TRAVAUX DIRIGES MI3
Énergies d'un point matériel

Niveau 1

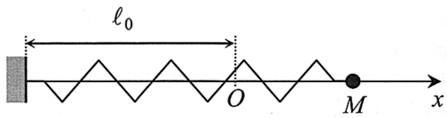
*Exercice 1. Travail d'une force de frottement fluide

Un mobile effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal, d'équation $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Ce mobile subit l'action d'une force de frottement fluide $\overrightarrow{F_d} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{u_x}$.

Déterminer en fonction de A, α et ω le travail W_d de la force $\overrightarrow{F_d}$ au cours d'une période T. Vérifier l'homogénéité du résultat obtenu.

*Exercice 2 Ressort horizontal

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige, le long de l'axe (Ox) horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, l'autre extrémité étant fixe. L'origine O coïncide avec sa position d'équilibre.



À l'instant $t = 0$, on écarte M d'une distance $X_0 = 8{,}0$ cm et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Établir l'expression de l'énergie mécanique de M.
2. Montrer que cette énergie est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement de M.
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle et calculer la période des oscillations.
5. Avec quelle vitesse le point M repasse-t-il par le point O ?

<u>Données</u> : $m = 250$ g, $k = 20$ N.m^{1}

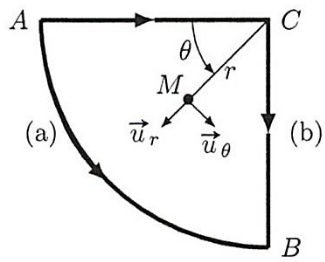
Niveau 2

Exercice 3. Force conservative ou pas ?

Soit un point M, repéré par ses coordonnées polaires r et θ et soumis à la force $\vec{F}$.

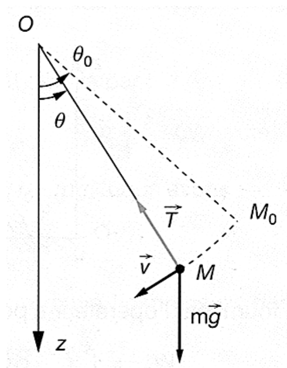
La force $\vec{F}$ s'écrit $\vec{F} = r^2k^2\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées polaires, où k est une constante.

On s'intéresse à deux chemins partant de A et menant au point B. Le chemin (a) est un arc de cercle de rayon R tandis que le chemin (b) est constitué de deux segments de droite AC et CB de longueur R.



1. Déterminer le travail W de la force $\vec{F}$ pour les deux chemins envisagés. Conclure quant au caractère conservatif de $\vec{F}$.
2. Même question avec la force $\vec{F}' = r^2 k^2 \overrightarrow{u_r}$.
3. Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force envisagée qui est conservative.

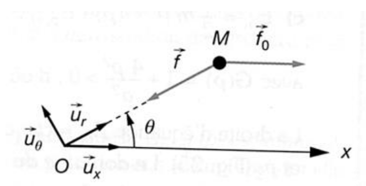
Exercice 4. Pendule simple sans frottements



Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur l attaché en O.
À l'instant $t = 0$, le fil est écarté d'un angle θ_0 par rapport à la verticale et le point M_0 est relâché sans vitesse initiale.

1. Par un raisonnement énergétique, déterminer l'équation différentielle du mouvement.
2. À partir de considérations énergétiques, exprimer la vitesse v du point M lorsque le fil est incliné d'un angle θ par rapport à la verticale.
3. Déterminer l'expression de la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de m, g, θ et θ_0.

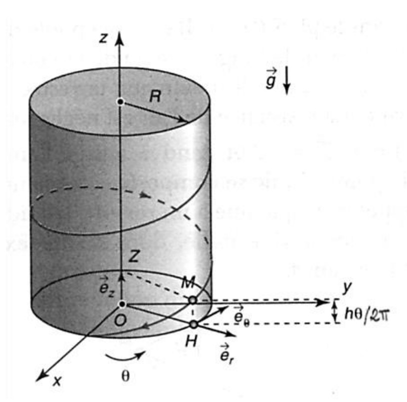
*Exercice 5. Énergie potentielle en coordonnées polaires



Un point matériel M est soumis à l'action d'une force centrale $\vec{f} = -k\vec{r}$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et d'une force uniforme $\vec{f_0} = f_0 \overrightarrow{u_x}$. On se place en coordonnées polaires.
Déterminer, à une constante près, l'énergie potentielle $\mathscr{E}_P(r,\theta)$ du point matériel.

*Exercice 6. Mouvement d'une perle le long d'une hélice

Le référentiel terrestre $\mathscr{R}_g\left(O;\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur d'intensité g est uniforme.

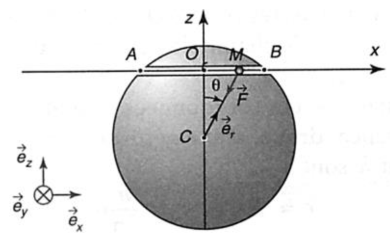


Les équations en coordonnées cylindro-polaires d'une hélice, droite, d'axe vertical (Oz) et de pas constant h sont : $r = R$ et $z = \dfrac{h}{2\pi}\theta$.
Une perle de petite dimension est enfilée sur ce fil rigide de forme hélicoïdale et abandonnée sans vitesse initiale au point A d'altitude H. Cette perle M, de masse m, assimilée à un point matériel, est mobile sans frottement le long de l'hélice.

1. Étude cinématique : exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$. En déduire v^2 en fonction de h, R et $\dot{z}$.
2. Étude énergétique : déterminer l'équation différentielle du mouvement de M dont est solution la cote verticale z de M.
3. En déduire l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de M et le temps τ que met la perle pour atteindre sous l'action de son poids le plan horizontal à la base de l'hélice en $z = 0$.

Exercice 7. Voyage au centre de la Terre

La Terre est une planète supposée sphérique, de centre C et de rayon R. Le référentiel $\mathcal{R}_g\left(O;\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ lié à la Terre est supposé galiléen (la rotation de la Terre n'est pas prise en compte) et le champ de pesanteur, uniforme à la surface de la Terre, est noté g_0.



Pour relier deux villes A et B, un tunnel est foré au travers du globe terrestre. Un véhicule assimilable à un point matériel M de masse m part sans vitesse initiale du point A et glisse dans le tunnel sans frottement, selon l'axe (Ox), pour rejoindre le point B.

Sa position est repérée par $x(t) = \overline{OM}$. La force gravitationnelle exercée par la Terre sur M est : $\vec{F} = -mg_0\dfrac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$ avec $CM = r(t)$. La distance CO du tunnel au centre de la Terre est notée d.

1. Quelle est l'énergie potentielle de gravitation $\mathcal{E}_P$ associée au point M en choisissant l'origine de cette énergie en O ?
2. En déduire la vitesse maximale v_{max} du véhicule.
3. Représenter le graphe de $\mathcal{E}_P(x)$. Préciser l'expression de l'énergie potentielle au point A. Le point M possède-t-il une position d'équilibre stable ? Décrire le mouvement du point M à partir de sa position initiale.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Travail d'une force de frottement fluide

<u>Vitesse</u> : $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

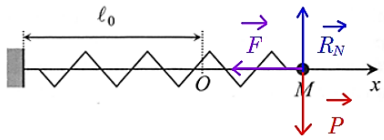
<u>Puissance</u> : $\mathcal{P}_d = \overrightarrow{F_d}\cdot\vec{v} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{u_x}\cdot\dot{x}\overrightarrow{u_x} = -\alpha\dot{x}^2 = -\alpha A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

<u>Travail</u> : $W_d = \int_0^T \mathcal{P}_d dt = -\alpha A^2\omega^2\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)dt = -\alpha A^2\omega^2\int_0^T \dfrac{1-\cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}dt$

$$\boxed{W_d = -\alpha A^2\omega^2\frac{T}{2} = -\alpha\pi A^2\omega}$$

<u>Homogénéité</u> : $[\alpha] = \dfrac{[F]}{[v]}$ et $[W_d] = \dfrac{[F]}{[v]}L^2\dfrac{1}{T} = \dfrac{[F]L^2}{L.T^{-1}T} = [F]L$: homogène !

*Exercice 2. Ressort horizontal



1. ① Système : point matériel M de masse m

② Référentiel terrestre galiléen

Repère : base cartésienne $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ et le mouvement est selon l'axe (Ox)

③ Forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$: force conservative dérivant d'une énergie potentielle : $\mathscr{E}_{P,pesanteur} = mgz + cste = cste = 0$ en supposant que le ressort se trouve à la cote $z = 0$ et en choisissant la constante nulle.
- Force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\left(l - l_0\right)\overrightarrow{u_{\text{sortant}}} = -k\left(l - l_0\right)\overrightarrow{u_x} = -kx\overrightarrow{u_x}$ car l'origine O correspond à la position d'équilibre (= position de repos pour un ressort horizontal) : force conservative dérivant d'une énergie potentielle : $\mathscr{E}_{P,élastique} = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2 + cste = \frac{1}{2}kx^2 + cste = \frac{1}{2}kx^2$ en choisissant la constante nulle, i.e. $\mathscr{E}_{P,élastique}(0) = 0$.
- Réaction du support : elle est constituée uniquement de la composante normale car il n'y a pas de frottement : cette force est donc orthogonale au déplacement, et son travail est nul : $\delta W_{réaction} = 0$

Le système est donc conservatif.

④ Degré de liberté : Le mouvement est à un seul degré de liberté : x

La vitesse est : $\vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ et l'énergie cinétique est : $\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie mécanique est donc : $\boxed{\mathscr{E}_m(M) = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{P,pesanteur} + \mathscr{E}_{P,élastique} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$

2. Le système étant conservatif, l'énergie mécanique se conserve.

Sa valeur est : $\boxed{\mathscr{E}_m(M_0) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^{\,2} + \frac{1}{2}kx_0^{\,2} = \frac{1}{2}kX_0^{\,2}}$

3. ⑤ Théorème de la puissance mécanique ou dérivation de l'intégrale première de l'énergie : $\frac{d\mathscr{E}_m}{dt} = \mathscr{P}^{NC} = 0$

$\frac{1}{2}2m\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}2kx\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) = 0$. La solution $\dot{x} = 0$ correspond à l'équilibre et la solution $m\ddot{x} + kx = 0$ correspond à l'équation du mouvement, qui s'écrit sous forme normalisée :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

4. Résolution de l'équation différentielle du 2nd ordre (avec $\lambda = 0$)

- *Solution de l'essm et solution complète :* $x(t) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)$

- *Conditions initiales :* $x(0)=X_0=A$ et $\dot{x}(0)=0=B\omega_0 \Rightarrow B=0$
- *Solution finale* : $\boxed{x(t)=X_0\cos(\omega_0 t)}$

Le mouvement de M est oscillant de <u>période</u> $\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=0{,}70\ \text{s}}$

5. Quand M repasse par O, l'énergie potentielle élastique est nulle. La conservation de l'énergie mécanique donne : $\mathscr{E}_m(O)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kX_0{}^2$, soit $v^2=\frac{k}{m}X_0{}^2=\omega_0^2X_0{}^2$. La <u>norme de la vitesse</u> est : $\boxed{v=\omega_0X_0=0{,}72\ m.s^{-1}}$

Exercice 3. Force conservative ou pas ?

1. $W_{A\to B,a}\left(\vec{F}\right)=\frac{\pi}{2}R^3k^2$, $W_{A\to B,b}\left(\vec{F}\right)=0$ 2. $W_{A\to B,a}\left(\vec{F}'\right)=W_{A\to B,b}\left(\vec{F}'\right)=0$ 3. $E'_P(r)=-k^2\frac{r^3}{3}+cste$

Exercice 4. Pendule simple sans frottements

2. $v=\sqrt{2gl\left(\cos(\theta)-\cos(\theta_0)\right)}$ 3. $\vec{T}=-mg\left(3\cos(\theta)-2\cos(\theta_0)\right)\vec{u_r}$

*Exercice 5. Énergie potentielle en coordonnées polaires

Force résultante : $\vec{F}=\vec{f}+\vec{f_0}=-k\vec{r}+f_0\vec{u_x}=-kr\vec{u_r}+f_0\vec{u_x}$

$\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle : $d\mathscr{E}_P=-\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM}$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}=r\vec{u_r}$

Vecteur déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM}=dr\vec{u_r}+rd\theta\vec{u_\theta}$

Projection de la force uniforme dans la base polaire : $f_0\vec{u_x}=f_0\left(\cos(\theta)\vec{u_r}-\sin(\theta)\vec{u_\theta}\right)$

Énergie potentielle :

$$d\mathscr{E}_P=-\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM}=-\left[\left(-kr+f_0\cos(\theta)\right)\vec{u_r}-f_0\sin(\theta)\vec{u_\theta}\right]\cdot\left(dr\vec{u_r}+rd\theta\vec{u_\theta}\right)$$

$$d\mathscr{E}_P=\left(kr-f_0\cos(\theta)\right)dr+rf_0\sin(\theta)d\theta=krdr-f_0\left(\cos(\theta)dr-r\sin(\theta)d\theta\right)$$

Rappel mathématique : $d(uv)=du\cdot v+u\cdot dv$

$$d\mathscr{E}_P=d\left(\frac{1}{2}kr^2\right)-f_0d\left(r\cos(\theta)\right)\text{ soit }\boxed{\mathscr{E}_P(r,\theta)=\frac{1}{2}kr^2-f_0r\cos(\theta)+cste}$$

<u>Autre méthode</u> pour déterminer l'énergie potentielle de la force $\vec{f_0}$:

$$d\mathscr{E}_{P0}=-f_0\vec{u_x}\cdot\left(dx\vec{u_x}+dy\vec{u_y}\right)=-f_0dx=d\left(-f_0x\right)\text{ soit }\mathscr{E}_{P0}(x)=-f_0x+cste'$$

$$\text{Or }x=r\cos(\theta)\text{ d'où }\mathscr{E}_{P0}(r,\theta)=-f_0r\cos(\theta)+cste'$$

*Exercice 6. Mouvement d'une perle le long d'une hélice

1. Position : $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$

Vitesse : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{2\pi}{h}\dot{z}$: $\vec{v} = R\dfrac{2\pi}{h}\dot{z}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ et $\boxed{v^2 = \left(\dfrac{4\pi^2R^2}{h^2} + 1\right)\dot{z}^2}$

2. ① Système : perle = point M de masse m

② Référentiel terrestre galiléen ; coordonnées cylindriques (r,θ,z)

③ Forces :

- À distance : Poids : force conservative dérivant d'une énergie potentielle :

$$\mathscr{E}_P^{pes}(M) = mgz + cste = mgz$$

- De contact : Réaction du support orthogonale au mouvement : force non conservative mais telle que $W^{reaction} = 0$

Le système est donc conservatif.

④ Degré de liberté :

M est repéré par 3 paramètres (r,θ,z) et il existe 2 relations entre eux (cf. énoncé) : donc, il n'y a qu'un seul paramètre indépendant. Le mouvement est à un seul degré de liberté (par exemple z) et l'étude énergétique est conseillée.

Énergie cinétique : $\mathscr{E}_C(M) = \dfrac{1}{2}mv^2$

⑤ Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta\mathscr{E}_m = W^{NC} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E}_m = cste \Leftrightarrow \dfrac{d\mathscr{E}_m}{dt} = 0$

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_C(M) + \mathscr{E}_P^{pes}(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{4\pi^2R^2}{h^2}+1\right)\dot{z}^2 + mgz = cste = mgH$$

$$\frac{d\mathscr{E}_m}{dt} = m\left(\frac{4\pi^2R^2}{h^2}+1\right)\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} = 0 \Rightarrow \left(\frac{4\pi^2R^2}{h^2}+1\right)\ddot{z} + g = 0$$

L'accélération verticale est constante : $\boxed{\ddot{z} = -g\dfrac{h^2}{h^2+4\pi^2R^2}}$

3. ⑥Résolution de l'équation différentielle : il faut intégrer deux fois

En $t=0$, $z=H$ et $\dot{z}=0$: $\dot{z} = -g\dfrac{h^2}{h^2+4\pi^2R^2}t$ et $\boxed{z(t) = -\dfrac{g}{2}\dfrac{h^2}{h^2+4\pi^2R^2}t^2 + H}$

En $t=\tau$, $z(\tau)=0$ d'où : $\boxed{\tau = \sqrt{\dfrac{2H}{g}\left(\dfrac{4\pi^2R^2+h^2}{h^2}\right)}}$

τ est indépendant de la masse m car les frottements ont été négligés.

Exercice 7. Voyage au centre de la Terre

1. $E_P(x) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{g_0}{R}x^2$ 2. $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{g_0}{R}\left(R^2-d^2\right)}$