À chercher pour lundi 16/01/2023, corrigé

Exercice 17. (i) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Supposons dans un premier temps que $a \wedge b = 1$. D'après le lemme d'Euclide, on a $a \wedge (a+b) = a \wedge (a+b-a) = a \wedge b = 1$. De mÃªme, on a aussi $b \wedge (a+b) = 1$. On en déduit d'après le cours que :

$$(ab) \wedge (a+b) = 1.$$

Réciproquement, supposons que $(ab) \wedge (a+b) = 1$. D'après l'identité de Bézout, il existe alors $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $abu + (a+b)v = 1$, ce qui implique que :

$$a(bu+v) + bv = 1.$$

D'après le théorème de Bézout, on en déduit que $a \wedge b = 1$ (puisque $bu + v \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$).

Exercice 20. On raisonne par analyse/synthèse. Si (a, b) est un couple solution, alors puisque $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$, on en déduit que $a \wedge b = 8$. Il existe donc a' et b' premiers entre eux tels que $a = 8a'$ et $b = 8b'$. En réinjectant dans l'expression de ab, on en déduit que $a'b' = 117$. Or, $117 = 3^2 \times 13$ (dans sa décomposition en facteurs premiers). On en déduit que les solutions sont (puisque a' et b' sont premiers entre eux) :
- $a' = 1$ et $b' = 117$.
- $a' = 3^2$ et $b' = 13$.
- $a' = 13$ et $b' = 3^2$.
- $a' = 117$ et $b' = 1$.

Réciproquement, on vérifie que les solutions sont les couples $\{(8, 936),\ (72, 104),\ (104, 72),\ (936, 8)\}$.

Exercice 22. On considère (E) : $3^x = 8 + y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}^*$. Soit (x, y) une solution de (E).

1) 3^x est impair (un produit de nombre impair est impair) donc $y^2 = 3^x - 8$ est impair. On en déduit que y est impair (par l'absurde, si il était pair alors y^2 serait pair : absurde).

Étudions alors les restes possibles des carrés modulo 8 pour $n \in \mathbb{Z}$ (impair car on a montré que y était impair) :

$$\begin{cases} n \equiv 1\ [8] \Rightarrow n^2 \equiv & 1 \quad [8] \\ n \equiv 3\ [8] \Rightarrow n^2 \equiv & 1 \quad [8] \\ n \equiv 5\ [8] \Rightarrow n^2 \equiv & 1 \quad [8] \\ n \equiv 7\ [8] \Rightarrow n^2 \equiv & 1 \quad [8] \end{cases}$$

Tous les carrés impairs sont congrus à 1 modulo 8. On en déduit que $y^2 \equiv 1[8]$.

2) On déduit de la question précédente que $3^x \equiv 1\ [8]$. Supposons par l'absurde que x soit impair, c'est à dire de la forme $x = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $3^x \equiv 3\ [8]$ ce qui est absurde !

On en déduit que x est pair, donc de la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit alors que $3^{2k} - y^2 = 8$, ce qui implique que :

$$(3^k - y)(3^k + y) = 8.$$

Or, puisque y est supposé positif, on en déduit que $3^k - y \geq 1$ (sinon on aurait le produit d'un nombre inférieur ou égal à 0 avec un nombre positif qui serait égal à 8, ce qui est absurde). On en déduit que $3^k + y \leq 8$. Puisque $y > 0$, ceci implique que $3^k < 8$, c'est à dire $3^{\frac{x}{2}} < 8$.

3) L'unique valeur possible pour x est donc 2. Ceci impose $y = 1$. L'unique solution de notre système est donc $x = 2$ et $y = 1$.