Devoir non Surveillé de calcul, corrigé

Exercice 1.

1) $DL_{2n}(0)$ de $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$

2) $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

3) $DL_n(0)$ de $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

4) $DL_3(0)$ de $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ (obtenu en intégrant le DL $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$)

5) $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

6) $DL_3(0)$ de $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

7) Énoncer la formule de Taylor Young à l'ordre n en x_0 pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$.

Puisque f est $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, elle admet un DL à l'ordre n en x_0 de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Exercice 2. Calculer un DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} \\
&= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right) \\
&\quad \times \left(1 - \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{18} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^4}{18} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $F = \dfrac{1}{X(1+X)^2(X^2+X+1)}$.

1) Donner la forme de la décomposition en simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

0 est pôle simple, -1 pôle double et X^2+X+1 est de discriminant strictement négatif. Il existe donc $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{(1+X)^2} + \frac{dX+e}{X^2+X+1}.$$

2) Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

- $\times X$ et évaluation en $X = 0$: $a = 1$.
- $\times(1+X)^2$ et évaluation en $X = -1$: $c = -1$.
- $\times X^2+X+1$ et évaluation en $X = j$:

$$\begin{aligned} dj + e &= \frac{1}{j(1+j)^2} \\ &= \frac{1}{j(-j^2)^2} \\ &= \frac{1}{j^5} \\ &= j. \end{aligned}$$

  Puisque d et e sont réels, on a $d = 1$ et $e = 0$.
- $\times X$ et $X \to +\infty$: $a + b + d = 0$ donc $b = -2$.

On a donc $F = \dfrac{1}{X} + \dfrac{-2}{1+X} + \dfrac{-1}{(1+X)^2} + \dfrac{X}{X^2+X+1}$.

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}$. Déterminer à l'aide de l'exercice précédent une primitive de f (on précisera les intervalles d'étude).

Les intervalles d'étude sont $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. On a :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{x}{x^2+x+1}.$$

On a donc (les égalités sont à une constante près sur chaque intervalle d'étude) :

$$\int^x f(t)dt = \ln(|x|) - 2\ln(|1+x|) + \frac{1}{1+x} + \int^x \frac{t}{t^2+t+1}dt.$$

Calculons le terme manquant :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t}{t^2+t+1}dt &= \int^x \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt - \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3}\int^x \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int^x f(t)dt = \ln(|x|) - 2\ln(|1+x|) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$