Devoir Surveillé 6, problème 1, commentaires

PROBLÈME
Polynômes de Tchebychev et équation différentielle

Globalement tout d'abord, la rédaction et la présentation des copies est bonne. Il est par contre important d'apporter plus d'attention aux calculs, qui sont réalisés de manière beaucoup plus aléatoire (oubli d'un carré, oubli d'un 2 en passant d'une ligne à l'autre, dérivée juste sur une ligne et fausse sur l'autre, etc.). Certains étudiants se précipitent et abordent beaucoup de questions calculatoires sans prendre une seule seconde pour se relire alors qu'une lecture calme de l'énoncé et une (re)lecture de leurs calculs permettraient d'éviter de nombreuses étourderies (et de voir exactement quelles sont les hypothèses des questions abordées). Dans le détail :

I : Polynômes de Tchebychev

1) Il faut ici bien faire une récurrence double (ou forte) que l'on doit donc initialiser sur **deux** rangs. Il faut également bien préciser à quoi appartient la variable « n » avant l'hérédité. En général bien traitée.

2) Récurrence double à faire également, en général bien faite par les étudiants qui savaient linéariser l'expression proposée par l'énoncé.

3) *Factorisation de T_n et une égalité.*

a) Bien traitée. On rappelle que cos est 2π-périodique et non pas π-périodique.

b) En général, vérifier que les racines trouvées étaient 2 à 2 distinctes a été oublié. Le coefficient dominant a parfois également été oublié (mais plus rarement).

c) Peu d'étudiants ont utilisé les relations coefficients/racines, en préférant utiliser la factorisation de la question précédente. C'était possible à condition de bien identifier combien de termes il y avait dans le produit.

4) *L'équation différentielle*

a) Attention à bien dériver $\theta \mapsto T_n(\cos(\theta))$ comme une composée pour obtenir la première partie de l'égalité (et à bien justifier avant que l'on a le droit de dériver). Pour la seconde partie, il fallait bien justifier qu'elle était vraie pour toutes les valeurs de $[-1, 1]$, donc dire que cos est à valeurs dans $[-1, 1]$ ne suffit pas, il faut la surjectivité...

b) Très peu traitée alors que l'argument est très court. On rappelle que deux polynômes égaux en une infinité de valeurs sont égaux (en tant que polynômes).

II : Détermination de Q

5) Beaucoup d'imprécisions dans cette question : il a parfois été supposé que P ET Q étaient constants alors que l'énoncé ne supposait que P constant, le carré du P^2 a été parfois oublié, le fait qu'il faille également déterminer P et pas juste Q... Attention également au fait que les solutions de $\lambda^2 = 1$ sont 1 et -1...

6) Bien traitée.

7)

a) Bien traitée en général.

b) Bien traitée en général.

c) Question souvent mal comprise. On voulait trouver (une minoration de) la multiplicité de α_i dans ces nouveaux polynômes **en fonction** de k_i, on ne cherchait pas une minoration de k_i (on trouve alors k_i plus grand que 1, ce qui n'apporte aucune information).

d) Des erreurs de calcul en dérivant, on rappelle que $(1-P^2)' = -2P'P$.

e) Quasiment pas traitée (il fallait avoir la bonne minoration à la question précédente).

f) Il ne fallait pas oublier dans cette question de vérifier que les racines étaient également simples dans P' (ce que l'on justifiait en utilisant le fait qu'on avait $n-1$ racines et que $\deg(P') = n-1$).

8) Pour obtenir le coefficient dominant de P' en fonction de celui de P, il est plus simple de partir de l'expression développée de P ($P = \lambda X^n + \ldots$).

III : Détermination de P

9) *Des propriétés de h.*

a) La rédaction pour justifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ n'est pas acquise par tous les étudiants (il s'agit toujours de la même phrase de rédaction pourtant). Certains étudiants ont lu $P^2(\cos(\theta))$ comme $P^2(\theta)\cos(\theta)$ ce qui empéchait de traiter les trois premières questions de cette partie... Attention également à ne pas remplacer P par T_n et utiliser les résultats du I, les polynômes ne sont pas les mêmes ici (c'est tout le but du III de démontrer que $P = \pm T_n$ justement).

b) Pour cette question, il était important de préciser que le $\cos(\theta)$ (qui apparait dans $P(\cos(\theta))$ par exemple) ne prend pas une infinité de fois les mêmes valeurs (car $\theta \in [0, \pi]$) sans quoi l'argument « un polynôme ne s'annule qu'un nombre fini de fois » ne suffit pas...

10) Souvent bien traitée.

11) Jamais traitée correctement. L'égalité est démontrée dans le cas où $h'(\theta) \neq 0$ (attention à bien le supposer avant de diviser). Pour étendre l'égalité aux valeurs où $h'(\theta) = 0$, il fallait utiliser la question 9 (h est $\mathcal{C}^2$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs) pour étendre par continuité l'égalité.

12) De nombreuses erreurs de calcul. La plupart des étudiants sont invités à relire leurs fiches sur la résolution des équations différentielles linéaires (ici d'ordre 2 à coefficients constants).

13) Souvent traitée de manière trop imprécise, le principal problème venant du fait qu'écrire $\forall\theta \in [0, \pi],\ P(\cos(\theta)) = \pm T_n(\cos(\theta))$ en prenant la racine carrée donne un signe qui dépend de θ à priori, ce qui entraine que l'on ne manipule plus des polynômes et l'implication « égalité en une infinité de valeurs donc égaux en tant que polynômes » n'a donc plus de sens... Il fallait ici être plus rigoureux, on laissera les étudiants intéressés se reporter à la correction.

14) Seules deux copies ont fait le bilan complet du problème, qu'il était possible de réaliser sans avoir traité une seule des questions précédentes (tous les résultats étaient donnés dans l'énoncé). On attendait par contre une rédaction complète.