# 21. Développements limités, méthodologie

## I. Relations de comparaison

### *I.1. Définitions*

**Définition.** Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou au bord de $I$. Alors, s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $g$ ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$ (ce qui est en général toujours vrai), on a :

- $f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- $f(x) = o_a(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $f(x) = O_a(g(x)) \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $a$.

m C'est donc en général le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ que l'on étudie au voisinage de $a$ quand on veut établir des relations de comparaison.

### *I.2. Règles de calcul pour les o et O*

**Proposition.** Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou au bord de $I$. Alors :
- Si $f(x) = o_a(g(x))$ et $g(x) = o_a(h(x))$, alors $f(x) = o_a(h(x))$.
- Si $f(x) = o_a(g(x))$, alors $f(x)h(x) = o_a(g(x)h(x))$.
- Si $f(x) = o_a(h(x))$ et $g(x) = o_a(h(x))$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) + \mu g(x) = o_a(h(x))$.

m On a les mêmes propriétés avec les $O$. L'idée générale des manipulations de $o$ et de $O$ et de transformer les sommes en « terme dominant » $+o(\ldots)$ pour trouver quels sont les termes les plus importants dans l'expression et quels sont les termes négligeables (et leur ordre de grandeur).

**Exercice d'application 1.** Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + x^2)$.

1) Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{x} + o_0(1)$.

2) Montrer que $f(x) = 2\ln(x) + o_{+\infty}(1)$.

3) Montrer en utilisant le faut que $\ln(1 + u) \sim_0 u$ que $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 + o_0(x^2)$ et que $f(x) = 2\ln(x) + \dfrac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

### *I.3. Comparaisons usuelles*

**Proposition.** Pour $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ et $x^\beta = o_0(x^\alpha)$.

**Proposition. Croissances comparées.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ :

- $x^\alpha = o_{+\infty}(e^{\beta x})$.
- $(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$.
- $x^\beta(\ln(x))^\alpha = o_0(1)$.

**Proposition.** Si $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0) \sim_0 f'(0)x$. On a en particulier les équivalents suivants :

- $\sin(x) \sim_0 x$.
- $\arcsin(x) \sim_0 x$.
- $\ln(1+x) \sim_0 x$.
- $\tan(x) \sim_0 x$.
- $\arctan(x) \sim_0 x$.
- $e^x - 1 \sim_0 x$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$.
- $\cos(x) - 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$.

### *I.4. Propriétés des équivalents*

**Proposition.** On a $f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_a(g(x))$.

(m) Autrement dit, deux fonctions équivalentes en $a$ sont égales en $a$ à une quantité négligeable par rapport à ces fonctions près.

**Proposition.** $\sim_a$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions. On a de plus que si $f(x) \sim_a g(x)$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

**Proposition.** Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $f$ et $g$ sont de même signe au voisinage de $a$.

**Proposition.** Si $f, g, h$ vérifient $f \leq g \leq h$ au voisinage de $a$ et que $f(x) \sim_a h(x)$, alors $g(x) \sim_a f(x)$.

**Proposition.** On a le droit de réaliser les opérations suivantes sur les équivalents :

- *Produit d'équivalents.* Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $h(x) \sim_a i(x)$, alors $f(x)h(x) \sim_a g(x)i(x)$.
- *Quotient d'équivalents.* Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $h(x) \sim_a i(x)$ avec $h(x)$ qui ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$ où $V$ est un voisinage de $a$, alors $\dfrac{f(x)}{h(x)} \sim \dfrac{g(x)}{i(x)}$.
- *Puissances fixées entières d'équivalents.* Si $f(x) \sim_a g(x)$ avec $f(x)$ qui ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$ où $V$ est un voisinage de $a$ et $p \in \mathbb{Z}$, alors $(f(x))^p \sim_a (g(x))^p$.
- *Puissances fixées d'équivalents.* Si $f(x) \sim_a g(x)$ avec $f(x)$ strictement positive sur un voisinage de $a$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(f(x))^\alpha \sim_a (g(x))^\alpha$.
- *Utilisation des équivalents en une autre variable.* Si $f(y) \sim_b g(y)$ et que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, alors $f(u(x)) \sim_a g(u(x))$.

(m) Quand on demande de calculer un équivalent, on peut donc calculer un équivalent de chaque terme et ensuite faire le produit/quotient des équivalents. **Attention, on ne peut pas faire de somme ou de composition d'équivalents !** Pour cette raison, quand on demande un équivalent d'une fonction, on ne laisse en général jamais le résultat sous forme d'une somme (sinon cela veut dire qu'on peut encore simplifier le résultat et trouver un équivalent plus simple).

(m) On peut faire des produits et des quotients d'équivalents. On peut également faire des puissances **fixées** d'équivalents (autrement dit quand on élève à une puissance qui ne dépend pas de $x$). Si on veut un équivalent (ou la limite) d'une fonction de la forme $(f(x))^{h(x)}$, il faut écrire $(f(x))^{h(x)} = e^{h(x)\ln(f(x))}$ et faire un développement limité (ou trouver la limite) de $h(x)\ln(f(x))$ au voisinage de $a$.

**Exercice d'application 2.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(m) On ne peut en général **PAS** composer des équivalents (par exemple avec la fonction exponentielle, $f(x) \sim g(x) \nRightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$) ou faire des sommes d'équivalents.

**Exercice d'application 3.** Vérifier que $x+1 \sim_{+\infty} x$ mais que $e^{x+1} \not\sim_{+\infty} e^{x}$.

**Exercice d'application 4.** Trouver $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ et que $f(x)+h(x) \not\sim_{+\infty} g(x)+h(x)$.

## II. Suites

(m) Les définitions des relations de comparaison au voisinage de $+\infty$ s'appliquent aux suites à valeurs complexes de la même manière. On a donc si $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ que :

- $u_n \sim v_n$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
- $u_n = o(v_n)$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- $u_n = O(v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée à partir d'un certain rang.

**Exercice d'application 5. Q**ue pensez vous des énoncés suivants ? *Faire une preuve si le résultat est vrai, donner un contre exemple s'il est faux.*

1) Si $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{2}{n}$, alors $u_n + v_n \sim \dfrac{3}{n}$.
2) Si $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, alors $u_n + v_n \sim \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.
3) Si $u_n \sim \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n \sim \dfrac{1}{n}$, alors $u_n - v_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.

**Proposition.** On a les comparaisons suivantes (quand $n$ tend vers l'infini) :

- $n! = o(n^n)$.
- $\forall a > 1,\ a^n = o(n!)$.
- $\forall a > 1,\ \forall b \in \mathbb{R},\ n^b = o(a^n)$.
- $\forall b > 0,\ \forall c \in \mathbb{R},\ (\ln(n))^c = o(n^b)$.

(m) Les deux derniers points sont connus sous le nom de croissances comparées. Ces échelles de comparaisons nous permettent de voir parmi les suites de références lesquelles tendent le plus vite vers l'infini.

**Proposition. Formule de Stirling.** $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$.

**Proposition. Équivalent de la série harmonique.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

**Exercice d'application 6.** Déterminer les équivalents des suites suivantes :

1) $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3$.

2) $v_n = \tan\left(\frac{3}{\sqrt{n+2}}\right)$.

3) $w_n = \ln\left(1 + \sin^2\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

**Exercice d'application 7.** Déterminer les équivalents des suites suivantes :

1) $u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{\ln^3(n)}$.

2) $v_n = \dfrac{n! + n^3 \ln^4(n) - 5^n}{-e^n + n^n + \sqrt{2\pi n}}$.

3) $w_n = \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{3n^2 - 2\ln^4(n)}}$.

4) $x_n = \ln(2^n + n^2) - \sqrt{n+2}$.

5) $y_n = \left(\cos\left(\frac{2}{n}\right) - 1 + 2\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3$.

m Quand on a une forme indéterminée dans une limite, on cherche en général un équivalent simple de la suite et on cherche la limite de cet équivalent. Cela donne alors la limite de la suite de départ (deux suites équivalentes ont la même limite si l'une des deux admet une limite).

**Exercice d'application 8.** Déterminer les limites des suites suivantes.

1) $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

2) $v_n = n \times \sqrt{\ln\left(1 + \frac{3}{n^2+1}\right)}$.

## III. Développements limités

### *III.1. Définition*

**Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ dans $I$ ou au bord de $I$. On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a (abrégé en $DL_n(a)$)si il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(a + x) = P(x) + o(x^n).$$

$P$ est appelé partie régulière du $DL_n(a)$. *On note ici et dans la suite $o(\cdot) = o_0(\cdot)$ pour alléger les notations.*

*III.2. Propriétés des développements limités*

**Proposition.** Si $f$ admet un $DL_n(a)$, alors pour tout $p \leq n$, $f$ admet un $DL_p(a)$ obtenu en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à $p$ dans le développement limité à l'ordre $n$.

**Théorème.** Si $f$ admet un $DL_n(a)$, alors ce développement limité est unique.

(m) Ce résultat couplé avec la formule de Taylor-Young est très important pour calculer les dérivées d'une fonction si on connait son développement limité (voir exercice d'application 5). Il permet également de démontrer qu'au voisinage de 0, la partie régulière d'un $DL_n(0)$ d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair et que la partie régulière d'un $DL_n(0)$ d'une fonction impaire ne contient que des termes de degré impair.

*III.3. Premiers développements limités*

*III.4. Développements limités et dérivabilité*

**Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :

- $f$ admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $f$ est continue en $a$.
- $f$ admet un $DL_1(a)$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.

**Théorème. De Taylor-Young.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Alors, $f$ admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + o(x^n).$$

**Remarque :** En appliquant ce résultat en $x - a$, on obtient sous les mêmes hypothèses :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

(m) La formule de Taylor-Young est souvent utilisée pour justifier l'existence d'un développement limité et pour faire le lien entre le développement limité et les dérivées de la fonction.

**Exercice d'application 9.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : x \mapsto (\ln(1+x))^n$.

1) Justifier que $f$ admet un $DL_n(0)$.

2) En utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1+x)$, montrer que $f(x) = x^n + o(x^n)$.

3) En déduire les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

*III.5. Développements limités usuels en 0*

(m) **Les développements limités suivants sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sont à connaitre par coeur, à savoir écrire sans réflexion à l'ordre 3 et à savoir redémontrer rapidement :**

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ et $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.
- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ et $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
- $\text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ et $\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$.
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$.
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} x^k + o(x^n)$.

*III.6. Intégration des DLs*

**Théorème.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet un $DL_n(a)$ de la forme $f(a+x) = P(x) + o(x^n)$. Alors, si $F$ est une primitive de $f$, $F$ admet un $DL_{n+1}(a)$ de la forme :

$$F(a+x) = F(a) + \int_0^x P(t)dt + o(x^{n+1}).$$

*III.7. Développements limités ailleurs qu'en 0*

m Par définition, étudier le $DL_a(n)$ de $f(x)$ revient à faire le $DL_0(n)$ de $f(a+x)$. On se ramène donc à ce cas en utilisant les DLs usuels en 0.

**Exercice d'application 10.** Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_2(1)$ de $\ln(x)$
2) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\cos(x)$.
3) $DL_3(2)$ de $e^x$.
4) $DL_2(3)$ de $\ln(x)$.
5) $DL_2(2)$ de $\sqrt{x}$.

## IV. Opérations sur les DLs

### *IV.1. Lien entre développements limités et équivalents*

(m) Pour obtenir un équivalent de $f(x)$ en 0, il faut faire un développement limité de $f(x)$ en 0 jusqu'au premier terme non nul. Ainsi, si $f(x) = a_j x^j + o(x^j)$ avec $a_j \neq 0$, on a donc $f(x) \sim_0 a_j x^j$.

**Exercice d'application 11.**

1) Déterminer un équivalent de $3\sin(x)$ en 0.

2) Déterminer un équivalent de $2\tan(x) - 2x$ en 0.

3) Déterminer un équivalent de $e^x - 1 - x$ en 0.

### *IV.2. Sommes et produits de développements limités*

(m) Pour obtenir un développement limité à l'ordre $n$, on a le droit de faire des sommes et des produits de développements limités en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à $n$.

**Exercice d'application 12.** Déterminer le $DL_4(0)$ de $\sin(x) + 2\cos(x)$.

(m) Pour des produits de développements limités, on procède à une étude de l'ordre **avant** de calculer pour ne pas faire trop de calculs. Quand on effectue le développement limité de $f(x) \times g(x)$ à l'ordre $n$ en 0, on regarde les premiers ordres des développements limités de $f(x)$ et $g(x)$. Si $f(x) = a_j x^j + \ldots$ et $g(x) = a_k x^k + \ldots$, alors il suffit de faire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre $n-k$ et celui de $g(x)$ à l'ordre $n-j$. On ne fait ainsi apparaitre que des termes d'ordres inférieurs ou égaux à $n$. *Si on effectue les DLs de $f(x)$ et $g(x)$ à l'ordre $n$, alors on écrit des termes d'ordres strictement plus grands que $n$ que l'on devra tronquer à la fin. Le résultat sera juste mais les calculs longs...*

**Exercice d'application 13.** Pour chacun des développements limités suivants, déterminer à quel ordre faire chacun des développements limités et les effectuer.

1) $DL_2(0)$ de $\ln(1+x) \times \cos(x)$.

2) $DL_4(0)$ de $x^2 \ln(1+x)$.

3) $DL_3(0)$ de $\sin(x) \times \tan(x)$.

### *IV.3. Composition des développements limités*

(m) On peut composer des développements limités en prenant garde en quelle valeur on effectue le développement limité de chacune des fonctions. En général, quand on veut le développement limité de $g(f(x))$, on pose $u = f(x)$ et on vérifie que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ pour justifier que l'on peut composer les développements limités. On peut alors effectuer le développement limité de $g(u)$ et remplacer ensuite les $u = f(x)$ par le développement limité de $f(x)$ en 0.

(m) Pour réaliser le $DL_n(0)$ de $g(f(x))$, on effectue en général le DL de $f(x)$ jusqu'à l'ordre $n$ et pour savoir à quel ordre faire le développement limité de $g$, on regarde le terme de plus bas degré du DL de $f$, que l'on visualise sur l'équivalent de $f(x)$. Si $f(x) \sim_0 a_j x^j$, on effectue le développement limité de $g(u) = \ldots + o(u^k)$ jusqu'à l'ordre $k$ où $k$ est le premier entier tel que $jk \geq n$. On remplace alors les $u$ par le DL de $f(x)$ et on tronque le DL de $g(f(x))$ à l'ordre $n$.

(m) Quand on veut effectuer le $DL_n(0)$ de $(f(x))^k$, on effectue le $DL_n(0)$ de $f(x) = a_j x^j + \ldots + a_n x^n + o(x_n)$ et on développe le produit $(a_j x^j + a_{j+1} x^{j+1} \ldots + a_n x^n + o(x^n))^k$ en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à $n$. Ainsi par exemple, le plus petit terme sera ici $a_j^k x^{jk}$.

**Exercice d'application 14.** Pour chacun des développements limités suivants, déterminer à quel ordre faire chacun des développements limités et effectuer le développement limité demandé.

1) $DL_3(0)$ de $\ln(1+x^2)$.

2) $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$.

3) $DL_5(0)$ de $\cos(\sin(x)-x)$.

### *IV.4. Quotient de développements limités*

(m) Pour faire le développement limité de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ à l'ordre $n$, il faut après avoir fait le développement limité de $g(x)$ le factoriser par son premier terme pour obtenir un terme de la forme $g(x) = ax^k(1+bx+cx^2+\ldots+o(x^n))$. On peut alors poser $u = bx+cx^2+\ldots+o(x^n)$ qui tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, ce qui nous ramène au développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$. Puisque le terme dominant de $g(x)$ est $ax^k$, il faudra alors faire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre $k+n$ car en divisant par $x^k$, on perdra $k$ ordres, ce qui donnera bien finalement un développement limité à l'ordre $n$.

**Exercice d'application 15.** Déterminer le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.

### *IV.5. Développements limités de fonctions réciproques*

## V. Application des développements limités

### *V.1. Calculs de limites et d'équivalents*

(m) Pour obtenir un équivalent de $f(x)$ en 0, il faut faire un développement limité de $f(x)$ en 0 jusqu'au premier terme non nul. Ainsi, si $f(x) = a_j x^j + o(x^j)$ avec $a_j \neq 0$, on a $f(x) \sim_0 a_j x^j$. Pour les quotients d'équivalents, on cherche ainsi un équivalent du numérateur et du dénominateur de manière séparée et on effectue un quotient d'équivalent.

### *V.2. Étude de fonctions*

**Théorème. Condition suffisante d'extremum local.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in I$. Alors :
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors $f$ admet un minimum local en $a$.
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors $f$ admet un maximum local en $a$.

**Théorème. Condition nécessaire d'extremum local.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in I$. Alors :
- Si $f$ admet un minimum local en $a$, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
- Si $f$ admet un maximum local en $a$, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$.

**Proposition.** Soit $n \geq 2$. Supposons que $f$ admette un $DL_n(a)$ de la forme :

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + a_n x^n + o(x^n)$$

avec $a_n \neq 0$. Alors :

- Si $n$ est pair et $a_n > 0$, la courbe de $f$ est au-dessus de sa tangente en $a$ au voisinage de $a$ (car $a_n x^n \geq 0$).
- Si $n$ est pair et $a_n < 0$, la courbe de $f$ est en-dessous de sa tangente en $a$ au voisinage de $a$ (car $a_n x^n \geq 0$).
- Si $n$ est impair, la courbe de $f$ traverse sa tangente en $a$ au voisinage de $a$ (car $a_n x^n$ change de signe au voisinage de 0).

(m) Un développement limité donne donc **l'équation de la tangente** et la position **locale** de la courbe représentative de $f$ par rapport à sa tangente. Si on veut la position **globale** (par exemple si on veut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leq x$), faire un développement limité ne suffit pas et il faut faire une étude de fonction (par exemple ici de la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ pour obtenir son signe sur $\mathbb{R}_+$).

**Exercice d'application 16.** Déterminer la tangente en 0 des fonctions suivantes ainsi que la position de leur courbe représentative par rapport à leur tangente au voisinage de 0.

1) $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

2) $g_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $g_2 : x \mapsto \tan(x)$.

3) $h_1 : x \mapsto 2\cos(x) - 3\sin(x)$ et $h_2 : x \mapsto (1-x)\cos(x)$.

*V.3. Développements asymptotiques*

(m) Pour comparer une fonction à des fonctions de référence au voisinage de $+\infty$ ou ailleurs, on peut utiliser les développements limités usuels à condition que la variable en laquelle on les utilise tende bien vers 0.

**Exercice d'application 17.** Effectuer le développement asymptotique de $f(x) = (1+x)\left(2 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ au voisinage de $+\infty$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

**Définition.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- On dit que la courbe représentative de $g$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - f(x)) = 0$. Si $g : x \mapsto ax + b$, on parle de **droite asymptote**. Si $g : x \mapsto b$, on parle d'**asymptote horizontale**.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de $f$ en $a$.

(m) Pour obtenir l'équation de la droite asymptotique à $f$, on effectue le développement asymptotique de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ jusqu'à un $o(1)$. Pour obtenir la position de la courbe représentative de $f$ par rapport à sa droite asymptote, on cherche le terme suivant non nul du développement asymptotique et on regarde son signe. S'il est positif, la courbe de $f$ est au-dessus de son asymptote, s'il est négatif, elle sera en-dessous.

**Exercice d'application 18.** On reprend la fonction $f(x) = (1+x)\left(1 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ de l'exercice d'application précédent.

1) Déterminer la droite asymptote de $f$ au voisinage de $+\infty$ et la position de $f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) Que peut-on dire au voisinage de $-\infty$ ?

**Exercice d'application 19.** Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1) Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2) En déduire le développement asymptotique de $f$ au voisinage de $+\infty$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

3) Montrer que $f$ admet une droite asymptotique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de $f$ par rapport à son asymptote.

## VI. Correction des exercices

**Exercice d'application 1.**

1) On a $\lim_{x\to 0} f(x) - \frac{1}{x} = 0$ donc $f(x) - \frac{1}{x} = o_0(1)$, soit $f(x) = \frac{1}{x} + o_0(1)$.

2) On a $\frac{1}{x} = o_{+\infty}(1)$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. De plus, on a $\ln(1+x^2) = \ln(x^2(1+1/x^2)) = \ln(x^2) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + \ln(1+1/x^2)$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+1/x^2) = 0$, on a $\ln(1+1/x^2) = o_{+\infty}(1)$. Par somme, on en déduit que :

$$f(x) = 2\ln(x) + o_{+\infty}(1).$$

3) Au voisinage de 0, on a $\ln(1+u) = u + o_0(u)$. On a donc $\ln(1+x^2) = x^2 + o_0(x^2)$. On a donc bien $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 + o_0(x^2)$.

On a de même $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Puisque $\frac{1}{x^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$, on en déduit donc que :

$$f(x) = 2\ln(x) + \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Exercice d'application 2.** Pour $x \neq 0$, on a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = 1$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 = e.$$

On a donc $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

**Exercice d'application 3.** On a pour $x > 0$, $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \to_{+\infty} 1$ donc on a bien $x+1 \sim_{+\infty} x$. On a cependant $e^{x+1} = e^x \times e$, ce qui entraine que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$. On a donc bien $e^{x+1} \not\sim_{+\infty} e^x$.

**Exercice d'application 4.** On prend pour $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x+1$, $g(x) = x$ et $h(x) = -x$. On a alors bien $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ mais $f(x) + h(x) = 0 \not\sim_{+\infty} 1 = g(x) + h(x)$.

**Exercice d'application 5.**

1) Ce résultat est vrai. En effet, $u_n \sim \frac{1}{n}$ revient à dire que $nu_n \to 1$ et $v_n \sim \frac{2}{n}$ revient à dire que $nv_n \to 2$. On en déduit que $n(u_n + v_n) \to 3$ (par somme de suites convergentes), ce qui entraine que $u_n + v_n \sim \frac{3}{n}$.

2) Ce résultat est vrai mais l'équivalent obtenu n'est pas le plus simple possible. En effet, en retraduisant les hypothèses, on a $nu_n \to 1$ et $n^2 v_n \to 1$. Ceci entraine, par produit de suites convergentes, que :

$$nv_n = \frac{1}{n} \times n^2 v_n \to 0.$$

On en déduit que $n(u_n + v_n) \to 1$ d'où $u_n + v_n \sim \frac{1}{n}$. Or, on $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$. Par transitivité du fait d'être équivalent, on en déduit le résultat voulu.

3) Ce résultat est faux. Remarquons tout d'abord que $u_n \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ revient uniquement à $u_n \sim \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ (ce résultat est vrai, il suffit de diviser le terme de gauche par $\frac{1}{n}$, c'est à dire de le multiplier par $n$ pour obtenir que la limite du rapport tend vers 1). Posons alors $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a alors :

$$u_n - v_n \sim \frac{1}{n^{3/2}} \text{ et } \frac{1}{n^{3/2}} \not\sim \frac{1}{n^2}.$$

**Exercice d'application 6.**

1) Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$. Par puissance d'équivalents, on en déduit que $u_n \sim \frac{1}{8n^6}$.

2) Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{n+2}} = 0$, on a $\tan\left(\frac{3}{\sqrt{n+2}}\right) \sim \frac{3}{\sqrt{n+2}}$. Puisque $n + 2 \sim n$, par puissance d'équivalents, on a $\sqrt{n+2} \sim \sqrt{n}$. On a donc $v_n \sim \frac{3}{\sqrt{n}}$.

3) On a $\lim_{n \to +\infty} \sin^2\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 0$ donc $w_n \sim \sin^2\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$. Puisque $\lim_{n \to +\infty} -\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $\sin\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{2}{\sqrt{n}}$. Par puissance d'équivalents, on a donc :

$$w_n \sim \frac{4}{n}.$$

**Exercice d'application 7.**

1) On a $\sqrt{n+1} - 2\sqrt{\ln^3(n)} = \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 2\sqrt{\frac{\ln^3(n)}{n}}\right)$. D'après les croissances comparées, dans la parenthèse, le terme de droite tend vers 0 et le terme de gauche tend vers 1. On en déduit que $u_n \sim \sqrt{n}$.

2) Par comparaisons usuelles, $n! + n^3 \ln^4(n) - 5^n \sim n!$ (par croissances comparées, $n^3 \ln^4(n) = o(5^n)$ et par comparaisons usuelles, $5^n = o(n!)$). Le dénominateur est équivalent à $n^n$ (par comparaisons usuelles). On en déduit que $v_n \sim \frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

3) On étudie le numérateur et le dénominateur. On a tout d'abord $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ (équivalent usuel qui se retrouve avec la limite du taux d'accroissement de arctan en 0). Or, on a $-\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que le numérateur est équivalent à $\frac{1}{n}$.

De plus, on a $3n^2 - 2\ln^4(n) \sim 3n^2$ par croissances comparées et on peut prendre des racines d'équivalents donc le dénominateur est équivalent à $\sqrt{3}n$. Par quotient, on a donc $w_n \sim \frac{1}{\sqrt{3}n^2}$.

4) $\ln(2^n + n^2) - \sqrt{n+2} = \ln\left(2^n\left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)\right) - \sqrt{n+2} = n\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right) - \sqrt{n+2}$. Le

terme dans le logarithme tend vers 0 (croissances comparées et composition de limites). De plus, on a $\sqrt{n+2} \sim \sqrt{n} = o(n)$. Ceci entraine que l'équivalent recherché est $n\ln(2)$.

5) En utilisant le fait que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, puis que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on trouve que l'expression étudiée est égale à 0 ! L'équivalent recherché est donc 0 (on rappelle que seule la suite nulle est équivalente à 0).

**Exercice d'application 8.**

1) On a $u_n = e^{n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$. Or, puisque $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on a $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. On en déduit que le terme dans l'exponentiel tend vers 1. Par composition de limites (ou par continuité de l'exponentielle), on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

2) On a $\ln\left(1+\frac{3}{n^2+1}\right) \sim \frac{3}{n^2+1} \sim \frac{3}{n^2}$ (on a le droit de faire des quotients d'équivalents et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2+1} = 0$). On a également le droit de prendre des racines carrées d'équivalents, ce qui entraine que $v_n \sim n \times \frac{\sqrt{3}}{n} \sim \sqrt{3}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.

**Exercice d'application 9.**

1) $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-1,+\infty[$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^n$. Puisque $0 \in ]-1,+\infty[$, on en déduit d'après la formule de Taylor-Young que $f$ admet un $DL_n(0)$.

2) On a $\ln(1+x) = x + o(x)$. Par puissance (indépendante de $x$) de DL, on a :

$$f(x) = (x+o(x))^n = x^n(1+o(1))^n.$$

Or, on a $(1+o(1))^n = 1+o(1)$. En effet, si $g(x) = 1+o(1)$, cela signifie que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Par puissance de limite, on a $\lim\limits_{x\to 0}(g(x))^n = 1$, ce qui entraine que $(g(x))^n = 1+o(1)$. On a donc bien $f(x) = x^n(1+o(1)) = x^n + o(x^n)$.

3) D'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

Or, d'après la question précédente, on a $f(x) = x^n + o(x^n)$. Par unicité du développement limité, on en déduit que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = 0$ et que $f^{(n)}(0) = n!$.

**Exercice d'application 10.**

1) On pose $x = 1+y$. On a alors :

$$\ln(x) = \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y).$$

Si on veut repasser en la variable $x$, puisque $y = x-1$, on a :

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o_1((x-1)^2).$$

2) On pose $x = \frac{\pi}{4} + y$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(y)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(y)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{y^2}{2}-y+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{4}y^2+\frac{\sqrt{2}}{12}y^3+o(y^3).
\end{aligned}$$

3) On pose $x=2+y$. On a alors :

$$\begin{aligned}
e^x=e^{2+y} &= e^2\times e^y\\
&= e^2\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)\\
&= e^2+e^2y+\frac{e^2}{2}y^2+\frac{e^2}{6}y^3+o(y^3).
\end{aligned}$$

4) On pose $x=3+y$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln(x)=\ln(3+y) &= \ln\left(3\times\left(1+\frac{y}{3}\right)\right)\\
&= \ln(3)+\ln\left(1+\frac{y}{3}\right)\\
&= \ln(3)+\frac{y}{3}-\frac{y^2}{18}+o(y^2).
\end{aligned}$$

5) On pose $x=2+y$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}=\sqrt{2+y} &= \sqrt{2}\times\sqrt{1+\frac{y}{2}}\\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{y}{2}-\frac{1}{8}\times\frac{y^2}{4}+o(y^2)\right)\\
&= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{2}}{32}y^2+o(y^2).
\end{aligned}$$

**Exercice d'application 11.**

1) On fait le DL à l'ordre 1 :

$$3\sin(x)=3(x+o(x))=3x+o(x).$$

On en déduit que $3\sin(x)\sim_0 3x$.

2) Les termes d'ordre 1 vont se simplifier donc on fait le DL à l'ordre 3 :

$$2\tan(x)-2x=2\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-2x=\frac{2x^3}{3}+o(x^3).$$

On a donc $2\tan(x)-2x\sim_0\dfrac{2x^3}{3}$.

3) Les termes d'ordre 0 et 1 vont se simplifier donc on fait le DL jusqu'à l'ordre 2 :

$$e^x-1-x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x=\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

On a donc $e^x-1-x\sim_0\dfrac{x^2}{2}$.

**Exercice d'application 12.** On a :

$$\begin{aligned}\sin(x)+2\cos(x) &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\\ &= 2+x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$

**Exercice d'application 13.**

1) Le premier terme du DL de $\ln(1+x)$ est d'ordre 1 donc on fait le DL de $\cos(x)$ jusqu'à l'ordre 1. Le premier terme du DL de $\cos(x)$ est d'ordre 0 donc on fait le DL de $\ln(1+x)$ jusqu'à l'ordre 2. On a alors :

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\times\cos(x) &= \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times(1+o(x))\\ &= x-\frac{x^2}{2}+o(x^2).\end{aligned}$$

2) On doit ici faire le DL de $\ln(1+x)$ jusqu'à l'ordre 2 (puisque le DL sera multiplié par un terme d'ordre 2). On a alors :

$$\begin{aligned}x^2\ln(1+x) &= x^2\times\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &= x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4).\end{aligned}$$

3) Le premier terme du DL de $\sin(x)$ est d'ordre 1 donc on fait le DL de $\tan(x)$ jusqu'à l'ordre 2. De même, le premier terme du DL de $\tan(x)$ est d'ordre 1 donc on fait le DL de $\sin(x)$ jusqu'à l'ordre 2. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sin(x)\times\tan(x) &= (x+o(x^2))\times(x+o(x^2))\\ &= x^2+o(x^3).\end{aligned}$$

**Exercice d'application 14.**

1) On pose $u=x^2$ qui est d'ordre 2 et tend bien vers 0 quand $x$ tend vers 0. On effectue donc le DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 (ce qui nous donnera des termes d'ordre 4 que l'on tronquera). On a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ d'où :

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^2+o(x^3).$$

2) On a $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^2)$. On pose ainsi $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^2)$ d'où $u\sim_0 -\frac{x^2}{2}$. On effectue donc le DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2. On a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ d'où :

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^2)\right)-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^2)\right)^2}{2}+o(x^4)\\ &= -\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)\\ &= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$

3) On pose $u = \sin(x) - x = -\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$. On effectue alors le DL de $\cos(u)$ à l'ordre 2 (on fera apparaitre des termes d'ordre 6 mais on tronquera alors à l'ordre 5). On a donc :

$$\begin{aligned} \cos(\sin(x) - x) &= 1 - \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2 + o(x^6) \\ &= 1 + o(x^5). \end{aligned}$$

**Exercice d'application 15.** On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)\right)$. On effectue donc le DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 (car on va perdre un ordre). Pour le dénominateur, on va poser $u = -\dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ et faire le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 (afin de faire apparaitre un $u(u^2) = o(x^4)$ et on tronquera ensuite à l'ordre 3). On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

**Exercice d'application 16.**

1) On a $f_1(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc la tangente en 0 à $f_1$ est d'équation $y = 1 + x$ et la courbe représentative de $f_1$ est au-dessus de la tangente au voisinage de 0. On a $f_2(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ donc la tangente en 0 à $f_2$ est d'équation $y = 1 - x$ et la courbe représentative de $f_1$ est au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

2) On a $g_1(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc la tangente en 0 à $g_1$ est d'équation $y = x$ et la courbe représentative de $g_1$ est au-dessus de la tangente au voisinage de 0 à gauche et au-dessous de la tangente au voisinage de 0 à droite. On a $g_2(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc la tangente en 0 à $g_2$ est d'équation $y = x$ et la courbe représentative de $g_2$ est au-dessous de la tangente au voisinage de 0 à gauche et au-dessus de la tangente au voisinage de 0 à droite.

3) On a $h_1(x) = 2\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 3(x + o(x^2)) = 2 - 3x - x^2 + o(x^2)$ donc la tangente en 0 à $h_1$ est d'équation $y = 2 - 3x$ et la courbe représentative de $h_1$ est au-dessous de la tangente au voisinage de 0. Enfin, on a :

$$h_2(x) = (1 - x)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On a donc la tangente en 0 à $h_2$ d'équation $y = 1 - x$ et la courbe représentative de $h_2$ est au-dessous de la tangente au voisinage de 0.

**Exercice d'application 17.** On pose $u = \dfrac{1}{x}$ qui tend bien vers 0 quand $x$ tend vers l'infini. Puisque le terme en $(2 - \sin(u))$ va être multiplié par $x = \dfrac{1}{u}$ et que l'on veut au final un $o(u^2)$, on va faire le

DL du sinus à l'ordre 3. On a donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+\frac{1}{u}\right)\left(2-u+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right) \\
&= \frac{2}{u}-1+\frac{u^2}{6}+2-u+o(u^2) \\
&= \frac{2}{u}+1-u\frac{u^2}{6}+o(u^2).
\end{aligned}$$

On a donc $f(x) = 2x+1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{6x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

**Exercice d'application 18.**

1) D'après le calcul précédent, on a comme asymptote à $f$ au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = 2x+1$. Le terme suivant est $-\dfrac{1}{x}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$. Ceci entraine que le graphe de $f$ est au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) Au voisinage de $-\infty$, le calcul de l'exercice 14 est exactement le même (on a toujours $u = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0). On a donc encore comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation $y = 2x+1$. On a cependant cette fois $-\dfrac{1}{x}$ qui est positif au voisinage de $+\infty$. On en déduit que le graphe de $f$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

**Exercice d'application 19.**

1) $g : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour $x > 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on en déduit que $g$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc $g$ constante égale à $g(1) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

2) On a pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $\dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand $x$ tend vers l'infini. On a donc, puisque $\arctan(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3) On en déduit que la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote au graphe de $f$ au voisinage de $+\infty$ et que le graphe de $f$ est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (car $-\dfrac{1}{x}$ est négatif au voisinage de l'infini). *On aurait pu répondre à cette question sans calcul puisque l'on sait que la fonction* arctan *tend vers* $\dfrac{\pi}{2}$ *en* $+\infty$ *ce qui prouve que* $y = \dfrac{\pi}{2}$ *est asymptote au graphe de* arctan *et on sait également que la fonction* arctan *est majorée par* $\dfrac{\pi}{2}$ *ce qui entraine bien que le graphe de* $f$ *est sous l'asymptote.*