

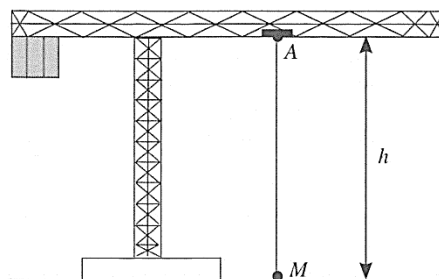
TRAVAUX DIRIGÉS MI2

Dynamique du point matériel

Niveau 1

Exercice 1. Charge soulevée par une grue

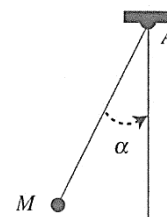
Une grue de chantier de hauteur h doit déplacer d'un point à un autre du chantier une charge de masse m assimilée à son centre de gravité M . Le point d'attache du câble sur le chariot de la grue est noté A .



1. Le point A est à la verticale de M posé sur le sol. Déterminer la tension à appliquer au câble pour qu'il arrache très doucement le point M du sol.
2. L'enrouleur de câble de la grue le remonte avec une accélération verticale a_v constante. Déterminer la tension du câble. Conclusion.

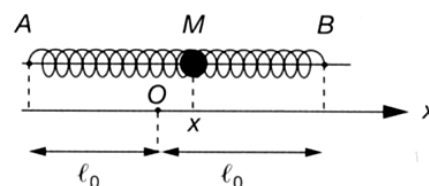
La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite avec une accélération horizontale a_h constante (cf. figure ci-contre).

3. Quelle est l'accélération de M sachant que M est alors immobile par rapport à A ?
4. Déterminer, en fonction de m , g et a_h , l'angle α que fait le câble avec la verticale ainsi que la norme de la tension du câble.



*Exercice 2. Point matériel lié à deux ressorts

Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressorts horizontaux identiques (longueur au repos ℓ_0 et constante de raideur k) fixés aux points A et B . Le point M , de position $\overline{OM} = x$ à l'instant t glisse sans frottement le long de l'axe (Ox) . Les points A et B sont fixes.



1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Quelle est la période T des oscillations du point M ?
3. À l'instant $t = 0$, le point matériel situé en M_0 tel que $\overline{OM}_0 = x_0$, est relâché avec une vitesse initiale nulle. Exprimer x en fonction de t .

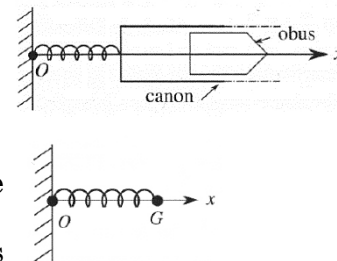
Niveau 2

Exercice 3. Gestion du recul d'un canon

On considère un canon de masse $M = 800 \text{ kg}$. Lors du tir horizontal d'un obus de masse $m = 2,0 \text{ kg}$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ ($v_0 = 600 \text{ m.s}^{-1}$), le canon acquiert une vitesse de

recul $\vec{v}_C = -\frac{m}{M} \vec{v}_0$. Pour limiter la course du canon, on utilise

un ressort de raideur k_1 , de longueur à vide L_0 , dont l'une des extrémités est fixe et l'autre liée au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe (Ox) . Le canon est assimilé à son centre de gravité G et sa position est repérée par $x = OG$.



1. Quelle est la longueur du ressort lorsque le canon est au repos ?
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement du canon et la résoudre en considérant qu'à l'instant initial où l'obus est tiré, le ressort, en contact avec le canon, est au repos.
3. Caractériser le mouvement du canon.
4. Déterminer l'expression de la constante de raideur k_1 pour avoir un recul du canon au maximum égal à d . Effectuer l'application numérique pour $d = 1,0 \text{ m}$. Quel est l'inconvénient d'utiliser un ressort seul ?

Pour pallier ce problème, on ajoute au système un dispositif amortisseur, exerçant une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}$, \vec{v} étant la vitesse du canon.

Le ressort utilisé dans ce cas a pour constante de raideur k_2 , et sa longueur à vide est toujours L_0 .

5. Quelle est l'unité SI de λ ?
6. Établir l'équation différentielle du mouvement du canon et préciser l'expression de la pulsation propre ω_2 de l'oscillateur.
7. Déterminer l'expression de λ pour que le régime soit critique. Effectuer l'application numérique pour $k_2 = 244 \text{ N.m}^{-1}$.
8. Déterminer les expressions de la position $x(t)$ du canon, ainsi que celle de sa vitesse $\dot{x}(t)$, dans le cas du régime critique.
9. En déduire l'instant t_m pour lequel le recul est maximal. Exprimer alors la distance de recul d' en fonction de m , v_0 et λ . Effectuer l'application numérique.

Exercice 4. Chaussette dans un sèche-linge

Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases :

- dans une première phase, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω ;
- dans une deuxième phase, elle retombe en chute libre.

L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit : on cherche à déterminer ce lieu.

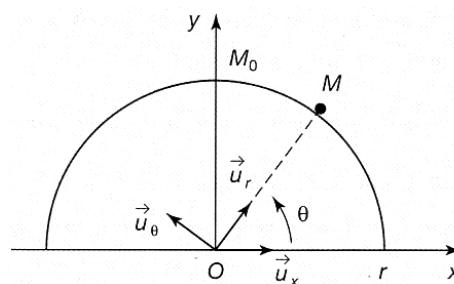
On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25 \text{ cm}$ tournant à $50 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$. On s'intéresse au mouvement de la chaussette de masse m pendant la première phase. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Déterminer l'accélération de la chaussette.
2. En déduire la réaction du tambour sur la chaussette.
3. Déterminer la position angulaire θ_0 du point où la chaussette décolle du tambour.
4. Quel est le mouvement ultérieur de la chaussette ?

*Exercice 5. Glissement sans frottement sur une demi-jante circulaire

Un point matériel de masse m , placé initialement en M_0 et lâché sans vitesse ($v_0 = 0$), glisse sans frottement sur un rail circulaire de rayon r .

La position du point M est repérée par l'angle polaire $(\vec{u}_x, \vec{u}_r) = \theta$. On note \vec{R} la réaction exercée par le support sur le point matériel M .

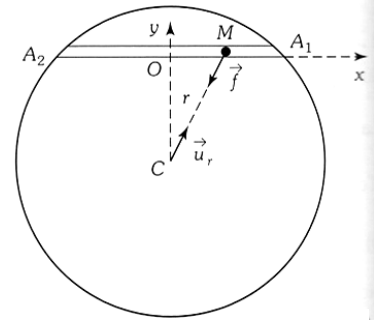


1. Exprimer l'intensité R de la réaction en fonction de m , g , θ et de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. Établir l'équation (1) : $\dot{\omega} = C \cos(\theta)$, C étant une constante à préciser.
2. Résoudre l'équation (1) en multipliant les deux membres par $d\theta = \dot{\theta} dt = \omega dt$ afin de déterminer l'expression de ω en fonction de θ . En déduire l'expression de R en fonction de θ .
3. Calculer l'angle limite θ_l pour lequel le point M quitte le rail.

*Exercice 6. Cavité dans un astéroïde

Soit un astéroïde de forme sphérique (centre C , rayon R), qui présente une cavité cylindrique de petite section, de longueur $A_1A_2 = L$ et de milieu O . Un point matériel de masse m , abandonné en A_1 à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale, se déplace le long de la cavité.

Le point matériel, situé en M à l'instant t , tel que $\overrightarrow{CM} = r\vec{u}_r$ ($r = CM$), est soumis à l'action de la force



gravitationnelle de l'astéroïde $\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r$, où g_0 représente la norme du champ de gravitation à la surface de l'astéroïde.

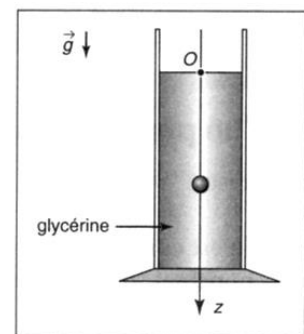
On note \vec{f}_1 l'action du support A_1A_2 sur le point matériel M . On pose $\overrightarrow{OM} = x$ et on néglige les frottements.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel M dans le référentiel d'axe (Ox) , supposé galiléen.
2. Déterminer l'expression de x en fonction de t et des paramètres du système.
3. Déterminer l'expression de la réaction du support.
4. Déterminer la durée τ du trajet A_1A_2 et la vitesse maximale v_{max} du point M .

*Exercice 7. Mouvement d'une bille d'acier dans un liquide

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme : $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Une petite bille d'acier M de rayon r et de masse m est lâchée en O sans vitesse initiale dans la glycérine de viscosité η . Ce liquide visqueux exerce sur la bille en translation :



- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé ;
- des actions de frottement modélisées par une force $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la bille dans \mathcal{R}_g .

Données : masse volumique de l'acier $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, masse volumique de la glycérine $\rho_0 = 1260 \text{ kg.m}^{-3}$, masse volumique de l'air $\rho_a = 1,300 \text{ kg.m}^{-3}$

1. Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par le fluide sur la bille. Comparer à la poussée d'Archimède qui serait exercée par l'air sur la bille. Conclure.

2. Effectuer le bilan des forces exercées en M en précisant le référentiel d'étude.
3. Établir l'équation différentielle que vérifie la valeur v de la vitesse de la bille.
4. Montrer que la vitesse de la bille tend vers une valeur limite v_{lim} . Donner son expression en fonction de ρ , ρ_0 , g , r et η . Quelle est la constante de temps τ du mouvement ?
5. Pour une bille de rayon $r = 1,5 \text{ mm}$, la vitesse limite atteinte est $v_{lim} = 5,2 \text{ cm.s}^{-1}$. En déduire la viscosité η , ainsi que la constante de temps τ . Conclure sur le caractère observable du phénomène.

SOLUTIONS

Exercice 1. Charge soulevée par une grue

Avec (Oz) vertical ascendant

$$1. \vec{T} \simeq m\vec{g}\vec{u}_z \quad (\ddot{z} \simeq 0) \quad 2. \vec{T} = m(a_v + g)\vec{u}_z \quad 4. \tan(\alpha) = \frac{a_h}{g} \text{ et } T = m\sqrt{a_h^2 + g^2}$$

*Exercice 2. Point matériel lié à deux ressorts

1. Recherche de l'équation différentielle :

① Système : point matériel M de masse m

② Référentiel : terrestre galiléen

③ Forces : poids \vec{P}

- réaction du support \vec{R}
- force de rappel du ressort A en traction : $\vec{T}_1 = -k(AM - l_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -kx\vec{u}_x$,
- force de rappel du ressort B en compression :

$$\vec{T}_2 = -k(BM - l_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -k(-x)(-\vec{u}_x) = -kx\vec{u}_x$$

④ PFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$, \vec{P} et \vec{R} étant orthogonale au mouvement

⑤ Projection du PFD sur l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = -kx - kx = -2kx$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

2. Période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

3. Expression de $x(t)$: ⑥ Résolution de l'équation différentielle :

- Solution de l'essm et sol. complète : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
- Conditions initiales : $x(0) = x_0 = A$ et $\dot{x}(0) = 0 = B\omega_0$ soit $B = 0$
- Solution finale : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

L'expression de $x(t)$ correspond bien à un mouvement rectiligne sinusoïdal.

Exercice 3. Gestion du recul d'un canon

$$2. x(t) = -\frac{mv_0}{M\omega_0} \sin(\omega_0 t) + L_0 \quad 4. k_1 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1} \quad 7. \lambda = 2\sqrt{Mk_2} = 8,8 \cdot 10^2 \text{ kg.s}^{-1} \quad 8.$$

$$x(t) = -\frac{mv_0}{M} te^{-\omega_2 t} + L_0 \quad 9. t_m = \frac{1}{\omega_2} = \frac{2M}{\lambda} = \sqrt{\frac{M}{k_2}} = 1,8 \text{ s} \quad d' = \frac{2mv_0}{\lambda} e^{-1} = 1,0 \text{ m} = d$$

Exercice 4. Chaussette dans un sèche-linge

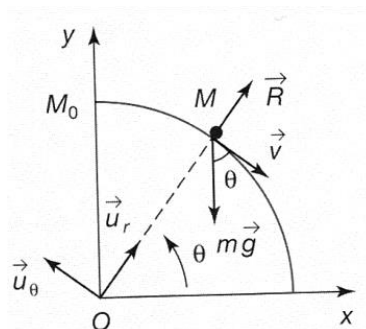
Avec axe (Ox) horizontal et angle $\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u_x})$: 3. $\theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{R\omega^2}{g}\right) = 44 \text{ deg}$

*Exercice 5. Glissement sans frottement sur une demi-jante circulaire

1. ① Système : point matériel M de masse m
- ② Référentiel : terrestre galiléen. La trajectoire du point M étant circulaire et le mouvement étant plan, on utilise la base polaire $(O; \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. **Attention** à

l'orientation de $\overrightarrow{u_\theta}$, donné par rotation de $\frac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{u_r}$ **dans**

le sens de θ !



- ③ Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_y}$

réaction du support $\vec{R} = R\overrightarrow{u_r}$: orthogonale au support au point M

- ④ PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

- ⑤ Projection du PFD :

➤ Cinématique :

- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$
- Vecteur vitesse : $\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$ (car $r = \text{cste}$) **Attention** : le vecteur vitesse est orienté selon $-\overrightarrow{u_\theta}$ car $\dot{\theta} < 0$: l'angle θ décroît !
- Vecteur accélération : $\vec{a} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r} + r\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta}$

➤ Forces

- Poids : $\vec{P} = \begin{vmatrix} m\vec{g} \cdot \overrightarrow{u_r} \\ m\vec{g} \cdot \overrightarrow{u_\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mg \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ mg \cos(\theta + \pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -mg \sin(\theta) \\ -mg \cos(\theta) \end{vmatrix}$
- Réaction : $\vec{R} = R\overrightarrow{u_r}$

➤ Projection du PFD selon $\overrightarrow{u_r}$: $-mr\omega^2 = -mg \sin(\theta) + R$

➤ Projection du PFD selon $\overrightarrow{u_\theta}$: $mr\dot{\omega} = -mg \cos(\theta)$

L'expression de l'intensité de la réaction est : $R = m(g \sin(\theta) - r\omega^2)$.

L'équation (1) est : $\dot{\omega} = -\frac{g}{r} \cos(\theta) = C \cos(\theta)$ avec $C = -\frac{g}{r}$

2. ⑥ Résolution de l'équation (1) : on multiplie chaque membre par $d\theta = \omega dt$

$$\dot{\omega} \omega dt = -\frac{g}{r} \cos(\theta) d\theta \Leftrightarrow \omega d\omega = -\frac{g}{r} \cos(\theta) d\theta \Rightarrow \int \omega d\omega = \int -\frac{g}{r} \cos(\theta) d\theta + K$$

Par intégration, on obtient : $\frac{\omega^2}{2} = -\frac{g}{r} \sin(\theta) + K$

Conditions initiales : À $t = 0$, M se trouve en M_0 : $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et sa vitesse angulaire

est nulle $\omega(0) = \frac{v(0)}{r} = 0$: d'où $K = \frac{g}{r}$ et $\omega^2 = -2\frac{g}{r} \sin(\theta) + 2\frac{g}{r} = 2\frac{g}{r}(1 - \sin(\theta))$

La vitesse angulaire est $\omega = -\sqrt{2\frac{g}{r}(1 - \sin(\theta))}$ (**Attention** : signe $-$ car $\dot{\theta} = \omega < 0$!)

➤ L'intensité de la réaction est : $R = m(g \sin(\theta) - 2g(1 - \sin(\theta)))$ soit $R = mg(3 \sin(\theta) - 2)$.

3. La condition pour que le point M quitte le rail est $R = 0$. L'angle limite θ_l est tel

$$\text{que } 3 \sin(\theta_l) - 2 = 0, \text{ soit } \sin(\theta_l) = \frac{2}{3} \text{ ou } \theta_l = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 41,8^\circ$$

*Exercice 6. Cavité dans un astéroïde

1. ① Système : point matériel M de masse m

② Référentiel : de l'astéroïde supposé galiléen.

D'après les indications de l'énoncé, on utilise la

base cartésienne $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et le mouvement est

contenu dans le plan $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

③ Forces : • force gravitationnelle $\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r$

• réaction du support $\vec{f}_1 = f_1 \vec{u}_y$: elle est orthogonale au support en M

Remarque : pas de poids puisqu'on considère directement la force gravitationnelle !

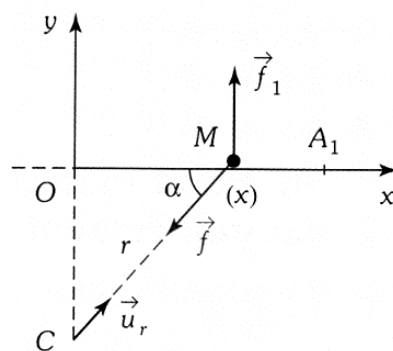
④ PFD : $m\vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_1$

⑤ Projection du PFD :

➤ Cinématique : Le mouvement étant rectiligne selon (Ox) , les vecteurs position, vitesse et accélération sont : $\vec{OM} = x\vec{u}_x$ $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$

➤ Forces : $\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r = -mg_0 \frac{r}{R} (\cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_y)$ et $\vec{f}_1 = f_1 \vec{u}_y$

➤ Projection du PFD selon \vec{u}_x : (1) $m\ddot{x} = -mg_0 \frac{r}{R} \cos(\alpha)$ avec $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$



➤ Projection du PFD selon $\overrightarrow{u_y}$: (2) $0 = -mg_0 \frac{r}{R} \sin(\alpha) + f_1$

La relation (1) s'écrit : $m\ddot{x} = -mg_0 \frac{x}{R}$ soit $\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$. L'équation différentielle du

mouvement est $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$.

2. © Résolution de l'équation différentielle :

- Solution de l'essm et solution complète : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

- Conditions initiales : $x(0) = \frac{L}{2} = A$ et $\dot{x}(0) = 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

- Solution finale : $x(t) = \frac{L}{2} \cos(\omega_0 t)$

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique et le mouvement de M est rectiligne sinusoïdal d'amplitude $\frac{L}{2}$, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$, et de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

3. L'équation (2) donne l'expression de la réaction du support : $f_1 = mg_0 \frac{r}{R} \sin(\alpha)$

avec $r \sin(\alpha) = CO = \sqrt{CA_1^2 - OA_1^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$. Donc : $f_1 = m \frac{g_0}{R} \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$

4. Le point M parvient en A_2 à l'instant τ tel que :

$$x(\tau) = -\frac{L}{2} = \frac{L}{2} \cos(\omega_0 \tau) \Leftrightarrow \cos(\omega_0 \tau) = -1 \Leftrightarrow \omega_0 \tau = \pi \quad (2\pi) \text{ soit } \tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

La durée du trajet $A_1 A_2$ correspond à une demi-période du mouvement oscillatoire.

➤ L'expression de la vitesse de M est : $v = \dot{x} = -\frac{L}{2} \omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Elle est maximale

lorsque $\sin(\omega_0 t) = -1$ soit $\omega_0 t = \frac{3\pi}{2} \quad (2\pi) \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2\omega_0} \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right)$ ou $t = \frac{3T_0}{4} [T_0]$. Elle

est obtenue lorsque M passe par le point O en allant de A_2 à A_1 .

La vitesse maximale est :

$$v_{\max} = -\frac{L}{2} \omega_0 \sin\left(\omega_0 \frac{3T_0}{4}\right) = -\frac{L}{2} \omega_0 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ soit } v_{\max} = \frac{L}{2} \omega_0 = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

*Exercice 7. Mouvement d'une bille d'acier dans un liquide

1. La poussée d'Archimède est l'action exercée par les forces de pression sur un corps immergé. C'est une force dirigée selon la verticale ascendante et égale, en norme, au poids du fluide de masse m_0 déplacé.

Dans la glycérine : $\vec{\Pi}_0 = -m_0 \vec{g} = -\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$

Poids de la bille : $\vec{P} = m \vec{g} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$

Dans la glycérine : En norme : $\frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_0}{\rho} = 0,16 = 16\%$

Dans l'air : $\frac{\Pi_a}{P} = \frac{\rho_a}{\rho} = 1,6 \cdot 10^{-4} = 1,6 \cdot 10^{-2}\%$: $\vec{\Pi}_a$ négligée dans l'air.

2. ① Système : bille assimilée à un point matériel M de masse m
 ② Référentiel terrestre galiléen muni de la base cartésienne $\mathcal{R}_g(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
 ③ Forces : Poids \vec{P}
 Poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_0$
 Force de frottement visqueux $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$

3. ④ PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}$

⑤ Projection du PFD selon (Oz) : $m\ddot{z} = mg - m_0g - 6\pi\eta r\dot{z}$

En posant $v = \dot{z}$ et $\dot{v} = \ddot{z}$, on obtient : $\dot{v} + \frac{9\eta}{2\rho r^2} v = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g$

4. La vitesse v est solution d'une équation différentielle du 1^{er} ordre et la solution complète s'écrit : $v(t) = Ke^{\frac{t}{\tau}} + cste$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $v(t)$ tend vers une valeur constante qui est la vitesse limite. Elle correspond à la solution particulière de l'équation différentielle :

$$v_{lim} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g \frac{2\rho r^2}{9\eta}$$

L'équation différentielle s'écrit : $\tau \dot{v} + v = v_{lim}$ avec $\tau = \frac{2\rho r^2}{9\eta}$

5. Viscosité : $\eta = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g \frac{2\rho r^2}{9v_{lim}}$ et $[\eta] = [g] \frac{[\rho][r]^2}{[v]} = \frac{L.T^{-2}M.L^{-3}L^2}{L.T^{-1}} = M.L^{-1}.T^{-1}$

A.N. : $\eta = 0,62 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Constante de temps : $\tau = 6,3 \text{ ms}$

La bille atteint sa vitesse limite en $3\tau \approx 19 \text{ ms}$: on n'a pas le temps d'observer le régime transitoire.