12. Suites 2, méthodologie

I. Relations de comparaison

I.1. Suites négligeables

Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites (réelles ou complexes). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ (ou de façon abrégé $u_n = o(v_n)$) s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \ u_n = \varepsilon_n v_n$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

(m) Pour montrer que $u_n = o(v_n)$, on utilise le fait que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang (ce qui sera quasiment toujours le cas), alors, $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Alors, on a les propriétés suivantes :

- *Transitivité.* Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- *Produit dans les $o(.)$.* Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(w_n v_n)$.
- *Somme de $o(.)$.* Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

I.2. Suites dominées

Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites (réelles ou complexes). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ (ou de façon abrégé $u_n = O(v_n)$) s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \ u_n = a_n v_n$.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(m) Pour montrer que $u_n = O(v_n)$, on utilise le fait que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir de certain rang (ce qui sera quasiment toujours le cas), alors, $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Alors, on a les propriétés suivantes :

- *Transitivité.* Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
- *Produit dans les $O(.)$.* Si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n w_n = O(w_n v_n)$.
- *Somme de $O(.)$.* Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n + \mu v_n = O(w_n)$.

Proposition. Soit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k n^k$ avec $a_d \neq 0$. Alors, $u_n = O(n^d)$.

I.3. Suites équivalentes

Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites (réelles ou complexes). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ (ou de façon abrégé $u_n \sim v_n$) s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\exists N \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geq N,\ u_n = a_n v_n.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1.$

m Pour montrer que $u_n \sim v_n$, on utilise le fait que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir de certain rang (ce qui sera quasiment toujours le cas), alors, $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1.$

Proposition. $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Elle est donc réflexive (une suite est équivalente à elle-même), transitive et symétrique ($u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$).

Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Alors, $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.

II. Comparaison des suites de référence

Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Si $a = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$ et si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a \leq -1$, alors $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Remarque : En particulier, pour $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ et $|a| \geq 1 \Rightarrow (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Proposition. On a les comparaisons suivantes :

- $n! = o(n^n)$.
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$.
- $\forall a > 1,\ \forall b \in \mathbb{R},\ n^b = o(a^n)$.
- $\forall b > 0,\ \forall c \in \mathbb{R},\ (\ln(n))^c = o(n^b)$.

m Les deux derniers points sont connus sous le nom de croissances comparées. Ces échelles de comparaisons nous permettent de voir parmi les suites de références lesquelles tendent le plus vite vers l'infini.

III. Propriétés des équivalents

III.1. Signes et limites

Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim v_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Proposition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim v_n$. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe à partir d'un certain rang.

(m) La première propriété nous permet de calculer des limites à l'aide des équivalents. En effet, si une suite est équivalente à une suite dont la limite est simple, on peut alors trouver la limite de la première suite. La seconde propriété nous sera surtout utile dans le chapitre sur les séries que l'on abordera plus tard dans l'année.

III.2. Propriétés des équivalents

Proposition. On a le droit de réaliser les opérations suivantes sur les équivalents :

- *Produit d'équivalents.* Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- *Quotient d'équivalents.* Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ avec w_n qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.
- *Puissances fixées entières d'équivalents.* Si $u_n \sim v_n$ avec u_n qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang et $p \in \mathbb{Z}$, alors $u_n^p \sim v_n^p$.
- *Puissances fixées d'équivalents.* Si $u_n \sim v_n$ avec u_n strictement positive à partir d'un certain rang et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

(m) Quand on demande de calculer un équivalent, on peut donc calculer un équivalent de chaque terme et ensuite faire le produit/quotient des équivalents. **Attention, on ne peut pas faire de somme ou de composition d'équivalents !** Pour cette raison, quand on demande un équivalent d'une suite, on ne laisse en général jamais le résultat sous forme d'une somme (sinon cela veut dire qu'on peut encore simplifier le résultat et trouver un équivalent plus simple).

Exercice d'application 1. *Logarithme d'équivalent.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On suppose $u_n \sim v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang et que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \ln(v_n) = 0$.

2) Quelle est la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$? En déduire que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

3) Reprendre les deux questions précédentes en supposant $u_n \sim v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. *On rappelle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement positive.*

III.3. Équivalents usuels

Proposition. Formule de Stirling. $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$.

Proposition. Équivalent de la série harmonique. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Proposition. Équivalents usuels au voisinage de 0. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors :

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $\arctan(u_n) \sim u_n$.
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.

Remarque : Pour les trois derniers, on les retiendra plutôt sous la forme (avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$) :

- $e^{u_n} = 1 + u_n + o(u_n)$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + o(u_n)$.
- $\cos(u_n) = 1 - \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$.

On peut aussi retenir par exemple que $\sin(u_n) = u_n + o(u_n)$, $\ln(1+u_n) = u_n + o(u_n)$, *etc. mais ces propriétés sont plus faciles à retrouver avec l'équivalent usuel.*

(m) Ces différents équivalents se retrouvent tous en faisant apparaitre le taux d'accroissement d'une fonction dérivable en 0 et en utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$.

III.4. Calculs d'équivalents

Exercice d'application 2. Déterminer les équivalents des suites suivantes :

1) $u_n = \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^3$.

2) $v_n = \tan\left(\dfrac{3}{\sqrt{n+2}}\right)$.

3) $w_n = \ln\left(1 + \sin^2\left(-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Exercice d'application 3. Déterminer les équivalents des suites suivantes :

1) $u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{\ln^3(n)}$.

2) $v_n = \dfrac{n! + n^3\ln^4(n) - 5^n}{-e^n + n^n + \sqrt{2\pi n}}$.

3) $w_n = \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{3n^2 - 2\ln^4(n)}}$.

4) $x_n = \ln(2^n + n^2) - \sqrt{n+2}$.

5) $y_n = \left(\cos\left(\dfrac{2}{n}\right) - 1 + 2\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^3$.

(m) Quand on a une forme indéterminée dans une limite, on cherche en général un équivalent simple de la suite et on cherche la limite de cet équivalent. Cela donne alors la limite de la suite de départ (deux suites équivalentes ont la même limite si l'une des deux admet une limite).

Exercice d'application 4. Déterminer les limites des suites suivantes.

1) $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

2) $v_n = n \times \sqrt{\ln\left(1 + \frac{3}{n^2+1}\right)}$.

III.5. Équivalents de suites implicites

(m) Pour montrer l'existence des suites demandées, on utilise très souvent le théorème de la bijection continue. Pour trouver l'équivalent, on commence par chercher la limite de la suite (soit en utilisant un encadrement, soit en montrant qu'elle est monotone afin de justifier que la limite existe) et on utilise la relation vérifiée par la suite pour obtenir l'équivalent.

Exercice d'application 5.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x + e^x = n$ a une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

3) Montrer que $e^{x_n} \sim n$ et en utilisant le premier exercice d'application, déterminer un équivalent de x_n en $+\infty$.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1. *Logarithme d'équivalent.*

1) Puisque $u_n \sim v_n$, elles sont de même signe à partir d'un certain rang. Puisque (u_n) est strictement positive, alors v_n aussi. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Par composition de limites, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \ln(v_n) = 0$.

2) Puisque $u_n \sim v_n$, elles ont la même limite en $+\infty$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = +\infty$ (par composition de limites). On en déduit donc par quotient de limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} = 0.$$

Ceci entraine que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1$, et donc que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

3) Dans le cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, le résultat de la première question est toujours valide (cette hypothèse n'avait pas été utilisée). Pour la deuxième question, on a cette fois $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$ (car $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite). On a alors toujours par quotient de limites que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} = 0.$$

Ceci entraine que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1$, et donc que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Exercice d'application 2.

1) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$. Par puissance d'équivalents, on en déduit que $u_n \sim \frac{1}{8n^6}$.

2) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n+2}} = 0$, on a $\tan\left(\frac{3}{\sqrt{n+2}}\right) \sim \frac{3}{\sqrt{n+2}}$. Puisque $n+2 \sim n$, par puissance d'équivalents, on a $\sqrt{n+2} \sim \sqrt{n}$. On a donc $v_n \sim \frac{3}{\sqrt{n}}$.

3) On a $\lim_{n\to+\infty} \sin^2\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 0$ donc $w_n \sim \sin^2\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $\sin\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{2}{\sqrt{n}}$. Par puissance d'équivalents, on a donc :

$$w_n \sim \frac{4}{n}.$$

Exercice d'application 3.

1) On a $\sqrt{n+1} - 2\sqrt{\ln^3(n)} = \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 2\sqrt{\frac{\ln^3(n)}{n}}\right)$. D'après les croissances comparées, dans la parenthèse, le terme de droite tend vers 0 et le terme de gauche tend vers 1. On en déduit que $u_n \sim \sqrt{n}$.

2) Par comparaisons usuelles, $n! + n^3\ln^4(n) - 5^n \sim n!$ (par croissances comparées, $n^3\ln^4(n) = o(5^n)$

et par comparaisons usuelles, $5^n = o(n!)$). Le dénominateur est équivalent à n^n (par comparaisons usuelles). On en déduit que $v_n \sim \frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

3) On étudie le numérateur et le dénominateur. On a tout d'abord $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ (équivalent usuel qui se retrouve avec la limite du taux d'accroissement de arctan en 0). Or, on a $-\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que le numérateur est équivalent à $\frac{1}{n}$.

De plus, on a $3n^2 - 2\ln^4(n) \sim 3n^2$ par croissances comparées et on peut prendre des racines d'équivalents donc le dénominateur est équivalent à $\sqrt{3}n$. Par quotient, on a donc $w_n \sim \frac{1}{\sqrt{3}n^2}$.

4) $\ln(2^n + n^2) - \sqrt{n+2} = \ln\left(2^n\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)\right) - \sqrt{n+2} = n\ln(2) + \ln\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right) - \sqrt{n+2}$. Le terme dans le logarithme tend vers 0 (croissances comparées et composition de limites). De plus, on a $\sqrt{n+2} \sim \sqrt{n} = o(n)$. Ceci entraine que l'équivalent recherché est $n\ln(2)$.

5) En utilisant le fait que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, puis que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on trouve que l'expression étudiée est égale à 0 ! L'équivalent recherché est donc 0 (on rappelle que seule la suite nulle est équivalente à 0).

Exercice d'application 4.

1) On a $u_n = e^{n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$. Or, puisque $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. On en déduit que le terme dans l'exponentiel tend vers 1. Par composition de limites (ou par continuité de l'exponentielle), on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.

2) On a $\ln\left(1+\frac{3}{n^2+1}\right) \sim \frac{3}{n^2+1} \sim \frac{3}{n^2}$ (on a le droit de faire des quotients d'équivalents et $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2+1} = 0$). On a également le droit de prendre des racines carrées d'équivalents, ce qui entraine que $v_n \sim n \times \frac{\sqrt{3}}{n} \sim \sqrt{3}$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.

Exercice d'application 5.

1) Soit $f : x \mapsto x + e^x$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^x > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a de plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection continue, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ a bien une unique solution.

2) Deux manières de faire :

- Puisque $f(x_n) = n$ et que f est bijective, on a $x_n = f^{-1}(n)$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
- Sinon, on peut aussi montrer que (x_n) est strictement croissante puisque f l'est. En effet, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $n < n+1$ donc $f(x_n) < f(x_{n+1})$. Puisque f est strictement croissante, on a

alors $x_n < x_{n+1}$. Puisque la suite (x_n) est alors croissante, soit elle est non majorée et tend vers $+\infty$, soit elle est majorée et converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Or, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + e^{x_n} = n$, on aurait alors par composition de limites $l + e^l = +\infty$: absurde. On a donc bien $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

3) En divisant par e^{x_n} la relation vérifiée par x_n, on obtient $\dfrac{x_n}{e^{x_n}} + 1 = \dfrac{n}{e^{x_n}}$. D'après les croissances comparées, puisque la suite (x_n) tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$, ce qui entraine $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{e^{x_n}} = 1$. On a donc bien $e^{x_n} \sim n$.

D'après le première exercice d'application, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{x_n} \neq 1$, on a alors $\ln(e^{x_n}) \sim \ln(n)$, soit $x_n \sim \ln(n)$.