TRAVAUX DIRIGÉS MI6
Mouvements dans un champ de gravitation newtonien

Niveau 1

*Exercice 1. Paramètre gravitationnel standard de la Terre

1. Montrer que la connaissance de la période d'un satellite terrestre en orbite circulaire à l'altitude z et de la troisième loi de Kepler permet de déterminer le paramètre gravitationnel standard de la Terre $\mu = G \cdot M_T$, où G est la constante de gravitation universelle et M_T la masse de la Terre.
2. L'expérience de Cavendish permet de déterminer la valeur de $G = 6{,}67.10^{-11}\ \text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$. Montrer qu'on peut alors déterminer la masse de la Terre.
3. On rappelle qu'un satellite géostationnaire est en orbite à une altitude approximative de 36.10^3 km et que le rayon de la Terre est $R_T = 6{,}4.10^6$ m. Calculer le paramètre gravitationnel standard de la Terre, sa masse puis sa masse volumique moyenne.
4. Donner une autre méthode pour déterminer μ en utilisant la valeur de champ de gravité terrestre à la surface du globe g.

*Exercice 2. Lancement d'un satellite en orbite circulaire

Dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r = R + h$ autour du centre de la Terre (masse M), R étant le rayon de la Terre et h l'altitude du satellite.
Données : $M = 6{,}0.10^{24}$ kg, $R = 6370$ km, $G = 6{,}67.10^{-11}\ \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$

1. Montrer que la vitesse v est constante et déterminer son expression en fonction de G, M, R et h.
2. En déduire la période T du mouvement et montrer que la constante $\dfrac{T^2}{r^3}$ a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?
3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite : quelle est la relation simple entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.

4. Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude h et commenter.
5. Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer ! Le satellite étant initialement immobile par rapport à la Terre, sur une base de lancement située à la latitude λ, une fusée lui fournit un travail W pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée précédemment.
   a. Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement ? (Penser à tenir compte de la rotation de la Terre…)
   b. Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?
   c. Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur $(\lambda_1 = 0°)$ et un lancement depuis le Nord de l'Europe $(\lambda_2 = 55°)$, pour $h \ll R$. Commenter.

*Exercice 3. Paramètres cosmologiques

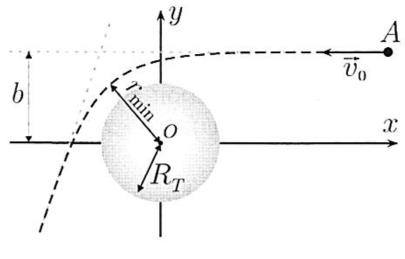
Un mobile gravite autour d'un astre sur une trajectoire elliptique de période T et de demi-grand axe a.

1. Rappeler la 3ème loi de Kepler dans ce cas.
2. Déterminer la valeur du rapport intervenant dans la 3ème loi de Kepler pour un corps qui gravite autour du Soleil, en utilisant les paramètres de l'orbite terrestre $T = 1$ an et $a = 1$ u.a. $= 150.10^6$ km.
3. Sachant que $G = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$, déterminer la masse M_S du Soleil.
4. Pour la Terre, on donne $GM_T = 3{,}986.10^{14}\ \mathrm{m^3.s^{-2}}$, M_T étant la masse de la Terre. La période de révolution de la Lune autour de la Terre (mois sidéral lunaire) vaut $T = 27{,}3$ jours. Déterminer le demi-grand axe de l'orbite de la Lune.

Niveau 2

Exercice 4. Collision avec un astéroïde

Dans tout l'exercice, on ne considère que l'influence gravitationnelle de la Terre, assimilée à une sphère de masse M_T et de rayon R_T. Un astéroïde A de masse m et de taille négligeable par rapport à celle de la Terre est repéré en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est négligeable. Dans cette position, le vecteur vitesse de l'astéroïde est $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{u_x}$, porté par la droite $\left(M_0, \overrightarrow{u_x}\right)$ telle que la



distance minimale du centre de la Terre à cette droite est b, que l'on appelle paramètre d'impact.

1. Déterminer deux intégrales premières du mouvement. On exprimera ces dernières en fonction des conditions initiales.
2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathscr{E}_{P,eff}$ de l'astéroïde dans le champ gravitationnel de la Terre.
3. Exprimer la distance minimale r_{min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre en fonction de G, v_0, M_T et b. En déduire une condition de non-collision.

*Exercice 5. Erreur de satellisation

On souhaite lancer un satellite artificiel, de masse m, sur une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à cette distance r_0 du centre de la Terre et lui donner une vitesse $\vec{v}$ orthoradiale (suivant $\overrightarrow{e_\theta}$) avec une valeur très précise.

1. Montrer qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Calculer alors la valeur à donner à v pour obtenir la trajectoire de rayon r_0.
2. En déduire dans ce cas la valeur de la constante des aires C et de l'énergie mécanique E_m.
3. Le satellite ayant été amené à la distance r_0, une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse : le vecteur $\vec{v}\,'$ a la norme voulue mais il fait un petit angle α avec le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$.
   a. Quelles sont alors les valeurs de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?
   b. Que peut-on dire du grand axe de l'ellipse réellement décrite par le satellite ? Représenter sur un même schéma la trajectoire circulaire souhaitée et la trajectoire réelle.

Exercice 6. Trajectoire quasi-circulaire d'un satellite – Freinage par l'atmosphère

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite supposée petite devant M_T et G la constante de gravitation universelle. On note T_0 la période de révolution du satellite.

1. Établir la conservation du moment cinétique du satellite par rapport à la Terre.
2. En déduire que le mouvement du satellite est plan.
3. Montrer que cela permet de définir une constante des aires C dont on donnera l'expression.

4. On suppose que le satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer que son mouvement est uniforme.
5. Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G, M_T et r le rayon de l'orbite du satellite.
6. Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire.
7. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_C du satellite en fonction de G, M_T, m et r.
8. Même question pour l'énergie potentielle Ep du satellite. Donner la relation entre E_C et Ep.
9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m et les relations de E_m avec E_C et Ep.

Les satellites en orbite basses subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Un satellite situé sur une orbite à $1{,}0.10^3$ km *d'altitude descend d'environ 2 m par jour. On cherche à modéliser ces observations.*

On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement proportionnelle à la masse du satellite et sa vitesse au carré $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ où α est un coefficient de frottement. Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les expressions des différentes énergies en fonction de r restent valables mais r varie lentement dans le temps.

10. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par r.
11. Sans résoudre, montrer que r ne peut que diminuer.
12. En déduire un résultat surprenant sur l'évolution de la vitesse du satellite.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Paramètre gravitationnel standard de la Terre

1. Système : satellite terrestre en orbite circulaire de rayon $r = R_T + z$ autour de la Terre de centre O, de masse M_T, de rayon R_T

- Référentiel géocentrique supposé galiléen
- 3ème loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$
- Paramètre gravitationnel standard : $\boxed{\mu = GM_T = \dfrac{4\pi^2 r^3}{T^2} = \dfrac{4\pi^2 \left(R_T + z\right)^3}{T^2}}$

2. Masse de la Terre : $\boxed{M_T = \dfrac{\mu}{G}}$

3. Satellite géostationnaire : $T = 86164$ s et $z = 36.10^6$ m

➢ Paramètre gravitationnel standard de la Terre : $\boxed{\mu = 4{,}0.10^{14}\ \text{m}^3.\text{s}^{-2}}$

➢ Masse de la Terre : $\boxed{M_T = 6{,}0.10^{24}\ \text{kg}}$

➢ Masse volumique de la Terre : $\boxed{\rho = \dfrac{M_T}{V} = \dfrac{3M_T}{4\pi R_T^3} = 5{,}5.10^3\ \text{kg.m}^{-3}}$

À l'époque de Cavendish, ce résultat a surpris car la masse volumique des roches les plus denses est de l'ordre de 3 *à* 4.10^3 *kg.m*$^{-3}$*. On sait à présent que cette valeur est due au noyau terrestre constitué de fer beaucoup plus dense.*

4. Force gravitationnelle terrestre au niveau du sol terrestre = force de pesanteur :

$\vec{F} = -\dfrac{GM_T m}{R_T^2}\vec{u_r} = m\vec{g}$ soit $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2} = \dfrac{\mu}{R_T^2}$

➢ Paramètre gravitationnel standard de la Terre : $\boxed{\mu = gR_T^2 = 4{,}0.10^{14}\ \text{m}^3.\text{s}^{-2}}$ avec $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$

*Exercice 2. Lancement d'un satellite en orbite circulaire

1. <u>Système</u> : satellite assimilé à un point S de masse m

<u>Référentiel</u> géostationnaire supposé galiléen

<u>Forces</u> : <u>Interaction gravitationnelle</u> exercée par la Terre : $\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{u_r}$ avec $\vec{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OS}}{OS} = \dfrac{\overrightarrow{OS}}{r}$, O centre de la Terre et $r = cste$. C'est une <u>force centrale conservative</u>, de centre O.

<u>Principe fondamental de la dynamique</u> : $m\vec{a} = \vec{F}$

<u>Cinématique</u> : $\overrightarrow{OS} = r\vec{u_r}$, $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$, $\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

Projection du PFD sur $\vec{u_\theta}$: $mr\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = cste$: mouvement <u>uniforme</u> et $v = cste$

Projection du PFD sur $\vec{u_r}$: $-mr\dot{\theta}^2 = G\dfrac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow \dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{M}{r^2}$:

$$\boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}}$$

2. Période : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}} = \dfrac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}}$ et $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}}$: ce rapport est indépendant de la masse m du satellite : c'est le même pour tous les satellites en orbite autour de la Terre.

Pour le système solaire : 3ème loi de Kepler : $\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{soleil}}}$

3. Énergie cinétique : $\boxed{\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2r}}$

   Énergie potentielle gravitationnelle : $\boxed{\mathscr{E}_{P,grav} = -\frac{GmM}{r}}$

   Énergie mécanique : $\boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{P,grav} = -\frac{GmM}{r} + \frac{GmM}{2r} = -\frac{GmM}{2r} = -\mathscr{E}_C}$

   $\mathscr{E}_m < 0$: le mouvement du satellite est dans un état <u>lié</u>.

4. Satellite géostationnaire : $\boxed{T = T_T = 86164 \text{ s}}$

   Altitude : $\boxed{h = \left(\frac{T_T{}^2 GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R = 35800 \text{ km}}$

   Les satellites géostationnaires sont très éloignés, par rapport aux satellites d'observation ou de communication.

5. a. Avant son lancement, le satellite est à la distance R de O, et possède la vitesse angulaire $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$ de rotation de la Terre : il décrit un cercle de rayon $R\cos(\lambda)$, à la vitesse $v = R\cos(\lambda)\omega_T$.

   Énergie mécanique : $\boxed{\mathscr{E}_{m0} = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{P,grav} = \frac{1}{2}mR^2\cos^2(\lambda)\omega_T{}^2 - \frac{GmM}{R}}$

   b. En plus de l'interaction gravitationnelle, le satellite subit la force de la fusée, qui fournit un travail W. Le système n'est pas conservatif.
   <u>Théorème de l'énergie mécanique</u> entre le point de lancement sur Terre et l'orbite circulaire : $\Delta\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_m - \mathscr{E}_{m0} = W^{NC} = W$

$$W = -\frac{GmM}{2(R+h)} - \left(\frac{1}{2}mR^2\cos^2(\lambda)\omega_T{}^2 - \frac{GmM}{R}\right)$$

$$W = -GmM\left(\frac{1}{2(R+h)} - \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{2}mR^2\cos^2(\lambda)\omega_T{}^2$$

$$\boxed{W = GmM\frac{R+2h}{2R(R+h)} - \frac{1}{2}mR^2\cos^2(\lambda)\omega_T{}^2}$$

   Pour minimiser W, il faut $\cos(\lambda)$ maximal, soit $\boxed{\lambda \simeq 0}$: il faut placer la base de lancement proche de l'équateur (Kourou pour la France, Cap Canaveral pour les États-Unis)

   c. Pour $h \ll R$, $W \simeq GmM\frac{1}{2R} - \frac{1}{2}mR^2\cos^2(\lambda)\omega_T{}^2$

   $\boxed{\frac{W_1}{W_2} = 0{,}9977}$ soit une économie de 0,23 % en lançant depuis l'équateur. Ce gain est très faible… Mais le lancement depuis l'équateur permet une mise en orbite équatoriale plus facile.

*Exercice 3. Paramètres cosmologiques

1. 3ème loi de Kepler pour une trajectoire elliptique : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cste}$: même constante pour tous les corps en orbite autour du même astre.
2. Pour tout corps gravitant autour du Soleil, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ peut être déterminé en utilisant les paramètres de l'orbite terrestre :

   $T = 1 \text{ an} = 31{,}536.10^6 \text{ s}$ et $a = 1 \text{ u.a.} = 150.10^6 \text{ km}$: $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = 2{,}9.10^{-19} \text{ s}^2.\text{m}^{-3}}$
3. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = k$ d'où $\boxed{M_S = \frac{4\pi^2}{Gk} = 2{,}0.10^{30} \text{ kg}}$
4. Pour tout corps gravitant autour de la Terre : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

   Pour la Lune : $T = 27{,}3 \text{ jours} = 2{,}36.10^6 \text{ s}$

   Demi-grand axe de la Lune : $\boxed{a = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3{,}83.10^8 \text{ m} = 383.10^6 \text{ km}}$

Exercice 4. Collision avec un astéroïde

1. Constante des aires : $C = bv_0$, énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$ 2.

$E_{Peff}(r) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_T m}{r}$ 3. $r_{\min} = \frac{GM_T}{v_0^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{bv_0^2}{GM_T}\right)^2} - 1\right)$

*Exercice 5. Erreur de satellisation

1. Système : satellite assimilé à un point S de masse m

   Référentiel géostationnaire supposé galiléen

   Forces : Interaction gravitationnelle exercée par la Terre : $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r_0^2}\vec{u_r}$ avec $\vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{OS}}{OS} = \frac{\overrightarrow{OS}}{r}$, O centre de la Terre et $r = r_0 = cste$. C'est une force centrale conservative, de centre O.

   Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{F}$

   Cinématique : $\overrightarrow{OM} = r_0\vec{u_r}$, $\vec{v} = r_0\dot{\theta}\vec{u_\theta}$, $\vec{a} = r_0\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r_0\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

   Projection du PFD sur $\vec{u_\theta}$: $mr_0\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = cste$: mouvement circulaire uniforme et $v = cste$

Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_r}$: $-mr_0\dot{\theta}^2 = G\dfrac{Mm}{r_0^{\,2}} \Leftrightarrow \dfrac{v^2}{r_0} = G\dfrac{M}{r_0^{\,2}}$ soit $\boxed{v = \sqrt{G\dfrac{M}{r_0}}}$

2. Moment cinétique : $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{v} = r_0\overrightarrow{u_r} \wedge mr_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mr_0^{\,2}\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cste}$

   Constante des aires : $\boxed{C = r_0^{\,2}\dot{\theta} = r_0 v = \sqrt{GMr_0}}$

   Énergie cinétique : $\mathscr{E}_C = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{GmM}{2r_0}$

   Énergie potentielle gravitationnelle : $\mathscr{E}_{P,grav} = -\dfrac{GmM}{r_0}$

   Énergie mécanique : $\boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{P,grav} = -\dfrac{GmM}{r_0} + \dfrac{GmM}{2r_0} = -\dfrac{GmM}{2r_0} = -\mathscr{E}_C}$

3. a. Vecteur vitesse : $\vec{v}\,' = v\left(\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_\theta}\right)$

   Moment cinétique :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{v} = r_0\overrightarrow{u_r} \wedge mv\left(\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_\theta}\right) = mr_0 v\cos\alpha\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cste}$$

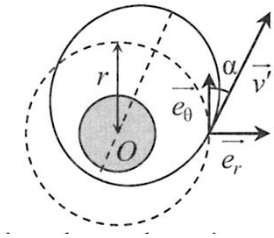
   Constante des aires : $\boxed{C = r_0 v\cos\alpha = \sqrt{GMr_0}\cos\alpha}$

   La norme de la vitesse restant identique, l'énergie cinétique ne change pas :

$$\boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{P,grav} = -\dfrac{GmM}{2r_0}}$$

   b. Le demi-grand axe de l'ellipse ne dépend que de l'énergie mécanique : $\boxed{\mathscr{E}_m = -\dfrac{GmM}{2a}}$. Comme l'énergie est la même sur l'ellipse réelle et le cercle souhaité, on a $a = r_0$.

   L'ellipse doit passer par le point initial, en étant tangente au vecteur vitesse initial. Le grand-axe passe par O, tel que la longueur du grand-axe est égale à $2r_0$. On voit apparaître le <u>périgée</u> (le point le plus proche de la Terre) et <u>l'apogée</u> (point le plus éloigné).



Exercice 6. Trajectoire quasi-circulaire d'un satellite – Freinage par l'atmosphère

5. $v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}$ 6. $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ 7. $E_C = \dfrac{GM_T m}{2r}$ 8. $E_P = -2E_C$ 9. $E_m = -E_C = \dfrac{E_P}{2}$ 10. $\dfrac{dr}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{r}$