Programme de colle, semaine 9

Ensembles + début des réels (partie entière) :

- Nous avons défini les ensembles, le symbole $\in$, le symbole $\subset$, ainsi que l'ensemble des parties (sous-ensembles) $\mathcal{P}(E)$. Nous avons ensuite défini les opérations usuelles (union, intersection, passage au complémentaire) et étudié les propriétés usuelles ($\overline{\overline{A}} = A$, $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$, etc.).
- Nous avons alors montré les lien entre les différentes opérations (complémentaire d'une union d'ensemble, d'une intersection, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, etc.). Nous avons également défini la différence ($A \setminus B$) ainsi que le produit cartésien d'ensemble ($A \times B$).
- Nous avons ensuite défini les images directes et réciproques d'ensembles et vu quelques exemples.
- Nous avons continué le chapitre sur les ensembles par les familles d'ensembles, défini une union (respectivement intersection) quelconque d'ensembles et vu que toutes les propriétés énoncées précédemment sont toujours vraies. Nous avons défini la fonction indicatrice d'un ensemble et vu la définition d'une partition d'un ensemble et d'un recouvrement disjoint.

- Nous avons terminé le chapitre par l'étude des relations d'ordre et relations d'équivalences. Nous avons défini ce qu'était un ordre partiel, total et ce qu'était un majorant (resp. minorant) d'un ensemble (si l'on a une relation d'ordre sur E) ainsi qu'un maximum (resp. minimum). Nous avons aussi défini la classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ (si l'on a une relation d'équivalence sur E). Nous avons démontré que les classes d'équivalences formaient une partition de E.

- Nous avons effectué de brefs rappels sur la valeur absolue, les majorants/minorants et maxima/minima. Nous avons ensuite défini la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ et vu différentes caractérisations (epsilonesques et séquentielles). Nous avons ensuite admis que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admettait une borne supérieure et admis que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admettait un maximum.
- Nous avons ensuite défini $\overline{\mathbb{R}}$, la convexité pour les parties de $\mathbb{R}$ et démontré qu'une partie de $\mathbb{R}$ était convexe si et seulement si c'était un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Nous avons ensuite défini la partie entière. Nous avons ensuite vu la définition d'une suite convergente, démontré que $1/n \to 0$ et vu le théorème des gendarmes, et la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Remarques sur le programme : le td sur les réels n'a pas encore été fait mais vous pouvez interroger sur les parties entières (nous n'avons pas encore pu travailler beaucoup sur la caractérisation séquentielle de la borne sup). $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'a pas été défini. N'hésitez pas à faire le lien avec les précédents chapitres (en particulier sur les applications, fonctions injectives, surjectives, bijectives...).

Compétences :

- Raisonner par double implication/double inclusion quand la preuve n'est pas directe. Pour montrer $A \subset B$, bien commencer la preuve par définir une variable quelconque dans A et démontrer que cette dernière appartient finalement à B.
- Maitriser la notion d'image directe d'une application $f : X \to Y$. En particulier, utiliser pour les preuves que $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \ / \ y = f(x)$.

— Maitriser la notion d'image réciproque d'une application $f : X \to Y$. En particulier, utiliser pour les preuves que $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.
— Déterminer une image directe/réciproque d'un ensemble par une fonction donnée en paramétrant l'ensemble de manière convenable.
— Manipuler des parties entières en raisonnant à l'aide d'encadrements ou par disjonction de cas.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une relation d'ordre (totale/partielle) et d'une relation d'équivalence et illustrer brièvement par des exemples (attendu : $\leq$ sur $\mathbb{R}$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $. \equiv . [n]$ sur $\mathbb{Z}$).
2. Donner la définition d'un maximum/minimum, d'une borne supérieure/inférieure et d'un ensemble convexe. Préciser dans le cas où I est un intervalle du type $[a, b[$ ce que valent les bornes inférieures/supérieures/minima/maxima.
3. Donner la définition d'une borne supérieure, énoncer les différentes caractérisations (epsilonesque et séquentielle) et calculer les bornes inférieures/supérieures de $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
4. Donner la définition de la partie entière, démontrer l'unicité (existence admise), tracer le graphe de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et énoncer les différentes propriétés ($\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ et $\forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$).
5. Pour $l \in \mathbb{R}$, donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et montrer que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes.
7. Donner la définition d'un ensemble dense, les différentes caractérisations (séquentielle et epsilonesque) et montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (en remontrant que pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 10 : 6.1),2),4) et 9.

Indication : pour le 9, essayez de transformer votre inégalité en $n \leq f(\lambda) < n + 1$.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : Montrer (question 1) que si $A, B, C \subset E$, alors $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap C) \setminus B$ et (question 2) que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (\exists X \subset E \ / \ A \subset X \text{ et } B \subset \overline{X})$.
- 2ieme du groupe : TD9 : 7
- 3ieme du groupe : TD9 : 14.

Prochain programme : réels et début des suites.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Premier exercice :

- Pour la première question, il faut revenir à la définition de $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et utiliser les propriétés de l'intersection/de l'union/du complémentaire.
- Pour la deuxième question, procédez par double implication.
- Pour le sens ($\Rightarrow$), faites un dessin. Vous devriez normalement un ensemble X « simple » qui convient !
- Pour le sens ($\Leftarrow$), poser proprement votre hypothèse, ce que vous voulez démontrer et fixez un $x \in A \cap B$. Vous devriez vite arriver à une absurdité.

Exo 7 :

- pour la première question, n'hésitez pas à reprendre le cours sur les complexes (cf exponentielle complexe). Toutes les réponses y sont (profitez-en pour réécrire proprement les définitions de l'injectivité et de la surjectivité) !
- Pour les images directes, il faut calculer $f(x+iy)$ où x, y vérifient les conditions données et utiliser ensuite le théorème de la bijection continue pour la partie en e^x afin de déterminer les éléments de R_k sous forme exponentielle (module/argument).
- Pour les images réciproques, revenez bien à la définition de $z \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(z) \in B$. Il faut alors caractériser quand est ce que $f(z) \in \mathbb{U}$ ou quand est-ce que $f(z) \in i\mathbb{R}$. N'hésitez pas à poser z sous forme algébrique pour vos calculs.
- Pour les représentations graphiques, on attend bien des dessins dans le plan complexe (puisque $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$). Il faut donc dessiner $\mathbb{C}$ et « colorier » les éléments de votre ensemble.

Exo 14 :

- La relation n'est peut être pas facile à comprendre posée ainsi. Vous pouvez de manière équivalente la remplacer par la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$ par :

  $$(z_1, r_1)\mathcal{R}(z_2, r_2) \Leftrightarrow |z_2 - z_1| \leq r_2 - r_1.$$

  On a $z \in \mathbb{C}$ qui représente le centre du cercle, $r \in \mathbb{R}_+$ le rayon. On a donc $|z_2 - z_1|$ qui est la distance entre les centres.
- Avec la relation précédente, la réflexivité et l'antisymétrie ne devraient pas poser de problème. Pour la transitivité, pensez/revoyez l'inégalité triangulaire.
- Pour savoir si la relation d'ordre est totale ou pas, vous pouvez faire des tests avec des cercles simples. Essayez par exemple de prendre le cercle unité et de le comparer avec un autre cercle centré en O de rayon différent ou avec un cercle centré en un autre point de rayon 1. Cela devrait vous donner des idées pour voir si la relation est totale ou pas...