Programme de colle, semaine 0

Logique et calculs :

- Nous avons commencé l'année par l'étude des propositions mathématiques : définition des connecteurs logiques, des différents quantificateurs, négation d'une proposition, etc.
- Nous avons ensuite décrit les différents modes de démonstration : preuve directe, par la contraposée, par l'absurde, par récurrence simple et forte, par analyse/synthèse.
- Nous avons ensuite effectué des rappels sur la manipulation d'inégalités, vu également la définition d'un intervalle et les différentes propriétés de la valeur absolue (règles de calcul, inégalités triangulaires dans $\mathbb{R}$).

Sommes et identités remarquables (début) :

- Nous avons vu la définition du symbole Σ et les calculs de sommes arithmétiques. Les formules $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ sont à connaitre.
- Nous avons également vu les changements d'indice et les calculs de sommes télescopiques et géométriques.

Compétences :

- Maitriser le vocabulaire condition nécessaire/condition suffisante.
- Traduire une proposition en langage mathématique et écrire sa négation.
- Poser correctement une récurrence.
- Savoir rédiger un raisonnement par analyse/synthèse.
- Savoir rédiger/présenter une preuve/un calcul (définir ses variables, utiliser des suites d'égalités pour les calculs, mettre en valeur les résultats, etc.)
- Utiliser $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ pour étudier les inégalités avec les valeurs absolues.
- Savoir faire un changement d'indice.
- Reconnaitre les sommes arithmétiques/géométriques.

Remarques sur le programme : nous n'avons pas encore fait de rappels sur les fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, puissance, etc.), cela sera pour le chapitre 3 ! Les sommes doubles n'ont pas encore été vues. La formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ n'est pas au programme.

Questions de cours :

1. Écrire les négations de « A et B », « A ou B », « $A \Rightarrow B$ ». Donner les définitions avec des quantificateurs de f est positive sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$), f est majorée sur $\mathbb{R}$ ($\exists M \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$) et f est croissante sur $\mathbb{R}$ ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$) et leurs négations.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.
3. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (en utilisant le résultat précédent).
4. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire et que cette décomposition est unique.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leq x$, puis que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$.
6. Donner (pas de preuves) les formules de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et donner et démontrer celle d'une somme géométrique (si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$).

Exercices à chercher pour lundi : TD 1 : 6, 14, 21.2), 27.2) et 27.4). Vous pouvez si vous avez le temps chercher également l'exercice 20, en le voyant plus comme un DM...
Les exercices du TD1 qui ressemblent le plus à ce que vous pourriez rencontrer en DS1 sont les 6,14 et 20.

Prochain programme : sommes (en entier).

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !