Devoir Surveillé 7, corrigé

PROBLÈME
Approximation du logarithme

1) Pour $t \in [0,1]$, on a $-t \neq 1$ et par somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}.$$

On a donc bien $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n f_n(t)$.

2) Soit $x \in [0,1]$. Tout est continue sur $[0,1]$ donc on peut intégrer l'égalité précédente entre 0 et x. Par linéarité de l'intégrale, on a donc :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n f_n(t)\right)dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^x t^k dt + (-1)^n \int_0^x f_n(t)dt.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$ et que $\displaystyle\int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1} - 0$, on a exactement l'égalité demandée.

3) Pour $t \in [0,1]$, on a $|f_n(t)| = \dfrac{t^n}{1+t}$. Puisque $1 \leq 1+t$, on a alors par quotient que $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$ et par produit avec t^n (qui est positif), on a bien $|f_n(t)| \leq t^n$. On a alors pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| &= \left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| \quad \text{(changement d'indice } k' = k-1\text{)} \\
&= \left|(-1)^n \int_0^x f_n(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^x f_n(t)dt\right|.
\end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale (puisque $0 \leq x$), on a :

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leq \int_0^x |f_n(t)|dt.$$

Toujours par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^x |f_n(t)|dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On a donc l'encadrement demandé.

4) Puisque $x \in [0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$. On en déduit alors par théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| = 0$, ce qui entraine que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x).$$

5) Pour $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$, on a $x = \frac{1}{2}$ et l'écart entre $\ln(1+x)$ et $S_n(x)$ est majoré par $\frac{1}{2^n(n+1)}$. Pour $\ln(2)$, on a $x = 1$ et l'écart entre $\ln(2)$ et $S_n(1)$ est majoré par $\frac{1}{n+1}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, l'écart sera rapidement plus petit dans le premier cas que dans le second (on a $\frac{1}{n+1} = o\left(\frac{1}{2^n(n+1)}\right)$).

Dans le premier cas, on veut $\frac{1}{2^n(n+1)} \leq \frac{1}{100}$ donc on voit que $n = 5$ convient car $\frac{1}{2^5 \times 6} = \frac{1}{32 \times 6} < \frac{1}{100}$. Dans le second cas, on veut $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100}$ donc il faut cette fois prendre $n = 99$.

De manière générale, on voit que la convergence est beaucoup plus rapide pour $x \in [0,1[$ à cause du x^n qui tend très rapidement vers 0.

6) Soit $X \leq 2$. On a $X^{\frac{1}{N}} = e^{\frac{1}{N}\ln(X)}$ qui tend vers 1 quand N tend vers l'infini. Cette suite étant décroissante, à partir d'un certain rang, elle sera comprise entre 1 et 2. On peut raisonner par équivalence pour trouver N tel que $X^{1/N} < 2$ (en utilisant la stricte croissance du logarithme) :

$$\begin{aligned} X^{1/N} < 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{N}\ln(X) < \ln(2) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(X)}{\ln(2)} < N. \end{aligned}$$

Le plus petit entier N vérifiant ceci est donc $\left\lfloor \frac{\ln(X)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$.

7) Si $2 \leq X$, on pose $x = X^{\frac{1}{N}}$ avec le N de la question précédente. On a alors $\ln(x) = \frac{1}{N}\ln(X)$ et donc $\ln(X) = N\ln(x)$. Puisque $x \in [1,2[$, on a vu que l'on pouvait approcher rapidement $\ln(x)$ par $S_n(x-1)$ et donc approcher $\ln(X)$ par $NS_n(x-1)$.

Si jamais $X \in]0,1[$, alors $\frac{1}{X} \in]1,+\infty[$ et $\ln(X) = -\ln\left(\frac{1}{X}\right)$. On approche donc $\ln\left(\frac{1}{X}\right)$ avec les approximations vues avant et on prend l'opposé.

PROBLÈME
Autour des matrices nilpotentes

Partie I. Propriétés et exemples.

1) *Définition de l'indice de nilpotence.*

a) L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = 0_n\}$ est non vide (puisque A est nilpotente) et minoré (par 1). Puisque c'est un ensemble d'entier, il admet un minimum.

b) On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Si N est le minimum, alors on a $A^N = 0_n$ (puisque le minimum est atteint). De plus, si $N = 1$, on a $N - 1 = 0$ et donc $A^0 = I_n \neq 0_n$. Si $N \geq 2$, alors $N - 1 \in \mathbb{N}^*$ et $A^{N-1} \neq 0_n$ car sinon, $N - 1$ serait dans l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = 0_n\}$ ce qui contredit le fait que N est le minimum.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si $A^N = 0_n$ et $A^{N-1} \neq 0_n$, alors on a pour tout $1 \leq k < N$, $A^k \neq 0_n$. En effet, si on avait pour un certain $k < N$, $A^k = 0_n$, alors on aurait $A^{N-1} = A^k \times A^{N-1-k}$ (puisque $N - 1 - k \geq 0$) et on aurait donc $A^{N-1} = 0_n$: absurde ! On en déduit que puisque $A^N = 0_n$, N est bien le premier entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0_n$. C'est donc bien le minimum de $\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = 0_n\}$.

2) *Exemples.*

a) On a directement $A_1^2 = 0_2$ et $B_1^2 = 0_2$ donc A_1 et B_1 sont nilpotentes d'indice 2 puisque $A_1 \neq 0_2$ et $B_1 \neq 0_2$.

b) On a $A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A_2^3 = 0_3$ donc A_2 est nilpotente d'indice 3 (puisque $A_2^2 \neq 0_3$).

On a $B_2^2 = 0_3$ donc B_2 est nilpotente d'indice 2 (puisque $B_2 \neq 0_3$).

On remarque que toutes les matrices nilpotentes ne sont pas triangulaires. On remarque aussi que pour des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on trouve des matrices d'indice de nilpotence 2 ou 3.

c) On a $A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3^4 = 0_4$. La matrice A_3 est donc nilpotente d'indice 4 (puisque $A_3^3 \neq 0_4$).

On remarque ici que la diagonale de 1 « remonte », ce qui était aussi le cas pour la matrice A_2 où le bloc triangulaire « remonte » jusqu'à disparaitre.

3) *Somme et produit.*

a) Puisque A et B commutente, on a $(AB)^{N_1} = A^{N_1} \times B^{N_1} = 0_n$ (on aurait le même résultat pour la puissance N_2). On en déduit que AB est nilpotente (avec son indice qui est inférieur à N_1, et également inférieur à N_2 par le même raisonnement).

b) Puisque A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton. Posons $N = N_1 + N_2$. On a alors :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^{N_1} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} + \sum_{k=N_1+1}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

On remarque que la deuxième somme est nulle (puisque $A^{N_1} = 0_n$, alors pour toutes les puissances $k > N_1$, on a $A^k = 0_n$). Dans la première somme, on a $k \leq N_1$ donc $N - k \geq N - N_1 = N_2$.

On en déduit que $B^{N-k} = 0_n$ pour tous les $k \in [\![0, N_1]\!]$. La première somme est donc aussi nulle et $(A+B)^N = 0_n$. On a donc bien $A+B$ nilpotente (d'indice inférieur ou égal à $N_1 + N_2$).

c) On a $A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $(A_1 + B_1)^2 = I_2$, ce qui entraine que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(A_1 + B_1)^{2N} = I_2$. Ceci entraine que $A_1 + B_1$ n'est pas nilpotente (sinon à partir d'un certain rang, les puissances seraient nulles ce qui n'est pas le cas car pour les puissances paires, on a l'identité).

On a $A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque alors que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(A_1 B_1)^N = \begin{pmatrix} 1^N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ (en effet, une matrice diagonale élevée à la puissance N est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont élevés à la puissance N). On a donc $A_1 B_1$ qui n'est pas nilpotente.

Partie II. Racines carrées de matrices.

4) *Racines carrées de matrices nilpotentes.*

a) On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on étudie l'équation $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$, on a alors le système :

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}.$$

La seconde ligne entraine que $a + d \neq 0$ donc la troisième entraine que $c = 0$. En étudiant alors les lignes 1 et 4, on a $a = d = 0$. On obtient alors $b(a+d) = 0$ d'où $0 = 1$: absurde ! La matrice A n'existe donc pas donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

b) On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où l'existence d'une racine carrée.

c)

i) On a $A^N = 0_n$ donc $(B^2)^N = 0_n$ soit $B^{2N} = 0_n$. On a donc B nilpotente avec un indice inférieur ou égal à $2N$. De plus, puisque $A^{N-1} \neq 0_n$, on a $B^{2N-2} \neq 0_n$. On en déduit que l'indice de nilpotence de B est donc soit $2N-1$, soit $2N$.

ii) D'après la partie I, l'indice de nilpotence de B est inférieur ou égal à n (puisque B est une matrice nilpotente de taille $n \times n$). On a donc $2N - 1 \leq n$ ou $2N \leq n$, soit $N \leq \frac{n+1}{2}$ ou $N \leq \frac{n}{2}$. Dans tous les cas, on a donc $N \leq \frac{n+1}{2}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est d'indice de nilpotence 3 (au carrée elle est non nulle et au cube elle est nulle). Par l'absurde, si elle admettait une racine carrée, on aurait donc $3 \leq \frac{3+1}{2} = 2$: absurde ! Elle n'admet donc pas de racine carrée.

5) *Racines carrées de matrices de la forme $I_n + A$ avec A nilpotente.*

a) D'après le cours, on a :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - j\right)}{k!} x^k + o(x^{N-1}).$$

b) On a $\sqrt{1+x} = P(x) + o(x^{N-1})$ donc (puisque $1+x>0$ au voisinage de 0) :

$$1 + x = (\sqrt{1+x})^2 = (P(x) + o(x^{N-1}))^2.$$

Or, on a $(P(x)+o(x^{N-1}))^2 = (P(x))^2 + 2P(x) \times o(x^{N-1}) + o(x^{2N-2}) = (P(x))^2 + o(x^{N-1})$ par troncature des développements limités. On a donc bien $Q(x) = 1 + x + o(x^{N-1})$.

Par unicité du développement limité, on en déduit que Q est de la forme $Q(X) = 1+X+\sum_{k=N}^{2N-2} a_k X^k$ (autrement dit les termes associés à X^0 et X sont égaux à 1 et ceux associés à X^k pour $k \in [\![2, N-1]\!]$ sont nuls).

c) On a alors $B^2 = P^2(A) = Q(A) = I_n + A + \sum_{k=N}^{2N-2} a_k A^k$. Puisque A est nilpotente d'indice N, on a alors $A^k = 0_n$ pour $k \geq N$. On a donc bien $B^2 = I_n + A$.

d) On a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A est nilpotente d'indice 3 et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut donc faire le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 ce qui donne :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

On a donc $P(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2$ ce qui donne comme racine carrée :

$$B = P(A) = I_3 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III. Une caractérisation des matrices nilpotentes

6) *Des résultats utiles.*

a) Pour $N = 1$, c'est le résultat donné par l'énoncé. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang N. On a alors :

$$T^{N+1} = T^N \times T.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $T^N = P^{-1}A^N P$ et $T = P^{-1}AP$. On a donc, en utilisant l'associativité du produit matriciel :

$$T^{N+1} = (P^{-1}A^N P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^N I_n AP = P^{-1}A^{N+1}P.$$

La propriété est donc vraie au rang $N+1$, ce qui termine la récurrence.

b) Si A est nilpotente, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0_n$ et donc $T^N = P^{-1}0_n P = 0_n$. Réciproquement, si T est nilpotente et que $T^N = 0_n$, on alors en multipliant par P et P^{-1} que $A^N = PT^N P^{-1} = 0_n$ donc A est nilpotente. On a donc l'équivalence demandée.

En déduire que A est nilpotente si et seulement si T est nilpotente.

c) Si tous les coefficients diagonaux de T sont nuls, alors d'après le résultat admis en fin de partie I, T est nilpotente (car triangulaire avec une diagonale nulle). Réciproquement, supposons T nilpotente. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^N = 0_n$. Or, puisque T est triangulaire, le coefficient diagonal de T^N en position (k,k) est exactement λ_k^N. On a donc $\lambda_k^N = 0$, soit $\lambda_k = 0$, ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

d) Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a alors :

$$\operatorname{Tr}(B \times C) = \sum_{i=1}^{n} (BC)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} c_{j,i}.$$

De même, $\operatorname{Tr}(C \times B) = \sum_{i=1}^{n} (CB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} b_{j,i}$. En intervertissant les sommes (les indices sont indépendants) et en renommant i en j, on a exactement l'égalité demandée.

e) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question 6.a :

$$\operatorname{Tr}(T^N) = \operatorname{Tr}(P^{-1} A^N P) = \operatorname{Tr}(P^{-1} \times (A^N P)).$$

D'après la question précédente, on a $\operatorname{Tr}(P^{-1} \times (A^N P)) = \operatorname{Tr}((A^N P) P^{-1}) = \operatorname{Tr}(A^N I_n) = \operatorname{Tr}(A^N)$ ce qui donne le résultat voulu.

f) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a $(T^N)_{k,k} = \lambda_k^N$ puisque T est triangulaire supérieure. On a donc directement $\operatorname{Tr}(T^N) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N$.

7) D'après les questions précédentes, on a A nilpotente si et seulement si T est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = 0$. De plus, on a également $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Tr}(A^N) = 0$ si et seulement si $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Tr}(T^N) = 0$ si et seulement si $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N = 0$. On doit donc bien montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0 \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N = 0.$$

Le sens direct est évident puisque si tous les λ_k sont nuls, alors on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_k^N = 0$ et donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N = 0$.

8) *Sens indirect.*

a) Pour $N = 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$. S'il n'y avait que λ_{k_1} de non nul, alors cette somme serait égal à λ_{k_1} et serait de fait non nulle : absurde ! Il existe donc au moins un autre indice k_2 tel que $\lambda_{k_2} \neq 0$.

Si tous les λ_k non nuls étaient tous égaux à λ_{k_1}, alors on aurait $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = n_0 \lambda_{k_1}$ où n_0 serait le nombre de termes non nuls. Cette somme serait donc encore non nulle : absurde ! Il existe donc au moins un λ_{k_2} non nul différent de λ_{k_1}.

b) La matrice $V_p X$ est bien définie (puisque $V_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et on a $V_p X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$(VX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^i a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k \lambda_k^i.$$

Or, cette somme est exactement $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^i$, où l'on a regroupé ensemble les λ_k^i égaux (il y en a exactement a_k) et où on a enlevé les termes nuls (qui valent 0 et ne modifient pas la somme). Par hypothèse, cette somme est nulle pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et elle est donc nulle pour $i \in [\![1, p]\!]$. On a donc bien tous les termes nuls, soit $VX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) *Inversibilité de V_p.*

i) On effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1$. On se ramène donc à la matrice $V_2' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$.

Or, par hypothèse, on a $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2^2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ puisque λ_2 est non nul et que $\lambda_2 \neq \lambda_1$. On s'est donc ramené à une matrice triangulaire inversible (les coefficients diagonaux sont tous non nuls) donc V_2 est inversible.

ii) Les premières opérations sur les lignes permettent de se ramener à une colonne de 0 sur la première colonne (sauf sur la première ligne). On se ramène donc à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p+1} \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \dots & \lambda_{p+1}^2 - \lambda_1\lambda_{p+1} \\ 0 & \lambda_2^3 - \lambda_1\lambda_2^2 & \dots & \lambda_{p+1}^3 - \lambda_1\lambda_{p+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{p+1} - \lambda_2^p\lambda_1 & \dots & \lambda_{p+1}^{p+1} - \lambda_1\lambda_{p+1}^p \end{pmatrix}.$$

On remarque que sur les colonnes 2 à $p+1$, on fait apparaitre en colonne j et en ligne $i \geq 2$ un terme en $\lambda_j^{i+1} - \lambda_j^i\lambda_1 = \lambda_j^i(\lambda_j - \lambda_1)$. En divisant donc comme proposé par l'énoncé (ce qui est possible car $\lambda_j \neq \lambda_1$ pour $j \geq 2$), on se ramène à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dots & \dfrac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+1} - \lambda_1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & V_p' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

où V_p' est la matrice V_p avec les coefficients $\lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}$.

iii) Par hypothèse de récurrence, la matrice V_p' est inversible (puisque les $\lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}$ sont non nuls et deux à deux distincts). On peut donc faire une suite d'opérations élémentaires pour se ramener à une matrice triangulaire avec des coefficients tous non nuls sur la diagonale. En appliquant ces opérations à la matrice V_{p+1}, on ne modifie pas la première ligne (en tout cas pas le coefficient en première position), ce qui nous donne, après toutes ces opérations élémentaires, une matrice triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale (puisque $\lambda_1 \neq 0$). On a donc bien que la matrice V_{p+1} est inversible, ce qui termine la récurrence (initialisation en i) et hérédité en ii) et iii)).

d) D'après la question précédente, on a V_p inversible. Puisque $V_pX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors en multipliant par V_p^{-1} à gauche, on obtient que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, ceci est absurde puisque par hypothèse, on avait X non nul, puisqu'il ne contient que des coefficients dans $\mathbb{N}^*$. On en déduit que l'hypothèse initiale est fausse, c'est à dire qu'il n'existe pas de λ_k non nul, soit que tous les λ_k sont nuls, ce que l'on voulait démontrer.