Devoir Surveillé 2

Je vous rappelle les consignes :

- Écrire lisiblement sur des feuilles grandes et doubles, au stylo ou à l'encre bleu foncé ou noir et **souligner ou encadrer ses résultats**. On accordera de l'importance à la présentation.
- La calculatrice est interdite.
- Vous avez le droit de sauter des questions et d'admettre les résultats correspondants pour traiter les questions suivantes.
- Les différents exercices sont indépendants et vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous désirez. Il est conseillé de parcourir le sujet dans sa globalité avant de commencer.
- La durée de ce devoir est de **4 heures**.

Exercice 1. Racines d'un polynôme à coefficients complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$P(z) = z^9 - iz^6 + (1-i)z^3 - 2 + 2i.$$

Le but de l'exercice est de trouver toutes les racines de P, c'est à dire les valeurs $z \in \mathbb{C}$ telles que $P(z) = 0$. On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i$.

1) Déterminer une racine réelle x « simple » de Q. Factoriser ensuite Q sous la forme $Q(z) = (z-x)(z^2 + az + b)$ avec a et b que l'on explicitera.

2) Déterminer (sous forme algébrique) les racines carrées de $-8 + 6i$.

3) En déduire les racines (complexes) du polynôme $z^2 + az + b$.

4) Déterminer finalement les racines de P.

Exercice 2. Calcul d'une somme. Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$ et soit $d \in [\![2, n]\!]$. Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

1) Soit $\theta \in]0, \pi[$.

   a) Montrer que $\dfrac{\sin(d\theta)}{\sin(\theta)} = e^{-i(d-1)\theta} \times \displaystyle\sum_{p=0}^{d-1} e^{2ip\theta} = e^{i(d-1)\theta} \times \displaystyle\sum_{q=0}^{d-1} e^{-2iq\theta}$.

   b) En déduire que $\dfrac{\sin^2(d\theta)}{\sin^2(\theta)} = \displaystyle\sum_{q=0}^{d-1}\sum_{p=0}^{d-1} e^{2i(p-q)\theta}$.

   c) Montrer que $\dfrac{\sin^2(d\theta)}{\sin^2(\theta)} = d + 2 \displaystyle\sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \cos(2(p-q)\theta)$.

2) *La conclusion.*

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (n-1)d + 2 \sum_{0\leq q<p\leq d-1} \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2(p-q)k\pi}{n}\right)$.

b) Soient p, q deux entiers tels que $0 \leq q < p \leq d-1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{2(p-q)k\pi}{n}} = -1$.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d)$.

PROBLÈME
Étude d'une fonction et d'une suite

On rappelle que $\ln(2) \approx 0,69$.

1) *Une première fonction.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$g_n : x \mapsto n\ln(1+x) + \frac{3x}{1+x}.$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de g_n et justifier que g_n est dérivable sur $\mathcal{D}$.

b) Pour $x \in \mathcal{D}$, déterminer $g_n'(x)$ et en déduire que g_n est strictement croissante sur $\mathcal{D}$.

c) Calculer $g_n(0)$ et en déduire le signe de $g_n(x)$ selon les valeurs de x.

2) *Une nouvelle fonction.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(1+x^3).$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_2$ de f_n et justifier que f_n est dérivable sur $\mathcal{D}_2$. Déterminer l'expression de $f_n'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_2$. *On exprimera f_n' en fonction de g_n.*

b) En distinguant les cas n pair et n impair, établir le tableau de variations de f_n. Vérifier que dans tous les cas, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Toujours en distinguant suivant la parité de n, résoudre l'inéquation $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

d) Tracer sur une même figure l'allure des graphes de f_1, f_2 et f_3.

3) *Étude d'une suite.*

a) Prouver qu'il existe un unique réel α_n dans $\mathbb{R}_+$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$. Placer α_1, α_2 et α_3 sur le graphe de la question 2.d.

b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n \geq 1$.

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. *On pourra utiliser le fait que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_n)^n = e^{n\ln(\alpha_n)}$.*

PROBLÈME
Une limite classique

Le but du problème est de démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

On admet dans ce problème le résultat suivant que nous démontrerons plus tard dans l'année : si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L, alors, toutes ses sous-suites tendent également vers L (autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2^n} = L$, etc.)

1) *Existence de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

   a) Montrer que $\forall k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

   c) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

Dans toute la suite, on notera $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et on posera pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

2) *Convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \dfrac{u_n}{4} + v_n$.

   b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de L.

3) *Un peu de trigonométrie.*

   a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}\right)$.

   b) On fixe dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, 2^{n-1}-1]\!]$, on pose $w_{n,k} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$.

      i) Montrer que $\forall k \in [\![0, 2^{n-1}-1]\!]$, $w_{n,k} = \dfrac{1}{4}(w_{n+1,k} + w_{n+1,2^n-k-1})$.

      ii) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n,k} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2^n-1} w_{n+1,k}$.

   c) En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} w_{n,k} = \frac{4^n}{2}$.

   d) Vérifier que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\tan^2(x)} = \dfrac{1}{\sin^2(x)} - 1$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{4^n - 2^n}{2}.$$

4) *La conclusion.*

   a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, puis que $\dfrac{1}{\tan^2(x)} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

   b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi^2}{8}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \leq v_{2^{n-1}} \leq \dfrac{\pi^2}{8}$.

   c) En déduire finalement la valeur de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis la valeur de L.