17. Convexité, méthodologie

I. Généralités

I.1. définition

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Alors, $[a, b] = \{ta + (1-t)b,\ t \in [0,1]\}$.

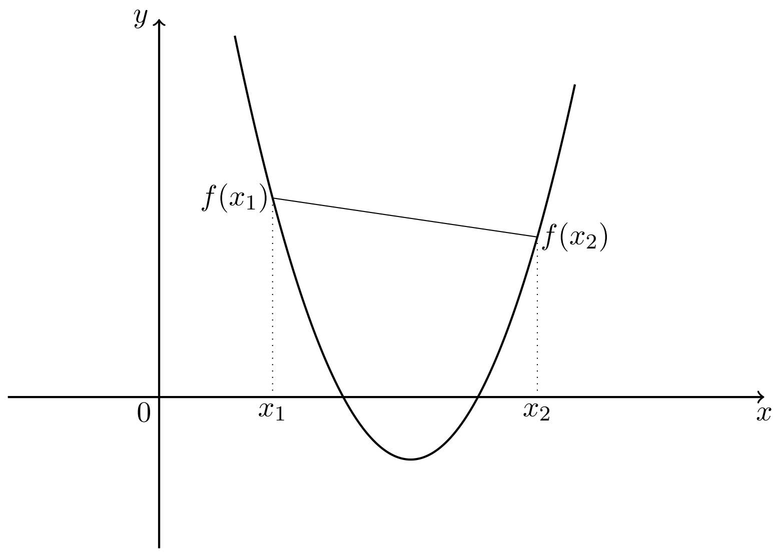
Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si :

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition. On dit que f est concave si $-f$ est convexe (autrement dit, si l'inégalité précédente est inversée).

(m) Toutes les propriétés des fonctions convexes sont vraies sur les fonctions concaves en inversant les inégalités.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in I$, la corde reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est au-dessus de la courbe représentative de f.



I.2. Inégalités

Théorème. Inégalité de Jensen. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où I est un intervalle. Alors :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \ /\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

(m) La convexité permet souvent de prouver « facilement » des inégalités en utilisant l'inégalité de Jensen à une fonction convexe/concave bien choisie en des bonnes valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (très souvent tous égaux à $\frac{1}{n}$).

Exercice d'application 1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$.

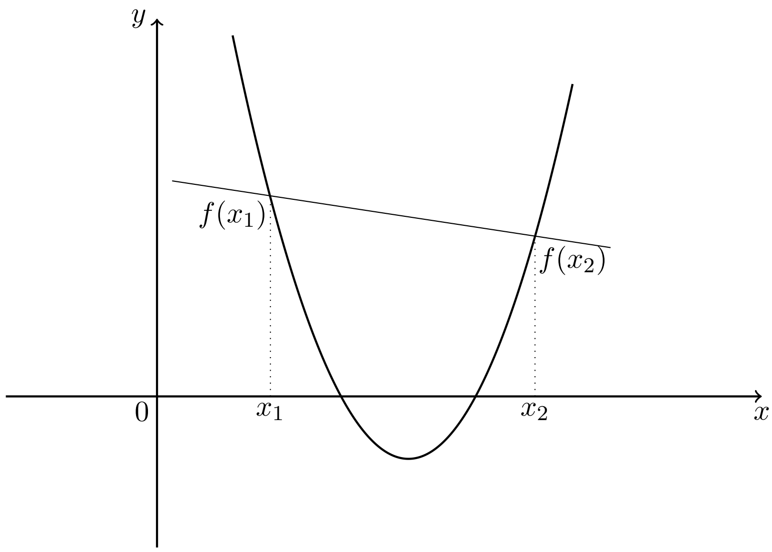
Exercice d'application 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}{n}$.

I.3. Propriétés des fonctions convexes

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si ses pentes sont croissantes, c'est à dire si et seulement si

$$\forall y \in I, \text{ la fonction } x \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ est croissante sur } I \setminus \{y\}.$$

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ (on dit que $\mathcal{D}$ est une droite sécante à la courbe représentative de f). Alors, la courbe représentative est en-dessous de $\mathcal{D}$ sur $[x_1, x_2]$ et au-dessus ailleurs.



(m) Les deux propriétés précédentes permettent en général d'étudier les limites en $\pm\infty$ d'une fonction convexe à l'aide des théorèmes d'encadrements.

Exercice d'application 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $f(-1) > f(0)$ et $f(0) < f(1)$. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

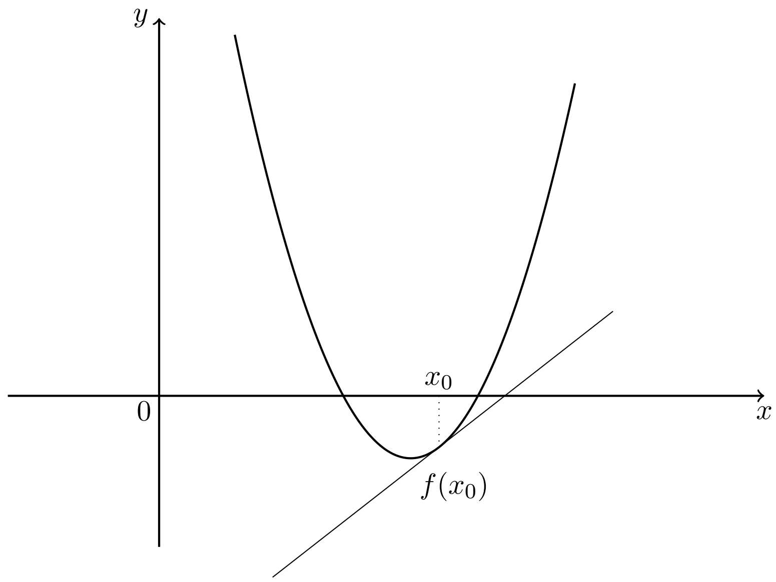
II. Régularité des fonctions convexes et lien avec la dérivabilité

Proposition. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est continue.

(m) Autrement dit, les seuls endroits où une fonction convexe peut être discontinue est au bord de l'intervalle (si l'intervalle n'est pas ouvert).

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la courbe représentative de f est située au-dessus de toutes ses tangentes.



(m) Quand f est convexe, on peut donc trouver des encadrements de $f(x)$ en comparant le graphe de f par rapport aux tangentes et/ou aux sécantes de la courbe représentative de f.

Exercice d'application 4. Montrer sans étudier de fonctions que :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$.

2) $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, f est convexe si et seulement si $\forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$.

(m) C'est très souvent cette propriété qui est utilisée pour montrer qu'une fonction est convexe.

Exercice d'application 5. Les fonctions suivantes sont-elles convexes/concaves ?

1) exp, ln, arctan, ch, sh sur leurs domaines de définition.

2) $x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$. Et sur $[0, \pi]$?

3) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

4) $x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. *Et sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

III. Correction des exercices

Exercice d'application 1. La fonction exponentielle est convexe (dérivée croissante). On en déduit que pour $a, b \in \mathbb{R}$, en prenant $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$:

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}e^a + \frac{1}{2}e^b$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Exercice d'application 2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la dérivée seconde est $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+^*$). D'après l'inégalité de Jensen prise en $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, on en déduit que pour $x_1, \ldots, x_n > 0$:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}{n}.$$

Exercice d'application 3. Puisque f est convexe, on a par croissance des pentes que pour $x > 1$ que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$. On en déduit donc que :

$$\forall x > 1,\ f(x) \geq x(f(1) - f(0)) + f(0).$$

Ceci entraine par théorème d'encadrement que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (puisque $f(1) - f(0) > 0$).

On procède de même pour la limite en $-\infty$. Par croissance des pentes, on a pour $x < -1$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{f(-1) - f(0)}{-1 - 0}$, soit (attention, x est négatif, on change le sens de l'inégalité !) :

$$\forall x < -1,\ f(x) \geq x(f(0) - f(-1)) + f(0).$$

Puisque $f(0) - f(-1) < 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice d'application 4. Montrer sans étudier de fonctions que :

1) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée est croissante). Or, sa tangente en 0 est d'équation $y = 1 \times (x - 0) + 1$, soit $y = x + 1$. Par convexité, on a que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$.

2) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est concave (car $\sin'' = -\sin$ qui est négative sur cet intervalle). Puisque $y = x$ est la tangente à 0 en sinus, on en déduit que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \leq x$.

De plus, toujours pas concavité, on a que sinus est au-dessus de ses cordes. Or, la corde reliant les points $(0, \sin(0)) = (0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ est d'équation :

$$y = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2} - 0}(x - 0) + 0 = \frac{2}{\pi}x.$$

On a donc bien $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.

Exercice d'application 5. Les fonctions suivantes sont-elles convexes/concaves ?

1) exp est convexe (dérivée croissante) sur $\mathbb{R}$, ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (car de dérivée décroissante). On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ qui n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$ donc arctan n'est

ni convexe, ni concave. ch est convexe (car sa dérivée sh est croissante) mais sh n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée ch n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$).

2) $x \mapsto \sin(x)$ n'est pas convexe ou concave sur $[0, 2\pi]$ ($\sin'' = -\sin$ qui n'est pas de signe constant sur $[0, 2\pi]$). Par contre sur $[0, \pi]$, sin est concave (dérivée seconde négative).

3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions deux fois dérivables. On a pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \geq 0$. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4) $f : x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions deux fois dérivables. On a pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

On a alors $f''(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}{(\sqrt{x} + x^{3/2})^2} \leq 0$. On en déduit que f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est décroissante. Elle est aussi concave sur $\mathbb{R}_+$. En effet, puisqu'elle est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de vérifier l'inégalité de concavité si $x = 0$. Or, pour $\lambda \in [0, 1]$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sqrt{(1-\lambda)y)}$$

et $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = (1-\lambda)\sqrt{y}$. Puisque $0 \leq \sqrt{1-\lambda} \leq 1$, on en déduit par produit que :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

ce qui étant bien la concavité en en $x = 0$.

On peut aussi remarquer que la fonction racine étant continue, par passage à la limite dans les inégalités quand $x \to 0$ et à y fixé, on peut étendre la relation de concavité sur $\mathbb{R}_+^*$ à $\mathbb{R}_+$.