Programme de colle, semaine 5

Applications + début des fonctions usuelles :

- Nous avons étudié les injections et les surjections. Définitions, méthodes de démonstrations et propriétés sur les compositions de fonctions.
- Nous avons continué le chapitre sur les applications en étudiant les fonctions bijectives et les fonctions inversibles et montré que l'on avait équivalence entre les deux. Nous avons alors montré que si f était inversible, sa réciproque est unique, et que $(f^{-1})^{-1} = f$ ainsi que le calcul de la réciproque de $g \circ f$ (si g et f sont bijectives). Nous avons enfin vu comment rechercher la réciproque d'une fonction (étude de l'équation $f(x) = y$) et défini ce qu'était une involution.
- Nous avons terminé le chapitre par le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons montré qu'une fonction strictement monotone était injective. Nous avons vu comment obtenir le graphe de f^{-1} à partir de celui de f et enfin nous avons énoncé (et admis) les théorèmes donnant la continuité/dérivabilité de f^{-1} en fonction de la continuité/dérivabilité de f (f^{-1} non dérivable aux images des points où la dérivée de f s'annule).
- Nous avons ensuite commencé les fonctions usuelles en définissant les fonctions trigonométriques réciproques (arcsin, arccos, arctan). Domaine de définition, domaine de dérivabilité, calcul de la dérivée et graphe.
- Nous avons ensuite défini le logarithme comme l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 (nous avons admis que toute fonction continue sur un intervalle admettait une primitive). Nous avons alors démontré/admis ses propriétés.
- Nous avons ensuite défini sa réciproque (exp) et démontré ses propriétés. Ceci nous a permis ensuite de définir sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons tracé leurs graphes et vérifié leurs propriétés.
- Nous avons ensuite démontré les croissances comparées. Nous avons terminé le chapitre par l'étude des fonctions hyperboliques.

Compétences :

- Bien définir les variables à utiliser avant de les manipuler (par exemple pour montrer la surjectivité, commencer par fixer y dans l'ensemble d'arrivée de la fonction ou pour l'injectivité, commencer par fixer x_1 et x_2 dans l'ensemble de départ de la fonction tels que $f(x_1) = f(x_2)$).
- Savoir poser les différentes méthodes de démonstration pour montrer l'injectivité d'une fonction (directe, par la contraposée).
- Savoir étudier la surjectivité d'une fonction (en résolvant $f(x) = y$ avec y dans l'ensemble d'arrivée d'inconnue x à trouver dans l'ensemble de départ ou en montrant que cette équation n'a pas de solution).
- Étudier la bijectivité d'une fonction à l'aide de l'équation $f(x) = y$ et déterminer l'inverse de f en résolvant cette équation.
- Étudier l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (à l'aide du théorème de la bijection continue).
- Simplifier des expressions du genre $\arcsin(\sin(x))$ en « ramenant » x dans le bon ensemble (idem avec arccos et arctan).
- Montrer qu'une fonction est bijective de I (un intervalle de $\mathbb{R}$) dans J à l'aide du théorème de la bijection continue.
- Réaliser une étude de fonction (domaine de définition, de dérivabilité, tableau de variations, graphe).

Remarques sur le programme :

Nous n'avons pas traité les ensembles, ni les images directes et réciproques. Nous n'avons traité que peu d'exercices sur les fonctions usuelles. Les logarithmes et exponentielles en base a sont hors programme ainsi que les réciproques des fonctions hyperboliques.

Questions de cours :

1. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective et que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective et que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Citer le théorème de la bijection continue, expliquer (pas de preuve) comment on obtient le graphe de f^{-1} à partir de celui de f en précisant que dans le cas où f est dérivable en a tel que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ (formule pour la dérivée de la réciproque). Montrer ensuite à l'aide du théorème de la bijection continue que ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et en déduire qu'il existe une unique solution à l'équation $\ln(x) = 1$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. *(une au choix du colleur)* Donner la définition de arcsin, arccos, arctan, faire le graphe, justifier leur domaine de dérivabilité et détailler le calcul de la dérivée (on remontrera rapidement le cas échéant le calcul $\cos(\arcsin(x))$ ou de $\sin(\arccos(x))$).
5. Montrer que $\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
6. Donner la définition de x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, citer les propriétés des fonctions puissances ($x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$) et citer les croissances comparées.
7. *(une au choix du colleur)* Étudier une des fonctions ch, sh, th (définition, dérivée, limites en $\pm\infty$, graphe).
8. *(quatre au choix du colleur)* Sans démonstration, donner les propriétés (domaine de définition, parité/imparité éventuelle, périodicité éventuelle, domaine de dérivabilité, dérivée, limites éventuelles) et tracer les graphes de $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arccos(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 6 : 16.1) et 20.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne !) :

- 1er du groupe : TD5 : 6.
- 2ieme du groupe : TD6 : 12.
- 3ieme du groupe : TD6 : 16.3)

Prochain programme : fonctions usuelles (en entier) et début de l'intégration.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 6 :

- On rappelle que si $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, alors $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.
- Pour la première question, démontrer que si f est injective, alors h est injective (en revenant la définition et en supposant que $h(x_1) = h(x_2)$.
- Pour la première question, le sens direct est faux. Pour un contre exemple, il faut trouver deux fonctions non injectives f et g (donc telles que connaitre $f(x)$ ou $g(x)$ tout seul ne permet pas de retrouver x) mais telles que si vous connaissez en même temps la valeur de $f(x)$ et de $g(x)$, alors vous pouvez retrouver la valeur de x.
- On pourra en particulier prendre $f(x) = x^2$ et voir ce qu'il manque comme information pour obtenir h injective.
- Pour la surjectivité, on commencera par montrer que si h est surjective, alors f et g le sont. On reviendra à la définition : on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on essaye de construire $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ par exemple en utilisant la fonction h.
- La réciproque est fausse. Prendre des fonctions f et g surjectives simples (on rappelle que $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points du plan avec une abscisse et une ordonnée quelconque).

Exo 12 :

- Pour montrer la première égalité, on peut soit appliquer la fonction tangente et simplifier (ce qui marche mais est un peu compliqué car après il faut réappliquer arctangente et justifier la simplification), soit tout passer du même côté et faire une étude de fonctions. On trouve normalement une dérivée nulle et il suffit d'évaluer en une valeur simple (ou d'étudier les limites).
- Pour S_n, on reconnaitra une somme télescopique.
- La limite s'obtient avec les valeurs/limites usuelles de arctan

Exo 16.3) :

- Transformer l'égalité en utilisant $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
- Transformer l'égalité en $x^y = y^x \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ avec f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ « simple ».
- Faire l'étude de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer son graphe.
- Vérifier que f est strictement monotone/injective sur deux intervalles différents. Il suffit ensuite d'étudier les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ pour voir s'ils existent des solutions avec $x \neq y$.