22. Séries

Exercice 1. (c)/ (m) Calculer les sommes des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-3k}. \qquad 2)\ \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}. \qquad 3)\ \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right). \qquad 4)\ \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right).$$

Exercice 2. (c)/ (m) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3+n^2}{n^5+n+1}. \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}. \qquad 3)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$$4)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n^3 \arctan\left(e^{-n}\right). \qquad 5)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3^n+n^5}{\ln(n)+5^n}. \qquad 6)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

$$7)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}. \qquad 8)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n. \qquad 9)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}.$$

Exercice 3. (m) Déterminer en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(e^{\frac{1}{n}}-a-\frac{b}{n}\right) \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\ln(n)+a\ln(n+1)+\frac{b}{n+1}\right) \qquad 3)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n}\right)^{a+\frac{b}{n}}.$$

Exercice 4. (c) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=\frac{5}{6}u_{n+1}-\frac{1}{6}u_n$ pour $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5. (c) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n)}{n^3}. \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n. \qquad 3)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}. \qquad 4)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n\ln(n)}{n}.$$

Exercice 6. (m) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n\left(2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad 3)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n+3\sin(n)}.$$

Exercice 7. (m) Discuter suivant la valeur de $a\in\mathbb{R}$ la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{1+a^n}. \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \qquad 3)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right).$$

Exercice 8. (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante réelle telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. En considérant $S_{2n} - S_n$, montrer que $2nu_{2n} \to 0$ puis en déduire que $nu_n \to 0$.

Exercice 9. (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ est convergente.

Exercice 10. (m) On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1) Déterminer à l'aide d'une comparaison série/intégrale un équivalent de u_n.

2) Montrer de même que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim_{+\infty} \ln(\ln(n))$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 11. Constante d'Euler. (c)/ (m) On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

2) Montrer que la suite $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive. En déduire l'existence d'une constante γ (la constante d'Euler) telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3) On pose $H'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que H'_n est convergente et tend vers $\ln(2)$. *On pourra étudier H'_{2n} et en déterminer un développement asymptotique à l'aide de la question précédente.*

Exercice 12. (m) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a}{n^2+a^2}$ est convergente. En utilisant une comparaison série/intégrale, déterminer alors $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 13. Critère de d'Alembert. (m) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que si $l > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

2) On suppose $l < 1$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ u_{n+1} \leq \left(\frac{l+1}{2}\right) u_n$. En déduire que $\forall n \geq N$, $u_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-N} \times u_N$ puis que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

3) Montrer que l'on ne peut pas conclure si $l = 1$ en exhibant un exemple de chaque nature.

Exercice 14. (i) Calculer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

Exercice 15. (∗) Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.