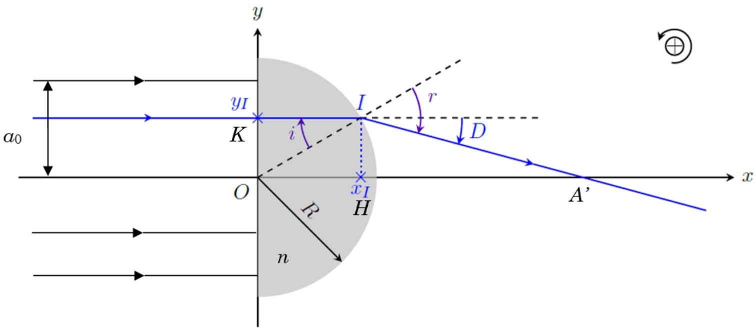
CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 3

Exercice 1 – Stigmatisme d'une lentille demi-boule



1. Pour que tous les rayons émergent de la lentille au point I, il faut que $|r| \leq \dfrac{\pi}{2}$.

➢ 3ème loi de Snell-Descartes en I : soit $n\sin(|i|) = \sin(|r|) \leq 1$, soit $\sin(|i|) \leq \dfrac{1}{n}$.

➢ Triangle rectangle OKI : $\sin(|i|) = \dfrac{|y_I|}{R}$ et $|y_I| = R\sin(|i|)$ donc $\boxed{|y_I| \leq y_{\max} = \dfrac{R}{n}}$

2. On note H le projeté orthogonal du point d'incidence I sur l'axe optique, tel que $\overline{OA'} = \overline{OH} + \overline{HA'} = x_I + \overline{HA'}$.

➢ Triangle rectangle OHI : $x_I = R\cos(i)$

➢ Déviation du rayon lors de la réfraction en I : $D = r - i$

➢ Dans le triangle rectangle $A'HI$: $\tan(D) = \dfrac{y_I}{\overline{A'H}} \Rightarrow \overline{HA'} = -\dfrac{y_I}{\tan(r-i)}$

➢ Dans le triangle rectangle OHI : $y_I = -R\sin(i)$ donc $\overline{HA'} = \dfrac{R\sin(i)}{\tan(r-i)}$

$$\boxed{\overline{OA'} = R\cos(i) + \frac{R\sin(i)}{\tan(r-i)}}$$

4. Les lignes de code à compléter sont :

```
## Cellule 2 : Définition des constantes du problème
n = 1.5                          # indice optique du verre de la lentille : à compléter
R = 5.0                          # rayon de la lentille (en cm) : à compléter
```

Attention : écrire le rayon R sous la forme d'un réel !

5. D'après la question 1, on a :

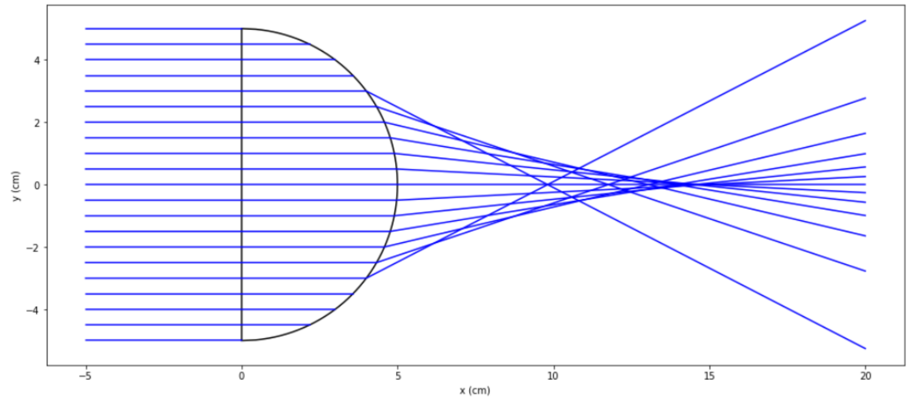
```

yMax = R/n      # Valeur maximale de la largeur du faisceau incident, au-delà de laquelle
                # il y a réflexion totale sur le dioptre de sortie de la lentille : à compléter
```

7. En exécutant la cellule 5, on obtient le graphe ci-dessous.
Les rayons incidents parallèles entre eux et à l'axe optique proviennent d'un unique point objet A situé à l'infini sur l'axe optique.
   - Sur le graphe, on constate que les rayons émergents ne se croisent pas en un point unique : l'image du point A est une tache sur l'axe optique.

- L'expression de $\overline{OA'}$ montre que la position de l'image *A'* sur l'axe optique dépend de l'angle d'incidence *i* du rayon incident considéré.

La lentille demi-boule <u>n'est pas stigmatique</u> car elle <u>ne conjugue pas un unique point image *A'* avec un point objet *A*</u>.



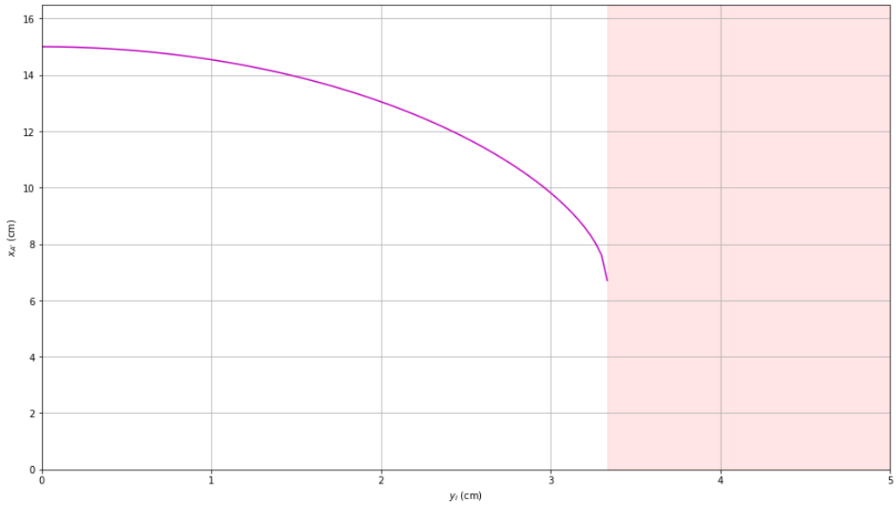
8. D'après la question 2, on a : $\overline{OA'} = \overline{OH} + \overline{HA'} = x_I - \dfrac{y_I}{\tan(r-i)}$

$$\boxed{\overline{OA'} = x_I - \dfrac{y_I}{\tan(D)}}$$

9. Ligne 118 à compléter :

```
118        return  xI - yI / np.tan(D)      # Expression de xA' : à compléter
```

Le graphe de l'abscisse $x_{A'}$ en fonction de l'ordonnée y_I du point d'incidence :



L'abscisse de *A'* dépend de l'ordonnée du point d'incidence, i.e. du rayon incident considéré : cela prouve <u>l'astigmatisme</u>. Pour $y_I \geq \dfrac{R}{n} = 3{,}3$ cm, il y a réflexion totale en *I*, donc pas de rayon réfracté (zone en rose/gris sur le graphe)

10. D'après le graphe précédent, il ne faut garder que les rayons incidents tels que $\boxed{y_I \leq d_{\max} \simeq 1{,}0 \text{ cm}}$.

11. Tracé des rayons lumineux émergents en présence du diaphragme de rayon d_{max}.

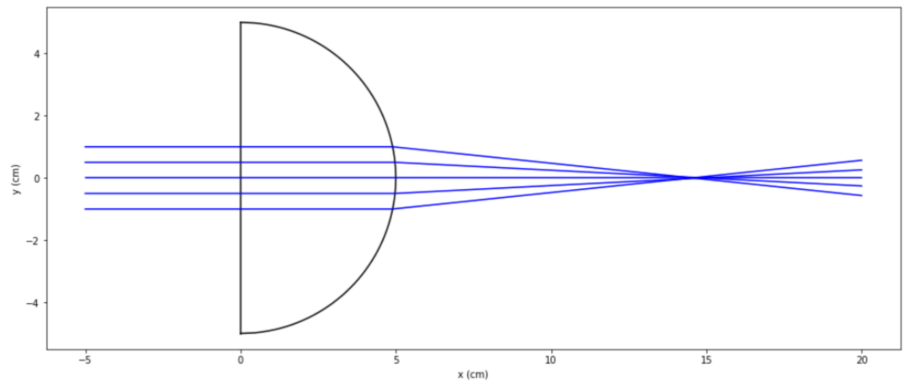
```python
## Cellule 7 : Tracé avec diaphragme : à compléter

plt.figure(figsize=(16,9))           # création d'une nouvelle fenêtre graphique
# Representation de la lentille
plt.plot([0,0], [-R,R], 'k-')        # dioptre d'entrée
yS = np.linspace(-R, R, 500)
plt.plot(absI(yS), yS, 'k-')         # dioptre de sortie

#Largeur du diaphragme
dmax = 1. # en cm
N = 2 # Nombre de rayons à tracer = 2*N+1

# Représentation des rayons lumineux
for yI in [k*dmax/N for k in range(-N,N+1)]:
    X, Y = dessinRayon(yI,-R,4*R)
    plt.plot(X, Y, 'b-')

plt.xlabel('x (cm)')
plt.ylabel('y (cm)')
plt.axis('scaled')                   # pour avoir une représentation orthonormée
plt.show()                           # affichage de la fenêtre
```



Avec un diaphragme de rayon $d_{max} \simeq 1{,}0\text{ cm}$, tous les rayons émergents se croisent en un point unique, quel que soit le rayon incident considéré : la lentille présente un <u>stigmatisme approché</u>.

12. <u>Approximation de Gauss</u> :

$$\cos(i) \simeq 1,\ \sin(i) \simeq i,\ \tan(r-i) \simeq r-i \text{ et } \overline{OA'} \simeq R + \frac{Ri}{r-i}$$

- <u>Loi de Snell-Descartes en I</u> : $ni \simeq r$

$$\overline{OA'} \simeq R + \frac{Ri}{ni-i} = R\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \Leftrightarrow \boxed{\overline{OA'} \simeq \frac{nR}{n-1} = 15\text{ cm}}$$

Valeur en adéquation avec les graphes.

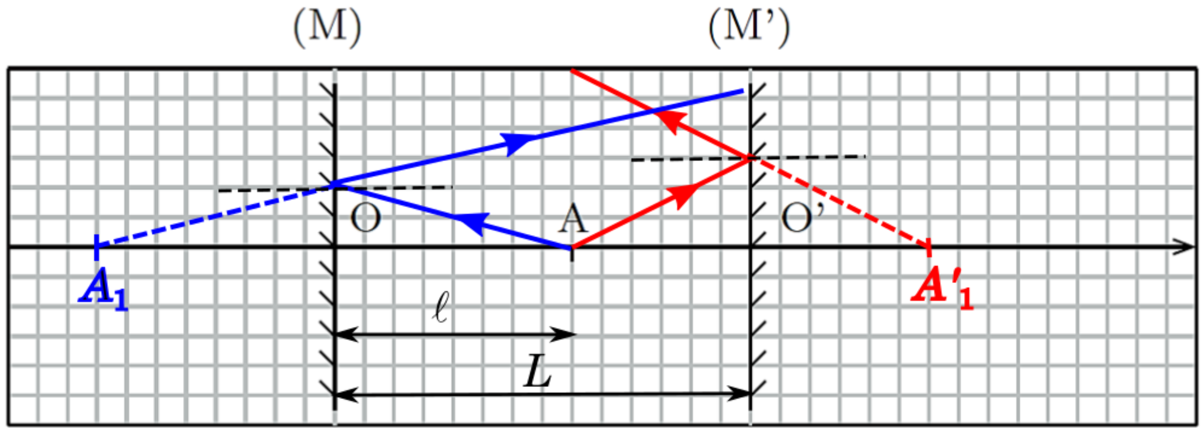
- La position de l'image ne dépend plus de l'angle d'incidence i. Ainsi, tous les rayons parallèles du faisceau incident émergent en passant par le même point A' : il y a <u>stigmatisme de la lentille</u> (stigmatisme approché).

13. Points conjugués par la lentille : $\boxed{A_\infty \xrightarrow{\text{Lentille}} A' = F'}$: A' représente <u>le foyer image F'</u> de la lentille.

- Distance $\overline{OA'} = \overline{OF'}$ est la distance entre le centre de la lentille et le foyer image : c'est la <u>distance focale image f'.</u>
- $\overline{OF'} = f' > 0$ et le faisceau se referme : lentille <u>convergente</u>

Exercice 2 – « Miroir infini » *(d'après E3A PSI 2018)*

1. L'image A_1 de A par le miroir (M) est <u>symétrique</u> de A par rapport à (M).
   L'image A'_1 de A par le miroir (M') est <u>symétrique</u> de A par rapport à (M').



2. $A \xrightarrow{M} A_1$: Relation de conjugaison : $\boxed{\overline{OA_1} = -\overline{OA} = -\ell}$

➢ $A \xrightarrow{M'} A'_1$: Relation de conjugaison : $\overline{O'A'_1} = -\overline{O'A} = L - \ell$

Relation de Chasles : $\overline{OA'_1} = \overline{OO'} + \overline{O'A'_1} = L + L - \ell$ soit $\boxed{\overline{OA'_1} = 2L - \ell}$

3. $A \xrightarrow{M'} A'_1 \xrightarrow{M} A_2$: Relation de conjugaison : $\boxed{\overline{OA_2} = -\overline{OA'_1} = \ell - 2L}$

➢ $A \xrightarrow{M} A_1 \xrightarrow{M'} A'_2 \xrightarrow{M} A_3$

Relation de conjugaison : $\overline{OA_3} = -\overline{OA'_2}$

Relation de Chasles : $\overline{OA'_2} = \overline{OO'} + \overline{O'A'_2} = L + \overline{O'A'_2}$

Relation de conjugaison : $\overline{O'A'_2} = -\overline{O'A_1}$

Relation de Chasles : $\overline{O'A_1} = \overline{O'O} + \overline{OA_1} = -L + \overline{OA_1}$

$$\overline{OA_3} = -L + \overline{O'A_1} = -2L + \overline{OA_1} \text{ soit } \boxed{\overline{OA_3} = -2L - \ell}$$

4. Si n est <u>pair</u> (et $n+1$ impair) :

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \overline{OA_{n+1}} - \overline{OA_n} = -\ell - \left(\left(n+1\right)-1\right)L - \left(\ell - nL\right) \text{ soit } \boxed{\overline{A_nA_{n+1}} = -2\ell}$$

➢ Si n' est <u>impair</u> (et $n'+1$ pair) :

$$\overline{A_{n'}A_{n'+1}} = \overline{OA_{n'+1}} - \overline{OA_{n'}} = \left(\ell - \left(n'+1\right)L\right) - \left(-\ell - \left(n'-1\right)L\right) \text{ soit } \boxed{\overline{A_{n'}A_{n'+1}} = 2\ell - 2L}$$

➢ $\overline{A_{n'}A_{n'+1}} = \overline{A_nA_{n+1}} \Leftrightarrow 2\ell - 2L = -2\ell \Leftrightarrow 4\ell = 2L \Leftrightarrow \boxed{\ell = \dfrac{L}{2}}$

➢ Entre deux images successives : $\boxed{\overline{A_nA_{n+1}} = -L}$

5. À chaque réflexion sur (M'), une <u>fraction de la lumière incidente est réfléchie</u> donc <u>l'intensité lumineuse diminue</u> quand n augmente.

Exercice 3 – Le viseur *(d'après CCP MP 2015)*

1. Pour que l'œil emmétrope observe le réticule sans accommoder, il doit se situer dans <u>le plan focal objet</u> de l'oculaire L_1 : $R_{oc} = F_1 \xrightarrow{L_1} R'_\infty$

2. Points conjugués par l'objectif L_2 : $A \xrightarrow{L_2} A'$

   <u>Relation de grandissement de Newton pour L_2 :</u> $\gamma_{ob} = \dfrac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F_2A}} = \dfrac{f'_2}{\overline{F_2A}}$

   $$\boxed{\overline{F_2A} = \frac{f'_2}{\gamma_{ob}} = -25 \text{ mm}}$$

3. Pour que l'œil voit nette l'image sans accommoder, il faut que $A' = R_{oc} = F_1$

   Points conjugués : $\boxed{A \xrightarrow{L_2} A' = F_1 \xrightarrow{L_1} A''_\infty}$

   Ceci n'est possible que si l'objet est correctement placé par rapport au viseur, i.e. tel que $\overline{F_2A} = -25 \text{ mm}$, soit $\overline{O_2A} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2A} = -f'_2 + \overline{F_2A} = -75 \text{ mm}$: il s'agit d'un <u>viseur à frontale fixe</u> (la frontale étant égale à $\overline{AO_2} = 75 \text{ mm}$)

4. Relation de Chasles :

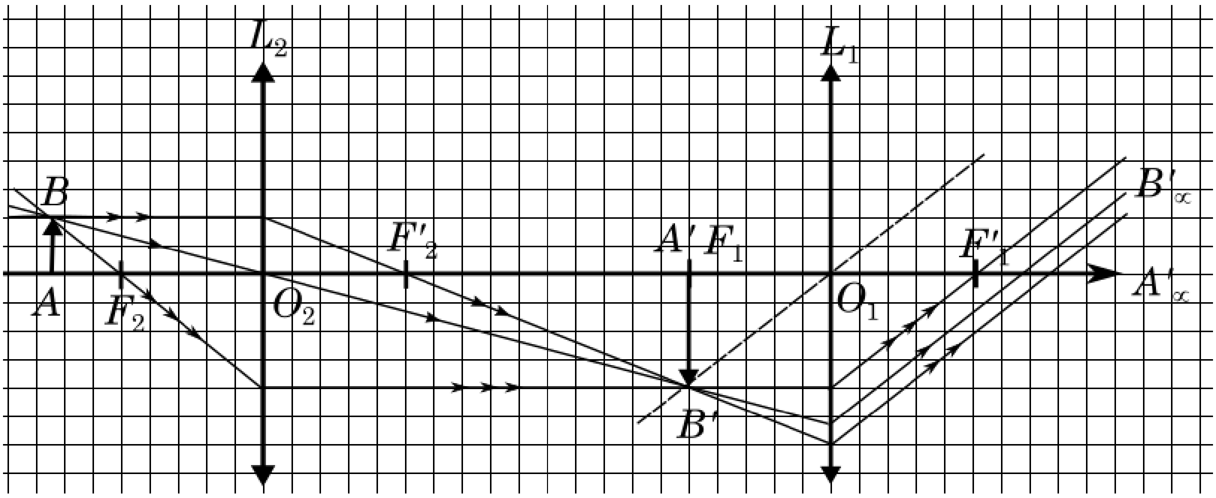
   $$\overline{O_2O_1} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2A'} + \overline{A'O_1} = f'_2 + \overline{F'_2A'} + \overline{F_1O_1} = f'_2 + \overline{F'_2A'} + f'_1$$

- Relation de grandissement de Newton pour L_2 :

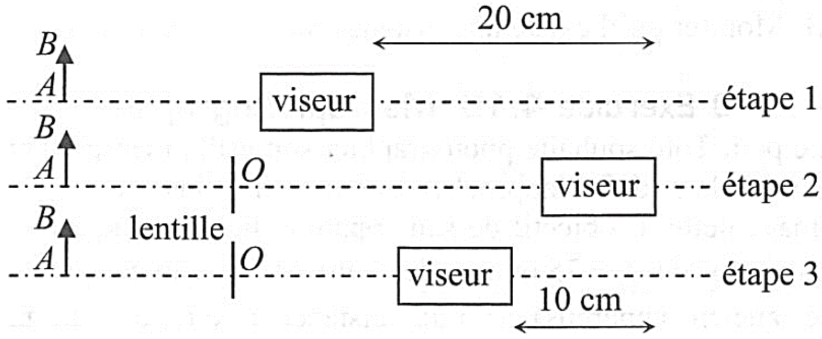
  $$\gamma_{ob} = \frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F'_2O_2}} \Leftrightarrow \overline{F'_2A'} = \gamma_{ob}\overline{F'_2O_2} = -f'_2\gamma_{ob}$$

- Encombrement : $\overline{O_2O_1} = f'_2 - f'_2\gamma_{ob} + f'_1$ soit $\boxed{\overline{O_2O_1} = f'_2(1-\gamma_{ob}) + f'_1 = 200 \text{ mm}}$

5. Construction : 1 carreau = 1 cm



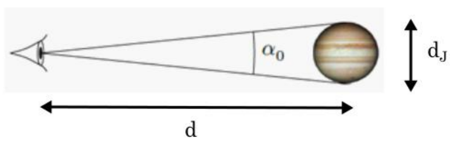
6.



- $\boxed{\overline{OA} = x_A - x_O = v_A - v_O = -d_1 = -20 \text{ cm}}$ et $\boxed{\overline{OA'} = x_{A'} - x_O = v_{A'} - v_O = -d_2 = -10 \text{ cm}}$
- Relation de conjugaison de Descartes pour L : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$
- Distance focale : $\boxed{f' = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = -20 \text{ cm} < 0}$: lentille <u>divergente</u>

Exercice 4 – Observation de Jupiter *(d'après Centrale TSI 2016)*

1. L'angle maximal correspond à la distance Terre – Jupiter la plus petite soit $d = R_J - R_T$.



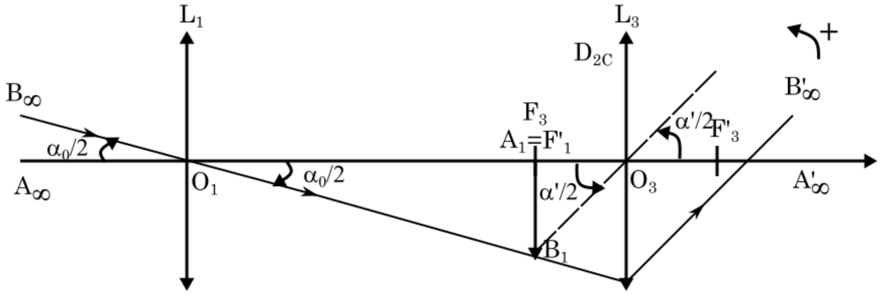
   $\tan \alpha_0 = \dfrac{d_J}{d} \simeq \alpha_0$ dans l'approximation des petits angles

   $\boxed{\alpha_0 \simeq \dfrac{d_J}{d} = \dfrac{d_J}{R_J - R_T} = 2{,}22.10^{-4} \text{ rad}}$ soit $\boxed{\alpha_0 \simeq 1{,}27.10^{-2} \text{ deg} = 45{,}8''}$

2. Soleil, Terre et Jupiter sont alignés (dans cet ordre). Le Soleil et Jupiter sont en <u>opposition</u> par rapport à la Terre d'où le terme utilisé.
3. Objet à l'infini. Observation sans accommodation si l'image est à l'infini.

   Conjugaison : $\boxed{A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = A' = F_3 \xrightarrow{L_3} A''_\infty}$: système afocal

   Distance entre les deux lentilles : $\boxed{\overline{O_1O_3} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_3O_3} = f'_1 + f'_3 = 2400 \text{ mm}}$
4. Schéma de la lunette afocale



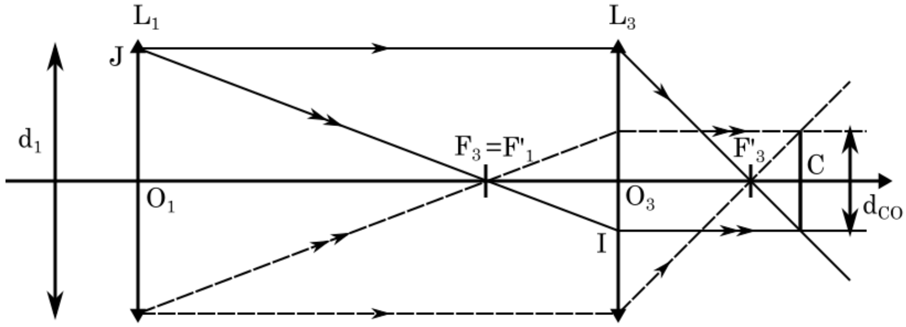
   Triangle $O_3A_1B_1$: $\dfrac{\alpha'}{2} = \tan\left(\dfrac{\alpha'}{2}\right) = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{F_3O_3}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{-f'_3} > 0$

Triangle $O_1A_1B_1$: $\dfrac{\alpha_0}{2} = \tan\left(\dfrac{\alpha_0}{2}\right) = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_1} < 0$

- Grossissement : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha_0} = 2\dfrac{\overline{A_1B_1}}{-f'_3}\dfrac{f'_1}{2\overline{A_1B_1}}$ soit $\boxed{G = -\dfrac{f'_1}{f'_3} = -47}$
- Diamètre angulaire apparent de Jupiter observée à travers la lunette :

$$\boxed{\alpha' = G\alpha_0 = -\frac{f'_1}{f'_3}\alpha_0 = -2350'' = -0{,}65 \text{ deg} = -1{,}1.10^{-2} \text{ rad}}$$

5. Points conjugués : $O_1 \xrightarrow{L_3} C$



- Relation de conjugaison de Newton pour L_3 :

$$\overline{F_3O_1} \cdot \overline{F'_3C} = -f'^2_3 \text{ soit } \overline{F'_3C} = -\frac{f'^2_3}{\overline{F_3O_1}}$$

Or $F'_1 = F_3$ d'où $\overline{F_3O_1} = \overline{F'_1O_1} = -f'_1$ et $\boxed{\overline{F'_3C} = \dfrac{f'^2_3}{f'_1} = 1{,}1 \text{ mm}}$

- Grandissement de Newton : $|\gamma| = \dfrac{d_{CO}}{d_1} = \dfrac{\overline{F'_3C}}{f'_3}$
- Diamètre du cercle oculaire : $\boxed{d_{CO} = \dfrac{\overline{F'_3C}}{f'_3}d_1 = 5{,}0 \text{ mm}}$
- **<u>Autre méthode</u>** : Théorème de Thalès dans les triangles O_3IF_3 et $O_1JF'_1$:

$\dfrac{O_3I}{f'_3} = \dfrac{O_1J}{f'_1} \Leftrightarrow \dfrac{d_{CO}}{2f'_3} = \dfrac{d_1}{2f'_1}$ soit $\boxed{d_{CO} = \dfrac{f'_3d_1}{f'_1} = \dfrac{1}{|G|}d_1 = 5{,}0 \text{ mm}}$

6. <u>Intérêt</u> : Tous les rayons incidents ayant traversé l'objectif émergent de la lunette au niveau du cercle oculaire : c'est là que <u>l'intensité lumineuse</u> est <u>maximale</u> et qu'il faut placer l'œil.