Programme de colle, semaine 22

Espaces vectoriels :

— Après avoir donné la définition d'un espace vectoriel et quelques exemples, nous avons défini les espaces vectoriels produits. Nous avons ensuite vu la caractérisation d'un sous-espace vectoriel ($F \subset E$, $F \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$) et donné des exemples.

— Nous avons défini les espaces vectoriels engendrés par un sous ensemble A de E ainsi que par une famille $(x_i)_{i\in I}$ (I n'est pas forcément fini). Nous avons donné à cette occasion la définition d'une famille à support fini de scalaires. Nous avons également étudié le cas où la famille est finie. Nous avons ensuite montré qu'une intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel.

— Nous avons continué avec la somme de deux espaces vectoriels. Nous avons également défini la somme directe de deux espaces vectoriels, vérifié qu'avoir une somme directe est équivalent à avoir l'intersection des deux espaces vectoriels égale à $\{0_E\}$. Nous avons alors défini pour deux espaces le fait d'être supplémentaire.

— Nous avons ensuite étudié les familles de vecteurs (familles libres, génératrices, bases).

— Nous avons ensuite étudié les applications linéaires. Nous avons vu des exemples, donné le vocabulaire usuel (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme). Nous avons ensuite étudié la structure de $L(E, F)$. Nous avons montré que $L(E, F)$ était muni d'une structure d'espace vectoriel, que $(L(E), +, \circ)$ était un anneau (en général non commutatif) et que $(GL(E), \circ)$ était un groupe. Nous avons vu la notation $u^n = u \circ \ldots = u$. Nous avons revu la formule du binome de Newton (à condition que u et v commutent).

— Nous avons étudié le lien entre applications linéaires et sous espaces vectoriels (l'image directe, l'image réciproque d'un espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel). Nous avons également montré que si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((u(x_i))_{i\in I})$. Nous avons ensuite défini l'image et le noyau d'une application linéaire, la caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et traité des exemples.

Remarques sur le programme : Nous n'avons fait aucun exercice sur les manipulations de noyaux/images (cela a été vu vendredi et nous ferons des exercices dessus en TD). Les projecteurs et symétries n'ont pas été vus (ce sera le cas lundi) ainsi que les hyperplans et les formes linéaires (qui seront vus dans le chapitre sur la dimension).

Compétences :

— Démontrer qu'une famille est libre en posant une relation de liaison (et en trouvant ensuite des informations sur les coefficients, souvent en utilisant la méthode du pivot).

— Raisonner par analyse/synthèse pour montrer que $E = F + G$.

— Étudier l'équation $u(x) = 0_F$ pour déterminer le noyau d'une application linéaire.

— Utiliser le fait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((u(x_i))_{i\in I})$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E pour déterminer l'image d'une application linéaire.

— Utiliser des raisonnements par double implication/double inclusion en définissant proprement les variables manipulées lors de preuves utilisant des images/noyaux d'applications linéaires/des égalités entre différents espaces vectoriels.

Questions de cours :

1. Donner la définition de F et G supplémentaires dans E. Démontrer que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$ ssi le vecteur nul se décompose de manière unique comme une somme d'éléments de F et de G ($0_E = x_F + x_G \Rightarrow x_F = x_G = 0_E$).
2. Montrer que $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si pour tout $x \in E$, $\exists! (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ / $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
3. Montrer que l'image directe et l'image réciproque d'espaces vectoriels par une application linéaire sont des espaces vectoriels. Donner la définition de l'image et du noyau d'une application linéaire et justifier que ce sont des espaces vectoriels.
4. Vérifier que la dérivation est une application linéaire et en déterminer l'image et le noyau quand l'espace de départ est $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.
5. Montrer que si $u \in L(E, F)$, alors elle est surjective ssi $\mathrm{Im}(u) = F$ et qu'elle est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
6. Montrer que si $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$, alors $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$ et $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

À rédiger pour lundi pour ceux qui n'ont pas colle : 1er du groupe : exercice 1 ; 2ieme du groupe : exercice 2 ; 3ieme du groupe : exercice 3. Comme d'habitude, il y a des indications au dos.

Chercher les quatre exercices (pour tous), on corrigera le 4 lundi matin :

Exercice 1. On pose $H = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$.

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ en l'écrivant comme un sous-espace vectoriel engendré ($H = \mathrm{Vect}(\ldots)$).

2) Montrer que $H \oplus \mathrm{Vect}((1, 1, \ldots, 1)) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ / \ f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. *On commencera par justifier que E, F, G sont des evs !*

Exercice 3. M ontrer que la famille de polynôme $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre dans les cas suivants (à chaque fois, k varie donc entre 0 et n) :

1) $P_k(X) = (X + 1)^k$.

2) $P_k(X) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} (X - i)$.

3) $P_k(X) = \sum_{i=k}^{n} X^i$.

4) $P_k(X) = X^k (X - 1)^{n-k}$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soient $f, g \in L(E)$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g, c'est à dire que $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$ et que $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$. *Essayez de bien définir vos variables (cf chapitre ensembles) et d'avancer étape par étape !*

Prochain programme : pas de colle (semaine du concours blanc) puis vacances puis espaces vectoriels en entier (avec dimension)

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exercice 1

- Pour cet exercice, écrivez les vecteurs en ligne à priori (comme sur l'énoncé) mais si c'est plus pratique pour vous, vous pouvez aussi écrire en colonne, juste soyez cohérent avec vos notations !
- Pour la question 1, on pourra par exemple exprimer x_1 en fonction des autres et se ramener à un espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs.
- Pour la question 2, commencez par montrer que $H \cap \mathrm{Vect}((1, 1, \ldots, 1)) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
- Raisonnez par analyse/synthèse pour $H + \mathrm{Vect}((1, 1, \ldots, 1)) = \mathbb{R}^n$. Le but étant de trouver quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ prendre (qui ne doit dépendre que des $x_1, \ldots, x_n$) telle que $(x_1, \ldots, x_n) = X_H + \lambda(1, \ldots, 1)$.
- Ne pas oublier la synthèse !

Exercice 2

- Pour montrer que E, F, G sont des espaces vectoriels, revenir à la caractérisation énoncée en cours (contenant 0_E et stable par combinaison linéaire).
- N'oubliez pas de vérifier que $F \subset E$ et $G \subset E$.
- Pour montrer que $F \oplus G = E$, commencez par montrer que $F \cap G = \{0_E\}$
- Pour montrer que $F + G = E$, on raisonnera par analyse/synthèse en essayant d'écrire $h \in E$ comme $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Le but est ici de trouver les valeurs de a et de b uniquement en fonction des valeurs de h.
- Ne pas oublier la synthèse !

Exercice 3

- Pour quasiment toutes les familles, on commencera par définir $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X) = 0$ (la relation de liaison, ici le 0 est le polynôme nul).
- Les indications pour la suite donne juste une manière de faire, il en existe beaucoup d'autres !
- Pour la Q1, on pourra soit utiliser le fait que la famille est échelonnée et le résultat du cours correspondant.
- Pour la Q2, on pourra essayer d'évaluer en des valeurs de X « simples » la relation de liaison (on commencera par $X = 0$ et $X = 1$ pour se donner des idées). N'hésitez pas à écrire vos produits avec « ... » si cela vous aide...
- Pour la Q3, on pourra utiliser le fait que la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est libre pour écrire un système à $n+1$ équations et $n+1$ inconnues qui devrait être triangulaire.
- Pour la Q4, on pourra évaluer la relation de liaison en $X = 0$ puis on pourra diviser (en justifiant) la relation de liaison par X et recommencer !