8. Équations différentielles linéaires, méthodologie

Dans tout le chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

I.1. Vocabulaire

I.2. Résolution de l'équation homogène

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Il existe alors $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. Alors, les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

(m) Les points importants de ce théorème (mis à part la forme des solutions à connaitre) sont :
- On résout toujours sur un **intervalle** de $\mathbb{R}$ (ensemble de départ des fonctions).
- Si on sait calculer $A(x) = \int^x a(t)dt$, alors on a explicitement les solutions, sinon, on sait quand même que les solutions existent (car une fonction **continue** sur un **intervalle** admet toujours des primitives, égales à une constante près).
- Attention à ne pas oublier le signe $-$!
- Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$, on prend la constante λ dans $\mathbb{C}$. Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on prend la constante λ dans $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 1. Déterminer, en précisant sur quel intervalle on se place, les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' + (1 + 2i)y = 0$.
2. $y' + \dfrac{1}{1+t^2}y = 0$.
3. $y' + \dfrac{2}{t}y = 0$.

I.3. Équation avec second membre

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. Il existe alors $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. Alors, les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} + y_p(t) \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

où $y_p : I \to \mathbb{K}$ est une solution particulière de l'équation $y' + a(t)y = b(t)$.

(m) Il n'est pas toujours facile de trouver une solution particulière (sans utiliser la méthode de la variation de la constante, voir la section suivante)... Parfois, il est utile de la chercher « de la même forme » que la fonction b. Par exemple :
- si $b(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ (une fonction polynomiale), on peut chercher $y_p(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots$ (une fonction polynomiale du même degré) et déterminer les coefficients d_0, d_1 et d_2.

- si $b(t) = e^{ct}$ (une exponentielle), on peut chercher $y_p(t) = de^{ct}$ (une exponentielle avec le même coefficient dans l'exponentielle) et déterminer la constante d.
- etc.

Cette méthode ne marche pas tout le temps (elle marche principalement quand la fonction a est constante) mais peut parfois permettre de trouver une solution particulière rapidement !

Exercice d'application 2. Déterminer, en précisant sur quel intervalle on se place, les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = 1$.
2. $y' + 4y = 4t - 1$.
3. $y' + 3y = e^{-2t}$.

I.4. Méthode de la variation de la constante

(m) Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$, on la cherche en général sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable à déterminer (d'où le nom variation de la **constante**, λ étant constant dans la résolution de l'équation homogène et on la considère ici variable). Quand on injecte cette expression dans l'équation, on trouve que tous les termes en $\lambda(t)$ se simplifient et que $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$. On peut donc prendre $\lambda(t) = \int^t b(x)e^{A(x)}dx$ ce qui donne comme solution particulière $y_p(t) = \left(\int^t b(x)e^{A(x)}dx\right) e^{-A(t)}$.

(m) Quelques conseils pour utiliser cette méthode :

- Il faut commencer par résoudre l'équation homogène avant d'utiliser la méthode de la variation de la constante (car on a besoin de connaitre $e^{-A(t)}$).
- On écrit ensuite : cherchons $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ avec λ dérivable sur I.
- Quand on remplace dans l'équation, si vous n'êtes pas sûrs de votre solution de l'équation homogène, vous pouvez faire tous les calculs pour vérifier que les termes en λ se simplifient. Cela sera cependant toujours le cas si votre solution est juste et il ne restera dans l'équation que $\lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)$.
- Une fois que vous avez calculé $\lambda(t)$, **attention à ne pas oublier de multiplier par $e^{-A(t)}$ à la fin pour obtenir une solution particulière de l'équation !** La solution particulière est $y_p(t)$, pas $\lambda(t)$!

Exercice d'application 3. Déterminer, en précisant sur quel intervalle on se place, les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = 3e^{2t}$.
2. $y' + 3y = te^t$.
3. $y' - \frac{1}{t}y = \ln(t)$.

I.5. Principe de superposition

Proposition. Si on a une équation différentielle de la forme $y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$, alors une solution particulière est $y_p(t) = y_{p1}(t) + y_{p2}(t)$ où y_{p1} est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_{p2} est une solution particulière $y' + a(t)y = b_2(t)$.

(m) Ce principe est utile surtout quand on veut trouver des solutions particulières sans utiliser la méthode de la variation de la constante en se ramenant à un second membre plus simple.

Exercice d'application 4. Déterminer les solutions de l'équation $y' + 2y = 4t - 1 + e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.

I.6. Problème de Cauchy

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. Alors, pour tout $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, l'équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

(m) Quand on a un problème avec condition initiale, on commence en général par résoudre l'équation sans condition initiale et une fois la solution trouvée, on trouve la constante $\lambda \in \mathbb{K}$ en utilisant la condition initiale.

Exercice d'application 5. Déterminer, en précisant sur quel intervalle on se place, les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' + 4y = -8$ avec $y(0) = 3$.
2. $y' + \dfrac{1}{t}y = 2$ avec $y(1) = 2$.
3. $y' + \tan(t)y = 0$ avec $y(0) = 2$.

I.7. Bilan

Quand on a une équation différentielle de la forme $y' + a(t)y = b(t)$ à résoudre, on procède toujours de la même façon :

1. On commence par déterminer sur quel(s) intervalle(s) I les fonctions a et b sont **continues**. Une fois que l'on a démontré ceci, les théorèmes précédents assurent que **les solutions de l'équation différentielles existent** et sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} + y_p(t) \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

   où A est une primitive de a sur I (qui existe car a est **continue**)et y_p est une solution particulière de l'équation différentielle (qui existe toujours d'après la méthode de la variation de la constante et car A et b sont **continues**).
2. On détermine ensuite $A(t) = \displaystyle\int^t a(x)dx$, ce qui nous donne les solutions de l'équation homogène, de la forme $y_\lambda(t) = \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. On trouve une solution particulière (soit « évidente », soit avec la méthode de la variation de la constante).
4. On conclut que les solutions sont de la forme précisée dans le premier point.
5. On détermine éventuellement la constante λ si on a une condition initiale.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

II.1. Vocabulaire

II.2. Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Définition. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est $aX^2 + bX + c = 0$.

(m) Pour obtenir l'équation caractéristique, on remplace $y^{(n)}$ (donc y dérivée n fois) par X^n (donc X à la puissance n). Par exemple, $y = y^{(0)}$ (y dérivée 0 fois) est remplacé par $X^0 = 1$.

Théorème. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $aX^2 + bX + c$.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2. Les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine complexe double r. Les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{rt} + \mu t e^{rt} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

(m) Il est fortement recommandé de revoir comment résoudre des équations du second degré complexes (comment trouver une racine carrée δ du discriminant Δ, trouver les racines $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$,...).

Exercice d'application 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' - 5y = 0$.
2. $y'' - 2iy' - y = 0$.
3. $y'' + \sqrt{3}y' + iy = 0$.

II.3. Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

Théorème. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $aX^2 + bX + c$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine réelle double r. Les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{rt} + \mu t e^{rt} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées de la forme $r \pm i\omega$ avec $r, \omega \in \mathbb{R}$. Les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{rt}\cos(\omega t) + \mu e^{rt}\sin(\omega t) \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(m) Pour se souvenir de la forme des solutions, il suffit de remarquer que les fonctions qui engendrent toutes les solutions sont les parties réelles et imaginaires des solutions dans le cas complexe. Par exemple, quand on a des racines complexes $r_1 = r - i\omega$ et $r_2 = r + i\omega$, une base des solutions est $e^{r_1 t} = e^{(r-i\omega)t} = e^{rt}e^{-i\omega t}$ et $e^{r_2 t} = e^{(r+i\omega)t} = e^{rt}e^{i\omega t}$. Leurs parties réelles et imaginaires sont alors

$e^{rt}\cos(\omega t)$ et $\pm e^{rt}\sin(\omega t)$. Dans le cas cas où les racines sont réelles, prendre la partie réelle ne change pas les solutions et on a des solutions de la même forme.

Exercice d'application 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
2. $y'' + 16y = 0$.
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

II.4. Résolution avec second membre

Théorème. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ admet une solution particulière $y_p : I \to \mathbb{K}$ et les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y_{EH}(t) + y_p(t) \end{array}, \text{ où } \lambda,\ \mu \in \mathbb{K}.$$

où y_{EH} correspond aux solutions de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$.

(m) Il n'est par contre pas facile de trouver une solution particulière ! Vous verrez l'an prochain une méthode pour en trouver une de manière générale mais pour l'instant, il faut soit chercher une solution particulière de la même forme que le second membre (voir I.3) ou utiliser la proposition qui suit.

Proposition. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Pour $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$, on cherche une solution particulière à l'équation $ay'' + by' + cy = \alpha e^{\lambda t}$. On rappelle que l'équation caractéristique associée à cette équation est $aX^2 + bX + c = 0$. Alors, une solution particulière de l'équation différentielle est de la forme :

- si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $y_p(t) = Ce^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
- si λ est racine simple l'équation caractéristique, $y_p(t) = Cte^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
- si λ est racine double de l'équation caractéristique, $y_p(t) = Ct^2e^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

(m) Pour déterminer la valeur de C, on remplace y par y_p dans l'équation différentielle et les exponentielles se simplifient. Si λ est racine simple de l'équation caractéristique, tous les termes en $te^{\lambda t}$ se simplifieront. Si λ est racine double de l'équation caractéristique, tous les termes en $t^2e^{\lambda t}$ et $te^{\lambda t}$ se simplifieront.

Exercice d'application 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-t}$.
2. $y'' + 9y = e^{3t}$.
3. $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-t}$.

Proposition. Le principe de superposition est encore valable pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Exercice d'application 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2t} - 2e^{3t}$.

(m) Quand on a $a, b, c, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ et que l'on étudie l'équation $ay'' + by' + cy = \alpha\cos(\lambda t)$, on peut pour trouver une solution particulière étudier l'équation $ay'' + by' + cy = \alpha e^{i\lambda t}$, en trouver une solution particulière et prendre la partie réelle de cette solution particulière. Si on avait du $\alpha\sin(\lambda t)$ dans le second membre, on aurait fait de même en prenant la partie imaginaire. Attention à ne pas oublier le i dans l'exponentielle dans les calculs !

Exercice d'application 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = 2\cos(t) + e^{3t}$.
2. $y'' + 4y = \sin(2t)$.

II.5. Problème de Cauchy

Théorème. Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors pour tout $t_0 \in I$ et $y_0, v_0 \in \mathbb{K}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

Exercice d'application 11. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 3y' = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$.
2. $y'' + 4y' + 5y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

III. Retour sur l'ordre 1

m Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. Pour résoudre l'équation différentielle $a(t)y' + b(t)y = c(t)$, on procède comme suit :

1. On trouve les valeurs pour lesquelles la fonction a s'annule, ce qui nous donne plusieurs intervalles I_1, I_2, etc. sur lesquels la fonction a ne s'annule pas.
2. On résout l'équation différentielle sur chaque intervalle en divisant par la fonction a (qui ne s'annule pas d'après le premier point) en utilisant les méthodes vues dans la partie I.
3. On obtient donc des solutions y_1 sur I_1, y_2 sur I_2, etc. Il reste alors à « recoller » ces solutions pour obtenir une fonction **dérivable** sur l'intervalle I en entier (et qui sera égale à y_1 sur I_1, y_2 sur I_2, etc.).
4. Si par exemple $I_1 =]-\infty, x_0[$ et $I_2 =]x_0, +\infty[$, on commence par calculer $\lim\limits_{t \to x_0^-} y_1(t)$ et $\lim\limits_{t \to x_0^+} y_2(t)$ qui doivent être égales pour que la fonction y soit continue en x_0. La valeur obtenue est alors la valeur que doit prendre la fonction y en x_0 pour être continue.
5. Il reste alors à calculer $\lim\limits_{t \to x_0^-} \dfrac{y_1(t) - y(x_0)}{t - x_0}$ et $\lim\limits_{t \to x_0^+} \dfrac{y_2(t) - y(x_0)}{t - x_0}$ qui doivent être des limites finies et égales pour que la fonction y soit dérivable en x_0.

Exercice d'application 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $ty' + 2y = 2$.
2. $ty' - y = 1$.
3. $ty' - 3y = 1$.

IV. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1. On résout sur $\mathbb{R}$. On a $\displaystyle\int^t (1+2i)dx = (1+2i)t$. Les solutions de $y' + (1+2i)y = 0$ sont donc de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-(1+2i)t} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

2. On résout sur $\mathbb{R}$. On a $\displaystyle\int^t \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(t)$. Les solutions de $y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$. sont donc de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\arctan(t)} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On résout sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur un de ces intervalles, on a $\displaystyle\int^t \frac{2}{x}dx = 2\ln(|t|) = \ln(t^2)$. Les solutions de $y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\ln(t^2)} = \dfrac{\lambda}{t^2} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

et sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\ln(t^2)} = \dfrac{\lambda}{t^2} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 2. Dans les trois cas, on résout l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Dans tous les cas, on trouve tout d'abord la solution de l'équation homogène.

1. Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{2t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que $t \mapsto -\frac{1}{2}$ est solution particulière. On en déduit que les solutions de $y' - 2y = 1$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{2t} - \dfrac{1}{2} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-4t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour une solution particulière, on la cherche sous la forme $y_p : t \mapsto at + b$. En injectant dans l'équation, on trouve le système $\begin{cases} a + 4b = -1 \\ 4a = 4 \end{cases}$. On obtient que $a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$ conviennent. On en déduit que les solutions de $y' + 4y = 4t - 1$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-4t} + t - \dfrac{1}{2} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-3t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour une solution particulière, on la cherche sous la forme $y_p : t \mapsto ce^{-2t}$. En injectant dans l'équation, on voit que l'on veut c tel que $-2ce^{-2t} + 3ce^{-2t} = e^{-2t}$. On remarque que $c = 1$ convient. On en déduit que les solutions de $y' + 3y = e^{-2t}$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-3t} + e^{-2t} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 3.

1. On se place sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{2t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour déterminer une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)e^{2t}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}$. En injectant dans l'équation et en simplifiant les exponentielles (qui sont non nulles), on obtient $\lambda'(t) = 3$. On a donc $\lambda(t) = 3t$ qui convient d'où $y_p(t) = 3te^{2t}$. On en déduit que les solutions de $y' - 2y = 3e^{2t}$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{2t} + 3te^{2t} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. On se place sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-3t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour déterminer une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)e^{-3t}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}$. En injectant dans l'équation et en divisant par $e^{-3t} \neq 0$, on obtient $\lambda'(t) = te^{4t}$. On peut alors calculer λ à l'aide d'une intégration par parties en dérivant le $t \mapsto t$ et en primitivant le $t \mapsto e^{4t}$ (toutes les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\lambda(t) = \int^t xe^{4x}dx = \left[\frac{xe^{4x}}{4}\right]^t - \int^t \frac{e^{4x}}{4}dx = \frac{te^{4t}}{4} - \frac{e^{4t}}{16}.$$

On en déduit que $y_p(t) = \dfrac{te^t}{4} - \dfrac{e^t}{16}$ est solution particulière. On en déduit que les solutions de $y' + 3y = te^t$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-3t} + \dfrac{te^t}{4} - \dfrac{e^t}{16} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On résout sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $\displaystyle\int^t -\frac{1}{x}dx = -\ln(t)$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{\ln(t)} = \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour déterminer une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)t$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En injectant dans l'équation et en divisant par $t > 0$, on obtient $\lambda'(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$. On a alors :

$$\lambda(t) = \int^t \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]^t = \frac{\ln^2(t)}{2}.$$

On en déduit que $y_p(t) = t\dfrac{\ln^2(t)}{2}$ est solution particulière. On en déduit que les solutions de $y' - \dfrac{1}{t}y = \ln(t)$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t + t\dfrac{\ln^2(t)}{2} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 4. Les solutions de l'équation homogène sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-2t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour une solution particulière, d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière à $y' + 2y = 4t - 1$ et à $y' + 2y = e^{3t}$. Dans le premier cas, on cherche $y_{p1}(t) = at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et on trouve une solution pour $a = 2$ et $b = -\dfrac{3}{2}$. Dans le second cas, on cherche $y_{p2}(t) = ce^{3t}$ on on doit avoir $(3c + 2c)e^{3t} = e^{3t}$ donc $c = \dfrac{1}{5}$ convient. On en déduit que les solutions de $y' + 2y = 4t - 1 + e^{3t}$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-2t} + 2t - \dfrac{3}{2} + \dfrac{e^{3t}}{5} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 5.

1. On a $y_p(t) = -2$ comme solution particulière. On en déduit que les solutions de $y' + 4y = -8$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-4t} - 2 \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque l'on veut $y(0) = 3$, on doit avoir $\lambda = 5$. La solution recherchée est donc $y : t \mapsto 5e^{-4t} - 2$.

2. On se place sur $\mathbb{R}_+^*$ car on a une condition initiale en $1 > 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\int^t \frac{1}{x}dx = \ln(t)$. On en déduit que les solutions de l'équations homogènes sont les $y_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\ln(t)} = \dfrac{\lambda}{t} \end{array} \right.$. Enfin, on remarque que $y_p(t) = t$ est solution particulière (on aurait aussi pu faire la variation de la constante). On en déduit que les solutions de $y' + \dfrac{1}{t}y = 2$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\lambda}{t} + t \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque l'on veut $y(1) = 2$, on doit avoir $\lambda = 1$. La solution recherchée est donc $y : t \mapsto \dfrac{1}{t} + t$.

3. On se place ici sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (pour que 0 soit dans l'intervalle de résolution). On a ici une équation homogène (on a la fonction nulle comme solution particulière). Sur cet intervalle, on a $\displaystyle\int^t \tan(x)dx = \int^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(|\cos(t)|)$. On en déduit que les solutions de $y' + \tan(t)y = 0$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccl} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\ln(|\cos(t)|)} = \lambda\cos(t) \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a enlevé les valeurs absolues car la fonction cosinus est positive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Puisque l'on veut $y(0) = 2$, on doit avoir $\lambda = 2$. La solution recherchée est donc $y : t \mapsto 2\cos(t)$.

Exercice d'application 6.

1. L'équation caractéristique associée est $X^2 + 4X - 5 = 0$ dont les racines sont 1 et -5. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{t} + \mu e^{-5t} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. L'équation caractéristique associée est $X^2 - 2iX - 1 = 0$. On a $\Delta = -4 + 4 = 0$ donc on a une racine double qui est i. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{it} + \mu t e^{it} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

3. L'équation caractéristique est $X^2+\sqrt{3}X+i=0$. On a $\Delta = 3-4i$. En cherchant une racine carrée de Δ sous la forme $\delta = a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$, on obtient que $a^2-b^2=3$ et $2ab=-4$. Puisque $|\Delta|=5$, on a également $|\delta^2| = a^2+b^2=5$. On en déduit que $a=\pm 2$ et $b=\pm 1$. Puisque a et b sont de signes différents, on a donc $\delta = 2-i$ qui convient comme racine carrée de Δ. Les solutions de l'équation caractéristiques sont donc :

$$r_1 = \frac{-\sqrt{3}-2+i}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-\sqrt{3}+2-i}{2}.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\left(\frac{-\sqrt{3}-2+i}{2}\right)t} + \mu e^{\left(\frac{-\sqrt{3}+2-i}{2}\right)t} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{C}.$$

Exercice d'application 7.

1. L'équation caractéristique est $X^2-6X+9=0$. Le discriminant est 0 donc on a une racine double qui est 3. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{3t} + \mu t e^{3t} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique est $X^2+16=0$ qui admet deux racines complexes conjuguées $4i$ et $-4i$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(4t)+\mu\sin(4t) \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

3. L'équation caractéristique est $X^2+2X+2=0$. Son discriminant est $-4=(2i)^2$. Les racines de l'équation caractéristiques sont complexes conjuguées égales à $-1\pm i$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t}\cos(t)+\mu e^{-t}\sin(t) \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application 8.

1. L'équation caractéristique est $X^2-4X+4=0$ qui admet 2 comme racine double. -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t)=Ce^{-t}$. On a $y_p'(t) = -Ce^{-t}$ et $y_p''(t)=Ce^{-t}$. En injectant dans l'équation et en simplifiant par $e^{-t}\neq 0$, on obtient $C+4C+4C=3$ donc $C=\dfrac{1}{3}$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{2t}+\mu t e^{2t}+\dfrac{e^{-t}}{3} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique est $X^2+9=0$ donc les racines sont $3i$ et $-3i$. 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique donc on cherche $y_p(t)=Ce^{3t}$. On a $y_p''(t)=9Ce^{3t}$ donc en injectant dans l'équation, on trouve $C=\dfrac{1}{18}$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(3t)+\mu\sin(3t)+\dfrac{e^{3t}}{18} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

3. L'équation caractéristique est $X^2+4X+3=0$ dont les racines sont -1 et -3. -1 étant racine simple de l'équation caractéristique, on cherche $y_p(t)=Cte^{-t}$. On a $y_p'(t)=Ce^{-t}-Cte^{-t}$ et $y_p''(t)=-2Ce^{-t}+Cte^{-t}$. En injectant dans l'équation, on obtient :

$$-2Ce^{-t}+Cte^{-t}+4(Ce^{-t}-Cte^{-t})+3Cte^{-t}=2e^{-t} \Leftrightarrow 2Ce^{-t}=2e^{-t}$$

On trouve donc que $C=1$ convient. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t}+\mu e^{-3t}+te^{-t} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application 9. L'équation caractéristique est $X^2-3X+2=0$ dont les racines sont 1 et 2. On utilise le principe de superposition donc on va chercher une solution particulière de $y''-3y'+2y=3e^{2t}$ sous la forme $y_{p1}(t)=Cte^{2t}$ (car 2 est racine simple de l'équation caractéristique). On a $y_{p1}'(t)=2Cte^{2t}+Ce^{2t}$ et $y_{p1}''(t)=4Ce^{2t}+4Cte^{2t}$. En injectant dans l'équation différentielle, on trouve $4Ce^{2t}-3Ce^{2t}=3e^{2t}$ donc $C=3$ convient.

On cherche ensuite une solution particulière de $y''-3y'+2y=-2e^{3t}$ sous la forme $y_{p2}(t)=Ce^{3t}$. En injectant dans l'équation, on trouve $9C-9C+2C=-2$ soit $C=-1$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{t}+\mu e^{2t}+3te^{2t}-e^{3t} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application 10.

1. L'équation caractéristique est X^2+2X+1 qui admet -1 comme racine double. Pour trouver une solution particulière, on utilise le principe de superposition. On commence par étudier $y''+2y'+y=2e^{it}$ en cherchant $y_{p1}(t)=Ce^{it}$. En injectant dans l'équation, on trouve que l'on doit avoir $(-C+2Ci+C)e^{it}=2e^{it}$ soit $C=-i$. Il reste à prendre la partie réelle de $-ie^{it}=-i\cos(t)+\sin(t)$ pour obtenir une solution particulière de $y''+2y'+y=2\cos(t)$.

   Pour une solution particulière de $y''+2y'+y=e^{3t}$, on cherche $y_{p2}(t)=Ce^{3t}$ et on trouve en injectant que $C=\dfrac{1}{16}$ convient. On en déduit que les solutions de $y''+2y'+y=2\cos(t)+e^{3t}$ sont de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t}+\mu te^{-t}+\sin(t)+\dfrac{e^{3t}}{16} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique associée est $X^2+4=0$ qui admet comme racines $2i$ et $-2i$. Pour une solution particulière, on étudie l'équation $y''+4y=e^{2it}$ et on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t)=Cte^{2it}$ (car $2i$ est racine simple de l'équation caractéristique). On a $y_p'(t)=2iCte^{2it}+Ce^{2it}$ et $y_p''(t)=4iCe^{2it}-4Cte^{2it}$. En injectant dans l'équation, on obtient $4iC=1$, soit $C=-\dfrac{i}{4}$. Pour obtenir une solution particulière, il reste à calculer la partie imaginaire de $-\dfrac{ite^{2it}}{4}$ qui vaut $-\dfrac{t\cos(2t)}{4}$. On en déduit que les solutions de $y''+4y=\sin(2t)$ sont de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(2t)+\mu\sin(2t)-\dfrac{t\cos(2t)}{4} \end{array}, \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application 11.

1. L'équation caractéristique associée est $X^2 - 3X = 0$ qui admet comme racines 0 et 3. Les solutions de $y'' - 3y' = 0$ sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda + \mu e^{3t} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Avec les conditions initiales, on trouve $\lambda + \mu = 1$ et $3\mu = 3$ soit $\mu = 1$ et $\lambda = 0$. On trouve donc comme solution $y : t \mapsto e^{3t}$.

2. L'équation caractéristique associée est $X^2 + 4X + 5 = 0$ qui admet comme discriminant $\Delta = -4 < 0$. On a donc des racines complexes conjuguées qui sont $-2 \pm i$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ce^{-t}$ et on trouve que $C = \frac{1}{2}$ convient. Les solutions de $y'' + 4y' + 5y = e^{-t}$ sont donc de la forme :

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-2t}\cos(t) + \mu e^{-2t}\sin(t) + \dfrac{e^{-t}}{2} \end{array}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En $t = 0$, on trouve que $\lambda + \frac{1}{2} = 0$. Quand on dérive et que l'on évalue en $t = 0$, on obtient $-2\lambda + \mu - \frac{1}{2} = 0$. On obtient donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$. L'unique solution est donc :

$$y : t \mapsto -\frac{e^{-2t}\cos(t)}{2} - \frac{e^{-2t}\sin(t)}{2} + \frac{e^{-t}}{2}.$$

Exercice d'application 12.

1. Remarquons tout d'abord que l'on a $y = 1$ comme solution évidente sur $\mathbb{R}$. Pour les solutions générales, on résout sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à $y' + \frac{2}{t}y = \frac{2}{t}$. On a $\int^t \frac{2}{x}dx = 2\ln(|t|) = \ln(|t|^2) = \ln(t^2)$. On en déduit que sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\ln(t^2)} + 1 = \dfrac{\lambda}{t^2} + 1 \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, on procède de même et on trouve comme solutions :

$$y_\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mu e^{-\ln(t^2)} + 1 = \dfrac{\mu}{t^2} + 1 \end{array}, \text{ où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour avoir une limite finie en 0, on doit avoir $\lambda = \mu = 0$. On en déduit qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle qui est $y = 1$.

2. On a $y_p(t) = -1$ solution particulière sur $\mathbb{R}$. On procède de la même façon qu'à la première question en résolvant sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. On doit cette fois calculer $\int^t -\frac{1}{x}dx = -\ln(|t|)$. On en déduit que sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\ln(|t|)} - 1 = \lambda|t| - 1 \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, on procède de même et on trouve comme solutions :

$$y_\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mu e^{\ln(|t|)} - 1 = \mu|t| - 1 \end{array}, \text{ où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Quand t tend vers 0, on trouve que les limites à gauche et à droite valent -1 (ce qui est cohérent avec l'équation évaluée en $t = 0$). Pour la dérivabilité, pour $t > 0$, on a $\frac{y_\lambda(t) - (-1)}{t - 0} = \lambda$ qui tend donc vers λ quand t tend vers 0. Pour $t < 0$, on a $\dfrac{y_\mu(t) - (-1)}{t - 0} = \dfrac{\mu \times (-t)}{t} = -\mu$. On doit donc avoir $\mu = -\lambda$ pour avoir y dérivable en 0.

Pour conclure, si on veut une forme globale (qui est valable également en 0), les fonctions solutions de $ty' - y = 1$ sont de la forme :

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t - 1 \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On a $y_p(t) = \dfrac{-1}{3}$ solution particulière sur $\mathbb{R}$. On résout encore une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. On trouve comme solution sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\ln(|t^3|)} - \frac{1}{3} = \lambda |t^3| - \frac{1}{3} \end{array}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve :

$$y_\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mu e^{\ln(|t^3|)} - \frac{1}{3} = \mu |t^3| - \frac{1}{3} \end{array}, \text{ où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Quand t tend vers 0, on trouve que dans les limites à gauche et à droite valent $-\dfrac{1}{3}$ (ce qui est cohérent avec l'équation évaluée en $t = 0$). Pour la dérivabilité, pour $t > 0$, on a $\dfrac{y_\lambda(t) - 1}{t - 0} = \lambda t^2$ qui tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Pour $t < 0$, on a $\dfrac{y_\mu(t) - 1}{t - 0} = \dfrac{\mu \times (-t^3)}{t} = -\mu t^2$ qui tend également vers 0. On ne trouve donc aucune condition.

Les solutions de $ty' - 3y = 1$ sont donc de la forme $y_{\lambda,\mu} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \mapsto & -\frac{1}{3} \\ t & \mapsto & \lambda t^3 - \frac{1}{3} \text{ si } t > 0 \\ t & \mapsto & -\mu t^3 - \frac{1}{3} \text{ si } t < 0 \end{array} \right.$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.