Corrigé du Devoir à la maison 13

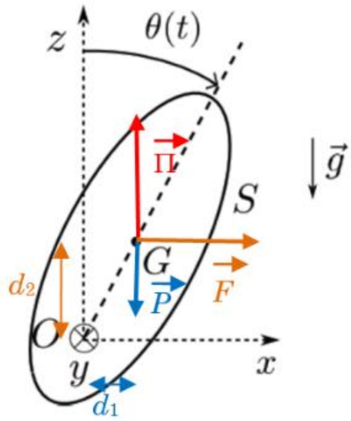
Exercice 1 – Récupération de l'énergie houlomotrice

1. Système : pendule pesant assimilé à un **solide** S

   Référentiel terrestre supposé galiléen, BOND $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$

   Bilan des forces :

   - Poids appliqué en G : $\vec{P} = m\vec{g}$
   - Poussée d'Archimède appliquée en G : $\vec{\Pi} = -\rho_e V\vec{g}$
   - Force exercée en G par la houle : $\vec{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$
   - Couple résistant exercé au niveau de l'axe de rotation de moment : $\vec{\Gamma} = -\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}$



➢ Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en G : fait tourner S dans le sens direct associé à l'axe (Oy) i.e. sens horaire : $\boxed{\mathcal{M}_{(Oy)}\left(\vec{P}\right) = +mgd_1 = mgd\sin(\theta)}$

➢ Poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ appliquée en G : fait tourner S dans le sens indirect associé à l'axe (Oy) (sens trigonométrique) : $\boxed{\mathcal{M}_{(Oy)}\left(\vec{\Pi}\right) = -\rho_e Vgd_1 = -\rho_e Vgd\sin(\theta)}$

➢ Force exercée par la houle en G : $\vec{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$: fait tourner S dans le sens direct associé à l'axe (Oy) i.e. sens horaire pour $\cos(\omega t) > 0$, et inversement pour $\cos(\omega t) < 0$: $\boxed{\mathcal{M}_{(Oy)}\left(\vec{F}\right) = +\beta\cos(\omega t)d_2 = \beta\cos(\omega t)d\cos(\theta)}$

➢ Couple résistant de moment : $\boxed{\Gamma_{(Oy)} = -\alpha\dot{\theta}}$

2. Moment cinétique scalaire : $L_{(Oy)}(S) = J\dot{\theta}$

➢ Théorème du moment cinétique : $\left(\dfrac{dL_{(Oy)}}{dt}\right) = \sum_i \mathcal{M}_{(Oy)}\left(\vec{f_i}\right)$

$$J\ddot{\theta} = (m - \rho_e V)gd\sin(\theta) + \beta\cos(\omega t)d\cos(\theta) - \alpha\dot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + (\rho_e V - m)\frac{gd}{J}\sin(\theta) = \frac{\beta d}{J}\cos(\theta)\cos(\omega t)}$$

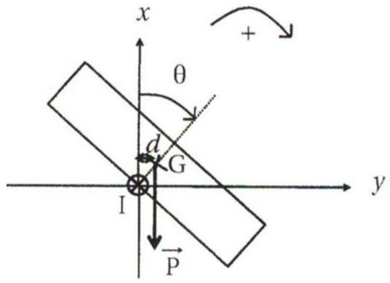
3. Approximation des petits angles : $\sin(\theta) \simeq \theta$ et $\cos(\theta) \simeq 1$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + (\rho_e V - m)\frac{gd}{J}\theta = \frac{\beta d}{J}\cos(\omega t)}$$

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = f(t) \text{ avec } \boxed{\lambda = \frac{\alpha}{J}}, \boxed{\omega_0 = \sqrt{(\rho_e V - m)\frac{gd}{J}}} \text{ et } \boxed{f(t) = \frac{\beta d}{J}\cos(\omega t)}$$

4. Pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{(\rho_e V - m)\frac{gd}{J}} = 1{,}5 \text{ rad.s}^{-1}}$; période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4{,}1 \text{ s}}$

Exercice 2 – La tartine beurrée et la loi de Murphy



1. <u>Système</u> : tartine assimilée à un **<u>solide</u>**
   <u>Référentiel</u> terrestre supposé galiléen
   <u>Forces</u> :
   - réaction du support $\vec{R}$ s'exerçant au point I sur l'axe de rotation = liaison pivot idéale
   - poids $\vec{P}$ s'appliquant au centre de gravité G tel que $IG = b$

   Moment cinétique de la tartine par rapport à l'axe (Iz) : $L_{(Iz)} = J\dot{\theta}$

   Moments des forces par rapport à l'axe de rotation (Iz) :

   $\mathcal{M}_{(Iz)}\left(\vec{R}\right) = 0$ et $\mathcal{M}_{(Iz)}\left(\vec{P}\right) = +mgd = mgb\sin\left(\theta\right)$ à l'aide du bras de levier (signe positif car le sens positif autour de (Iz) est le sens horaire).

   <u>Théorème du moment cinétique</u> : $\dfrac{dL_{(Iz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Iz)}\left(\vec{P}\right) + \mathcal{M}_{(Iz)}\left(\vec{R}\right)$

   $$\boxed{J\ddot{\theta} = mgb\sin\left(\theta\right) \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgb}{J}\sin\left(\theta\right)}$$

2. On multiplie cette équation par $\dot{\theta}$ puis on intègre par rapport au temps :

   $$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{mgb}{J}\sin\left(\theta\right)\dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{mgb}{J}\cos\left(\theta\right) + K \text{ avec } K \text{ une constante}$$

   À $t = 0$, $\theta\left(0\right) = 0$ et $\dot{\theta}\left(0\right) = 0$ d'où $K = \dfrac{mgb}{J}$ et $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{2mgb\left(1-\cos\left(\theta\right)\right)}{J}}}$

3. La vitesse de rotation est supposée constante lors de la chute : elle est donnée en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$: $\boxed{\omega_0 = \dot{\theta}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{2mgb}{J}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = cste}$

   En intégrant la relation $\omega_0 = \dot{\theta}\left(t\right)$: $\theta\left(t\right) = \omega_0 t + cste$ soit $\boxed{\theta\left(t\right) = \omega_0 t + \dfrac{\pi}{4}}$

4. Si un objet de masse m chute d'une hauteur h en n'étant soumis qu'à son poids, le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{P}$ donne en projection sur l'axe vertical (Ox) ascendant : $\ddot{x} = -g$. Deux intégrations successives par rapport au temps conduisent à $\dot{x} = -gt$ et $x = -\dfrac{g}{2}t^2$ en tenant compte des conditions initiales $\dot{x}\left(0\right) = 0$ et $x\left(0\right) = 0$ en prenant l'origine au niveau de la table. L'objet atteint le sol en $x = -h$ soit pour un temps t_C tel que $-h = -\dfrac{g}{2}t_C^{\ 2}$ soit $\boxed{t_C = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$

5. $a >> b$ d'où $J \simeq \dfrac{1}{3}ma^2$ et $\boxed{\omega_0 \simeq \sqrt{\dfrac{6gb}{a^2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 3{,}7 \text{ rad.s}^{-1}}$ donc $\boxed{t_C \simeq 0{,}40 \text{ s}}$

6. On a $\boxed{\theta(t_C) = \omega_0 t_C + \frac{\pi}{4} = 2{,}3 \text{ rad} = 130°}$. L'angle de rotation est compris entre 90° et 180° donc la tartine va se stabiliser sur le côté beurré ! La loi de Murphy est une nouvelle fois vérifiée !

Exercice 3 – Multimètre analogique

1. Chaque côté vertical du cadre est parcouru par un courant i et plongé dans un champ magnétique uniforme : il subit donc une force de Laplace.

➢ Côté du cadre où i est montant : $\overrightarrow{F_{L1}} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = ib\overrightarrow{u_z} \wedge B_0\overrightarrow{u_r}$ soit $\boxed{\overrightarrow{F_{L1}} = ibB_0\overrightarrow{u_\theta}}$

➢ Côté du cadre où i est descendant : $\overrightarrow{F_{L2}} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = -ib\overrightarrow{u_z} \wedge \left(-B_0\overrightarrow{u_r}\right)$ soit $\boxed{\overrightarrow{F_{L2}} = ibB_0\overrightarrow{u_\theta}}$

Remarque : le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ n'est pas le même pour les 2 côtés : ces deux forces sont opposées et constituent un couple de forces.

2. Pour les côtés horizontaux du cadre, on ne connaît pas précisément l'expression du champ magnétique. Mais les côtés horizontaux et $\vec{B}$ sont contenus dans le plan horizontal et les forces élémentaires de Laplace s'écrivent : $\boxed{\overrightarrow{dF_{Lh}} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = dF\overrightarrow{u_z}}$: elles sont colinéaires à l'axe de rotation et donc sans influence sur la rotation du cadre.

   Remarque : si on considère que $\vec{B}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_r}$, alors : $\overrightarrow{dF_{Lh}} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = idl\overrightarrow{u_r} \wedge B\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$: sans influence également.

3. Côté du cadre où i est montant : $\overrightarrow{F_{L1}} = ibB_0\overrightarrow{u_\theta}$ s'applique au point A', milieu du côté. Moment de la force de Laplace :

$$\overrightarrow{\Gamma_{L1}} = \overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{F_{L1}} = a\overrightarrow{u_r} \wedge ibB_0\overrightarrow{u_\theta} = iabB_0\overrightarrow{u_z}$$

➢ Côté du cadre où i est descendant : $\overrightarrow{F_{L2}} = ibB_0\overrightarrow{u_\theta}$ s'applique au point C', milieu du côté. Moment de la force de Laplace :

$$\overrightarrow{\Gamma_{L2}} = \overrightarrow{OC'} \wedge \overrightarrow{F_{L2}} = a\overrightarrow{u_r} \wedge ibB_0\overrightarrow{u_\theta} = iabB_0\overrightarrow{u_z}$$

➢ Moment de Laplace résultant : $\overrightarrow{\Gamma_{La}} = \overrightarrow{\Gamma_{L1}} + \overrightarrow{\Gamma_{L2}} = 2iabB_0\overrightarrow{u_z}$

$$\boxed{\Gamma_{La} = \overrightarrow{\Gamma_{La}} \cdot \overrightarrow{u_z} = 2iabB_0 = iSB_0}$$

4. Système : cadre étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

➢ Bilan des forces :

- Poids colinéaire à $\overrightarrow{u_z}$ de moment nul
- Forces de Laplace de moment : $\Gamma_{La} = iSB_0$
- Couple de frottement fluide de moment $\Gamma_f = -\lambda\dot{\theta}$
- Couple de rappel de moment $\Gamma_r = -\alpha\theta$

➢ Théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation

$$J\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\Gamma_{La}+\Gamma_f+\Gamma_r \Leftrightarrow J\ddot{\theta}=iSB_0-\lambda\dot{\theta}-\alpha\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\lambda}{J}\dot{\theta}+\frac{\alpha}{J}\theta=\frac{iSB_0}{J} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=A} \text{ avec } \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{\alpha}{J}} \text{ et } Q=\frac{J\omega_0}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\alpha J}}$$

5. Pour la position d'équilibre $\theta=\theta_{éq}$ et $\dot{\theta}=0,\ \ddot{\theta}=0$

$$\omega_0^2\theta_{éq}=A=\frac{iSB_0}{J} \text{ soit } \boxed{\theta_{éq}=\frac{iSB_0}{J\omega_0^2}=\frac{\Gamma_{La}}{\alpha}} \text{ et } \boxed{\theta_{éq}=\frac{SB_0}{\alpha}i}$$

6. Pour éviter que l'aiguille n'oscille trop longtemps avant d'atteindre sa position d'équilibre, il faut que le régime transitoire soit <u>apériodique ou critique</u> : $Q\le\frac{1}{2}$ soit $\boxed{\frac{1}{\lambda}\sqrt{\alpha J}\le\frac{1}{2}}$.

7. Pour transformer l'ampèremètre en voltmètre, on branche la résistance R en <u>série</u> avec le cadre (de résistance supposée nulle). Le courant traversant le cadre s'écrit : $i=\frac{U}{R}$ et la position d'équilibre est $\boxed{\theta_{éq}=\frac{SB_0}{\alpha R}U}$

8. <u>Puissance instantanée</u> : $p(t)=U(t)i(t)=U_mI_m\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)$

$$p(t)=\frac{1}{2}U_mI_m\left[\cos(\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi)\right]$$

<u>Puissance moyenne</u> : $P=\frac{1}{T}\int_O^T p(t)dt=\frac{1}{2}U_mI_m\frac{1}{T}\int_O^T\left[\cos(\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi)\right]dt$

$$P=\frac{1}{2}U_mI_m\cos(\varphi)+\frac{1}{2}U_mI_m\frac{1}{T}\int_O^T\cos(2\omega t+\varphi)dt \text{ soit } \boxed{P=\frac{1}{2}U_mI_m\cos(\varphi)}$$

9. <u>Couple instantanée de Laplace</u> : $\Gamma_{La}=i(t)SB(t)=KSi(t)U(t)$

$$\Gamma_{La}=KSp(t)=KS\frac{1}{2}U_mI_m\left[\cos(\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi)\right]$$

Les variations temporelles du couple de Laplace sont à la pulsation $2\omega>\omega>>\omega_0$, donc à une période $T=\frac{2\pi}{2\omega}$ beaucoup plus petite que le temps de réponse du système mécanique (cadre + aiguille) de l'ordre de quelques $\frac{1}{\omega_0}$.

Le cadre est donc sensible uniquement à la <u>valeur moyenne du couple</u> :

$$\boxed{\langle\Gamma_{La}\rangle=\langle KSp(t)\rangle=KSP=KS\frac{1}{2}U_mI_m\cos(\varphi)}$$

D'après le résultat de la question 5, la position d'équilibre s'écrit :

$$\boxed{\theta_{éq}=\frac{\langle\Gamma_{La}\rangle}{\alpha}=\frac{KS}{\alpha}P}$$

<u>L'angle de déviation de l'aiguille est bien proportionnel à *P*.</u>