22. Séries, méthodologie

I. Généralités

I.1. Définitions

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général u_n. C'est la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ où S_n est la somme partielle de rang n. On a donc :

$$\sum u_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Définition. Soit $\sum u_n$ une série. On dit que $\sum u_n$ est convergente si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sinon, on dit que $\sum u_n$ est divergente.

Définition. Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, on note :

- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. C'est la somme de la série.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n de la série.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n + R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

I.2. Structure de l'ensemble des séries

Proposition. L'ensemble des séries est stable par somme et multiplication par un scalaire (réel ou complexe). L'ensemble des séries convergentes est également stable par somme et multiplication par un scalaire.

I.3. Lien suites/séries

Théorème. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{\text{m}}$ Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$, la première chose que l'on regarde est donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Si cette limite n'est pas 0, la série est grossièrement divergente. Si la limite est nulle, on ne peut rien dire sur la nature de la série.

Exercice d'application 1. Déterminer dans chacun des cas suivantes si on peut dire quelque chose sur la nature de $\sum u_n$.

1) $\sum (-1)^n$.

2) $\sum \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

(m) Cette proposition permet de toujours ramener l'étude de la convergence d'une suite à l'étude de la convergence d'une série télescopique (et réciproquement).

Exercice d'application 2. Montrer que $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge vers $+\infty$ en faisant apparaitre une somme télescopique.

I.4. séries géométriques

Théorème. Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors $\sum a^n$ converge $\Leftrightarrow |a| < 1$.

Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.

(m) Les séries géométriques sont avec les séries télescopiques les rares séries où l'on peut déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ en cas de convergence. Quand on demande de calculer explicitement la valeur $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, c'est que la série peut très certainement se mettre sous la forme d'une série télescopique ou géométrique.

Exercice d'application 3. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme en cas de convergence.

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{3^{2n}}$.

2) $\sum_{n\geq 0} 2^n e^{in}$.

3) $\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{3^k}\right)$.

II. Séries à termes positifs

II.1. Encadrements

Théorème. Soit $\sum u_n$ une **série à termes positifs**. Alors :

- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

Remarque : Les résultats sont les mêmes pour les séries à termes positifs et pour les suites croissantes. Ceci se retrouve en utilisant le résultat du I.3 (lien suites/séries).

Proposition. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux **séries à termes positifs**. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$, alors :

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice d'application 4. Montrer que les séries $\sum \frac{|\cos(n)|}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{n^n}$ sont convergentes.

II.2. Domination/équivalents

Proposition. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux **séries à termes positifs**. Alors :

- si $u_n = O(v_n)$ et que $\sum v_n$ concerge, alors $\sum u_n$ converge.
- si $u_n = o(v_n)$ et que $\sum v_n$ concerge, alors $\sum u_n$ converge.

Théorème. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux **séries à termes positifs** telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum v_n \text{ converge.}$$

Autrement dit, si les termes généraux de deux séries à termes positifs sont équivalents, alors les séries sont de même nature.

(m) C'est un des théorèmes les plus importants du chapitre. Pour étudier la nature d'une série à termes positifs, on calcule donc un équivalent du terme général de cette série et on compare alors aux séries de référence. On se rappellera également que si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe à partir d'un certain rang. Ainsi, calculer l'équivalent permet la plupart du temps de justifier facilement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

Exercice d'application 5. Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) $\sum \ln^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3) $\displaystyle\sum\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$.

III. Étude générale

III.1. Séries à terme général complexe

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent.}$$

On a alors en cas de convergence $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n)+i\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n)$.

Exercice d'application 6. En passant par les complexes, montrer que $\displaystyle\sum\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{2^n}$ converge et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)}{2^k}$.

III.2. Séries absolument convergentes

Définition. Soit $\sum u_n$ une série. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors $\sum u_n$ converge.

Exercice d'application 7. Montrer que la série $\displaystyle\sum\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{2^n}$ converge en montrant qu'elle est absolument convergente.

III.3. Séries semi-convergentes

Définition. Soit $\sum u_n$ une série. On dit qu'elle semi-convergente si $\sum u_n$ converge et que $\sum |u_n|$ diverge.

Théorème. Des séries alternées. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Alors, $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. Si on note de plus $\displaystyle R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, alors R_n est du signe de son premier terme (donc du signe de $(-1)^{n+1}$) et on a $|R_n|\leq u_{n+1}$.

Exercice d'application 8. Montrer que $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente et que $\displaystyle 0\leq\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(k)}\leq\frac{1}{\ln(2)}$.

III.4. Bilan

(m) Quand on veut étudier la nature de $\sum u_n$:

1. On commence par vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si ce n'est pas le cas, la série diverge (grossièrement).
2. On étudie ensuite $\sum |u_n|$ pour se ramener à l'étude d'une SATP. On peut alors chercher un équivalent (ou une majoration/minoration) de $|u_n|$ et comparer aux SATPs de référence. Si on trouve que $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Sinon, on ne peut rien dire.
3. On peut essayer d'utiliser le théorème des séries alternées si on a l'impression qu'on peut mettre u_n sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante qui tend vers 0.
4. Si rien ne marche, on peut effectuer un développement asymptotique de u_n ($u_n = v_n + \ldots + w_n + o(w_n)$) jusqu'à un terme absolument convergent ou de signe constant et se ramener à une somme de séries convergentes ou à une somme de séries convergentes et d'une divergente pour obtenir la nature de $\sum u_n$.

IV. Comparaion série/intégrale

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante. Alors :

$$f(n) + \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

(m) Ce dernier résultat n'est pas à connaitre par coeur mais la méthode pour l'obtenir est à bien comprendre car on la réutilise à chaque fois quand on a besoin de faire une comparaison série/intégrale. Il faut faire un dessin rapide pour retrouver l'encadrement $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$ et sommer cet encadrement de 0 à $n-1$ pour obtenir l'encadrement sur $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$. Cet encadrement permet à la fois d'étudier la convergence de la série ainsi que d'en déterminer un équivalent dans le cas où la série est divergente ou de déterminer un équivalent du reste dans le cas où la série est convergente.

Exercice d'application 9.

1) Déterminer un encadrement à l'aide d'une comparaison série/intégrale de $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ dans le cas où f est croissante et continue sur $[1, +\infty[$.

2) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$.

Théorème. Critère de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

V. Formules de Taylor

V.1. Taylor reste intégral

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}dt.$$

(m) Pour se souvenir de cette formule, on apprend par coeur le terme formant la somme (c'est le même que pour toutes les formules de Taylor) et pour le reste intégral, on se souvient que cette formule est démontrée par intégration par parties, ce qui explique la dérivée $n+1$-ième sur f. Pour $n = 0$, on retrouve $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

V.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. Alors, si on note $||f^{(n+1)}||_{\infty,[a,b]} = \max\limits_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$) :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{||f^{(n+1)}||_{\infty,[a,b]} \times |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(m) Cette inégalité découle directement de l'inégalité de Taylor reste intégral (les hypothèses sont d'ailleurs les mêmes). Elle est utile pour écrire les fonctions usuelles sous la forme d'une somme infinie.

Exercice d'application 10.

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ \ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

2) En déduire que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

V.3. Formule de Taylor-Young

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a dans l'intérieur de I. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On a $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini (la suite extraite des termes pairs tend vers 1, celle des termes impaires tend vers -1 donc il n'y a pas de limite en $+\infty$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n$ est divergente.

2) On a $\lim_{n\to+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ par composition de limites donc on ne peut rien conclure pour le moment. *Avec les méthodes du II.2 (calcul d'équivalent), vous pouvez montrer que cette série converge).*

3) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées donc on ne peut rien conclure pour le moment. *Avec les méthodes du IV (comparaison série/intégrale), vous pouvez montrer que la série diverge (on a* $\int^x \frac{\ln(t)}{t}dt = \ln(|\ln(x)|)$*).*

Exercice d'application 2. On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ a la même nature que $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on en déduit que la série est divergente (vers $+\infty$).

Exercice d'application 3.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{4^n}{3^{2n}} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, la série proposée est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{3^{2k}} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

2) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $2^n e^{in} = (2e^i)^n$. Puisque $|2e^i| = 2 \geq 1$, on en déduit que la série proposée est divergente.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'après le binome de Newton, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{3^k} = \left(1-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on en déduit que la série proposée est convergente. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2.$$

Attention à bien faire attention dans le calcul d'une somme géométrique à la valeur du premier indice ! La formule du cours n'est valable que si la somme commence à 0...

Exercice d'application 4.

1) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|\cos(n)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, on en déduit par comparaison de **séries à termes positifs**, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\cos(n)|}{2^n}$ est convergente.

2) Pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$. De la même manière que ci-dessus, on en déduit par comparaison de

séries à termes positifs que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^n}$ converge (et donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^n}$ converge aussi car la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes).

Exercice d'application 5.

1) On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ d'où par puissances d'équivalents :

$$\sin^3\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs (on a bien $\frac{1}{n^3} > 0$ donc le terme général précédent est également positif à partir d'un certain rang), et par comparaison avec une série de Riemann convergente (puisque $3 > 1$), on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

2) On a $\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où $\ln^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs (on a bien $\frac{1}{n} > 0$ donc le terme général précédent est également positif à partir d'un certain rang), et par comparaison avec une série de Riemann divergente, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

3) On effectue un DL à l'ordre 2 pour obtenir l'équivalent. On a :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{1-\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Ceci entraine que $\left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$ est de signe négatif à partir d'un certain rang. Elle est donc de signe constant à partir d'un certain rang et on peut utiliser le critère de comparaison des séries à termes négatifs. Puisque $2 > 1$, par comparaison avec une série de Riemann convergente, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$ est convergente.

Exercice d'application 6. On a $\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{2^n} = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi n}{6}}}{2^n}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{2}\right)^n\right)$. Or, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{2}\right)^n$ est convergente car son terme général est de module $\frac{1}{2} < 1$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{e^{i\pi/6}}{2}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right)}.$$

On multiplie met alors ce nombre sous forme algébrique en multipliant le dénominateur par la quantité conjuguée. On trouve alors :

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{3}+14}{13} + i\frac{2\sqrt{3}+5}{13}.$$

On en déduit, puisque la série étudiée est la partie imaginaire de la série géométrique convergente étudiée ci-dessus, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{2^n}$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)}{2^k} = \frac{2\sqrt{3}+5}{13}.$$

Exercice d'application 7. Notons $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{2^n}$. On a alors $|u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$ car le sinus est majoré par 1. Par comparaison de séries à termes positifs, on a donc $\sum |u_n|$ qui converge (car la série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ converge par critère des séries géométriques). La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente et donc convergente.

Exercice d'application 8. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est dérivable sur $[2, +\infty[$ et $\forall x \geq 2$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x\ln^2(x)} < 0$. f est donc décroissante sur $[2, +\infty[$, ce qui entraine que la suite $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante. Cette suite tend clairement vers 0. Par théorème des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge.

On a alors $\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\ln(k)}$ du signe de son premier terme (donc positif) et majorée en valeur absolue par son premier terme d'où :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)} \leq \frac{1}{\ln(2)}.$$

Exercice d'application 9.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est croissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1).$$

En sommant l'inégalité de gauche de 1 à $n-1$, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(t)dt$, soit $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(t)dt$. En sommant l'inégalité de droite et avec un changement d'indice de 1 à $n-1$, on obtient $\int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$, soit $f(1) + \int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$. On a donc l'encadrement suivant :

$$f(1) + \int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(t)dt.$$

2) La fonction ln est croissante sur $[1, +\infty[$ et continue. On en déduit que :

$$\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(t)dt.$$

Par intégration par parties, on trouve que $\int_1^n \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1$. On a donc :

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

En divisant par $n\ln(n) > 0$ pour $n \geq 2$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = 1,$$

ce qui entraine que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \sim_{+\infty} n\ln(n)$.

Exercice d'application 10.

1) Remarquons déjà que ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on a le droit de dériver à n'importe quel ordre. La propriété est vraie au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie au rang n. On a alors pour $x > 0$:

$$\ln^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \times (-n)}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est vraie à tout rang.

2) On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[1,2]$. On a alors $\ln^{(0)}(1) = 0$ et pour $k \geq 1$, $\ln^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. De plus, $|\ln^{(n+1)}|$ est majorée par $n!$ sur $[1,2]$ (puisque $\dfrac{1}{x^n} \leq 1$). On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Ceci entraine que $-\dfrac{1}{n} \leq \ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \leq \frac{1}{n}$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2),$$

soit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Si on voulait montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$*, on aurait pu utiliser le théorème des séries alternées mais ce théorème ne donnera jamais la valeur de la limite (il donnera un encadrement mais jamais la valeur exacte).*