30. Variables aléatoires

Exercice 1. (c) On considère la variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1,5]\!]$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=k)=k/15$ pour $k\in[\![1,5]\!]$.

1) Vérifier que l'on a bien défini une variable aléatoire. Déterminer son espérance et sa variance.

2) Déterminer la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $Y=X^2$ et $Z=\min(X-3,0)$.

Exercice 2. (c)/ (m) On dispose d'une pièce équilibrée qu'on lance successivement n fois. On note X le nombre de face obtenus. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? On considère alors la variable aléatoire Y qui vaut X si X est non nul et qui prend une valeur tirée uniformément entre 1 et n si X est nul. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 3. (m) Soit X une va à valeurs dans $[\![0,N]\!]$. Montrer que $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(X>k)$.

Exercice 4. (m) Soit X une va telle que $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ avec $p\in\,]0,1[$. Déterminer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 5. (c) Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{V}(X)\neq 0$. Vérifier que $Q(a)=\mathbb{V}(Y-(aX+b))$ est un polynôme de degré 2 en a et montrer qu'il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\mathbb{V}(Y-(aX+b))$ soit minimal et $Y-(aX+b)$ soit centrée.

Exercice 6. (m) A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Un avion n'arrive pas à destination si strictement plus de la moitié de ses moteurs tombe en panne. En fonction de p, quel avion choisissez-vous ?

Exercice 7. (i) Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise les boules et on note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X (en utilisant des méthodes de dénombrement) puis l'espérance de X.

Exercice 8. (m) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on fixe $X_n\sim\mathcal{B}(4n,1/2)$.

1) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-2n|\geq n)=0$.

2) En déduire que la suite $(\mathbb{P}(|X_n-2n|\leq n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $x_n=\sum_{k=n}^{3n}\binom{4n}{k}$. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. (m) Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. On fixe $\alpha>0$.

1) Montrer que $\mathbb{P}(\mu-\alpha\sigma<X<\mu+\alpha\sigma)\geq 1-\frac{1}{\alpha^2}$.

2) On pose la variable aléatoire $Y=(\alpha(X-\mu)+\sigma)^2$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de α et σ.

3) En déduire que $\mathbb{P}(X\geq\mu+\alpha\sigma)\leq\frac{1}{1+\alpha^2}$.

Exercice 10. (m) Côme a un paquet de N bonbons dans chacune de ses poches. À chaque minute, il choisit une de ses deux poches (de manière équiprobable) et mange un bonbon. Il continue jusqu'à ce qu'un paquet soit vide. On note X_N la variable aléatoire comptant le nombre de bonbons restants dans l'autre paquet à ce moment.

1) Justifier que $X_N(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et que $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(X_N = k) = 2 \times \binom{2N-k-1}{N-1} \times \frac{1}{2^{2N-k}}$.

2) En déduire que pour $k \in [\![1, N]\!]$, $(2N - k - 1)\mathbb{P}(X_N = k + 1) = 2(N - k)\mathbb{P}(X_N = k)$.

3) En sommant l'égalité précédente pour k variant de 1 à N, montrer que $\mathbb{E}(X_N) = \frac{2N-1}{2^{2N-2}}\binom{2N-2}{N-1}$ et déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X_N)$ quand N tend vers l'infini à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 11. (i) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. On note X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au maximum des numéros obtenus.

1) Pour $x \in [\![1, N]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ et en déduire la loi de X.

2) Pour $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$, calculer $\mathbb{P}((X \geq x) \cap (Y \leq y))$ et en déduire la loi du couple (X, Y).

Exercice 12. (m) Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1) Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2) Après ses n tentatives, le secrétaire rappelle chacun des correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus. Déterminer la loi de Y sachant $(X = k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et en déduire la loi conjointe de X et Y.

3) Montrer que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 13. (m) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres p et q. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$. *Application :* deux archers tirent de manière indépendante sur n cibles. À chaque tir, le premier a une probabilité p de toucher et le second une probabilité q. Déterminer la loi suivie par le nombre de cibles touchées au moins une fois. Déterminer la loi suivie par le nombre de cibles non touchées.

Exercice 14. (c) Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$. Calculer $\mathbb{E}(X_k)$. On pose alors $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. En étudiant $\mathbb{E}(Y_n)$, déterminer $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$ puis $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 15. (c) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$.

Exercice 16. (m) À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péages mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières. Déterminer la loi de X_1, puis calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$ et en déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 17. (∗) Soient $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = 1/2$. On définit alors la matrice aléatoire $X = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(X))$, $\mathbb{E}(\det(X))$ et $\mathbb{V}(\det(X))$.