DM 18, corrigÃ©

PROBLÈME
Marche dans New-York

1)

a)

```
def deplacement(L,a,b):
   if L=='N':
      return((a,b+1))
   elif L=='E':
      return((a+1,b))
```

b) On utilise la fonction précédente :

```
def chemin(m):
   abscisse=[0]
   ordonnee=[0]
   abs,ord=0,0 # abscisse et ordonnée initiales
   for lettre in m:
      (abs,ord)=deplacement(lettre,abs,ord) # nouvelles abscisses et ordonnées
      abscisse.append(abs)
      ordonnee.append(ord)
   return(abscisse,ordonnee)
```

2) Puisque l'on a deux choix possibles à chaque étape et que l'on a l étapes, on a exactement $c_l = 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^l$ trajets possibles avec l étapes.

3)

a) On a 5 étapes et on effectue 2 pas vers l'est et 3 vers le nord. Le nombre de chemins possibles est donc le nombre de façons de placer 2 lettres E parmi 5 lettres (les N étant automatiquement placés). On a donc le nombre de trajets cherchés égal à $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

b) L'énoncé ne le précise pas mais il est clair que si $a < 0$ ou $b < 0$, alors le nombre de chemins vaut 0. Si $a, b \in \mathbb{N}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, alors on a un chemin qui a $a+b$ étapes constitué de a pas vers l'est et b vers le nord. Comme ci-dessus, il faut donc placer les a pas vers l'est parmi $a+b$ pas (les pas vers le nord étant alors automatiquement placés). On a donc $\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$ chemins possibles reliant l'origine à M.

4)

a) On a $u_1 = 2$ (les deux seules façons de couper la droite $y = x$ pour la première fois à l'étape 2 est de faire les chemins NE ou EN).

b) Pour aller de $(0,1)$ à $(n-1,n)$, il faut effectuer $n-1$ pas vers l'est et $n-1$ vers le nord. Toujours avec le même raisonnement, on doit placer nos pas vers l'est/le nord parmi $2n-2$ pas. On a donc $\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}$ chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,n)$.

c) L'énoncé admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y=x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$. Ce principe est appelé *principe de réflexion* et se démontre ainsi :

Soit C un chemin de $(0,1)$ à $(n-1,n)$ qui coupe la droite $y=x$. Considérons le premier point d'intersection de ce chemin avec cette droite. On sépare ainsi notre chemin en deux chemins (la partie C_1 avant l'intersection et la partie C_2 après l'intersection, ces deux chemins se rejoignant en la droite $y=x$). On peut alors effectuer le symétrique de C_1 par rapport à $y=x$. On obtient ainsi un chemin C_1' qui part de $(1,0)$, qui coupe $y=x$ pour la première fois au même endroit que C_1 et on prolonge ce chemin par C_2 pour arriver ainsi au point $(n-1,n)$. Cette opération nous donne une bijection entre les chemins de $(0,1)$ à $(n-1,n)$ coupant $y=x$ et les chemins de $(1,0)$ à $(n-1,n)$ coupant $y=x$, ce qui prouve l'égalité du nombre de chemins. Cette fonction est clairement injective (car on peut revenir au chemin de départ en refaisant la symétrie par rapport à $y=x$ de la première partie du chemin) et clairement surjective (car pour tout chemin partant de $(1,0)$ à $(n-1,n)$ coupant $y=x$, on regarde le premier point d'intersection avec $y=x$, on effectue la symétrie sur la première partie du chemin et cela nous donne l'antécédent voulu.

En utilisant l'affirmation de l'énoncé, il faut compter le nombre de chemins partant de $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ coupant $y=x$. L'intérêt est que même sans la condition de couper $y=x$, on est certain que ces chemins coupent la droite $y=x$ (car on part d'un point situé en-dessous de cette droite et arrivant au-dessus). Ainsi, la condition de couper la droite $y=x$ n'est pas utile et on peut donc raisonner de même que dans les questions précédentes. On effectue $n-2$ pas vers l'est et n pas vers le nord. On a donc $2n-2$ pas à effectuer et comme précédemment, on a donc $\binom{2n-2}{n-2}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}$ chemins possibles.

d) On peut effectuer une partition de l'ensemble des chemins reliant $(0,1)$ à $(n,n-1)$ en étudiant les chemins qui coupent $y=x$ et ceux qui ne coupent pas $y=x$. Puisque le nombre total de chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,n)$ est $\binom{2n-2}{n-1}$, on a donc d'après la question précédente :

$$\binom{2n-2}{n-1}=\mathrm{Card}(T_{(0,1)}^{(n,n-1)})+\binom{2n-2}{n-2}.$$

On a donc $\mathrm{Card}(T_{(0,1)}^{(n,n-1)})=\dfrac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}-\dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}=\dfrac{(2n-2)!(n-(n-1))}{(n-1)!n!}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}$.

e) En effectuant une symétrie par rapport à la droite $y=x$, il est clair que $\mathrm{Card}(T_{(0,1)}^{(n-1,n)})=\mathrm{Card}(T_{(1,0)}^{(n,n-1)})$. En effet, la symétrie effectue une bijection entre ces chemins (et elle est son propre inverse).

f) Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Pour compter les chemins de u_n, puisque l'on commence par un premier pas, on commence soit vers le nord (vers $(0,1)$), soit vers l'est (vers $(1,0)$). Pour couper la droite $y=x$ pour la première fois à l'étape $2n$, cela signifie que le dernier pas a été vers l'est en arrivant de $(n-1,n)$ ou vers le nord en arrivant de $(n,n-1)$. Puisque l'on veut ne pas couper la droite $y=x$ avant le point (n,n), on a donc tous les chemins partant de $(0,1)$ reliant $(n-1,n)$ sans couper $y=x$ (et on a pas le choix pour le premier et le dernier pas) et tous les chemins partant de $(1,0)$ reliant $(n,n-1)$ sans couper $y=x$ (et on a pas le choix pour le premier et le dernier pas). Ces chemins sont bien différents. Comme vu à la question précédente, par symétrie du problème, on a autant de chemins de chaque type. On a donc bien :

$$u_n=2\times\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

g) On avait $u_1=2$ et le nombre de chemins à 2 étapes est 4 d'après la question 2. On a donc $v_1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ car tous les chemins sont équiprobables.

De la même façon, pour $n \geq 2$, le nombre de chemins à $2n$ étapes étant égal à 2^{2n}, on a donc :

$$v_n = \frac{u_n}{2^{2n}} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}.$$

Or, en séparant les termes pairs et impairs dans le $(2n-2)!$, on a :

$$\begin{aligned}(2n-2)! &= (2n-2)\times(2n-3)\times(2n-4)\times\ldots\times 2\times 1\\ &= \prod_{k=1}^{n-2}(2k+1)\times\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\\ &= \prod_{k=1}^{n-2}(2k+1)\times 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(k)\\ &= \prod_{k=1}^{n-2}(2k+1)\times 2^{n-1}(n-1)!.\end{aligned}$$

On a donc bien, en simplifiant et en développant le $n! = 1\times 2\times\ldots\times n$ au dénominateur :

$$v_n = \frac{\prod k = 1^{n-2}(2k+1)}{2^n n!} = \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times 2n}.$$

5)

a) D'après la question précédente, on a pour $n \geq 2$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-3)\times(2n-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2n\times(2n+2)}\times\frac{2\times 4\times\ldots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-3)} = \frac{2n-1}{2n+2} = 1-\frac{3}{2n+2}.$$

On a donc, en utilisant $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + O(x^2)$ quand x tend vers 0 que :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) &= \ln\left(1-\frac{3}{2n+2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ceci est bien justifié car $\frac{3}{2n+2} \sim_{+\infty} \frac{3}{2n}$ donc $O\left(\left(\frac{3}{2n+2}\right)^2\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n}} &= \frac{1}{2n}\times\left(1-\frac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

On a donc bien $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où $a = -\frac{3}{2}$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante et continue sur $[k, k+1]$. On a donc pour $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissante de l'intégrale, on a donc en intégrant entre k et $k+1$ et en sommant ces inégalités entre 1 et $N-1$ pour $N \geq 2$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} \leq \int_1^N \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}.$$

On a donc $\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k} \leq \ln(N) \leq \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}$, d'où, puisque $\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{N}$, on a :

$$\ln(N) \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(N) + 1 - \frac{1}{N}.$$

En divisant par $\ln(N) > 0$ pour $N \geq 2$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \ln(N).$$

c) Pour $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} w_{N+1} - w_N &= \frac{1}{N} - \ln(N+1) + \ln(N) \\ &= \frac{1}{N} - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Si on étudie la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme/composée de fonctions dérivables, on a :

$$\forall x \geq 0,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$ donc f est positive. On a donc $(w_N)_{N\geq 2}$ qui est croissante. De plus, d'après l'encadrement trouvé à la question précédente (en retranchant $\ln(N)$ dans les encadrements), on a :

$$0 \leq w_N \leq 1 - \frac{1}{N}$$

donc $(w_N)_{N\geq 2}$ est majorée par 1. Elle est croissante majorée et converge donc vers une constante γ réelle (qui est positive car la suite est positive).

On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln(N) \underset{N\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$, d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)$.

d) On a tout d'abord une somme télescopique. En effet (tout est bien défini car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$) :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln(v_N) - \ln(v_1).$$

On a donc $v_N = e^{\ln(v_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)}$. De plus, en utilisant la question 5.a, on peut écrire :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{a}{n} + x_n$$

où $x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ceci entraine que la série $\sum x_n$ est absolument convergente (et donc convergente) par comparaison avec une série de Riemann. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \\ &\underset{N\to+\infty}{=} a\ln(N) + a\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + o(1). \end{aligned}$$

En réinjectant ceci dans l'expression précédente, on a donc en utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} v_N &\underset{N\to+\infty}{=} e^{a\ln(N)+a\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty} x_n+\ln(v_1)+o(1)} \\ &\underset{N\to+\infty}{=} e^{\ln(N^a)}e^{a\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty} x_n+\ln(v_1)+o(1)} \\ &\underset{N\to+\infty}{=} N^a e^{a\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty} x_n+\ln(v_1)+o(1)}. \end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, et puisque l'exponentielle est strictement positive, on en déduit que si on note $k = e^{a\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty} x_n+\ln(v_1)}$, on a $k > 0$ et :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

puisque $a = -\dfrac{3}{2}$.

e) En reprenant la question 4.f), on obtient pour $n \geq 2$:

$$v_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+2}v_n.$$

On a donc $(2n+2)v_{n+1} = (2n-1)v_n$, soit $v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$. On a donc pour tout $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} v_n &= v_1 + v_2 + \sum_{n=3}^{N} v_n \\ &= v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{N-1} v_{n+1} \\ &= v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{N-1} (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1} \\ &= v_1 + v_2 + 3v_2 - (2N+1)v_{N+1} \qquad \text{(par somme télescopique).} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, on a $(2N+1)v_{N+1} \sim_{+\infty} \dfrac{k(2N+1)}{(N+1)^{3/2}} \sim_{+\infty} \dfrac{2k}{N^{1/2}}$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty}(2N+1)v_{N+1} = 0$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge (on aurait pu le démontrer par critère de comparaison des SATPs en utilisant la question précédente puisque $\dfrac{3}{2} > 1$). On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + 4v_2.$$

Puisque $v_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_2 = \dfrac{1}{2\times 4} = \dfrac{1}{8}$ d'après la question 4.f). On a donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$. Ceci implique que le piéton va rencontrer la droite $y = x$ avec probabilité 1 lors de son trajet.