TD - Logique propositionnelle

Exercice 1 (Manipulations de formules, définitions).

1. Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de chacune des formules suivantes.

a. $(p \vee q) \rightarrow (r \vee q)$

b. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

c. $(((p \vee q) \vee (\neg r)) \vee s)$

d. $(p \vee (q \vee ((\neg r) \vee s)))$

2. Prouver les lois de distributivité.

3. Prouver les équivalences suivantes.

a. *Idempotence* : $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$.

b. *Absorption* : $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$.

4. Les connecteurs binaires d'*implication* $\rightarrow$ et d'*équivalence* $\leftrightarrow$ sont définis par :

$$\begin{aligned}(\varphi \rightarrow \psi) &\quad \equiv ((\neg\varphi) \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &\quad \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))\end{aligned}$$

Construire leurs tables de vérité.

5. Prouver les lois de de Morgan.

6. Écrire les formules suivantes en n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

a. $p \leftrightarrow (q \vee r)$

b. $p \vee (q \rightarrow p)$

7. Prouver que les formules suivantes sont des tautologies.

a. $p \vee \neg p$

b. $p \rightarrow p$

c. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

d. $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Exercice 2.

Étant données trois formules logiques φ, ψ, ω, on définit la fonction ite par : $\text{ite}(\varphi, \psi, \omega) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \omega)$. On note v une valuation pour l'ensemble des variables propositionnelles impliquées dans φ, ψ et ω.

1. Si $[\![\varphi]\!]_v = V$, que vaut $[\![(\text{ite}(\varphi, \psi, \omega)]\!]_v$? Même question si $[\![\varphi]\!]_v = F$.

2. Exprimer $(\varphi \wedge \psi)$ et $(\varphi \vee \psi)$ comme des images par la fonction ite.

3. Exprimer $(\neg\varphi)$ en fonction de ite et des formules constantes $\top$ et $\bot$.

Exercice 3.

Simplifier les formules suivantes et indiquer si ce sont des tautologies, des antilogies et si elles sont ou non satisfiables.

1. $\neg((p \vee q) \rightarrow p) \wedge q$

2. $\neg((a \vee (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \vee b \vee c)$

Exercice 4.

Montrer que le connecteur `nand` (négation de conjonction) constitue à lui seul un système de connecteurs complet, c'est à dire que toute formule logique peut s'exprimer uniquement avec ce connecteur.

Exercice 5.
Vous êtes chargé(e)s de vérifier la correction des réponses données par programme lors des tests de bon fonctionnement. Dans le scénario de test considéré, le comportement attendu est le respect de la règle suivante : pour chaque question, le programme répondra par trois affirmations dont une seule sera correcte. Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les propositions associées aux affirmations renvoyées le programme.

1. Représenter le comportement attendu sous la forme d'une formule du calcul des propositions qui dépend de A_1, A_2 et A_3.

2. Vous demandez au programme *quels éléments doivent contenir les aliments que vous devez consommer pour préserver votre santé.* Il répond les affirmations suivantes.

- A_1 - Consommez au moins des aliments qui contiennent des glucides, mais pas des lipides !
- A_2 - Si vous consommez des aliments qui contiennent des glucides alors ne consommez pas d'aliments qui contiennent des lipides !
- A_3 - Ne consommez aucun aliment qui contient des lipides !

3. **a.** Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions. Ces formules peuvent dépendre de variables G et L auxquelles vous donnerez un sens.

b. Déterminer par le calcul ce que doivent contenir les aliments que vous devez consommer pour préserver votre santé.

c. Vous demandez au programme *quelles activités pratiquer si vous voulez préserver votre santé.* Suite à une coupure de courant, la dernière affirmation est interrompue.

- A_1 - Ne faites des activités sportives que si vous prenez également du repos !
- A_2 - Si vous ne faites pas d'activité intellectuelle alors ne prenez pas de repos !
- A_3 - Prenez du repos ou faites des activités XXXXX (*mot incompréhensible*) !

d. Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions. Ces formules peuvent dépendre de variables propositionnelles S, I et R auxquelles vous donnerez un sens.

e. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer quelle(s) activité(s) vous devez pratiquer pour préserver votre santé.

Exercice 6 (CNF et DNF à partir de la table de vérité).
φ est une formule logique fonction de trois variables propositionnelles p, q, r dont la table de vérité est la suivante.

p	0	0	0	0	1	1	1	1
q	0	0	1	1	0	0	1	1
r	0	1	0	1	0	1	0	1
φ	1	1	1	1	0	1	1	0

Donner une écriture équivalent de φ sous forme normale conjonctive puis sous forme normale disjonctive.

Exercice 7 (Étude complète d'une formule logique).
On considère la formule logique suivante, où p, q et r sont des variables propositionnelles :

$$\varphi = ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)) \rightarrow (q \rightarrow r)$$

1. Dessiner l'arbre syntaxique de φ

2. Quelle est la taille de φ ? Quelle est sa hauteur ?

3. Sans utiliser la table de vérité, trouver une formule sous forme DNF équivalente à φ

4. Calculer la table de vérité de φ et trouver une autre DNF à partir de la table de vérité.

5. Montrer l'équivalence sémantique des deux DNF trouvées

6. Donner une CNF.

Exercice 8.
$\oplus$ désigne le *ou exclusif* défini par $a \oplus b = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$. Mettre sous forme normale disjonctive puis sous forme normale conjonctive la formule logique suivante.

$$(((\neg p) \vee q) \wedge r) \leftrightarrow (p \oplus r)$$

$\oplus$ est-il associatif ? Est-il commutatif ?

Exercice 9.
Soit n variables propositionnelles $p_1, \dots, p_n$ On considère les formules logiques suivantes :

$$\varphi = ((p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \land \dots \land (p_{n-1} \to p_n)) \quad \psi = (\varphi \land (p_n \to p_1))$$

1. Quelles sont les distributions de vérité qui satisfont φ ?

2. Écrire une DNF équivalente à φ

3. Même question pour ψ.