Devoir Surveillé 10, problème 2, commentaires

Dans l'ensemble, la présentation des copies étaient bonnes même si certains calculs manquaient parfois de précision (des bornes de sommes qui changeaient miraculeusement afin de tomber sur le résultat proposé par exemple). On rappelle également que quand le résultat est donné dans l'énoncé, il faut d'autant plus le justifier. Ce qui a posé le plus de souci de rédaction est la question 3.b (utilisation des probabilités totales). Dans le détail à présent.

1) *Premiers calculs.*

a) Très bien même si certains étudiants ont pensé que X_k suivait une loi de Bernoulli (ce qui est faux car X_k était à valeurs dans $\{-1, 1\}$).

b) Très bien traitée.

2) *Deux applications.*

a) La plupart des étudiants font apparaitre $\mathbb{E}(|S_n|^2) - \mathbb{E}(|S_n|)^2$ mais oublient ensuite d'utiliser le fait que $|S_n|^2 = S_n^2$ pour retrouver $\mathbb{V}(S_n)$.

b) La première partie de la question est souvent très bien faite vu que l'on pouvait utiliser à la fois les inégalités de Markov et de Tchebychev. Pour la seconde partie, il fallait bien utiliser le théorème des gendarmes afin de justifier l'existence de la limite (on ne peut pas écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir justifié que la limite existait).

3) *Équivalent de* $\mathbb{E}(|S_n|)$.

a) De nombreux étudiants affirment sans aucune justification $|S_n|(\Omega)$ (en oubliant parfois le 0), d'autres recopient la formule de l'énoncé en disant qu'elle est évidente. On attendait bien entendu un minimum de justifications...

b) Beaucoup d'imprécisions dans cette question. Pour la première partie, la plupart des étudiants voient bien qu'il faut utiliser les probabilités totales mais n'ont pas un bon système complet d'évènements. On rappelle que l'on a besoin d'un recouvrement disjoint de Ω donc $(S_n = k - 1)$ et $(S_n = k + 1)$ ne forment pas un sce ! On pouvait ici prendre $(S_n = j)_{-n\leq j\leq n}$ ou $(X_{n+1} = -1, X_{n+1} = 1)$ par exemple mais il faut bien considérer tous les cas possibles (et après seulement utiliser le fait que de nombreuses probabilités conditionnelles sont nulles). Pour la seconde partie de la question, beaucoup d'étudiants voient bien la séparation de $|S_n| = k$ en $(S_n = -k)\bigcup(S_n = k)$ mais oublient ensuite d'utiliser l'hypothèse $k > 1$ pour justifier que l'union est bien disjointe, ce qui permet d'ajouter les probabilités. De manière générale, si vous n'utilisez pas une des hypothèses dans une question, c'est souvent qu'il manque un argument (d'autant plus que la question suivante traitait justement le cas particulier $k = 1$).

c) Souvent bien traitée quand la question précédente l'était (les points pour l'utilisation des probabilités totales n'ont pas été enlevés deux fois).

d) Calcul pas si évident que certains étudiants ont cependant très bien mené. Il fallait bien ici penser à partir de la formule du 3.a (en l'écrivant bien au rang $n + 1$), séparer le terme $k = 1$, utiliser les questions précédentes et ensuite faire deux changements d'indice.

e) Parfois bien traitée même si certains résultats sont surprenants (on rappelle qu'une probabilité ne peut pas dépasser 1 !).

f) Question peu abordée mais parfois bien traitée par récurrence.

g) La formule de Stirling est globalement sue mais le calcul de l'équivalent n'a pas été réussi (séparation des termes pairs/impairs pas évidente). On rappelle que si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ uniquement si α est constant (indépendant de n). On ne peut donc pas élever un équivalent à la puissance $2n + 1$!