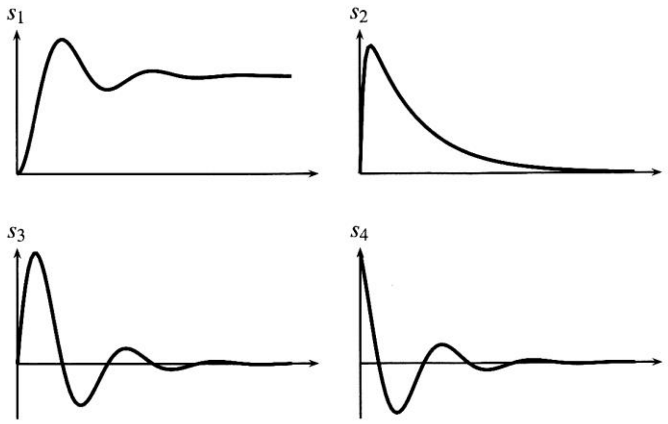
TRAVAUX DIRIGÉS OS11
Filtrage analogique du signal

Niveau 1

Exercice 1. Identification graphique d'un système

Préciser sans calcul le caractère passe-bas ou passe-haut ou passe-bande, premier ou second ordre, des systèmes dont on présente la réponse indicielle en fonction du temps (on ne demande pas d'identifier la fonction de transfert).



*Exercice 2. Action d'un filtre passe-haut sur un signal

On considère un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est $f_C = 100$ Hz. Donner l'allure du signal recueilli en sortie du filtre si on envoie en entrée :

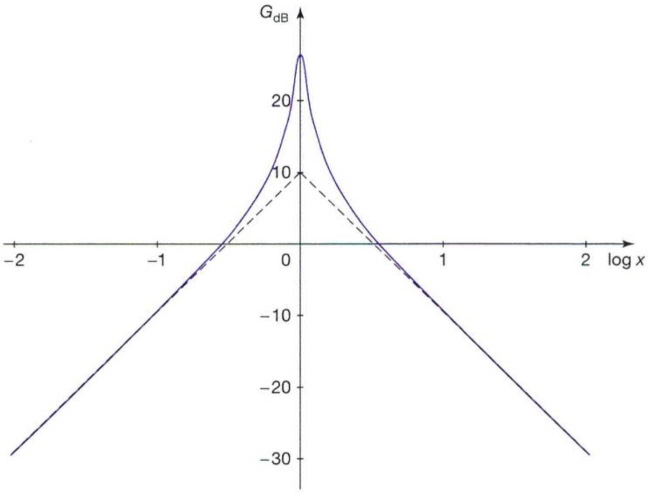
1. une sinusoïde d'amplitude 4 V, centrée autour de 1 V, de fréquence 2 kHz ;
2. une sinusoïde d'amplitude 4 V, centrée autour de 0 V, de fréquence 2 kHz ;
3. un créneau d'amplitude 4 V, centrée autour de 1 V, de fréquence 2 kHz ;
4. un créneau d'amplitude 4 V, centrée autour de 0 V, de fréquence 2 kHz.

*Exercice 3. Lecture d'un diagramme de Bode

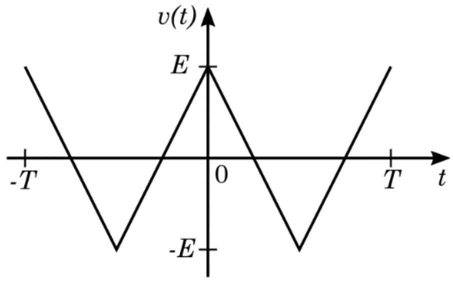
Soit un filtre linéaire dont le diagramme de Bode est donné sur la figure ci-dessous, où on a posé $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 étant une pulsation donnée.

1. Quelle est la nature du filtre ?
2. Donner les pentes aux basses et hautes pulsations ? Quel est l'ordre du filtre ?

3. Quel est le gain maximal en dB ? En déduire le gain maximal.
4. Le facteur de qualité est-il supérieur ou inférieur à 1 ? Que dire de la sélectivité du filtre ?



*Exercice 4. Spectre d'un signal triangulaire



On considère le signal triangulaire $v(t)$ d'amplitude E et de période T.
Un formulaire donne les coefficients de Fourier V_k suivants :

- Si k est un entier pair non nul : $V_k = 0$;
- Si k est impair : $V_k = \dfrac{8E}{k^2\pi^2}$

1. Quelle est la valeur de V_0 ?
2. On note v_k le terme de rang k de la décomposition en série de Fourier. Soit P_k le rapport entre la moyenne quadratique de v_k et celle du fondamental : $P_k = \dfrac{\langle v_k^2 \rangle}{\langle v_1^2 \rangle}$. Exprimer P_k en fonction de k.

   Rappel mathématique : $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
3. Pour combien de raies spectrales a-t-on $P_k > 10^{-3}$?
4. Représenter le spectre de $v(t)$ en ne prenant en compte que les raies retenues ci-dessus.

Niveau 2

*Exercice 5. Influence de la charge sur la bande passante d'un filtre

On considère le filtre RC passe-bas de la figure 1, avec $C = 1,0\ \mu\text{F}$ et $R = 1,0\ \text{k}\Omega$.

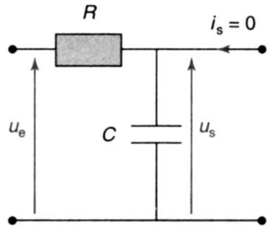


Figure 1

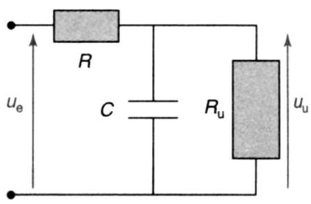


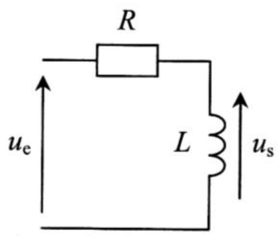
Figure 2

1. Calculer la constante de temps τ du circuit RC, la fréquence de coupure f_C du filtre et la bande passante Δf. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ et calculer la valeur maximale H_{max} de son module.

La sortie est fermée par un résistor de résistance $R_u = 4,0\ \text{k}\Omega$ (cf. figure 2).

2. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H'}(j\omega)$.
3. Exprimer puis calculer la valeur maximale H'_{max} du module de la fonction de transfert, la constante de temps τ' du circuit, la fréquence de coupure f'_C du filtre et la bande passante $\Delta f'$.
4. Quelle est la propriété vérifiée par le produit $H'_{\max}\Delta f'$? En déduire comment sont modifiées les propriétés du filtre si on diminue la résistance R_u.

*Exercice 6. Filtre RL

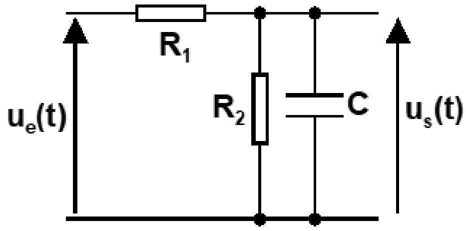


On considère le filtre RL ci-contre.

1. Déterminer la nature du filtre en étudiant le comportement du circuit aux limites de fréquences.
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}}$ puis la mettre sous la forme $\underline{H}(jx) = H_0 \dfrac{jx}{1+jx}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_C}$.

   Identifier les expressions de H_0 et ω_C.
3. Quelles sont les équations des asymptotes en BF et en HF ? Tracer le diagramme de Bode asymptotique.
4. Calculer le gain et la phase pour la pulsation de coupure ω_C.
5. Esquisser l'allure des courbes réelles.
6. À partir de la fonction de transfert, déterminer l'équation différentielle reliant $u_S(t)$ et $u_e(t)$.

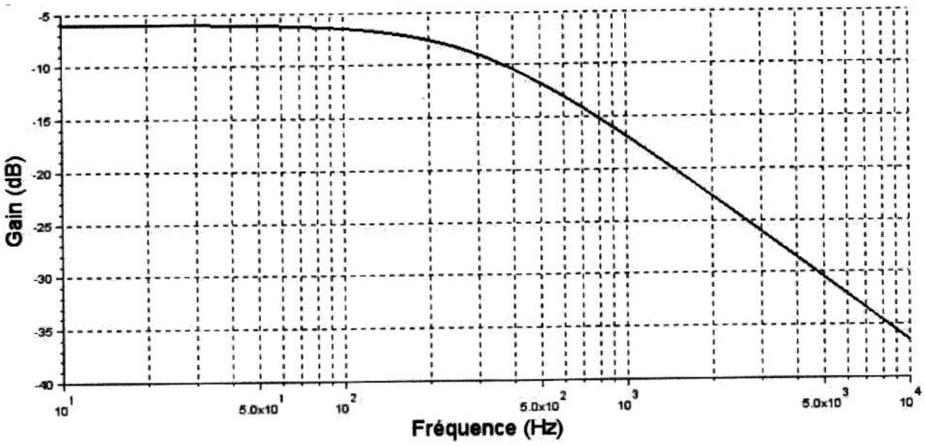
Exercice 7. Filtre passif

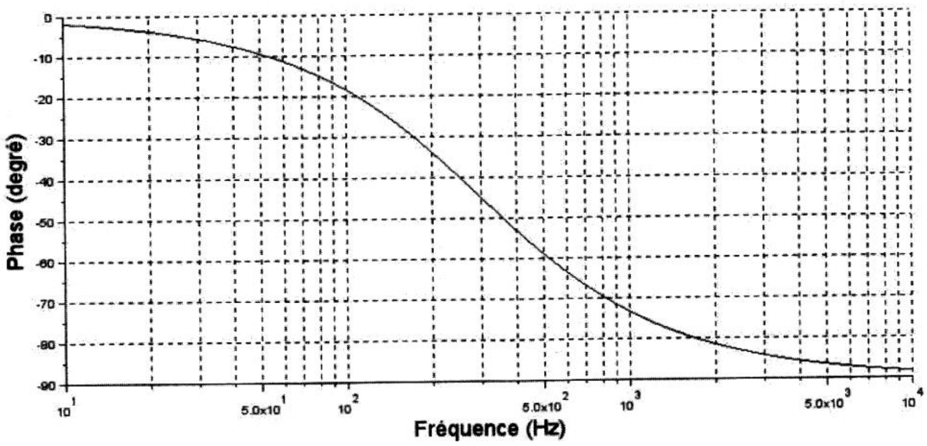


1. Par un raisonnement physique, déterminer les comportements du filtre en BF et en HF, puis en déduire sa nature.
2. Déterminer la fonction de transfert et la mettre sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A_0}{1 + j\omega\tau}$ en précisant les expressions de A_0 et τ. Que représente A_0 ?
3. Dans le cas où $R_1 = R_2 = R$, exprimer la fonction de transfert $\underline{H}(jx)$ avec $x = RC\omega$.
4. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure ω_C en fonction de R et C.

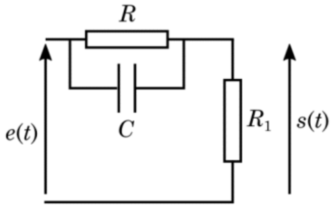
Le diagramme de Bode réel du filtre est représenté ci-dessous.

5. Déterminer les équations des asymptotes et les représenter sur la figure.
6. Déterminer la valeur du produit RC.
7. Quel est le comportement du filtre en hautes fréquences ?
8. La tension à l'entrée du filtre est $u_E(t) = E + U_{em}\cos(2\pi f_e t)$ avec $E = 5\ \text{V}$, $U_{em} = 10\ \text{V}$. Déterminer la tension de sortie $u_S(t)$ pour $f_e = 1\ \text{kHz}$ puis pour $f_e = 10\ \text{kHz}$. Commenter.





Exercice 8. Filtre correcteur de phase



1. Montrer que la fonction de transfert du filtre ci-contre s'écrit $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = A\dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$. Préciser les expressions de A, ω_0 et ω_1. Pour la suite, on prendra $R_1 = \dfrac{R}{9}$.

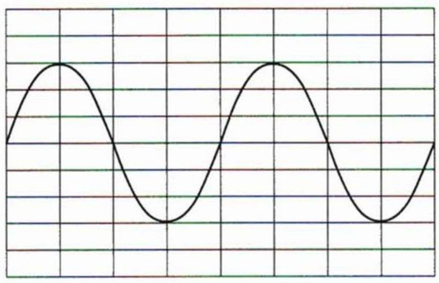
La fonction de transfert s'exprime comme un produit de trois transmittances élémentaires : $\underline{H}(j\omega) = A \cdot \underline{H_0}(j\omega) \cdot \underline{H_1}(j\omega)$.

2. Tracer, en fonction de $\log(\omega)$, les diagrammes de Bode asymptotiques des trois transmittances élémentaires, en déterminant au préalable les équations des asymptotes.
3. En déduire, par une méthode graphique, le diagramme de Bode de $\underline{H}(j\omega)$.
4. Esquisser l'allure des courbes réelles.

Exercice 9. Filtrage d'un signal électrique

On étudie un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = -\dfrac{1}{1+3jRC_1\omega + R^2C_1C_2(j\omega)^2}$

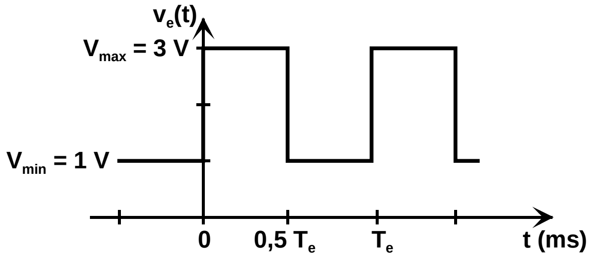
1. Par une étude aux limites, déterminer la nature de ce filtre.
2. Écrire la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0\dfrac{1}{1+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ et préciser les expressions de H_0, ξ et ω_0 en fonction de R, C_1 et C_2.
3. Montrer alors qu'il est possible d'obtenir les valeurs des capacités connaissant la valeur de la résistance R et les caractéristiques du filtre. Calculer les valeurs de C_1 et C_2 avec : $R = 1{,}00\ \text{k}\Omega$, facteur de qualité $Q = 0{,}707$ et fréquence propre $f_0 = 20{,}0\ \text{kHz}$.
4. Le chronogramme d'un signal d'entrée particulier est relevé à l'oscilloscope avec les calibres suivants : verticalement 1 V par division (le 0 est au milieu), horizontalement 12,5 µs par division. Quelle(s) est(sont) la(es) fréquence(s) de ce signal d'entrée et du signal de sortie correspondant ?



5. Déterminer les caractéristiques du signal de sortie et représenter sur un même chronogramme les signaux d'entrée et de sortie.

Exercice 10. Tension créneau à l'entrée d'un filtre

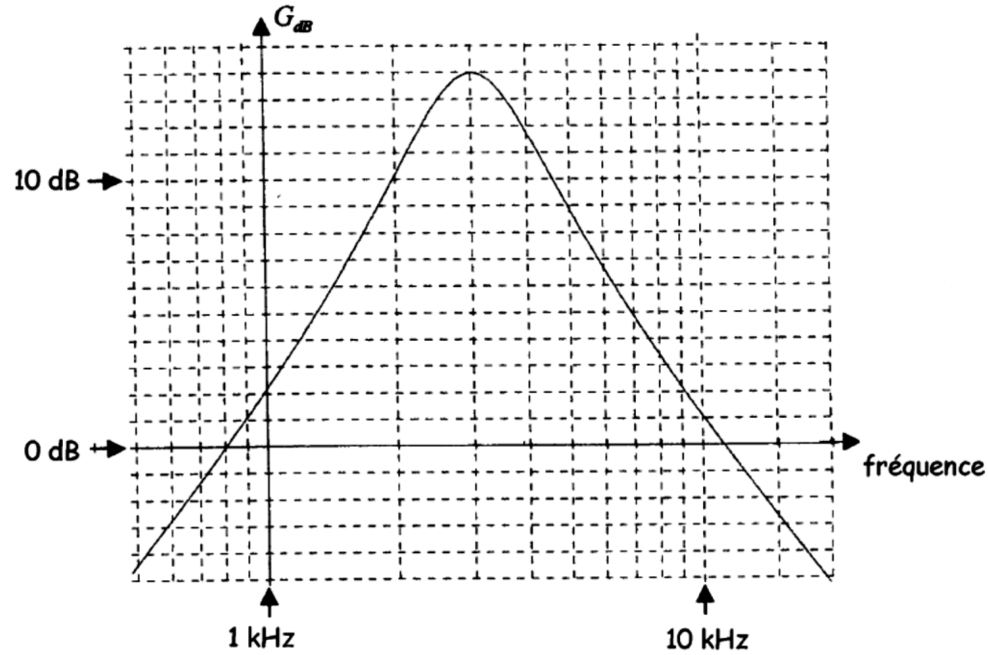
On considère la tension créneau $v_e(t)$ de fréquence $f_e = 3\ \text{kHz}$, représentée ci-dessous et telle que : $v_e(t) = V_{e0} + \frac{4}{\pi}\cos(2\pi f_e t) + \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi 3 f_e t) + \ldots$



1. Que représente V_{e0} ? L'exprimer en fonction de V_{min} et V_{max}. La calculer.
2. Préciser les valeurs numériques de la fréquence et de l'amplitude de chaque composante de $v_e(t)$.

La tension $v_e(t)$ est appliquée à l'entrée d'un filtre passe-bande dont la courbe de gain est représentée ci-dessous.

3. Déterminer et représenter graphiquement le gain maximal G_{dBmax}, la fréquence propre f_0 et la bande passante B de ce filtre. En déduire le coefficient de qualité Q.



4. Déterminer les expressions et calculer les valeurs numériques de l'amplitude de chaque composante de la tension de sortie $v_s(t)$.
5. Que dire de l'allure de la tension $v_s(t)$?
6. Que se passe-t-il si la fréquence propre du filtre est $f'_0 = 3f_0$?

SOLUTIONS

Exercice 1. Identification graphique d'un système

s_1 : Passe-bas (ordre 2), s_2 : Passe-bande (ordre 2), s_3 : Passe-bande (ordre 2), s_4 : Passe-haut (ordre 2)

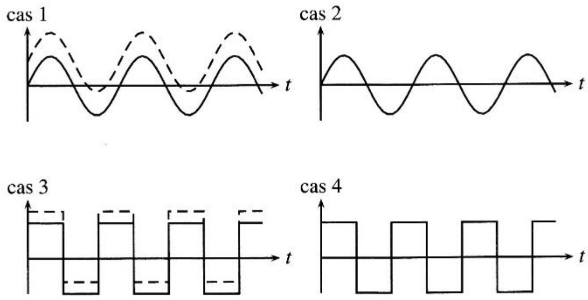
*Exercice 2. Action d'un filtre passe-haut sur un signal

Le filtre passe-haut laisse passer tous les signaux de fréquences supérieures à $f_C = 100\text{ Hz}$ et atténue, voire supprime tous les signaux de fréquences inférieures à $f_C = 100\text{ Hz}$.

Dans les cas 1 et 3, le signal d'entrée présente une composante continue (valeur moyenne) non nulle : celle-ci est supprimée par le filtre passe-haut.

Les composantes de fréquences 2 kHz et de fréquences supérieures sont transmises par le filtre.

Les allures de la tension d'entrée (pointillés) et de la tension de sortie (trait plein) sont représentées ci-contre.



*Exercice 3. Lecture d'un diagramme de Bode

1. À basses et hautes fréquences, le gain en dB tend vers $-\infty$: les signaux correspondant sont atténués. Seuls les signaux tels que la pulsation réduite x est proche de 1 sont transmis : c'est un filtre passe-bande.
2. On utilise les asymptotes tracées en pointillés.
   En BF : lorsque $\log(x)$ passe de -1 à 0 (ce qui correspond à une décade), le gain passe -10 dB à $+10$ dB : la pente est donc de $\boxed{+20\text{ dB/décade}}$.
   En HF : lorsque $\log(x)$ passe de 0 à 1 (ce qui correspond à une décade), le gain passe $+10$ dB à -10 dB : la pente est donc de $\boxed{-20\text{ dB/décade}}$.
   Les asymptotes passent de $+20$ dB/décade à -20 dB/décade : c'est un filtre du second ordre.
3. On mesure un gain maximal en dB $\boxed{G_{dB\max} \simeq 26\text{ dB}}$ soit un gain maximal $\boxed{H_{\max} = 10^{\frac{G_{dB\max}}{20}} \simeq 20}$.
4. Les asymptotes se croisent au-dessous de la courbe réelle : la résonance est aigüe, ce qui correspond à un facteur de qualité élevé : $\boxed{Q > 1}$. On a $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = \dfrac{1}{\Delta x} > 1$: la bande passante Δx est étroite et le filtre est assez sélectif.

*Exercice 4. Spectre d'un signal triangulaire

1. D'après le graphe temporel, le signal est à valeur moyenne nulle : $\boxed{V_0 = 0}$.

2. <u>Fondamental</u> : $v_1 = V_1\cos(\omega t)$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

   Moyenne quadratique : $\langle v_1^2\rangle = \langle V_1^2\cos^2(\omega t)\rangle = V_1^2\langle\cos^2(\omega t)\rangle$

   $$\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}dt + \frac{1}{2T}\int_0^T\cos(2\omega t)dt$$

   $$\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T2\omega}\left[\sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\sin(2\omega T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\sin(4\pi) = \frac{1}{2}$$

   $$\langle v_1^2\rangle = \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{1}{2}\frac{64E^2}{\pi^4} = \frac{32E^2}{\pi^4}$$

➤ <u>Harmonique de rang k impair</u> : $v_k = V_k\cos(k\omega t)$

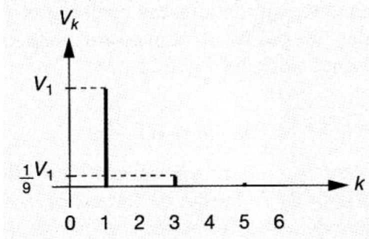
   Moyenne quadratique : $\langle v_k^2\rangle = \langle V_k^2\cos^2(k\omega t)\rangle = V_k^2\langle\cos^2(k\omega t)\rangle = \dfrac{1}{2}V_k^2 = \dfrac{32E^2}{k^4\pi^4}$

➤ <u>Harmonique de rang k pair</u> : $v_k = 0$ et $\langle v_k^2\rangle = 0$

➤ <u>Rapport P_k</u> : $\boxed{P_k = \dfrac{\langle v_k^2\rangle}{\langle v_1^2\rangle} = \begin{cases}\dfrac{1}{k^4} \text{ si } k \text{ impair}\\ 0 \text{ si } k \text{ pair}\end{cases}}$

3. On a $P_k > 10^{-3}$ si $\dfrac{1}{k^4} > 10^{-3} \Leftrightarrow k^4 < 10^3$ soit $\boxed{k < 10^{\frac{3}{4}} = 5{,}6}$

   Il n'y a que <u>trois raies</u> qui vérifient cette condition :
   - $k = 1$: le <u>fondamental</u> ;
   - $k = 3$: <u>l'harmonique de rang 3</u>
   - $k = 5$: <u>l'harmonique de rang 5</u>



4. On trace le fondamental d'amplitude V_1, l'harmonique de rang 3, d'amplitude $\dfrac{V_1}{9}$ et l'harmonique de rang 5 d'amplitude $\dfrac{V_1}{25}$.

*Exercice 5. Influence de la charge sur la bande passante d'un filtre

1. $\boxed{\tau = RC = 1{,}0 \text{ ms}}$ et $\boxed{f_C = \dfrac{1}{2\pi\tau} = 0{,}16 \text{ kHz}}$

   Bande passante d'un filtre passe-bas : $\boxed{\Delta f = [0; f_C] = 0{,}16 \text{ kHz}}$

   Fonction de transfert (cf. cours) : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$ donc $\boxed{H_{\max} = |\underline{H}(0)| = 1}$

2. Même circuit que pour l'exercice 7, donc :

   $\boxed{\underline{H}'(j\omega) = \dfrac{H'_{\max}}{1+j\omega\tau'}}$ avec $\boxed{\tau' = \dfrac{R\cdot R_u}{R+R_u}C}$ et $\boxed{H'_{\max} = \dfrac{R_u}{R+R_u}}$

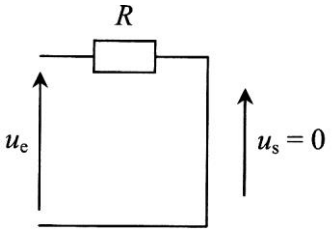
3. $\boxed{H'_{\max} = 0{,}80}$, $\boxed{\tau' = 0{,}80 \text{ ms}}$, $\boxed{f'_C = \dfrac{1}{2\pi\tau'} = 0{,}20 \text{ kHz}}$ et $\boxed{\Delta f' = [0; f'_C] = 0{,}20 \text{ kHz}}$

4. $H'_{\max}\Delta f' = \dfrac{R_u}{R+R_u}\cdot\dfrac{1}{2\pi\tau'} = \dfrac{R_u}{R+R_u}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{R+R_u}{R\cdot R_u C} = \dfrac{1}{2\pi RC} = cste$.

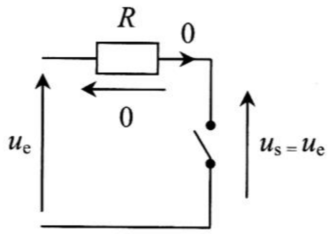
   Le produit « gain-bande passante » est <u>constant</u>. Si on diminue R_u, le gain diminue et la bande passante augmente (c'est ce qu'il s'est passé en passant de R_u ∞ à $R_u = 4{,}0\ \text{k}\Omega$).

*Exercice 6. Filtre RL

1. En BF, l'inductance se comporte comme un fil. Le schéma équivalent du circuit est :



En HF, l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert. Le schéma équivalent du circuit est :



➢ Le signal de sortie est nul pour les BF, non nul pour les HF : filtre <u>passe-haut</u>.

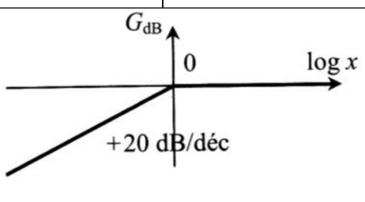
2. <u>Diviseur de tension</u> : $\underline{U_S} = \dfrac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L}+\underline{Z_R}}\underline{U_e} = \dfrac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{U_e}$

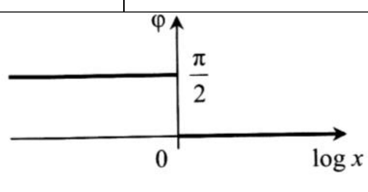
   <u>Fonction de transfert</u> : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}} = \dfrac{j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R}\omega} \Leftrightarrow \underline{H}(jx) = H_0\dfrac{jx}{1+jx}}$

   avec $x = \dfrac{L}{R}\omega = \dfrac{\omega}{\omega_C}$ soit $\boxed{\omega_C = \dfrac{R}{L}}$ et $\boxed{H_0 = 1}$

3. <u>Diagramme de Bode asymptotique</u>

Domaine de pulsation	$x \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll \omega_C$	$x \gg 1 \Leftrightarrow \omega \gg \omega_C$
Numérateur	jx	jx
Dénominateur	1	jx
$\underline{H}(jx)$	jx	1
Courbe de gain G_{dB}	Droite de pente +20 dB/décade	Droite horizontale à 0 dB
Courbe de phase φ	Droite horizontale à $+\dfrac{\pi}{2}$ rad	Droite horizontale à 0 rad



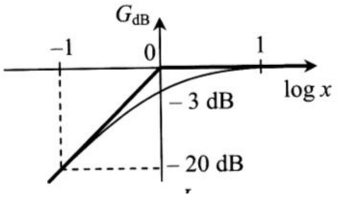


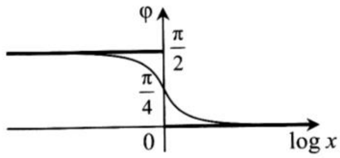
4. Pour la pulsation de coupure ω_C, i.e. $x = 1$, on a $\underline{H}(j) = \dfrac{j}{1+j}$

Gain : $G_{dB}(1) = 20\log\left|\underline{H}(j)\right| = 20\log\left|\dfrac{j}{1+j}\right| = 20\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ soit $\boxed{G_{dB}(1) = -3 \text{ dB}}$

Phase : $\varphi(1) = \arg\left(\underline{H}(j)\right) = \arg\left(\dfrac{j}{1+j}\right) = \arg(j) - \arg(1+j) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ et $\boxed{\varphi(1) = \dfrac{\pi}{4}}$

<u>Courbes réelles</u>





5. Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}} = \dfrac{j\dfrac{L}{R}\omega}{1+j\dfrac{L}{R}\omega} = \dfrac{\underline{u_S}(t)}{\underline{u_e}(t)}$

Produit en croix : $j\dfrac{L}{R}\omega\underline{u_e}(t) = \left(1+j\dfrac{L}{R}\omega\right)\underline{u_S}(t)$

Passage dans le domaine temporel : $\boxed{\dfrac{L}{R}\dfrac{u_e(t)}{dt} = u_s(t) + \dfrac{L}{R}\dfrac{u_s(t)}{dt}}$

Exercice 7. Filtre passif

1. Filtre passe-bas 2. $A_0 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ $\tau = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$ 3. $\underline{H}(jx) = \dfrac{1}{2+jx}$ 4. $\omega_C = \dfrac{2}{RC}$ 6. $RC = \dfrac{1}{\pi f_C} = 1{,}1$ ms 8. pour $f_e = 1$ kHz : $u_S(t) = 2{,}5 + 1{,}4\cos(2\pi f_e t - 1{,}3)$

pour $f_e = 10$ kHz : $u_S(t) = 2{,}5 + 0{,}14\cos(2\pi f_e t - 1{,}5)$

Exercice 8. Filtre correcteur de phase

1. $A = \dfrac{R_1}{R+R_1}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, $\omega_1 = \dfrac{R+R_1}{RR_1C}$

Exercice 9. Filtrage d'un signal électrique

1. Filtre passe-bas (ordre 2) 2. $H_0 = -1$, $\omega_0 = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$, $\xi = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}} = \dfrac{1}{2Q}$

3. $C_1 = 3{,}75$ nF $C_2 = 16{,}9$ nF 4. $T_e = T_s = 50$ µs $f_e = \dfrac{1}{T_e} = 20 \text{ kHz} = f_0$

5. $s(t) = 2{,}12\sin(2\pi f_0 t + 1{,}5)$

Exercice 10. Tension créneau à l'entrée d'un filtre

1. $V_{e0} = \dfrac{V_{max} + V_{min}}{2} = 2$ V 3. $Q = \dfrac{f_0}{B} \simeq 1{,}5$

4. $v_S(t) = 6{,}4\cos(2\pi f_e t + \varphi_1) + 0{,}53\cos(2\pi 3 f_e t + \varphi_3)$ 5. $v_S(t) \simeq 6{,}4\cos(2\pi f_e t + \varphi_1)$ sinusoïdale