

## Complément de trigonométrie

---

**Exercice 1.** (m) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a + b + c = \pi$ . Montrer que :

$$\cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c) = 1.$$

**Exercice 2.** (m) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$\begin{array}{lll} 1) \sin(x) = \frac{1}{2}. & 2) \tan(x) = -1. & 3) \cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right). \\ 4) \cos(3x) = \sin(x). & 5) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{3}\right). & 6) \cos^4(x) - \sin^4(x) = 1. \end{array}$$

**Exercice 3.** (m) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inégalités :

$$\begin{array}{ll} 1) 2\sin^2(x) - 3\sin(x) > 2. & 2) 2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0. \\ 3) \cos(x) - \sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}. & 4) \cos(5x) + \cos(3x) \leq \cos(x). \end{array}$$

**Exercice 4.** (c) Linéariser les expressions  $A(\theta) = \sin^3(\theta) \cos(\theta)$ ,  $B(\theta) = \cos^4(\theta)$  et  $C(\theta) = \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$ .

**Exercice 5.** (m) Linéariser les fonctions suivantes afin d'en déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  :

$$f : x \mapsto \cos(3x) \cos(2x), \quad g : x \mapsto \cos(2x) \sin(5x) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \sin(3x) \sin(4x).$$

**Exercice 6.** (i) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$1) \cos(x) - \cos(5x) = \sin(3x). \quad 2) \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) = 0. \quad 3) \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) = 3.$$

**Exercice 7.** (i) Transformer les fonctions suivantes en produit afin de trouver leurs zéros :

$$\begin{array}{l} 1) f : \theta \mapsto \cos(\theta) + 2\cos(2\theta) + \cos(3\theta). \\ 2) g : \theta \mapsto \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \sin(7\theta) + \sin(8\theta). \end{array}$$

**Exercice 8.** (m) À quelle condition sur le réel  $m$  l'équation  $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = m$  a-t-elle une solution réelle ? Résoudre cette équation pour  $m = \sqrt{2}$ .

**Exercice 9.** (m) Calculer en fonction de  $\theta \in \mathbb{R}$  et de  $n \in \mathbb{N}$  les sommes :

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta). & 2) \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta). \\ 3) \sum_{k=0}^n \cos((2k-1)\theta). & 4) \sum_{k=0}^n \cos^k(\theta) \cos(k\theta). \end{array}$$

**Exercice 10.** (i) Calculer en fonction de  $a, b \in \mathbb{R}$  et de  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$ .