Année Scolaire 2017 – 2018

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2,3}$

DS N°6

Samedi 10/02/2018 (4h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : Polynômes de Tchebychev et équation différentielle

Le but du problème est de définir les polynômes de Tchebychev et de démontrer qu'ils vérifient pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation différentielle :

$$(1-X^2)\left(\frac{T_n'}{n}\right)^2 = 1 - T_n^2.$$

On essaiera ensuite d'établir une quasi-réciproque à cette propriété, c'est à dire que si $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ est un couple de polynômes qui vérifie l'équation (E) : $(1-X^2)Q^2 = 1-P^2$
avec $\deg(P) = n \geqslant 1$, alors P est presque (en un sens à définir) T_n et Q est presque $\frac{T_n'}{n}$.

Les différentes parties sont très largement indépendantes.

Partie I : Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Q1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

Q2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. *On pourra commencer par linéariser pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *l'expression* $\cos(a)\cos(b)$.

Q3) *Factorisation de* T_n *et une égalité.* On fixe dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. Vérifier que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\cos(\theta_k)$ est racine de T_n.

b) Factoriser le polynôme T_n.

c) Déterminer pour $m \in \mathbb{N}$ la valeur de $T_m(0)$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \cos(\theta_k)$.

Q4) *L'équation différentielle.*

a) Déduire de la question 2 que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin^2(\theta)(T_n'(\cos(\theta)))^2 = n^2(1-(T_n(\cos(\theta)))^2)$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \in [-1,1],\ (1-y^2)\left(\frac{T_n'(y)}{n}\right)^2 = 1 - T_n^2(y).$$

b) Montrer enfin qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1-X^2)\left(\frac{T_n'}{n}\right)^2 = 1 - T_n^2$.

Partie II : Détermination de Q

On considère dans cette partie $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ un couple de polynômes vérifiant l'équation (E) :

$$(1-X^2)Q^2 = 1 - P^2.$$

Q5) Déterminer P et Q dans le cas où P est constant.

Dans toute la suite, on notera $n = \deg(P)$ *et on supposera que* P *n'est pas constant, c'est à dire que* $n \in \mathbb{N}^*$.

Q6) Déterminer deg(Q) en fonction de n.

Q7) On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines complexes distinctes de Q. On note $k_1, \dots, k_r$ leur ordre de multiplicité.

a) Donner une relation liant $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $n-1$. Quelle inégalité a-t-on de plus entre r et $n-1$?

b) Vérifier que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i n'est pas racine de P.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est racine de $2(1-X^2)QQ'$ et racine de $-2XQ^2$ en donnant dans chacun des cas une minoration de la multiplicité. *On essaiera d'obtenir la meilleure minoration possible.*

d) En dérivant (E), montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est racine de P' et déterminer une minoration de sa multiplicité.

e) En déduire que $n - 1 \leqslant r$ puis que $r = n-1$.

f) En déduire que les racines de Q sont toutes simples et que ce sont également les racines simples de P'.

Q8) On note λ le coefficient dominant de P. Déterminer les coefficients dominants de Q et de P' en fonction de λ et en déduire que $Q = \pm \frac{P'}{n}$.

Partie III : Détermination de P

On cherche toujours dans cette partie les couples $(Q,P) \in \mathbb{R}[X]^2$ solution de (E). On pose encore $n = \deg(P)$ et on suppose comme dans la partie précédente $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que d'après la partie précédente, P est solution de l'équation (E_n) :

$$(1-X^2)\left(\frac{P'}{n}\right)^2 = 1 - P^2.$$

Pour $\theta \in [0,\pi]$, on pose $h(\theta) = P^2(\cos(\theta))$.

Q9) *Des propriétés de h.*

a) Justifier que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et pour $\theta \in [0,\pi]$, calculer $h'(\theta)$. Vérifier que :

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases}.$$

b) Démontrer que h' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0,\pi]$.

Q10) Montrer que $\forall\theta\in[0,\pi],\ h'(\theta)^2 = 4n^2h(\theta)(1-h(\theta))$.

Q11) En dérivant l'équation précédente, montrer que $\forall\theta\in[0,\pi],\ h''(\theta)+4n^2h(\theta) = 2n^2$.

Q12) Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire que $\forall\theta\in[0,\pi],\ h(\theta)=\cos^2(n\theta)$.

Q13) En déduire que $P = \pm T_n$.

Q14) Déterminer pour $n\geqslant 1$ fixé tous les couples de polynômes $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ avec $\deg(P)=n$ qui vérifient (E) et préciser le nombre de solutions.

Problème 2 : Analyse

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent toutes les deux le résultat de la partie I (Q3d).

Partie I : Dérivation sous le signe intégrale

Q1) Soit $f : I\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, soient x, x_0 dans I, démontrer que :

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)$$

Q2) On considère deux nombres complexes α et β avec $\mathrm{Re}(\alpha)\geqslant 0$.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ définie par $\forall x\geqslant 0,\ f(x)=\beta e^{-x\alpha}$.

a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour x positif, $|f''(x)|\leqslant|\alpha^2\beta|$.

b) Soient $x,\ x_0\in\mathbb{R}^+$, montrer que $\left|\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2}|\alpha^2\beta|(x-x_0)^2$ (on distinguera deux cas).

c) En déduire, pour x et x_0 dans $\mathbb{R}^+$, que $\left|\beta e^{-x\alpha}-\beta e^{-x_0\alpha}+(x-x_0)\alpha\beta e^{-x_0\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\alpha^2\beta|(x-x_0)^2$.

Q3) Soient $\alpha,\beta : [a;b]\to\mathbb{C}$ deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$, on suppose que $\forall t\in[a;b],\ \mathrm{Re}(\alpha(t))\geqslant 0$.

a) Justifier l'existence deux réels M_1 et M_2 tels que $\forall t\in[a;b],\ |\beta(t)|\leqslant M_1$ et $|\alpha(t)|\leqslant M_2$.

b) En déduire que pour $x,\ x_0$ dans $\mathbb{R}^+$ et $t\in[a;b]$, on a

$$\left|\beta(t)e^{-x\alpha(t)}-\beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}+(x-x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right|\leqslant\frac{1}{2}M_1M_2^2(x-x_0)^2.$$

c) En déduire que pour $x,\ x_0$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$\left|\int_a^b\beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t-\int_a^b\beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t+(x-x_0)\int_a^b\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{b-a}{2}M_1M_2^2(x-x_0)^2$$

d) Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $F(x)=\int_a^b\beta(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.

i) Montrer pour $x_0\neq x$ dans $\mathbb{R}^+$, que

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}+\int_a^b\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{b-a}{2}M_1M_2^2|x-x_0|$$

ii) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ F'(x)=-\int_a^b\beta(t)\alpha(t)e^{-x\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.

iii) Montrer que F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $F^{(n)}(x) = (-1)^n \displaystyle\int_a^b \beta(t)\alpha^n(t)e^{-x\alpha(t)}\,dt$, pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour $m > 0$, en remarquant que $F(x) = G(x+m)$ où $G(x) = \displaystyle\int_a^b \gamma(t)e^{-x\alpha(t)}\,dt$, avec $\gamma(t) = \beta(t)e^{m\alpha(t)}$, on montrerait qu'en fait F est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec la même formule pour $F^{(n)}(x)$. On admettra ce résultat pour la suite.

Partie II : Un premier exemple : intégrale de Gauss

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$, $G(x) = F(x^2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ *et* $H(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Q4) Justifier que ces trois fonctions sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Préciser les trois dérivées (F' et G' seront données sous forme intégrale).

Q5) a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = -2H'(x)H(x)$.

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = -H^2(x) + \frac{\pi}{4}$.

Q6) a) Pour x positif, montrer que $|G(x)| \leqslant e^{-x^2}$. En déduire la limite de G en $+\infty$.

b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (on attend une justification rigoureuse).

Partie III : Un autre exemple

$$\textit{Pour } x \in \mathbb{R}, \textit{ on pose } F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xe^{it}}\,dt.$$

Q7) a) Justifier que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}e^{-xe^{it}}\,dt$.

Q8) a) Calculer $F'(0)$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, démontrer que $ixF'(x) = e^{-ix} - e^{-x}$.

$$\textit{Pour } x \neq 0, \textit{ on pose } f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \textit{ et } g(x) = \frac{e^{-x} - \cos(x)}{x}.$$

Q9) Montrer que f et g admettent un développement limité d'ordre 1 en 0 (à préciser). Que peut-on en déduire quant à un prolongement éventuel en 0 de ces fonctions ?

Dans la suite, on suppose que f et g ont été prolongées par continuité en 0.

Q10) Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $F'(x) = -f(x) + ig(x)$.

b) En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + i\int_0^x g(t)\,dt$.

Q11) On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet), et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\,dt = 0$.

Q12) a) Déduire de la partie I, que les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

i) Écrire le développement limité d'ordre $2n$ en 0 de $f(x)$.

ii) En déduire la valeur de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (justifier).

– FIN –