Devoir Surveillé 10, pb1, commentaires

La présentation des copies et la rédaction était globalement bonne, au niveau de ce que l'on peut attendre d'une fin de première année. Le problème ne nécessitait pas spécialement beaucoup de connaissances sur le cours sur les espaces euclidiens mais demandaient à la fois de bien comprendre les concepts définis par l'énoncé et d'être assez rapide pour avoir le temps d'aborder les dernières questions. C'est le plus souvent ce qui a manqué plutôt que des erreurs de raisonnements. Dans le détail :

1) Très bien traitée en général.

2) *Deux exemples.*

   a) Très bien traitée en général (il fallait bien préciser la valeur de α).

   b) Les calculs ont souvent été très bien faits mais le dessin trop souvent oublié (on rappelle de bien lire les questions en entier !) / mal fait. On attendait juste un tracé dans $\mathbb{R}^2$ des vecteurs d'affixe $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ce qui est normalement à la portée de tous. Certains ont tracé un triangle équilatéral mais ce n'était pas ce qui était demandé...

3) *Quelques propriétés.*

   a) Il fallait ici utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Certains étudiants ont fait de longs raisonnements qui aboutissaient parfois en utilisant l'inégalité triangulaire. Certains étudiants ont utilisé la définition de l'angle entre deux vecteurs ce qui permettait de conclure rapidement. Attention cependant à cette erreur de raisonnement : ce n'est pas parce que l'on a $\arccos(x)$ que x est dans $[-1,1]$! Il faut d'abord montrer que x est dans $[-1,1]$ AVANT d'écrire $\arccos(x)$!

   b) Souvent bien traitée même si la justification de $||f_k|| \neq 0$ n'était parfois pas très claire... Attention également au fait que $||f_k|| = \sqrt{1+\beta^2}$ (ne pas oublier la racine).

   c) Il y avait ici une erreur d'énoncé (il faut $\alpha \in [0,1[$). Certains étudiants ont échangé les rôles de α et β ! Il fallait bien ici montrer que pour chaque α, il existe un β qui convient (à trouver en fonction de α par exemple) et non pas juste vérifier que l'expression trouvée à la question précédente appartient bien à $[0,1[$!

4)

   a) Un argument de dimension suffisait pour conclure.

   b) De nombreux étudiants ne suivent pas l'indication de l'énoncé, ce qui est assez surprenant ! Ceux qui ont suivi l'indication ont souvent réussi à conclure.

   c) Beaucoup d'étudiants ont réussi la première partie de la question (attention à bien justifier que $\lambda_1 \neq 0$). Pour la seconde partie, il suffisait à nouveau de calculer le produit scalaire entre le vecteur proposé et f_1 par exemple.

   d) Question parfois très bien traitée. Il fallait ici bien réutiliser la question 4 à la sous famille $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ mais il fallait bien en vérifier les hypothèses, à savoir que $n+1 > n$ (pour avoir la famille liée). On trouve alors deux valeurs de α différentes, ce qui est absurde.

5)

   a) Il fallait bien prendre deux vecteurs unitaires opposés et pas deux fois le même (on veut des vecteurs distincts !)

   b)

      i) Attention à bien justifier la dimension en rappelant que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires (en dimension finie). Pour la valeur du produit scalaire, attention à bien séparer les cas $i=j$ et $i \neq j$.

ii) Question plus difficile, parfois bien abordée mais jamais en entier. Il fallait ici raisonner par analyse/synthèse pour trouver des valeurs de β et γ qui peuvent convenir, et ensuite ne pas oublier de vérifier toutes les propriétés pour ces valeurs !