OUTILS MATHÉMATIQUES 4
Résolution d'une équation différentielle du second ordre

1 Mise en forme de l'équation différentielle du second ordre

➤ **L'équation différentielle** que l'on cherche à résoudre est de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=f(t)\Leftrightarrow \ddot{y}+2\xi\omega_0\dot{y}+\omega_0^2 y=f(t)}$$

$$\text{ou}\ \boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=f(t)\Leftrightarrow \ddot{y}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{y}+\omega_0^2 y=f(t)}$$

ω_0 et ξ (ou ω_0 et Q) étant deux constantes positives et *f(t)* représentant le **second membre**.

➤ **L'équation sans second membre** (essm) associée est :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=0\Leftrightarrow \ddot{y}+2\xi\omega_0\dot{y}+\omega_0^2 y=0}$$

$$\text{ou}\ \boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=0\Leftrightarrow \ddot{y}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{y}+\omega_0^2 y=0}$$

2 Résolution en 5 étapes

① Solution de l'équation sans second membre

L'équation caractéristique associée à l'essm est : $r^2+2\xi\omega_0 r+\omega_0^2=0$, de la forme $ar^2+br+c=0$.

Le **discriminant** est : $\Delta=b^2-4ac$.

Le **discriminant réduit** est $\Delta'=\frac{\Delta}{4}=b'^2-ac$ avec $b'=\frac{b}{2}$.

❖ Si $\boxed{\Delta>0 \text{ ou } \Delta'>0}$, l'équation caractéristique a **deux racines réelles distinctes** r_1 et r_2 et la solution de l'essm s'écrit :

$$\boxed{y_{essm}(t)=Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}}$$

avec A et B deux constantes à déterminer.

❖ Si $\boxed{\Delta=0 \text{ ou } \Delta'=0}$, l'équation caractéristique a **une racine réelle double** r et la solution de l'essm s'écrit :

$$\boxed{y_{essm}(t)=(A+Bt)e^{rt}}$$

avec A et B deux constantes à déterminer.

- Si $\boxed{\Delta < 0 \text{ ou } \Delta' < 0}$, l'équation caractéristique a **deux racines complexes conjuguées** $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ et la solution de l'essm s'écrit :

$$\boxed{y_{essm}(t) = \left(A\cos\left(\beta t\right) + B\sin\left(\beta t\right)\right)\mathrm{e}^{\alpha t} = \left(K\cos\left(\beta t + \varphi\right)\right)\mathrm{e}^{\alpha t}}$$

avec A et B (ou K et φ) deux constantes à déterminer.

② <u>Solution particulière</u>

On la recherche sous la **même forme** que le **second membre *f(t)*,** qui peut être une constante, un polynôme, une exponentielle ou une fonction sinusoïdale.

③ <u>Solution complète</u>

C'est la **somme** de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière.

$$\boxed{y(t) = y_{essm}(t) + y_P}$$

④ <u>Conditions initiales</u>

Par un raisonnement physique, on détermine **les valeurs initiales** de la **fonction** et de sa **dérivée** en $t = 0$: $\boxed{y(0)}$ et $\boxed{\dot{y}(0) = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=0}}$

En remplaçant t par 0 dans l'expression de *y(t)* et dans celle de sa dérivée $\dot{y}(t) = \dfrac{dy}{dt}$, établie à partir de la solution complète, on **détermine les valeurs des constantes *A* et *B*.**

⑤ <u>Solution finale</u>

On **remplace *A* et *B*** par leurs expressions dans la solution complète.

3 Cas particulier : équation différentielle du second ordre sans dérivée première

- Elle est obtenue pour $\boxed{\xi = 0}$.
- <u>Forme canonique de l'équation différentielle</u>

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = f(t) \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = f(t)}$$

ω_0 étant une constante positive et *f(t)* représentant le **second membre**.

- <u>Solution de l'équation sans second membre (essm)</u>

L'équation caractéristique associée à l'essm est : $r^2 + \omega_0^2 = 0$

Le **discriminant réduit** est : $\Delta' = -ac = -\omega_0^2 < 0$.

L'équation caractéristique a **deux racines complexes conjuguées** $r_{1,2} = \pm j\omega_0$ et la solution de l'essm s'écrit :

$$\boxed{\begin{gathered} y_{essm}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ \text{ou } y_{essm}(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ ou } y_{essm}(t) = D\sin(\omega_0 t + \psi) \end{gathered}}$$

avec A et B (ou C et φ ou D et ψ) deux constantes à déterminer.