13. Structures algébriques usuelles

Exercice 1. (m) Soit $E = [0,1]$. On définit la loi $*$ sur E par $\forall x, y \in E,\ x * y = x + y - xy$.

1) Montrer que $*$ est une lci commutative et associative.

2) Montrer que $*$ possède un élément neutre. Quels sont les éléments de E inversibles pour $*$?

Exercice 2. (m) Soit $*$ une lci associative sur E. Un élément $x \in E$ est dit idempotent si $x * x = x$.

1) Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x * y$ est idempotent.

2) Montrer que si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 3. (c) Soit $(G, *)$ est un groupe. On pose $Z(G) = \{x \in G \ /\ \forall y \in G,\ x * y = y * x\}$. On dit que $Z(G)$ est le centre de G. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 4. (m)/ (i) Montrer que $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. A-t-on $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$?

Exercice 5. (m) Soit $(G, *)$ un groupe et H un sous-groupe de G. On fixe $a \in G$.

1) Montrer que $aHa^{-1} = \{a * x * a^{-1},\ x \in H\}$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

2) Montrer que $aH = \{a * x,\ x \in H\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $a \in H$.

Exercice 6. (m) Soit $(G, *)$ un groupe de neutre e tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 7. (m) Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi $\forall (x, y), (x', y') \in G,\ (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$.

1) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.

2) Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 8. (m) Soit $G =]-1, 1[$ muni de la loi $\forall x, y \in G,\ x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 9. (i) **Union de groupes.** Soit $(G, *)$ un groupe et G_1 et G_2 deux sous-groupes de G. Montrer que $G_1 \cup G_2$ et un sous-groupe de G si et seulement si $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Exercice 10. (i) Soit $(G, *)$ un groupe (à priori non commutatif) dont l'élément neutre est noté e. On considère $a, b \in G$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(a * b)^n = e$. Montrer que $(b * a)^n = e$.

Exercice 11. (m) Vérifier que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*, \times) & \to & (\mathbb{R}^*, \times) \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est un morphisme de groupe et déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 12. (i) Soit φ un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dérivable. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^{\alpha x}$.

Exercice 13. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $n\mathbb{Z} = \{nk,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe pour la loi $+$ et qu'il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 14. (i) Montrer que $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^2,+)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 15. (m) On dit qu'un groupe $(G,*)$ vérifie la propriété (D) si $\forall y \in G,\ \exists x \in G \ / \ y = x * x$.

1) Vérifier que $(\mathbb{Z},+)$ ne vérifie pas (D) alors que $(\mathbb{Q},+)$ la vérifie.

2) Montrer que si $(G_1,*_1)$ et $(G_2,*_2)$ sont isomorphes et que G_1 vérifie la propriété (D), alors G_2 la vérifie également. En déduire que $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$ ne sont pas isomorphes.

3) *Applications.*
   a) Montrer que $(\mathbb{R}^*,\times)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ ne sont pas isomorphes.
   b) Montrer que $(\mathbb{R}^*,\times)$ et $(\mathbb{C}^*,\ \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 16. (i) Montrer que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est isomorphe au groupe produit $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U})$ (muni des lois produits sur chacun des groupes).

Exercice 17. (m) Soit $(G,*)$ un groupe et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est bien définie et bijective.

2) Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $(G,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 18. (m) On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{U}_n,\times)$ est un groupe.

1) Montrer que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_6$ sont isomorphes.

2) Montrer que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_4$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 19. (m)/ (*) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme d'anneau.

1) Montrer que $\forall x \geq 0,\ \varphi(x) \geq 0$ et en déduire que φ est croissante.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ \varphi(x) = x$.

3) Déterminer φ.

Exercice 20. (i) Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que $\forall x \in A,\ x^2 = x$. Montrer que $\forall x \in A,\ 2x = 0_A$ puis que $\times$ est commutative.

Exercice 21. (i) **Éléments nilpotents.** Soit A un anneau non nécessairement commutatif. On dit que x est nilpotent si on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1) Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.

2) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ et xy sont nilpotents.

3) Montrer que si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais $1_A - x$ l'est.

Exercice 22. (m) Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles sur $\mathbb{C}$.

2) Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. *On pourra étudier le module d'un élément inversible.*

Exercice 23. (m) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 24. (m) Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q},+,\times)$. Montrer que $K = \mathbb{Q}$.