6. Fonctions usuelles, méthodologie

I. Fonctions trigonométriques réciproques

I.1. Rappels

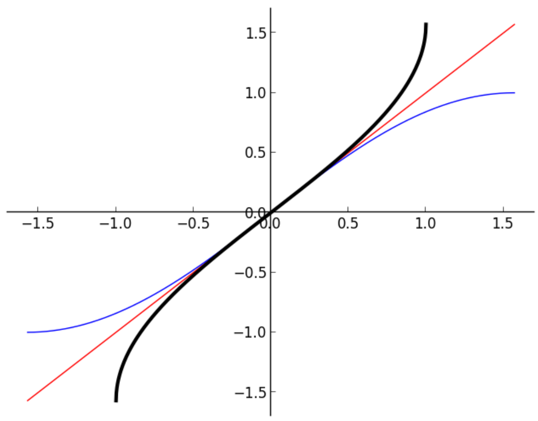
I.2. Arcsinus

Définition. arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est la fonction réciproque de sin : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. On a donc :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x \text{ et } \forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(y)) = y.$$

Proposition. arcsin est impaire, strictement croissante et continue sur $[-1,1]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Graphe de la fonction arcsinus :
on a représenté également la droite $y = x$ et la fonction sinus en traits fins



(m) Pour calculer/retrouver des valeurs de $\arcsin(x)$, on peut visualiser $\theta = \arcsin(x)$ comme l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = x$.

Exercice d'application 1. Déterminer $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $\arcsin\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$.

(m) Pour simplifier $\arcsin(\sin(x))$, on utilise les propriétés de sinus (2π-périodicité et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$) pour « ramener » x dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice d'application 2. Déterminer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right)$ et $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

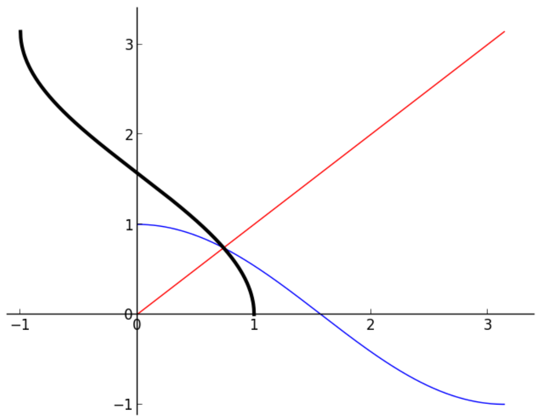
I.3. Arccosinus

Définition. arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ est la fonction réciproque de cos : $[0,\pi] \to [-1,1]$. On a donc :

$$\forall x \in [0,\pi]\,,\ \arccos(\cos(x)) = x \text{ et } \forall y \in [-1,1]\,,\ \cos(\arccos(y)) = y.$$

Proposition. arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[\,,\ \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Graphe de arccosinus :
on a représenté également la droite $y = x$ et la fonction cosinus en traits fins



(m) Pour calculer/retrouver des valeurs de $\arccos(x)$, on peut visualiser $\theta = \arccos(x)$ comme l'unique élément de $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$.

(m) Pour simplifier $\arccos(\cos(x))$, on utilise les propriétés de cosinus (2π-périodicité et parité) pour « ramener » x dans $[0,\pi]$.

Exercice d'application 3. Déterminer les expressions suivantes :

1) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

2) $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{22\pi}{5}\right)\right)$ et $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)\right)$.

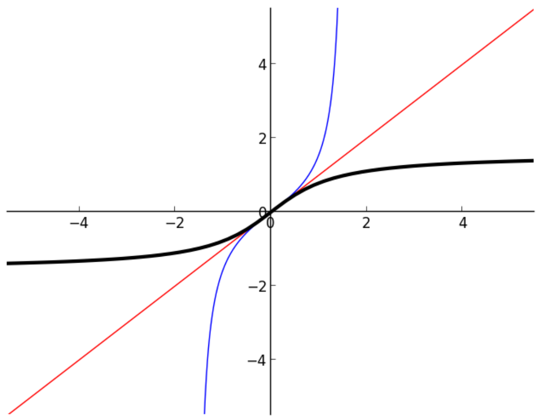
I.4. Arctangente

Définition. arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ est la fonction réciproque de tan : $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. On a donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(y)) = y.$$

Proposition. arctan est impaire, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Graphe de arctangente :
on a représenté également la droite $y = x$ et la fonction tangente en traits fins



(m) Pour calculer/retrouver des valeurs de $\arctan(x)$, on peut visualiser $\theta = \arctan(x)$ comme l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = x$. Pour simplifier $\arctan(\tan(x))$, il faut utiliser la π-périodicité de la tangente pour « ramener » x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice d'application 4. Soit $z_1 = 3 + 4i$. On note $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ un argument de $\text{Arg}(z_1)$.

1) Déterminer $|z_1|$ et en déduire la valeur de $\tan(\theta)$.

2) À l'aide d'un cercle trigonométrique, justifier que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer la valeur de θ à l'aide d'une arctangente et en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

3) Reprendre la même démarche pour déterminer les arguments de $z_2 = 2 - 3i$ et $z_3 = -1 + 2i$.

II. Logarithme et exponentielle

II.1. Primitives

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :
- f admet au moins une primitive.
- Toutes les primitives de f sont égales à une constante près.
- Soit $x_0 \in I$. L'unique primitive de f qui s'annule en x_0 est $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array} \right.$.

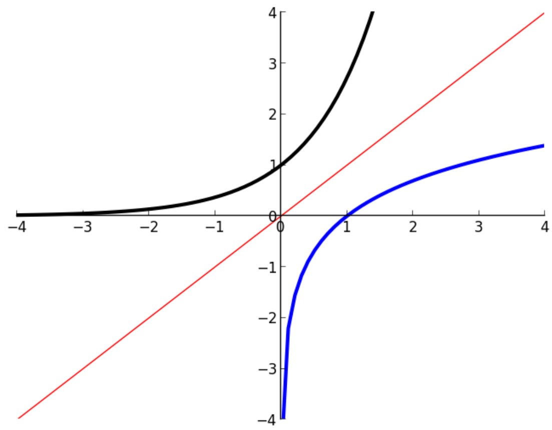
II.2. Logarithme

Théorème. Propriétés du logarithme. On a :
- $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

II.3. Exponentielle

Théorème. Propriétés de l'exponentielle. On a :
- $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))^n = \exp(nx)$.

Graphe du logarithme et de l'exponentielle :
on a représenté également la droite $y = x$ en traits fins



II.4. Fonctions puissance

Définition. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x > 0$, on a :
- $x^a \times x^b = x^{a+b}$.
- $(x^a)^b = x^{ab}$.

Proposition. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. On a les limites suivantes en 0^+ et en $+\infty$:
- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 1$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, $\forall x > 0$, $\ln(x^a) = a\ln(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(ax) = (\exp(x))^a$.

Exercice d'application 5. Simplifier les expressions suivantes :

1) $\ln(4^{\ln(\sqrt{2})})$ à écrire uniquement en fonction de $\ln(2)$.

2) $\left((\sqrt{3})^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} \times 9^{-\frac{1}{4}}$.

II.5. Retour sur l'exponentielle

Proposition. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \exp(x)$.

(m) Quand on étudie une expression avec des puissances (par exemple une fonction du type $f : x \mapsto g(x)^{h(x)}$), il est en général indispensable de l'écrire à l'aide de l'exponentielle (ici $f : x \mapsto e^{h(x)\ln(g(x))}$) afin de pouvoir l'étudier (pour la dériver, trouver ses limites, etc.).

Exercice d'application 6. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et déterminer leurs dérivées.

1) $f_1 : x \mapsto (2+\cos(x))^{\sin(x)}$.

2) $f_2 : x \mapsto (2+x)^{\arctan(x)}$.

Exercice d'application 7.

1) En utilisant la limite d'un taux d'accroissement, démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

II.6. Croissances comparées

Théorème. Pour tout $a, b > 0$, on a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^b |(\ln(x))|^a = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{bx}}{x^a} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a e^{bx} = 0$.

(m) Ce théorème est très utile pour simplifier toutes les formes indéterminées faisant apparaitre des exponentielles, des logarithmes et des puissances. En général, si vous avez une expression avec une forme indéterminée, il faut factoriser par le terme qui vous semble tendre le plus rapidement vers l'infini (ou le plus lentement vers 0) et les croissances comparées vous permettent alors de prouver que toutes les fractions « indéterminées » tendent vers 0. Le théorème nous indique qu'au voisinage de l'infini, les fonctions exponentielles tendent plus vite vers l'infini que les fonctions puissances qui tendent plus vite que les fonctions logarithmiques (ce qui permet de voir quel terme mettre en facteur).

Exercice d'application 8. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{e^x}}{x^4(\ln(x))^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{42} + e^{-3x} - (\ln(x))^{1234} - e^{x/2}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2\ln(x)} + x\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} + (\ln(x))^2$.

III. Fonctions hyperboliques

III.1. Cosinus et sinus hyperboliques

Définition. Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperboliques sont définies par :

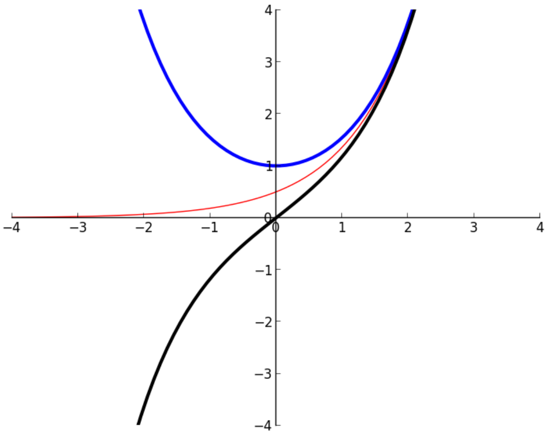
$$\mathrm{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \quad \text{et } \mathrm{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}.$$

Ce sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$.

Proposition. ch est définie sur $\mathbb{R}$, paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$. On a $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

Proposition. sh est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. On a $\mathrm{sh}(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.

Graphe du cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique :
on a représenté également la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{2}$ *en traits fins*



(m) Pour dériver des expressions avec du ch et du sh, on ne repasse pas par leur définition en fonction de l'exponentielle mais on utilise $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$! De manière générale, c'est rarement une bonne idée de remplacer ch ou sh par leur définition avec l'exponentielle car cela a tendance à compliquer les calculs (toute règle ayant ses exceptions, voir en particulier le point méthode du III.3).

Exercice d'application 9. Soient $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto A\mathrm{ch}(\alpha x) + B\mathrm{sh}(\alpha x)$.

1) Justifier que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'' en fonction de f.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(2n)}$ en fonction de f.

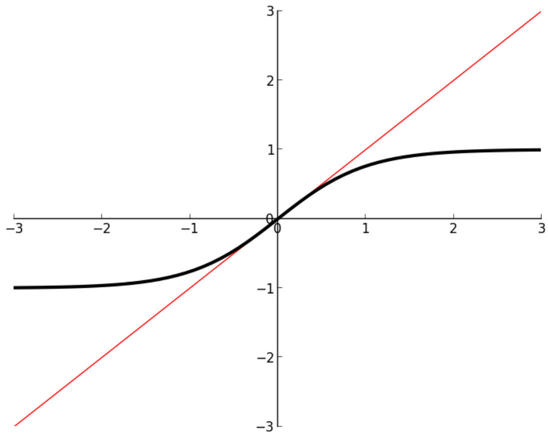
Exercice d'application 10. Résoudre $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{3}{4}$ en revenant à la définition et en posant $X = e^x$.

III.2. Tangente hyperbolique

Définition. La tangente hyperbolique est la fonction th : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}\right.$.

Proposition. th est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$. On a $\mathrm{th}(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

Graphe de la tangente hyperbolique :
on a représenté également la droite $y = x$ en traits fins



III.3. Trigonométrie hyperbolique

Proposition. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

m Les méthodes vues pour étudier les cosinus et sinus s'appliquent aux cosinus et sinus hyperboliques. Par exemple, puisque pour linéariser une expression avec du cosinus et sinus, on utilise les formules d'Euler (qui donnent cosinus et sinus en fonction de l'exponentielle), la même méthode fonctionnera pour linéariser une expression avec du cosinus et sinus hyperbolique (donc les remplacer par leur définition sous forme exponentielle et développer). Une méthode peut donc être de se demander comment on résoudrait l'exercice avec un cosinus/sinus et utiliser le même type de raisonnement.

Exercice d'application 11. Linéariser $f : x \mapsto \mathrm{ch}^3(x) \times \mathrm{sh}^2(x)$ et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Puisque $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et que $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

On a $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Puisque $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice d'application 2. On a $\frac{18\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}$ et $-\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

On a $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \frac{5\pi}{12}$.

Exercice d'application 3. De la même manière que dans les exercices 1 et 2 :

1) L'angle θ de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ donc $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

On a $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et l'angle θ de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$ donc $\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

2) On a $\frac{22\pi}{5} = 4\pi + \frac{2\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5} \in [0, \pi]$ donc $\arccos\left(\cos\left(\frac{22\pi}{5}\right)\right) = \frac{2\pi}{5}$.

On a $\frac{13\pi}{12} = 2\pi - \frac{11\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12} \in [0, \pi]$ donc :

$$\begin{aligned} \arccos\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) \\ &= \frac{11\pi}{12}. \end{aligned}$$

Exercice d'application 4.

1) On a $|z_1| = \sqrt{9+16} = 5$ donc $z_1 = 5\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)$. On a alors $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$ (puisque $z_1 = 5e^{i\theta}$). On en déduit que :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{4}{3}.$$

2) Puisque le cosinus de θ est strictement positif, on a $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *D'ailleurs, puisque le sinus est aussi strictement positif, on a même* $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a donc $\arctan(\tan(\theta)) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$, ce qui donne $\theta \approx 0.927$.

À l'aide d'un cercle trigonométrique, justifier que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer la valeur de θ à l'aide d'une arctangente et en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

3) On a $|z_2| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Puisque $z_2 = \sqrt{13} \times \left(\frac{2}{\sqrt{13}} + i\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$. On a donc $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{9}{2}$.

On a a nouveau $\cos(\theta) > 0$ donc $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a donc $\theta = \arctan\left(\frac{9}{2}\right) \approx 1.352$.

4) On remarque que dans les calculs précédents, quand on calcule $\tan(\theta)$ le module se simplifie toujours. On peut donc directement affirmer que $\tan(\theta) = -2$. Cependant, on a cette fois $\cos(\theta) < 0$. Ceci signifie que $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. On en déduit par périodicité de la tangente que :

$$\begin{array}{rcl} \arctan(\tan(\theta)) = \arctan(-2) & \Leftrightarrow & \arctan(\tan(\theta - \pi)) = \arctan(-2) \\ & \Leftrightarrow & \theta - \pi = \arctan(-2) \\ & \Leftrightarrow & \theta = \pi - \arctan(2). \end{array}$$

On en déduit que $\theta \approx 2.034$.

Exercice d'application 5.

1) On a en utilisant les propriétés du logarithme :

$$\begin{array}{rcl} \ln(4^{\ln(\sqrt{2})}) & = & \ln(4^{\ln(2^{1/2})}) \\ & = & \ln(4^{\frac{\ln(2)}{2}}) \\ & = & \frac{\ln(2)}{2} \times \ln(4) \\ & = & \frac{\ln(2)}{2} \times \ln(2^2) \\ & = & (\ln(2))^2. \end{array}$$

2) Avec les propriétés des puissances :

$$\begin{array}{rcl} \left((\sqrt{3})^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} \times 9^{-\frac{1}{4}} & = & \left((\sqrt{3})^{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}\right) \times \frac{1}{(3^2)^{\frac{1}{4}}} \\ & = & \left((\sqrt{3})^5\right) \times \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \\ & = & \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ & = & 9. \end{array}$$

Exercice d'application 6.

1) f_1 est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 + \cos(x) > 0$ et que l'on a par définition des fonctions puissances pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^{\sin(x)\ln(2+\cos(x))}$. On a donc bien une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1'(x) = \left(\cos(x)\ln(2+\cos(x)) - \frac{(\sin^2(x))}{2+\cos(x)}\right) e^{\sin(x)\ln(2+\cos(x))}.$$

2) f_2 est définie pour $2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -2$ (toujours pour que la fonction puissance soit bien définie, la fonction arctangente étant définie sur $\mathbb{R}$). On a donc $D_f =]-2, +\infty[$. Pour $x \in D_f$, $f_2(x) = e^{\arctan(x)\ln(2+x)}$. On a donc f_2 dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables. On a alors pour tout $x \in D_f$:

$$f_2'(x) = \left(\frac{\ln(2+x)}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{x+2}\right) e^{\arctan(x)\ln(2+x)}.$$

Exercice d'application 7.

1) On a $f : x \mapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, et donc en particulier dérivable en 0. Par définition de la dérivée en 0, on a :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}}$. En utilisant alors le résultat de la question 1 en $x_n = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini et par composition de limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exercice d'application 8.

1) On a une forme indéterminée mais c'est l'exponentielle du numérateur qui va l'emporter d'après les croissances comparées. Pour le justifier en se ramenant exactement aux croissances comparées, on peut écrire pour $x > 1$:

$$\frac{\sqrt{e^x}}{x^4(\ln(x))^3} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^5} \times \frac{x}{(\ln(x))^3}.$$

Chacun des termes du produit tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ d'après les croissances comparées. On a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x^4(\ln(x))^3} = +\infty$.

2) Pour $x > 0$, on a $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x^{1/2}\ln(x)}$. D'après les croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{1/2}\ln(x) = 0$. Par composition de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}} = 1.$$

3) Le terme qui tend le plus vite vers l'infini est ici le terme en $e^{x/2}$. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^{42} + e^{-3x} - (\ln(x))^{1234} - e^{x/2} &= e^{x/2}\left(\frac{x^{42}}{e^{x/2}} + \frac{e^{-3x}}{e^{x/2}} - \frac{(\ln(x))^{1234}}{e^{x/2}} - 1\right) \\ &= e^{x/2}\left(\frac{x^{42}}{e^{x/2}} + e^{-7x/2} - \frac{(\ln(x))^{1234}}{e^{x/2}} - 1\right). \end{aligned}$$

Tous les termes de la parenthèse à part le dernier tendent vers 0 (par croissances comparées pour le premier et le troisième, par limite usuelle pour le second). On en déduit par produit de limites que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{42} + e^{-3x} - (\ln(x))^{1234} - e^{x/2} = -\infty.$$

4) Ici c'est bien le terme en $e^{\sqrt{x}}$ qui tend le plus vite vers l'infini. En effet, on a pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} e^{2\ln(x)} + x\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} + (\ln(x))^2 &= e^{\ln(x^2)} + x^{3/2} - e^{\sqrt{x}} + (\ln(x))^2 \\ &= e^{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} + \frac{x^{3/2}}{e^{\sqrt{x}}} - 1 + \frac{(\ln(x))^2}{e^{\sqrt{x}}}\right). \end{aligned}$$

Si on pose $X = \sqrt{x}$, on a X qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini. L'expression dans la parenthèse devient alors :

$$\frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}+\frac{x^{3/2}}{e^{\sqrt{x}}}-1+\frac{(\ln(x))^2}{e^{\sqrt{x}}}=\frac{X^4}{e^X}+\frac{X^3}{e^X}-1+\frac{(2\ln(X))^2}{e^X}.$$

Par croissances comparées et par produit de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2\ln(x)}+x\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}+(\ln(x))^2=-\infty$.

Exercice d'application 9. Soient $A,B,\alpha\in\mathbb{R}$.

On pose $f:x\mapsto A\text{ch}(\alpha x)+B\text{sh}(\alpha x)$.

1) f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x)=A\alpha\text{sh}(\alpha x)+B\alpha\text{ch}(\alpha x)\text{ et }f''(x)=A\alpha^2\text{ch}(\alpha x)+B\alpha^2\text{sh}(\alpha x)=\alpha^2 f(x).$$

2) Par récurrence, montrons pour $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(2n)}(x)=\alpha^{2n}f(x)$ ». La propriété est vraie au rang 0 (car $\alpha^0=1$) et au rang 1 d'après la question précédente. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors par hypothèse de récurrence, $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(2n)}(x)=\alpha^{2n}f(x)$, ce qui entraine que $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f^{(2(n+1))}(x) & = & f^{(2n+2)}(x) \\ & = & (f^{(2n)})''(x) \\ & = & (\alpha^{2n})f''(x) \\ & = & \alpha^{2n}\times\alpha^2 f(x) \\ & = & \alpha^{2(n+1)}f(x). \end{array}$$

On a donc démontré $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

Exercice d'application 10. On a $\text{sh}(x)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=\frac{3}{2}$. En posant $X=e^x$, on est donc ramené à l'équation de degré 2 suivante :

$$X^2-\frac{3}{2}X-1=0.$$

On calcule alors $\Delta=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$. Une racine carrée de Δ est donc $\delta=\frac{5}{2}$. On en déduit que les racines de l'équation sont $X_1=\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2}=-\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=2$. Or, puisque l'on a posé $X=e^x>0$, la seule solution qui convient est X_2. On en déduit que l'unique solution de l'équation est $x=\ln(2)$.

Si l'on voulait juste montrer l'existence et l'unicité de la solution (sans trouver sa valeur), on aurait pu utiliser le fait que sh *étant continue, strictement croissante et vérifiant* $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{sh}(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{sh}(x)=+\infty$*, alors d'après le théorème de la bijection continue, elle est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et l'équation* $\text{sh}(x)=\frac{3}{4}$ *a donc une unique solution dans* $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 11. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{ch}^3(x) \times \operatorname{sh}^2(x) \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}\right)\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{32} \\
&= \frac{e^{5x} - 2e^{3x} + e^x + 3e^{3x} - 6e^x + 3e^{-x} + 3e^x - 6e^{-x} + 3e^{-3x} + e^{-x} - 2e^{-3x} + e^{-5x}}{32} \\
&= \frac{e^{5x} + e^{3x} - 2e^x - 2e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x}}{32} \\
&= \frac{\operatorname{ch}(5x) + \operatorname{ch}(3x) - 2\operatorname{ch}(x)}{16}.
\end{aligned}
$$

On a donc $\displaystyle\int^x f(t)dt = \frac{\operatorname{sh}(5x)}{80} + \frac{\operatorname{sh}(3x)}{48} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{8}$.