DM 9, corrigé

PROBLÈME
Des nombres irrationnels célèbres

Partie I. Une certaine fonction

1)

a) f_n est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On a de plus pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq 1-x \leq 1$. On en déduit, la fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ que $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq (1-x)^n \leq 1$. On a donc bien par produit $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{n!}$.

b) On utilise la formule du binome de Newton. On obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{n!}x^{n+k} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n}(-1)^{j-n}\binom{n}{j-n}x^j. \end{aligned}$$

En prenant $e_j = (-1)^j\dbinom{n}{j-n}$ qui est bien entier, on a le résultat voulu.

c) Fixons $m \in \mathbb{N}$. On a plusieurs cas possible. Remarquons tout d'abord que si $m < n$, alors on aura $f_n^{(m)}(0) = 0$ car d'après la question précédente, 0 est racine de multiplicité n de f_n (f_n se factorise par un terme en x^n). Si $m > 2n$, alors on a $f^{(m)} = 0$ et on a aussi en particulier $f^{(m)}(0) = 0$. Supposons à présent $n \leq m \leq 2n$. On remarque alors que le seul terme restant après dérivation et évaluation en 0 est le terme qui avait une puissance x^m dans l'expression de f_n (les termes de degrés inférieurs ont été annulés par la dérivation et ceux de degrés supérieurs sont annulés par l'évaluation en 0). On en déduit que :

$$f_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \times e_m \times m!.$$

Puisque $e_m \in \mathbb{Z}$ et que $m \geq n$, on a $\dfrac{m!}{n!} \in \mathbb{N}$. On en déduit que $f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$.

2) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f_n(1-x)$. On en déduit par dérivation (composition de fonctions dérivables) que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f_n^{(m)}(x) = (-1)^m f_n^{(m)}(1-x)$. On a donc $f_n^{(m)}(1) = (-1)^m f_n^m(0)$, ce qui prouve d'après la question précédente que $\forall m \in \mathbb{N},\ f_n^{(m)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Partie II. π et π^2 sont irrationnels

3) H_n est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Puisque $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a^{n-k}}{b^{n-k}}f_n^{(2k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k f_n^{(2k)}(x). \end{aligned}$$

a et b sont des entiers et ils sont élevés à des puissances positives dans la somme. D'après la partie précédente, les déérivées m-ièmes de f évaluées en 0 et en 1 sont entières. Puisqu'une somme d'entiers relatifs est entière, on en déduit que $H_n(0)$ et $H_n(1)$ sont des entiers relatifs.

4) K_n est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} K_n'(x) &= H_n''(x)\sin(\pi x) + \pi H_n'(x)\cos(\pi x) - \pi H_n'(x)\cos(\pi c) + \pi^2 H_n(x)\sin(\pi x) \\ &= \sin(\pi x)(H_n''(x) + \pi^2 H_n(x)). \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} H_n''(x) &= b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) \\ &= b^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) \qquad (\text{car } f^{(m)} = 0 \text{ pour } m > 2n) \\ &= b^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \pi^{2n-2(j-1)} f_n^{(2j)}(x) \\ &= -\pi^2 b^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \pi^{2n-2j} f_n^{(2j)}(x) \\ &= -\pi^2 b^n (H_n(x) - \pi^{2n} f_n(x)). \end{aligned}$$

On a donc $K_n'(x) = \pi^2 \times \pi^{2n} b^n f_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

5) Posons $A_n = \pi \displaystyle\int_0^1 a^n \sin(\pi x) f_n(x)dx$. On a alors :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 K_n'(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}(K_n(1) - K_n(0)) \\ &= \frac{1}{\pi}(\pi H_n(1) + \pi H_n(0)) \\ &= H_n(1) + H_n(0). \end{aligned}$$

D'après la question II.1, A_n est donc entier.

6) D'après la question I.1.a, on a $f_n(x) \geq 0$ sur $[0,1]$. On remarque que l'on a aussi $\sin(\pi x) \geq 0$ sur $[0,1]$ et a est également positif. On en déduit, l'intégrale étant croissante que $A_n \geq 0$. On remarque de plus que la fonction $x \mapsto \sin(\pi x) f_n(x)$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$ (elle est strictement positive en $\dfrac{1}{2}$ par exemple) que $A_n > 0$.

On a de plus que $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}$. En majorant le sinus par 1, on obtient alors :

$$A_n \leq \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Puisque $0 \leq A_n$ et que $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ (car $a^n = o(n!)$), on en déduit par théorème d'encadrement que (A_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ceci est absurde car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers strictement positive. Elle ne peut donc pas tendre vers 0.

On en déduit finalement que π^2 est irrationnel.

7) Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Alors, on aurait π^2 rationnel (car un produit de rationnel est rationnel), ce qui est absurde d'après la question précédente. On en déduit que π est irrationnel.

Partie III. e^r est irrationnel pour $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit h un entier naturel non nul. On suppose que $e^h = \frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls. On définit la fonction F_n par $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k h^{2n-k} f_n^{(k)}(x)$.

8) D'après la partie I, $f_n(0)$ et $f_n(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$ et on ne fait que des sommes et des produits d'entiers (car les puissances de h sont positives). On en déduit que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

9) G_n est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_n'(x) &= he^{hx}F_n(x) + e^{hx}F_n'(x) \\ &= e^{hx}(hF_n(x) + F_n'(x)). \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k h^{2n-k} f_n^{(k+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k h^{2n-k} f_n^{(k+1)}(x) \qquad \text{(car } f_n^{(2n+1)} = 0\text{)} \\ &= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j-1} h^{2n-(j-1)} f_n^{(j)}(x) \\ &= -h\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j} h^{2n-j} f_n^{(j)}(x) \\ &= -h(F_n(x) - h^{2n}f_n(x)). \end{aligned}$$

On en déduit finalement que $G_n'(x) = h^{2n+1}e^{hx}f_n(x)$.

10) On a :

$$\begin{aligned} b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f_n(x)dx &= b\int_0^1 G_n'(x)dx \\ &= b(G_n(1) - G_n(0)) \\ &= b(e^h F_n(1) - F_n(0)) \\ &= aF_n(1) - F_n(0). \end{aligned}$$

On en déduit que cette intégrale est entière.

11) On peut à nouveau utiliser pour $x \in [0,1]$ l'encadrement $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n!}$. On peut également encadrer $0 \leq e^{hx} \leq e^h$. Ceci entraine que :

$$0 \leq b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f_n(x)dx \leq \frac{bh^{2n+1}e^h}{n!}.$$

On en déduit par encadrement et puisque $h^{2n+1} = o(n!)$ que $\lim_{n\to+\infty} b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f_n(x)dx = 0$.

12) On obtient alors une absurdité comme dans la partie précédente. En effet, l'intégrale est entière, strictement positive (puisque $f_n(x)$ et les fonctions présentes dans l'intégrale sont continues et strictement positives sur $]0,1[$ et tend vers 0. On en déduit que $e^h \notin \mathbb{Q}$.

13) Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $e^r \in \mathbb{Q}$. En écrivant alors $r = \frac{h}{q}$ avec $h \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, on en déduit que $e^{rq} \in \mathbb{Q}$ (puisque $\mathbb{Q}$ est stable par multiplication et par passage à l'inverse). On a donc $e^h \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde d'après la question précédente.

14) Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r \neq 1$ tel que $\ln(r) \in \mathbb{Q}$. On a alors $\ln(r) \neq 0$ car $r \neq 1$. Or, on a $r = e^{\ln(r)} \in \mathbb{Q}$. Ceci entraine d'après la question précédente que $\ln(r) \notin \mathbb{Q}$: absurde !

PROBLÈME
La fonction de Van Der Waerden

1) *Construction de la fonction g.*

a) On observe des graphes en « triangles » (je ne les trace pas pour que le corrigé ne soit pas trop long).

b) Soit $i \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Puisque f_i est $\frac{1}{2^i}$ périodique, il suffit de vérifier les propriétés demandées sur $\left[0, \frac{1}{2^i}\right]$. On a alors f croissante sur $\left[0, \frac{1}{2^{i+1}}\right]$ de 0 à $\frac{1}{2^{i+1}}$ et f décroissante sur $\left[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}\right]$ de $\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}}$ à 0. On a donc bien l'encadrement demandé par l'énoncé.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On va montrer que la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée.

- Croissance : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $g_{n+1}(x) - g_n(x) = f_{n+1}(x) \geq 0$ (d'après la question précédente). La suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
g_n(x) &\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{(somme géométrique de raison } \frac{1}{2} \neq 1) \\
&\leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

La suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 1.

La suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et est donc convergente.

2) *Continuité de g.*

a) Soient $x \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|g_m(x) - g_n(x)| &= \left|\sum_{i=0}^{m} f_i(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} f_i(x) \quad \text{(car } f_i \text{ est positive pour tout } i) \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{(d'après la question 1.b).}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{2^{i+1}} &= \sum_{j=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+j+1}} \quad \text{(on a posé } j = i - n - 1) \\
&= \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{j=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{(somme géométrique de raison différente de 1)} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

b) Puisque l'inégalité précédente est vraie pour tout $m > n$ et que $(g_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $g(x)$, on peut passer à la limite quand m tend vers l'infini pour obtenir la relation voulue.

c) Soient $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. On a alors en utilisant l'inégalité triangulaire et la question précédente :

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= |g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(y) + g_n(y) - g(y)| \\
&\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - g(y)| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + |g_n(x) - g_n(y)| + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{2^n} + |g_n(x) - g_n(y)|.
\end{aligned}$$

d) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et montrons que g est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut par exemple appliquer cette propriété en N. De plus, la fonction g_N est continue en x puisque g_N est une somme de fonctions continues. En effet, tous les f_i sont continues car elles sont périodiques et continues sur leur intervalle de définition (et prennent la même valeur au bord gauche (en 0) qu'au bord droit (en $\frac{1}{2^i}$)). Ceci entraine par définition de la continuité de g_N en x qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [x - \eta, x + \eta]\,,\ |g_N(x) - g_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On déduit alors de la question précédente que :

$$\forall y \in [x - \eta, x + \eta],\ |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

On a réussi à construire un $\eta > 0$ qui convient pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que g est bien continue en x pour tout $x \in \mathbb{R}$ et est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3) *Non dérivabilité de g.*

a) Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $m > n$, on a :

$$\begin{aligned}
g_m\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g_m\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) &= \sum_{i=0}^{m} f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{i=n+1}^{m} f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Dans la seconde somme, on remarque que l'indice i est supérieur ou égal à $n+1$. Or, f_i étant $\frac{1}{2^i}$ périodique, ceci entraine que tous les f_i de cette somme sont en particulier $\frac{1}{2^{n+1}}$ périodiques (puisque pour $i \geq n+1$, $\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \times 2^{n+1-i}$ et $2^{n+1-i} \in \mathbb{N}$). On en déduit donc que pour :

$$\forall i \geq n+1,\ f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$

Ceci entraine que $\sum_{i=n+1}^{m} f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = 0$. On en déduit que :

$$g_m\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g_m\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n} f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$

Or, on peut à présent faire tendre m vers l'infini. La partie de droite ne dépend pas de m et est fixée et puisque à x fixé, $g_m(x)$ converge vers $g(x)$ quand m tend vers l'infini, on en déduit que :

$$g\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n} f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$, $i \in [\![0, n]\!]$ et $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f_i est $\frac{1}{2^i}$ périodique et est affine sur $\left[0, \frac{1}{2^{i+1}}\right]$ de pente 1 et affine sur $\left[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}\right]$ de pente -1. On en déduit qu'elle est donc affine de pente 1 ou de pente -1 sur tous les intervalles de la forme $\left[\frac{q}{2^{i+1}}, \frac{q+1}{2^{i+1}}\right]$ où $q \in \mathbb{Z}$ de pente ± 1.

A REECRIRE Or, on a ici $\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{k \times 2^{i-n}}{2^{i+1}}$. Puisque $i \in [\![0, n]\!]$, on a alors $k \times 2^{n-i} \in \mathbb{Z}$. Ceci entraine que l'intervalle $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$ (qui est de longueur $\frac{1}{2^{n+1}}$) est inclus dans l'intervalle $\left[\frac{q}{2^{i+1}}, \frac{q+1}{2^{i+1}}\right]$ (qui est de longueur $\frac{1}{2^{i+1}} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$) où $q = k \times 2^{n-i}$.

Ceci entraine que f_i est affine sur $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$ et qu'elle est soit de pente 1, soit de pente -1.

c) Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, on a tout d'abord :

$$\frac{g\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - f_i\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

Puisque l'on peut écrire $\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{k+1}{2^{n+1}} - \frac{k}{2^n}$ et que les fonctions f_i sont affines sur $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$, on voit que la somme considérée est la somme des pentes (taux d'accroissements) des fonctions f_i sur ces intervalles. Or, ces pentes sont égales à 1 ou -1. Ceci entraine que $\frac{g\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}$ est un entier (relatif).

De plus, puisque l'on somme $n+1$ termes qui peuvent être chacun être égaux à 1 ou -1, on en déduit que si n est pair, la somme est impaire et que si n est impair, alors la somme est paire. La somme a donc la parité contraire de celle de n.

d) Par encadrement usuels, on a $2^{n+1}x - 1 < x_n \leq 2^{n+1}x$. Ceci entraine que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$x - \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq x.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = x$. Puisque $\frac{y_n}{2^n} = \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} = x$.

e) On suppose g dérivable en x.

i) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la dérivabilité de g en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [x - \eta, x + \eta]$ et $y \neq x$:

$$\left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} - g'(x) \right| \leq \varepsilon.$$

En multipliant la relation ci-dessus par $|y - x| > 0$, on obtient :

$$\left| g(y) - g(x) - (y - x) g'(x) \right| \leq \varepsilon |y - x|.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer qu'en $y = x$ cette relation est encore vraie (on a $0 \leq 0$) ce qui prouve qu'elle est valable pour tout $y \in [x - \eta, x + \eta]$.

ii) On fixe $\varepsilon > 0$. On prend le $\eta > 0$ associé de la question précédente. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x (d'après la question 3.d), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in [x - \eta, x + \eta]$ et $v_n \in [x - \eta, x + \eta]$ (on prend le maximum des deux rangs qui conviennent pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$). On a alors pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right)-g\left(\frac{x_n}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}-g'(x)\right| &= \left|\frac{g(v_n)-g(u_n)}{v_n-u_n}-g'(x)\right| \\
&= \left|\frac{g(v_n)-g(u_n)-(v_n-u_n)g'(x)}{v_n-u_n}\right| \\
&= \left|\frac{g(v_n)-g(x)-(v_n-x)g'(x)+g(x)-g(u_n)+(u_n-x)g'(x)}{v_n-u_n}\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et la question précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right)-g\left(\frac{x_n}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}-g'(x)\right| &\leq \left|\frac{g(v_n)-g(x)-(v_n-x)g'(x)}{v_n-u_n}\right|+\left|\frac{g(x)-g(u_n)+(u_n-x)g'(x)}{v_n-u_n}\right| \\
&\leq \frac{|v_n-x|\varepsilon+|x-u_n|\varepsilon}{v_n-u_n}.
\end{aligned}$$

Or, on a $u_n=\dfrac{x_n}{2^{n+1}}=\dfrac{\lfloor 2^{n+1}x\rfloor}{2^{n+1}}\leq x$ (inégalité usuelle sur la partie entière) et un calcul similaire montre que $v_n \geq x$. On a donc $|v_n-x|=v_n-x$ et $|x-u_n|=x-u_n$. Puisque $v_n>u_n$, on a aussi $|v_n-u_n|=v_n-u_n$. Ceci entraine donc que pour tout $n\geq N$:

$$\left|\frac{g\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right)-g\left(\frac{x_n}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}-g'(x)\right|\leq\varepsilon.$$

Ceci est exactement le fait que la limite recherchée est $g'(x)$.

f) On peut alors conclure. En effet, si par l'absurde g était dérivable en un $x\in\mathbb{R}$, alors d'après la question précédente, la suite $\left(\dfrac{g\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right)-g\left(\frac{x_n}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ devrait tendre vers une limite finie. Or, puisque x_n et y_n sont deux entiers successifs, on est dans le cadre de la question 3.c qui nous indique que cette suite est entière et qu'elle change de parité à chaque valeur de n. On aurait donc $g'(x)$ qui serait un entier pair (si on considère la suite extraite des termes pairs de la suite) et qui serait également un entier impair (si on considère la suite extraite des termes impairs de la suite). C'est absurde ! On a utilisé ici le fait qu'une suite à valeurs entières qui converge tend vers un entier (en écrivant la définition de la limite et en prenant $\varepsilon=1/3>0$ par exemple, on peut montrer qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang égale à un entier).