DM 7, pour le vendredi 14/01/2023

À regarder/lire/chercher en essayant de trouver des connexions entre les différentes questions pour la méthodo de la semaine prochaine :

- problème 1 : parties I et II.
- problème 2 : partie I.

PROBLÈME
Une équation fonctionnelle

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

On note E l'ensemble des fonctions continues vérifiant cette propriété.

Partie I. Solutions deux fois dérivables.

1) Vérifier que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ sont dans E.

2) Soit $f \in E$.
   a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\alpha x) \end{array} \right.$ est dans E.
   b) Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
   c) Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.
   d) Montrer que si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

3) On suppose dans cette question uniquement que f est une fonction de E deux fois dérivable.
   a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''y)$.
   b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \alpha f(x)$.
   c) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$, en séparant les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

4) En déduire les fonctions de E qui sont deux fois dérivables.

Partie II. Solutions qui s'annulent.

On suppose dans cette partie que $f \in E$, que f s'annule au moins une fois et que f n'est pas la fonction nulle.

5) Justifier que $f(0) = 1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) On pose $A = \{x > 0 \ / \ f(x) = 0\}$.
   a) Vérifier que A admet une borne inférieure (que l'on notera a).
   b) Montrer que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.
   c) Montrer que $\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0$.

7) On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$ et on note $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\omega x) \end{array} \right.$.

a) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

b) En déduire que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.

c) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$.

d) Montrer que la propriété précédente est vraie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

8) On pose $D = \left\{\dfrac{pa}{2^q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \to x$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $f = g$.

9) Quelles sont les fonctions de E qui s'annulent ?

Partie III. Solutions qui ne s'annulent pas.

On suppose dans cette partie que $f \in E$ et ne s'annule pas.

10) Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

11) On suppose par l'absurde que $f(1) < 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f(2^n)$. D'après la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.

b) On pose $h : x \mapsto 2x^2 - 1 - x$. Vérifier que h est négative sur $[0, 1[$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire alors une absurdité.

12) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(1) = \mathrm{ch}(\alpha)$.

13) On pose alors $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{ch}(\alpha x) \end{array} \right.$. En reprenant les questions 7 et 8 de la partie précédente (avec $a = 1$ et en essayant de faire le moins de calcul possible), montrer que $f = g$.

14) En déduire finalement les fonctions présentes dans l'ensemble E.

PROBLÈME
Résolution d'une équation diophantienne

L'objectif de ce problème est de déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Partie I. Étude de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.

2) Vérifier que l'on a unicité de l'écriture dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, c'est à dire que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ \exists!(a, b) \in \mathbb{Z}^2\ /\ x = a + b\sqrt{2}.$$

On pose alors $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$ le conjugué de x. On remarque que $\overline{x} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3) Vérifier que $\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\overline{x + x'} = \overline{x} + \overline{x'}$ et $\overline{xx'} = \overline{x} \times \overline{x'}$.

4) Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ N(x) \in \mathbb{Z}$.
   b) Montrer que $\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ N(xx') = N(x)N(x')$.
   c) Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible (pour la loi $\times$) si et seulement si $N(x) \in \{1, -1\}$.
   d) On pose $H = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]\ /\ N(x) = \pm 1\}$. Justifier que H est un groupe pour la loi $\times$.

Partie II. Étude de H

On va décrire entièrement l'ensemble H, ce qui répondra à la question initialement proposée.

5) Soit $x = a + b\sqrt{2} \in H$. Montrer que :
   a) $a \geq 0$ et $b \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.
   b) $a \leq 0$ et $b \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$.
   c) $ab \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 1$.

6) On pose $H_+ = \{x \in H\ /\ x > 1\}$.
   a) Montrer que si $x = a + b\sqrt{2} \in H_+$, alors $a > 0$ et $b > 0$.
   b) En déduire que $u = 1 + \sqrt{2}$ est le minimum de H_+.

7) Soit $x \in H_+$.
   a) Montrer qu'il existe un unique entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n \leq x < u^{n+1}$.
   b) En déduire que $x = u^n$.
   c) Conclure que $H = \{\pm u^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.