CHAPITRE MI6

Mouvements dans un champ de gravitation newtonien

➢ Problématique

FIGURE 1 : Planètes du système solaire

Planètes du système solaire : tournent autour du soleil avec une **trajectoire et une période propre** à chacune d'elles. Mvts décrits par les 3 lois de Kepler, déduites d'observations astronomiques.

Questions : Comment justifier ces lois ?

Lois transposables aux satellites terrestres ?

1 Champ de gravitation newtonien

1.1 Force centrale

- **Définition** : *M* est soumis à une **force centrale**

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}}$$

O : **centre de force**

- Conséquences
  - **Intensité *F*(*r*) ne dépend que de la distance *r***
  - **Moment par rapport au point *O* est nul**

1 Champ de gravitation newtonien

1.1 Force centrale

➢ Interaction gravitationnelle

$$\boxed{\overrightarrow{F}^{grav} = -\frac{Gm_0m}{r^2}\overrightarrow{u_r} = F(r)\overrightarrow{u_r}} \qquad \boxed{F(r) = -\frac{Gm_0m}{r^2}}$$

Force centrale

1.2 Champ de force newtonien

- <u>Expression générale</u>

Champ de force: force dépend de la **position**

<u>**Définition**</u> : **Champ de force newtonien**

$$\boxed{F(r) = -\frac{K}{r^2}}$$

K > 0 : attractif   K < 0 :répulsif

- <u>Interaction gravitationnelle</u>

$$\boxed{\overrightarrow{F}^{grav} = -\frac{Gm_0 m}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}} \qquad \boxed{K = Gm_0 m > 0}$$

Champ de force **newtonien** attractif

1.3 Énergie potentielle associée

➢ Énergie potentielle gravitationnelle

$$\boxed{E_{P,grav}(r) = -\frac{Gm_0m}{r} = -\frac{K}{r}}$$

➢ Champ newtonien conservatif

Propriété :

Chp de force newtonien est **conservatif** et dérive de **l'énergie potentielle** $\boxed{E_P = -\frac{K}{r}}$

2 Conservation du moment cinétique

2.1 Théorème du moment cinétique

- **Th MC**
- **Propriété** :

moment cinétique se **conserve** $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{L_O}$

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{cste}}$$

2.2 Conséquence 1 : planéité de la trajectoire

- **Propriété** :
- **Remarque**

2.3 Conséquence 2 : loi des aires

- Constante des aires

Définition : C : **constante des aires**

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = cste \quad \left(\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}\right)}$$

C : 1ère cste du mvt, fixée par les C.I.

Expression de C :

$$\boxed{C = r_0^2\dot{\theta}_0 = \frac{\left\|\overrightarrow{L_O}\right\|}{m}}$$

- Cas d'un mouvement circulaire

Mouvement circulaire **uniforme**

➢ Loi des aires

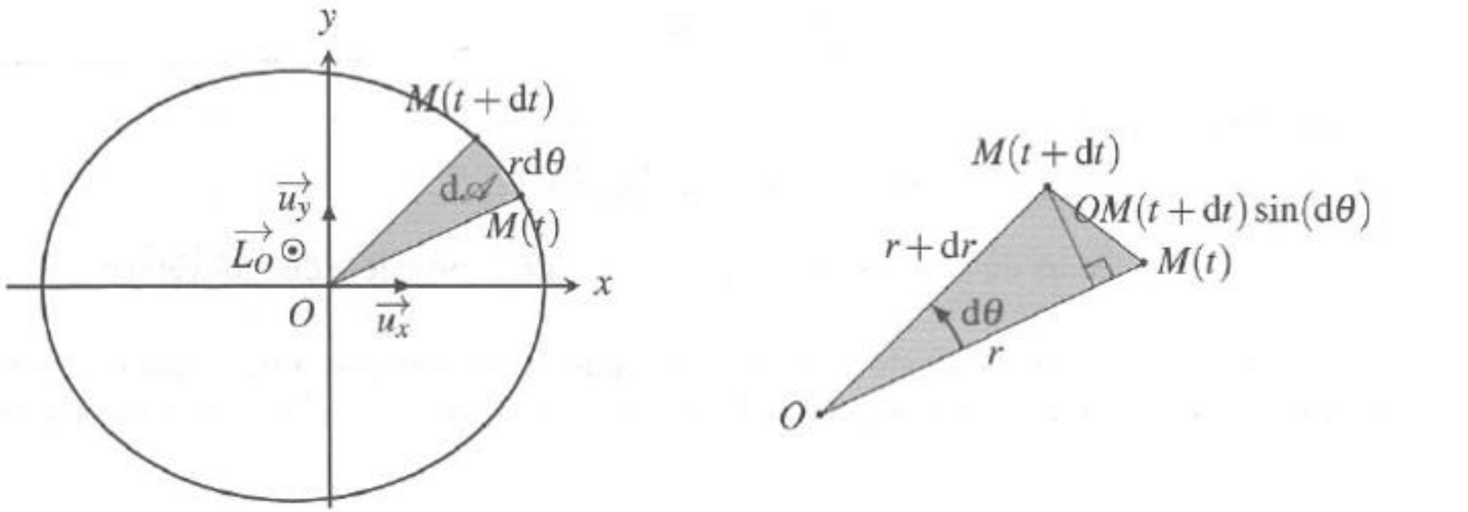


FIGURE 2 : Aire $d\mathscr{A}$ balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant dt

Loi des aires : Ds mvt à force centrale :

- l'aire balayée par le vecteur position entre 0 et *t* est **proportionnelle** au temps.
- le vecteur position balaye des **aires égales** en des **intervalles de temps égaux**.

- Vitesse aréolaire

Définition

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}}$$

3 Conservation de l'énergie mécanique

3.1 Énergie mécanique en coordonnées polaires

- Hypothèse
- Expression de l'énergie mécanique

Propriété

E_m fixée par les C.I.

E_m : 2ème cste du mouvement

Mvt plan : coordonnées **polaires**: r et θ

$$\boxed{E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_P(r)}$$

3.2 Énergie potentielle effective

- M a **2 degrés de liberté** dans le plan de sa trajectoire : r et θ
- Énergie cinétique
  - **énergie cinétique radiale :**

$$\boxed{E_C^{radiale}\left(\dot{r}\right) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m v_r^2}$$

  - **énergie cinétique orthoradiale ou de rotation**

$$E_C^{rotation} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m v_\theta^2$$

$$\boxed{E_C^{rotation}\left(r\right) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}$$

3 Conservation de l'énergie mécanique

3.2 Énergie potentielle effective

➢ Énergie mécanique

$$\boxed{E_m = E_C^{radiale}(\dot{r}) + E_{Peff}(r)}$$

➢ **Définition** : **Énergie potentielle effective**

$$\boxed{E_{Peff}(r) = E_C^{rotation}(r) + E_P(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_P(r)}$$

➢ **Propriété**

mouvement radial à 1 degré de liberté

➢ Mouvement radial de *M*

domaines possibles du mvt radial : $\boxed{E_m \geq E_{Peff}(r)}$

4 Mouvements des planètes et des satellites

4.1 Étude qualitative des trajectoires

- Retour à la problématique

Force d'attraction gravitationnelle

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{GM_S m}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r} \text{ avec } K = GM_S m}$$

- Énergie potentielle gravitationnelle

$$\boxed{E_P(r) = -\frac{GM_S m}{r} = -\frac{K}{r}}$$

- Constantes du mouvement

$$\boxed{\begin{cases} C = r^2\dot{\theta} = cste \\ E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{Peff} = cste \end{cases}}$$

➢ Étude qualitative du mouvement radial

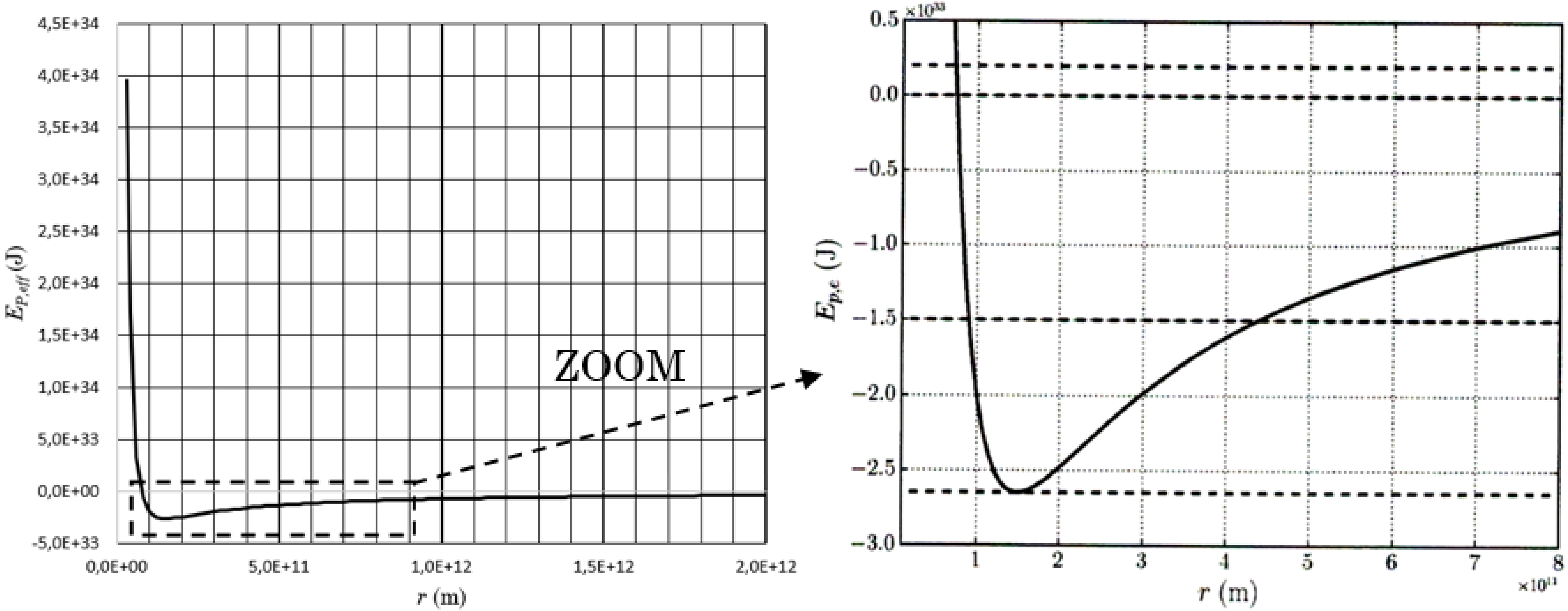
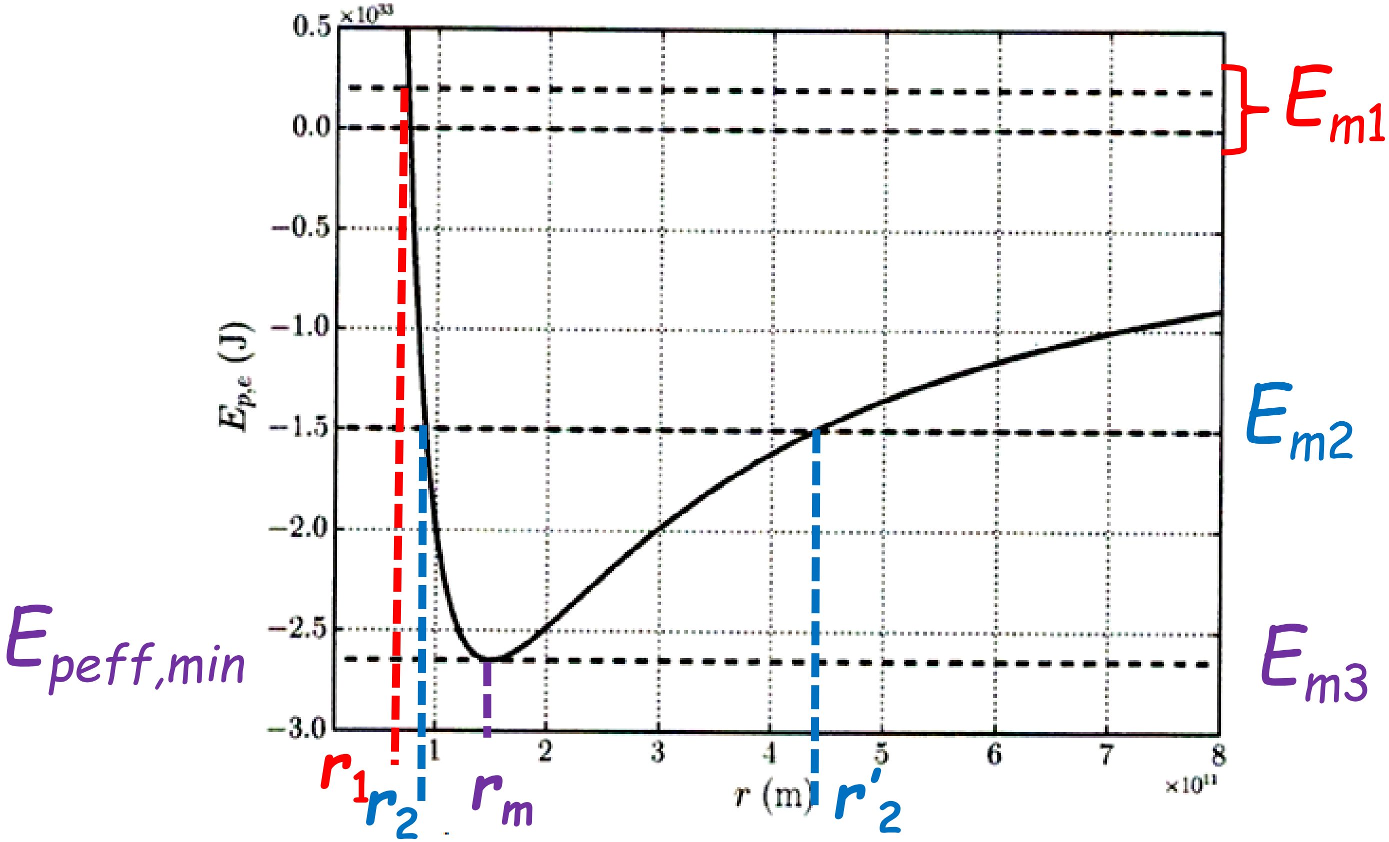


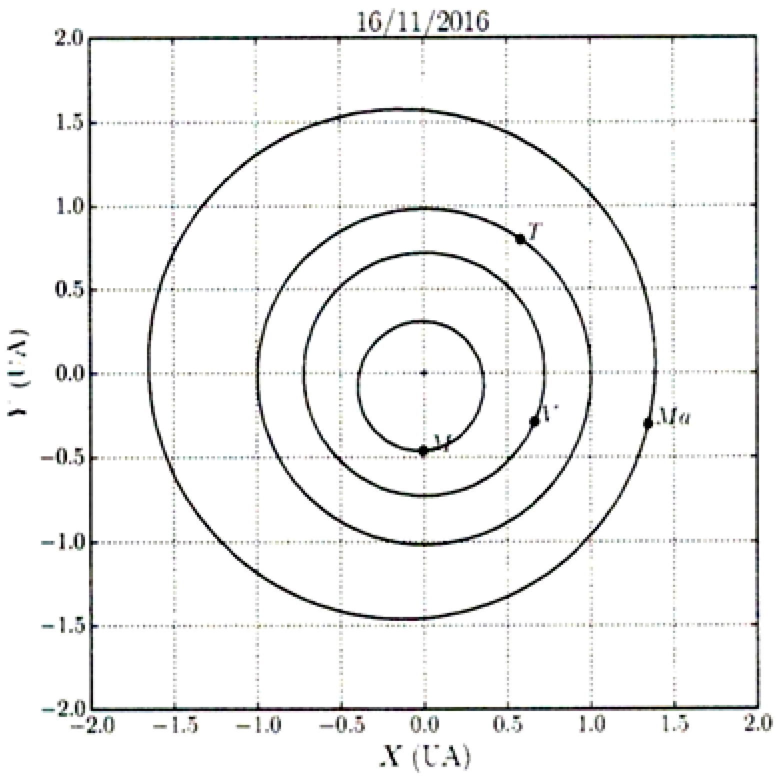
FIGURE 3 : Énergie potentielle effective de la Terre (à droite : zoom rectangulaire)
($m = 6{,}0.10^{24}$ kg et $C = 4{,}46.10^{15}$ m^2.s^{-1})

4 Mouvements des planètes et des satellites

4.1 Étude qualitative des trajectoires



➢ Retour à la problématique



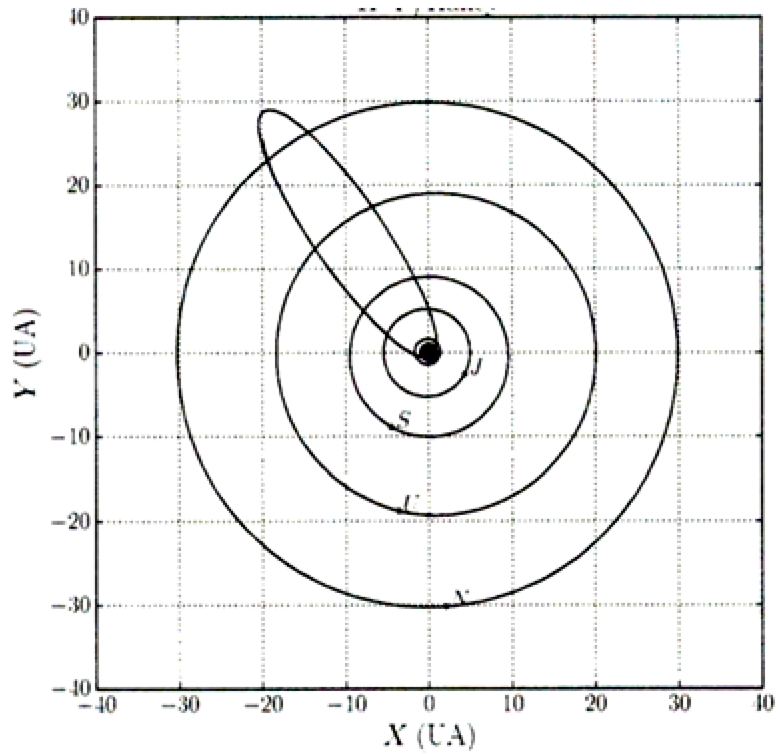


FIGURE 4 : Allure des trajectoires des planètes du système solaire et de la comète de Halley $\left(1 \text{ UA} = 1 \text{ ua} \simeq 1{,}5.10^{11} \quad \text{m}\right)$

➢ Allure des trajectoires

Animation 1 : Figures animées pour la physique / Mécanique / Planètes / Nature de la trajectoire
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Planetes/Nature_F.php

Trajectoires = famille des **coniques**

Équation polaire
$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

e : excentricité, p : paramètre

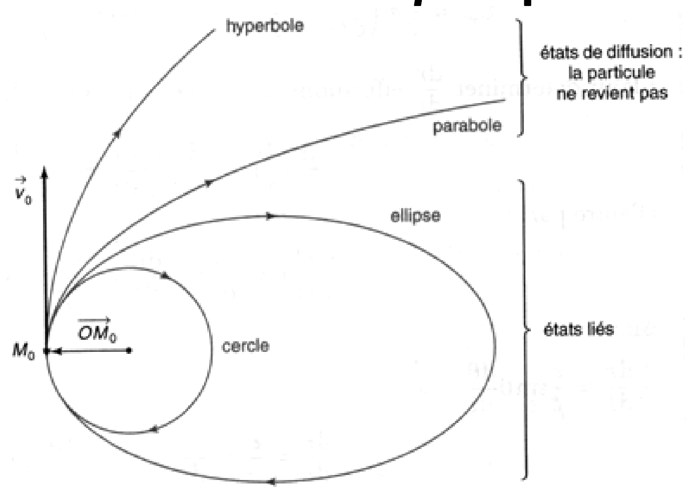


FIGURE 5 : Trajectoires d'un point M mis en mouvement à partir de la même position initiale M_0 mais avec des **vitesses initiales v_0 croissantes**, i.e. pour des valeurs croissantes de l'énergie mécanique E_m.

4.2 Étude des trajectoires circulaires

- Expression de la vitesse d'une planète en orbite circulaire autour du Soleil

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} = cste}$$

- Expression de la période

3ème loi de Kepler

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$$

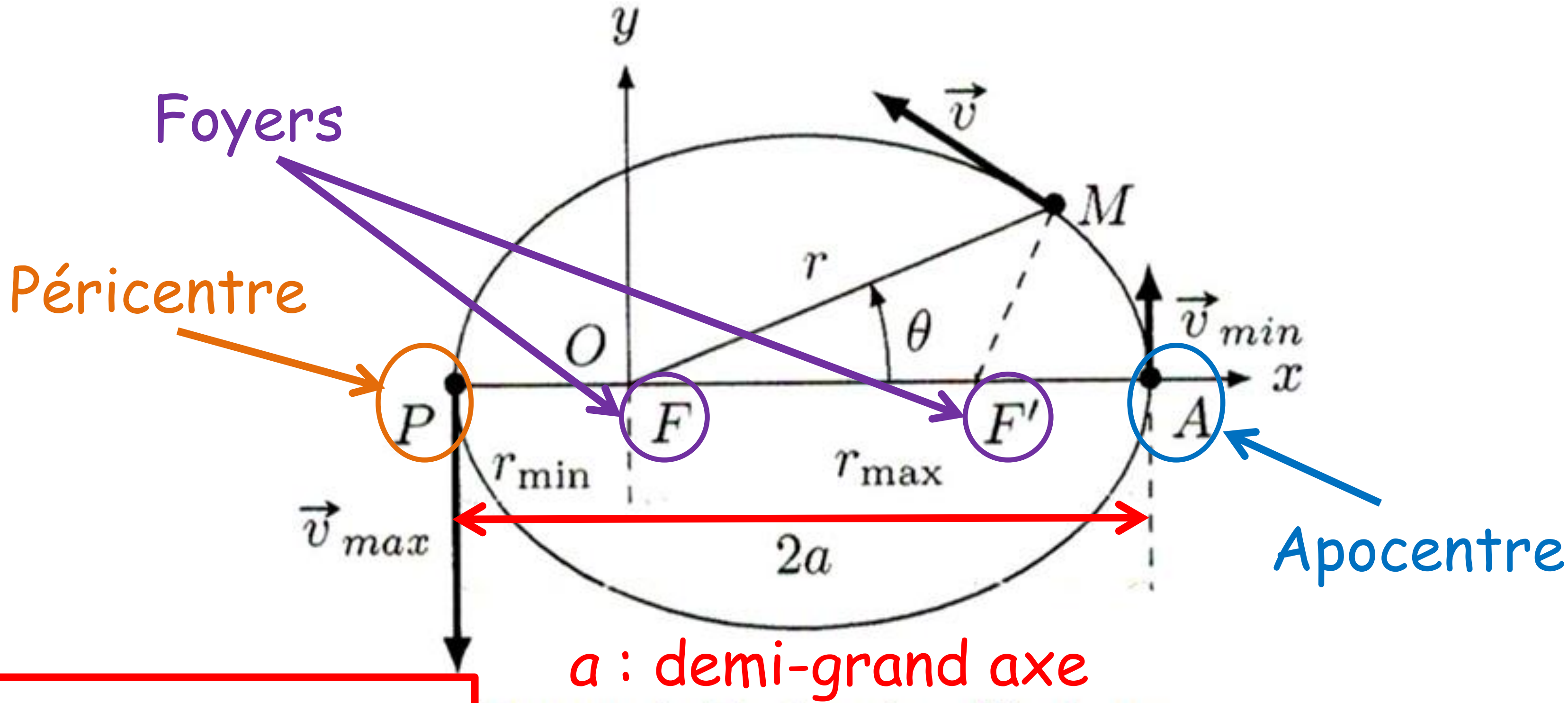
- Expression de l'énergie mécanique

$$\boxed{E_m = -\frac{K}{2R} = -\frac{GM_S m}{2R} < 0}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}E_P = -E_C^{rotation}}$$

4.3 Étude des trajectoires elliptiques

➢ Caractéristique d'une ellipse



$$\boxed{r_{\min} + r_{\max} = 2a}$$

FIGURE 6 : Trajectoire elliptique

➢ Vitesse angulaire

Propriété

$$\boxed{\omega_P > \omega_A}$$

➢ Vecteur vitesse

Propriété

$$\boxed{v_P > v_A}$$

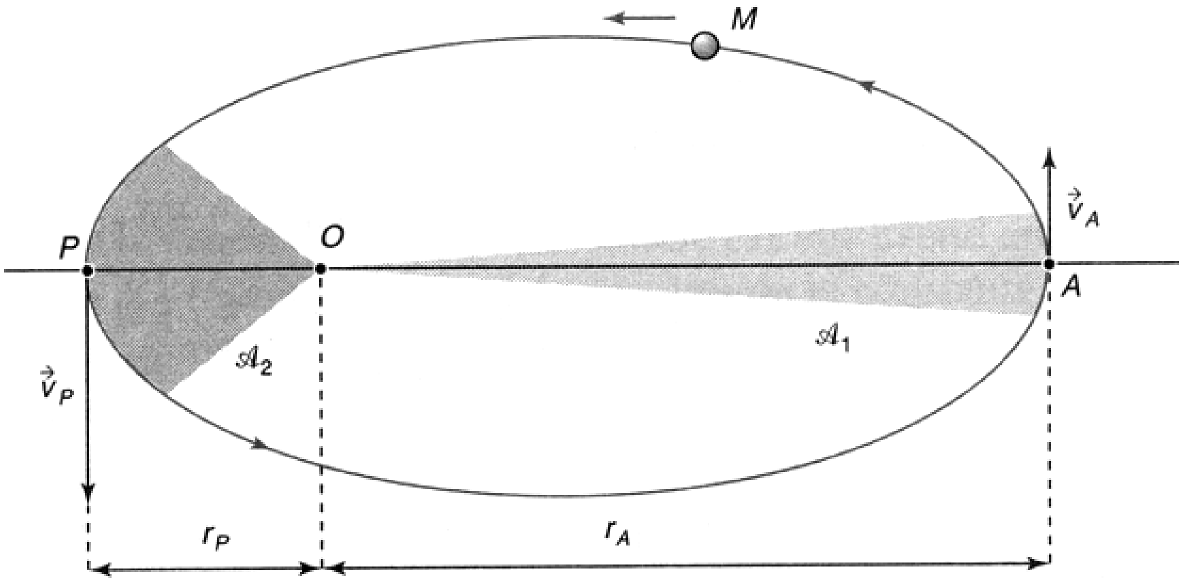


FIGURE 7 : Péricentre (P) et apocentre (A)

Animation 2 : Physique et simulations numériques / Mécanique / Dynamique / Force centrale (2)
http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/forcentrale.html

Animation 3 : Physique et simulations numériques / Divers / Cosmographie / Lois de Kepler
http://subaru.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/divers/planete.html

➢ Expression de l'énergie mécanique

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_s m}{2a} = -\frac{K}{2a} < 0}$$

Généralisation pour une trajectoire elliptique :

rayon du cercle *R* remplacé par le **demi-grand axe *a*** de l'ellipse

➢ Expression de la vitesse

➢ Expression de la période

Généralisation : rayon *R* remplacé par ½ gd-axe *a*

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}}$$

4.4 Lois de Kepler

➢ Historique

observations astronomiques de T Brahe, J Kepler

➢ Lois de Kepler :

- **1ère loi** : Dans le référentiel de Kepler, la trajectoire de la planète *P* est une **ellipse** dont le Soleil *S* est un des foyers (demi-grand axe *a* et période *T*).
- **2ème loi** : Le vecteur position balaye des **aires égales en des temps égaux** (**loi des aires**)
- **3ème loi** : **Période de révolution *T***

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$$

M_S est la masse du Soleil

4.5 Étude des satellites terrestres

4.5.1 Caractéristiques du mouvement

- **Mvt satellite**
- **Lois de Kepler**

[1] C. Bonnal, F. Alby, Les débris spatiaux, *Pour la Science*, n°369, p. 82-89, Juillet 2008

4.5.2 Orbite géostationnaire

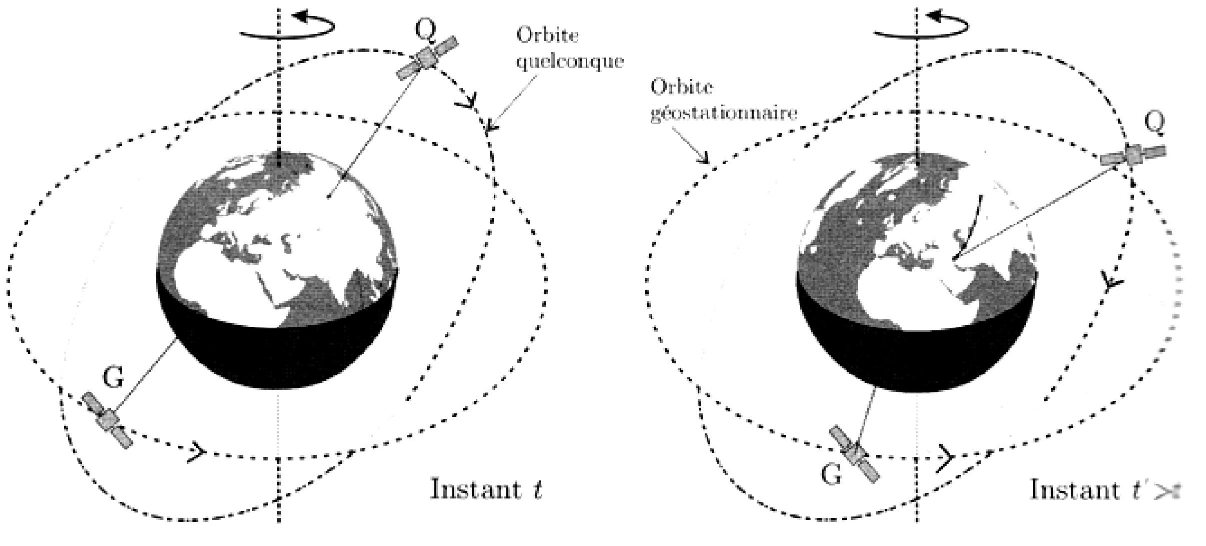


FIGURE 8 : Trajectoires d'un satellite G en orbite géostationnaire et d'un satellite Q en orbite quelconque

- **<u>Définition</u>**
- **<u>Propriété</u>**
- <u>Vitesse angulaire</u>
- <u>Altitude de l'orbite géostationnaire</u>