

TD - Logique du premier ordre

Exercice 1.

On donne la formule logique du premier ordre suivante :

$$\forall x. \forall y. \exists z. (\neg(x < a^2) \vee ((x + 2 < z) \wedge (z < y)))$$

1. Identifier les ensembles \mathcal{X} , \mathcal{S}_f , \mathcal{S}_p , les variables libres, les variables liées, leurs portées, les formules atomiques, les termes.
2. Dessiner son arbre syntaxique

Exercice 2.

Traduire en formules logiques du premier ordre les phrases suivantes, en introduisant tous les prédicats nécessaires.

1. Dans une école, il existe des ordinateurs non connectés au réseau local
2. Dans toutes les écoles, tous les ordinateurs sont connectés à un réseau local
3. Dans chaque école, au moins un ordinateur est connecté à la fois à un réseau local et au réseau Internet.

Exercice 3.

On considère l'algorithme (quadratique!) suivant de recherche d'un doublon dans un tableau t :

```
bool duplicate(int *t, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        for (int j = i+1; j < n; j++)
        {
            if (t[i] == t[j])
                return true;
        }
    }
    return false;
}
```

1. Voici 4 formules de la logique du premier ordre concernant un tableau t de taille n :

a.

$$\forall i. (i \in [0, n[\rightarrow (\forall j. (j \in [0, n[\rightarrow (i \neq j \rightarrow t[i] = t[j])))))$$

b.

$$\forall i. (i \in [0, n[\rightarrow (\exists j. (j \in [0, n[\wedge (i \neq j \wedge t[i] = t[j])))))$$

c.

$$\exists i. (i \in [0, n[\wedge (\forall j. (j \in [0, n[\rightarrow (i \neq j \rightarrow t[i] = t[j])))))$$

d.

$$\exists i. (i \in [0, n[\wedge (\exists j. (j \in [0, n[\wedge (i \neq j \wedge t[i] = t[j])))))$$

Traduire chaque formule en français.

2. Quelle formule exprime le plus fidèlement la présence d'un doublon dans le tableau ?
3. Écrire deux invariants de boucle, un pour la boucle interne et un pour la boucle externe du code fourni, sous la forme de deux formules de la logique propositionnelle.