TRAVAUX DIRIGÉS MI5
Moment cinétique d'un point matériel

Niveau 1

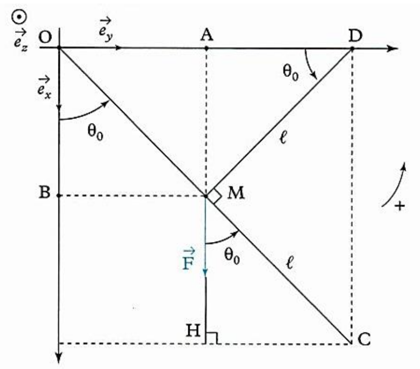
*Exercice 1. Moment cinétique d'un électron

Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire et uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53$ pm est parcourue à la fréquence $f = 6{,}6.10^{15}$ Hz.

1. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de l'électron.
2. Calculer sa norme sachant que la masse de l'électron est $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

*Exercice 2. Moments de forces

On considère un point matériel M de masse m soumis à une force $\vec{F} = F\overrightarrow{e_x}$ constante.



1. Déterminer les expressions des moments de la force $\vec{F}$ suivants : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right)$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_C}\left(\vec{F}\right)$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_D}\left(\vec{F}\right)$.
2. En déduire les expressions des moments scalaires de la force $\vec{F}$ suivants : $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{F}\right)$, $\mathcal{M}_{(Cz)}\left(\vec{F}\right)$ et $\mathcal{M}_{(Dz)}\left(\vec{F}\right)$. Effectuer les applications numériques.
3. Retrouver les expressions de $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{F}\right)$, $\mathcal{M}_{(Cz)}\left(\vec{F}\right)$ et $\mathcal{M}_{(Dz)}\left(\vec{F}\right)$ en utilisant le bras de levier.

<u>Données</u> : $F = 1{,}0.10^3$ N, $\ell = 1{,}0$ m, $\theta_0 = 45°$

Exercice 3. Serrage d'un écrou

Le constructeur d'un vélo recommande de serrer les pédales avec un couple $\Gamma = 35$ N.m. Le cycliste dispose d'une clé de longueur $L = 20$ cm.

1. Quelle force minimale le cycliste devra-t-il appliquer sur la clé pour atteindre le couple spécifié ?
2. À quel endroit et dans quelle direction devra-t-il le faire ?

*Exercice 4. Particule dans un champ magnétique

Une particule chargée est en mouvement dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ uniforme et constant. À l'instant initial, elle se trouve en O et sa vitesse est $\overrightarrow{v_0}$.

1. À quelle condition son mouvement est-il plan ? Rappeler ses propriétés.
2. Choisir un point C de ce plan, pour lequel il est judicieux d'exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_C}$ de la particule. Donner l'expression de $\overrightarrow{L_C}$.
3. Que peut-on dire des variations de $\overrightarrow{L_C}$?
4. Vérifier que la loi du moment cinétique est satisfaite.

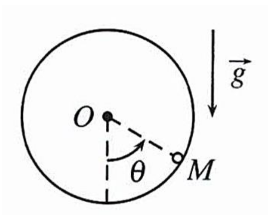
Niveau 2

*Exercice 5. Le pendule du professeur Tournesol

Le professeur Tournesol réalise son pendule avec un fil idéal de longueur l, dont il tient l'une des extrémités (choisie comme origine O du repère) ; à l'autre extrémité, il accroche une bille assimilée à un point matériel M de masse m. L'axe (Oz) est supposé vertical ascendant. Le pendule est écarté d'un angle α par rapport à la verticale et lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ pour que la bille décrive des **<u>cercles horizontaux</u>**.

1. Faire un schéma en perspective, en faisant apparaître la trajectoire de M et ses coordonnées cylindriques. Préciser les valeurs de r et z.
2. Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{v_0}$ par application du théorème du moment cinétique et montrer que le mouvement de M est uniforme.
3. Calculer la période T du mouvement. Quelle est la valeur approchée de T si α est faible ?

Exercice 6. Particule sur un cerceau immobile



Une particule M, de masse m, glisse dans la rainure intérieure d'un cerceau de rayon R. M est soumise à des frottements fluides, opposés à la vitesse, de coefficient de proportionnalité α. M est initialement placée en $\theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ sans vitesse initiale.

1. Établir, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la position $\theta(t)$ de M. On se placera ensuite dans le cas de petits angles.

2. Pour quelle valeur critique R_C du rayon du cerceau la particule M atteint-elle le plus rapidement possible la position d'équilibre sans oscillation ? Établir dans ce cas l'expression de la position $\theta(t)$ de M et en tracer l'allure.
3. Établir dans ce cas l'expression de la vitesse de M ; tracer l'allure temporelle de sa norme.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Moment cinétique d'un électron

1. Système : électron = point M de masse m_e

   Trajectoire circulaire autour de O : base polaire $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\right)$

   Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r_0\overrightarrow{u_r}$

   Vecteur vitesse : $\vec{v} = r_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

   Moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}\left(M\right) = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v} = m_e r_0\overrightarrow{u_r} \wedge r_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = m_e r_0^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$

   Vitesse angulaire : $\dot{\theta} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

   Moment cinétique : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = m_e r_0^2 2\pi f\overrightarrow{u_z}}$
2. A.N. : $\boxed{\left\|\overrightarrow{L_O}\right\| = m_e r_0^2 2\pi f = 1{,}1.10^{-34}\ \text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}}$

*Exercice 2. Moments de forces

1. Expressions des vecteurs dans la base cartésienne $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$

- Force : $\vec{F} = F\overrightarrow{e_x}$
- <u>Moment par rapport à O :</u>

  Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = l\cos\left(\theta_0\right)\overrightarrow{e_x} + l\sin\left(\theta_0\right)\overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} l\cos\left(\theta_0\right) \\ l\sin\left(\theta_0\right) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -Fl\sin\left(\theta_0\right) \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right) = -Fl\sin\left(\theta_0\right)\overrightarrow{e_z}}$$

- <u>Moment par rapport à C :</u>

  Vecteur position :

$$\overrightarrow{CM} = l\cos\left(\theta_0 + \pi\right)\overrightarrow{e_x} + l\cos\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_y} = -l\cos\left(\theta_0\right)\overrightarrow{e_x} - l\sin\left(\theta_0\right)\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_C}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} -l\cos\left(\theta_0\right) \\ -l\sin\left(\theta_0\right) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Fl\sin\left(\theta_0\right) \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_C}\left(\vec{F}\right) = Fl\sin\left(\theta_0\right)\overrightarrow{e_z}}$$

➢ Moment par rapport à D :
Vecteur position :

$$\overrightarrow{DM} = l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\overrightarrow{e_x} + l\cos(\pi-\theta_0)\overrightarrow{e_y} = l\sin(\theta_0)\overrightarrow{e_x} - l\cos(\theta_0)\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_D}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} l\sin(\theta_0) \\ -l\cos(\theta_0) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Fl\cos(\theta_0) \end{vmatrix} \quad \text{soit } \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_D}\left(\overrightarrow{F}\right) = Fl\cos(\theta_0)\overrightarrow{e_z}}$$

2. Moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) :

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{e_z} = -Fl\sin(\theta_0) = -7{,}1.10^2 \text{ N.m}}$$

➢ Moment scalaire par rapport à l'axe (Cz) :

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Cz)}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_C}\left(\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{e_z} = Fl\sin(\theta_0) = 7{,}1.10^2 \text{ N.m}}$$

➢ Moment scalaire par rapport à l'axe (Dz) :

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Dz)}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_D}\left(\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{e_z} = Fl\cos(\theta_0) = 7{,}1.10^2 \text{ N.m}}$$

3. Moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) :
Bras de levier : $OA = l\sin(\theta_0)$ d'où $\left|\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F}\right)\right| = OA\cdot F = Fl\sin(\theta_0)$

La force fait tourner M dans le sens indirect autour de (Oz) donc $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F}\right) < 0$

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F}\right) = -Fl\sin(\theta_0)}$$

➢ Moment scalaire par rapport à l'axe (Cz) :
Bras de levier : $CH = l\sin(\theta_0)$ d'où $\left|\mathcal{M}_{(Cz)}\left(\overrightarrow{F}\right)\right| = CH\cdot F = Fl\sin(\theta_0)$

La force fait tourner M dans le sens direct autour de (Cz) donc $\mathcal{M}_{(Cz)}\left(\overrightarrow{F}\right) > 0$

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Cz)}\left(\overrightarrow{F}\right) = Fl\sin(\theta_0)}$$

➢ Moment scalaire par rapport à l'axe (Dz) :
Bras de levier : $DA = l\cos(\theta_0)$ d'où $\left|\mathcal{M}_{(Dz)}\left(\overrightarrow{F}\right)\right| = AD\cdot F = Fl\cos(\theta_0)$

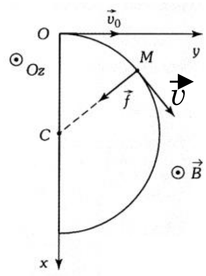
La force fait tourner M dans le sens direct autour de (Cz) donc $\mathcal{M}_{(Dz)}\left(\overrightarrow{F}\right) > 0$

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Dz)}\left(\overrightarrow{F}\right) = Fl\cos(\theta_0)}$$

Exercice 3. Serrage d'un écrou

1. $F = 175$ N

*Exercice 4. Particule dans un champ magnétique

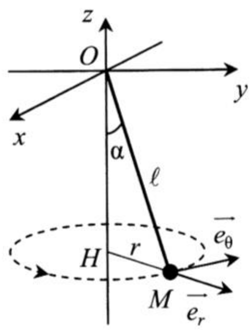


1. Le mouvement est plan si $\overrightarrow{v_0}$ est <u>perpendiculaire</u> à $\vec{B}$: la trajectoire est circulaire de centre C, tel que :
   - $\overrightarrow{OC}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v_0}$ et à $\vec{B}$;
   - Sens de $\overrightarrow{OC}$ donné par le sens de $q\overrightarrow{v_0} \wedge \vec{B}$ (on choisit $q > 0$)
   - Rayon $\boxed{R = OC = \dfrac{mv_0}{qB}}$
2. Le centre C du cercle est un choix judicieux.
   Moment cinétique : $\boxed{\overrightarrow{L_C}(M) = \overrightarrow{CM} \wedge m\vec{v} = -mRv\overrightarrow{u_z}}$
3. Comme le mouvement est <u>uniforme</u> à la vitesse v_0, $\boxed{\overrightarrow{L_C}(M) = -mRv_0\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cste}}$
4. La seule force s'appliquant sur M est la <u>force magnétique</u> :
   $\overrightarrow{f_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qv_0B\dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$. Le moment de cette force est : $\overrightarrow{\mathcal{M}_C}\left(\overrightarrow{f_m}\right) = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{f_m} = \vec{0}$.

   D'autre part, $\overrightarrow{L_C}(M) = \overrightarrow{cste} \Leftrightarrow \dfrac{d\overrightarrow{L_C}(M)}{dt} = \vec{0}$.

   On a bien : $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{L_C}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_C}\left(\overrightarrow{f_m}\right) = \vec{0}}$: la loi du moment cinétique est vérifiée.

*Exercice 5. Le pendule du professeur Tournesol



1. La trajectoire circulaire est centrée sur l'axe vertical (Oz).
   Coordonnées cylindriques : $r = l\sin(\alpha)$ et $z = -l\cos(\alpha)$
2. <u>Système</u> : Bille assimilée à un point M de masse m
   <u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen, base cylindrique $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$

   <u>Forces</u> : Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{e_z}$

   Tension du fil (inconnue) : $\vec{T}$

   <u>Théorème du moment cinétique</u>
   - Pour appliquer le Th M.C., on choisit l'origine O, qui est un point <u>fixe</u>, et par lequel passe $\vec{T}$
   - Moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

     Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = l\sin(\alpha)\overrightarrow{e_r} - l\cos(\alpha)\overrightarrow{e_z}$

     Vecteur vitesse : $\vec{v} = l\sin(\alpha)\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

     Moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}(M) = \left(l\sin(\alpha)\overrightarrow{e_r} - l\cos(\alpha)\overrightarrow{e_z}\right) \wedge ml\sin(\alpha)\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M) = ml^2\dot{\theta}\sin(\alpha)\left(\sin(\alpha)\overrightarrow{e_z} + \cos(\alpha)\overrightarrow{e_r}\right)}$$

- Moment du poids : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}=\left(l\sin(\alpha)\overrightarrow{e_r}-l\cos(\alpha)\overrightarrow{e_z}\right)\wedge\left(-mg\overrightarrow{e_z}\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right)=mgl\sin(\alpha)\overrightarrow{e_\theta}}$$

- Moment de la tension du fil : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{T}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}=\vec{0}}$

- Th MC : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt}=\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right)+\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{T}\right)$

  $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt}=ml^2\ddot{\theta}\sin(\alpha)\left(\sin(\alpha)\overrightarrow{e_z}+\cos(\alpha)\overrightarrow{e_r}\right)+ml^2\dot{\theta}^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\overrightarrow{e_\theta}$

  Projection du Th MC sur $\overrightarrow{e_r}$: $ml^2\ddot{\theta}\sin(\alpha)\cos(\alpha)=0 \quad (1)$

  Projection du Th MC sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $ml^2\dot{\theta}^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=mgl\sin(\alpha) \quad (2)$

  Projection du Th MC sur $\overrightarrow{e_z}$: $ml^2\ddot{\theta}\sin^2(\alpha)=0 \quad (3)$

Les relations (1) et (3) conduisent à $\ddot{\theta}=0\Leftrightarrow\dot{\theta}=cste\Leftrightarrow v=l\sin(\alpha)\dot{\theta}=cste=v_0$: le mouvement est donc <u>uniforme</u>. La relation (2) donne : $\dot{\theta}=\sqrt{\dfrac{g}{l\cos(\alpha)}}$ soit

$v_0=l\sin(\alpha)\dot{\theta}=l\sin(\alpha)\sqrt{\dfrac{g}{l\cos(\alpha)}}$ et $\boxed{\overrightarrow{v_0}=\sin(\alpha)\sqrt{\dfrac{lg}{\cos(\alpha)}}\overrightarrow{e_\theta}}$

3. Période du mouvement circulaire : $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos(\alpha)}{g}}}$

   Si $\alpha<<1$, $\cos(\alpha)\simeq1$ et $\boxed{T\simeq2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

Exercice 6. Particule sur un cerceau immobile

1. $\ddot{\theta}+2\xi\omega_0\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$ avec $\xi=\dfrac{\alpha}{2m}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ et $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

2. $R_C=\dfrac{4m^2g}{\alpha^2}$ $\theta(t)=\theta_0\left(1+\omega_0t\right)e^{-\omega_0t}$ avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{R_C}}=\dfrac{\alpha}{2m}$ 3. $\vec{v}(t)=-R_c\theta_0\omega_0^2te^{-\omega_0t}\overrightarrow{u_\theta}$