Programme de colle, semaine 19

Matrices

— Nous avons défini les matrices rectangulaires, les matrices élémentaires, vu les opérations d'addition et de multiplication. Nous avons défini la transposée d'une matrice A^T, vu la définition du noyau et de l'image d'une matrice et le lien avec la résolution des systèmes linéaires (mise sous la forme $AX = Y$ et ensemble des solutions de la forme $X_0 + X_H$ si $Y \in \mathrm{Im}(A)$ avec X_0 une solution particulière et où X_H parcourt $\ker(A)$.

— Nous avons ensuite étudié les matrices d'opérations élémentaires.

— Nous avons continué le chapitre avec l'étude des matrices carrées. La structure d'anneau, vu des exemples de calcul de puissances n-ième de matrices et vu la définition d'une matrice nilpotente. Nous avons ensuite étudié les matrices inversibles, admis qu'il suffisait de vérifier l'inversibilité d'un seul côté et de montrer que $\ker(A) = \{0\}$ pour prouver que A est inversible. Nous avons également vu comment déterminer A^{-1} (résolution de $AX = Y$ où manipulation d'opérations élémentaires uniquement sur les lignes ou uniquement sur les colonnes pour arriver à I_n).

— Nous avons terminé le chapitre par l'étude des matrices diagonales, triangulaires, symétriques et antisymétriques.

Remarques sur le programme : aucune notion d'algèbre linéaire n'a été vu. L'idée du chapitre est uniquement la manipulation du calcul matriciel.

Compétences :

— Réaliser un produit matriciel $A \times B$ graphiquement et théoriquement (en utilisant la formule pour $(AB)_{i,j}$).
— Tester les propriétés vraies sur toutes les matrices sur les matrices élémentaires $E_{i,j}$ afin d'obtenir des informations.
— Déterminer l'inverse d'une matrice A inversible.
— Quand on connait un polynôme annulateur d'une matrice, déterminer A^n (par exemple si le polynôme est de degré 2 avec des racines simples) et A^{-1} (si le coefficient constant du polynôme est non nul).

Questions de cours :

1. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.
2. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est stable par produit et que les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.
4. Montrer que si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ a tous ses coefficients diagonaux non nuls, alors elle est inversible et que son inverse est triangulaire supérieure. *La réciproque a été admise.*
5. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
6. Citer la formule de Stirling, la formule de Taylor Young et démontrer que pour $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.
7. En utilisant l'unicité du développement limité, montrer que si f est paire (respectivement impaire), alors la partie régulière de son développement limité est paire (resp. impaire).
8. Démontrer le DL à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{1-x}$ et en déduire celui de $\frac{1}{1+x}$.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD20 : 17. TD 21 : 1,2,4.

Je mets une indication pour le 4 au dos.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD20 : 17.
- 2ieme du groupe : TD20 : 20.
- 3ieme du groupe : TD20 : 5.

Prochain programme : développements limités

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions ! Bonnes vacances à tous !

Indications pour les exercices :

TD21 : 4 : Séparer la somme en $\sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n!$, tout diviser par $n!$ pour montrer que la limite tend vers 1 et utiliser le théorème des gendarmes pour $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!$.

TD20 : 5 :

— Raisonner par analyse/synthèse.
— Montrer (quasiment sans calcul) le résultat suivant : si A est solution, alors A commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
— En déduire que si A est solution, elle est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
— Réinjecter alors dans l'équation $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve alors des équations de degré 2 à vérifier et on trouve normalement deux matrices solutions (à coefficients entiers !)

TD20 17 :

— Vérifier que $A = I_3 + B$ avec $B^3 = 0_3$. Utiliser alors le binôme de Newton pour déterminer A^N.
— Pour A^{-1}, une des deux méthodes vues en cours devrait donner le résultat rapidement.
— Pour A^{-N}, utiliser le fait que $A^{-1} = I_3 + C$ avec C nilpotente et utiliser le binôme de Newton.
— On pourra pour vérifier les calculs remarquer que la formule trouvée pour A^N pour $N \in \mathbb{N}$ donne le bon résultat pour $N \in \mathbb{Z}$.

TD20 : 20

— Pour le calcul du coeff (i,j) de $F \times \overline{F}$, utiliser le fait (en le justifiant brièvement) que $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$ et vérifier que $(F \times \overline{F})_{i,j} = \omega^{(i-j)(k-1)}$.
— Commencer par le cas $i = j$ pour calculer les coefficients diagonaux.
— Montrer que si $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, alors $\omega^{i-j} \neq 1$.
— En utilisant une somme géométrique et le fait que $\omega^n = 1$, montrer que $(F \times \overline{F})_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
— Vous devriez trouver à la fin que $F^{-1} = \frac{1}{n}\overline{F}$.