20-2. Systèmes linéaires, méthodologie

I. Méthodes pratiques

I.1. Opérations élémentaires

Proposition. Opérations élémentaires. On considère le système $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_i \\ \dots \\ L_n \end{cases}$. Les opérations suivantes transforment ce système en un système équivalent :

- *Transposition :* $L_i \leftrightarrow L_j$ (on échange la ligne i et la ligne j).
- *Dilatation :* $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ (on multiplie la ligne i par une constante non nulle).
- *Transvection :* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ (on ajoute à la ligne i n'importe quelle constante multipliée par une autre ligne).

Exercice d'application 1. Pour quelle(s) constante(s) λ peut-on réaliser l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_i$ et transformer le système en système équivalent ?

I.2. Méthode du pivot

(m) **Méthode du pivot de Gauss.** Pour résoudre un système linéaire, il est très souvent plus rapide et plus facile d'utiliser la méthode du pivot plutôt qu'une méthode de substitution. La méthode du pivot consiste en deux étapes :

- Transformer le système en système triangulaire à l'aide d'opérations élémentaires.
- Remonter le système triangulaire en substituant les valeurs des inconnues trouvées dans les dernières lignes dans les lignes précédentes.

Si on considère le système $S : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, alors on commence par trouver un coefficient non nul sur la première colonne et on le déplace à l'aide d'une transposition à la place de a_1 et on utilise cette nouvelle ligne comme pivot pour éliminer tous les x dans les autres lignes :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + & b_1y + c_1z = d_1 & \\ & b_2'y + c_2'z = d_2' & L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_2}{a_1}L_1 \\ & b_3'y + c_3'z = d_3' & L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{a_3}{a_1}L_1 \end{cases}$$

On ne touche ensuite plus à la première ligne et on recommence en travaillant à partir de la deuxième ligne sur la deuxième colonne. On cherche un coefficient non nul et on déplace la ligne considérée à la place de a_2 à l'aide d'une transposition et on utilise cette nouvelle ligne comme pivot pour éliminer tous les x_2 dans les autres lignes à partir de la troisième :

$$S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} a_1x+ & b_1y+ & c_1z = d_1 & \\ & b'_2y+ & c'_2z = d'_2 & \\ & & c''_3z = d''_3 & L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{b'_3}{b'_2}L_2 \end{array} \right.$$

Si $c''_3 \neq 0$, on peut trouver la valeur de z, puis celle de y, puis celle de x. Si $c''_3 = 0$ et $d''_3 \neq 0$, le système est incompatible et il n'y a aucune solution. Si $c''_3 = d''_3 = 0$, il ne reste que deux équations. On peut donc exprimer x et y en fonction de z qui lui peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

m Pour choisir la ligne pivot, on choisit en général une ligne où une des inconnues à un coefficient égal à ± 1 (si possible), sinon on essaye de le faire apparaitre à l'aide d'opérations élémentaires simples.

Exercice d'application 2. Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ -3x + 2y = 2 \end{array} \right.$.

m Il est **très important** d'utiliser le même pivot lors d'une étape de calcul. Utiliser des lignes différentes comme pivot en même temps peut parfois transformer votre système en système non équivalent en effaçant des lignes essentielles à la résolution.

Exercice d'application 3. On considère le système $S : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{array} \right.$. Commencer par résoudre le système normalement. Puis effectuer de manière simultannée les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis résoudre le système linéaire. Que remarque-t-on ?

II. Ensemble des solutions

II.1. Compatibilité

II.2. Système linéaire à 2 inconnues

Proposition. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire à 2 inconnues est :
- soit l'ensemble vide $\emptyset$ (pas de solution/système incompatible).
- soit un point de $\mathbb{R}^2$ (une unique solution).
- soit une droite de $\mathbb{R}^2$ de solutions (une infinité de solutions) d'équation de la forme $ax + by = c$.

II.3. Système linéaire à 3 inconnues

Proposition. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire à 3 inconnues est :
- soit l'ensemble vide $\emptyset$ (pas de solution/système incompatible).
- soit un point de $\mathbb{R}^3$ (une unique solution).
- soit une droite de $\mathbb{R}^3$ de solutions (une infinité de solutions) d'équation de la forme $\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \right.$.
- soit un plan de $\mathbb{R}^3$ de solutions (une infinité de solutions) d'équation de la forme $ax+by+cz = d$.

II.4. Système linéaire à paramètres

m On utilise toujours la méthode du pivot en essayant de ne pas diviser par des termes faisant apparaitre les paramètres. Si cela n'est pas possible autrement, il faut alors faire une disjonction de cas en étudiant à part les valeurs problématiques. On peut parfois effectuer une première transvection pour simplifier les paramètres dans une ligne du système pour ensuite utiliser cette ligne comme pivot.

Exercice d'application 4. On considère le système $\left\{ \begin{array}{l} ax + 2y = 2 \\ (a+1)x + ay = 0 \end{array} \right.$. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

III. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Si $\lambda = -1$, on réalise l'opération $L_1 \leftarrow 0$ ce qui revient à effacer complétement la ligne i. On ne transforme donc pas le système en système équivalent. Pour $\lambda \neq -1$, on réalise $L_i \leftarrow (1+\lambda)L_i$ avec $1+\lambda \neq 0$, ce qui est une dilatation qui transforme le système en système équivalent.

Exercice d'application 2. On a :

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y=1 \\ -x+5y=3 \quad L_2 \leftarrow L_2+L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 13y=7 \quad L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ -x+5y=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{7}{13} \\ x=\dfrac{35}{13}-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{7}{13} \\ x=-\dfrac{4}{13} \end{array}\right. .$$

Exercice d'application 3.

1. Résolution du système :

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ y+z=2 \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ x+3y+2z=7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \quad L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ y+z=2 \\ x+3y+2z=7 \end{array}\right. .$$

   On trouve alors une unique solution, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Avec les deux opérations effectuées en même temps, on obtient le système $\left\{\begin{array}{l} -y-z=-2 \\ y+z=2 \\ x+3y+2z=7 \end{array}\right.$, qui est équivalent au système $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z=7 \\ y+z=2 \end{array}\right.$. L'ensemble des solutions est donc une droite (on a deux équations indépendantes avec trois inconnues). On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x+3y+2z=7 \\ y+z=2 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x=1+z \\ y=2-z \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1+z \\ 2-z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

On obtient donc $\mathcal{S}_1$ qui est la droite passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La seconde méthode est incorrecte puisqu'en effectuant les opérations de manière simultannée, on a remplacé deux lignes indépendantes (L_1 et L_2) par deux lignes proportionnelles ($L_1' = L_1 - L_2$ et $L_2' = L_2 - L_1 = -(L_1 - L_2)$). On a donc perdu de l'information. En effectuant les opérations successivement, on obtient tout d'abord $L_1' = L_1$ et $L_2' = L_2 - L_1$ et ensuite $L_1'' = L_1 - (L_2 - L_1) = 2L_1 - L_2$ et $L_2'' = L_2 - L_1$.

Exercice d'application 4. On a deux méthodes pour éviter de faire une disjonction de cas. Soit on simplifie en premier les coefficients en y (ce qui évite d'utiliser a comme pivot), soit on commence par un premier pivot $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour faire disparaitre les a devant le x de la seconde ligne, et ensuite utiliser cette nouvelle ligne comme pivot. Utilisons la seconde méthode par exemple :

$$\begin{aligned}
S &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ax+2y=2 & \\ x+(a-2)y=2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (-a^2+2a+2)y = 2-2a & L_1 \leftarrow L_1 - aL_2 \\ x+(a-2)y=2 & \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Si $a^2-2a-2=0$, c'est à dire si $a = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$, on a une des équations qui est $0 = 2-2a$ avec $a \neq 1$ et le système est donc incompatible (pas de solutions). Si $a \in \mathbb{R} \backslash \{\dfrac{2-\sqrt{12}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{12}}{2}\}$, on obtient alors une unique solution qui est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \dfrac{(a-2)(2-2a)}{-a^2+2a+2} \\ \\ y = \dfrac{2-2a}{-a^2+2a+2} \end{array} \right. .$$

La méthode à éviter est de faire $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a+1}{a} L_1$ car on doit alors traiter à part le cas $a = 0$ (qui donne comme solution $x = 4$ et $y = 1$) alors que ce cas s'obtient dans le cas général. On perd donc un peu de temps à le traiter à part...