dérivation tête en bas ou la décomposition de P'/P pour les exercices plus théoriques.
- Réaliser un produit matriciel $A \times B$ graphiquement et théoriquement (en utilisant la formule pour $(AB)_{i,j}$).
- Mettre en oeuvre la méthode du pivot.

Questions de cours :

1. Donner (pas de preuve) la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ dans $\mathbb{C}(X)$ et déterminer (faire la preuve avec la dérivation tête en bas) la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{1}{X^n-1}$.
2. Donner la définition de la matrice élémentaire $E^{n,n}_{i_0,j_0}$ (on exprimera en particulier son coefficient d'indice (i,j) à l'aide du symbole de Kronecker) et déterminer pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $E^{n,n}_{i_0,j_0} \times A$ (taille et coefficient d'indice (i,j)).
3. Donner la définition de la transposée et montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.
4. Expliquer le principe et mettre en oeuvre **la méthode du pivot** sur un (petit) système linéaire au choix du colleur.
5. Donner la définition quand $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ et démontrer la forme des solutions de $AX = B$ (en séparant les cas $B \in \mathrm{Im}(A)$ et $B \notin \mathrm{Im}(A)$).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 20 : 4 et 10. TD 20-2 : 5 et 6.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD19 : 4.4) et 6.5)
- 2ieme du groupe : TD20 : 10
- 3ieme du groupe : TD20-2 : 5 et 6.

Prochain programme : matrices

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions ! Bonnes vacances à tous !

Indications pour les exercices :

TD19 : 4.4) et 6.5) :

- Pour le 4.4), bien penser à factoriser $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$.
- Pour déterminer le coefficient de $\dfrac{a}{X-1}$, penser à multiplier par X et faire tendre vers l'infini.
- Pour le 6.5), on a deux polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ au dénominateur. On a donc du $\dfrac{aX+b}{X^2+1}$ et du $\dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$. Penser alors à faire la multiplication/évaluation en évaluant en i (pour le X^2+1) et en j (pour le X^2+X+1). Ne pas oublier d'utiliser $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

TD20 10 :

- Ici D est une matrice diagonale, autrement dit, on a $(D)_{i,i} = d_i$ et $(D)_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.
- Utiliser la formule du produit matriciel pour déterminer $(AD)_{i,j}$ et $(DA)_{i,j}$.
- Normalement, il ne restera plus de somme car tous les coefficients de D sur une ligne (ou une colonne) sont nuls.
- En utilisant alors l'égalité entre $(AD)_{i,j}$ et $(DA)_{i,j}$, on séparera les cas $i = j$ et $i \neq j$ pour montrer que A est forcément une matrice diagonale (autrement dit que si $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$).

TD20-2 : 5 et 6

- Bien mettre en oeuvre à chaque fois la méthode du pivot (aucune autre rédaction ne sera acceptée !)
- Pour le premier système, vous ne devriez trouver aucune solution (système incompatible).
- Pour le second système, juste pour vérifier vos solutions, vous devriez trouver $x = -\dfrac{1}{2}$.