Problème 1 : familles équiangulaires

Q1) On a $||f_1 - f_2||^2 = ||f_1||^2 - 2\langle f_1, f_2\rangle + ||f_2||^2 = 2 - 2\langle f_1, f_2\rangle$. On en déduit que $f_1 = f_2$, c'est à dire $f_1 - f_2$ est le vecteur nul, si et seulement si $\langle f_1, f_2\rangle = 1$.

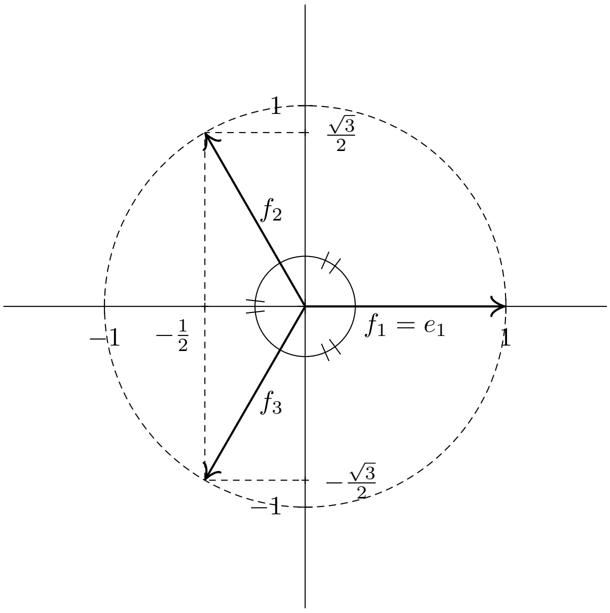
Q2) *Deux exemples.*

a) Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, tous les vecteurs sont unitaires et pour $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$. La famille est donc équiangulaire de paramètre $\alpha = 0$.

b) On a $||f_1|| = 1$, par théorème de Pythagore, $||f_2||^2 = \frac{1}{4}||e_1||^2 + \frac{3}{4}||e_2||^2 = 1$ et de même $||f_3||^2 = 1$. Les trois vecteurs sont donc unitaires. On a de plus $\langle f_1, f_2\rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle f_1, f_3\rangle = -\frac{1}{2}$ et :

$$\langle f_2, f_3\rangle = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

La famille est donc équiangulaire de paramètre $-\frac{1}{2}$.



Q3) *Quelques propriétés.*

a) On fixe $i \neq j$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle f_i, f_j\rangle| \leqslant ||f_i|| \times ||f_j||.$$

Puisque les vecteurs sont unitaires et que les produits scalaire de deux vecteurs distincts de la famille vaut α, on a $|\alpha| \leqslant 1$. On en déduit que $\alpha \in [-1, 1]$. Puisque par définition d'une famille équiangulaire, $\alpha \neq 1$, on a bien $\alpha \in [-1; 1[$.

b) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a (par théorème de Pythagore, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée) :

$$||f_k||^2 = ||e_k||^2 + \beta^2||e_n||^2 = 1 + \beta^2 > 0.$$

Puisque la norme est non nulle, les vecteurs f_k sont tous différents du vecteur nul. Mes vecteurs f_k sont donc non nuls, ce qui implique que la famille $(g_1, \dots, g_{n-1})$ est bien définie. Ce sont de plus des vecteurs unitaires puisque l'on divise à chaque fois le vecteur f_k par sa norme, ce qui donne un vecteur unitaire.

Pour montrer que la famille est équiangulaire, il reste à calculer $\langle g_i, g_j\rangle$ pour $i \neq j$. Si on fixe $i \neq j$ (qui sont aussi différents de n), on a par orthogonalité de la famille $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\begin{array}{rcl} \langle g_i, g_j\rangle & = & \frac{1}{||f_i|| ||f_j||}\langle f_i, f_j\rangle \\ & = & \frac{\langle e_i+\beta e_n, e_j+\beta e_n\rangle}{(1+\beta^2)} \\ & = & \frac{0+0+0+\beta^2\langle e_n, e_n\rangle}{1+\beta^2} \\ & = & \frac{\beta^2}{1+\beta^2}. \end{array}$$

On en déduit que la famille $(g_1, \dots, g_{n-1})$ est équiangulaire de paramètre $\alpha = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$.

c) Pour $x \in \mathbb{R}_+[$, on pose $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (elle est dérivable et $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$), elle est continue, $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On en déduit que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1[$. Puisque $t \mapsto t^2$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $\alpha \in [0;, [1$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = f(\beta^2)$. Pour ce choix de β, la famille de la question précédente est équiangulaire avec $n-1$ vecteurs de paramètre α, ce qu'il fallait démontrer.

Q4) a) En dimension n, une famille libre a moins de n vecteurs. Puisque $p > n$, la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée.

b) Soit $i \in [\![2, p]\!]$. Par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\begin{array}{rcl} 0 = \langle 0_E, f_i\rangle & = & \langle \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k, f_i\rangle \\ & = & \sum_{k=1}^p \lambda_k\langle f_k, f_i\rangle \\ & = & \lambda_i\langle f_i, f_i\rangle + \sum_{1\leqslant k\leqslant p,\ k\neq i} \lambda_k\langle f_k, f_i\rangle \\ & = & \lambda_i + \alpha\sum_{1\leqslant k\leqslant p,\ k\neq i} \lambda_k. \end{array}$$

De même (en $i = 1$), on a $0 = \lambda_1 + \alpha\sum_{1\leqslant k\leqslant p,\ k\neq 1} \lambda_k$. En effectivement la différence de ces deux égalités, on a tous les termes sauf deux qui se simplifient :

$$0 = \lambda_i + \alpha\lambda_1 - \lambda_1 - \alpha\lambda_i + 0.$$

On a donc $0 = (\alpha-1)(\lambda_1 - \lambda_i)$. Puisque $\alpha \neq 1$, on a donc $\lambda_i = \lambda_1$.

c) Tous les λ_i sont égaux on a donc :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = 0_E \Longleftrightarrow \lambda_1 \sum_{k=1}^p f_k = 0_E.$$

Or, $\lambda_1 \neq 0$ (puisque la famille est liée, on a au moins un coefficient non nul et puisque tous les coefficients sont égaux, cela signifie que $\lambda_1 \neq 0$). En divisant par λ_1, on a donc :

$$\sum_{k=1}^p f_k = 0_E.$$

En effectuant le produit scalaire de cette somme avec f_1, de la même façon qu'à la question précédente, on obtient :

$$0 = \langle f_1, f_1\rangle + \sum_{k=2}^p \langle f_k, f_1\rangle = 1 + \sum_{k=2}^p \alpha = 1 + \alpha(p-1).$$

On obtient donc $\alpha = -\frac{1}{p-1}$.

d) On suppose par l'absurde que $p > n+1$. La famille $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est encore une famille unitaire. De plus, on a toujours pour $i \neq j$, $\langle f_i, f_j\rangle = \alpha$ (puisque la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est équiangulaire de paramètre α). Cette sous famille est donc encore équiangulaire de paramètre α. Or, cette famille est liée (puisqu'elle contient plus de vecteurs que la dimension de E). Ceci entraine d'après le raisonnement précédente que $\alpha = -\frac{1}{n+1-1} = -\frac{1}{n}$.
Puisqu'il s'agit du même α, on a $\alpha = -\frac{1}{n} = -\frac{1}{p-1}$ donc $p-1 = n$, soit $p = n+1$: absurde!

Q5) a) Si $\dim(E) = 1$, on fixe un vecteur e_1 unitaire et on prend comme famille $f_1 = e_1$ et $f_2 = -e_1$. Cette famille est équiangulaire de paramètre $-1 = \langle f_1, f_2\rangle = -||e_1||^2$.

b) i) On a $\dim(F) = n-1$ puisque $E = \mathrm{Vect}(e) \oplus F$. Par hypothèse de récurrence, il existe une famille équiangulaire $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F qui a un paramètre $\alpha = -\frac{1}{n-1}$. On en déduit que pour

$i, j \in [\![1, n]\!]$, $\langle f_i, f_j \rangle = 1$ si $i = j$, et $\langle f_i, f_j \rangle = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.

ii) On a $||e|| = 1$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$||f_k - \beta e||^2 = ||f_k||^2 - \beta\langle f_k, e\rangle + \beta^2||e||^2 = 1 - 0 + \beta^2.$$

En effet, les f_k sont tous orthogonaux à e (puisque $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e)^\perp$). Pour que les $\frac{f_k - \beta e}{\gamma}$ soient unitaires, on doit donc prendre $\gamma = \sqrt{1+\beta^2}$.

On calcule ensuite $\langle e, \frac{f_k-\beta e}{\gamma}\rangle$, ce qui donne :

$$\langle e, \frac{f_k - \beta e}{\gamma}\rangle = 0 - \frac{\beta}{\gamma}.$$

D'après la question 4, on veut $-\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{1}{n}$, soit $\gamma = n\beta$. En reprenant la relation $\gamma = \sqrt{1+\beta^2}$, on obtient $n^2\beta^2 = 1+\beta^2$, soit $\beta = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ (puisque l'on veut $\beta > 0$) et donc $\gamma = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} > 0$.

Pour terminer la preuve que la famille proposée est équiangulaire, il faut calculer pour $i \neq j$ $\langle \frac{f_i-\beta e}{\gamma}, \frac{f_j - \beta e}{\gamma}\rangle = -\frac{1}{n}$ et vérifier que l'on obtient bien $-\frac{1}{n}$. On a pour $i \neq j$:

$$\begin{array}{rcl}
\langle \frac{f_i-\beta e}{\gamma}, \frac{f_j-\beta e}{\gamma}\rangle & = & = \frac{1}{\gamma^2}\Big(\langle f_i, f_j\rangle - \beta\langle f_i, e\rangle - \beta\langle e, f_j\rangle + \beta^2\langle e, e\rangle\Big) \\
& = & \frac{1}{\gamma^2}\left(-\frac{1}{n-1} - 0 - 0 + \beta^2\right) \\
& = & \frac{n^2-1}{n^2} \times \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2-1}\right) \\
& = & \frac{n^2-1}{n^2} \times \left(\frac{-n-1+1}{n^2-1}\right) \\
& = & -\frac{1}{n}.
\end{array}$$

On a donc bien la famille équiangulaire pour les paramètres proposés, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Par récurrence, on peut donc construire une famille équiangulaire à $n+1$ vecteurs dans tous les espaces euclidiens de dimension n.

Problème 2 : étude d'une marche aléatoire

Q1) *Loi de* X_n.

a) Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on a $\mathrm{D}_i(\Omega) = \{\pm 1\}$, $\mathbb{P}(\mathrm{D}_i = 1) = p$ (probabilité d'aller à droite), $\mathbb{P}(\mathrm{D}_i = -1) = q = 1-p$. L'espérance est $\mathbb{E}(\mathrm{D}_i) = 1 \times \mathbb{P}(\mathrm{D}_i = 1) - 1 \times \mathbb{P}(\mathrm{D}_i = -1) = p - q = 2p-1$. D_i^2 est une variable certaine égale à 1, donc $\mathbb{E}(\mathrm{D}_i^2) = 1$ et par conséquent la variance est $\mathbb{V}(\mathrm{D}_i) = \mathbb{E}(\mathrm{D}_i^2) - \mathbb{E}(\mathrm{D}_i)^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p)$.

$$\boxed{\mathrm{D}_i(\Omega) = \{\pm 1\}, \mathbb{P}(\mathrm{D}_i = 1) = p, \mathbb{P}(\mathrm{D}_i = -1) = q = 1-p, \mathbb{E}(\mathrm{D}_i) = 2p-1, \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{D}_i) = 4p(1-p).}$$

b) Initialement la puce est à l'abscisse 0, au saut n° i, si $\mathrm{D}_i = 1$ alors son abscisse augmente de 1, et si $\mathrm{D}_i = -1$ son abscisse diminue de 1, par conséquent l'abscisse de la puce après le saut n est :

$$\boxed{\mathrm{X}_n = \mathrm{D}_1 + \cdots + \mathrm{D}_n.}$$

D'autre part l'énoncé nous dit que les sauts sont indépendants, ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{Les variables } \mathrm{D}_i \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

c) Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{D}_i) = n(2p-1)$. Les variables D_i étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances, donc on a $\mathbb{V}(\mathrm{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{D}_i) = 4np(1-p)$.

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}_n) = n(2p-1) \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{X}_n) = 4np(1-p).}$$

d) i) Soit $i \in [\![1; n]\!]$, les valeurs de D_i sont ± 1, donc les valeurs possibles de $\mathrm{B}_i = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_i + 1)$ sont 1 (quand $\mathrm{D}_i = 1$) et 0 (quand $\mathrm{D}i = -1$), donc B_i est une variable de Bernoulli et son paramètre est égal à $\mathbb{P}(\mathrm{B}_i = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{D}_i = 1) = p$.

$$\boxed{\mathrm{B}_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p).}$$

Soit la fonction $f: x \to \frac{x+1}{2}$, comme les variables $D_1, \dots, D_n$ sont mutuellement indépendantes, d'après le cours les variables $f(D_1), \dots, f(D_n)$ sont également mutuellement indépendantes, c'est à dire :

$$\boxed{\text{Les } B_i \text{ sont des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes.}}$$

ii) Puisque les variables $B_1, \dots, B_n$ sont de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, la somme, c'est à dire Y_n suit une loi binomiale de paramètre n et p, on en déduit également son espérance et sa variance :

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p), \mathbb{E}(Y_n) = np \text{ et } \mathbb{V}(Y_n) = np(1-p).}$$

e) On a $D_i = 2B_i - 1$, d'où $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (2B_i - 1) = 2\sum\limits_{i=1}^{n} B_i - \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \boxed{2Y_n - n}$.

Par linéarité de l'espérance on en déduit que $\mathbb{E}(X_n) = 2\mathbb{E}(Y_n) - n = 2np - n = \boxed{n(2p-1)}$.

Pour la variance, $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(2Y_n - n) = 2^2\mathbb{V}(Y_n) = \boxed{4np(1-p)}$.

On sait que $Y_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, on en déduit que :

$$\boxed{X_n(\Omega) = \left\{-n + 2k \;/\; k \in [\![0;n]\!]\right\} = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, n-2, n\} \text{ (ce n'est pas un intervalle d'entiers).}}$$

Si $k \in X_n(\Omega)$ alors il existe $r \in [\![0;n]\!]$ tel que $k = -n + 2r$ (c'est évidemment $r = \frac{n+k}{2}$) et l'évènement $(X_n = k)$ est l'évènement $(Y_n = r)$, or $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, par conséquent :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = r) = \binom{n}{r}p^r q^{n-r} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, \text{ où } q = 1-p.}$$

Q2) *Un processus sans mémoire.*

a) L'événement $(X_r = a)$ est l'évènement $(D_1 + \dots + D_r = a)$.

L'événement $(X_n = b)$ est l'évènement $(D_1 + \dots + D_n = b)$ (avec $r < n$).

Donc l'événement $(X_r = a) \cap (X_n = b)$ est l'évènement $(D_1 + \dots + D_r = a) \cap (D_1 + \dots + D_n = b)$, qui est le même évènement que $\boxed{(D_1 + \dots + D_r = a) \cap (D_{r+1} + \dots + D_n = b - a)}$.

b) Les variables D_i sont mutuellement indépendantes, donc les deux variables $X_r = D_1 + \dots + D_r$ et $D_{r+1} + \dots + D_n$ sont indépendantes, donc :

$$\mathbb{P}((X_r = a) \cap (X_n = b)) = \mathbb{P}(X_r = a) \times \mathbb{P}(D_{r+1} + \dots + D_n = b - a).$$

D'autre part, $B_{r+1} + \dots + B_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n-r, p)$ car ce sont des Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, donc cette somme suit la même loi que Y_{n-r}, donc :

$D_{r+1} + \dots + D_n = 2(B_{r+1} + \dots + B_n) - (n-r)$ suit la même loi que $2Y_{n-r} - (n-r) = X_{n-r}$, et donc $\mathbb{P}(D_{r+1} + \dots + D_n = b - a) = \mathbb{P}(X_{n-r} = b - a)$.

Finalement $\mathbb{P}((X_r = a) \cap (X_n = b)) = \mathbb{P}(X_r = a) \times \mathbb{P}(X_{n-r} = b - a)$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_r = a)}(X_n = b) = \frac{\mathbb{P}((X_r = a) \cap (X_n = b))}{\mathbb{P}(X_r = a)} = \mathbb{P}(X_{n-r} = b - a).}$$

Q3) *Premier retour à l'origine.*

a) Pour être à l'origine, il faut autant de sauts vers la droite que de sauts vers la gauche, il faut donc un nombre pair de sauts, or il y a un saut par instant, donc :

$$\boxed{\text{La puce ne peut être à l'origine qu'à des instants pairs.}}$$

L'évènement T_2 signifie que la puce a fait deux sauts, un vers la droite et un vers la gauche (ou dans l'autre sens), autrement dit on a $T_2 = ((D_1 = 1) \cap (D_2 = -1)) \cup ((D_1 = -1) \cap (D_2 = 1))$, réunion de deux évènements incompatibles avec de plus D_1 et D_2 qui sont indépendantes, par conséquent :

$$\boxed{t_2 = \mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(D_1 = 1)\mathbb{P}(D_2 = -1) + \mathbb{P}(D_1 = -1)\mathbb{P}(D_2 = 1) = 2pq.}$$

b) L'évènement $(X_{2n} = 0)$ entraîne l'évènement $(T_2 \cup T_4 \cup \dots \cup T_{2n})$ (la puce est forcément repassée pour la première fois à l'origine à l'instant 2, ou 4, ..., ou $2n$, puisque elle est à l'origine à l'instant $2n$), donc $(X_{2n} = 0) \subset (T_2 \cup T_4 \cup \dots \cup T_{2n}) \subset (T_2 \cup T_4 \cup \dots \cup T_{2n}) \cap (X_{2n} = 0)$.

L'inclusion dans l'autre sens est immédiate : $(T_2 \cup T_4 \cup \dots \cup T_{2n}) \cap (X_{2n} = 0) \subset (X_{2n} = 0)$, par conséquent :

$$\boxed{(X_{2n}=0)=(T_2\cup T_4\cup\cdots\cup T_{2n})\cap(X_{2n}=0).}$$

On en déduit par distributivité de l'intersection sur la réunion que :
$\mathbb{P}(X_{2n}=0)=\mathbb{P}((T_2\cap(X_{2n}=0))\cup\cdots\cup(T_{2n}\cap(X_{2n}=0)))$, mais les évènements $T_{2k}\cap(X_{2n}=0)$ sont incompatibles deux à deux, car les T_{2k} sont eux-même incompatibles deux à deux, par conséquent :

$$\mathbb{P}(X_{2n}=0)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T_{2k})\cap(X_{2n}=0)).$$

D'après la formule des probabilités composées, on a $\mathbb{P}(T_{2k}\cap(X_{2n}=0))=\mathbb{P}(T_{2k})\times\mathbb{P}_{T_{2k}}(X_{2n}=0)$, or si on sait que l'évènement T_{2k} est réalisé, alors on sait que $(X_{2k}=0)$ est également réalisé : la puce et à l'origine à l'instant $2k$, comme le processus est sans mémoire (question précédente), $\mathbb{P}_{T_{2k}}(X_{2n}=0)=\mathbb{P}(X_{2n-2k}=0)$, finalement :

$$\boxed{a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}t_{2k}\times a_{2n-2k},\text{ avec } a_{2k}=\mathbb{P}(X_{2k}=0)\text{ et la convention que } a_0=1.}$$

c) i) Les évènements T_2, ..., T_{2n} sont incompatibles deux à deux, donc $\mathbb{P}(T_2\cup\cdots\cup T_{2n})=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T_{2k})$, c'est à dire :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}t_{2k}=\mathbb{P}(T_2\cup\cdots\cup T_{2n}).}$$

ii) Une probabilité étant toujours majorée par 1, on en déduit pour tout naturel n que $\sum_{k=1}^{n}t_{2k}\leqslant 1$, donc les sommes partielles de la série **à termes positifs** $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}t_{2k}$ sont majorées par une constante, ce qui entraîne que :

$$\boxed{\text{La SATP }\sum_{k\in\mathbb{N}^*}t_{2k}\text{ est convergente.}}$$

Soit $x\in[-1;1]$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on a $|t_{2k}x^{2k}|=t_{2k}|x|^{2k}\leqslant t_{2k}$ (car $|x|\leqslant 1$), comme la série de terme général t_{2k} converge, on a par théorème de comparaison des SATP que la série de terme général $|t_{2k}x^{2k}|$ est également convergente, et par conséquent :

$$\boxed{\text{La série }\sum_{k\geqslant 1}t_{2k}x^{2k}\text{ est \textbf{absolument convergente} et donc convergente lorsque } x\in[-1;1].}$$

d) Soit $F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}t_{2n}x^{2n}$ pour $x\in[-1;1]$, on admet que $F(x)=1-\sqrt{1-4pqx^2}$.

i) D'après le résultat admis :
$F(1)=1-\sqrt{1-4pq}=1-\sqrt{1-4p+4p^2}=1-\sqrt{(2p-1)^2}=1-|2p-1|=\boxed{1-|p-q|}$.

ii) On a également $F(1)=\sum_{k=1}^{+\infty}t_{2k}=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_2\cup\cdots\cup T_{2n})$, ce qui peut s'interpréter comme la probabilité de l'événement $\bigcup_{k=1}^{+\infty}T_{2k}$, cet évènement signifie que la puce repassera un jour par l'origine, finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité que la puce repasse un jour par l'origine vaut } 1-|p-q|.}$$

Lorsque $p=\frac{1}{2}$, on a aussi $q=\frac{1}{2}$ et donc $F(1)=1$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Lorsque } p=\tfrac{1}{2}\text{ il est quasi-certain que la puce repassera un jour par l'origine.}}$$

Problème 3 : analyse

Q1) L'ensemble $A=\{k\in\mathbb{Z}\mid x\leqslant k\}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, non vide (car $\lfloor x\rfloor+1\in A$ d'après l'inégalité $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$) et minorée (par x), donc $\boxed{\text{elle possède bien un minimum}}$.
Comme un minimum appartient à l'ensemble, on a $x\leqslant\lceil x\rceil$.
On sait que $\lceil x\rceil-1\notin A$ (en effet, par l'absurde si $\lceil x\rceil-1\in A$, comme un minimum est un minorant on aurait $\lceil x\rceil\leqslant\lceil x\rceil-1$, ce qui est faux). Puisque $\lceil x\rceil-1\in\mathbb{Z}$, c'est que $x>\lceil x\rceil-1$.
On a donc bien

$$\boxed{x\leqslant\lceil x\rceil<x+1}.$$

Q2) a) On écrit (on sait que $u_k = \binom{n}{k} p^k q^{1-k} \neq 0$ puisque $p \in]0,1[$, et donc $q \in]0,1[$) :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{1-(k+1)}}{\binom{n}{k} p^k q^{1-k}} = \frac{p \, \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}}{q \, \frac{n!}{k!(n-k)!}} = \boxed{\frac{p(n-k)}{q(k+1)}}.$$

En utilisant que $u_k > 0$, puis que $q(k+1) > 0$, on écrit :

$$\begin{aligned} u_{k+1} \leqslant u_k \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{p(n-k)}{q(k+1)} \leqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad p(n-k) \leqslant q(k+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{pn - q \leqslant \underbrace{(p+q)}_{=1} k} \end{aligned}$$

Q3) a) En utilisant Q1 :

$$np - q \leqslant \underbrace{\lceil np - q \rceil}_{i_n} < np - q + 1.$$

Or $np - q = (n+1)p - 1 > -1$ puisque $n+1$ et p sont strictement positifs.
Et $np - q + 1 = (n+1)p < n+1$ puisque $p \in]0,1[$.
On obtient par transitivité $-1 < i_n < n+1$, et comme i_n est entier, $\boxed{i_n \in [\![0, n]\!]}$.

b) Pour $k \in [\![i_n, n]\!]$ on a $k \geqslant i_n \geqslant np - q$, et donc d'après Q2b : $u_{k+1} \leqslant u_k$. Ainsi :

$$u_{i_n} \geqslant u_{i_n+1} \geqslant \ldots \geqslant u_{n-1} \geqslant u_n.$$

Pour $k \in [\![0, i_n - 1]\!]$ on a $k \leqslant i_n - 1 < np - q$, et donc d'après Q2b : $u_{k+1} > u_k$. Ainsi :

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_{i_n - 1} < u_{i_n}.$$

On en déduit que $\boxed{m_n = u_{i_n} = \max\{u_0, \ldots, u_n\}}$.

Q4) a) D'après Q1, et en utilisant que $np > 0$ pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} &np - q \leqslant \lceil np - q \rceil < np \overbrace{- q + 1}^{=p} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{q}{np} \leqslant \frac{i_n}{np} \leqslant 1 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{q}{np} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{i_n}{np} = 1$, ie. que $\boxed{i_n \underset{n\to+\infty}{\sim} np}$.
De même, en utilisant que $nq > 0$ pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} &np - q \leqslant i_n \leqslant np + p \\ &\Rightarrow \overbrace{n - (np - q)}^{n(1-p)+q} \geqslant n - i_n \geqslant \overbrace{n - (np + p)}^{n(1-p)-p} \\ &\Rightarrow nq + q \geqslant n - i_n \geqslant nq - p \\ &\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geqslant \frac{n - i_n}{nq} \geqslant 1 - \frac{p}{nq} \end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{p}{nq} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, $\boxed{n - i_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nq}$.

b) Formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}}$.
On écrit, en utilisant que $i_n \to +\infty$ et $n - i_n \to +\infty$ d'après Q4a puisque $np \to +\infty$ et $nq \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
m_n = u_{i_n} &= \underbrace{\binom{n}{i_n}}_{\frac{n!}{i_n!\,(n-i_n)!}} \; p^{i_n} q^{n-i_n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}}{\sqrt{2\pi i_n}\, i_n^{i_n}\, e^{-i_n}\, \sqrt{2\pi(n-i_n)}\,(n-i_n)^{n-i_n}\, e^{-(n-i_n)}}\, p^{i_n} q^{n-i_n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{i_n}\,\sqrt{n-i_n}}\, \frac{n^n\, p^{i_n}\, q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\,(n-i_n)^{n-i_n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{np}\,\sqrt{nq}}\, \frac{n^n\, p^{i_n}\, q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\,(n-i_n)^{n-i_n}} \quad \text{d'après Q4a} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}}{\sqrt{n}}\, \frac{n^n\, p^{i_n}\, q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\,(n-i_n)^{n-i_n}}}
\end{aligned}$$

Q5) a) On écrit

$$f(x) = (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \boxed{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

b) Remarquons que la fonction f est définie pour $x > -1$.
Utilisons encore un fois l'inégalité $np - q \leqslant i_n < np \underbrace{- q + 1}_{p}$.

En notant que chaque produit se fait par un nombre strictement positif, on écrit :

$$\begin{aligned}
& n > \frac{q}{p} \\
\Rightarrow\quad & np - q > 0 \\
\Rightarrow\quad & i_n \geqslant np - q > 0 \\
\Rightarrow\quad & i_n > 0 \\
\Rightarrow\quad & i_n - np > -np \\
\Rightarrow\quad & \frac{i_n - np}{np} > -1
\end{aligned}$$

et on a

$$f\left(\frac{i_n - np}{np}\right) = f\left(\frac{i_n}{np} - 1\right) = \frac{i_n}{np} \ln\left(\frac{i_n}{np}\right).$$

De même

$$\begin{aligned}
& n > \frac{p}{q} \\
\Rightarrow\quad & n \underbrace{q}_{1-p} - p > 0 \\
\Rightarrow\quad & n > (n+1)p \\
\Rightarrow\quad & n - i_n > n - (n+1)p > 0 \\
\Rightarrow\quad & n - i_n > 0 \\
\Rightarrow\quad & n(p+q) - i_n > 0 \\
\Rightarrow\quad & np - i_n > -nq \\
\Rightarrow\quad & \frac{np - i_n}{nq} > -1
\end{aligned}$$

et on a

$$f(\frac{np-i_n}{nq}) = (\frac{np-i_n}{nq}+1)\ln(\frac{np-i_n}{nq}+1) = \frac{n-i_n}{nq}\ln(\frac{n-i_n}{nq}).$$

Pour $n > \max\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\}$ on a donc

$$\begin{aligned}
e^{-npf(\frac{i_n-np}{np})-nqf(\frac{np-i_n}{nq})} &= e^{-i_n\ln(\frac{i_n}{np})-(n-i_n)\ln(\frac{n-i_n}{nq})} \\
&= e^{-i_n(\ln(i_n)-\ln(n)-\ln(p))-(n-i_n)(\ln(n-i_n)-\ln(n)-\ln(q))} \\
&= e^{-i_n\ln(i_n)}\ e^{-(n-i_n)\ln(n-i_n)}\ e^{i_n\ln(p)}\ e^{(n-i_n)\ln(q)}\ e^{n\ln(n)} \\
&= \frac{1}{i_n^{i_n}}\ \frac{1}{(n-i_n)^{n-i_n}}\ p^{i_n}\ q^{n-i_n}\ n^n \\
&= \boxed{\frac{p^{i_n}\ q^{n-i_n}\ n^n}{i_n^{i_n}\ (n-i_n)^{n-i_n}}}
\end{aligned}$$

c) Notons que l'inégalité $np-q \leqslant i_n < np-q+1$ prouve $-q \leqslant i_n - np < 1-q$ donc $i_n - np$ est borné, et comme $\frac{1}{n} \to 0$, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{i_n-np}{n} = 0.$$

D'après Q5a et Q5b on a (puisque $\frac{i_n-np}{np}$ et $\frac{np-i_n}{nq}$ tendent tous deux vers 0)

$$\begin{aligned}
\frac{n^n\ p^{i_n}\ q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\ (n-i_n)^{n-i_n}} &= e^{-npf(\frac{i_n-np}{np})-nqf(\frac{np-i_n}{nq})} \\
&= e^{-np(\frac{i_n-np}{np}+\frac{(\frac{i_n-np}{np})^2}{2}+o((\frac{i_n-np}{np})^2))-nq(\frac{np-i_n}{nq}+\frac{(\frac{np-i_n}{nq})^2}{2}+o((\frac{np-i_n}{nq})^2))} \\
&= e^{-\frac{(i_n-np)^2}{2np}-\frac{(np-i_n)^2}{2nq}+o(\frac{(i_n-np)^2}{np})+o(\frac{(np-i_n)^2}{nq})} \\
&= e^{-\overbrace{\frac{p+q}{2pq}}^{=1}\frac{(i_n-np)^2}{n}+o(\frac{(i_n-np)^2}{np})+o(\frac{(np-i_n)^2}{nq})}
\end{aligned}$$

et puisque $\frac{(i_n-np)^2}{n} \to 0$ (car $(i_n-np)^2$ est borné puisque $i_n - np$ l'est), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\ p^{i_n}\ q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\ (n-i_n)^{n-i_n}} = e^0 = 1.$$

Ainsi $\frac{n^n\ p^{i_n}\ q^{n-i_n}}{i_n^{i_n}\ (n-i_n)^{n-i_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ (puisque $1 \in \mathbb{R}^*$), et en utilisant Q4b

$$m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}}.$$