TRAVAUX DIRIGÉS ECT5
Machines thermiques

Niveau 1

Exercice 1. Étude d'un congélateur

Un congélateur est placé dans une pièce à la température de 20°C (supposée constante). Pour maintenir l'intérieur de ce congélateur à la température constante de $-19\ °\text{C}$, il est nécessaire d'en extraire, par transfert thermique, 400 kJ par heure. Cette opération est supposée être réalisée de manière réversible.

1. Calculer le transfert thermique fourni à la pièce en une heure par l'agent thermique.
2. Calculer la puissance à fournir par heure pour réaliser cette opération.
3. Définir puis calculer l'efficacité de cette machine frigorifique.

Niveau 2

*Exercice 2. Perte de performance d'un congélateur

Un congélateur neuf a un coefficient d'efficacité $e = 2{,}0$. Un appareil dans lequel on a laissé s'accumuler une couche de glace a une efficacité réduite. On suppose que l'effet de la couche de glace est de multiplier par 2 l'entropie créée pour un même transfert thermique pris à la source froide. L'intérieur du congélateur est à $-20\ °\text{C}$ et la pièce dans laquelle il se trouve à 19°C.

1. Calculer numériquement α, rapport entre l'efficacité du congélateur neuf et l'efficacité $e_{C,frigo}$ d'une machine réversible fonctionnant avec les mêmes sources.
2. Pour le congélateur neuf, exprimer le rapport $\dfrac{1}{e}$ en fonction notamment de $e_{C,frigo}$ et de l'entropie créée S^{cr}.
3. En déduire l'efficacité réduite e' pour le congélateur usagé. Montrer que le rapport devient $\alpha' = \dfrac{\alpha}{2-\alpha}$. Calculer α' et e'.

Exercice 3. Moteur de Stirling

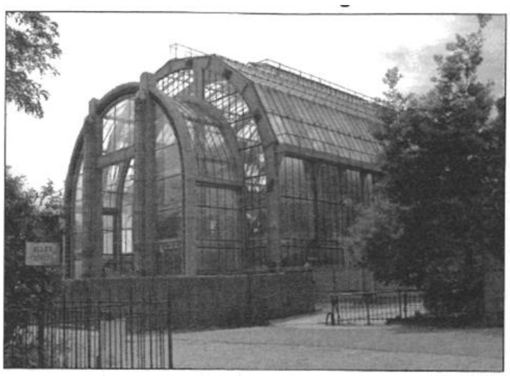
Un moteur fonctionne entre une source chaude de température $T_C = 450\ \text{K}$ et une source froide de température $T_F = 300\ \text{K}$. L'agent thermique, constitué de n moles de gaz parfait de coefficient $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = 1{,}40$, décrit de manière quasi-statique le cycle suivant :

- AB : compression à la température T_F de la source froide ;
- CD : détente à la température T_C de la source chaude ;
- BC et DA : isochores respectivement à V_1 et V_2.

On donne $R = 8{,}31\ \text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ et $\alpha = \dfrac{V_2}{V_1} = 2{,}00$ (taux de compression).

1. Représenter le cycle de ce moteur dans le diagramme de Clapeyron.
2. Identifier les étapes non réversibles.
3. Calculer les différents transferts thermiques reçus par le gaz au cours du cycle.
4. Définir puis exprimer le rendement η du moteur. Le calculer.
5. Afin d'améliorer le rendement du moteur, on utilise un dispositif qui permet d'éviter les échanges thermiques avec l'extérieur en dehors des deux phases isothermes. Calculer le nouveau rendement η' du moteur. Commentaires.

*Exercice 4. Chauffage d'une serre



On souhaite maintenir la température d'une serre à la valeur constante $T_1 = 293\ \text{K}$. L'air extérieur est à la température $T_2 = 283\ \text{K}$. Dans ce but, on utilise une chaudière à la température $T_3 = 600\ \text{K}$ capable de fournir un transfert thermique $Q_3 > 0$.

On décide de ne pas utiliser directement la chaudière pour chauffer la serre mais d'adopter le dispositif suivant : la chaudière fournit le transfert thermique Q_3 à l'agent thermique d'un moteur réversible fonctionnant entre la chaudière à T_3 et l'air extérieur à T_2. Le travail récupéré est utilisé pour actionner une pompe à chaleur réversible fonctionnant entre l'air extérieur à T_2 et l'intérieur de la serre à T_1. On note Q_1 le transfert thermique algébrique de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe.

1. Reporter sur un schéma de principe les différents échanges énergétiques algébriques mis en jeu lors du chauffage.
2. Exprimer le travail algébrique W reçu par le moteur en fonction de Q_3, T_2 et T_3.
3. Exprimer le transfert thermique algébrique Q_1 de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe en fonction de W, T_1 et T_2.
4. Définir puis exprimer l'efficacité e de l'ensemble du dispositif de chauffage en fonction de T_1, T_2 et T_3.

Exercice 5. Centrale nucléaire

Une centrale nucléaire est une machine ditherme fournissant une puissance $P = 1{,}00\ \text{GW}$. Elle fonctionne entre une source chaude (eau du circuit primaire) de température $T_C = 579\text{ K}$ et une source froide (eau d'un fleuve) de température $T_F = 283\text{ K}$.

1. Calculer le rendement η de la centrale, sachant qu'il est égal à 60 % du rendement théorique maximal prévu par le théorème de Carnot.
2. Exprimer la quantité de chaleur $\dot{Q}_C$ par unité de temps de la source chaude vers l'agent thermique en fonction de η et P. En déduire la quantité de chaleur $\dot{Q}_F$ par unité de temps de la source froide vers l'agent thermique. La calculer.
3. L'eau du fleuve servant de source froide a un débit volumique $D_V = 300\text{ m}^3.\text{s}^{-1}$. Calculer la variation de température ΔT de l'eau du fleuve en contact à chaque instant avec l'agent thermique. On donne : $\rho = 1{,}00.10^3\text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique et $c = 4{,}18.10^3\text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide.

*Exercice 6. Pompe à chaleur avec un gaz parfait

Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant. L'air pris dans l'état A de température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique quasi-statique jusqu'au point B où il atteint la pression P_1. L'air est ensuite refroidi à pression constante et atteint la température finale de la source chaude T_1 correspondant à l'état C. L'air est encore refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique quasi-statique pour atteindre l'état D de pression P_0. II se réchauffe enfin à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial. L'air est considéré comme un gaz parfait de rapport des capacités thermiques $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = 1{,}4$ indépendant de la température. On pose $\beta = 1 - \dfrac{1}{\gamma}$ et $a = \dfrac{P_1}{P_0}$.

On prendra $T_0 = 283\text{ K}$, $T_1 = 298\text{ K}$, $a = 5$ et $R = 8{,}31\text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1. Représenter le cycle parcouru par le gaz dans un diagramme (P, V).
2. Rappeler les conditions nécessaires pour assurer la validité des formules de Laplace. Donner la formule de Laplace relative à la pression et à la température.
3. En déduire l'expression des températures T_B et T_D des états B et D en fonction de T_0, T_1, a et β. Préciser leurs valeurs numériques.
4. Exprimer l'efficacité e de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques.
5. En déduire l'expression de e en fonction de a et β. Donner sa valeur numérique.
6. Quelles doivent être les transformations du gaz si on fait fonctionner la pompe à chaleur suivant un cycle de Carnot réversible entre les températures T_0 et T_1 ?

7. Établir l'expression de son efficacité de Carnot e_C. Donner sa valeur numérique.
8. Comparer e et e_C. Proposer une explication à ce résultat.
9. Déterminer l'expression de l'entropie créée S_c pour une mole d'air au cours du cycle de Joule en fonction de R, β et $x = a^{\beta}\dfrac{T_0}{T_1}$
10. Étudier le signe de S_c en fonction de x. Était-ce prévisible ?
11. Calculer sa valeur ici.
12. Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques s'élèvent à $Q_f = 20$ kW , calculer la puissance du couple compresseur – turbine qui permet de maintenir la température de la maison constante.

SOLUTIONS

Exercice 1. Étude d'un congélateur

1. $\dot{Q}_C = -461$ kJ/h 2. $P = 17$ W 3. $e = 6{,}6 = e_{C,frigo}$

*Exercice 2. Perte de performance d'un congélateur

1. Efficacité d'une machine frigorifique fonctionnant de façon réversible (cf. démonstration du cours) : $\boxed{e_{C,frigo} = \dfrac{T_F}{T_C - T_F} = 6{,}5}$ avec $T_F = 253$ K et $T_C = 292$ K

➢ <u>Rapport α</u> : $\boxed{\alpha = \dfrac{e}{e_{C,frigo}} = 0{,}31}$

2. <u>1^{er} principe</u> : $\Delta U = W + Q_C + Q_F = 0$ soit $W = -Q_C - Q_F$

➢ <u>Efficacité frigorifique d'un congélateur neuf</u> :

$$e = \frac{Q_F}{W} = -\frac{Q_F}{Q_C + Q_F} = -\frac{1}{1 + \dfrac{Q_C}{Q_F}} \quad \text{soit} \quad 1 + \frac{Q_C}{Q_F} = -\frac{1}{e}$$

➢ <u>2nd principe pour un fonctionnement non réversible</u> :

$$\Delta S = S^{ech} + S^{cr} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S^{cr} = 0$$

On multiplie l'égalité précédente par $\dfrac{T_C}{Q_F}$: $\dfrac{Q_C}{Q_F} + \dfrac{T_C}{T_F} + \dfrac{T_C S^{cr}}{Q_F} = 0$

$$1 + \frac{Q_C}{Q_F} = 1 - \frac{T_C}{T_F} - \frac{T_C S^{cr}}{Q_F} \Leftrightarrow 1 + \frac{Q_C}{Q_F} = \frac{T_F - T_C}{T_F} - \frac{T_C S^{cr}}{Q_F}$$

$$-\frac{1}{e} = -\frac{1}{e_{C,frigo}} - \frac{T_C S^{cr}}{Q_F} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{e} = \frac{1}{e_{C,frigo}} + \frac{T_C S^{cr}}{Q_F}}$$

3. <u>Congélateur usagé d'efficacité e'</u> :

$$\frac{1}{e'} = \frac{1}{e_{C,frigo}} + 2\frac{T_C S^{cr}}{Q_F} = \frac{1}{e_{C,frigo}} + 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e_{C,frigo}}\right) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e_{C,frigo}} = \frac{2e_{C,frigo} - e}{e_{C,frigo}e}$$

$$\boxed{e' = \frac{e_{C,frigo}e}{2e_{C,frigo} - e} = 1{,}2}$$

- Coefficient α' : $\boxed{\alpha' = \frac{e'}{e_{C,frigo}} = \frac{e}{2e_{C,frigo} - e} = \frac{\alpha}{2-\alpha} = 0{,}18}$

Exercice 3. Moteur de Stirling

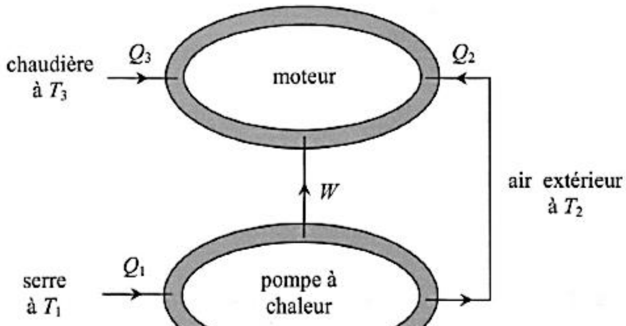
3. $Q_{B\to C} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_F) > 0$ $Q_{D\to A} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_C) = -Q_{B\to C} < 0$

$Q_{A\to B} = -nRT_F \ln\alpha < 0$ $Q_{C\to D} = -W_{C\to D} = nRT_C \ln\alpha > 0$

4. $\eta = \frac{(\gamma-1)(T_C - T_F)\ln\alpha}{T_C - T_F + (\gamma-1)T_C\ln\alpha} = 15{,}1\%$ 5. $\eta' = 1 - \frac{T_F}{T_C} = \eta_C = 33{,}3\%$

*Exercice 4. Chauffage d'une serre

1. Schéma de principe



2. Système= agent thermique du <u>moteur</u>, décrivant un cycle <u>réversible</u>

   1er principe :

   $W + Q_2 + Q_3 = 0 \Leftrightarrow W = -Q_2 - Q_3$

   2nd principe :

   $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0 \Leftrightarrow Q_2 = -T_2\frac{Q_3}{T_3}$

   Travail échangé par le moteur : $W = T_2\frac{Q_3}{T_3} - Q_3 \Leftrightarrow \boxed{W = -Q_3\left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) < 0}$: travail <u>fourni</u> par le moteur

3. Système= agent thermique de la <u>pompe à chaleur</u>, décrivant un cycle <u>réversible</u>

   1er principe (**<u>Attention</u>** : il faut considérer les transferts énergétiques **<u>du point de vue du système étudié</u>** !) : $-W + Q_1 - Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_1 = W + Q_2$

   2nd principe : $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \Leftrightarrow Q_2 = T_2\frac{Q_1}{T_1}$

   Transfert thermique échangé par la pompe à chaleur avec la serre :

   $$Q_1 = W + T_2\frac{Q_1}{T_1} \Leftrightarrow Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = W \Leftrightarrow \boxed{Q_1 = \frac{W}{1 - \frac{T_2}{T_1}} < 0}$$

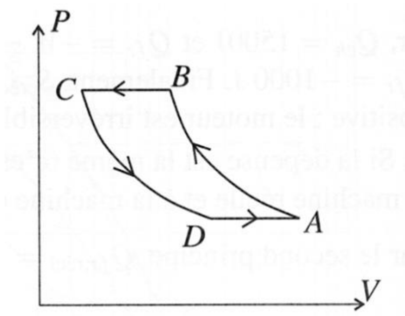
   Transfert thermique <u>fourni</u> par la pompe à chaleur à la serre.

4. Efficacité $e = \dfrac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}} = \dfrac{-Q_1}{Q_3} > 0$ et $e = \dfrac{W}{1-\dfrac{T_2}{T_1}} \dfrac{1-\dfrac{T_2}{T_3}}{W} \Leftrightarrow \boxed{e = \dfrac{1-\dfrac{T_2}{T_3}}{1-\dfrac{T_2}{T_1}} = 15{,}5}$

Exercice 5. Centrale nucléaire

1. $\eta = 30{,}7\%$ 2. $\dot{Q}_C = \dfrac{P}{\eta}$ $\dot{Q}_F = P\left(1-\dfrac{1}{\eta}\right) = -2{,}26$ GW 3. $\Delta T = -\dfrac{\dot{Q}_F}{\rho c D_V} = 1{,}80$ K

*Exercice 6. Pompe à chaleur avec un gaz parfait



1. Système = air = GP dans une pompe à chaleur
   AB : compression adiabatique quasi-statique : hyperbole
   BC : refroidissement isobare : droite horizontale telle que $V_C < V_B$ ($PV = nRT$ et T diminue)
   CD : détente adiabatique quasi-statique : hyperbole
   DA : chauffage isobare : droite horizontale telle que $V_A > V_D$ ($PV = nRT$ et T augmente)
   Cycle décrit dans le sens trigonométrique : récepteur thermique
2. Loi de Laplace valable pour un gaz parfait, subissant une transformation adiabatique réversible, avec $\gamma = cste$: $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cste$
3. Transformations AB et CD : adiabatiques quasi-statiques donc adiabatiques réversibles : on applique la loi de Laplace

   Pour AB : $P_0^{1-\gamma}T_0^{\gamma} = P_1^{1-\gamma}T_B^{\gamma} \Leftrightarrow T_B = T_0\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow \boxed{T_B = T_0 a^{\beta} = 448 \text{ K}}$

   Pour CD : $P_0^{1-\gamma}T_D^{\gamma} = P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} \Leftrightarrow T_D = T_1\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Leftrightarrow \boxed{T_D = T_1 a^{-\beta} = 188 \text{ K}}$
4. Efficacité $e = \dfrac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}} = \dfrac{-Q_{BC}}{W} > 0$

   1er principe sur un cycle : $-W = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = Q_{BC} + Q_{DA}$

   $$\boxed{e = \dfrac{Q_{BC}}{Q_{BC} + Q_{DA}}}$$
5. BC : refroidissement isobare : $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P\left(T_C - T_B\right) = C_P\left(T_1 - T_B\right)$

   DA : chauffage isobare : $Q_{DA} = \Delta H_{DA} = C_P\left(T_A - T_D\right) = C_P\left(T_0 - T_D\right)$

Efficacité : $e=\dfrac{1}{1+\dfrac{Q_{DA}}{Q_{BC}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{T_0-T_D}{T_1-T_B}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{T_0-T_1a^{-\beta}}{T_1-T_0a^{\beta}}}=\dfrac{1}{1-a^{-\beta}\dfrac{T_1-T_0a^{\beta}}{T_1-T_0a^{\beta}}}$

$$\boxed{e=\frac{1}{1-a^{-\beta}}=2{,}71}$$

6. Cycle de Carnot constitué de 2 transformations adiabatiques réversibles (*AB* et *CD*) et de 2 isothermes à T_0 (*DA*, contact avec la source froide) et T_1 (*BC*, contact avec la source chaude).
7. Efficacité $e_C=\dfrac{Q_{BC}}{Q_{BC}+Q_{DA}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{Q_{DA}}{Q_{BC}}}$

   2nd principe pour un cycle réversible : $\dfrac{Q_{BC}}{T_1}+\dfrac{Q_{DA}}{T_0}=0\Rightarrow\dfrac{Q_{DA}}{Q_{BC}}=-\dfrac{T_0}{T_1}$

$$\boxed{e_C=\frac{1}{1-\dfrac{T_0}{T_1}}=\frac{T_1}{T_1-T_0}=19{,}9}$$

8. $\boxed{e<e_C}$: le cycle n'est pas décrit de façon réversible. Pour les transformations *BC* et *DA*, le gaz est mis en contact avec les sources chaude et froide, alors que sa température est différente de celle de la source : irréversibilité thermique.
9. Sur un cycle : $\Delta S=S^{cr}+S^{éch}=0\Leftrightarrow S^{cr}=-S^{éch}$

   Entropie échangée : $S^{éch}=S^{éch}_{AB}+S^{éch}_{BC}+S^{éch}_{CD}+S^{éch}_{DA}=\dfrac{Q_{BC}}{T_1}+\dfrac{Q_{DA}}{T_0}$ car $S^{éch}_{AB}=0$ et $S^{éch}_{CD}=0$ (transformations adiabatiques)

   Entropie créée : $S^{cr}=-\dfrac{Q_{BC}}{T_1}-\dfrac{Q_{DA}}{T_0}=-C_P\left(\dfrac{T_1-T_B}{T_1}\right)-C_P\left(\dfrac{T_0-T_D}{T_0}\right)$

   $S^{cr}=-\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}\left(1-\dfrac{T_0a^{\beta}}{T_1}\right)-\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}\left(1-\dfrac{T_1a^{-\beta}}{T_0}\right)=-\dfrac{R}{\beta}\left(2-x-\dfrac{1}{x}\right)$ soit $\boxed{S^{cr}=\dfrac{R}{\beta}\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)}$
10. $\boxed{S^{cr}=\dfrac{R}{\beta}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>0}$: le cycle est décrit de façon irréversible (cf. question 8)
11. A.N. : $x=1{,}50$ et $\boxed{S^{cr}=4{,}91\ \text{J.K}^{-1}}$ (pour $n=1$ mol)
12. En régime permanent : $e=\dfrac{Q_f}{\mathcal{P}}$ soit $\boxed{\mathcal{P}=\dfrac{Q_f}{e}=7{,}4\ \text{kW}}$