Chapitre OS7

Oscillateurs amortis en régime transitoire

➢ Problématique

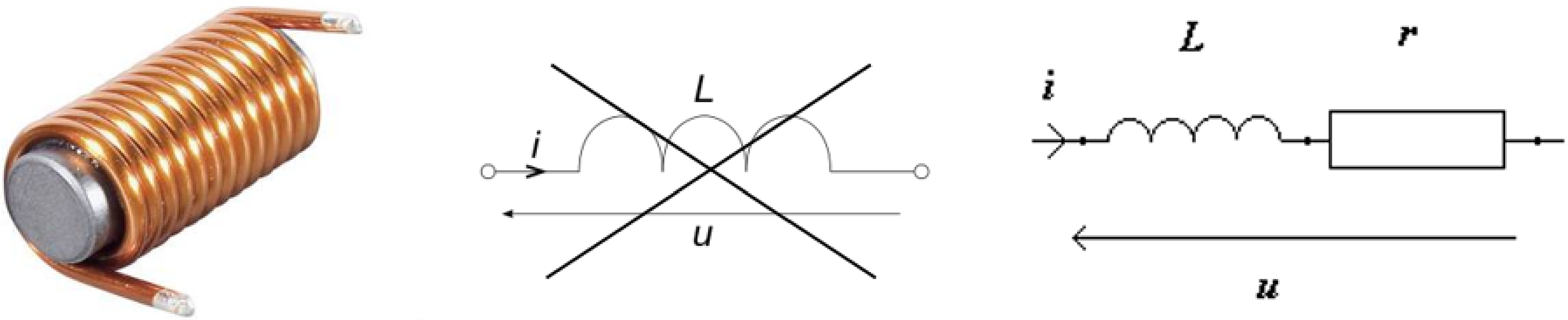


FIGURE 1 : Bobine réelle et son schéma équivalent

Quel est l'effet de la résistance interne de la bobine sur le fct^{t} d'un oscillateur harmonique (circuit LC)

➢ Osc. harm = **modèle**

➢ Osc. **réel** = osc. **amorti**

étude en régime **transitoire**

1 Oscillateur amorti électrique en régime libre

1.1 Observations expérimentales

➢ **Manipulation**

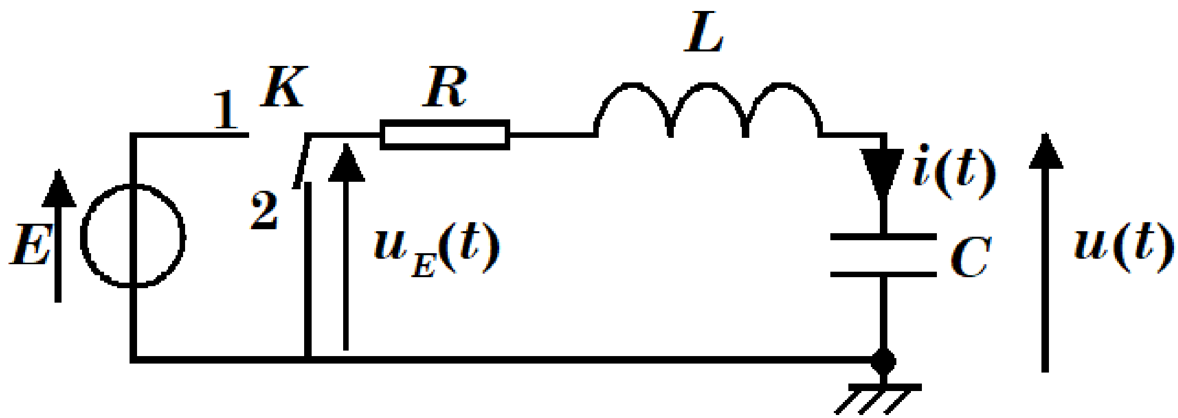


FIGURE 2 : Circuit RLC étudié

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est sur la position 1 et le condensateur C est chargé sous la tension E.
- À $t = 0$, on bascule l'interrupteur K sur la position 2.

➢ **Observations**

1 Oscillateur amorti électrique en régime libre

1.1 Observations expérimentales

- **Définition**

oscillateur harmonique amorti

- Bilan d'énergie

amortissement des oscillations :

dû à la **résistance** R

1.2 Influence de R sur le régime transitoire

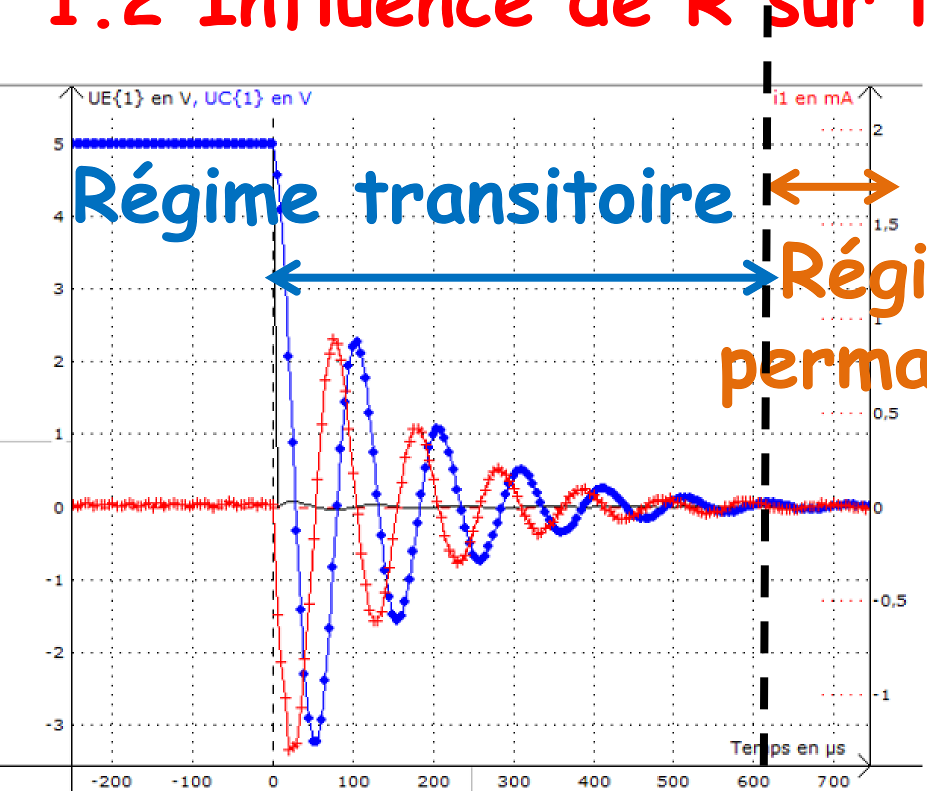


FIGURE 3 : Régime transitoire pseudo-périodique ou oscillant amorti
$R = 600\ \Omega,\ L = 48{,}4\ \text{mH},\ C = 5\ \text{nF}$

Pseudo-périodique

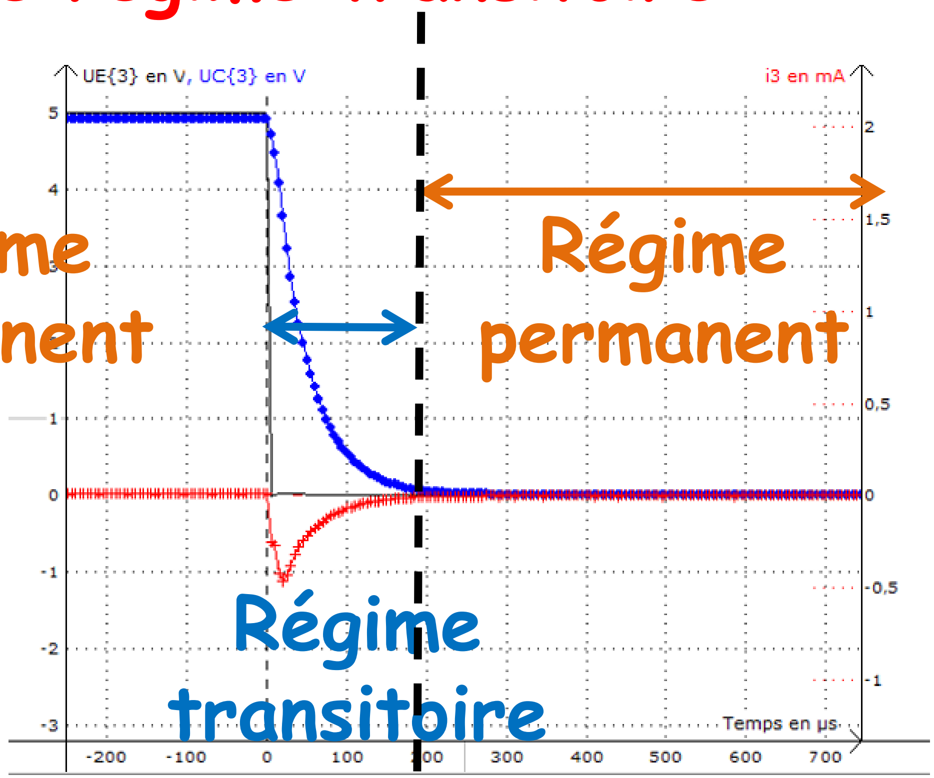


FIGURE 4 : Régime transitoire apériodique
$R = 9\ \text{k}\Omega,\ L = 48{,}4\ \text{mH},\ C = 5\ \text{nF}$

Apériodique

1 Oscillateur amorti électrique en régime libre

1.2 Influence de R sur le régime transitoire

Critique

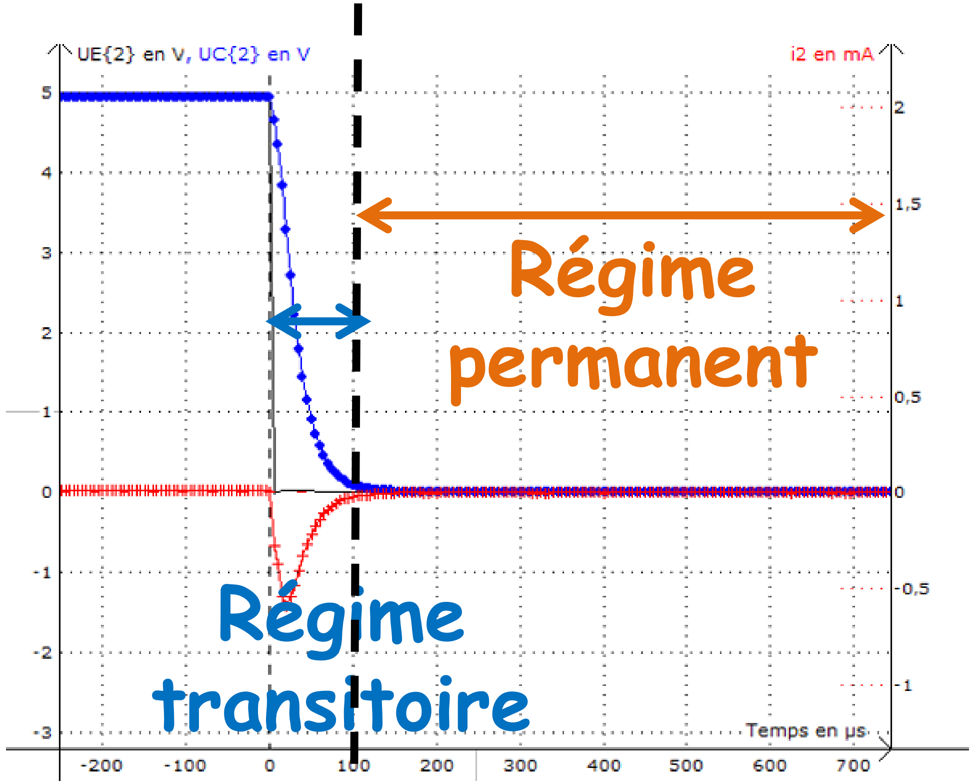


FIGURE 5 : Régime transitoire critique
$R = 6{,}2\ \mathrm{k}\Omega\,,\ L = 48{,}4\ \mathrm{mH}\,,\ C = 5\ \mathrm{nF}$

Limite entre pseudo-périodique et apériodique

1.3 Équation différentielle vérifiée par $u(t)$

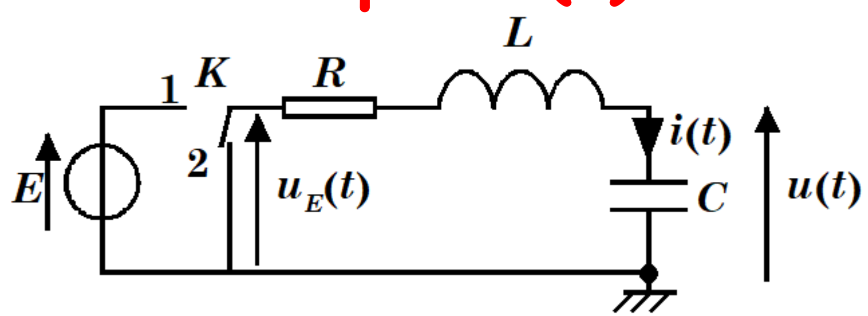


FIGURE 2 : Circuit RLC étudié

➢ Forme normalisée

Éq. diff. du 2nd ordre

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0}$$

ω_0 : **pulsation propre ou caractéristique** (rad/s)

Q : **facteur de qualité** (sans unité)

$\boxed{\xi=\frac{1}{2Q}}$: **coeff. d'amortissement** (sans unité)

Syst. du 2nd ordre caractérisé par 2 paramètres :

$\boxed{\omega_0 \text{ et } Q}$ **OU** $\boxed{\omega_0 \text{ et } \xi}$

1.4 Conditions initiales

1.5 Résolution de l'équation différentielle

Outils mathématiques 4 :
Résolution d'une équation différentielle du second ordre

1.5.1 Méthode de résolution

1.5.2 Amortissement faible : régime pseudo-périodique

- <u>Amortissement faible</u> $\boxed{\xi < 1 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}}$
- **<u>Définitions</u>** : **Pseudo-pulsation**

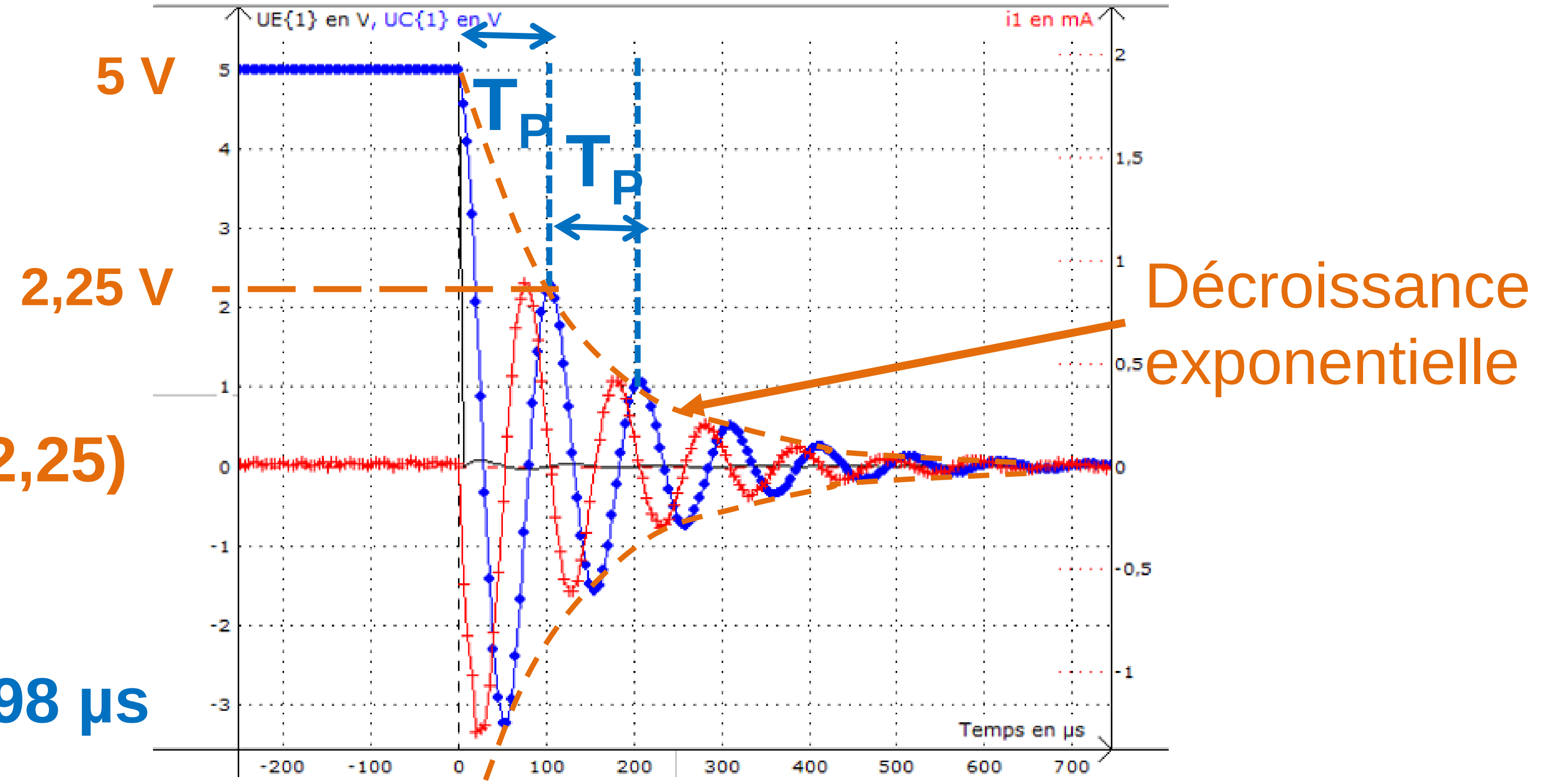
$$\boxed{\omega_P = \sqrt{|\Delta'|} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} < \omega_0}$$

pseudo-période $\boxed{T_P = \frac{2\pi}{\omega_P} > T_0}$

- <u>Solution complète</u>
- <u>Conditions initiales</u>
- <u>Solution finale</u>

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{u(t_n) - U_P}{u(t_n + T_P) - U_P}\right)}$$

<u>Définition</u> : **Décrément logarithmique**



$\delta = \ln(5/2{,}25)$
$= 0{,}80$

$T_P > T_0 = 98$ µs

FIGURE 3 : Régime transitoire pseudo-périodique ou oscillant amorti
$R = 600\ \Omega,\ L = 48{,}4\ \text{mH},\ C = 5\ \text{nF}$

1.5.3 Amortissement fort : régime apériodique

- **Amortissement fort** $\boxed{\xi > 1 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}}$

- **Solution complète**
- **Conditions initiales**
- **Solution finale**

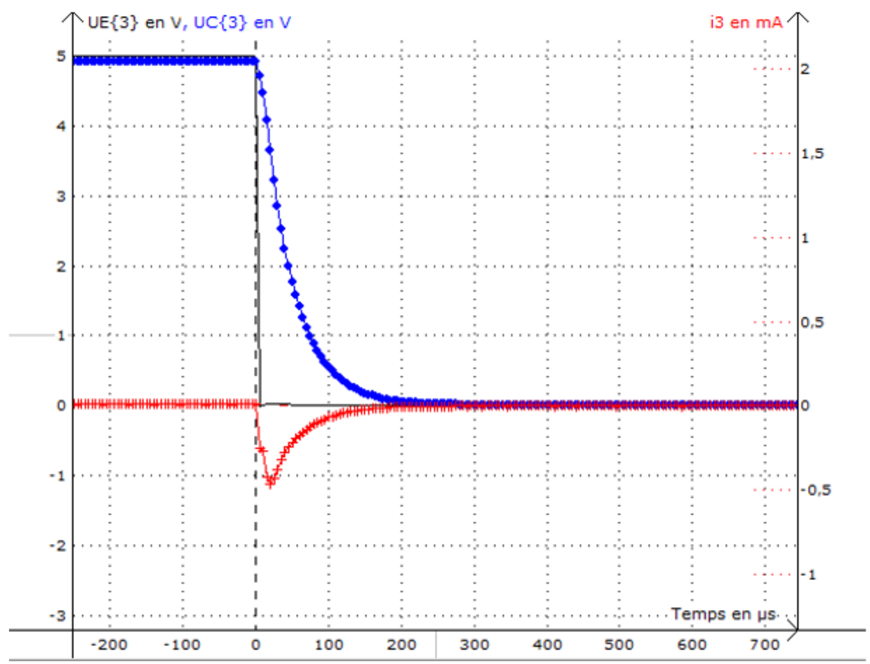


FIGURE 4 : Régime transitoire apériodique
$R = 9\ \text{k}\Omega,\ L = 48{,}4\ \text{mH},\ C = 5\ \text{nF}$

1.5.4 Amortissement critique – Régime critique

- <u>Amortissement critique</u>

$$\boxed{\xi = 1 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}}$$

- <u>Solution complète</u>
- <u>Solution finale</u>
- <u>Résistance critique : R_C</u>

Circuit RLC série :

$$\boxed{R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

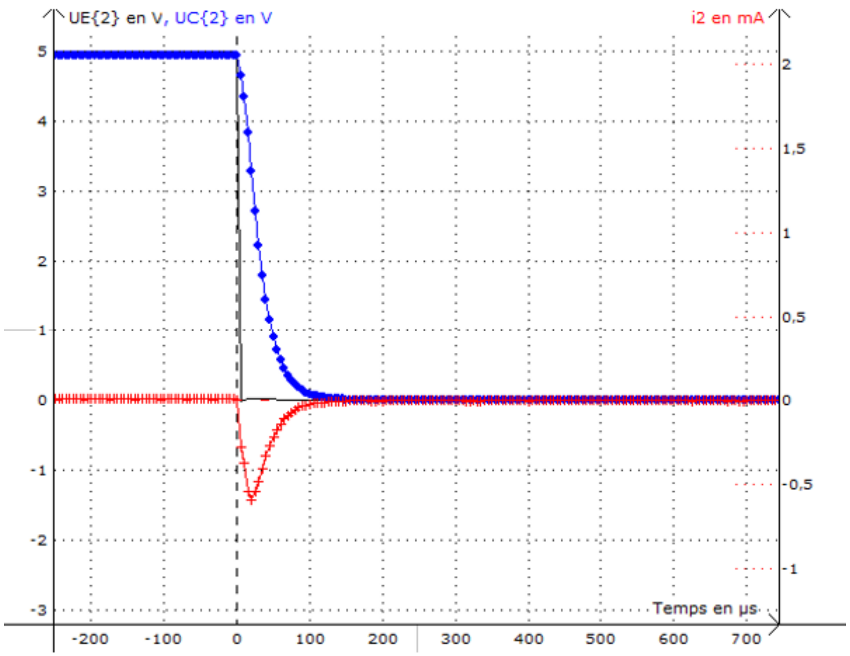


FIGURE 5 : Régime transitoire critique
$R = 6{,}2\ \mathrm{k\Omega},\ L = 48{,}4\ \mathrm{mH},\ C = 5\ \mathrm{nF}$

1.6 Retour à la problématique

- <u>Oscillateur *LC*</u>

oscillateur **faiblement amorti**

régime transitoire **pseudo-périodique**

- <u>Amélioration</u>

2 Réponse indicielle d'un oscillateur électrique amorti

2.1 Circuit étudié et conditions initiales

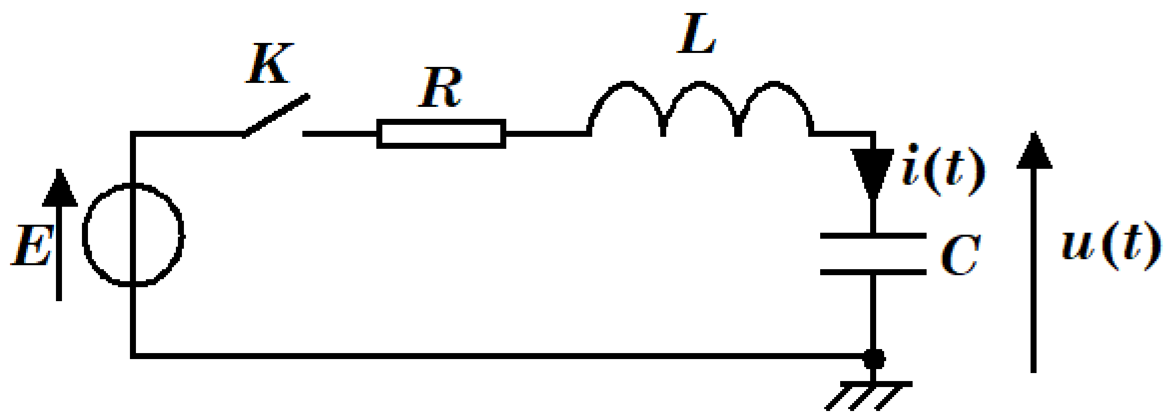


FIGURE 6 : Réponse indicielle du circuit RLC

2.2 Régime permanent

2.3 Expressions de $u(t)$

➢ Équation différentielle vérifiée par $u(t)$

➢ Forme normalisée

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=\omega_0^2E \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=\omega_0^2E}$$

➢ Expression de $u(t)$

2.4 Graphes temporels de $u(t)$ et de $i(t)$

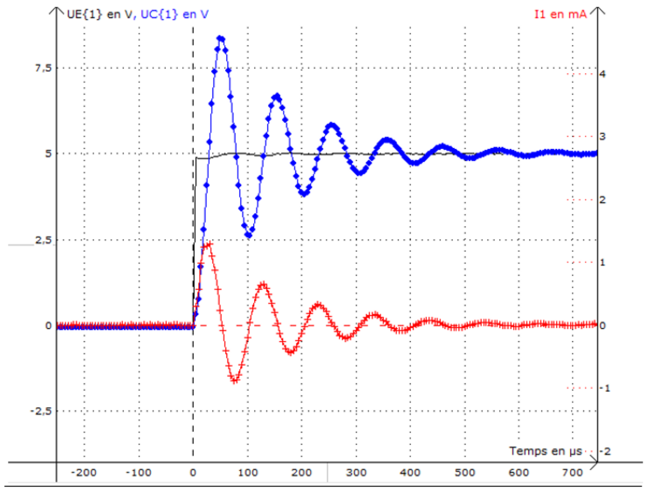


FIGURE 7 : Réponse indicielle : régime transitoire pseudo-périodique

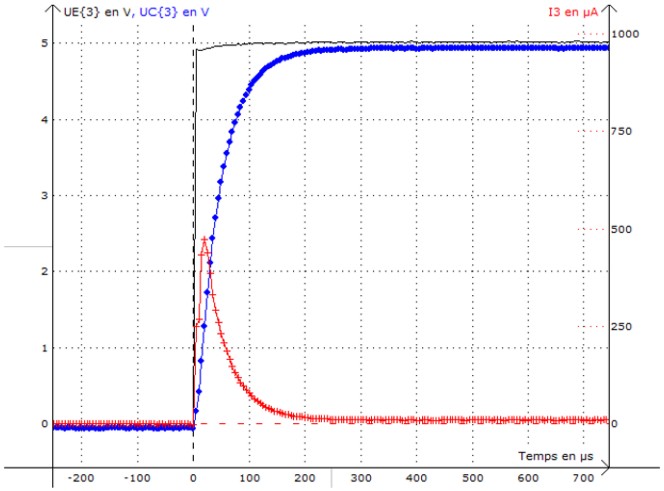


FIGURE 8 : Réponse indicielle : régime transitoire apériodique

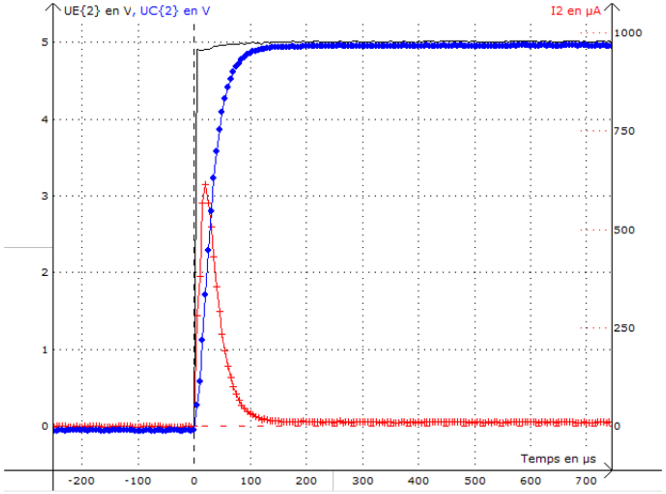


FIGURE 9 : Réponse indicielle : régime transitoire critique

2.5 Durée du régime transitoire

- Temps de réponse à 5%

Définition : temps de réponse à 5%, noté T_R

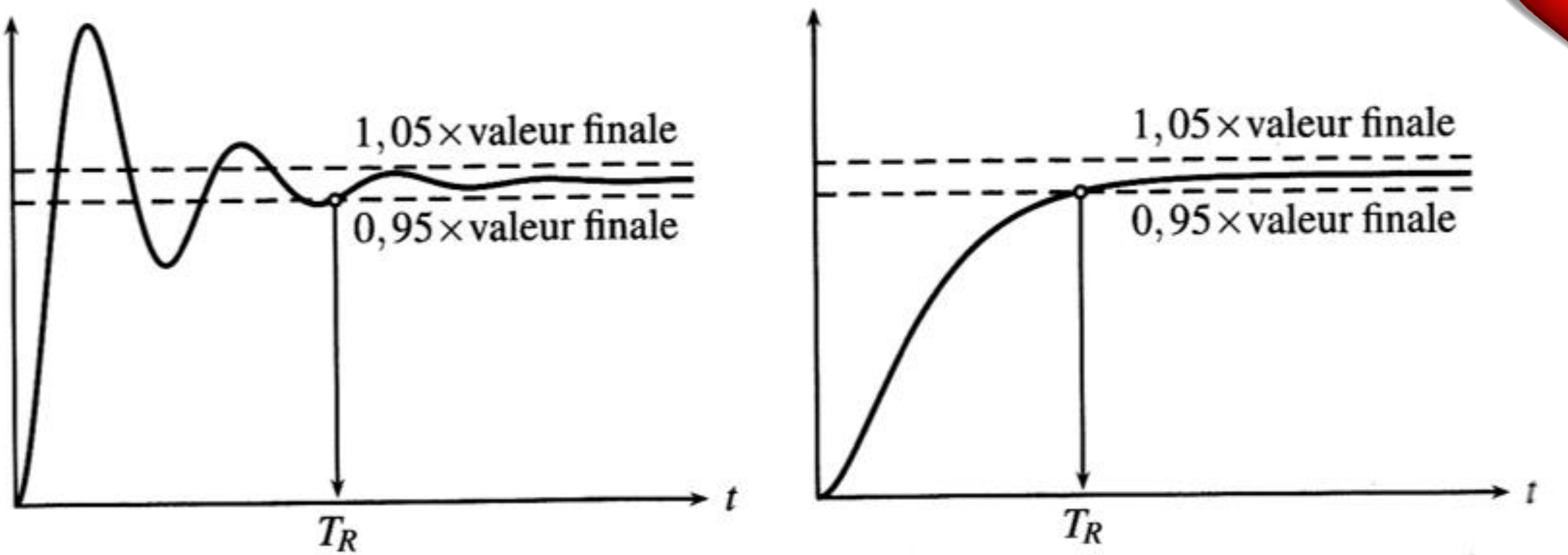


FIGURE 10 : Mise en évidence du temps de réponse à 5%

- **Évolution de T_R en fonction du facteur d'amortissement ξ**

Propriété

tps de réponse min pour $\boxed{\xi = 0,7}$ $\boxed{T_{R\min} = \dfrac{3}{\omega_0}}$

- **Ordre de grandeur de la durée du régime transitoire**

$\xi << 1 \Leftrightarrow \xi < 0,2$

$\xi >> 1 \Leftrightarrow \xi > 2$

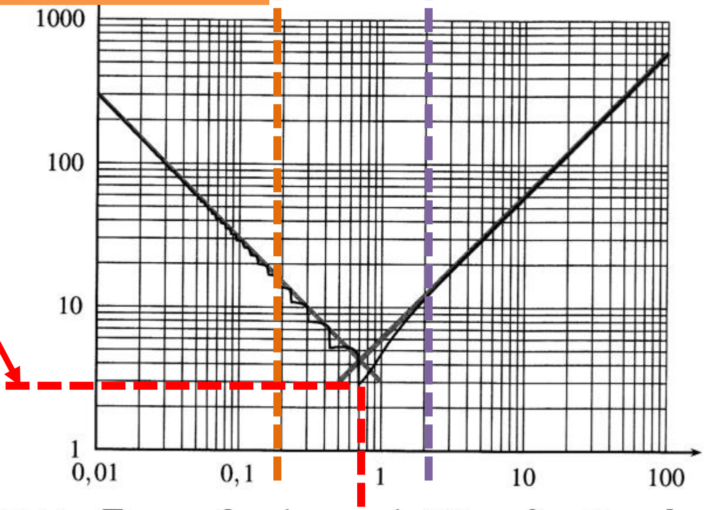


FIGURE 11 : Temps de réponse à 5% en fonction de ξ (en noir) et modélisation (en gris)

Faible amortissement

$$\xi << 1 \text{ ou } Q >> \frac{1}{2}$$

$$T_R \simeq \frac{3}{\xi\omega_0} \simeq \frac{6Q}{\omega_0}$$

Fort amortissement

$$\xi >> 1 \text{ ou } Q << \frac{1}{2}$$

$$T_R \simeq \frac{6\xi}{\omega_0} \simeq \frac{3}{Q\omega_0}$$

3 Bilan énergétique

3.1 Réponse indicielle

$$\boxed{\mathscr{P}_g = \mathscr{P}_J + \frac{d}{dt}\left(\mathscr{E}_m + \mathscr{E}_e\right)}$$

3.2 Régime libre

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathscr{E}_m + \mathscr{E}_e\right) = -\mathscr{P}_J}$$