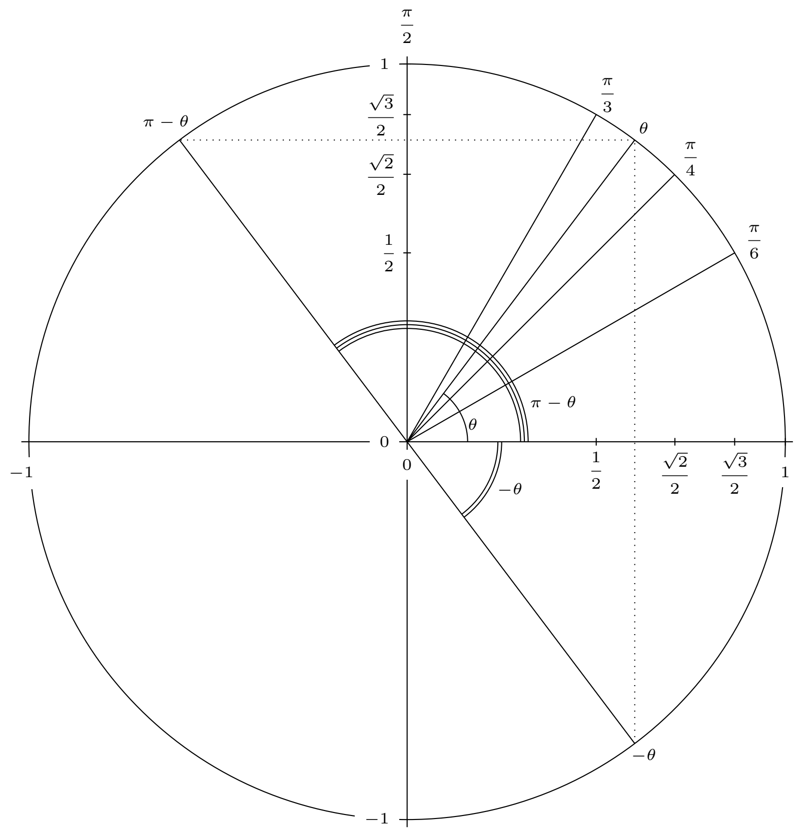
Trigonométrie

I. Représentation

Quelques valeurs à connaitre pour cos et sin :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



m Les valeurs que l'on peut confondre sont celles pour $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ (puisque celles pour $\frac{\pi}{4}$ sont égales). On peut retrouver les bonnes valeurs sur le cercle trigonométrique en remarquant que pour un angle de $\frac{\pi}{6}$, le cosinus est plus grand que le sinus et donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Proposition. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \equiv y \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \ [2\pi] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \equiv y \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \ [2\pi] \end{array} \right.$$

Verticalement sur le cercle trigonométrique, les valeurs du cosinus sont identiques. Horizontalement les valeurs du sinus sont identiques.

Exercice d'application 1. Trouver les $x \in \mathbb{R}$ tels que :

1) $\cos(3x) = -\dfrac{1}{2}$.
2) $\sin(2x) = \sin(5x)$.
3) $\sin(x) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice d'application 2. Quel est l'ensemble des $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\cos(x) \leq \sin(x)$?

a. $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

b. $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

c. $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

d. $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

II. Formulaire

II.1. À connaitre par coeur

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Théorème. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \end{cases}$.

II.2. La fonction tangente

Définition. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition. La fonction tangente est impaire et π-périodique. On a : $\begin{cases} \tan(0) = 0 \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$.

Proposition. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a+b \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

m Toutes les propriétés de la fonction tangente peuvent se retrouver à l'aide de la définition $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ et les formules sur le sinus et le cosinus.

Exercice d'application 3.

1) Exprimer $\tan(2x)$ et $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\tan(x)$.

2) Pour quelles valeurs de x ces formules sont-elles valables ?

Proposition. Soit $x \in \,]-\pi,\pi[$. On pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Alors :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

II.3. À retrouver

Proposition. Factorisation par l'arc moitié. $\forall a,b \in \mathbb{R},\ e^{ia}+e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right)$.

m Il faut se souvenir qu'il faut factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$ (donc par $e^{i\theta}$ où $\theta = \dfrac{a+b}{2}$ est la moyenne des angles a et b qui apparaissent dans e^{ia} et e^{ib}) plutôt que de la formule totale. Cette formule est utile pour factoriser des sommes d'exponentielles et pour retrouver les formules de trigonométrie qui suivent.

Exercice d'application 4. Soit $\theta \in [0,2\pi[$. En utilisant la factorisation par l'arc moitié, mettre $z = -1+e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique.

Proposition. Soient $p,q \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.
- $\sin(p)+\sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

m On peut également retrouver ses formules sans utiliser l'arc moitié en utilisant les formules pour $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$. Par exemple, pour retrouver la première formule qui fait apparaitre une somme de cosinus, on écrit les deux formules avec les cosinus

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{cases}.$$

Puisque l'on veut faire apparaitre une somme de deux cosinus, on a par somme $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$. Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire $\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases}$ (qui donne $a = \dfrac{p+q}{2}$ par somme et $b = \dfrac{p-q}{2}$ par différence) pour retrouver la formule.

Exercice d'application 5. Factoriser $\cos(5x) - \cos(8x)$ et en déduire les $x \in \mathbb{R}$ où cette quantité s'annule. *Vous pourrez vérifier votre résultat en résolvant à l'aide du cercle trigonométrique* $\cos(5x) = \cos(8x)$ *!*

III. Applications

III.1. Linéarisation

(m) Pour transformer un produit de cosinus/sinus en somme de cosinus/sinus, on écrit les cosinus et sinus sous forme exponentielle à l'aide des formules d'Euler $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, on développe l'expression obtenue et on réutilise les formules d'Euler dans l'autre sens pour refaire apparaitre des cosinus et sinus.

(m) Puisque l'expression de départ est réelle, l'expression finale l'est aussi ! Attention à ne pas oublier le « i » au dénominateur dans la formule $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exercice d'application 6. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes (à retrouver rapidement !) :

1) $\cos(a)\cos(b)$
2) $\cos(a)\sin(b)$
3) $\sin(a)\sin(b)$

(m) Linéariser une expression est très utile quand on veut la primitiver/l'intégrer (voir le chapitre d'intégration).

Exercice d'application 7. Linéariser les fonctions suivantes et en déterminer une primitive (c'est à dire une fonction dérivable dont la dérivée vaut la fonction proposée) :

1) $f : x \mapsto \cos^3(x)$.
2) $g : x \mapsto \sin(3x)\sin(x)\cos(2x)$.

III.2. Calcul de sommes

(m) Quand on a une somme avec des cosinus ou des sinus (comme $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$ par exemple), on écrit le cosinus (ou le sinus) comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une exponentielle complexe (on a par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k\right).$$

On a ainsi une somme géométrique que l'on sait calculer (attention à bien traiter à part le cas où la raison vaut 1). On peut également utiliser l'arc moitié à la fin au numérateur et au dénominateur pour obtenir une expression simple et calculer la partie réelle (ou imaginaire) de la somme. *Ce calcul servira souvent en optique lors de calculs d'interférences.*

III.3. Factorisation de $a\cos(t) + b\sin(t)$

(m) Pour écrire $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$, il faut se souvenir que l'on a $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ (qui correspond en physique à l'amplitude du signal). On obtient alors le déphasage φ à l'aide des méthodes vues en physique et des fonctions trigonométriques réciproques (voir le chapitre sur les fonctions usuelles).

III.4. Multiplication des arcs

(m) Pour transformer une expression avec du $\cos(n\theta)$ ou du $\sin(n\theta)$ uniquement en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$, on utilise la formule de Moivre, puis la formule du binôme faire apparaitre du cosinus et du sinus. Ainsi par exemple :

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(\theta)(i\sin(\theta))^{n-k}\right).
\end{aligned}$$

Exercice d'application 8. Exprimer $\sin(3\theta)$ uniquement en fonction de $\sin(\theta)$.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1. On a par lecture sur le cercle trigonométrique $\cos(3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (puisque $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$). On en déduit que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{array}{rl} & 3x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ \Leftrightarrow & x \equiv \frac{2\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]. \end{array}$$

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} \sin(2x) = \sin(5x) & \Leftrightarrow & 2x \equiv 5x\ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \pi - 5x\ [2\pi] \\ & \Leftrightarrow & 3x \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } 7x \equiv \pi\ [2\pi] \\ & \Leftrightarrow & x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{7}\ \left[\frac{2\pi}{7}\right] \end{array}$$

3. Sur le cercle trigonométrique, on voit que les solutions de $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont les $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. On en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

Exercice d'application 2. réponse d. (faire un cercle trigonométrique, les solutions situées au-dessus de la droite $y = x$)

Exercice d'application 3.

1. En utilisant la formule pour $\tan(a + b)$ en $a = b = x$, on a $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$. Pour la formule avec le $\frac{\pi}{2}$, on repasse avec la définition de la tangente en fonction des sinus et cosinus :

$$\begin{array}{rcl} \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & = & \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \\ & = & \frac{0 \times \sin(x) + 1 \times \cos(x)}{0 \times \cos(x) - 0 \times \sin(x)} \\ & = & \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} \\ & = & -\frac{1}{\tan(x)}. \end{array}$$

2. Pour la première formule, on doit voir $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $2x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ pour que $\tan(x)$ et $\tan(2x)$ existent. On doit donc avoir $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

   Pour la seconde formule, on doit avoir bien sûr $\tan(x)$ bien définie mais également qui ne s'annule pas. On en déduit qu'elle est valable dès que $x \not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ (donc quand $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice d'application 4. Puisque $-1 = e^{i\pi}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} z & = & e^{i\pi} + e^{i\theta} \\ & = & e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}\right) \\ & = & e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)} \times 2\cos\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right). \end{array}$$

Puisque $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $\dfrac{\theta - \pi}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a donc $\cos\left(\dfrac{\theta-\pi}{2}\right) \geq 0$. Ceci entraine que :

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right) \text{ et pour } \theta \neq 0,\ \operatorname{Arg}(z) = \left(\frac{\pi+\theta}{2}\right).$$

On rappelle que 0 n'a pas d'argument !

Exercice d'application 5. On a avec l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
\cos(5x) - \cos(8x) &= \operatorname{Re}\left(e^{5ix} - e^{8ix}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{\frac{13ix}{2}}\left(e^{-\frac{3ix}{2}} - e^{\frac{3ix}{2}}\right)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{\frac{13ix}{2}} \times (-2i\sin\left(\frac{3x}{2}\right))\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{13x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que cette quantité s'annule pour :

$$\frac{13x}{2} \equiv 0\ [\pi] \text{ ou } \frac{3x}{2} \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \ \left[\frac{2\pi}{13}\right] \text{ ou } x \equiv 0 \ \left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

Exercice d'application 6. On utilise à chaque fois les formules d'Euler :

1)

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} + e^{i(-a-b)}}{4} \\
&= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.
\end{aligned}$$

2) De la même manière :

$$\begin{aligned}
\cos(a)\sin(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} - e^{i(-a-b)}}{4i} \\
&= \frac{\sin(a+b) + \sin(b-a)}{2}.
\end{aligned}$$

3) De même :

$$\begin{aligned}
\sin(a)\sin(b) &= \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \times \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{i(b-a)} + e^{i(-a-b)}}{-4} \\
&= \frac{-\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 7.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{2} \\
&= \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}.
\end{aligned}$$

On en déduit que sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \cos^3(t)dt = \frac{\sin(3x)}{12}+\frac{3\sin(x)}{4}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin(3x)\sin(x)\cos(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{4ix}-e^{2ix}-e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{e^{6ix}+e^{2ix}-e^{4ix}-1-1-e^{-4ix}+e^{-2ix}+e^{-6ix}}{8} \\
&= -\frac{\cos(6x)-\cos(4x)+\cos(2x)-1}{4}.
\end{aligned}$$

On a donc sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x g(t)dt = -\frac{\sin(6x)}{24}+\frac{\sin(4x)}{16}-\frac{\sin(2x)}{8}+\frac{x}{4}$.

Exercice d'application 8. On a :

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3\right) \\
&= \mathrm{Im}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^3(\theta)+3\cos^2(\theta)i\sin(\theta)+3\cos(\theta)(i\sin(\theta))^2+(i\sin(\theta))^3\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)\right) \\
&= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta) \\
&= 3(1-\sin^2(\theta))\sin(\theta)-\sin^3(\theta) \\
&= 3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta).
\end{aligned}$$