8. Équations différentielles linéaires, corrigé

Exercice 1.

1) L'équation homogène est $y' + 2y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-2x}$. Pour une solution particulière, on a la cherche sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ car le second membre est une fonction polynômiale de degré 2. Après résolution, on trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{3}{2}$. On en déduit donc que :

$$\mathcal{S}_1 = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2) On trouve $\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto \lambda e^x + \frac{1}{2}(-\cos(x) + \sin(x)), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3) L'équation homogène est $y' + y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et après résolution, on trouve $a = -\frac{2}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$. On a donc

$$\mathcal{S}_3 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \frac{1}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x)), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4) On trouve $\mathcal{S}_4 = \{x \mapsto \lambda e^{x^2/2} - x^2 - 2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5) L'équation homogène est $y' + \sin(x)y = 0$ et $\int^x \sin(t)dt = -\cos(x)$ donc les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{\cos(x)}$. Pour une solution particulière, on effectue la méthode de la variation de la constante. On cherche donc $y_p(x) = \lambda(x)e^{\cos(x)}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}$. En injectant dans l'équation, on trouve (les termes en λ se simplifient) pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda'(x)e^{\cos(x)} = \sin(2x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = 2\sin(x)\cos(x)e^{-\cos(x)}.$$

On a donc $\lambda(x) = \int^x 22\cos(t)e^{\cos(t)}\sin(t)dt$ à calculer. On pose le changement de variable $u = \cos(t)$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $du = -\sin(t)dt$. On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= 2\int^x ue^{-u}(-du) \\ &= -2\int^{\cos(x)} ue^{-u}du. \end{aligned}$$

On intègre avec une IPP en posant $f(u) = u$ (donc $f'(u) = 1$ et $g'(u) = e^{-u}$ (donc $g(u) = -e^{-u}$). Les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui entraine :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= -2\left[-ue^{-u}\right]^{\cos(x)} - 2\int^{\cos(x)} e^{-u}du \\ &= 2\cos(x)e^{-\cos(x)} + 2e^{-\cos(x)}. \end{aligned}$$

On a donc $y_p(x) = \lambda(x)e^{\cos(x)} = 2\cos(x) + 2$. On en déduit que :

$$\mathcal{S}_5 = \{x \mapsto \lambda e^{\cos(x)} + 2\cos(x) + 2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

6) Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-x}$. Pour une solution particulière, on effectue la méthode de la variation de la constante en cherchant $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}$. On obtient donc en injectant dans l'équation (les termes en λ se simplifient) pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

On a donc $\lambda(x) = \displaystyle\int^x \frac{e^t}{1+e^t}dt = \ln(|1+e^x|) = \ln(1+e^x)$ (on a une forme en $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$). On en déduit donc que $y_p(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$, ce qui entraine que :

$$\mathcal{S}_6 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

7) L'équation est homogène donc une solution particulière est $y_p(x) = 0$. Cette équation est équivalente à $y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$ car pour $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$. On a alors $\displaystyle\int^x \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln(\sqrt{1+t^2})$. On a donc :

$$\mathcal{S}_7 = \{x \mapsto \lambda e^{-(-\ln(\sqrt{x^2+1}))}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda\sqrt{x^2+1}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

8) Tout est bien continu sur l'intervalle proposé. L'équation homogène est $y' + \tan(x)y = 0$. Or, on a $\displaystyle\int^x \tan(t)dt = \int^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = [-\ln(|\cos(t)|]^x = -\ln(\cos(x))$ car on est sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on avait une forme en $\dfrac{u'}{u}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x)} = \lambda\cos(x),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour une solution particulière, on effectue la méthode de la variation de la constante et on la cherche $y_p(x) = \lambda(x)\cos(x)$ avec λ dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En injectant dans l'équation, on a donc que pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\lambda'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

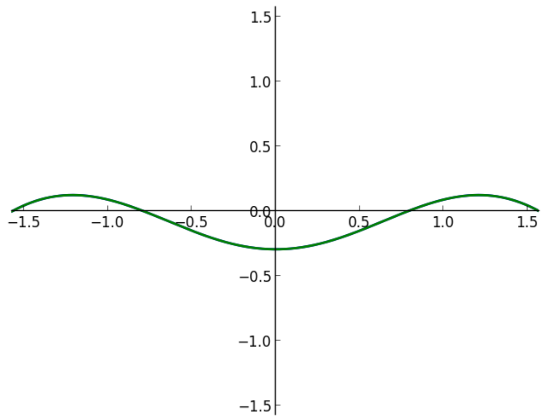
Puisque $\displaystyle\int^x \frac{1}{\cos^2(t)}dt = \tan(x)$, on en déduit que $y_p(x) = \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$. Finalement, on a :

$\mathcal{S}_8 = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \sin(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2. Pour chacune des équations différentielles suivantes, écrire la solution qui passe par le point M et tracer sommairement le graphe de la fonction :

1) On trouve $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. On veut $y(0) = 1$ donc on a $\lambda = 1$.

2) On trouve $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda\cos(x) - \cos^2(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Avec la condition initiale, on trouve donc $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit le graphe :



Exercice 3. On résout sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{x\ln(x)-x} + x^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5.

1) $y_1 : x \mapsto \dfrac{1}{81}(9x^2 - 7\cos(3x) + 7)$.

2) $y_2 : x \mapsto \dfrac{4}{15}e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{4e^x}{3} - \dfrac{3e^{2x}}{5}$.

3) $y_3 : x \mapsto \dfrac{1}{4}e^x(\pi - 2x)\cos(x)$.

Exercice 6. On raisonne par analyse/synthèse. Si f est solution, alors on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^1 f(t)dt - f(x)$.

Ceci entraine que f' est dérivable (somme d'une constante et d'une fonction dérivable) donc f est deux fois dérivable. On a donc pour $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = 0$. L'équation caractéristique associée à cette EDL d'ordre 2 est $X^2 + X = 0$. On en déduit qu'il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $f : x \mapsto \lambda + \mu e^{-x}$.

On procède maintenant à la synthèse. Si f est de la forme $f : x \mapsto \lambda + \mu e^{-x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors f est bien dérivable (somme de fonctions dérivables) et on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = \lambda$ et :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lambda - \mu(e^{-1} - 1).$$

On a donc f solution ssi $\mu = 0$. Les seules solutions de l'équation sont donc les fonctions constantes.

Exercice 7.

1) Par analyse/synthèse, supposons f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$. On a alors f' dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x) = -f(-(-x)) = -f(x)$. On en déduit que f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Ceci entraine après résolution qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

Réciproquement, supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $f(-x) = a\cos(x) - b\sin(x)$.

On a donc f solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ -a\sin(x) + b\cos(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$. En évaluant en $x = 0$, on obtient $a = b$. Réciproquement, si $a = b$, alors l'égalité précédente est vraie. On en déduit que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $f : x \mapsto a(\cos(x) + \sin(x))$ où $a \in \mathbb{R}$.

2) On procède par analyse/synthèse. Supposons f solution. On a alors f dérivable et f également deux fois dérivable car f' s'écrit comme une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a donc en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f(x).$$

Ceci entraine que f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = 0$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.

Il reste à faire la synthèse. Quelque soit les valeurs de λ et μ, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$$

et $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$. On a donc f solution si et seulement si $2\lambda\sin(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit doit si et seulement si $\lambda = 0$ (en évaluant en $x = \pi/2$ par exemple). On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mu\sin(x)$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right).$$

1) Remarquons que f' est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonction dédrivable et que pour $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{4x^2}f'\left(\frac{1}{4x}\right)$. Puisque $f'\left(\frac{1}{4x}\right) = f(x)$, on en déduit que :

$$\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{1}{4x^2}f(x).$$

En évaluant en $x = e^t > 0$, on a donc $f''(e^t) = -\frac{1}{4e^{2t}}f(e^t)$.

2) Posons $g : t \mapsto f(e^t)$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables comme composée de fonctions deux fois dérivables. On a pour $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = e^t f'(e^t)$, puis pour $t \in \mathbb{R}$, $g''(t) = e^{2t}f''(e^t) + e^t f'(e^t)$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) = -\frac{1}{4}f(e^t) + e^t f'(e^t) = -\frac{1}{4}g(t) + g'(t).$$

g est donc solution de l'EDL d'ordre 2 $y'' - y' + \frac{y}{4} = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{\frac{t}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (car on a $\frac{1}{2}$ racine double de l'équation caractéristique). Puisque l'on a $g(t) = f(e^t)$, on a donc pour $x > 0$, $g(\ln(x)) = f(x)$. On en déduit que :

$$\forall x > 0,\ f(x) = (\lambda\ln(x) + \mu)e^{\frac{\ln(x)}{2}} = (\lambda\ln(x) + \mu)\sqrt{x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3) Il reste à faire la synthèse et vérifier parmi ces fonctions lesquels sont solutions de l'équation de départ. Remarquons que toutes ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On réinjecte et on trouve que $f'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\mu}{2\sqrt{x}}$ et $f\left(\frac{1}{4x}\right) = -\frac{\lambda\ln(4)}{2\sqrt{x}} + \frac{\mu}{2\sqrt{x}} - \frac{\lambda\ln(x)}{2\sqrt{x}}$. En évaluant en $x = 1$, on trouve $\lambda = 0$. On ne trouve ensuite aucune condition sur μ.

L'ensemble des solutions est donc finalement l'ensemble des $f : x \mapsto \mu\sqrt{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$.

1) Soit y solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On pose $z : x \mapsto xy(x)$. On a alors z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$z'(x) = xy'(x) + y(x) \text{ et } z''(x) = xy''(x) + 2y'(x).$$

Puisque $(E) \Leftrightarrow xy'' + 2y' + 2(xy' + y) + xy = 0$, on en déduit que z est solution de l'équation différentielle :

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

2) L'équation caractéristique associée est $X^2 + 2X + 1 = 0$. On a -1 racine double, ce qui entraine qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x}$. On en déduit que :

$$\forall x \neq 0,\ y(x) = \left(\lambda + \frac{\mu}{x}\right) e^{-x}.$$

Il reste à déterminer des conditions sur λ et μ pour avoir y deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie l'équation initiale (phase de synthèse). Si $\mu \neq 0$, il est clair que y ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$ (car en 0^+ et en 0^-, elle tend vers $\pm\infty$). On en déduit que $\mu = 0$, ce qui entraine que pour $x \neq 0$, $y(x) = \lambda e^{-x}$. Pour avoir y continue, on doit avoir $y(0) = \lambda$. On obtient alors une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui est bien solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc $y : x \mapsto \lambda e^{-x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. On procède par analyse/synthèse en supposant y solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. On pose alors $z : x \mapsto y'(x) + y(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions deux fois dérivables (car y est deux fois dérivable). Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $z'(x) = y''(x) + y'(x)$. En réarrangeant l'équation vérifiée par y, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)(y''(x) + y'(x)) - e^x(y'(x) + y(x)) = 0.$$

On en déduit que z vérifie l'équation différentielle $(1+e^x)z' - e^x z = 0$, qui est équivalente à $z' - \dfrac{e^x}{1+e^x} z = 0$ car $x \mapsto 1 + e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut alors résoudre cette équation et on obtient qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = \lambda(1+e^x)$.

Ceci entraine que y vérifie l'équation différentielle $y' + y = \lambda(1+e^x)$, ce qui entraine qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \mu e^{-x} + \lambda\left(1 + \frac{e^x}{2}\right).$$

Il reste à présent à faire la synthèse et à trouver quelles conditions sur λ et μ pour que y soit solution de $(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$. En réinjectant, on ne trouve aucune condition et y est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \mu e^{-x} + \lambda\left(1 + \dfrac{e^x}{2}\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soient $a, b, \mu \in \mathbb{R}$. Discutons l'existence de solutions non nulles y de l'équation différentielle $y'' = \mu y$ vérifiant $y(a) = y(b) = 0$. On suppose bien sûr $a \neq b$, sinon on aura toujours une infinité de solutions. On remarque de plus que la fonction nulle est toujours solution.

Commençons par résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. On a 3 cas possibles, selon si $\mu < 0,\ \mu = 0$ ou $\mu > 0$.

- Si $\mu > 0$. Alors, on peut écrire $\mu = h^2$ avec $h \neq 0$. On est donc ramené à l'équation $y'' - h^2 y = 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont h et $-h$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_{\lambda,\gamma} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda e^{hx} + \gamma e^{-hx} \end{array}, (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  Supposons alors que $y_{\lambda,\gamma}(a) = y_{\lambda,\gamma}(b) = 0$. λ et γ vérifient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda e^{ha} + \gamma e^{-ha} = 0 \\ \lambda e^{hb} + \gamma e^{-hb} = 0 \end{array} \right.$$

  On a alors $\lambda e^{2ha} = \gamma$ et $\lambda e^{2hb} = \gamma$. On en déduit donc que $\lambda(e^{2ha} - e^{2hb}) = 0$. Or, l'exponentielle étant injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, si $e^{2hb} = e^{2ha}$, alors on a $2hb = 2ha$ ce qui impliquerait, puisque $h \neq 0$, que $a = b$: absurde !

  On en déduit que $\lambda = 0$, ce qui implique en revenant au système que $\gamma = 0$. On trouve donc une unique solution : la fonction nulle.

- Si $\mu = 0$. Alors, les solutions de (E) sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_{\lambda,\gamma} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x + \gamma \end{array}, (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  Si l'on impose à cette fonction de passer deux fois par 0, alors, on montre rapidement qu'il ne peut s'agir que de la fonction nulle (on a une équation de droite confondue avec l'axe (Ox).

- Supposons à présent que $\mu < 0$. On peut donc écrire $\mu = -\omega^2$ avec $\omega \in \mathbb{R}$. Les racines de l'équation caractéristique sont $i\omega$ et $-i\omega$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_{\lambda,\gamma} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda \cos(\omega x) + \gamma \sin(\omega x) \end{array}, (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  On va écrire l'ensemble des solutions un peu différemment, afin de simplifier l'exercice. On peut toujours écrire l'ensemble des solutions de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_{\lambda,\gamma} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & A \cos(\omega x - \varphi) \end{array}, (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cos(y) + \gamma \sin(y) & = & \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2} \left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \cos(y) + \dfrac{\gamma}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \sin(y) \right) \\ & = & A(\cos(\varphi)\cos(y) + \sin(\varphi)\sin(y)) \\ & = & A \cos(y - \varphi) \end{array}$$

  et l'on peut ainsi toujours passer d'une forme à l'autre en ajustant les valeurs de A et φ.

  Supposons que notre fonction n'est pas la fonction nulle, La condition nous impose alors que $\cos(\omega a - \varphi) = \cos(\omega b - \varphi) = 0$. Autrement dit, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega a - \varphi \equiv \dfrac{\pi}{2} \; [\pi] \\ \omega b - \varphi \equiv \dfrac{\pi}{2} \; [\pi] \end{array} \right.$$

  Une condition nécessaire pour que l'on ait une solution non nulle est donc que que $\omega a \equiv \omega b \; [\pi]$. Sans cette condition, on ne peut pas avoir de solutions autre que la fonction nulle à équation différentielle (car notre système impose cette relation).

  Réciproquement, si on a $\omega a \equiv \omega b \; [\pi]$, alors on a des valeurs de φ telles que $\omega a - \varphi \equiv \dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$ ($\varphi = \omega a + \dfrac{\pi}{2}$ par exemple). Une fois que l'on en a trouvé une, on trouve que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(\omega x - \varphi)$ sont solutions. On trouve donc une infinité de solutions à notre équation.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle $xy' - (1+x)y = -x^2$.

1) On commence par résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

- SGESSM. On étudie l'équation $y' - \left(\frac{1}{x}+1\right)y = 0$. On calcule alors une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x} - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} \int^x -\frac{1}{t} - 1dt &= -\ln(|x|) - x \\ &= -\ln(x) - x. \end{aligned}$$

  On peut enlever les valeurs absolues car on est sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit alors que les solutions de l'équation homogène (sur $\mathbb{R}_+^*$) sont de la forme :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{\ln(x)+x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

  En simplifiant , on obtient alors $y_\lambda : x \mapsto \lambda x e^x,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

- SPEASM. On remarque que $y_p : x \mapsto x$ est solution évidente. On en déduit que sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont de la forme :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda x e^x + x,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, on résout de la même manière et on trouve comme solutions :

$$y_\mu : x \mapsto \mu x e^x + x,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

2) **Analyse :** Soit y une solution de (E). On remarque que l'on doit avoir $y(0) = 0$ (en évaluant en 0 dans l'équation différentielle). On sait que sur $\mathbb{R}_-^*$, y est de la forme y_μ et sur $\mathbb{R}_+^*$, y est de la forme y_λ. Or, en regardant les limites de y_λ et y_μ en 0 sont égales à 0. On ne trouve donc pas de condition sur λ et μ.

On regarde à présent la limite des taux d'accroissements. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= \frac{\lambda x e^x + x - 0}{x} \\ &= \lambda e^x + 1. \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda + 1$. De même, on trouve que la limite en 0^- du taux d'accroissement vaut $\mu + 1$. Puisque l'on a y dérivable en 0, on doit avoir $\lambda = \mu$.

Synthèse : l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x e^x + x \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 13. Soit l'équation différentielle (E) : $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$.

1) On remarque que $y_p : x \mapsto x - 2$ est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) Étudions l'équation homogène associée $]-1, +\infty[$. On doit alors étudier l'équation : $y' + \frac{x}{x+1}y = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{t+1}dt &= \int (1 - \frac{1}{1+t})dt \\ &= x - \ln|x+1| \\ &= x - \ln(x+1) \text{ car } x > -1. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (EH) sur $]-1,+\infty[$ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_\lambda : &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda(1+x)e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

De même, sur $]-\infty,-1[$, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est de la forme (on fait rentrer le signe $-$ dans la constante) :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_\mu : &]-\infty,-1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mu(1+x)e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) Posons, pour λ et μ fixés dans $\mathbb{R}$ la fonction :

$$\begin{array}{lllll} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & y_\lambda(x) + y_p(x) & \text{si } x > -1 \\ & x & \mapsto & -3 & \text{si } x = -1 \\ & x & \mapsto & y_\mu(x) + y_p(x) & \text{si } x < -1 \end{array}$$

Il est clair que y est continue sur $\mathbb{R}$ (il suffit de considérer la limite en -1). On veut à présent trouver une condition sur λ et μ pour que y soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement dérivable pour tous les points différents de -1. Étudions la limite de son taux d'accroissement en -1. Pour $x > -1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{y(x) - y(-1)}{x-(-1)} &= \frac{y_\lambda(x)+3}{x+1} \\ &= \frac{\lambda(x+1)e^{-x} + x + 1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)(\lambda e^{-x}+1)}{(x+1)} \\ &= \lambda e^{-x} + 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} \frac{y(x)-y(-1)}{x+1} = \lambda e + 1.$

De même, on a $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^-} \frac{y(x)-y(-1)}{x+1} = \mu e + 1.$

Pour que y soit dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit donc que $\lambda = \mu$. L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_\lambda : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda(1+x)e^{-x} + x - 2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'unique solution vérifiant $y(1) = 1$ doit vérifier $\lambda = e$. Il s'agit donc de la fonction $y : x \mapsto (1+x)e^{-x+1} + x - 2$.

Exercice 14.

1) On trouve comme solution particulière sur $\mathbb{R}$ la fonction $y_p(x) = \dfrac{x^4}{2}$. On peut alors résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve comme solutions $y_\lambda : x \mapsto \lambda x^2 + \dfrac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $y_\mu : x \mapsto \mu x^2 + \dfrac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il reste à recoller les solutions. Les deux fonctions tendent vers 0 quand x tend vers 0 et on a $y(0) = 0$ si y est solution. La continuité ne nous donne donc aucune contrainte. On étudie alors les taux d'accroissements en 0 (les fonctions trouvées ci-dessus étant dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$). On trouve ainsi par exemple :

$$\frac{y_\lambda(x) - 0}{x - 0} \to_{x\to 0^+} 0.$$

On trouve la même limite pour le taux d'accroissement de y_μ. On ne trouve donc aucune contrainte. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $y : x \mapsto \begin{cases} y_\lambda(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ y_\mu(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) $y_p(x) = x$ est solution particulière sur $\mathbb{R}$. On peut alors résoudre l'équation différentielle sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Sur ces trois intervalles, on a $\displaystyle\int^x \frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)$. On trouve donc des solutions de la forme $y_i : x \mapsto \lambda_i\sqrt{|1-x^2|} + x$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (on va noter y_1 les solutions sur $]-\infty, -1[$, y_2 celles sur $]-1, 1[$ et y_3 celles sur $]1, +\infty[$.

Si y est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $y(-1) = -1$ et $y(1) = 1$ (en évaluant dans l'équation). Les fonctions considérées convergent vers la bonne limite quand x tend vers ± 1 et on a donc aucune contrainte uniquement en utilisant la continuité.

Pour la dérivabilité, on étudie les taux d'accroissements. Considérons par exemple y_1 en -1. On a pour $x < -1$:

$$\begin{aligned}
\frac{y_1(x) - y(-1)}{x - (-1)} &= \frac{\lambda_1\sqrt{|1-x^2|} - 1 + 1}{x+1} \\
&= \frac{\lambda_1\sqrt{x^2-1}}{x+1} \\
&= \frac{\lambda_1\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x+1} \\
&= \frac{\lambda_1\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que le taux d'accroissement à gauche tend vers $\pm\infty$ si $\lambda_1 \neq 0$. On doit donc avoir $\lambda_1 = 0$. On procède de même pour y_2 et y_3 en -1 et en 1 et on obtient là aussi $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

On en déduit que l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle est $y = x$.

3) L'équation est équivalente à $\sin(x)y' - \cos(x)y = 2x\sin^2(x)$. On résout sur chaque intervalle $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ et on obtient comme solutions les $y_k : \lambda_k \sin(x) + x^2\sin(x)$.

On doit avoir $y(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et $y_{k-1}(x)$ et $y_k(x)$ tendent bien vers 0 quand x tend vers $k\pi$ donc la continuité ne donne aucune information. Étudions alors le taux d'accroissement de y_k en $k\pi$. On a pour $x \in I_k$:

$$\frac{y_k(x) - 0}{x - k\pi} = \frac{y_k(x) - y_k(k\pi)}{x - k\pi}.$$

Or, la fonction y_k, si on la voit comme une fonction sur $\mathbb{R}$ est bien définie et dérivable. On en déduit que son taux d'accroissement en $k\pi$ tend vers $y_k'(k\pi) = \lambda_k\cos(k\pi) + 2(k\pi)\sin(k\pi) + (k\pi)^2\cos(k\pi) = (-1)^k(\lambda_k + k^2\pi^2)$. On obtient la même chose pour la fonction y_{k-1} en remplaçant λ_k par λ_{k-1}. On trouve donc que pour avoir une fonction dérivable, il faut imposer $\lambda_{k-1} = \lambda_k$, et ceci pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation sont de la forme $y : x \mapsto \lambda\sin(x) + x^2\sin(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Résolvons l'équation $|x|y' - 2x^2y = x^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on se ramène à l'équation $y' - 2xy = x^3$. Comme solution de l'équation homogène, on trouve $y : x \mapsto \lambda e^{x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et après résolution, on en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, on se ramène à l'équation $y' + 2xy = -x^3$. On résout de la même manière pour obtenir comme solutions les fonctions de la forme $y_\mu : x \mapsto \mu e^{-x^2} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Il reste à faire la synthèse pour obtenir une fonction dérivable en 0. En étudiant les limites en 0^- et 0^+, on obtient comme condition $\mu + \dfrac{1}{2} = \lambda - \dfrac{1}{2}$ soit $\lambda = 1 + \mu$. On obtient alors comme valeur en 0 $y(0) = \mu + \dfrac{1}{2} = \lambda - \dfrac{1}{2}$. En posant cette valeur, on peut alors étudier la dérivabilité à gauche et à droite en 0. On a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= \frac{\lambda(e^{x^2} - 1) - \frac{x^2}{2}}{x} \\ &= \lambda \frac{e^{x^2} - 1}{x} - \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $x \mapsto e^{x^2}$ est dérivable en 0 de dérivée nulle, on en déduit que cette limite vaut 0.

En procédant de même pour la limite à gauche, on trouve également une limite qui vaut 0. Ceci entraine que la fonction y est dérivable en 0.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$y : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x^2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} \text{ si } x \geq 0 \\ x & \mapsto & (\lambda - 1)e^{-x^2} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} \text{ si } x < 0 \end{array} \right. ,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$