À chercher pour lundi 20/02/2023, corrigé

Exercice 3. Analyse : soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P'(X)^2 = 4XP(X)$.

On remarque que si $P = 0$, P est solution. Si P est constant non nul, alors on a $0 = 4XP(X)$ ce qui est absurde ! Traitons alors le cas où $n = \deg(P) \geq 1$. On a alors $\deg(P') = n - 1$, ce qui entraine puisque $(P')^2 = 4XP$ que :

$$2(n-1) = 1 + n \Leftrightarrow n = 3.$$

On a donc $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On a alors $P' = 3aX^2 + 2bX + c$. En évaluant la relation vérifiée par P en $X = 0$, on a $P'(0) = 0$, ce qui entraine que $c = 0$. En injectant l'expression de P dans l'équation, on a que P est solution si et seulement si :

$$(3aX^2 + 2bX)^2 = 4X(aX^3 + bX^2 + d) \Leftrightarrow 9a^2X^4 + 12abX^3 + 4b^2X^2 = 4aX^4 + 4bX^3 + 4dX.$$

Par unicité des coefficient d'un polynôme, on en déduit que $d = 0$, $b = 0$ et que $9a^2 = 4a$, ce qui implique puisque $a \neq 0$ que $a = \frac{4}{9}$.

Synthèse : Réciproquement, on vérifie que le polynôme nul et $P = \frac{4}{9}X^3$ sont solutions de l'équation. Ce sont donc les deux seules solutions.

Exercice 14. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \frac{1}{k}$. Si on pose, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{X - i}{k - i}$$

alors on a $P = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} L_k$.

On va montrer que $\deg(P) = n$ et trouver son coefficient dominant en montrant que les termes en X^n de P ne se simplifient pas. Le terme en X^n de P s'obtient en sommant ceux des $\frac{1}{k}L_k$. Il vaut donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{1}{k-i} &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{k-i}\times\prod_{i=k+1}^{n+1}(k-i)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\frac{1}{(k-1)!}\times\frac{(-1)^{n+1-(k+1)+1}}{(n+1-k)!}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\times\frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}-(-1)^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}(0+(-1)^n)\\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\deg(P)=n$ et que $\mathrm{dom}(P)=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

Pour obtenir la limite en l'infini, il suffit de remarquer que si $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n\neq 0$, alors pour $x>0$, on a $P(x)=a_nx^n\left(1+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n}x^{k-n}\right)$. La somme tend alors vers 0 quand x tend vers l'infini (somme finie de termes tendant tous vers 0). On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}=\pm\infty$ dépendant du signe de a_n. On en déduit que si n est pair, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$ et que si n est impair, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P(x)=-\infty$.

Exercice 19. On pose $P(x)=x^3-8x^2+23x-28=0$. Notons x_1,x_2,x_3 les racines de P. On a par hypothèse $x_1+x_2=x_3$. Or, en utilisant les relations coefficients/racines, on remarque que $x_1+x_2+x_3=8$. Ceci entraine que $x_3=4$ et on a donc une des racines. On en déduit alors que $P(x)=(x-4)(x^2-4x+7)$ (en effectuant la division euclidienne de P par $X-4$). On calcule alors les racines du polynôme de degré 2. On a $\Delta=9$. Les racines sont donc $x_1=2-i\sqrt{3}$ et $x_2=2+i\sqrt{3}$.