LYCÉE MONTAIGNE

Année Scolaire 2021 – 2022

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2}$ et MP2I

DS N°3

Samedi 20/11/2021 (4h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$ *ou soulignés à la* ***règle****.*

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : Analyse

La partie I est indépendante du reste. La partie III utilise la partie II dans la dernière question seulement.

Partie I : Étude d'une fonction

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ *on pose* $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$, *et* $f(0) = 1$.

On rappelle que pour $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

Q1) *Préliminaires.*

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer (sans étude de fonction) que :

$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 - t^2 + t^4$$

c) En déduire pour $x \in \mathbb{R}^+$ que $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$.

Q2) a) Étudier la parité de f.

b) Démontrer que f est continue en 0.

c) Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

Q3) a) Soit $x > 0$, montrer que $\displaystyle\frac{x}{1+x^2} \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

On s'intéressera aux variations de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

b) i) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

ii) En déduire que $f'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

c) Faire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ (avec les limites).

d) Donner l'allure de la courbe de f.

Q4) On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

a) Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\frac{1}{x})$. Calculer $g'(x)$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(x)$ pour $x > 0$.

Partie II : Intégrales de Wallis

$$\textit{Pour } n \in \mathbb{N}, \textit{ on note } \mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \textit{ et } \mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q5) Calculer W_0 et W_1.

Q6) a) À l'aide d'une IPP, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n > 0$.

Q7) a) Étudier le sens de variation de la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Déduire de Q6a et Q7a que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} = 1$.

Q8) a) Montrer que la suite $((n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (préciser cette constante).

b) Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\mathrm{W}_n = \sqrt{\pi}$.

Q9) a) Montrer que $\mathrm{I}_n = \sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1}$.

On posera le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans l'intégrale I_n.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

Partie III : Intégrale de Gauss

Q10) Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.

a) Montrer que $\forall u \in [0;n]$, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$.

On pourra utiliser sans justification que pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

b) Étudier les variations de la fonction $f\colon\ u \mapsto -u + \ln(1 - \frac{u^2}{n}) - n\ln(1 - \frac{u}{n})$ sur l'intervalle $[0;\sqrt{n}[$. En déduire son signe.

c) En déduire que $\forall u \in [0;n]$, $e^{-u} \times \left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right) \leqslant \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n$.

On distinguera $u \in [0;\sqrt{n}[$ et $u \in [\sqrt{n};n]$.

d) En déduire que $\forall t \in [0;\sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t^2} \times \frac{t^4}{n} + \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$$

Q11) a) Calculer le maximum (noté M) de la fonction $g\colon\ u \mapsto e^{-u}u^3$ sur $[0;+\infty[$.

b) En déduire que sur $[1;+\infty[$ on a $e^{-t^2}t^4 \leqslant \frac{\mathrm{M}}{t^2}$, puis que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t = 0$.

Q12) a) Déduire de la question Q10d, un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer alors la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Problème 2 : Algèbre

Ce sujet est construit autour de l'inégalité suivante, dite de Cauchy-Schwarz, qui énonce que pour tout n entier naturel non nul et tous $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ réels :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k \times y_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Les deux parties sont indépendantes entre elles.

Partie I

Dans cette partie, on utilise des nombres complexes pour prouver la formule de Cauchy-Schwarz dans le cas particulier $n = 2$, et on donne une première application de cette formule.

Q1) On se donne quatre nombres réels x_1, x_2, y_1, y_2, et on définit les deux nombres complexes $z = x_1 + ix_2$ et $z' = y_1 + iy_2$.

a) Vérifier que $x_1y_1 + x_2y_2 = \mathrm{Re}(z \times \overline{z'})$.

b) Démontrer l'inégalité suivante : $\forall\, u \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(u)| \leqslant |u|$.

c) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $n = 2$:

$$|x_1y_1 + x_2y_2| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \times \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Q2) On considère deux nombres complexes a et b **non nuls** et de **même module** noté r. On suppose en outre que $ab \neq r^2$ et $ab \neq -r^2$, et pose

$$z_1 = \frac{a+b}{r^2+ab} \text{ et } z_2 = \frac{a-b}{r^2-ab}.$$

a) Justifier que $\overline{a} = \frac{r^2}{a}$ et $\overline{b} = \frac{r^2}{b}$.

b) En déduire que z_1 et z_2 sont deux nombres réels.

c) On note α (respectivement β) un argument quelconque de a (respectivement de b). Prouver que

$$z_1 = \frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{r\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

et exprimer z_2 d'une manière similaire.

d) En utilisant la formule démontrée en question Q1c (pour x_1, x_2, y_1, y_2 bien choisis), établir que

$$|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| + |\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})| \leqslant \sqrt{\left(\frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2}.$$

e) En déduire l'inégalité

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \geqslant \frac{1}{r}.$$

Partie II

Dans cette partie, on se donne un entier naturel n non nul, et on démontre la formule de Cauchy-Schwarz dans le cas général, puis on en donne deux applications indépendantes l'une de l'autre.

Q3) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

a) Prouver que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k\times y_k)\right)^2.$$

b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k\times y_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Q4) Dans cette question, on se donne $a_1,\dots,a_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, et on souhaite démontrer l'inégalité suivante, dite de Hardy :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

a) En utilisant Q3b justifier que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)\times\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}\right)\geqslant\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}\leqslant 4\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}.$$

c) Justifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{2}{k(k+1)^2}\leqslant\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

d) En déduire que

$$\forall\, p\in[\![1,n]\!],\ \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}\leqslant\frac{1}{2p^2}.$$

e) Conclure.

Q5) Dans cette question, on se donne un réel $x\in[0,1]$ et on pose

$$\Delta_n(x)=\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

b) Prouver que

$$\forall\, k\in[\![1,n]\!],\ k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx.$$

d) Calculer de même

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

et en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

e) En utilisant Q3b conclure que

$$\Delta_n(x)\leqslant\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

– FIN –