# 9. Ensembles et applications

**Exercice 1.** (c) Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Montrer que $(E \subset F) \Leftrightarrow (E \cup F = F) \Leftrightarrow (E \cap F = E)$.

**Exercice 2.** (m) Démontrer que $A, B, C$ des parties de $E$, $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

**Exercice 3.** (m) Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

1) Montrer que $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

2) Montrer que $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

**Exercice 4.** (m) Pour $A$ et $B$ deux parties de $E$, on note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ la différence symétrique de $A$ et $B$. Soient $A, B, C$ trois parties de $E$.

1) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2) Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.

3) Montrer que $A \Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

**Exercice 5.** (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$, $g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ et $h : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array} \right.$.

1) Déterminer $f(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[)$ et $f^{-1}(]0, 1])$.

2) Déterminer $g(]0, 1])$ et $g^{-1}([1, 3])$.

3) Déterminer $h(\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R}_+)$ et $h^{-1}([-6, 6])$.

**Exercice 6.** (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z + e^{-z} \end{array} \right.$.

1) Calculer $f(i\mathbb{R})$ et le représenter graphiquement.

2) Calculer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et le représenter graphiquement.

**Exercice 7.** (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \right.$.

1) Vérifier que $f$ est bien définie. $f$ est-elle injective ? $f$ est-elle surjective ?

2) On pose $R_1 = \{x + iy,\ x \in \mathbb{R}_-, y \in [0, 2\pi]\}$ et $R_2 = \left\{x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$. Déterminer $f(R_1)$ et $f(R_2)$ et les représenter graphiquement.

3) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$ et les représenter graphiquement.

**Exercice 8.** (m) Soient $E, F, G$ trois ensembles.

1) Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et $g$ injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

2) Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ et $f$ surjective. Montrer que $g_1 = g_2$.

**Exercice 9.** (m)/ (i) Soient $A, B, C$ trois ensembles et $f : A \to C$ et $g : B \to C$ deux bijections.

1) Montrer que $h : \left\{ \begin{array}{lcl} A \times B & \to & C^2 \\ (a,b) & \mapsto & (f(a), g(b)) \end{array} \right.$ est bijective.

2) Montrer que $k : \left\{ \begin{array}{lcl} A \cup B & \to & C \\ x & \mapsto & f(x) \text{ si } x \in A \\ x & \mapsto & g(x) \text{ si } x \notin A \end{array} \right.$ est surjective. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que :

   a) chaque élément de $C$ soit atteint exactement deux fois par $k$.

   b) $k$ soit injective.

**Exercice 10.** (m)/ (i) Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1) $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

2) $f$ est surjective ssi $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$.

3) $f$ est injective ssi $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

**Exercice 11.** (m)/ (i) Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$.

1) Montrer que $f$ est injective si et seulement si $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

2) Montrer que $f$ est bijective si et seulement si $\forall A \subset E,\ f(\overline{A}) = \overline{(f(A))}$.

**Exercice 12.** (∗) On considère deux parties $A$ et $B$ d'un ensemble $E$. Soit $f$ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1) Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2) Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

3) On suppose $f$ bijective. Expliciter $f^{-1}$.

**Exercice 13.** (m) On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ y = x^n$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

**Exercice 14.** (m) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres $O$ et $O'$ et de rayons $R$ et $R'$. On dit que $\mathcal{C}$ est en relation avec $\mathcal{C}'$ si $d(O, O') \leq R' - R$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan. Est-ce une relation d'ordre totale ? *Il est conseillé d'essayer de visualiser graphiquement cette relation d'ordre.*

**Exercice 15.** (c) On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ est *circulaire* si $(a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a$. Montrer que si $\mathcal{R}$ est circulaire et réflexive, alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

**Exercice 16.** (c) Montrer que $z_1\mathcal{R}z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ et déterminer les différentes classes d'équivalence.

**Exercice 17.** (m) Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $x\mathcal{R}y$ ssi $ye^x = xe^y$. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ et déterminer pour chaque $x \in \mathbb{R}$ le nombre d'éléments dans sa classe d'équivalence.

**Exercice 18.** (m) Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose $\forall i \in I,\ A_i = f^{-1}(\{i\})$. Montrer que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de $E$.

**Exercice 19. Théorème de Cantor.** (i) Soit $E$ un ensemble et $f$ une fonction de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$. En considérant $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$, montrer que $f$ ne peut être surjective.