TD - Graphes

On dit qu'un graphe est un **graphe simple** s'il n'a pas de boucles et s'il ne peut exister plusieurs arcs entre deux mêmes sommets (pas de multi-arcs).
Dans la suite, on ne considère que des graphes simples ayant un nombre fini de sommets.

Exercice 1 (Résultats théoriques sur les graphes).

1. Si $g = (V, E)$ est un *graphe non orienté*, montrer que : $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2n_e$.

2. Montrer qu'un graphe non orienté ayant $n_v \geq 3$ sommets et dont tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2 possède au moins un cycle.

3. Montrer qu'un *graphe acyclique non orienté* ayant $n_v \geq 1$ sommets possède au plus $(n_v - 1)$ arêtes.

4. Montrer qu'un *graphe connexe non orienté* ayant $n_v \geq 1$ sommets possède au moins $(n_v - 1)$ arcs.

5. Un graphe non orienté est dit **complet** si deux sommets différents sont toujours les extrémités d'un arc.

- **a.** Dessiner le graphe complet à 5 sommets
- **b.** Dénombrer le nombre d'arêtes d'un graphe complet ayant n_v sommets.

6. Rappeler la définition générale d'un arbre, puis montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- g est un arbre.
- g est un graphe non orienté connexe comportant $n_v - 1$ arêtes.
- g est un graphe non orienté acyclique comportant $n_v - 1$ arêtes.

Exercice 2 (Graphe biparti).
Démontrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.
Indication : on pourra remarquer qu'un graphe est biparti s'il existe une 2-coloration...

Exercice 3 (Degrés d'un graphe).

1. Montrer qu'un graphe simple non orienté a un nombre pair de sommets de degré (degré total) impair.

2. Montrer que, dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis présents.

3. Est-il possible de relier quinze ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié exactement avec trois autres ?

4. Une suite décroissante d'entiers est graphique s'il existe un graphe simple non orienté dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

$$(3, 3, 2, 1, 1) \quad (3, 3, 1, 1, 1) \quad (3, 3, 2, 2) \quad (4, 2, 1, 1, 1, 1) \quad (3, 2, 2, 2, 1)$$

Exercice 4 (Nombre cyclomatique).
Le *nombre cyclomatique* [a] d'un graphe non orienté g à n_v sommets, n_e arêtes et n_c composantes connexes est :

$$\nu(G) = n_e - n_v + n_c$$

Démontrer que pour tout graphe g, $\nu(g) \geqslant 0$ et que $\nu(g) = 0$ si et seulement si g est acyclique.

a. http://www-igm.univ-mlv.fr/~dr/XPOSE2008/Mesure%20de%20la%20qualite%20du%20code%20source%20-%20Algorithmes%20et%20outils/complexite-cyclomatique.html

Exercice 5 (Graphe biparti).
Trois conférenciers C_1, C_2, C_3 doivent intervenir le même jour pour assurer un certain nombre d'heures de formation à trois groupes G_1, G_2, G_3.

- C_1 doit assurer 2 heures de formation à G_1, 1 heure à G_2.
- C_2 doit assurer 1 heure de formation à G_1, 1 heure à G_2, 1 heure à G_3.
- C_3 doit assurer 1 heure de formation à G_1, 1 heure à G_2, 2 heures à G_3.

1. Représenter cette situation par un graphe.

2. Combien faut-il de plages horaires au minimum ?

3. Proposer un planning d'intervention des conférenciers.