25. Matrices 2 , méthodologie

I. Matrice d'une famille de vecteurs et d'une application linéaire

I.1. Matrice d'une famille de vecteurs

Définition. Soit F un $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(F) = n$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Pour tout $x \in F$, il existe des uniques $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ (ce sont les coordonnées de x dans la base f) tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. La matrice de x exprimée dans la base f est :

$$\mathrm{Mat}_f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Définition. Soit F un $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(F) = n$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $(x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$ une famille de vecteurs de F. Il existe alors des uniques $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ tels que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $x^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_j$. La matrice de la famille $(x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$ exprimée dans la base f est :

$$\mathrm{Mat}_f(x^{(1)}, \dots, x^{(p)}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

m Pour déterminer la matrice d'un vecteur dans une base donnée, il suffit donc de le décomposer dans la base et de recopier les coordonnées en colonne. Pour la matrice d'une famille de vecteurs, c'est la même chose mais il faut décomposer chacun des vecteurs dans la base et recopier les colonnes les unes à côté des autres.

Exercice d'application 1. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose alors :

$$\forall j \in [\![1, 3]\!],\ f_j = \sum_{i=1}^{j} e_i.$$

1) Écrire la matrice de la famille (f_1, f_2, f_3) dans la base (e_1, e_2, e_3).

2) Écrire la matrice de la famille (f_3, f_2, f_1) dans la base (e_1, e_2, e_3), puis dans la base (e_3, e_2, e_1).

3) Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3 et en déduire $\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1, e_2, e_3)$.

4) Qu'aurait-il fallu vérifier **avant** d'écrire la matrice de la question 3 ? Le vérifier.

Exercice d'application 2. On pose $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = (X+3)^2$ et $P_3 = (X+1)^2 - (X-1)^2$.

1) Déterminer les matrices de P_1, P_2, P_3 dans la base de $\mathbb{R}_2[X]$ $(1, X, X^2)$.

2) Reprendre la première question en considérant comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ la famille $(X^2, X+1, X-1)$. *On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une base mais vous pouvez le vérifier si vous n'êtes pas sûrs.*

3) Peut-on écrire la matrice de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base de $\mathbb{R}_3[X]$ $(1, X, X^2, X^3)$ (et si oui, l'écrire) ? Même question dans la base de $\mathbb{R}_1[X]$ $(1, X)$.

Exercice d'application 3. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^k X^j$. *On rappelle la convention* $0^0 = 1$.

1) On pose A la matrice de la famille $(P_0, \ldots, P_p)$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, combien de colonnes et combien de lignes à cette matrice ?

2) Écrire cette matrice.

3) Si on note B la matrice de la famille $(P_1, P_0, P_2, \ldots, P_p)$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, comment peut-on passer de la matrice A à la matrice B ?

4) Si on note C la matrice de la famille $(P_0, \ldots, P_p)$ dans la base $(X, 1, X^2, \ldots, X^n)$, comment peut-on passer de la matrice A à la matrice C ?

I.2. Matrice d'une application linéaire

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Soit $u \in L(E, F)$, $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. La matrice de u exprimée dans les bases e (au départ) et f (à l'arrivée) est la matrice de la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ dans la base f :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \mathrm{Mat}_f(u(e_1), \ldots, u(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Si $E = F$ (même espace vectoriel au départ et à l'arrivée) et que $e = f$ (même base au départ et à l'arrivée), on note $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \mathrm{Mat}_e(u)$ afin d'alléger les notations.

m Pour déterminer la matrice d'une application linéaire, il faut donc calculer les images des vecteurs de la base de l'espace de départ et trouver leurs coordonnées dans la base de l'espace d'arrivée. La matrice aura donc autant de colonnes que la dimension de l'espace de départ et autant de lignes que la dimension de l'espace d'arrivée (et sera donc carrée si ces deux espaces sont égaux).

Exercice d'application 4. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ étant $c_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$, déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée :

1) $u_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$.

2) $u_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_5[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$.

3) $u_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$.

4) $u_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) & \mapsto & P(-X) \end{array} \right.$.

5) $u_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

6) $u_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + P' + P'' + P''' \end{array} \right.$.

I.3. Intérêt des matrices

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors l'application linéaire canoniquement associée à A est l'unique application linéaire $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ où e et f sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

I.4. Espaces vectoriels de matrices

Proposition. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On rappelle que* $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall q \in [\![1,p]\!]$, $(E_{i,j})_{p,q} = \delta_{i,p}\delta_{j,q}$ *qui vaut 1 si* $i = p$ *et* $j = q$ *et 0 sinon.*

Proposition. En particulier $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2. De plus :

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice d'application 5. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

m Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel de matrices, on peut soit la déterminer graphiquement en cherchant le nombre de coefficients indépendants à imposer pour fixer entièrement une matrice de cet espace (mais ce n'est pas très rigoureux à l'écrit), soit exhiber une base de cet espace et compter le nombre de vecteurs de la base. Pour justifier la liberté de cette base, si les matrices de cette base s'écrivent avec des $E_{i,j}$ (les matrices élémentaires) distincts, alors ces matrices sont libres.

Exercice d'application 6. Pour $n \geq 2$, on pose :

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,n+1-j} = a_{i,j}\}.$$

1) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Pour $n = 2$, vérifier que $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et en déduire que $\dim(E_2) = 2$.

3) Déterminer graphiquement une base et la dimension de E_3 et E_4.

4) Déterminer la dimension de E_n. *On pourra séparer les cas n pair et n impair..*

II. Propriétés matricielles des applications linéaires

II.1. Composition

Définition. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors, $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!],\ (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

(m) On peut visualiser graphiquement le produit matriciel de la manière suivante, si on note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, représenté sous la forme $\begin{array}{cc} \Rsh & B \\ A & A \times B \end{array}$:

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{cc|c|cc} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{array}\right) \\
\left(\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,1} & \cdots & \cdots & a_{3,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,p} \\ \hline \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{array}\right) & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right)
\end{array}$$

On considère donc la i-ième ligne de A (que l'on notera L_i) et la j-ième colonne de B (que l'on notera C_j), on multiplie le premier coefficient de L_i avec le premier coefficient de C_j, le second de L_i avec le second de C_j, etc. et on fait la somme de tous ces produits. *Puisque A a autant de colonnes que B a de lignes, on peut bien à chaque fois faire les produits.*

Proposition. Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim(E) = q$, $\dim(F) = p$ et $\dim(G) = n$. Soient e une base de E, f une base de F et g une base de G. Alors, pour $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(u).$$

Proposition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Soient e une base de E et f une base de F. Alors, pour $u \in L(E,F)$ et $x \in F$, on a :

$$\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \times \mathrm{Mat}_e(x).$$

(m) Ces formules nous permettent de justifier que tous les calculs de composées d'applications linéaires/d'images de vecteurs par des applications linéaires peuvent être fait à l'aide d'un produit de matrice (où l'on dispose d'une formule). En pratique, on étudiera les applications linéaires grâce à leurs matrices et on fera tous les calculs matriciellement.

(m) Pour retenir ces formules, on retiendra que matriciellement, $v \circ u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}(v) \times \mathrm{Mat}(u)$ et $u(x) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}(u) \times \mathrm{Mat}(x)$. Pour savoir dans quelles bases/l'ordre des bases, il suffit de regarder à quel ensemble appartient chaque vecteur/chaque application linéaire et de remarquer qu'une seule écriture a un sens. Par exemple, pour savoir s'il faut écrire $\mathrm{Mat}_{f,g}(v)$ ou $\mathrm{Mat}_{g,f}(v)$, on sait que v est linéaire de F dans G donc l'espace de départ de v et F et son espace d'arrivée est G. Il faut donc écrire $\mathrm{Mat}_{f,g}(v)$. De même pour les vecteurs, puisque $x \in E$, la seule matrice qui a du sens est $\mathrm{Mat}_e(x)$.

II.2. Image, noyau et rang d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le noyau de A est $\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$.
- L'image de A est $\mathrm{Im}(A) = \{AX, \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$.
- Le rang de A est $\dim(\mathrm{Im}(A))$, c'est à dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

m Pour déterminer le noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on résout l'équation $AX = 0$ (qui aboutit à un système linéaire à n équations et p inconnues).

m Pour déterminer l'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on utilise le fait que $\mathrm{Im}(A)$ est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

Exercice d'application 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une base de $\ker(A)$.

2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$.

m L'image et le noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont liés à l'image et au noyau de l'application linéaire $u \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A. Ils représentent les coordonnées des vecteurs de l'image et du noyau de u exprimés dans la base canonique e de $\mathbb{K}^p$ (ou la base canonique f de $\mathbb{K}^n$ pour l'image). On a donc :

- $x \in \ker(u) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_e(x) \in \ker(A)$.
- $y \in \mathrm{Im}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_f(y) \in \mathrm{Im}(A)$.
- $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice d'application 8. On reprend la matrice A de l'exercice précédent et on note $u \in L(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Vérifier que $A^2 = A$. Que peut-on dire alors de u ?

2) En déduire que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = \mathbb{R}^3$. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ et justifier que $\ker(u)$ est de dimension 1 et $\mathrm{Im}(u)$ de dimension 2.

3) On considère (f_1, f_2) une base de $\mathrm{Im}(u)$ et f_3 une base de $\ker(u)$. On pose alors $f = (f_1, f_2, f_3)$ (qui est donc une base de $\mathbb{R}^3$ d'après la question 2). Que vaut $\mathrm{Mat}_f(u)$?

II.3. Inversibilité

Proposition. Soit $u \in L(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-evs de même dimension n. Soient e une base de E et f une base de F. Alors :

$$u \text{ est inversible } \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \text{ est inversible.}$$

On a de plus dans ce cas $\mathrm{Mat}_{f,e}(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{e,f}(u))^{-1}$.

Remarque : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et que $u \in L(E)$ et e est une base de E, alors u est inversible si et seulement si $\mathrm{Mat}_e(u)$ est inversible et on a alors $\mathrm{Mat}_e(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_e(u))^{-1}$. Montrer qu'une application linéaire est inversible revient donc à montrer que sa matrice dans une base de E (on peut choisir celle que l'on veut !) est inversible, ce qui rend souvent les calculs plus faciles.

Exercice d'application 9. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. On notera $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) On pose $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que la famille $f = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Écrire $\mathrm{Mat}_e(u)$, $\mathrm{Mat}_e(f_1)$, $\mathrm{Mat}_e(f_2)$ et en déduire $\mathrm{Mat}_e(u(f_1))$ et $\mathrm{Mat}_e(u(f_2))$ puis $u(f_1)$ et $u(f_2)$ en fonction de f_1 et f_2. En déduire finalement $\mathrm{Mat}_f(u)$, puis que u est inversible et déterminer la matrice de u^{-1} dans la base f.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a A inversible si et seulement si elle est inversible à gauche ou à droite.

(m) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour **vérifier** qu'une matrice B connue est A^{-1}, il suffit de vérifier que B est carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $A \times B = I_n$ ou que $B \times A = I_n$ (vérifier un seul des deux produits suffit).

Exercice d'application 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^N = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Vérifier que $I_n - A$ est inversible d'inverse $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} A^k$.

Exercice d'application 11. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{array} \right.$. Vérifier que A est inversible d'inverse $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition. On a également A inversible si et seulement si $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

(m) Pour **prouver** qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible (sans déterminer A^{-1}), il est plus facile de montrer que $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$, autrement dit que l'unique solution de $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ est $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, en utilisant la méthode du pivot.

Exercice d'application 12. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

(m) Pour **déterminer** l'inverse A^{-1}, on étudie le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et on le transforme à l'aide de la méthode du pivot en un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1 & = & b_{1,1}y_1 + \ldots + b_{1,n}y_n \\ x_2 & = & b_{2,1}y_1 + \ldots + b_{2,n}y_n \\ \ldots & & \\ x_n & = & b_{n,1}y_1 + \ldots + b_{n,n}y_n \end{cases} \Leftrightarrow X = BY.$$

On a alors A inversible et $A^{-1} = B$.

Exercice d'application 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice d'application 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

II.4. Retour sur les systèmes linéaires

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors l'équation $AX = B$ est un système linéaire à n équations et p inconnues. Le rang de ce système est $\mathrm{rg}(A)$.

- Le système $AX = B$ est compatible (c'est à dire a au moins une solution) si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.
- Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X = X_p + X_h$ où X_p est une solution particulière et où $X_h \in \ker(A)$. *Le système $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}}$ est appelé le système homogène associé au système $AX = B$.*
- Dans ce dernier cas, $\dim(\ker(A)) = p - \mathrm{rg}(A)$. On dira que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

Proposition. Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède comme unique solution $X = A^{-1}B$. Le système est dit de Cramer.

(m) Pour résoudre le système $AX = B$, on effectue donc l'algorithme du pivot en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice d'application 15. On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exercice 7. Les matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-elles dans l'image de A ? Si c'est le cas, résoudre le système $AX = B$.

II.5. Calculs par blocs

Proposition. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ avec $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A_2, B_2 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A_3, B_3 \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $A_4, B_4 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

(m) Quand on effectue des produits blocs, tout se passe comme pour une multiplication matricielle « usuelle » à condition que les tailles des blocs soient compatibles. Il faut cependant faire attention à l'ordre des produits, la multiplication matricielle n'étant pas commutative.

Exercice d'application 16. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ est inversible. *On intuitera une matrice par blocs qui pourrait convenir et on démontrera qu'elle est bien l'inverse de la matrice proposée.*

Exercice d'application 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. *On commencera par calculer pour $p = 2, 3, 4, 5$ et on pourra étudier selon la parité de p.*

III. Changements de base

III.1. Matrices de passage

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. La matrice de passage de la base e vers la base f est la matrice de la famille f exprimée dans la base e.

$$P_e^f = \mathrm{Mat}_e(f) = \mathrm{Mat}_{f,e}(\mathrm{Id}_E).$$

(m) Pour se souvenir quelle base il faut décomposer en fonction de quelle base, il suffit de regarder l'écriture P_e^f. Puisque f est en haut, ce sont les vecteurs que l'on doit écrire en colonne (donc dont on doit trouver les coordonnées dans la base e). La j-ième colonne de P_e^f est donc le vecteur f_j décomposé dans la base e et la i-ième ligne de P_e^f est la ligne des i-ièmes coordonnées (donc selon e_i quand on décompose dans la base e) des vecteurs $f_1, \dots, f_n$.

(m) Pour écrire P_e^f, il faut donc trouver une expression des vecteurs de la base f en fonction des vecteurs de la base e et utiliser cette décomposition pour écrire la matrice de la base f dans la base e.

Exercice d'application 18. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose alors $f = (f_1, f_2, f_3)$ la famille définie par :

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ \ f_2 = e_1 - e_2 \text{ et } f_3 = 2e_1 + e_2 - e_3.$$

1) Montrer que f est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Quelle matrice de passage entre P_e^f et P_f^e est la plus facile à écrire ? L'écrire.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e et f deux bases de E. Alors, P_e^f est inversible et $\left(P_e^f\right)^{-1} = P_f^e$.

Exercice d'application 19. Dans l'exercice d'application précédent, déterminer l'autre matrice de passage en inversant celle trouvée en question 2. En déduire l'expression des vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs f_1, f_2, f_3.

III.2. Changement de base sur la matrice d'un vecteur

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $x \in E$ et e, f deux bases de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_e(x) = P_e^f \times \mathrm{Mat}_f(x).$$

m Il n'y a qu'une seule matrice de passage car on ne change que la base de E.

$$\mathrm{Mat}_{e}(x) = P_{e}^{f} \times \mathrm{Mat}_{f}(x)$$

Exercice d'application 20. On note $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f = (f_1, f_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ obtenue après avoir appliqué une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ à la base e.

1) Rappeler l'expression de f_1 et f_2 en fonction de e_1 et e_2.

2) En déduire P_e^f.

3) Soit $x = 2f_1 + 3f_2$. Déterminer les coordonnées de x dans la base (e_1, e_2) en utilisant les matrices de passage.

III.3. Changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Proposition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient e_1, e_2 deux bases de E et f_1, f_2 deux bases de F. Soit $u \in L(E, F)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{e_2,f_2}(u) = P_{f_2}^{f_1} \times \mathrm{Mat}_{e_1,f_1}(u) \times P_{e_1}^{e_2}.$$

Remarque : Cette formule n'est pas utile ! Il faudra surtout retenir la formule de changement de base dans le cas où $f_2 = e_2$ et $f_1 = e_1$ (voir matrices semblables).

IV. Matrices équivalentes et calcul de rang

Proposition. Multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.

IV.1. Matrices équivalentes

Définition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est équivalente à B (et on note $A \sim B$) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Proposition. $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition. Soient $n, p, r \in \mathbb{N}^*$ avec $r \leq \min(n, p)$. On note $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice définie par :

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

On a $\mathrm{rg}(J_{n,p,r}) = r$.

Proposition. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. En particulier, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors elle est équivalente à la matrice $J_{n,p,r}$.

m Quand on veut montrer qu'une propriété est vraie pour toutes les matrices de rang r, on montre en général que cette propriété est vraie pour la matrice $J_{n,p,r}$ et on l'étend à toutes les matrices de rang r en utilisant le fait que ces dernières sont équivalentes à $J_{n,p,r}$. *On peut ainsi montrer qu'une propriété est vraie pour toutes les matrices en faisant une disjonction de cas sur le rang.*

Exercice d'application 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, la matrice $J_{n,n,r}$ peut s'écrire comme une somme de deux matrices inversibles.

2) En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peuvent s'écrire comme une somme de deux matrices inversibles.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$. En particulier, le rang d'une matrice est à la fois le rang de ses colonnes et le rang de ses lignes.

IV.2. Méthode du pivot

Remarque : Les matrices d'opérations élémentaires étant toutes inversibles, multiplier par une telle matrice ne modifie pas le rang. La multiplication d'une matrice par une matrice élémentaire à gauche (respectivement à droite) permet de réaliser une opération sur les lignes (resp. sur les colonnes) de cette matrice. Ainsi les opérations suivantes préservent le rang :

- $D_i(\lambda) \times A$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- $A \times D_i(\lambda)$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

- $S_{i,j} \times A$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
- $A \times S_{i,j}$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$.
- $T_{i,j}(\lambda) \times A$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
- $A \times T_{i,j}(\lambda)$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

(m) Pour calculer le rang d'une matrice, on utilise les opérations élémentaires (qui préservent le rang) et la méthode du pivot afin de transformer la matrice A en matrice dont on peut lire le rang facilement (en général triangulaire).

Exercice d'application 22. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 23. Déterminer en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

IV.3. Calcul du noyau et de l'image

(m) Pour déterminer **le noyau** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on étudie le système $AX = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On utilise alors la méthode du pivot (ce qui revient à faire des opérations élémentaires **sur les lignes** de A) pour trouver un système d'équations indépendantes de $\ker(A)$, puis une base de $\ker(A)$.

(m) Pour déterminer **l'image** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on utilise le fait que $\mathrm{Im}(A)$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A. On peut alors effectuer des opérations élémentaires **sur les colonnes** de A pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(A)$.

IV.4. Matrices extraites

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une matrice extraite de A est une matrice obtenue à partir de A à laquelle on a effacé un certain nombre de lignes et de colonnes.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si B est extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors il existe une matrice inversible extraite de A de rang r (donc une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ extraite de A et inversible). *Autrement dit, le rang de A est exactement le rang de la plus grande matrice inversible extraite de A.*

Exercice d'application 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A où on a effacé la ligne i et la colonne j.

1) On suppose $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$. Montrer qu'aucune matrice $A_{i,j}$ n'est inversible.

2) On suppose $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Montrer qu'il existe au moins une matrice $A_{i,j}$ inversible.

3) On suppose $\mathrm{rg}(A) = n$. Que peut-on dire du rang des matrices $A_{i,j}$? *On donnera un encadrement du type $p \leq \mathrm{rg}(A_{i,j}) \leq q$ avec p et q les plus précis possibles.*

V. Matrices semblables

V.1. Définition

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e et f deux bases de E. Soit $u \in L(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = P_e^f \times \mathrm{Mat}_f(u) \times P_f^e.$$

(m) Pour se souvenir de si la première matrice de passage est P_e^f ou P_f^e quand on passe de $\mathrm{Mat}_e(u)$ à $\mathrm{Mat}_f(u)$, il faut visualiser un « chemin » partant de la base e et passant par la base f avec les matrices de passage pour finalement revenir à la base e (avec deux matrices, une pour changer la base au départ et une pour la base d'arrivée). Le chemin est de cette forme :

$$\mathrm{Mat}_{e}(u) = P_{e}^{f} \times \mathrm{Mat}_{f}(u) \times P_{f}^{e}$$

Définition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables et on note AsB si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = P \times B \times P^{-1}.$$

Proposition. « être semblable » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (elle est réflexive, transitive et symétrique).

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est semblable à B si et seulement si elle représente la même application linéaire $u \in L(E)$ dans deux bases différentes, autrement dit si et seulement si il existe e et f deux bases de E telles que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_f(u)$.

Exercice d'application 25. Montrer que si A est semblable à B, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, A^N est semblable à B^N.

V.2. Applications

(m) Les résultats précédents sont les résultats les plus importants du chapitre. Quand on étudie une application linéaire $u \in L(E)$, on cherche une base de E dans laquelle la matrice de u est « simple » (diagonale ou triangulaire) et on peut alors passer de sa matrice dans la base canonique à sa matrice dans la nouvelle base grâce à la formule $\mathrm{Mat}_e(u) = P_e^f \times \mathrm{Mat}_f(u) \times P_f^e$ (qui permet de trouver la matrice P inversible pour passer de A à B puisque $P_f^e = \left(P_e^f\right)^{-1}$).

Exercice d'application 26. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $u \in L(\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire canoniquement associée à A, autrement dit l'application linéaire telle que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$.

1) Déterminer $x, y \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls tels que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire l'existence d'un vecteur $f_1 \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $u(f_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et exprimer f_1 en fonction de e_1 et e_2.

2) Déterminer de la même manière un vecteur $f_2 \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $u(f_2) = 2f_2$ et exprimer f_2 en fonction de e_1 et e_2.

3) Vérifier que $f = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sans calcul $B = \mathrm{Mat}_f(u)$.

4) Déterminer P_e^f et P_f^e.

5) En déduire l'existence de $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

6) En déduire pour $N \in \mathbb{N}^*$ l'expression de A^N en fonction de N.

V.3. Trace

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La trace de A est la somme des coefficients diagonaux de A. On a donc $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition. $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire et :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(A \times B) = \mathrm{Tr}(B \times A).$$

m Cette propriété de la trace permet quand on calcule la trace d'un produit de **deux** matrices d'échanger ces deux matrices.

Exercice d'application 27. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$.

2) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$.

3) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

4) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$.

Exercice d'application 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Proposition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, si A est semblable à B, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$. La trace de u est $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$ où e est une base de E (la valeur de la trace ne dépend pas de la base e choisie).

m Pour calculer $\mathrm{Tr}(u)$, on essaye de choisir la base de E dans laquelle il est facile de visualiser la diagonale de $\mathrm{Mat}_e(u)$ afin que la trace soit facile à calculer.

VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

$$\forall j \in [\![1,3]\!],\ f_j = \sum_{i=1}^{j} e_i.$$

1) Si on note $f = (f_1, f_2, f_3)$ et $e = (e_1, e_2, e_3)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) On échange f_1 et f_3 donc cela échange les colonnes 1 et 3. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f_3, f_2, f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on veut la matrice de (f_3, f_2, f_1) dans la base (e_3, e_2, e_1), il faut alors échanger à partir de la dernière matrice obtenue les lignes 1 et 3 (car on échange e_1 et e_3). On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{(e_3,e_2,e_1)}(f_3, f_2, f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) On a $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$ et $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. On en déduit que $e_1 = f_1$, puis $e_2 = f_2 - f_1$ et enfin $e_3 = f_3 - (f_2 - f_1) - f_1 = f_3 - f_2$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Il aurait fallu vérifier que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ car on ne peut écrire la matrice d'un vecteur (ou d'une famille de vecteurs) que dans une base de l'espace vectoriel étudié ! On a ici trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc il suffit de montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Or, on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + e_2) + \lambda_3 (e_1 + e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\Leftrightarrow\quad & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière implication (qui est également une équivalence, mais on a pas besoin du sens indirect ici) est vraie car la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Ce système implique directement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille (f_1, f_2, f_3) est donc libre.

Exercice d'application 2.

1) On a sous forme développée $P_2 = X^2 + 6X + 9$ et $P_3 = 4X$. On a donc, si on note $e = (1, X, X^2)$:

$$\mathrm{Mat}_e(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{Mat}_e(P_2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_e(P_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Attention ici à bien écrire les termes de degré 0 sur la première ligne et ceux de degré 2 sur la troisième ligne car on donne la base $(1, X, X^2)$ *et pas* $(X^2, X, 1)$.

2) Vérifions que $(X^2, X-1, X+1)$ est libre (et puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension 3, cela en sera une base). Si $\lambda_1 X^2 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X+1) = 0$, alors pour éliminer les termes de degré 2, on doit avoir $\lambda_1 = 0$. En évaluant ensuite en $X = 1$, on obtient $\lambda_3 = 0$ et en évaluant en $X = -1$, on obtient $\lambda_2 = 0$ ce qui prouve la liberté de la famille.

On doit alors décomposer chaque polynôme dans cette base (on notera $f = (X^2, X+1, X-1)$). On a directement $P_1 = 1 \times X^2 + 1 \times (X+1) + 0 \times (X-1)$ d'où $\mathrm{Mat}_f(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On procède de même pour les autres polynômes. On a $P_2 = X^2 + 6X + 9$. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $6X + 9 = a(X+1) + b(X-1) \Leftrightarrow 6X + 9 = (a+b)X + (a-b)$. On veut donc $a + b = 6$ et $a - b = 9$, soit en effectuant la somme $a = 15/2$ et $b = -3/2$. On a donc $\mathrm{Mat}_f(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 15/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$. Enfin, on a $P_3 = 4X = 2(X+1) + 2(X-1)$ d'où $\mathrm{Mat}_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) Puisque les trois polynômes sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, ils sont aussi dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on peut donc écrire la première matrice. On a $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2,X^3)}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut par contre pas écrire la matrice de cette famille dans une base de $\mathbb{R}_1[X]$ car certains polynômes sont de degré 2 et n'appartiennent pas à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice d'application 3.

1) La matrice A aura $n+1$ ligne (car $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$) et $p+1$ colonnes (car on écrit la matrice d'une famille de $p+1$ vecteurs). On a donc $A \in \mathcal{M}_{n+1,p+1}(\mathbb{R})$.

2) On a par définition $A = \begin{pmatrix} 0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 & \dots & 0^p \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & \dots & 1^p \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^0 & n^1 & n^2 & n^3 & \dots & n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & n^3 & \dots & n^p \end{pmatrix}$.

3) Pour obtenir B, il faut échanger les colonnes 1 et 2 de la matrice A (car on échange les vecteurs P_0 et P_1 sans changer la base dans laquelle on décompose).

4) Cette fois, il faut échanger les lignes 1 et 2 de la matrice A pour obtenir la matrice C (car on échange les deux premiers vecteurs de la base dans laquelle on décompose sans toucher aux vecteurs).

Exercice d'application 4. Remarquons déjà que toutes les applications proposées sont bien linéaires et qu'elles sont à chaque fois bien définie de l'espace de départ proposé dans l'espace d'arrivée proposé (toutes les images de l'espace de départ par ces applications linéaires appartient bien à l'espace d'arrivée).

1) On a $u_1(1) = 0$, $u_1(X) = 1$, $u_1(X^2) = 2X$, $u_1(X^3) = 3X^2$, $u_1(X^4) = 4X^3$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{c_4}(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Pour u_2, on a exactement la même forme mais avec une ligne de 0 en plus à la fin (car aucun polynôme n'utilise X^5). On a donc $\mathrm{Mat}_{c_4,c_5}(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Pour u_3, c'est comme pour u_1 mais avec une ligne en moins (car on n'utilise plus X^4, qui n'est pas utile ici puisque la dérivation peut aussi être vue de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ car on perd un degré). On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{c_4,c_3}(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) On a $u_4(X^k) = (-X)^k = (-1)^k X^k$. Pour k pair, on a donc $u_4(X^k) = X^k$ et pour k impair, on a $u_4(X^k) = -X^k$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{c_4}(u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) On a $u_5(1) = 1 - 1 = 0$, $u_5(X) = (X+1) - X = 1$, $u_5(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$ et $u_5(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{c_3}(u_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) On a $u_6(1) = 1$, $u_6(X) = X + 1$, $u_6(X^2) = X^2 + 2X + 2$ et $u_6(X^3) = X^3 + 3X^2 + 6X + 6$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{c_3}(u_6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 5. On a déjà $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ (car $n^2 = \dfrac{n^2+n}{2} + \dfrac{n^2-n}{2}$. De plus, on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$ (car si $A^T = A$ et $A^T = -A$, alors $A = 0$. La somme est directe et on a la somme des dimensions qui fait la dimension totale. On a donc bien $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice d'application 6.

1) On a bien la matrice nulle qui est dans E_n et $E_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A, B \in E_n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors pour $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}(\lambda A + \mu B)_{i,n+1-j} &= \lambda a_{i,n+1-j} + \mu b_{i,n+1-j} \\ &= \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} \\ &= (\lambda A + \mu B)_{i,j}.\end{aligned}$$

On a donc bien $\lambda A + \mu B \in E_n$. On a bien E_n qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Pour $n = 2$, on a $A \in E_n \Leftrightarrow a_{1,2} = a_{1,1}$ et $a_{2,1} = a_{2,2}$ (on trouve deux fois les mêmes égalités quand on utilise la propriété en $i, j \in [\![1, 2]\!]$). Ceci entraine que :

$$E_n = \{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ces deux matrices étant clairement libres (elles sont des coefficients non nuls à des emplacements différents), on en déduit que E_n est de dimension 2.

3) On a de même $E_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{pmatrix},\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\right\}$. On a donc E_3 de dimension 6 (il y a 6 coefficients indépendants). On a également :

$$E_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ c & d & d & c \\ e & f & f & e \\ g & h & h & g \end{pmatrix},\ a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}\right\}.$$

On a donc E_4 de dimension 8.

4) Pour n pair, on voit que l'on peut coupler le coefficient (i, j) avec le coefficient $(i, n+1-j)$. On a donc :

$$E_n = \text{Vect}\left((E_{i,j} + E_{i,n+1-j}),\ i \in [\![1, n]\!],\ j \in [\![1, n/2]\!]\right).$$

Ceci entraine que E_n est de dimension $n^2/2$, les différentes matrices étant libres car faisant intervenir des matrices $E_{i,j}$ différentes. On a bien i qui parcourt tous les indices de 1 à n et j qui s'arrête à la moitié (on a une symétrie axiale par rapport à un axe des ordonnées situé au milieu de la matrice).

Pour n impair, on a cette fois des coefficients seuls sur la colonne du milieu (d'indice $(n+1)/2$). On a donc :

$$E_n = \text{Vect}\left((E_{i,j} + E_{i,n+1-j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le (n-1)/2}, (E_{i,(n+1)/2})_{1 \le i \le n}\right).$$

Ces matrices sont toutes libres (elles font intervenir des matrices $E_{i,j}$ différentes) et on a donc $\dim(E_n) = n \times (n-1)/2 + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice d'application 7.

1) On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$. On peut alors résoudre ce système linéaire en utilisant la méthode du pivot ou directement car on a ici $x = z$, $y = x = z$ et la première ligne donne alors $0 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\ker(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z \text{ et } y = z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Une base de $\ker(A)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) On a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Les deux derniers vecteurs sont clairement libres car non colinéaires et on remarque que la somme des vecteurs vaut le vecteur nul ce qui implique que le premier vecteur est lié aux deux derniers. On en déduit qu'une base de $\mathrm{Im}(A)$ est constituée (par exemple) de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. *On aurait pu garder les signes $-$, vu que l'espace vectoriel engendré par le vecteur e ou le vecteur $-e$ est le même...*

Exercice d'application 8.

1) On a bien $A^2 = A$ (vérification graphique). Ceci signifie que $u^2 = u$. Ceci signifie que u est un projecteur.

2) Puisque u est une projection, on sait qu'il s'agit de la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$. Toujours puisque l'on a une projection, on sait que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$. Puisque $\ker(A)$ est de dimension 1 (en tant qu'espace vectoriel de matrices), on a $\ker(u)$ de dimension 1 et puisque $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension 2, alors $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 2.

3) Puisque u est la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$, on a $u(f_1) = f_1$, $u(f_2) = f_2$ et $u(f_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 9.

1) On a $af_1 + bf_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $a + b = 0$ et $a - b = 0$. Par somme et différence, on obtient $a = b = 0$ donc la famille f est libre avec 2 vecteurs et $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

2) On a $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{Mat}_e(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_e(u(f_1)) = \mathrm{Mat}_e(u) \times \mathrm{Mat}_e(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_e(3f_1).$$

Ceci entraine que $u(f_1) = 3f_1$.

De même, $\mathrm{Mat}_e(f_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc $u(f_2) = f_2$.

On conclut finalement que $\mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible (car diagonale avec des coefficients non nuls) donc u est inversible et :

$$\mathrm{Mat}_f(u^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 10. On a :

$$\begin{array}{rcll} (I_n - A) \times B & = & (I_n - A) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} A^k & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} A^k - A^{k+1} & \\ & = & A^0 - A^N & \text{(par somme télescopique)} \\ & = & I_n - 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \\ & = & I_n. & \end{array}$$

On en déduit que $I_n - A$ est inversible à droite. Puisque $I_n - A$ est carrée, elle est également inversible à gauche avec le même inverse. Ceci entraine que $I_n - A$ est inversible et que $(I_n - A)^{-1} = B$.

Exercice d'application 11. On calcule $A \times B$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} 1 \times b_{k,j} + 0.$$

Si $i = j$, on a alors $(A \times B)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i} + b_{i,i} = 0 + 1 = 1$. Si $i > j$, on a dans la somme le terme pour $k = j + 1 \leq i$ où $b_{j+1,j} = -1$ et le terme pour $k = j$ tel que $b_{j,j} = 1$ (et les autres termes sont nuls) ce qui entraine que la somme est nulle et on a donc $(A \times B)_{i,j} = 0$. Enfin, si $i < j$, tous les termes de la somme sont nuls et on a $(A \times B)_{i,j} = 0$. On a donc $(A \times B)_{i,j} = \delta_{i,j}$ ce qui entraine $A \times B = I_n$. A est donc inversible à droite et carrée donc elle est inversible et son inverse est B.

Exercice d'application 12. On cherche $\ker(A)$ en résolvant $AX = 0_{R^3}$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot. On a :

$$\begin{array}{rl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + 3z = 0 & \\ -y - 7z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -4y - 8z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ y = -7z \\ 20z = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit que $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. A étant carrée, elle est inversible.

Exercice d'application 13. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et étudions le système $AX = Y$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 - y_3 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{array} \right. \qquad\qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2x_2 = y_1 - y_2 + y_3 & \qquad\qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -x_2 + x_3 = y_2 - y_3 & \\ x_1 + x_2 = y_3 & \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{y_1 - y_2 + y_3}{2} \\ x_3 = \dfrac{y_1 + y_2 - y_3}{2} \\ x_1 = \dfrac{-y_1 + y_2 + y_3}{2} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-y_1 + y_2 + y_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - y_2 + y_3}{2} \\ x_3 = \dfrac{y_1 + y_2 - y_3}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ceci entraine que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 14. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 \ldots - x_n = y_1 \\ x_2 - x_n = y_2 \\ x_3 - x_n = y_3 \\ \ldots \\ x_{n-1} - x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} x_i \\ x_2 = y_2 + y_n \\ x_3 = y_3 + y_n \\ \ldots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + (n-1)y_n \\ x_2 = y_2 + y_n \\ x_3 = y_3 + y_n \\ \ldots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{array} \right.$$

On en déduit que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 15. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$AX = B_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 = -1 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ x - z = 1 & \\ x - y = 1 & \end{array} \right.$$

Le système est incompatible et on a donc $B_1 \notin \mathrm{Im}(A)$.

Pour B_2, on remarque que B_2 est égal à la première colonne de A moins la deuxième moins la troisième. On a donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = B_2$, soit $B_2 \in \mathrm{Im}(A)$. *On peut également trouver cette solution particulière en étudiant le système $AX = B_2$.* Puisque l'on a trouvé $\ker(A)$ dans l'exercice 7, on en déduit que les solutions de $AX = B_2$ sont de la forme :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice d'application 16. Puisque cette matrice est diagonale par blocs, on intuite que l'inverse est diagonale par blocs. Posons $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. On vérifie alors que par produit diagonal blocs, $Q \times R = I_{n+1}$. On en déduit que Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = R$ (pour les matrices, être inversible à droite est équivalent à être inversible).

Exercice d'application 17. Pour $p = 2$, on a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

De même :

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & A^2 \\ A & 0_n \end{pmatrix}.$$

et par des calculs similaires :

$$B^4 = \begin{pmatrix} A^2 & 0_n \\ 0_n & A^2 \end{pmatrix} \text{ et } B^5 = \begin{pmatrix} 0_n & A^3 \\ A^2 & 0_n \end{pmatrix}.$$

On peut alors raisonnablement prouver par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}$, $B^{2p} = \begin{pmatrix} A^p & 0_n \\ 0_n & A^p \end{pmatrix}$ et $B^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0_n & A^{p+1} \\ A^p & 0_n \end{pmatrix}$. *On rappelle que $A^0 = I_n$ par convention.*

La propriété est vraie au rang 0 (et au rang 1). Soit $p \in \mathbb{N}$. Si la propriété est vraie au rang p, alors, on a :

$$B^{2p+2} = B \times B^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & A^{p+1} \\ A^p & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & 0_n \\ 0_n & A^{p+1} \end{pmatrix}$$

et

$$B^{2p+3} = B \times B^{2p+2} = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{p+1} & 0_n \\ 0_n & A^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & A^{p+2} \\ A^{p+1} & 0_n \end{pmatrix}$$

ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

Exercice d'application 18.

1) On va montrer que la famille est libre et puisqu'elle a 3 vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, on aura ainsi une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i f_i = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors :

$$\lambda_1(e_1+e_2+e_3)+\lambda_2(e_1-e_2)+\lambda_3(2e_1+e_2-e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)e_1+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)e_2+(\lambda_1-\lambda_3)e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$. La dernière égalité donne $\lambda_1 = \lambda_3$ et avec les deux premières égalités, on a donc $\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$. Par somme, on a $\lambda_1 = 0$ et on en déduit ensuite que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3) est donc libre et c'est ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

2) C'est P_e^f qui est plus facile à écrire car on a par définition les vecteurs de f en fonction de ceux de e. On a ici $P_e^f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 19. On résout le système $P_e^f X = Y$ pour déterminer l'inverse avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$
\begin{aligned}
P_e^f X = Y \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -2x_2 - x_3 = -y_1 + y_2 & \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -x_2 - 3x_3 = -y_1 + y_3 & \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 5x_3 = y_1 + y_2 - 2y_3 & \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ -x_2 - 3x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(y_1 + y_2 + 3y_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{5}(y_1 + y_2 - 2y_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(2y_1 - 3y_2 + y_3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

On a donc $P_f^e = (P_e^f)^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Par définition des matrices de passage, on a donc :

$$e_1 = \frac{1}{5}(f_1 + 2f_2 + f_3),\ e_2 = \frac{1}{5}(f_1 - 3f_2 + f_3) \text{ et } e_3 = \frac{1}{5}(3f_1 + f_2 - 2f_3).$$

Exercice d'application 20.

1) On a $f_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et $f_2 = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$.

2) On a $P_e^f = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

3) On a $\mathrm{Mat}_e(x) = P_e^f \times \mathrm{Mat}_f(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) - 3\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta) + 3\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 21.

1) On a par exemple $J_{n,n,r} = \begin{pmatrix} 2I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{pmatrix} + (-I_n)$. Ces deux matrices sont bien inversibles car diagonales avec des coefficients non nuls sur la diagonale.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si on note $r = \mathrm{rg}(A)$, on a A équivalente à $J_{n,n,r}$ donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = J_{n,n,r}$. D'après la question précédente, il existe $B, C \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $J_{n,n,r} = B + C$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
PAQ = B + C \quad &\Leftrightarrow \quad AQ = P^{-1}(B + C) \\
&\Leftrightarrow \quad A = P^{-1}(B + C)Q^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad A = P^{-1}BQ^{-1} + P^{-1}CQ^{-1}.
\end{aligned}
$$

Puisqu'un produit de matrices inversibles est inversible, on en déduit que A s'écrit comme une somme de deux matrices inversibles.

Exercice d'application 22. On va utiliser la 3ieme ligne comme pivot (afin de ne pas faire de multiplications par 1/2). On effectue donc d'abord $L_1 \leftrightarrow L_3$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On va utiliser à présent placer la 3ieme ligne comme pivot. On effectue donc d'abord $L_2 \leftrightarrow L_3$ et on simplifie ensuite L_3 et L_4 ($L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$) :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, on effectue $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ et on obtient :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Exercice d'application 23. On va utiliser au maximum des valeurs qui ne dépendent pas de λ comme pivot. On commence donc par échanger L_1 et L_2 et utiliser ensuite cette ligne pour simplifier les 2 autres. On a donc après $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Puis $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors une forme triangulaire. On remarque que si $\lambda = 1$, on a une matrice de rang 1 (on aurait pu le voir dès le début). Si $\lambda \neq 1$, on a une disjonction de cas à faire selon si $1 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ ou non. Si $\lambda = -1$, on a $\mathrm{rg}(A) = 2$ (car on a alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et les deux dernières lignes sont liées). Enfin, dans les autres cas ($\lambda \neq \pm 1$), on a $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Exercice d'application 24.

1) Puisque $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$, toutes les matrices extraites de A (et donc en particulier les matrices $A_{i,j}$) ont toutes un rang inférieur ou égal à $n-2$. Puisque $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, on en déduit que ces matrices ne sont pas inversibles (car leur rang est strictement inférieur à $n-1$).

2) Puisque $\mathrm{rg}(A) = n-1$, il existe $n-1$ lignes libres dans A. Notons i l'indice de la ligne que l'on peut enlever pour avoir une matrice de rang $n-1$. Cette matrice étant de rang $n-1$, il existe $n-1$ colonnes libres dans cette matrice. Notons j l'indice de la colonne que l'on peut enlever pour avoir une matrice de rang $n-1$. On a alors $A_{i,j}$ qui est de rang $n-1$ et dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Elle est donc inversible.

3) On a à présent $\mathrm{rg}(A) = n$. Puisque dans $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, elle ne peut pas être de rang plus grand que $n-1$. Enfin, puisqu'on enlève une ligne, on peut perdre au maximum un rang et puisqu'on enlève une colonne, on peut perdre au maximum un nouveau rang. On a donc $\mathrm{rg}(A_{i,j}) \geq n-2$. On a donc $n-2 \leq \mathrm{rg}(A_{i,j}) \leq n-1$.

Ainsi par exemple pour $A = I_n$, on a $A_{1,1} = I_{n-1}$ de rang $n-1$ et $A_{1,2}$ contient $n-2$ colonnes indépendantes (et la première colonne nulle) et est de rang $n-2$ donc on ne peut pas être plus précis dans l'encadrement.

Exercice d'application 25. A est semblable à B donc il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Montrons par récurrence sur N la propriété $\mathcal{P}(N)$: « $A^N = PB^NP^{-1}$ ». La propriété est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors par associativité du produit matriciel et puisque $P^{-1} \times P = I_n$:

$$\begin{array}{rcl} A^{N+1} & = & A^N \times A \\ & = & PB^NP^{-1} \times PBP^{-1} \\ & = & PB^N \times BP^{-1} \\ & = & PB^{N+1}P^{-1}. \end{array}$$

On a donc la propriété vraie au rang $N+1$. Ceci entraine que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $A^N = PB^NP^{-1}$ et donc que A^N est semblable à B^N.

Exercice d'application 26.

1) On a $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$. On prend donc par exemple $x = 1$ et $y = -1$. Ceci entraine que le vecteur $f_1 = e_1 - e_2$ (qui a comme matrice dans la base e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$) vérifie $u(f_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

2) De même, on cherche $x, y \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls tels que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases}$. On a donc $x = y = 1$ qui convient. On en déduit que le vecteur $f_2 = e_1 + e_2$ convient.

3) Puisque (f_1, f_2) est de cardinal 2 et $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, il suffit de montrer que la famille est libre pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^2$. On a pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2)e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Puisque la famille (e_1, e_2) est libre, on a donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$. Par somme et différence, on a donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ce qui entraine que la famille $f = (f_1, f_2)$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Puisque $u(f_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $u(f_2) = 2f_2$, on a $B = \mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) On a $P_e^f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puisque $f_1 = e_1 - e_2$ et $f_2 = e_1 + e_2$. Par somme et différence, on a

$e_1 = \dfrac{1}{2}(f_1+f_2)$ et $e_2 = \dfrac{1}{2}(f_2-f_1)$. On a donc :

$$P_f^e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

5) Si on pose $P = P_e^f$, on a P inversible et $P^{-1} = P_f^e$. D'après la formule de changement de base, on a :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = P_e^f \mathrm{Mat}_f(u) P_f^e$$

c'est à dire $A = PBP^{-1}$.

6) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par associativité du produit matriciel :

$$\begin{array}{rcl} A^N & = & (PBP^{-1})^N \\ & = & (PBP^{-1}) \times (PBP^{-1}) \times (PBP^{-1}) \times \ldots \times (PBP^{-1}) \\ & = & PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B\ldots B(P^{-1}P)BP^{-1} \\ & = & PB^NP^{-1}. \end{array}$$

Puisque B est diagonale, on a donc $A^N = P\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2^N\end{pmatrix}P^{-1}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} A^N & = & \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2^N\end{pmatrix} \times \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ & = & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2^N\\ 0 & 2^N\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ & = & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2^N & 2^N\\ 2^N & 2^N\end{pmatrix}. \end{array}$$

Exercice d'application 27. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(ABC) & = & \mathrm{Tr}(A \times (BC)) \\ & = & \mathrm{Tr}((BC) \times A) \\ & = & \mathrm{Tr}(BCA). \end{array}$$

On a donc la première égalité qui est vraie. La troisième égalité est également vraie car :

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}((AB)C) = \mathrm{Tr}(C(AB)) = \mathrm{Tr}(CAB).$$

Les égalités 2 et 4 sont cependant fausses en général. Si on prend $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, alors :

$$ABC = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } BAC = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

La deuxième égalité est donc fausse en général. On a également avec ces matrices $CBA = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ qui a une trace de 1 donc la quatrième égalité est également fausse en général.

Exercice d'application 28. Supposons que de telles matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existent. On a alors :

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n) = n.$$

Or, on a $\mathrm{Tr}(AB-BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB) = 0$. On a donc $0 = n$: absurde ! Il n'existe donc pas de telles matrices.