À chercher pour lundi 03/04/2023, corrigé

Exercice 2. Les polynômes de F sont de la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $P(1) = 0 \Leftrightarrow a+b+c+d = 0$. On peut alors exprimer par exemple d en fonction des autres coefficients pour obtenir :

$$P(X) = a(X^3 - 1) + b(X^2 - 1) + c(X - 1).$$

On en déduit que $F = \text{Vect}(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$. De plus, cette famille de 3 polynômes est libre car tous les polynômes sont de degrés différents (échelonnés). On a donc $\dim(F) = 3$.

On procède de même pour G avec cette fois l'équation $P(-1) = 0 \Leftrightarrow -a+b-c+d = 0$. On obtient alors de la même façon :

$$G = \text{Vect}(X^3 + 1, X^2 - 1, X + 1).$$

On trouve de même que $\dim(G) = 3$ (famille libre).
On a $F \cap G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(1) = P(-1) = 0\}$.

Soit $P \in F \cap G$. On a alors P qui admet 1 et -1 comme racine. Puisque P est de degré au plus 3, on en déduit qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = (X - 1)(X + 1)(aX + b)$. On en déduit que :

$$P(X) = aX(X - 1)(X + 1) + b(X - 1)(X + 1).$$

La famille formée de $e_1 = X(X - 1)(X + 1)$ et de $e_2 = (X - 1)(X + 1)$ est donc une famille génératrice de $F \cap G$. De plus, cette famille est libre (car elle est constituée de polynômes de degrés distincts). On en déduit que $F \cap G$ est de dimension 2.

Exercice 9.

1) On a tout d'abord $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}_{2n}[X]$ et $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}_{2n}[X]$, les deux ensembles sont non vides (ils contiennent le polynôme nul). De plus, si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$(\lambda P_1 + \mu P_2)(-X) = \lambda P_1(-X) + \mu P_2(-X) = \lambda P_1(X) + \mu P_2(X).$$

On a donc $\mathcal{P}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_{2n}[X]$. On procède de même pour $\mathcal{I}$.

Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en somme directe, autrement dit, montrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{K}_{2n}[X]}\}$. Soit $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. On a alors $P(X) = P(-X)$ et $-P(X) = P(-X)$. On en déduit que $P(X) = -P(X)$, soit que $2P(X) = 0$ soit que $P(X) = 0$ (le polynome nul). Ces espaces sont donc en somme directe.

2) On a directement que la famille $(1, X^2, X^4, \ldots, X^{2n})$ est dans $\mathcal{P}$ et elle est libre car extraite de la base canonique. Puisqu'elle contient $n + 1$ polynômes, on en déduit que $\dim(\mathcal{P}) \geq n + 1$.

On a de même que $(X, X^3, \ldots, X^{2n-1})$ est dans $\mathcal{I}$ et que cette famille est libre donc $\dim(\mathcal{I}) \geq n$.

3) On a $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} \subset \mathbb{K}_{2n}[X]$ et on a en prenant les dimensions :

$$\dim(\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}) \leq \dim(\mathbb{K}_{2n})[X]) = 2n + 1.$$

On a donc $\dim(\mathcal{P}) + \dim(\mathcal{I}) \leq 2n + 1$. Or, on a aussi $2n + 1 = n + 1 + n \leq \dim(\mathcal{P}) + \dim(\mathcal{I})$. On a donc finalement par double encadrement que $\dim(\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}) = 2n + 1$ ce qui donne deux points :

Tout d'abord puisque l'on a une inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{K}_{2n}[X]$.

Enfin, puisque l'on a par égalité des dimensions que $\dim(\mathcal{P}) = n + 1$ et $\dim(\mathcal{I}) = n$, alors les familles libres trouvées Ã la question 2 ont exactement le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace et forment donc des bases de ces espaces.