20. Calcul matriciel, méthodologie

I. Opérations sur les matrices

I.1. Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif. Les matrices élémentaires $(E_{i_0,j_0})_{\substack{1\leq i_0\leq n\\ 1\leq j_0\leq p}}$ sont définies par :

$$E_{i_0,j_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i_0 et en colonne j_0 qui vaut 1. Si on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker (qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$), on a donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ (E_{i_0,j_0})_{i,j} = \delta_{i_0,i} \times \delta_{j_0,j}.$$

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(A_k)_{1\leq k\leq q} \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^q$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}$ tels que :

$$A = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k A_k$$

Toute matrice peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires , c'est à dire que

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists!(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathbb{K}^{np}\ /\ A = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j} E_{i,j}.$$

I.2. Produit matriciel

Définition. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors, $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,q]\!],\ (A\times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Proposition. Le produit matriciel est associatif et distributif par rapport à l'addition mais il n'est pas commutatif (sauf pour les matrices qui n'ont qu'une ligne et qu'une colonne).

(m) On peut visualiser graphiquement le produit matriciel de la manière suivante, si on note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$, représenté sous la forme $\begin{array}{cc} \Rsh & B \\ A & A\times B \end{array}$:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,j} & \dots & b_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \dots & b_{p,j} & \dots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,1} & \dots & \dots & a_{3,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,p} \\ \hline \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} & \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\end{array}$$

On considère donc la i-ième ligne de A (que l'on notera L_i) et la j-ième colonne de B (que l'on notera C_j), on multiplie le premier coefficient de L_i avec le premier coefficient de C_j, le second de L_i avec le second de C_j, etc. et on fait la somme de tous ces produits. *Puisque A a autant de colonnes que B a de lignes, on peut bien à chaque fois faire les produits.*

Exercice d'application 1. Calculer les produits suivants graphiquement :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $A\times B$ et $B\times A$.

Exercice d'application 2. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer graphiquement les produits A^k pour $k\in\mathbb{N}^*$. *On commencera par $k=2$ et $k=3$.*

(m) Pour montrer que deux matrices sont égales, il faut montrer qu'elles ont la même taille et mêmes coefficients (en calculant les coefficients (i,j) de chacune des deux matrices à l'aide de la formule).

Exercice d'application 3. Pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, on pose $a_{i,j} = i/j$, $b_{i,j} = i$ et $c_{i,j} = \dfrac{1}{j}$ et on note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

1) Montrer que $A^2 = nA$.

2) Déterminer $B \times C$ et $C \times B$. A-t-on $B \times C = C \times B$?

Exercice d'application 4. On pose $J = (1)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (autrement dit J est la matrice carrée de taille $n \times n$ qui ne contient que des 1). Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $JAJ = sJ$ où s est la somme de tous les coefficients de la matrice A.

Proposition. Soient les matrices élémentaires $E_{i_0,j_0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $E_{i_1,j_1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

- $E_{i_0,j_0} \times A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne i_0 qui contient la ligne j_0 de la matrice A.
- $A \times E_{i_1,j_1}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne j_1 qui contient la colonne i_1 de la matrice A.

(m) Quand une propriété est vraie pour toutes les matrices, la tester sur les matrices élémentaires permet souvent d'obtenir des informations intéressantes.

Exercice d'application 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somme des coefficients diagonaux de AB est nulle (autrement dit $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = 0$). Montrer que A est la matrice nulle.

Proposition. Soient les matrices élémentaires $E_{i_0,j_0} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{i_1,j_1} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$E_{i_0,j_0} \times E_{i_1,j_1} = \delta_{i_1,j_0} E_{i_0,j_1} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

I.3. Transposition

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A est $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Proposition. La transposée d'une combinaison linéaire de matrices est la combinaisons linéaires des transposées et :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A \times B)^T = B^T \times A^T.$$

I.4. Image et Noyau d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le noyau de A est $\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$.
- L'image de A est $\mathrm{Im}(A) = \{AX, \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$.

(m) Pour déterminer le noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on résout l'équation $AX = 0$ (qui aboutit à un système linéaire à n équations et p inconnues).

Exercice d'application 6. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\ker(A)$.

Proposition. L'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

I.5. Lien avec les systèmes linéaires

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors l'équation $AX = B$ est un système linéaire à n équations et p inconnues.

- Le système $AX = B$ est compatible (c'est à dire a au moins une solution) si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.
- Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X = X_p + X_h$ où X_p est une solution particulière et où $X_h \in \ker(A)$. *Le système $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}}$ est appelé le système homogène associé au système $AX = B$.*

(m) Pour résoudre le système $AX = B$, on effectue donc l'algorithme du pivot en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice d'application 7. On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exercice précédent. Les matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-elles dans l'image de A ? Si c'est le cas, résoudre le système $AX = B$.

II. Matrices d'opérations élémentaires

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. La matrice de dilatation de taille n est notée $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et vérifie $D_i(\lambda) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E_{k,k} + \lambda E_{i,i}$.

Par exemple, pour $n = 4$, on a $D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in [\![1, n]\!]$. La matrice de transposition de taille n est notée $S_{i,j} \in$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et vérifie $S_{i,j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} E_{k,k} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Par exemple, pour $n = 5$, on a $S_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice de transvection de taille n est notée $T_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et vérifie $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.

Par exemple, pour $n = 4$, on a $T_{1,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : La multiplication d'une matrice par une matrice élémentaire à gauche (respectivement à droite) permet de réaliser une opération sur les lignes (resp. sur les colonnes) de cette matrice. On a ainsi les opérations suivantes :

- $D_i(\lambda) \times A$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- $A \times D_i(\lambda)$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
- $S_{i,j} \times A$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
- $A \times S_{i,j}$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$.
- $T_{i,j}(\lambda) \times A$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
- $A \times T_{i,j}(\lambda)$ revient à effectuer dans la matrice A l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

III. Matrices carrées

III.1. Calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif pour $n \geq 2$) de neutre $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ pour la loi $+$ et de neutre I_n pour la loi $\times$.

Proposition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \text{ et } A^N - B^N = (A-B) \sum_{k=0}^{N-1} A^k B^{N-1-k}.$$

On rappelle que $A^0 = I_n$.

(m) Pour calculer les puissances A^N pour $N \in \mathbb{N}^*$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut :

— essayer de décomposer $A = B + C$ avec B et C qui commutent dont on peut calculer les puissances facilement et on utilise le binôme de Newton. En général, l'exercice est tel que l'on peut prendre $B = I_n$ et C nilpotente (c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $C^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).

— calculer les premières valeurs ($N = 2, 3, \ldots$) et essayer de trouver une formule de récurrence.

Exercice d'application 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^N pour $N \in \mathbb{N}^*$.

III.2. Matrice inversible

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

B est alors unique et on note $B = A^{-1}$.

Définition. L'ensemble des matrices inversibles est $GL_n(\mathbb{K})$ et c'est un groupe pour la loi $\times$ appelé le groupe linéaire. On a de plus pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a A inversible si et seulement si elle est inversible à gauche ou à droite.

m Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour **vérifier** qu'une matrice B connue est A^{-1}, il suffit de vérifier que B est carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $A \times B = I_n$ ou que $B \times A = I_n$ (vérifier un seul des deux produits suffit).

Exercice d'application 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^N = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Vérifier que $I_n - A$ est inversible d'inverse $B = \sum_{k=0}^{N-1} A^k$.

Exercice d'application 10. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$. Vérifier que A est inversible d'inverse $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition. On a également A inversible si et seulement si $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ si et seulement si $\operatorname{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

m Pour **prouver** qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible (sans déterminer A^{-1}), il est plus facile de montrer que $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$, autrement dit que l'unique solution de $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ est $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, en utilisant la méthode du pivot. Comme on le verra dans le III.3), il suffit donc d'arriver à se ramener avec des opérations élémentaires à une matrice triangulaire avec des coefficients tous non nuls sur la diagonale pour prouver l'inversibilité de la matrice.

Exercice d'application 11. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

(m) Pour **déterminer** l'inverse A^{-1}, on étudie le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et on le transforme à l'aide de la méthode du pivot en un système de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & b_{1,1}y_1 + \ldots + b_{1,n}y_n \\ x_2 & = & b_{2,1}y_1 + \ldots + b_{2,n}y_n \\ \ldots & & \\ x_n & = & b_{n,1}y_1 + \ldots + b_{n,n}y_n \end{array} \right. \Leftrightarrow X = BY.$$

On a alors A inversible et $A^{-1} = B$.

Exercice d'application 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice d'application 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

(m) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a A inversible si et seulement si le système $AX = Y$ a toujours une unique solution. On peut alors dans ce cas toujours ramener la matrice A à la matrice I_n en effectuant des opérations élémentaires **uniquement sur les lignes** (ou **uniquement sur les colonnes** mais il ne faut pas mélanger). En partant alors de la matrice I_n et en effectuant les mêmes opérations élémentaires, on arrive à la matrice A^{-1}.

Exercice d'application 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors, A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

III.3. Matrices triangulaires

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

- triangulaire supérieure si $\forall i > j,\ a_{i,j} = 0$.
- triangulaire inférieure si $\forall i < j,\ a_{i,j} = 0$.

- diagonale si $\forall i \neq j,\ a_{i,j} = 0$.

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales.

Proposition. Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors $A \times B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $(A \times B)_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i}$ (pour les matrices triangulaires supérieures, les coefficient diagonaux du produit sont égaux aux produits des coefficients diagonaux).

Proposition. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. On a alors A^{-1} triangulaire supérieure et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $(A^{-1})_{i,i} = \dfrac{1}{a_{i,i}}$ (pour les matrices triangulaires, les coefficients diagonaux de A^{-1} sont l'inverse des coefficients diagonaux de A).

(m) Il est ainsi direct de prouver qu'une matrice triangulaire est inversible (vérifier que tous les coefficients de la diagonale sont non nuls suffit). Déterminer l'inverse est également rapide car le système $AX = Y$ est déjà triangulaire, donc rapide à inverser. *cf l'exercice d'application 13.*

III.4. Matrices symétriques et antisymétriques

Définition. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si $A^T = A$ et on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques. On dit qu'une matrice est antisymétrique si $A^T = -A$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice d'application 15. Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $S^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Est-ce encore vrai pour les matrices antisymétriques ?

Proposition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M s'écrit de manière unique sous la forme $M = S + A$ avec $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice d'application 16. Exprimer S et A en fonction de M et de M^T.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On a $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\5 & 4\\3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 11\\-4 & 7\end{pmatrix}$.

2) De même, $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\2 & -1 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & -3\\1 & -1\end{pmatrix}$.

3) $A \times B = \begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\-1 & -2 & -3 & -4\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Exercice d'application 2. On observe que $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1\\ \vdots & & & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}$. On calcule de même A^3 (attention à bien faire $A \times A^2$ et pas $A^2 \times A^2$!) :

$$A^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

On observe ainsi que la « diagonale de 1 » se déplace à chaque étape d'un cran vers la droite et que l'on « perd » un 1 à chaque opération. On en déduit que A^n est la matrice nulle (et que toutes les matrices A^k pour $k \geq n$ sont nulles) et que A^k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ est la matrice qui ne contient que des 0 à part les coefficients $a_{1,k+1}, a_{2,k+2}, \dots, a_{n-k,n}$ qui sont égaux à 1.

Exercice d'application 3.

1) On a déjà A^2 et nA qui sont toutes les deux des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a de plus pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}(A^2)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k} \times \frac{k}{j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{j}\\ &= n\frac{i}{j}\\ &= na_{i,j}.\end{aligned}$$

On a donc bien $A^2 = nA$.

2) $B \times C$ et $C \times B$ sont bien des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$(B \times C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{j} = na_{i,j}.$$

On a donc $B \times C = nA$. De même :

$$(C \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k} = n.$$

$C \times B$ est donc la matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à n. On a donc $C \times B \neq B \times C$.

Exercice d'application 4. Le produit matriciel étant associatif, on a $JAJ = J \times (AJ) = (JA) \times J$. On sait déjà que JAJ sera une matrice carrée de taille $n \times n$. On a pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}(JAJ)_{i,j} = (J \times (AJ))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} J_{i,k} \times (A \times J)_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \times \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \times J_{l,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\\ &= s.\end{aligned}$$

Puisque tous les coefficients de JAJ sont égaux à s, on a donc bien $JAJ = sJ$.

Exercice d'application 5. On teste la propriété pour $B = E_{i_0,j_0}$ où $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned}(AB)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(E_{i_0,j_0})_{k,i}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{i_0,k}\delta_{j_0,i}\\ &= a_{i,i_0}\delta_{j_0,i} + 0.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}0 = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0}\delta_{j_0,i}\\ &= a_{j_0,i_0} + 0.\end{aligned}$$

La propriété étant vraie pour tout $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que $\forall i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$, $a_{j_0,i_0} = 0$ soit que $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice d'application 6.

1) On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$. On peut alors résoudre ce système linéaire en utilisant la méthode du pivot ou directement car on a ici $x = z$, $y = x = z$ et la première ligne donne alors $0 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ x = z \text{ et } y = z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice d'application 7. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} AX = B_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 = -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ x - z = 1 & \\ x - y = 1 & \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le système est incompatible et on a donc $B_1 \notin \mathrm{Im}(A)$.

Pour B_2, on remarque que B_2 est égal à la première colonne de A moins la deuxième moins la troisième. On a donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = B_2$, soit $B_2 \in \mathrm{Im}(A)$. *On peut également trouver cette solution particulière en étudiant le système* $AX = B_2$. Puisque l'on a trouvé $\ker(A)$ dans l'exercice précédent, on en déduit que les solutions de $AX = B_2$ sont de la forme :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice d'application 8. On a $A = I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \geq 3$, $B^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Puisque I_3 et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, ce qui entraine que pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
A^N = (I_3 + B)^N &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k I_3^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k \\
&= B^0 + NB^1 + \frac{N(N-1)}{2} B^2 + O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\
&= I_3 + NB + \frac{N(N-1)}{2} B^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -N & -\frac{N(N-1)}{2} \\ 0 & 1 & N \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice d'application 9. On a :

$$
\begin{aligned}
(I_n - A) \times B &= (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{N-1} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} A^k - A^{k+1} \\
&= A^0 - A^N \qquad \text{(par somme télescopique)} \\
&= I_n - 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\
&= I_n.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $I_n - A$ est inversible à droite. Puisque $I_n - A$ est carrée, elle est également inversible à gauche avec le même inverse. Ceci entraine que $I_n - A$ est inversible et que $(I_n - A)^{-1} = B$.

Exercice d'application 10. On calcule $A \times B$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$
(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} 1 \times b_{k,j} + 0.
$$

Si $i = j$, on a alors $(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{k,i} + b_{i,i} = 0 + 1 = 1$. Si $i > j$, on a dans la somme le terme pour $k = j + 1 \leq i$ où $b_{j+1,j} = -1$ et le terme pour $k = j$ tel que $b_{j,j} = 1$ (et les autres termes sont nuls) ce qui entraine que la somme est nulle et on a donc $(A \times B)_{i,j} = 0$. Enfin, si $i < j$, tous les termes de la somme sont nuls et on a $(A \times B)_{i,j} = 0$. On a donc $(A \times B)_{i,j} = \delta_{i,j}$ ce qui entraine $A \times B = I_n$. A est donc inversible à droite et carrée donc elle est inversible et son inverse est B.

Exercice d'application 11. On cherche $\ker(A)$ en résolvant $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot. On a :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & \\ -y - 7z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -4y - 8z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y = -7z \\ 20z = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. A étant carrée, elle est inversible.

Exercice d'application 12. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et étudions le système $AX = Y$. On a :

$$
\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 - y_3 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_2 = y_1 - y_2 + y_3 \\ -x_2 + x_3 = y_2 - y_3 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{y_1 - y_2 + y_3}{2} \\ x_3 = \dfrac{y_1 + y_2 - y_3}{2} \\ x_1 = \dfrac{-y_1 + y_2 + y_3}{2} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-y_1 + y_2 + y_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - y_2 + y_3}{2} \\ x_3 = \dfrac{y_1 + y_2 - y_3}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Ceci entraine que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 13. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ldots - x_n = y_1 \\ x_2 - x_n = y_2 \\ x_3 - x_n = y_3 \\ \ldots \\ x_{n-1} - x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} x_i \\ x_2 = y_2 + y_n \\ x_3 = y_3 + y_n \\ \ldots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + (n-1)y_n \\ x_2 = y_2 + y_n \\ x_3 = y_3 + y_n \\ \ldots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

On en déduit que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 14. On utilise tout d'abord L_1 pour simplifier toute la dernière colonne avec les opérations $L_i \leftarrow L_i - i \times L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes étant libres, on a directement Il reste pour trouver l'inverse de A à finir d'arriver à l'identité et refaire les mêmes opérations en partant de I_n. Il suffit pour cela de placer la première ligne en dernière position (ce qui revient à échanger L_1 et L_2, puis échanger la nouvelle ligne L_2 avec L_3, etc. jusqu'à échanger la nouvelle ligne L_{n-1} avec L_n). Si on refait les mêmes étapes en partant de la matrice I_n, on obtient, après les opérations $L_i \leftarrow L_i - i \times L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après avoir passé la première ligne en dernière position, on obtient A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 15. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique et inversible. On a alors d'après le cours $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1} = S^{-1}$ donc S^{-1} est symétrique.

De même, si A est antisymétrique et inversible, on a $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$, la dernière égalité étant vraie car si $A \times A^{-1} = I_n$, alors $(-A) \times (-A^{-1}) = I_n$ donc l'inverse de $(-A)$ est bien $-A^{-1}$. La propriété est donc également vraie pour les matrices antisymétriques.

Exercice d'application 16. Si $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique, alors on a par linéarité de la transposée que $M^T = (S + A)^T = S^T + A^T = S - A$. On a donc le système $\begin{cases} M = S + A \\ M^T = S - A \end{cases}$. Par somme et par différence, on obtient :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}.$$