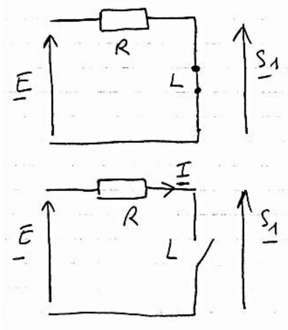
Corrigé du Concours Blanc - PHYSIQUE

Problème 1 – Filtre ADSL *(ENSTIM 2003)*



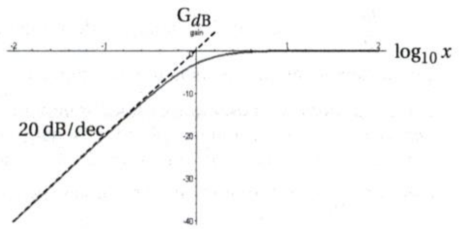
1. BF : L équivalente à un interrupteur fermé : $\underline{S_1} = 0$: BF ne passent pas
   HF : L équivalente à un interrupteur ouvert : $\underline{I} = 0$ et $\underline{S_1} = \underline{E} \neq 0$: HF passent
   C'est un filtre passe-haut (du 1er ordre).

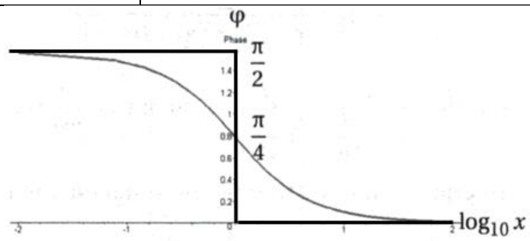
2. DDT : $\underline{H_1}(j\omega) = \dfrac{\underline{S_1}}{\underline{E}} = \dfrac{\underline{Z_L}}{R+\underline{Z_L}} = \dfrac{jL\omega}{R+jL\omega} = \dfrac{j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R}\omega}$

$$\boxed{\underline{H_1}(jx) = \frac{\underline{S_1}}{\underline{E}} = \frac{jx}{1+jx}} \text{ avec } \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}} \text{ et } \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$$

3. Équations des asymptotes

Domaine de pulsation	$\omega << \omega_0 \Leftrightarrow x << 1$	$\omega >> \omega_0 \Leftrightarrow x >> 1$
Numérateur	jx	jx
Dénominateur	1	jx
$\underline{H_1}(jx)$	jx	1
Courbe de gain $G_{dB,1}$	$G_{dB,1} = 20\log(x)$ Droite de pente +20 dB/décade passant par $(\log(x) = 0;\ 0 \text{ dB})$	$G_{dB,1} = 0$ Droite horizontale à 0 dB
Courbe de phase φ_1	Droite horizontale à $+\dfrac{\pi}{2}$ rad	Droite horizontale à 0 rad





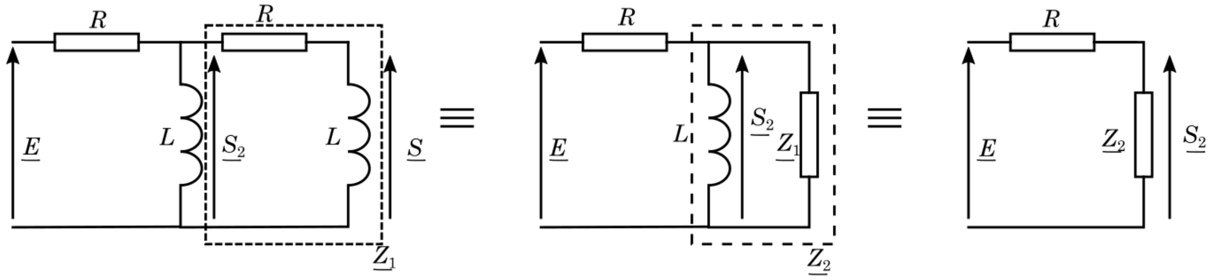
4. En $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$: $\underline{H_1}(j) = \dfrac{1}{1-j}$

$$\boxed{G_{dB}(1) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \text{ dB}} \text{ et } \boxed{\varphi(1) = \arg\left(\frac{1}{1-j}\right) = -\arctan(-1) = \frac{\pi}{4}}$$

$G_{dB}(1) = G_{dB\max} - 3$ dB : ω_0 est la pulsation de coupure à -3 dB

5. DDT : $\underline{S} = \dfrac{\underline{Z_L}}{R+\underline{Z_L}}\underline{S_2} \Leftrightarrow \boxed{\underline{S} = \dfrac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{S_2}}$

6. Il faut <u>associer les impédances</u> avant d'appliquer le DDT pour exprimer $\underline{S_2}$!



$$\underline{Z_1} = R + jL\omega \text{ et } \underline{Y_2} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{\underline{Z_1}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R + 2jL\omega}{jL\omega(R + jL\omega)}$$

$$\text{DDT : } \underline{S_2} = \frac{\underline{Z_2}}{R + \underline{Z_2}}\underline{E} = \frac{1}{1 + R\underline{Y_2}}\underline{E} \text{ soit } \boxed{\underline{S_2} = \frac{1}{1 + R\dfrac{R + 2jL\omega}{jL\omega(R + jL\omega)}}\underline{E}}$$

7. Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{S}}{\underline{S_2}} \cdot \frac{\underline{S_2}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \frac{1}{1 + R\dfrac{R + 2jL\omega}{jL\omega(R + jL\omega)}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \dfrac{R}{jL\omega}(R + 2jL\omega)}$$

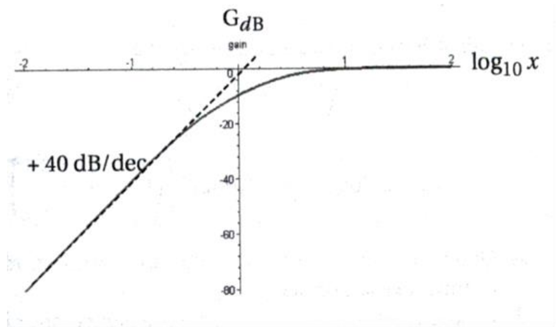
$$\underline{H} = \frac{jL\omega}{3R + jL\omega + \dfrac{R^2}{jL\omega}} = \frac{(jL\omega)^2}{3RjL\omega + (jL\omega)^2 + R^2} = \frac{\left(j\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + 3j\dfrac{L}{R}\omega + \left(j\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}$$

$$\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{(jx)^2}{1 + 3jx + (jx)^2}} \text{ avec } \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}} \text{ et } \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$$

- $x \to 0$: $\underline{H} \to 0$: BF ne passent pas et $x \to +\infty$: $\underline{H} \to 1$: HF passent
  C'est un <u>filtre passe-haut</u> du 2nd ordre, car polynôme du second degré au dénominateur.

8. Équations des asymptotes

Domaine de pulsation	$\omega << \omega_0 \Leftrightarrow x << 1$	$\omega >> \omega_0 \Leftrightarrow x >> 1$
Numérateur	$(jx)^2$	$(jx)^2$
Dénominateur	1	$(jx)^2$
$\underline{H}(jx)$	$(jx)^2 = -x^2$	1
Courbe de gain G_{dB}	$G_{dB} = 20\log(x^2) = 40\log(x)$ Droite de pente +40 dB/décade passant par $(\log(x) = 0;\ 0 \text{ dB})$	$G_{dB} = 0$ Droite horizontale à 0 dB



9. Pulsation de coupure réduite telle que $G_{dB}(x_C) = G_{dB\max} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$ ou $G(x_C) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\underline{H}(jx) = \frac{(jx)^2}{1+3jx+(jx)^2} = \frac{1}{\frac{1}{(jx)^2}+\frac{3}{jx}+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}-j\frac{3}{x}} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(-\frac{3}{x}\right)^2}}$$

$$G(x_C) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(1-\frac{1}{x_C^{\ 2}}\right)^2+\frac{9}{x_C^{\ 2}}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x_C^{\ 2}}\right)^2+\frac{9}{x_C^{\ 2}} = 2$$

$$1-\frac{2}{x_C^{\ 2}}+\frac{1}{x_C^{\ 4}}+\frac{9}{x_C^{\ 2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_C^{\ 4}}+\frac{7}{x_C^{\ 2}}-1 = 0 \Leftrightarrow 1+7x_C^{\ 2}-x_C^{\ 4} = 0 \Leftrightarrow X_C^{\ 2}-7X_C-1 = 0$$

La seule racine positive est $X_C = x_C^2 = \dfrac{7+\sqrt{53}}{2} = 7{,}14$ et $\boxed{x_C = \sqrt{7{,}14} \simeq 2{,}7 = \dfrac{\omega_C}{\omega_0}}$.

La pulsation de coupure est bien : $\boxed{\omega_C \simeq 2{,}7\omega_0}$.

10. $f_C = 10$ kHz et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{\omega_C}{2{,}7} = \dfrac{2\pi f_C}{2{,}7} = 23.10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$

$\omega_0 = \dfrac{R}{L}$ d'où $\boxed{R = L\omega_0 = 93\ \Omega}$

11. Signal d'entrée $e(t) = E_m \cos(\omega_1 t)$

Signal de sortie $s(t) = E_m G(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1))$. On a $\boxed{x_1 = \dfrac{\omega_1}{\omega_0} = \dfrac{2\pi f_1}{\omega_0} = 0{,}27}$

Module : $G(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x_1^{\ 2}}\right)^2+\left(\frac{3}{x_1}\right)^2}} = 5{,}9.10^{-2}$

Argument : $\varphi(x_1) = \pi - \arctan\left(\dfrac{-\frac{3}{x_1}}{1-\frac{1}{x_1^{\ 2}}}\right) = \pi + \arctan\left(\dfrac{3x_1}{x_1^{\ 2}-1}\right) = 2{,}4$ rad

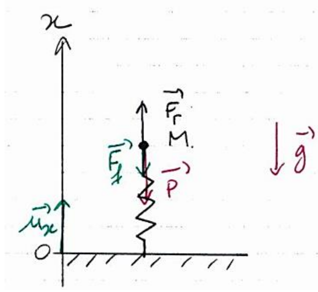
$$\boxed{s(t) = 0{,}36\cos\left(6{,}3.10^3 t + 2{,}4\right)}$$

Si on rajoute une composante continue au signal d'entrée, elle est supprimée par le filtre passe-haut. Le signal de sortie est toujours à valeur moyenne nulle.

12. Un filtre du deuxième ordre atténue dix fois plus les composantes BF qu'un filtre du premier ordre (pente à +40 dB/décade au lieu de +20 dB/décade). Le signal de sortie présente moins de composante parasite.

Problème 2 – Récupération d'énergie en discothèque

(E3A PSI 2018)



1. Force de rappel $\boxed{\overrightarrow{F_r} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_x}}$
2. Système : dalle assimilée à un point M de masse m

   Référentiel terrestre supposé galiléen, base cartésienne, mouvement rectiligne selon (Ox)

   Forces : Poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_x}$

   Force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$

   Force de frottement fluide : $\overrightarrow{F_f} = -D\vec{v} = -D\dot{x}\overrightarrow{u_x}$

   Principe fondamental de la statique pour $x = x_{éq}$: $m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_r} = \vec{0}$

   Projection sur $\overrightarrow{u_x}$: $-mg - k(x_{éq} - \ell_0) = 0 \Leftrightarrow k(x_{éq} - \ell_0) = -mg$

   $$\boxed{x_{éq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

   Analyse dimensionnelle : $\left[\frac{mg}{k}\right] = \frac{M[a]}{[F]L^{-1}} = L$ car $[F] = M[a]$ donc $\boxed{[x_{éq}] = L}$

   $\boxed{x_{éq} < \ell_0}$: cohérent car la dalle est posée sur le ressort, qui est donc comprimé.
3. Système : {dalle + danseur} assimilé à un point M de masse m

   Seul le poids change : $\vec{P} = -(m + M_d)g\overrightarrow{u_x}$

   Nouvelle position d'équilibre : $\boxed{x'_{éq} = \ell_0 - (m + M_d)\frac{g}{k}}$

   Affaissement de la dalle $\boxed{\delta = x_{éq} - x'_{éq} = M_d \frac{g}{k}}$.
4. D'après le Document 1, on choisit $\delta_{\max} = 10 \text{ mm}$ pour $M_d = 70 \text{ kg}$

   Constante de raideur $\boxed{k_{\min} = M_d \frac{g}{\delta_{\max}} \simeq 6{,}9.10^4 \text{ N.m}^{-1}}$
5. Système : dalle assimilée à un point M de masse m

   Forces : Poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_x}$

   Force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$

   Force de frottement fluide : $\overrightarrow{F_f} = -D\vec{v} = -D\dot{x}\overrightarrow{u_x}$

Force exercée par le danseur en mouvement : $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$;

Force d'amortissement électromagnétique : $\overrightarrow{F_a} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{u_x}$ $(\alpha > 0)$

<u>Principe fondamental de la dynamique</u> : $m\vec{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_a}$

<u>Projection sur $\overrightarrow{u_x}$</u> : $m\ddot{x} = -mg - k(x - \ell_0) - D\dot{x} - \alpha\dot{x} + F$

$$m\ddot{x} + (D+\alpha)\dot{x} + kx = k\ell_0 - mg + F \Leftrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) + \frac{F}{m}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{éq} + \frac{F}{m} \Leftrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - x_{éq}\right) = \frac{F}{m}$$

En posant $X = x - x_{eq} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{X} = \ddot{x}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{X} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F}{m} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{X} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{X} + a_0 X = b_0} \text{ avec } \boxed{a_0 = \frac{k}{m}} \text{ et } \boxed{b_0 = \frac{F}{m}}$$

6. <u>Énergie cinétique</u> : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

<u>Théorème de la puissance cinétique</u> :

$$\frac{dE_C}{dt} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{P}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_r}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_f}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_a}\right)$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = \left(-mg - k(x - \ell_0) - D\dot{x} + F - \alpha\dot{x}\right)\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -mg - k(x - \ell_0) - D\dot{x} + F - \alpha\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + (D+\alpha)\dot{x} + k\left(x - \left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\right) = F \Leftrightarrow m\ddot{x} + (D+\alpha)\dot{x} + k\left(x - x_{éq}\right) = F$$

On retrouve : $\boxed{\ddot{X} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F}{m}}$

<u>*Autre méthode :*</u>

<u>Poids</u> $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_x}$: force conservative dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur : $dE_{P,pes} = -\overrightarrow{P}\cdot d\overrightarrow{OM} = mgdx$ et $E_{P,pes} = mgx + cste$

<u>Force de rappel du ressort</u> $\overrightarrow{F_r} = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$: force conservative dérivant de l'énergie potentielle élastique : $E_{P,élas} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$

Système <u>non conservatif</u>.

<u>Théorème de la puissance mécanique :</u>

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{NC} \Leftrightarrow \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_{P,pes}}{dt} + \frac{dE_{P,élas}}{dt} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_f}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_a}\right)$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x} + k(x - \ell_0)\dot{x} = -D\dot{x}^2 + F\dot{x} - \alpha\dot{x}^2 \Rightarrow m\ddot{x} + mg + k(x - \ell_0) = -D\dot{x} + F - \alpha\dot{x}$$

7. $[\omega_0] = \left[\frac{k}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{[F]L}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{MLT^{-2}L}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$ soit $\boxed{[\omega_0] = T^{-1}}$ ω_0 : <u>pulsation propre</u> du système.

$$[Q]=\left[\frac{(km)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\right]=\frac{\left(MLT^{-2}L^{-1}M\right)^{\frac{1}{2}}}{MLT^{-2}TL^{-1}}=\frac{MT^{-1}}{MT^{-1}}$$ soit $\boxed{[Q]=1}$: Q : <u>facteur de qualité</u>

8. <u>Solution particulière</u> recherchée sous la forme d'une constante :

$$\omega_0^2 X_P=\omega_0^2\frac{F_0}{k}\Leftrightarrow \boxed{X_P=\frac{F_0}{k}}$$

9. La solution générale est une somme de deux exponentielles (il n'y a pas de fonctions sinusoïdales) et $Q=7{,}6.10^{-2}<1$: régime transitoire <u>apériodique</u>.

   <u>Condition initiale sur la position</u> : $X(0)\simeq\frac{F_0}{k}\left(1-\frac{1}{1-Q^2}\left(1-Q^2\right)\right)=0$ en accord avec « dalle initialement à sa <u>position d'équilibre</u> » car $x=x_{eq}\Leftrightarrow X=0$

   <u>Condition initiale sur la vitesse</u> : $\dot{X}(t)\simeq\frac{F_0}{k}\left(\frac{-1}{1-Q^2}\left(-\omega_0 Qe^{-\omega_0 Qt}+\frac{\omega_0}{Q}Q^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)\right)$ soit $\dot{X}(0)\simeq\frac{F_0}{k}\left(\frac{-1}{1-Q^2}\left(-\omega_0 Q+\omega_0 Q\right)\right)=0$ en accord avec « dalle initialement <u>immobile</u> ».

10. Loi d'évolution de la vitesse $\boxed{\dot{x}(t)=\dot{X}(t)\simeq\frac{F_0}{k}\frac{\omega_0 Q}{1-Q^2}\left(e^{-\omega_0 Qt}-e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)}$

11. Puissance électrique instantanée reçue par les LED : $P_L(t)=K_1\left[\gamma\dot{x}(t)\right]^2$:

$$P_L(t)=K_1\gamma^2\left[\dot{x}(t)\right]^2=K_1\gamma^2\left(\frac{F_0}{k}\right)^2\left(\frac{\omega_0 Q}{1-Q^2}\right)^2\left(e^{-\omega_0 Qt}-e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)^2$$

$$\boxed{P_L(t)=KF_0^2\left(e^{-\omega_0 Qt}-e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)^2}$$

12. $Q=7{,}6.10^{-2}<<1$ d'où $\omega_0 Q<<\frac{\omega_0}{Q}$ donc $e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$ converge plus rapidement que $e^{-\omega_0 Qt}$

   Aux « temps longs », $P_L(t)\simeq KF_0^2\left(e^{-\omega_0 Qt}\right)^2=KF_0^2 e^{-2\omega_0 Qt}$ soit $P_L(t)\simeq KF_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau=\frac{1}{2\omega_0 Q}}$

13. En trait plein : F_0, en pointillés : P_L
   $t\in[1{,}3\text{ s};\ 1{,}6\text{ s}]$: $F_0=1600$ N ; $t\in[2{,}6\text{ s};\ 3{,}0\text{ s}]$: $F_0=800$ N ; $t\in[4{,}2\text{ s};\ 4{,}8\text{ s}]$: $F_0=400$ N

14. D'après la FIGURE 4, la puissance électrique $P_L(t)$ est effectivement non nulle lors de <u>l'application</u> de l'échelon ainsi que lors de sa <u>suppression</u>.

Mathématiquement : d'après la question 11 : $\boxed{\lim_{t\to\infty} P_L(t) = 0}$

Physiquement : en régime permanent, la dalle atteint sa position d'équilibre donc $\dot{x} \to 0$ et $\boxed{P_L(t) \to 0}$

15. D'après la question 11, $P_{L,\max} = KF_0^2$. Sur la FIGURE 4, entre chaque essai, F_0 est divisé par 2. On constate que $P_{L,\max}$ passe de 50 W à 13 W puis à 3 W (environ) : $P_{L,\max}$ est bien divisé par $4 = 2^2$.

16. Mis à part pour le 1er échelon, la constante de temps semble du même ordre de grandeur : $\boxed{\tau \simeq 0{,}5 \text{ s}}$

D'après la question 12 : $\tau = \dfrac{1}{2\omega_0 Q}$ avec $Q = 7{,}6.10^{-2}$ et $\omega_0 = 65 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $\boxed{\tau \simeq 0{,}1 \text{ s}}$: l'ordre de grandeur est le même.

17. Composante continue : $\boxed{F_0 \simeq 1000 \text{ N}}$ Amplitude : $\boxed{F_1 \simeq 800 \text{ N}}$

Période telle que : $3T \simeq 1 \text{ s} \Leftrightarrow \text{T} \simeq 0{,}3 \text{ s}$ d'où pulsation : $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T} \simeq 20 \text{ rad.s}^{-1}}$

18.

Domaine temporel	Domaine complexe	Amplitude complexe
$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$	$\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t+\psi)} = \underline{X} e^{j\omega t}$	$\underline{X} = X_0 e^{j\psi}$

Passage de l'équation différentielle en complexe :

$$\frac{d^2\underline{X}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{X}(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{X}(t) = \frac{F_1}{m} e^{j\omega t} \Leftrightarrow (j\omega)^2 \underline{X} e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X} e^{j\omega t} = \frac{F_1}{m} e^{j\omega t}$$

$$\left((j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2\right)\underline{X} = \frac{F_1}{m} \Leftrightarrow \underline{X} = \frac{F_1}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega}$$

Amplitude des oscillations : $\boxed{X_0 = |\underline{X}| = \dfrac{F_1}{m}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}}}$

19. Vitesse $V(t) = \dfrac{dX(t)}{dt} \Rightarrow \underline{V}(t) = \dfrac{d\underline{X}(t)}{dt} = j\omega \underline{X}(t)$

Amplitude complexe : $\underline{V} = j\omega \underline{X}$ d'où amplitude : $\boxed{V_0 = |\underline{V}| = \omega |\underline{X}| = \omega X_0}$

20. BF : $\omega \to 0$: $\langle P_L \rangle \simeq \dfrac{AR_L \gamma^2 F_1^2}{CR_L^2 \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \Rightarrow \langle P_L \rangle \to 0$

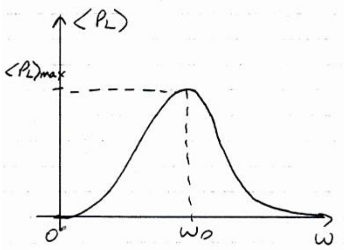
HF : $\omega \to +\infty$: $\langle P_L \rangle \simeq \dfrac{AR_L \gamma^2 F_1^2}{CR_L^2 \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \langle P_L \rangle \to 0$

$\langle P_L \rangle(\omega)$ est maximale lorsque le dénominateur est minimal. Comme $B > 0$ et $C > 0$, il faut que $\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_0^2$ soit $\boxed{\omega = \omega_0 = 65 \text{ rad.s}^{-1}}$

Puissance maximale : $\boxed{\langle P_L \rangle_{\max} = \dfrac{AR_L F_1^2}{B\gamma^2}}$

Allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de ω.

Phénomène de résonance pour la pulsation propre ω_0, qui est aussi pulsation de résonance.



21. Pulsations : $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \dfrac{115}{60} = 12 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi \dfrac{125}{60} = 13 \text{ rad.s}^{-1}$

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$ et d'après le graphe précédent, l'équipe 2 produit une puissance moyenne plus élevée.

Problème 3 – Jupiter et la sonde Juno *(E3A MP 2021)*

1. 3ème loi de Kepler pour la Terre et pour Jupiter : $\dfrac{T_T^2}{d_T^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S} = \dfrac{T_J^2}{d_J^3}$

Période de révolution sidérale de Jupiter :

$$\boxed{T_J = T_T\sqrt{\dfrac{d_J^3}{d_T^3}} = 4{,}33.10^3 \text{ jours} = 11 \text{ ans } 313 \text{ jours}}$$

2. Système : Jupiter assimilée à un point J de masse M_J

Référentiel héliocentrique supposé galiléen, base sphérique

Force gravitationnelle exercée par le Soleil de centre S : $\vec{F} = -\dfrac{GM_S M_J}{r^2}\vec{u_r}$ avec $\overrightarrow{SJ} = r\vec{u_r}$: force conservative dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle telle que : $dE_P = -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{SJ} = \dfrac{GM_S M_J}{r^2}\vec{u_r}\cdot d\overrightarrow{SJ} = \dfrac{GM_S M_J}{r^2}dr$ soit $E_P = -\dfrac{GM_S M_J}{r}$

Système conservatif : $E_m = cste$ et $E_m = E_C + E_P$

Mouvement circulaire : cinématique en base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

$$\overrightarrow{SJ} = r\vec{u_r} = d_J\vec{u_r} \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{SJ}}{dt} = d_J\dot{\theta}\vec{u_\theta} = v\vec{u_\theta} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = d_J\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - d_J\dot{\theta}^2\vec{u_r} = \frac{dv}{dt}\vec{u_\theta} - \frac{v^2}{d_J}\vec{u_r}$$

Principe fondamental de la dynamique : $M_J\vec{a} = \vec{F}$

Projection du PFD sur $\vec{u_r}$: $-M_J\dfrac{v^2}{d_J} = -\dfrac{GM_S M_J}{d_J{}^2} \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{GM_S}{d_J}$

Énergie mécanique : $E_m = E_C + E_P = \dfrac{1}{2}M_J v^2 - \dfrac{GM_S M_J}{d_J} = \dfrac{1}{2}M_J\dfrac{GM_S}{d_J} - \dfrac{GM_S M_J}{d_J}$

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_S M_J}{2d_J}}$$

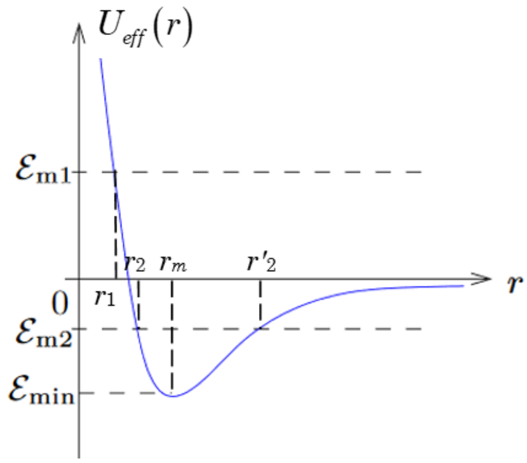
3. Système : objet M de masse m
   Référentiel géocentrique supposé galiléen, base sphérique
   Force gravitationnelle exercée par la Terre de centre A : $\overrightarrow{F'} = -\dfrac{GM_T m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$: force conservative dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle $E'_P = -\dfrac{GM_T m}{r}$
   Système conservatif
   Théorème de l'énergie mécanique :
   $$\Delta E_m = W^{NC} = 0 \Leftrightarrow E_C\left(M_\infty\right) + E'_P\left(M_\infty\right) - E_C\left(M_0\right) - E'_P\left(M_0\right) = 0$$
   M à l'infini sans vitesse : $E_C\left(M_\infty\right) = 0$ et $E'_P\left(M_\infty\right) = 0$
   M à la surface de la Terre : $E_C\left(M_0\right) = \dfrac{1}{2}mv_l^2$ et $E'_P\left(M_0\right) = -\dfrac{GM_T m}{R_T}$
   $$\frac{1}{2}mv_l^2 = \frac{GM_T m}{R_T} \Leftrightarrow v_l^2 = 2\frac{GM_T}{R_T} \Leftrightarrow \boxed{v_l = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = 11{,}2.10^3 \text{ m.s}^{-1} = 11{,}2 \text{ km.s}^{-1}}$$
4. La durée de l'expérience (53 jours) est très petite devant la période de révolution de Jupiter autour du Soleil (environ 12 ans). En 53 jours, Jupiter s'est très peu déplacée dans le référentiel héliocentrique : on peut considérer son centre O immobile.
   Le référentiel jupiterocentrique est donc fixe par rapport au référentiel héliocentrique : il est donc supposé galiléen.
5. Système : sonde Juno à un point matériel P de masse m
   Référentiel jupiterocentrique $\mathcal{R}$ supposé galiléen
   Force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de centre O : $\overrightarrow{F_J} = -\dfrac{GM_J m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$: force centrale telle que $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F_J}\right) = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_J} = r\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{F_J} = \vec{0}$
   Théorème du moment cinétique : $\dfrac{\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F_J}\right) = \vec{0}$ donc $\boxed{\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{cste}}$
   $\boxed{\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}}$: le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ appartient au plan orthogonal à $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}$ et passant par O : la trajectoire est plane.
6. En coordonnées cylindriques :
   $$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_r} \text{ et } \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = mC\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cste}}$$
   Constante des aires : $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$
7. $\overrightarrow{F_J} = -\dfrac{GM_J m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$: force conservative dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{P,J} = -\dfrac{GM_J m}{r}$
   Système conservatif : donc l'énergie mécanique se conserve

Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

Énergie mécanique : $E_{m,P/\mathcal{R}} = E_m = E_C + E_{P,J} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GM_J m}{r}$

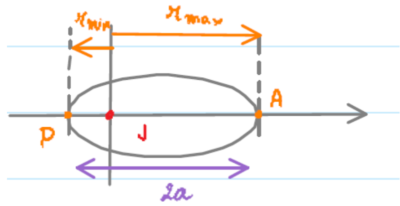
$r^2\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2}$ donc $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)}$ avec $\boxed{U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{mM_J}{r}}$

8. Les domaines possibles du <u>mouvement radial</u> du point P correspondent à $\boxed{E_m \geq U_{eff}(r)}$.



- Pour $\boxed{E_m = E_{m1} \geq 0}$: le domaine de variation de r est non borné : $r \in [r_1;+\infty[$. Il s'agit d'un <u>état de diffusion.</u> La trajectoire est une <u>hyperbole</u>, dont Jupiter occupe un foyer.
- Pour : le domaine de variation de r est borné : $r \in [r_2;r'_2]$. Il s'agit d'un <u>état lié</u>. La trajectoire est une <u>ellipse</u> dont Jupiter occupe un foyer.
- Pour $\boxed{E_m = E_{\min} < 0}$: la distance r ne peut prendre qu'une seule valeur $r = r_m$. Il s'agit d'un <u>état lié</u>. La trajectoire est un <u>cercle</u> dont Jupiter est le centre.

9. Trajectoire elliptique : $\boxed{r_{\min} + r_{\max} = 2a}$



10. 3ème loi de Kepler pour la sonde Juno : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}$

Demi-grand axe a : $\boxed{a = \left(\frac{GM_J T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 4{,}1.10^6 \text{ km}}$

avec $T = 53 \text{ jours} = 4{,}6.10^6 \text{ s}$

11. Énergie mécanique : $\boxed{E_m = -\frac{GM_J m}{2a} = -58 \text{ GJ}}$

12. $E_m = -\frac{GM_J m}{2a} = -\frac{GM_J m}{r_{\min} + r_{\max}} \Leftrightarrow \boxed{r_{\min} + r_{\max} = -\frac{GM_J m}{E_m}}$

13. En P et A, r est extrémal : $\dot{r} = 0$ d'où $E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_J m}{r}$

Donc r_{min} et r_{max} sont solutions de l'équation : $E_m r^2 + GM_J m r - \frac{1}{2}mC^2 = 0$

C'est un polynôme du 2nd degré dont le produit des racines vérifient :

$$\boxed{r_{\min} r_{\max} = -\frac{mC^2}{2E_m}}$$