Devoir Surveillé 7

Je vous rappelle les consignes :

- Écrire lisiblement sur des feuilles grandes et doubles, au stylo ou à l'encre bleu foncé ou noir et **souligner ou encadrer ses résultats**. On accordera de l'importance à la présentation.
- La calculatrice est interdite.
- Vous avez le droit de sauter des questions et d'admettre les résultats correspondants pour traiter les questions suivantes.
- Les deux problèmes sont indépendants et vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous désirez. Il est conseillé de parcourir le sujet dans sa globalité avant de commencer.
- La durée de ce devoir est de **3 heures 30**.

PROBLÈME
Approximation du logarithme (environ 40min)

Le but de ce problème est de voir comment calculer une valeur approchée de $\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.

1) Justifier que $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n f_n(t)$.

2) En déduire que $\forall x \in [0,1],\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x f_n(t)dt$.

3) Vérifier que pour $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| \leq t^n$ et en déduire que :

$$\forall x \in [0,1],\ \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4) En déduire que $\forall x \in [0,1],\ \ln(1+x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

On peut donc approcher les valeurs de $\ln(1+x)$ *pour* $x \in [0,1]$ *en calculant* $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

5) Justifier que cette approximation est beaucoup plus précise pour $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ que pour $\ln(2)$. Pour environ quelle valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $S_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ proche de $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ à 10^{-2} près ? Même question pour l'approximation de $\ln(2)$ par $S_n(1)$. *On justifiera !*

6) Soit $X \geq 2$. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq X^{\frac{1}{N}} < 2$ et déterminer la plus petite valeur de N vérifiant ceci. *On exprimera N à l'aide d'une partie entière dépendant de* $\ln(X)$ *et* $\ln(2)$.

7) Comment approcheriez-vous $\ln(X)$ si $2 \leq X$? Comment approcheriez-vous $\ln(X)$ si $X \in]0,1[$?

PROBLÈME
Autour des matrices nilpotentes (environ 2h40)

Définition et notations :

- On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est nilpotente si il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^N = 0_n$.
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ la trace de M. *La trace de M est la somme des coefficients diagonaux de M.*

La partie I se concentre sur l'étude d'exemples et énonce en fin de partie deux résultats utilisés par la suite. Les parties II et III sont indépendantes entre elles.

Partie I. Propriétés et exemples.

1) *Définition de l'indice de nilpotence.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.
   a) Justifier que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = 0_n\}$ admet un minimum.
   b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$N \text{ est le minimum de } \{k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = 0_n\} \Leftrightarrow \left(A^N = 0_n \text{ et } A^{N-1} \neq 0_n\right).$$

Cet entier N est appelé l'indice de nilpotence de A.

2) *Exemples.*
   a) Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes et déterminer leurs indices de nilpotence.
   b) Montrer que $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes et déterminer leurs indices de nilpotence.
   c) Montrer que $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

3) *Somme et produit.* Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices nilpotentes d'indices de nilpotence respectif N_1 et N_2. On suppose que A et B commutent.
   a) Montrer que $A \times B$ est nilpotente.
   b) Montrer que $A + B$ est nilpotente.
   c) Montrer que ces deux résultats sont faux sans l'hypothèse de commutativité de A et B en explicitant des contre exemples.

On admet alors les deux résultats suivants qui au vu des exemples précédents ne devraient pas vous surprendre et qui seront utiles dans les parties suivantes :

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $A^n = 0_n$ (autrement dit l'indice de nilpotence de A est inférieur ou égal à n la taille de la matrice).

- Si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux nuls, alors A est nilpotente.

Partie II. Racines carrées de matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A admet une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

4) *Racines carrées de matrices nilpotentes.*

a) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

b) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a une racine carrée. *On cherchera une solution « évidente ».*

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente non nulle d'indice $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

i) Justifier que B est nilpotente. Que peut-on dire de l'indice de nilpotence de B ?

ii) En utilisant la première partie, justifier que $N \leq \dfrac{n+1}{2}$. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

5) *Racines carrées de matrices de la forme $I_n + A$ avec A nilpotente.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Donner la forme du développement limité à l'ordre $N-1$ en 0 de $\sqrt{1+x}$.

On a donc $\sqrt{1+x} = P(x) + o(x^{N-1})$ où $P(X) \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$. On pose alors $Q(X) = (P(X))^2$.

b) Justifier que $Q(x) = 1 + x + o(x^{N-1})$. En déduire la valeur des coefficients de Q associés aux X^k pour $k \in [\![0, N-1]\!]$.

c) En déduire que $B = P(A)$ est une racine carrée de $I_n + A$.

d) Déterminer à l'aide de la méthode précédente (et uniquement à l'aide de cette méthode) une racine carrée de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie III. Une caractérisation des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de cette partie est de montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(A^N) = 0$. *La trace d'une matrice est définie en tout début d'énoncé.*

On admet dans cette partie (ce que vous démontrerez l'an prochain) qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire telles que $P^{-1}AP = T$. Pour fixer les notations, on notera T sous la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \text{ sont les coefficients diagonaux de } T.$$

6) *Des résultats utiles.*

a) Montrer par récurrence que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ T^N = P^{-1}A^N P$.

b) En déduire que A est nilpotente si et seulement si T est nilpotente.

c) Montrer que T est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$. *On pourra étudier les coefficients diagonaux de T^N.*

d) Montrer que si $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{Tr}(B \times C) = \mathrm{Tr}(C \times B)$.

e) En déduire que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(T^N) = \mathrm{Tr}(A^N)$.

f) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(T^N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N$.

7) En déduire que démontrer le résultat énoncé en début de partie revient à montrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k = 0 \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N = 0$$

et démontrer le sens direct.

8) *Sens indirect.* Réciproquement, on suppose que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^N = 0$ et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $k_1 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{k_1} \neq 0$.

a) Justifier qu'il existe $k_2 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{k_2} \neq 0$ et $\lambda_{k_2} \neq \lambda_{k_1}$.

On s'intéresse alors aux coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ qui sont non nuls (il y en a au moins deux distincts d'après la question précédente). Quitte à les renommer et les renuméroter, on considère que les valeurs distinctes non nulles qui apparaissent sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec $p \in [\![2,n]\!]$ où λ_1 apparait $a_1 \in \mathbb{N}^*$ fois, λ_2 apparait $a_2 \in \mathbb{N}^*$ fois, etc.

b) On pose $V_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ la matrice définie par $\forall i, j \in [\![1,p]\!],\ (V_p)_{i,j} = \lambda_j^i$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$. Calculer les coefficients de $V_p \times X$ et vérifier que $V_p X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) *Inversibilité de V_p.* On va montrer par récurrence sur p que la matrice V_p est inversible.

i) Montrer que la matrice $V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$ où λ_1, λ_2 sont non nuls et distincts est inversible.

ii) On suppose que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts et non nuls, alors V_p est inversible. On fixe alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ deux à deux distincts et non nuls et on considère V_{p+1}. Écrire graphiquement la matrice obtenue en partant de V_{p+1} et en effectuant les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes suivantes :

- $L_{p+1} \leftarrow L_{p+1} - \lambda_1 L_p$
- $L_p \leftarrow L_p - \lambda_1 L_{p-1}$
- $\ldots$
- $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1$
- $\forall j \in [\![2, p+1]\!],\ C_j \leftarrow \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_1} C_j$.

iii) En déduire que V_{p+1} est inversible.

d) Montrer que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et conclure sur la preuve du sens indirect.