Année Scolaire 2021 – 2022

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2}$ et MP2I

DS N°10

Jeudi 16/06/2022 (3h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être encadrés ou soulignés à la ***règle****.*

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : Algèbre

Attention! Dans tout le problème $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est considéré avec sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (c'est-à-dire que les scalaires sont réels, même si les coefficients des matrices sont complexes).

Q1) A tout couple $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ on associe la matrice $\mathrm{M}(z_1, z_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathrm{M}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}.$$

On désigne par $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\mathrm{M}(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{H} = \{\mathrm{M}(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Enfin, on définit les quatre matrices suivantes :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

a) Prouver que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, et que la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$ en est une base.

b) On note $\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \in \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0\}$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{H}$ de trace nulle.
Justifier que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ et en préciser une base.

c) Prouver que $\mathbb{H}$ est stable pour le produit matriciel : $\forall\, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{H}^2$, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathbb{H}$.
En déduire que $(\mathbb{H}, +, \times)$ est un anneau. Est-il commutatif?

Q2) Pour toute matrice $A \in \mathbb{H}$ on note $\sigma(A) = \mathrm{Com}(A)^T$.

a) Vérifier que
$$\forall A \in \mathbb{H},\ \sigma(A) \in \mathbb{H}.$$

b) Prouver que toute matrice $A \in \mathbb{H}$ non nulle est inversible, et que son inverse A^{-1} appartient à $\mathbb{H}$. L'anneau $(\mathbb{H}, +, \times)$ est-il un corps ?

c) En notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en exprimant la matrice $\sigma(A)$ de la même manière, trouver une formule exprimant $\sigma(A)$ en fonction du nombre complexe $\mathrm{tr}(A)$ et des deux matrice A et I. En déduire que l'application σ forme un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$, et préciser sa matrice dans la base $\mathscr{B} = (I, J, K, L)$.

d) Prouver que σ est une symétrie de $\mathbb{H}$ en précisant ses éléments caractéristiques.

Q3) Pour tout $(A, B) \in \mathbb{H}^2$ on pose
$$(A \mid B) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A\sigma(B) + B\sigma(A)).$$

a) Justifier que $\forall A \in \mathbb{H},\ \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$ et que $\forall A \in \mathbb{H},\ (A \mid A) = \det(A)$, puis vérifier que l'application $(\,.\mid.\,)$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

b) Justifier que $\forall (A, B) \in \mathbb{H}^2,\ \|A \times B\| = \|A\| \times \|B\|$.
(Bien sûr, la norme est celle issue du produit scalaire précédent).

c) Prouver que $F^{\perp} = \mathrm{vect}(I)$. *(On rappelle que* F *est défini en Q1b.)*

d) La famille (I, J, K, L) est-elle une base orthonormale de $\mathbb{H}$?

e) On note π le projecteur orthogonal sur F. Pour tout $A \in \mathbb{H}$, exprimer $\pi(A)$ en fonction de A et $\sigma(A)$.

Problème 2 : Probabilités

On considère $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *des variables aléatoires indépendantes (autrement dit mutuellement indépendantes), à valeurs dans* $\{-1, 1\}$ *telles que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2} \ \textit{ et } \ \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
S_n *représente ainsi la fortune d'un joueur qui jouerait n parties de pile ou face équilibrées et indépendantes et qui gagnerait 1 euro à chaque victoire et en perdrait 1 à chaque défaite. L'espérance d'une variable aléatoire réelle* Z *est notée* $\mathbb{E}(Z)$ *et sa variance* $\mathbb{V}(Z)$.

Q1) *Premiers calculs.*

a) Déterminer pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'espérance et la variance de X_k.

b) En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Q2) *Deux applications.*

a) En utilisant le fait que $\mathbb{V}(|S_n|) \geqslant 0$, montrer sans calcul que $\mathbb{E}(|S_n|) \leqslant \sqrt{n}$.

b) Déterminer pour $a > 0$ une majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a)$ en fonction de a et de n. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement positive telle que $\sqrt{n} \underset{+\infty}{=} o(u_n)$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n| < u_n) = 1$$

Q3) *Équivalent de* $\mathbb{E}(|S_n|)$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(|S_n|) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(|S_n| = k)$.

b) Pour $k > 1$, justifier que $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{P}(S_n = k-1) + \mathbb{P}(S_n = k+1)\big)$. Démontrer une formule similaire pour $\mathbb{P}(S_{n+1} = -k)$ et en déduire finalement que :

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{P}(|S_n| = k-1) + \mathbb{P}(|S_n| = k+1)\big).$$

c) En raisonnant de manière similaire, démontrer que :

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) = \mathbb{P}(|S_n| = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n| = 2).$$

d) En déduire que $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(S_n = 0)$.

e) Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. *On séparera les cas n pair et n impair et on pourra utiliser des arguments de dénombrement.*

f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) = \frac{n+1}{4^n}\binom{2n+1}{n}$.

g) Rappeler la formule de Stirling. En déduire que $\mathbb{E}(|S_n|) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

Problème 3 : Analyse

Soit n entier naturel non nul, et E un ensemble de cardinal n. On note $\mathrm{Inv(E)}$ l'ensemble des involutions de E, c'est à dire l'ensemble des applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Exemple : si $\mathrm{E} = [\![1;3]\!]$, la transposition $(1 \quad 2)$ est une involution, mais pas le cycle $(1 \quad 2 \quad 3)$.

Q1) Justifier que $\mathrm{Inv(E)}$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à $n!$.

Dans la suite, on notera $\mathrm{I}_n = \mathrm{card(Inv(E))}$, où $n = \mathrm{card(E)}$. On pose par convention que $\mathrm{I}_0 = 1$.

Q2) Calculer I_1, I_2 et I_3.

Q3) Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{E} = [\![1;n+1]\!]$.

a) Soit A_{n+1} l'ensemble des involutions de E pour lesquelles $n+1$ est un point fixe.
Montrer que A_{n+1} est en bijection avec $\mathrm{Inv}(\mathrm{E} \setminus \{n+1\})$.

b) Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note A_k l'ensemble des involutions de E pour lesquelles l'image de $n+1$ est k.
Montrer que A_k est en bijection avec $\mathrm{Inv}(\mathrm{E} \setminus \{n+1, k\})$.

c) En déduire la relation :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n + n\mathrm{I}_{n-1}$$

d) Vérifier que la relation ci-dessus reste vraie quand $n = 1$.

e) Calculer I_4 et I_5.

Pour $x \in]-1\,;1[$, on étudie la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{I_n}{n!} x^n$.

Q4) Montrer que cette série est absolument convergente.

On pose pour $x \in]-1\,;1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$. On admettra que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction S est dérivable k fois sur $]-1\,;1[$, et que : $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-k)!} x^{n-k}$.

Q5) Déduire de la relation établie en Q3c, que la fonction S est solution de l'équation différentielle $y' = (x+1)y$ sur $]-1\,;1[$.

Q6) Résoudre l'équation différentielle ci-dessus, et en déduire l'expression de $S(x)$.

Q7) On considère les développements limités en 0 suivants :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{0}{o}(x^n) \text{ et } e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \underset{0}{o}(x^n)$$

a) Citer le théorème justifiant l'existence de ces DL, et donner les expressions de a_k et b_k.

b) On effectue le produit de ces deux DL, ce qui donne : $e^{x+\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \underset{0}{o}(x^n)$.
Exprimer c_n en fonction des a_k et b_k.

c) Justifier l'égalité $c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

d) En déduire que $I_n = n! \times \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k!(n-2k)!2^k}$ (on ne cherchera pas à simplifier cette somme).

– FIN –