Année Scolaire 2016 – 2017

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2,3}$

DS N°8

Mercredi 12/04/2017 (4h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : Calcul matriciel

Partie I

On considère la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on note $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM \times L \times M = L\}$.

Q1) a) Montrer que $\forall\,(M, N) \in G^2,\ M \times N \in G$.

b) Soit $M \in G$. En remarquant que $L^2 = I_3$, justifier que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M et L. En déduire que $M^{-1} \in G$.

c) Prouver que $(G, \times)$ est un groupe.

Q2) a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que

$$ {}^tM = -M \iff \forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX \times M \times X = 0_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})}.$$

(Indication : noter $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et calculer* ${}^tX \times M \times X$.*)*

b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M \times X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Prouver que : $M \in G \iff \forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$.
(Indication : calculer ${}^tX \times L \times X$.*)*

Q3) On note enfin $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices de G dont tous les coefficients sont entiers.

Prouver que $(\mathscr{H}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, \times)$.

(On pourra utiliser sans preuve que si deux matrices sont à coefficients entiers, alors leur produit aussi.)

Partie II

Dans cette partie, on étudie certaines matrices particulières de $\mathscr{H}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\mathrm{R}_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & 2k^2 \\ 2k & -1 & -2k \\ -2k^2 & 2k & 1+2k^2 \end{pmatrix}$$

et on note

$$\mathscr{R} = \{\mathrm{R}_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \mathscr{S} = \{\mathrm{S}_k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Q4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la matrice R_k appartient à $\mathscr{H}$.

(*On détaillera suffisamment les calculs.*)

b) On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$, A^2 et B^2.

c) Exprimer R_k en fonction des matrices I_3, A et B, et vérifier que pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, la matrice $\mathrm{R}_{k_1} \times \mathrm{R}_{k_2}$ s'exprime sous la forme d'une matrice de $\mathscr{R}$ à préciser.

En remarquant que $\mathrm{R}_0 = \mathrm{I}_3$, en déduire une expression simple de R_k^{-1}, puis conclure que $(\mathscr{R}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{H}, \times)$.

d) Vérifier que $(\mathrm{R}_k - \mathrm{I}_3)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{R}_k^n = a_n \mathrm{R}_k^2 + b_n \mathrm{R}_k + c_n \mathrm{I}_3$$

où a_n, b_n, c_n sont trois entiers, dépendant de n mais pas de k, à déterminer.

Q5) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Vérifier qu'il existe une matrice $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer, diagonale et indépendante de k, telle que

$$\mathrm{S}_k = \mathrm{R}_k \times \mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{-k} = \mathrm{C} \times \mathrm{R}_k.$$

En déduire que la matrice S_k appartient à $\mathscr{H}$.

b) Prouver que, pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, chacun des produits $\mathrm{R}_{k_1} \times \mathrm{S}_{k_2}$, $\mathrm{S}_{k_1} \times \mathrm{R}_{k_2}$ et $\mathrm{S}_{k_1} \times \mathrm{S}_{k_2}$ s'exprime sous la forme d'une matrice de $\mathscr{R}$ ou de $\mathscr{S}$ à préciser.

c) $(\mathscr{S}, \times)$ et $(\mathscr{R} \cup \mathscr{S}, \times)$ sont-ils des sous-groupe de $(\mathscr{H}, \times)$?

d) On note φ_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice S_k.

Justifier que φ_k est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ et préciser ses éléments.

Partie III

On appelle triplet pythagoricien tout triplet (x, y, z) d'**entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble** tel que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On note $\mathscr{T}$ l'ensemble de tous ces triplets.

Q6) Soient $(x, y, z) \in \mathscr{T}$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{H}$. On note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathrm{M} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ comme dans la partie I.

Montrer que le triplet $(|x'|, |y'|, |z'|)$ appartient à $\mathscr{T}$.

Q7) Dans cette question, on considère un triplet $(x, y, z) \in \mathscr{T}$ tel que $z > 1$.

a) Justifier que $x > 0$ et $y > 0$.

b) Vérifier que la matrice $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{H}$; on définit alors le triplet (x', y', z') comme précédemment pour $\mathrm{M} = \mathrm{U}$.

Établir que

$$0 < z' < z.$$

c) Conclure que, dans tous les cas, il existe une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{H}$ telle que, si on note : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathrm{M} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors le triplet (x', y', z') appartient à $\mathscr{T}$ et vérifie $0 < z' < z$.

(*Indication : on pourra utiliser les matrices* $\mathrm{D}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Q8) Montrer que pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathscr{T}$, il existe une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{H}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Q9) Soit M une matrice dans $\mathscr{H}$. Prouver que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \mathrm{M} \in \mathscr{R} \cup \mathscr{S}.$$

(*On rappelle que les ensembles* $\mathscr{R}$ *et* $\mathscr{S}$ *sont définis dans la partie II.*)

Problème 2 : Étude de deux séries

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : Étude de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k}$

Q1) *Nature et calcul de la somme de la série* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

a) Établir la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

b) Soit $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Montrer que $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$.

ii) En déduire que $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\left|\ln(2) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Conclure.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel fixé dans l'intervalle $]0;2\pi[$.

Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{M}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Simplifier la somme M_n. En déduire que $|\mathrm{M}_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$.

i) En remarquant que $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{M}_k - \mathrm{M}_{k-1}}{k}$, montrer que $\mathrm{S}_n = \frac{\mathrm{M}_n}{n} - 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{M}_k}{k(k+1)}$.

ii) Établir la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\mathrm{M}_k}{k(k+1)}$.

c) En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Q3) a) Soit f une fonction, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ $(a<b)$, et $\lambda > 0$. À l'aide d'une intégration par parties (à détailler), montrer qu'il existe une constante K (à préciser) telle que $\left|\displaystyle\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\mathrm{K}}{\lambda}$.

b) En déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0;2\pi]$, on note $\mathrm{D}_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikt}$.

a) Montrer que D_n est continue sur $[0;\pi]$, et que $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{ik}$.

b) Montrer que pour $t \in]0;2\pi[$, $\mathrm{D}_n(t) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i\frac{t}{2}}}{2i\sin(\frac{t}{2})}$.

Q5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$.

a) Montrer que $\mathrm{S}_n = i\displaystyle\int_0^x \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2}\displaystyle\int_x^\pi \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\frac{1}{2}\displaystyle\int_x^\pi \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = -\ln(2\sin(\frac{x}{2})) + i\frac{\pi-x}{2}$.

Q6) Que dire des séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\cos(kx)}{k}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\sin(kx)}{k}$?

Partie II : Série des inverses des nombres premiers

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$)

Q7) Redémontrer que la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et divergente.

*Dans la suite de cette partie, on montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ est également divergente. On raisonne par l'absurde **en supposant que cette série converge vers un réel noté** S.*

Q8) Prouver l'existence d'un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$.

Pour la suite, on pose $\mathrm{N} = 2^{2k_0+2}$.

Q9) a) Soit $i \geqslant 1$, montrer que le nombre d'entiers de l'intervalle $[\![1;\mathrm{N}]\!]$ divisibles par p_i, est $\left\lfloor \frac{\mathrm{N}}{p_i} \right\rfloor$.

b) Soit $\mathrm{A} = \{n \in [\![1;\mathrm{N}]\!] \mid \exists i \geqslant k_0+1,\ p_i \mid n\}$ et $\mathrm{N_A}$ le nombre d'éléments de A.
Montrer que $\mathrm{N_A} \leqslant \sum\limits_{i\geqslant k_0+1} \left\lfloor \frac{\mathrm{N}}{p_i} \right\rfloor < \frac{\mathrm{N}}{2}$.

Q10) Soit $n \in [\![1;\mathrm{N}]\!] \setminus \mathrm{A}$.

a) En considérant la décomposition de n en facteurs premiers, montrer que l'on peut écrire $n = ab^2$ avec a et b dans $\mathbb{N}^*$, et où a est **sans diviseur carré** (*i.e.* tous les diviseurs premiers de a ont une valuation égale à 1).

b) Montrer que l'entier a ne peut prendre que 2^{k_0} valeurs possibles, et que l'entier b est dans l'intervalle $[1;\sqrt{\mathrm{N}}]$.

c) En déduire que le nombre de valeurs possibles pour n est inférieur ou égal à $2^{k_0}\sqrt{\mathrm{N}}$, et vérifier que $2^{k_0}\sqrt{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}}{2}$.

Q11) Déduire des deux questions précédentes une contradiction. Conclure.

– FIN –