À chercher pour lundi 23/01/2023, corrigé

Exercice 13. On va procéder par récurrence sur le degré de P et montrer un résultat plus fort. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose alors $\mathcal{P}(n)$: « $\forall P \in R_n[X]$, l'équation $P(t) = e^t$ a au plus $n+1$ solutions. »

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai. En effet, puisque la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors l'équation $\lambda = e^t$ admet au plus une solution (0 si P est égal à une constante inférieure ou égale à 0 et 1 si P est égal à une constante strictement positive).

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Supposons par l'absurde que l'équation $P(t) = e^t$ admette $n+2$ solutions. Posons alors pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = P(t) - e^t$. f est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle s'annule en $n+2$ point. On en déduit, en utilisant le théorème de Rolle sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ où les x_k sont les zéros de f que f' s'annule sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$. f' admet donc au moins $n+1$ zéros. Or, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = P'(t) - e^t$. On en déduit que l'équation $P'(t) = e^t$ admet au moins $n+1$ solutions ce qui est absurde par hypothèse de récurrence puisque $P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

  On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que pour tout polynôme P, l'équation $P(t) = e^t$ admet un nombre fini de solution (au plus le degré du polynôme plus une).

Exercice 16. Soit $f(x) = x + 2x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

1) On a $f(x) \to 0$ quand x tend vers 0 (car la fonction sinus est bornée). On peut donc prolonger f par continuité en 0. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que sommes et composées de fonctions dérivables. En 0, on peut calculer la limite du taux d'accroissement (si on nous avait demandé f de classe $\mathcal{C}^k$ avec k grand, on aurait utilisé le théorème de prolongement mais ici on nous demande seulement dérivable donc autant faire seulement le taux d'accroissement de la fonction en 0, cela nous évitera un calcul de dérivée). Toujours puisque la fonction sinus est bornée, on a $\dfrac{f(x) - 0}{x - 0} \to 1$ quand x tend vers 0. On a donc f dérivable en 0 et $f'(0) = 1 > 0$.

Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 1 + 4x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Posons alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$. On a alors $f'(x_n) = -1$. Quand n tend vers l'infini, on a $x_n \to 0$. On en déduit que quelque soit le voisinage de 0 considéré $[-a, a]$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x_n soit dans ce voisinage et on aura alors $f'(x_n) < 0$. On en déduit que f n'est pas croissante sur ce voisinage (car si elle l'était, on aurait alors pour tout $x \in [-a, a],\ f'(x) \geq 0$).

La fonction f n'est donc croissante sur aucun voisinage de 0.

2) Si par contre f était $\mathcal{C}^1$ avec $f'(0) > 0$, alors par continuité de f' en 0, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in [-a, a]$, $f'(x) \geq \dfrac{f'(0)}{2} > 0$ (on peut utiliser la définition de la continuité en $\varepsilon = \dfrac{f'(0)}{2} > 0$).

On a alors f' strictement positive sur $[-a, a]$ ce qui entraine que f est strictement croissante sur $[-a, a]$.

Exercice 18. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

1) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions infiniment dérivables.

2) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathbb{R}[X]\ /\ \forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

La propriété est vraie au rang 0 en prenant $P = 1$ (puisque $f(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors pour $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ avec P un polynôme. On a alors en dérivant :

$$\forall x > 0,\ f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

On remarque alors que si on pose $Q(X) = -X^2 P'(X) - X^2 P(X)$, alors Q est un polynôme (comme produit/somme de polynômes) et on a bien le résultat demandé.

Par récurrence, la propriété est vraie à tout rang.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. On a clairement $\lim\limits_{x \to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$ (car $f^{(n)}$ est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$). Sur $\mathbb{R}_+^*$, si on écrit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a alors :

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{t^k} e^{-\frac{1}{t}}$$

Par croissances comparées et somme finie de limites, on en déduit que $\lim\limits_{t \to 0^+} f^{(n)}(t) = 0$.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, on en déduit que si on pose $f(0) = 0$, alors la fonction f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(0) = 0$. La propriété étant vraie pour tout les $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que f est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les dérivées en 0 sont nulles.

4) On va à présent se servir de cette fonction f pour construire la fonction demandée par l'énoncé.

Posons tout d'abord pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1)$. On a alors g qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, qui est nulle sur $]-\infty, -1]$ et strictement positive sur $]-1, +\infty[$.

De même, on pose $h(x) = f(1-x)$ qui va aussi être $\mathcal{C}^\infty$ et qui est nulle sur $[1, +\infty[$ et strictement positive sur $]-\infty, 1[$.

La fonction $x \mapsto g(x)h(x)$ répond alors à la question posée (elle est bien $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, est strictement positive sur $]-1, 1[$ et nulle ailleurs.