

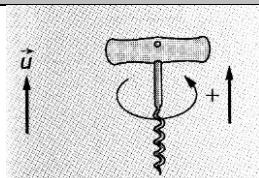
OUTILS MATHÉMATIQUES 5

Vecteurs : produit scalaire, projection, dérivée temporelle, fonction composée

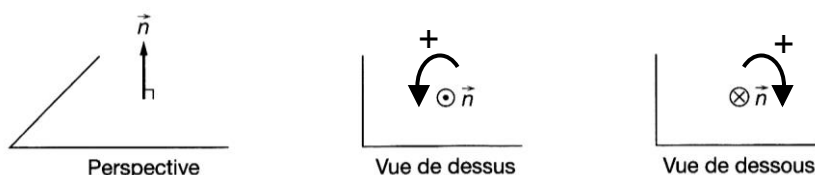
1 Vecteur

1.1 Sens de rotation associé à un vecteur

- **Règle du tire-bouchon** : On appelle **sens de rotation direct** autour de la direction \vec{u} le sens de rotation qui fait avancer un tire-bouchon dans le sens de \vec{u} .



- Convention utilisée



Le vecteur \vec{n} représente la **normale** au plan (direction orthogonale).

En vue de dessus, le sens de rotation direct est le **sens trigonométrique**.

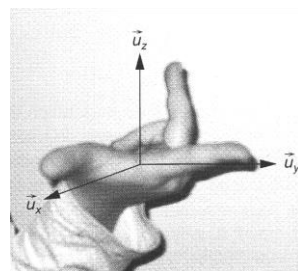
En vue de dessous, le sens de rotation direct est le **sens horaire**.

- Base directe

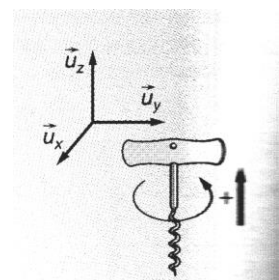
Une base orthonormée de l'espace $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est

directe si :

- on peut faire coïncider \vec{u}_x avec le pouce, \vec{u}_y avec l'index et \vec{u}_z avec le majeur de la main droite (**règle des trois doigts de la main droite**).



- en faisant tourner un tire-bouchon de \vec{u}_x vers \vec{u}_y , le tire-bouchon se déplace dans le sens de \vec{u}_z (**règle du tire-bouchon**).



1.2 Norme d'un vecteur

- Vecteur en coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

- **Définition** : La **norme** du vecteur \vec{a} est : $\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

2 Produit scalaire de deux vecteurs

- **Définition** : Le **produit scalaire** de \vec{a} par \vec{b} est le **scalaire algébrique** :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos(\theta)$$

- **Propriétés** : Le produit scalaire est **symétrique et bilinéaire** :

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = k_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + k_2 \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \end{cases}$$

- Expression en coordonnées cartésiennes

Soient deux vecteurs $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$ et $\vec{b} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z$

Le produit scalaire est :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Application

Le produit scalaire caractérise **l'orthogonalité** :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \text{ aigu} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \text{ obtus}$$

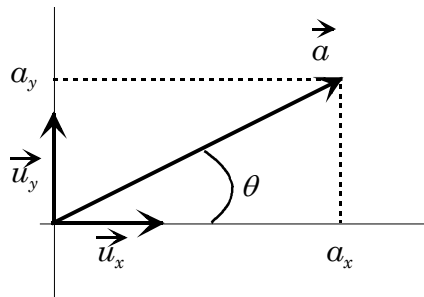
3 Projection d'un vecteur

- Que signifie « projeter un vecteur » ?

Définition :

Propriété :

➤ Exemple



La projection du vecteur \vec{a} sur le vecteur unitaire \vec{u}_x est la composante a_x :



La projection du vecteur \vec{a} sur le vecteur unitaire \vec{u}_y est la composante a_y :



4 Dérivation temporelle

➤ Vecteur constant

$$\text{Si } \vec{a} = \text{cste}, \text{ alors } \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$$

➤ Dérivée d'une somme de vecteurs

$$\frac{d(\vec{a} + \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

➤ Dérivée d'un produit d'un vecteur par un scalaire

$$\frac{d(f(t)\vec{a})}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\vec{a} + f(t)\frac{d\vec{a}}{dt}$$

➤ Dérivée d'un produit scalaire de deux vecteurs

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

➤ Dérivée d'une fonction composée

$$\frac{d(\vec{f}[g(t)])}{dt} = \frac{d(\vec{f}[g(t)])}{dg} \cdot \frac{dg(t)}{dt}$$

Exemple :