Problème 1 – Filtre ADSL *(ENSTIM 2003)* **(≈ 45 mn)**

PARTIE A – FILTRE D'ORDRE 1

Soit le circuit RL de la FIGURE 1 étudié en régime sinusoïdal permanent. Au signal $e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la grandeur complexe $\underline{e}(t) = E_M e^{j(\omega t+\varphi)}$ et l'amplitude complexe $\underline{E} = E_M e^{j\varphi}$. De même, on définit l'amplitude complexe $\underline{S_1}$ associée à $s_1(t)$.

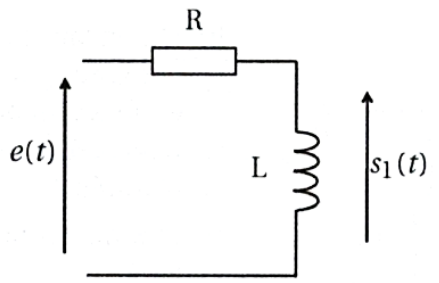


FIGURE 1 : Circuit RL

1. Déterminer la nature du filtre en étudiant le comportement aux limites du circuit.
2. Montrer que la fonction de transfert s'écrit $\underline{H_1}(jx) = \dfrac{\underline{S_1}}{\underline{E}} = \dfrac{jx}{1+jx}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

   Préciser l'expression de ω_0.
3. Déterminer les équations des asymptotes et tracer, en fonction de $\log(x)$, le diagramme de Bode asymptotique.
4. Calculer la valeur du gain et de la phase en $x = 1$. Esquisser l'allure des courbes réelles. Que représente ω_0 pour ce filtre ?

PARTIE B – FILTRE D'ORDRE 2

On s'intéresse à présent au circuit de la FIGURE 2 constitué de deux cellules RL en cascade. On note $\underline{S_2}$ l'amplitude complexe associée à $s_2(t)$.

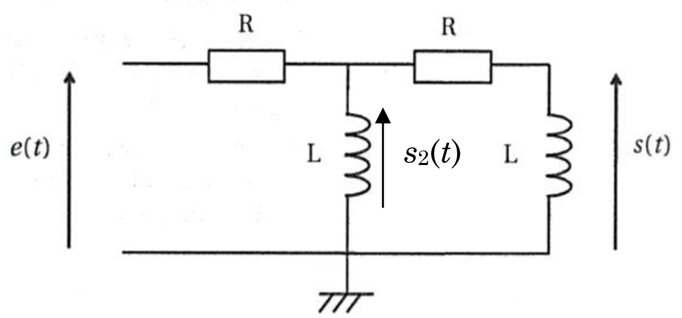


FIGURE 2 : deux cellules RL en cascade

5. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ en fonction de $\underline{S_2}$.
6. En raisonnant sur des schémas équivalents, exprimer l'amplitude complexe $\underline{S_2}$ en fonction de $\underline{E}$.

7. Montrer que la fonction de transfert s'écrit $\underline{H}(jx) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{(jx)^2}{1+3jx+(jx)^2}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Préciser l'expression de ω_0. Indiquer la nature du filtre. Justifier l'ordre du filtre.
8. Déterminer les équations des asymptotes à la courbe de gain (uniquement) et tracer, en fonction de $\log(x)$, la courbe de gain asymptotique.
9. Montrer que l'expression de la pulsation de coupure ω_C est $\omega_C \simeq 2{,}7\omega_0$.

PARTIE C – APPLICATION : FILTRE ADSL

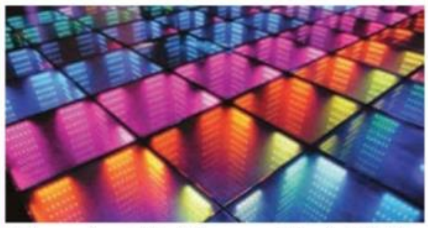
On souhaite réaliser un filtre ADSL. Les signaux téléphoniques utilisent des fréquences comprises entre 25 Hz et 3,4 kHz et les signaux informatiques relatifs à Internet, des fréquences généralement comprises entre 68 kHz et 1,0 MHz. Le filtre ADSL est utilisé ici pour récupérer les signaux Internet. On dispose de bobines d'inductance $L = 4{,}0$ mH.

10. Quelle pulsation ω_0 et quelle valeur de résistance R doit-on choisir pour réaliser le filtre souhaité avec une fréquence de coupure à 10 kHz ?
11. On met à l'entrée du filtre le signal $e(t) = E_m \cos(\omega_1 t)$ d'amplitude $E_m = 6{,}0$ V et de fréquence $f_1 = 1{,}0$ kHz. Déterminer la valeur numérique de $s(t)$. Que se passe-t-il si on rajoute une composante continue au signal d'entrée ?
12. Quel est l'intérêt d'utiliser un filtre du deuxième ordre plutôt qu'un filtre du premier ordre ? Justifier la réponse.

Problème 2 – Récupération d'énergie en discothèque

***(E3A PSI 2018)* (≈ 1h30)**

Des ingénieurs néerlandais ont conçu un système permettant de récupérer de l'énergie issue de la danse, dans le contexte d'une discothèque (brevet déposé en 2010). La piste de danse est composée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles, convertissant l'énergie cinétique des danseurs en énergie électrique. Cette énergie est ensuite utilisée pour éclairer, entre autres, des diodes électroluminescentes (LED) multicolores situées sur les dalles et autour de la piste de danse.



(Sustainable Dance Club BV®)

LES PARTIES A, C ET D SONT INDEPENDANTES.

MODELISATION DE LA CONVERSION D'ENERGIE

PARTIE A – MOUVEMENT DE LA DALLE : MISE EN EQUATION

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on se place à l'échelle d'un module unique, constitué d'une dalle de dimensions 65 cm x 65 cm x 14,5 cm suspendue par des ressorts mécaniques. Pour simplifier, on la modélise par une masse ponctuelle m reliée à un ressort équivalent de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur mécanique, qui exerce une force de frottement fluide de coefficient $D > 0$ (voir FIGURE 3). On note $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_x}$ le champ de pesanteur supposé uniforme, avec $g = 9{,}8 \text{ m.s}^{-2}$.

La dalle est repérée par sa position x sur un axe vertical ascendant de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$, l'origine O étant liée au bâti. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; on note $\vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ son vecteur vitesse dans ce référentiel. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est ensuite converti en mouvement de rotation par un engrenage de type pignon-crémaillère.

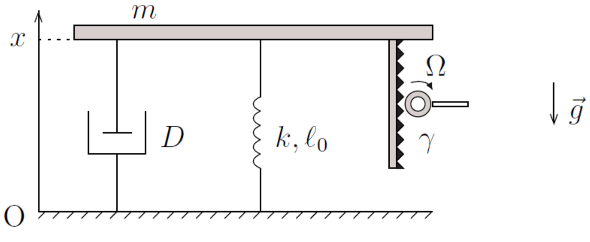


FIGURE 3 : Modèle mécanique de la dalle mobile : schéma et notations.

1. Exprimer la force de rappel $\overrightarrow{F_r}$ exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.
2. La dalle étant supposée au repos dans un premier temps, déterminer sa position d'équilibre x_{eq} en fonction de ℓ_0, k, m et g. Vérifier l'homogénéité dimensionnelle et la pertinence physique de l'expression obtenue.

Un danseur de masse M_d monte sur la dalle : cette dernière se met alors en mouvement, avant de se stabiliser à une nouvelle position d'équilibre $x'_{éq}$.

3. Exprimer littéralement $x'_{éq}$, puis l'affaissement de la dalle $\delta = x_{éq} - x'_{éq}$.

Le constructeur précise ci-dessous un critère de dimensionnement du ressort équivalent :

> **Document 1.** *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :
> Although the dancer is aware that energy is generated from the dance floor, the dancing experience should only be disturbed a little. Therefore, only little movement (several millimeters) of the suspended floor is allowed, and a high spring [a] stiffness [b] has been selected to achieve this.
>
> *a.* ressort.
> *b.* raideur.

4. En choisissant une valeur raisonnable pour M_d (adulte de corpulence moyenne), proposer une valeur de constante de raideur permettant de répondre en régime quasi-statique à la contrainte imposée.

On cherche à présent à décrire la dynamique du mouvement de la dalle. Outre son poids, la force de rappel du ressort et la force exercée par l'amortisseur mécanique, la dalle subit également :

- une force exercée par le danseur en mouvement, notée $\vec{F}$;
- une force d'amortissement électromagnétique $\vec{F_a} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

5. Après avoir posé $X = x - x_{eq}$, montrer par application du principe fondamental de la dynamique que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{X} + \left(\frac{D+\alpha}{m}\right)\dot{X} + a_0 X = b_0$$

où on donnera les expressions de a_0 et b_0 en fonction de k, m et F.

6. Retrouver cette équation différentielle par un raisonnement énergétique.

<u>PARTIE B – PUISSANCE ELECTRIQUE REÇUE PAR LES LED (les questions du sujet d'origine ont été supprimées)</u>

Le mouvement de translation de la dalle, de vitesse $\dot{x}(t)$, entraîne la rotation de la roue dentée schématisée sur la FIGURE 3. On admet que sa vitesse angulaire de rotation s'exprime $\Omega = \gamma\dot{x}(t)$ avec γ le rapport de transmission. Un dispositif (non étudié ici) permet de convertir l'énergie cinétique de la roue dentée en énergie électrique, servant à alimenter des LED disposées sur la partie supérieure des dalles. D'un point de vue électrique, ce réseau de LED est assimilé à une résistance de charge R_L. On montre que la puissance électrique instantanée $P_L(t)$ reçue par le réseau de LED peut s'écrire : $P_L(t) = K_1\left[\gamma\dot{x}(t)\right]^2$ où K_1 est une constante positive.

SIMULATIONS, OPTIMISATION DES PARAMÈTRES

Durant les phases de conception du dispositif, des simulations numériques ont été réalisées dans le but d'optimiser la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique, tout en respectant les exigences de puissance et de sécurité.

PARTIE C – REPONSE INDICIELLE

Dans cette partie, on impose à la dalle, initialement à sa position d'équilibre et immobile, un échelon de force $F = F_0$ à partir de l'instant $t = 0$, et on cherche à quantifier la puissance fournie au réseau de LED. En utilisant les parties précédentes, l'équation du mouvement de la dalle peut être approchée par :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F_0}{m}$$

où $X = x - x_{eq}$ (voir PARTIE A). Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2\frac{F_0}{k} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

On donne la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35\ \text{kg}$, $k = 1{,}5.10^5\ \text{N.m}^{-1}$. On prendra numériquement $\alpha = 3{,}0.10^4\ \text{N.s.m}^{-1}$.

7. Préciser la dimension et le nom des quantités ω_0 et Q.
8. Exprimer la solution <u>particulière</u> de l'équation différentielle précédente.

Compte tenu des ordres de grandeur, on admet que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire de façon approchée :

$$X(t) \simeq \frac{F_0}{k}\left(1 - \frac{1}{1-Q^2}\left(e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)\right)$$

9. Déterminer, en le justifiant, le type de régime transitoire d'évolution de $X(t)$ parmi les adjectifs suivants : pseudo-périodique, critique, apériodique. Vérifier que cette solution satisfait aux conditions initiales précisées au début de la partie C.
10. En déduire la loi d'évolution de la vitesse $\dot{x}(t)$ de la dalle.
11. Montrer que, dans le cadre de la modélisation présentée dans la PARTIE B, la puissance électrique instantanée reçue par les LED s'écrit sous la forme :

$$P_L(t) = KF_0^2\left(e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\right)^2$$

avec K un facteur constant qu'on ne cherchera pas à déterminer.

12. Dans l'expression de $P_L(t)$, une exponentielle converge beaucoup plus vite que l'autre : déterminer laquelle. Montrer alors qu'aux « temps longs », $P_L(t)$ décroît exponentiellement, selon un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de ω_0 et Q.

La FIGURE 4, adaptée de la notice constructeur, représente l'évolution de la puissance électrique prédite (signal de sortie) sous l'effet de plusieurs échelons de force successifs d'intensité différente (signal d'entrée).

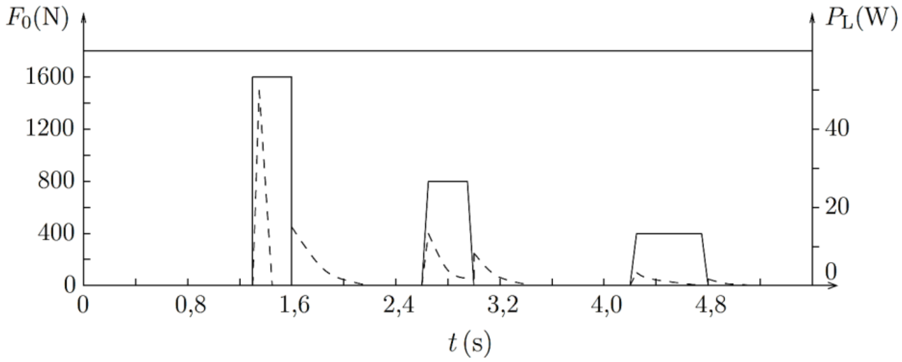


FIGURE 4 : Évolutions temporelles de la force et de la puissance électrique : simulations numériques (adapté de *Energy Floors* ®)

13. Associer chaque courbe (en trait plein, en pointillés) à la grandeur correspondante : F_0, P_L. Indiquer les intervalles temporels pendant lesquels sont appliqués des échelons de force, ainsi que les valeurs de F_0 associées.

Le constructeur précise :

> **Document 4.** *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :
> Energy is both generated when the tile [a] moves downward due to the force applied by the dancer and when the tile moves upward due to the spring even when there is no contact with the dancer.
>
> *a.* dalle.

14. Ce commentaire est-il en cohérence avec la FIGURE 4. Comment justifier que la puissance électrique tende vers zéro au bout d'un temps suffisamment long, même en présence d'une force appliquée non nulle ?
15. Analyser l'influence de l'échelon de force F_0 sur l'allure de $P_L(t)$, en lien avec la question 11.
16. Le temps typique de décroissance τ de la puissance électrique lors de l'application d'un échelon de force semble-t-il dépendre de F_0 ? Estimer son ordre de grandeur, puis le comparer à la prédiction obtenue à la question 12.

PARTIE D – FORÇAGE SINUSOÏDAL

On teste à présent le système au plus proche de ses conditions réelles d'utilisation.

Un expérimentateur danse sur la dalle et exerce sur elle une force $\vec{F}$, dont la norme est mesurée au moyen d'un capteur de force placé sur celle-ci (voir FIGURE 5). Le signal obtenu montre qu'en dansant, l'expérimentateur reste à tout instant en contact avec la dalle. On modélise ce signal de manière approximative par l'équation :

$$F(t) = F_0 + F_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

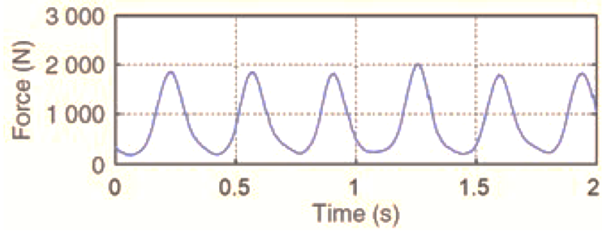


FIGURE 5 : Évolution expérimentale de la force F exercée par le danseur (de masse 83 kg) sur la dalle au cours du temps (*Energy Floors* ®)

17. Estimer la valeur des coefficients de modélisation F_0, F_1 et ω pour le signal représenté sur la FIGURE 5. Que représentent les grandeurs F_0 et F_1 pour le signal $F(t)$?

En redéfinissant X comme l'écart entre la position de la dalle et sa position d'équilibre atteinte lorsque le danseur est immobile, l'équation du mouvement de la dalle peut s'écrire :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_1}{m}\cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

Le coefficient d'amortissement α est une fonction de γ, le rapport de transmission, et de R_L, la résistance de charge. Son expression a été établie dans la PARTIE B du sujet d'origine.

On rappelle la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35$ kg, $k = 1{,}5.10^5$ N.m^{-1}.

En régime établi, la solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$$

On lui associe la grandeur complexe $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \psi)}$ telle que $X(t) = \mathrm{Re}(\underline{X}(t))$.

18. Déterminer l'expression de l'amplitude X_0 des oscillations de la dalle en fonction de ω_0, Q, m, ω et F_1.

19. Exprimer l'amplitude de vitesse V_0 de la dalle en fonction de X_0 et ω.

En utilisant les résultats des parties précédentes, il est possible de montrer (non demandé) que la moyenne temporelle de la puissance fournie aux LED est :

$$\langle P_L \rangle = \frac{A R_L \gamma^2 F_1^2}{B\gamma^4 + C R_L^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \text{ avec } A, B \text{ et } C \text{ des constantes positives}$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'influence de la pulsation ω sur la puissance moyenne récupérée $\langle P_L \rangle$, les autres paramètres étant maintenus constants.

20. Analyser les comportements asymptotiques de $\langle P_L \rangle$ aux basses et aux hautes fréquences. Déterminer, littéralement puis numériquement, la pulsation ω pour laquelle $\langle P_L \rangle$ est maximale, ainsi que l'expression littérale de la puissance moyenne récupérée maximale notée $\langle P_L \rangle_{\max}$. Tracer alors l'allure qualitative de

$\langle P_L \rangle$ en fonction de ω. Quel est le nom du phénomène physique mis en évidence ?

Ce système a été testé en 2015 dans l'émission scientifique télévisée *On n'est pas que des cobayes*, à l'occasion de la Fête de la Science. Deux équipes, composées chacune de deux danseurs et deux danseuses, s'affrontent sur la piste de danse, avec pour objectif de générer le maximum d'énergie électrique pendant une durée fixée (30 secondes environ) :

- l'équipe 1 danse sur un morceau de salsa, de tempo 115 battements.min^{-1} ;
- l'équipe 2 danse sur un morceau de disco, de tempo 125 battements.min^{-1}.

21. En faisant l'hypothèse que les deux équipes ont même masse totale et dansent de la même façon, quelle équipe a selon vous gagné ce duel, en vous fiant aux résultats établis à la question précédente ?

Problème 3 – Jupiter et la sonde Juno *(E3A MP 2021)* **(≈ 45 mn)**

<u>Données</u> :

- ❖ Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$
- ❖ Masse de la Terre : $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg
- ❖ Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}38.10^{3}$ km
- ❖ Rayon de l'orbite terrestre : $d_T = 1{,}50.10^{8}$ km
- ❖ Période de révolution sidérale de la Terre : $T_T = 365{,}25$ jours
- ❖ Masse de Jupiter : $M_J = 1{,}97.10^{27}$ kg
- ❖ Rayon de Jupiter : $R_J = 7{,}0.10^{4}$ km
- ❖ Rayon de l'orbite de Jupiter : $d_J = 7{,}80.10^{8}$ km

<u>LES PARTIES A, B ET C SONT INDEPENDANTES.</u>

<u>PARTIE A – CARACTERISTIQUES DE JUPITER</u>

Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles ayant pour centre le Soleil, contenus dans un même plan, de rayons respectifs d_T et d_J et décrits dans le même sens. Les périodes de révolution sidérales de la Terre et de Jupiter sont notées respectivement T_T et T_J.

1. À l'aide de la 3ème loi de Kepler, déterminer la valeur de la période de révolution sidérale T_J de Jupiter.
2. Montrer que l'énergie mécanique de Jupiter sur son orbite circulaire se conserve et s'écrit :

$$E_m = -\frac{GM_S M_J}{2d_J} \qquad (1)$$

où M_S est la masse du Soleil et M_J celle de Jupiter.

<u>PARTIE B – S'ECHAPPER DE L'ATTRACTION GRAVITATIONNELLE TERRESTRE</u>

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, il est nécessaire de le « lancer » vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_l est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il « s'échappe ».

3. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini sans vitesse), déterminer la vitesse de libération v_l. Calculer numériquement v_l.

PARTIE C – TRAJECTOIRE DE LA SONDE JUNO

Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de Septembre 2025.

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une orbite elliptique de 53 jours.

On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse $m = 3625\ \text{kg}$ soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse M_J. En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

4. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ? Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique, noté $\mathcal{R}$.
5. Montrer que, dans le référentiel jupiterocentrique $\mathcal{R}$, le moment cinétique de Juno par rapport à O, noté $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}$, se conserve. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la FIGURE 6.

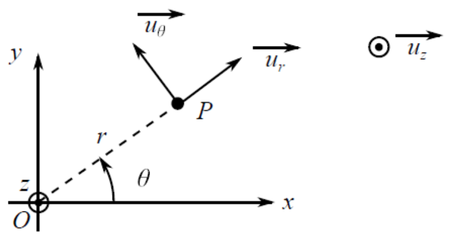


FIGURE 6 : Paramétrage cylindrique

6. Déterminer l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}$ dans la base cylindrique. En déduire l'expression de la constante des aires C en fonction des coordonnées de la sonde Juno.
7. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$E_{m,P/\mathcal{R}} = E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \text{ avec } U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{mM_J}{r} \qquad (2)$$

   Justifier que E_m se conserve.
8. Tracer l'allure de $U_{eff}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de E_m. On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

9. Représenter l'allure de la trajectoire de la sonde Juno autour de Jupiter, en faisant apparaître notamment le demi-grand axe a, la distance minimale r_{min} et la distance maximale r_{max}. Écrire la relation entre a, r_{min} et r_{max}.
10. En utilisant les données, déterminer la valeur du demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la sonde.
11. À partir de l'expression de l'énergie mécanique donnée pour une orbite circulaire par la relation (1) (question 2), exprimer, sans justifier, l'énergie mécanique E_m sur l'orbite elliptique en fonction de a. Calculer E_m.
12. Déduire des questions 9 et 11 une première équation liant la distance minimale r_{min}, la distance maximale r_{max} et l'énergie mécanique E_m.
13. Montrer également que r_{min} et r_{max} vérifient la relation suivante :

$$r_{\min} r_{\max} = -\frac{mC^2}{2E_m} \qquad (3)$$

Ces deux relations permettent de déterminer r_{min} et r_{max}, ce que l'on ne demande pas.