5. Applications

Exercice 1. (m) Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$. 2) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$.

3) $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array} \right.$. 4) $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x-y, 1+x^2) \end{array} \right.$.

5) $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{array} \right.$. 6) $d : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n & \mapsto & n-1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$

Exercice 2. (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective.

2) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. (m) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $\left\{ \begin{array}{ll} f(n) = -2n & \text{si } n \leq 0 \\ f(n) = 2n-1 & \text{si } n \geq 1 \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective.

Exercice 4. (i) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.

1) f est-elle injective ? Surjective ?

2) Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$? Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$? Si oui, les construire.

Exercice 5. (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geq |x-y|$. Montrer que f est injective.

Exercice 6. (i) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$. Étudier les équivalences suivantes (on montrera les implications vraies et on donnera des contre exemples aux implications fausses en choisissant convenablement f et g) :

1) h est injective $\Leftrightarrow$ (f est injective ou g est injective).

2) h est surjective $\Leftrightarrow$ (f est surjective et g est surjective).

Exercice 7. (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x+y) \end{array} \right.$.

1) f est-elle injective ? Surjective ?

2) Reprendre l'exercice en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{C}^2$ au départ et à l'arrivée.

Exercice 8. (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. f est-elle injective ? Surjective ? *On rappelle que* $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9. (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & a + \dfrac{1}{b} \end{array} \right.$. f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 10. (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \right.$. Justifier que f est bien définie et qu'elle est surjective. Est-elle injective ?

Exercice 11. (c) Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$. θ est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 12. (c) Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{array} \right.$. Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 13. (i) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que f soit injective.

Exercice 14. (m) Soient E, F, G, H des ensembles et soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$.

1) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

2) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

3) Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, il en est de même de f, g, h.

Exercice 15. (m) Soit $f : E \to E$.

1) On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi f est bijective.

2) On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi f est surjective.

Exercice 16. (m) Démontrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \ln(x) \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \sin(x) \end{array} \right.$ sont bijectives.

Exercice 17. (m) Étudier les fonctions suivantes pour étudier leur injectivité/surjectivité :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right. , \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \text{ et } f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \sin(x) \end{array} \right. .$$

Exercice 18. (m) Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans I où I est un intervalle à préciser, puis déterminer f^{-1}.

Exercice 19. (m) On pose $f : x \mapsto x^3 + x - 8$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifier alors que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $(f^{-1})'(x_0)$.

Exercice 20. (i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois). On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists n_x \in \mathbb{N}^* \ / \ f^{n_x}(x) = x$. Montrer que f est une bijection.

Exercice 21. (∗) Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $a < b < c$ et $\dfrac{f(a) + f(c)}{2} = f(b)$.