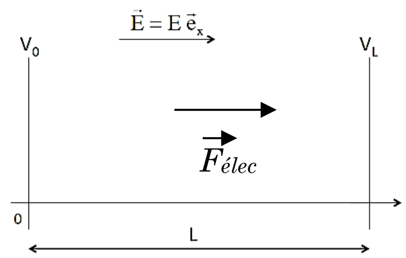
# CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 5

## Problème 1 – Proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN (*ATS 2015*)




1. Système : proton de masse $m_P$, de charge $q = e$

   Référentiel terrestre supposé galiléen

   Force électrique : $\boxed{\vec{F}_{élec} = q\vec{E} = e\vec{E}}$

2. Poids : $\vec{P} = m_P\vec{g}$

   $$\frac{\text{poids}}{\text{force électrique}} = \frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_{élec}\|} = \frac{m_P g}{eE} \simeq 1{,}02.10^{-12} << 1$$

   Poids du proton négligeable devant la force électrique.

3. Bilan des forces : force électrique, poids négligé

   PFD : $m_P\vec{a} = \vec{F}_{élec} = e\vec{E} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{e}{m_P}\vec{E} = \overrightarrow{cste}}$ : mouvement uniformément accéléré

4. Champ électrique : $\vec{E} = E\overrightarrow{e_x}$

   Potentiel électrique tel que : $dV = -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = -E\overrightarrow{e_x}\cdot d\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow dV = -Edx$

   Intégration : $\int_{V_0}^{V_L} dV = -E\int_0^L dx \Leftrightarrow V_L - V_0 = -EL$ soit $\boxed{V_L = -EL < 0}$

   *Remarque : Tension $U = V_L - V_0 < 0$ et champ électrique orienté dans le sens des potentiels décroissants.*

5. Force électrique conservative dérivant de l'énergie potentielle $E_{P,elec} = qV = eV$

   Système conservatif.

   Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_C = W\left(\vec{F}_{elec}\right) = -\Delta E_{P,elec}$

   $$E_{CL} - E_{C0} = -\left(E_{P,elec}(x = L) - E_{P,elec}(x = 0)\right) \text{ avec } E_{C0} = 0$$

   $$E_{CL} = -e\left(V_L - V_0\right) \Leftrightarrow \boxed{E_{CL} = -eV_L = eEL > 0}$$

6. D'après la question précédente : $\boxed{\Delta E_C = -\Delta E_{P,elec} = \left|-eU_C\right| = eU_C > 0}$

7. Dans chaque tube, en l'absence de champ électrique, le mouvement est uniforme : à la sortie du 1er tube : $E_{C1} = E_{C0} = e\left|U_0\right| = eU_0$

   À la sortie du 2ème tube : $E_{C2} - E_{C1} = eU_C \Leftrightarrow E_{C2} = E_{C1} + eU_C$

   À la sortie du $n$ème tube : $E_{Cn} = E_{C1} + (n-1)eU_C$ soit $\boxed{E_{Cn} = e\left(U_0 + (n-1)U_C\right)}$

8. $E_{C10} = e\left(U_0 + 9U_C\right) = \frac{1}{2}m_P v_{10}^2 \Leftrightarrow \boxed{v_{10} = \sqrt{\frac{2e}{m_P}\left(U_0 + 9U_C\right)} = 5{,}91.10^7 \text{ m.s}^{-1}}$

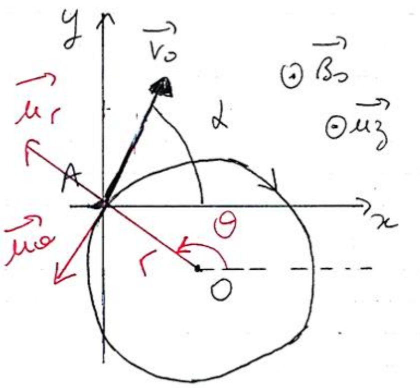
9. $v_{10} \simeq \frac{c}{5} < \frac{c}{3}$ : les protons ne sont pas relativistes.

10. Système : proton de masse $m_P$, de charge $q = e$, de vitesse $\vec{v}$

Référentiel terrestre supposé galiléen

Composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{magn} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0} = e\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}}$$




11. La force magnétique est orthogonale à $\vec{v}$ (donc à $\overrightarrow{v_0}$) et à $\overrightarrow{B_0}$ : elle est donc dans le plan $(xOy)$ et orthogonale à $\overrightarrow{v_0}$. Son sens est tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{F}_{magn}\right)$ soit direct.

Sa norme est : $\boxed{F_{magn} = ev_0B_0 = ev_0B_0 \sin\left(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{B_0}\right) = ev_0B_0}$

12. $\delta W = \overrightarrow{F}_{magn} \cdot d\overrightarrow{OM} = \left(q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}\right) \cdot d\overrightarrow{OM} = \left(q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}\right) \cdot \vec{v}dt$ et $\boxed{\delta W = q\left(\vec{v} \wedge \vec{v}\right) \cdot \overrightarrow{B_0}dt = 0}$

- Théorème de l'énergie cinétique : $dE_C = \delta W = 0 \Rightarrow \dfrac{dE_C}{dt} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = 0$

  $\frac{1}{2}mv^2 = cste \Rightarrow \boxed{v = cste = v_0}$ : le mouvement du proton est uniforme.

13. Base cylindrique $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$ avec origine $O$ centre du cercle.

Bilan des forces : force magnétique $\overrightarrow{F}_{magn} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0} = e\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ avec $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$ et $B_0 > 0$ soit $\overrightarrow{F}_{magn} = q\left(-v_0\overrightarrow{u_\theta}\right) \wedge B_0\overrightarrow{u_z} = -qv_0B_0\overrightarrow{u_r}$

poids négligé

PFD : $\overrightarrow{F}_{magn} = q\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B_0} = m_P\vec{a}$

Cinématique du mouvement circulaire uniforme :

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$, $r$ étant le rayon du cercle

Vecteur vitesse : $\vec{v} = -v_0\overrightarrow{u_\theta} = -r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ de norme $v_0 = cste > 0$

Vecteur accélération : $\vec{a} = -v_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} = -\dfrac{v_0^2}{r}\overrightarrow{u_r}$ (accélération centripète)

Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_r}$ : $-qv_0B_0 = -m_P\dfrac{v_0^2}{r}$

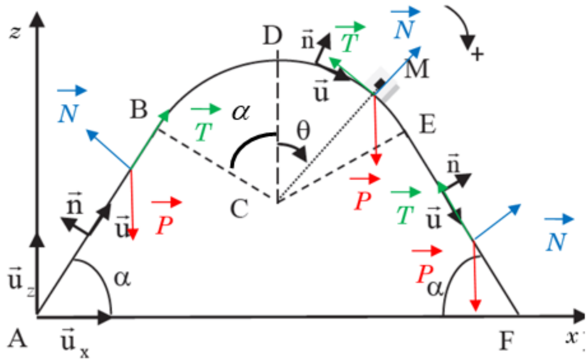
Rayon de la trajectoire circulaire : $\boxed{r = \dfrac{m_Pv_0}{qB_0} = \dfrac{m_Pv_0}{eB_0} > 0}$

14. Le centre $O$ du cercle est à la distance $r$ de la position initiale de la particule, dans la direction indiquée par $\overrightarrow{F}_{magn} = q\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B_0}$. Le cercle est tangent en $A$ à $\overrightarrow{v_0}$. Le proton tourne dans le sens indirect (horaire) autour de $\overrightarrow{B_0}$ (cf. schéma).

15. Après sa sortie de la zone de champ magnétique, le proton n'est soumis à aucune force (poids négligé). D'après le principe d'inertie, il est en mouvement rectiligne uniforme.

## Problème 2 – Le buggy : trajectoire et sécurité

PARTIE A : MODÉLISATION DU COMPORTEMENT D'UN BUGGY *(CNAGEI 2017)*




1. $(BC)\perp(AB),(CD)\perp(Ax)$ et $\left(AB,Ax\right)=\alpha$ donc $\left(BCD\right)=\alpha$

| Points | Abscisse $x$ | Cote $z$ |
|---|---|---|
| $B$ | $L\cos(\alpha)$ | $L\sin(\alpha)$ |
| $D$ | $L\cos(\alpha)+R\sin(\alpha)$ | $L\sin(\alpha)+R(1-\cos(\alpha))$ |
| $E$ | $L\cos(\alpha)+2R\sin(\alpha)$ | $L\sin(\alpha)$ |
| $F$ | $2(L\cos(\alpha)+R\sin(\alpha))$ | 0 |

2. Système : buggy assimilé à un objet ponctuel $M$, de masse $m$

   Référentiel terrestre supposé galiléen

   Trajet $AB$ : repère cartésien $\left(A,\vec{u},\vec{n}\right)$ avec $\vec{u}$ colinéaire à la pente

   Bilan des forces :

   - Poids $\vec{P}=-mg\sin(\alpha)\vec{u}-mg\cos(\alpha)\vec{n}$
   - Réaction normale de la piste : $\vec{N}=N\vec{n}$ avec $N>0$
   - Réaction tangentielle de la piste $\vec{T}=T\,\vec{u}$

   PFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}$ avec $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{0}$ car $\vec{v}=\overrightarrow{cste}$

   Projection du PFD sur $\vec{u}$ : $T-mg\sin(\alpha)=0$ soit $\boxed{T=mg\sin(\alpha)>0}$ (cf. schéma)

   Projection du PFD sur $\vec{n}$ : $N-mg\cos(\alpha)=0$ soit $\boxed{N=mg\cos(\alpha)>0}$ (schéma)

3. Trajet $EF$ : repère cartésien $\left(E,\vec{u},\vec{n}\right)$ avec $\vec{u}$ colinéaire à la pente

   Bilan des forces :

   - Poids $\vec{P}=mg\sin(\alpha)\vec{u}-mg\cos(\alpha)\vec{n}$
   - Réaction normale de la piste : $\vec{N}=N\vec{n}$ avec $N>0$

- Réaction tangentielle de la piste $\vec{T} = T\,\vec{u}$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$ avec $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ car $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$

Projection du PFD sur $\vec{u}$ : $T + mg\sin(\alpha) = 0$ soit $\boxed{T = -mg\sin(\alpha) < 0}$ (schéma)

Projection du PFD sur $\vec{n}$ : $N - mg\cos(\alpha) = 0$ soit $\boxed{N = mg\cos(\alpha) > 0}$ (schéma)

4. Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{CM} = R\vec{n}}$

   Vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{CM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u} = v\vec{u}}$

   Vecteur accélération : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{u} - R\dot{\theta}^2\vec{n}}$

5. Norme de la vitesse : $\boxed{v = R\dot{\theta} = cste}$

   Vecteur accélération : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u} - \dfrac{v^2}{R}\vec{n} = -\dfrac{v^2}{R}\vec{n}}$ : mouvement circulaire uniforme

6. Portion circulaire $BDE$ : Repère polaire $(C, \vec{u}, \vec{n})$

   Bilan des forces :
   - Poids $\vec{P} = mg\sin(\theta)\vec{u} - mg\cos(\theta)\vec{n}$
   - Réaction normale de la piste : $\vec{N} = N\vec{n}$ avec $N > 0$
   - Réaction tangentielle de la piste $\vec{T} = T\,\vec{u}$

   PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$

   Projection du PFD sur $\vec{u}$ : $T + mg\sin(\theta) = 0$ soit $\boxed{T = -mg\sin(\theta) < 0}$ (schéma)

   Projection du PFD sur $\vec{n}$ : $N - mg\cos(\theta) = -m\dfrac{v^2}{R}$ soit $\boxed{N = mg\cos(\theta) - m\dfrac{v^2}{R}}$

7. Sur la portion entre $B$ et $D$, $\theta$ diminue en valeur absolue, donc $N$ augmente et le décollage n'est pas possible. S'il y a décollage, il a lieu entre $D$ et $E$. Dans cette portion, $\theta$ augmente donc $N$ diminue. La valeur minimale de $N$ est obtenue en $\theta = \alpha$. Condition de non-décollage en $\theta = \alpha$ : $N(\alpha) > 0$

$$mg\cos(\alpha) - m\frac{v^2}{R} > 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} < g\cos(\alpha) \text{ soit } \boxed{v < \sqrt{Rg\cos(\alpha)} = v_{\lim}}$$

8. Portion $AB$ : $W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_A^B \vec{T}\cdot d\overrightarrow{AM} = \int_A^B mg\sin(\alpha)\vec{u}\cdot d\overrightarrow{AM}$

   Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{AM} = dAM\vec{u}$

$$W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_A^B mg\sin(\alpha)\cdot dAM = mg\sin(\alpha)AB$$

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{T}) = mg\sin(\alpha)L > 0} \text{ : force motrice}$$

➢ Portion $BD$ : $W_{B\to D}(\vec{T}) = \int_B^D \vec{T}\cdot d\overrightarrow{CM} = \int_B^D -mg\sin(\theta)\vec{u}\cdot d\overrightarrow{CM}$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{CM} = dR\vec{n} + Rd\theta\vec{u} = Rd\theta\vec{u}$

$$W_{B\to D}\left(\vec{T}\right)=\int_{-\alpha}^{0}-mg\sin(\theta)Rd\theta=mgR\left[\cos\theta\right]_{-\alpha}^{0}$$

$$\boxed{W_{B\to D}\left(\vec{T}\right)=mgR\left(1-\cos(\alpha)\right)>0} \text{ : force \underline{motrice}}$$

- Portion $DE$ : $W_{D\to E}\left(\vec{T}\right)=\int_D^E\vec{T}\cdot d\overrightarrow{CM}=\int_D^E-mg\sin(\theta)\vec{u}\cdot d\overrightarrow{CM}$

$$W_{D\to E}\left(\vec{T}\right)=\int_0^{\alpha}-mg\sin(\theta)Rd\theta=mgR\left[\cos\theta\right]_0^{\alpha}$$

$$\boxed{W_{D\to E}\left(\vec{T}\right)=mgR\left(\cos(\alpha)-1\right)<0} \text{ : force \underline{résistante}}$$

- Portion $EF$ : $W_{E\to F}\left(\vec{T}\right)=\int_E^F\vec{T}\cdot d\overrightarrow{EM}=\int_E^F-mg\sin(\alpha)\vec{u}\cdot d\overrightarrow{EM}$ et $d\overrightarrow{EM}=dEM\vec{u}$

$$W_{E\to F}\left(\vec{T}\right)=-\int_E^F mg\sin(\alpha)\cdot dEM=-mg\sin(\alpha)EF$$

$$\boxed{W_{E\to F}\left(\vec{T}\right)=-mg\sin(\alpha)L<0} \text{ : force \underline{résistante}}$$

- Totalité du trajet $AF$ :

$$\boxed{W_{A\to F}\left(\vec{T}\right)=W_{A\to B}\left(\vec{T}\right)+W_{B\to D}\left(\vec{T}\right)+W_{D\to E}\left(\vec{T}\right)+W_{E\to F}\left(\vec{T}\right)=0}$$

- Commentaire : le travail fourni par le moteur compense le travail résistant du poids sur la portion $AD$ ; sur la portion $DF$, le poids est moteur et compense le travail perdu par frottement solide sur la piste. Ce modèle ne tient pas compte des frottements fluides dans l'air…

9. Bilan des forces précédent : ajout de $\overrightarrow{F_a}=-F_a\ \vec{u}$ et $\vec{T}$ remplacée par $\overrightarrow{T'}=T'\ \vec{u}$

   Projection du PFD sur $\vec{u}$ :

   Trajet $AB$ : $T'-mg\sin(\alpha)-F_a=0$ soit $\boxed{T'=F_a+mg\sin(\alpha)=T+F_a}$

   Trajet $EF$ : $T'+mg\sin(\alpha)-F_a=0$ soit $\boxed{T'=F_a-mg\sin(\alpha)=T+F_a}$

   Portion circulaire $BDE$ :

$$T'+mg\sin(\theta)-F_a=0 \text{ soit } \boxed{T'=F_a-mg\sin(\theta)=T+F_a}$$

10. Tronçon $AD$ : $W_{A\to D}\left(\overrightarrow{F_a}\right)=\int_A^D\overrightarrow{F_a}\cdot d\overrightarrow{AM}=-\int_A^B F_a\vec{u}\cdot d\overrightarrow{AM}-\int_B^D F_a\vec{u}\cdot d\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\right)$

$$W_{A\to D}\left(\overrightarrow{F_a}\right)=-F_aAB-F_a\int_B^D\vec{u}\cdot d\overrightarrow{CM}=-F_aL-F_a\int_{-\alpha}^{0}Rd\theta=-F_aL-F_aR\alpha$$

$$\boxed{W_{A\to D}\left(\overrightarrow{F_a}\right)=-F_a\left(L+R\alpha\right)=-F_aAD<0}$$

- Tronçon $DF$ : $W_{D\to F}\left(\overrightarrow{F_a}\right)=\int_D^F\overrightarrow{F_a}\cdot d\overrightarrow{CM}=-F_aDF$ $\quad\boxed{W_{D\to F}\left(\overrightarrow{F_a}\right)=-F_a\left(L+R\alpha\right)<0}$

11. Poids : seule force conservative dérivant de $E_{P,pes}$ telle que :

$$dE_{p,pes}=-\vec{P}\cdot d\overrightarrow{AM}=+mg\vec{u_z}\cdot d\overrightarrow{AM}=mgdz \text{ soit } \boxed{E_{p,pes}=mgz+cste}$$

- Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m=W^{NC}=W\left(\overrightarrow{F_a}\right)+W\left(\overrightarrow{T'}\right)$ avec

  $\Delta E_m=\Delta E_c+\Delta E_{p,pes}=\Delta E_{p,pes}$ soit $\boxed{W\left(\overrightarrow{T'}\right)=\Delta E_{p,pes}-W\left(\overrightarrow{F_a}\right)}$

- Tronçon $AD$ : $W_{A\to D}\left(\overrightarrow{T'}\right)=E_{p,pes}(D)-E_{p,pes}(A)-W_{A\to D}\left(\overrightarrow{F_a}\right)$

$$W_{A\to D}\left(\overrightarrow{T'}\right) = mg\left(z_D - z_A\right) - W_{A\to D}\left(\overrightarrow{F_a}\right)$$

$$\boxed{W_{A\to D}\left(\overrightarrow{T'}\right) = mg\left(L\sin(\alpha) + R\left(1-\cos(\alpha)\right)\right) + F_a\left(L + R\alpha\right)}$$

- Tronçon $DF$ : $W_{D\to F}\left(\overrightarrow{T'}\right) = E_{p,pes}(F) - E_{p,pes}(D) - W_{D\to F}\left(\overrightarrow{F_a}\right)$

$$\boxed{W_{D\to F}\left(\overrightarrow{T'}\right) = -mg\left(L\sin(\alpha) + R\left(1-\cos(\alpha)\right)\right) + F_a\left(L + R\alpha\right)}$$

12. Totalité du trajet $AF$ : $W_{A\to F}\left(\overrightarrow{T'}\right) = W_{A\to D}\left(\overrightarrow{T'}\right) + W_{D\to F}\left(\overrightarrow{T'}\right)$

$$\boxed{W_{A\to F}\left(\overrightarrow{T'}\right) = 2F_a\left(L + R\alpha\right) > 0}$$

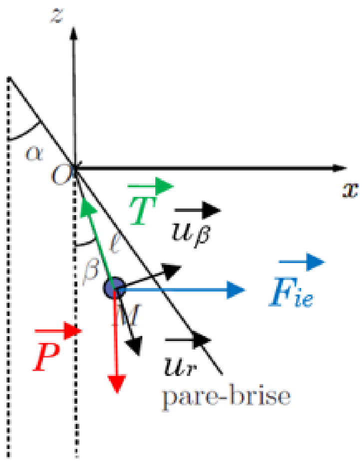
- Commentaire : la force $\overrightarrow{T'}$ est motrice sur la globalité du trajet afin de compenser l'énergie perdue par les frottements fluides sur tout le trajet.

PARTIE B : DANGER LIÉ À UN PENDULE SUSPENDU DANS UN VÉHICULE *(E3A MP 2017)*

13. Lors du mouvement du véhicule à vitesse constante, $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_g$ galiléen : il est galiléen.

- Phase de freinage : mouvement rectiligne uniformément accéléré : $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen.

14. Système : objet assimilé à un point $M$, de masse $m$
Référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la voiture, non galiléen, base polaire $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\beta}\right)$




Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = mg\cos(\beta)\overrightarrow{u_r} - mg\sin(\beta)\overrightarrow{u_\beta}$
- Tension du fil : $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ avec $T > 0$
- Force d'inertie d'entraînement :
$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_0} = ma_0\overrightarrow{e_x} = ma_0\left(\sin(\beta)\overrightarrow{u_r} + \cos(\beta)\overrightarrow{u_\beta}\right)$

Principe fondamental de la statique à l'équilibre :
$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{ie}} = \vec{0}$

Projection du PFS sur $\overrightarrow{u_\beta}$ : $-mg\sin\left(\beta_{éq}\right) + ma_0\cos\left(\beta_{éq}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tan\left(\beta_{éq}\right) = \frac{a_0}{g}}$

15. Cinématique du mouvement circulaire :

$$\overrightarrow{OM} = \ell\overrightarrow{u_r}\ ,\ \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \ell\dot{\beta}\overrightarrow{u_\beta}\ ,\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ell\ddot{\beta}\overrightarrow{u_\beta} - \ell\dot{\beta}^2\overrightarrow{u_r}$$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{ie}}$

Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_\beta}$ : $-mg\sin(\beta) + ma_0\cos(\beta) = m\ell\ddot{\beta}$

$$\boxed{\ddot{\beta} + \frac{g}{\ell}\sin(\beta) = \frac{a_0}{\ell}\cos(\beta)}$$

16. Énergie potentielle d'entraînement $E_{P,ie}$ telle que :

$$dE_{p,ie} = -\overrightarrow{F_{ie}}\cdot d\overrightarrow{OM} = -ma_0\overrightarrow{u_x}\cdot d\overrightarrow{OM} = -ma_0 dx$$

$$\boxed{E_{p,ie} = -ma_0 x + cste1 = -ma_0 \ell \sin(\beta) + cste1}$$

17. Énergie potentielle de pesanteur $E_{P,pes}$ telle que :

$$dE_{p,pes} = -\overrightarrow{P} \cdot d\overrightarrow{OM} = +mg\overrightarrow{u_z} \cdot d\overrightarrow{OM} = mgdz$$

$$\boxed{E_{p,pes} = mgz + cste2 = -mg\ell\cos(\beta) + cste2}$$

18. Deux forces conservatives : $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F_{ie}}$ ; une force non conservative $\overrightarrow{T}$ telle que $W(\overrightarrow{T}) = 0$ : système <u>conservatif</u>.

<u>Théorème de la puissance mécanique :</u>

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathscr{P}^{NC} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\left(E_C + E_{P,pes} + E_{P,ie}\right)}{dt} = 0$$

Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\beta}^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_C}{d\dot{\beta}}\frac{d\dot{\beta}}{dt} + \frac{dE_{P,pes}}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{dE_{P,ie}}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = 0$$

$$m\ell^2\ddot{\beta}\dot{\beta} - ma_0\ell\cos(\beta)\dot{\beta} + mg\ell\sin(\beta)\dot{\beta} = 0 \text{ soit } \boxed{\ddot{\beta} + \frac{g}{\ell}\sin(\beta) = \frac{a_0}{\ell}\cos(\beta)}$$

19. Approximation des petits angles : $\cos(\beta) \simeq 1$ et $\sin(\beta) \simeq \beta$

Équation différentielle : $\ddot{\beta} + \frac{g}{\ell}\beta = \frac{a_0}{\ell} \Leftrightarrow \ddot{\beta} + \frac{g}{\ell}\beta = \frac{g}{\ell}\frac{a_0}{g}$

Or $\frac{a_0}{g} = \tan(\beta_{éq}) \simeq \beta_{éq}$ d'où $\ddot{\beta} + \frac{g}{\ell}\beta = \frac{g}{\ell}\beta_{éq}$ et $\boxed{\ddot{\beta} + \omega_0^2\beta = \omega_0^2\beta_{éq}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$.

20. *Solution de l'essm* : $\beta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

*Solution particulière* : $\beta(t) = \beta_{éq}$

*Solution complète* : $\beta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \beta_{éq}$

*Conditions initiales* : $\beta(0) = A + \beta_{éq} = 0 \Leftrightarrow A = -\beta_{éq}$ et $\dot{\beta}(0) = B\omega_0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$

*Solution finale* : $\boxed{\beta(t) = \beta_{éq}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)}$

21. Angle maximal atteint pour $\cos(\omega_0 t) = -1$ soit $\beta_{\max} = 2\beta_{éq}$

Pour les petits angles : $\beta_{\max} = 2\beta_{éq} \simeq \tan(\beta_{éq}) = 2\frac{a_0}{g}$

La masse ne heurte pas le pare-brise si $\beta_{\max} < \alpha \Leftrightarrow 2\frac{a_0}{g} < \alpha \Leftrightarrow \boxed{a_0 < a_1 = \frac{\alpha g}{2}}$

A.N. : $\boxed{a_1 = 1{,}3 \text{ m.s}^{-2}}$ (<u>**Attention**</u> : convertir l'angle $\alpha$ en radian !)

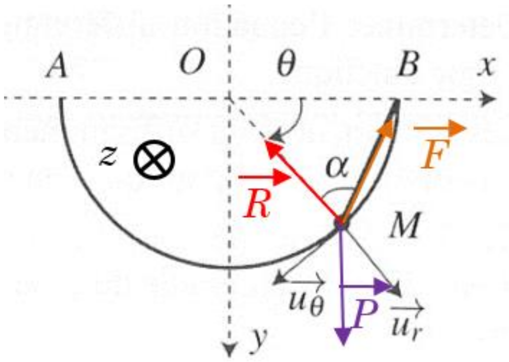
# Exercice 3 – Bille sur un cerceau

1. $BM^2 = \left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)^2 = BO^2 + OM^2 + 2BO\cdot OM\cos(\pi-\theta)$

$$BM^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta) = 2R^2(1-\cos\theta) \text{ et } 1-\cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$BM^2 = 4R^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ donc } \boxed{BM = 2R\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

2. <u>Système</u> : bille assimilée à un point $M$, masse $m$




- ➢ <u>Référentiel</u> terrestre supposé galiléen, base cartésienne $\left(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$ ou cylindrique $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$
- ➢ <u>Bilan des forces :</u>
  - <u>Poids</u> $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u_y}$ : force conservative dérivant d'une énergie potentielle :

    $dE_{P,pes} = -\overrightarrow{P}\cdot d\overrightarrow{OM} = -mg\overrightarrow{e_y}\cdot d\overrightarrow{OM} = -mgdy$

    $E_{P,pes}(y) = -mgy + cste$ et $y = R\sin\theta$ d'où $\boxed{E_{P,pes}(\theta) = -mgR\sin(\theta) + cste1}$
  - <u>Force de rappel élastique</u> du ressort $\overrightarrow{F}_{élas} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u_{\text{sortant}}} = -kBM\overrightarrow{u_{BM}}$ avec $\overrightarrow{u_{BM}} = \frac{\overrightarrow{BM}}{BM}$ : force conservative dérivant d'une énergie potentielle (expression à connaître) :

$$\boxed{E_{P,élas} = \frac{1}{2}kBM^2 + cste2 = 2kR^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + cste2}$$

*Démonstration* :

$$dE_{P,élas} = -\overrightarrow{F}_{élas}\cdot d\overrightarrow{BM} = k\cdot BM\cdot\overrightarrow{u_{BM}}\cdot d\overrightarrow{BM} = k\cdot BM\cdot d(BM) = d\left(\frac{1}{2}kBM^2\right)$$

  - <u>Réaction normale du support</u> : $\overrightarrow{R_N}$ : force non conservative telle que $W\left(\overrightarrow{R_N}\right) = 0$
- ➢ <u>Système conservatif</u> à un <u>degré de liberté</u> $\theta$
- ➢ <u>Énergie potentielle totale :</u>

$$E_P(\theta) = E_{P,pes}(\theta) + E_{P,élas} = -mgR\sin(\theta) + 2kR^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + cste3$$

Détermination de la constante telle que $E_P(\theta=0) = 0$ soit $cste3 = 0$

$$\boxed{E_P(\theta) = -mgR\sin(\theta) + 2kR^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -mgR\sin(\theta) + kR^2(1-\cos(\theta))}$$

3. Position d'équilibre telle que $\left(\dfrac{dE_P(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta_{eq}}=0$

$$\left(\frac{dE_P(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta_{eq}}=0 \Leftrightarrow -mgR\cos\left(\theta_{éq}\right)+2kR^2\cos\left(\frac{\theta_{éq}}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_{éq}}{2}\right)=0$$

$kR^2\sin\left(\theta_{éq}\right)=mgR\cos\left(\theta_{éq}\right)\Leftrightarrow \boxed{\tan\left(\theta_{éq}\right)=\dfrac{mg}{kR}>0}$ On constate que $0\le\theta_{éq}\le\dfrac{\pi}{2}$.

- Stabilité :

$$\left(\frac{d^2E_P(\theta)}{d\theta^2}\right)_{\theta_{eq}}=mgR\sin\left(\theta_{éq}\right)+kR^2\cos\left(\theta_{éq}\right)=kR^2\cos\left(\theta_{éq}\right)\left[1+\frac{mg}{kR}\tan\left(\theta_{éq}\right)\right]$$

$\boxed{\left(\dfrac{d^2E_P(\theta)}{d\theta^2}\right)_{\theta_{eq}}=kR^2\cos\left(\theta_{éq}\right)\left[1+\left(\dfrac{mg}{kR}\right)^2\right]>0}$ La position d'équilibre est stable.

4. Si l'on écarte faiblement la bille de sa position d'équilibre stable $\theta_{éq}$ et qu'on la lâche sans vitesse initiale, la bille est dans un puits de potentiel : elle est dans un état lié et elle oscille autour de $\theta_{éq}$. Les oscillations sont sinusoïdales (harmoniques) si l'amplitude du mouvement est faible, non harmoniques si l'amplitude du mouvement est importante.
5. Système conservatif à un degré de liberté $\theta$

- Mouvement circulaire : $v=R\dot{\theta}$
- Énergie cinétique : $E_C=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$
- Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt}=\mathscr{P}^{NC}=0\Leftrightarrow\frac{dE_C}{d\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{dt}+\frac{dE_P}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=0\Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}-mgR\cos(\theta)\dot{\theta}+kR^2\sin(\theta)\dot{\theta}=0$$

$$\boxed{\ddot{\theta}-\frac{g}{R}\cos(\theta)+\frac{k}{m}\sin(\theta)=0}$$

6. Soit $\varepsilon=\theta-\theta_{éq}\Leftrightarrow\theta=\theta_{éq}+\varepsilon$ et $\varepsilon<<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\varepsilon<<1$ donc $\cos\varepsilon\simeq1$ et $\sin\varepsilon\simeq\varepsilon$

- Dérivées : $\theta=\theta_{éq}+\varepsilon\Rightarrow\dot{\theta}=\dot{\varepsilon}$ et $\ddot{\theta}=\ddot{\varepsilon}$
- Fonctions trigonométriques :

$$\cos\theta=\cos\left(\theta_{éq}+\varepsilon\right)=\cos\theta_{éq}\cos\varepsilon-\sin\theta_{éq}\sin\varepsilon\simeq\cos\theta_{éq}-\varepsilon\sin\theta_{éq}$$

$$\sin\theta=\sin\left(\theta_{éq}+\varepsilon\right)=\sin\theta_{éq}\cos\varepsilon+\cos\theta_{éq}\sin\varepsilon\simeq\sin\theta_{éq}+\varepsilon\cos\theta_{éq}$$

- Équation différentielle vérifiée par $\varepsilon$ :

$$\ddot{\varepsilon}-\frac{g}{R}\left(\cos\theta_{éq}-\varepsilon\sin\theta_{éq}\right)+\frac{k}{m}\left(\sin\theta_{éq}+\varepsilon\cos\theta_{éq}\right)=0$$

$$\ddot{\varepsilon}+\left(\frac{g}{R}\sin\theta_{éq}+\frac{k}{m}\cos\theta_{éq}\right)\varepsilon=\frac{g}{R}\cos\theta_{éq}-\frac{k}{m}\sin\theta_{éq}=0$$

car, d'après la question 2, $kR^2 \sin\left(\theta_{éq}\right) = mgR\cos\left(\theta_{éq}\right) \Leftrightarrow \frac{g}{R}\cos\theta_{éq} - \frac{k}{m}\sin\theta_{éq} = 0$

- Équation différentielle du second ordre d'un <u>oscillateur harmonique non amorti</u> : $\boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}\sin\theta_{éq} + \frac{k}{m}\cos\theta_{éq}}}$

7. Solution de l'équation sans second membre et de l'équation complète :

$$\varepsilon(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Conditions initiales : $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = A$ et $\dot{\varepsilon}(t) = 0 = B\omega_0\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow B = 0$

Solution finale : $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos(\omega_0 t)$

Angle : $\boxed{\theta(t) = \theta_{éq} + \varepsilon(t) = \theta_{éq} + \varepsilon_0\cos(\omega_0 t)}$

La bille effectue des <u>oscillations sinusoïdales autour de la position d'équilibre stable</u> $\theta_{éq}$, à la <u>pulsation propre</u> $\omega_0$.