33. Familles sommables, corrigé

Exercice 1. Soit $p \geq 3$. Tout est positif donc on peut utiliser le théorème de Fubini pour intervertir les sommes. Pour $p, n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_{n,k} = \frac{1}{n^{p+1}}$ si $n \geq k$ et $u_{n,k} = 0$ si $n < k$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,k} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}u_{n,k} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{p+1}}+0\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^{p+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. On a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^n}$. En posant alors $u_{n,k} = \frac{k}{2^n}$ si $k < n$ et $u_{n,k} = 0$ sinon, on a alors $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,k} \geq 0$. D'après le théorème de Fubini (tout est positif), on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}u_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{k}{2^n}+0\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}k\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Or, par changement d'indice et somme géométrique :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+k+1}} \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k}$. On recommence alors en écrivant $k = \sum_{j=1}^{k}1$. Une démarche similaire nous amène à :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{1\leq j\leq k} \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Exercice 3. On va utiliser la sommation par paquets en découpant $(\mathbb{N}^*)^2$ selon les diagonales D_k telles que $n+m=k$. On a en effet $(\mathbb{N}^*)^2 = \cup_{k\geq 2} D_k$ avec $D_k = \{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ / \ n+m=k\}$. On a bien un recouvrement disjoint. Puisque les termes sommés sont positifs, on peut utiliser la sommation par paquets, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m\geq 1} \frac{1}{(n+m)^3} &= \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{(n,m)\in D_k} \frac{1}{(n+m)^3} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{(n,m)\in D_k} \frac{1}{k^3}.
\end{aligned}$$

Or, on a $\text{Card}(D_k) = k-1$ (les couples qui conviennent sont $(k-1,1),(k-2,2),\ldots,(1,k-1)$ donc on en a $k-1$). On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m\geq 1} \frac{1}{(n+m)^3} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k^3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k^3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\leq \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille est sommable et que sa somme est inférieure ou égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4. Tout est positif donc d'après le théoréme de Fubini, on peut sommer dans l'ordre que l'on veut. On a alors :

$$\sum_{n,p\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha p}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p.$$

Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$, ce qui donnera une somme géométrique qui tend vers $+\infty$. La famille ne sera alors pas sommable. Supposons maintenant $\alpha > 0$. On a alors que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} < 1$ (car on aura $n^\alpha > 1$). Par somme géométrique, on a alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^2\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n^\alpha}}\right).$$

Puisque $\alpha > 0$, on a alors $\dfrac{1}{n^{2\alpha}} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^\alpha}} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on a alors que la série précédente converge si et seulement si $2\alpha > 1$ (série de Riemann).

On en déduit finalement que la famille initiale est sommable si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.