TRAVAUX DIRIGÉS IPC1
Dimensions et unités des grandeurs physiques

Niveau 1

Exercice 1. Dimension d'une quantité

Lors d'un calcul (correct !) apparaît l'expression : $x = \frac{\pi}{5}\left(R + R^2\right)$.

Que peut-on conclure du point de vue dimensionnel ?

*Exercice 2. Horloge à balancier

Le balancier d'une horloge qui bat la seconde est assimilable à un pendule simple.

La relation entre la période T et longueur l est : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

On prendra $g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Vérifier l'homogénéité de la relation.
2. Quelle est la période T_0 du balancier de l'horloge ?
3. Calculer la longueur l_0 de ce balancier.

Niveau 2

Exercice 3. Grandeurs énergétiques

1. À partir de relations connues, déterminer la dimension d'une énergie. Quelle est son unité dans le système international ? Quelle est son unité usuelle ?
2. En déduire la dimension, l'unité SI et l'unité usuelle d'une puissance.
3. D'après le modèle de Yukawa, un nucléon du noyau atomique possède l'énergie potentielle $E_P\left(r\right) = \frac{K}{r}e^{-\frac{r}{a}}$, où r est la distance (variable) entre le nucléon et l'origine O du repère. K et a sont deux constantes $\left(a > 0\right)$. Déterminer les dimensions de K et a.

Exercice 4. Grandeurs de Planck

En combinant les trois constantes suivantes : la célérité de la lumière c, la constante gravitationnelle G et la constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (prononcer « h barre »), on obtient les grandeurs de Planck : $\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$

1. Déterminer quelle grandeur est homogène à :
   - une longueur, appelée « longueur de Planck » et notée l_P
   - une masse, appelée « masse de Planck » et notée m_P
   - une durée, appelée « durée de Planck » et notée t_P
2. Calculer l_P, m_P et t_P.
3. On introduit également la « température de Planck », notée T_P. Déterminer son expression à partir des constantes c, m_P et k_B (constante de Boltzmann). Effectuer l'application numérique.

Données : $c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1} $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

$h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

*Exercice 5. Dimension d'une pression

1. Retrouver la dimension d'une force F.
2. En déduire la dimension d'une pression P dans le système international, sachant qu'une pression s'exprime comme une force par unité de surface ; préciser l'unité SI de P ainsi que l'unité usuelle.

La différence de pression entre un point situé à la surface d'un liquide, de masse volumique ρ et de température T, et un point situé à la profondeur h, est de la forme :

$$\Delta P = g^a T^b h^c \rho^d$$

où g représente l'accélération de la pesanteur.

3. Calculer les valeurs des coefficients a, b, c et d.

SOLUTIONS

Exercice 1. Dimension d'une quantité

R et x sont sans dimension : $[R]=1=[x]$

*Exercice 2. Horloge à balancier

1. Relation entre grandeurs : $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

   Dimension du terme de droite :

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right]=[2\pi]\left[\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{[l]^{\frac{1}{2}}}{[g]^{\frac{1}{2}}}=\frac{L^{\frac{1}{2}}}{\left(L\cdot T^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{L^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}\cdot T^{-1}}=T \text{ car } [2\pi]=1$$

   Le terme de droite est homogène à une durée et la période est elle-aussi homogène à une durée : **l'équation est homogène**.

2. Lorsqu'un balancier bat la seconde, cela signifie qu'il passe toutes les secondes à la verticale. La **période** T_0 correspond à un **aller-retour** du balancier, soit $\boxed{T_0=2\text{ s}}$.
3. Expression littérale de la longueur l_0 :

$$\sqrt{\frac{l_0}{g}}=\frac{T_0}{2\pi}\Leftrightarrow\frac{l_0}{g}=\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2\Leftrightarrow\boxed{l_0=g\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2}$$

   Application numérique : $l_0=0{,}994\text{ m}$ (sur la calculatrice). Le résultat avec un chiffre significatif s'écrit : $\boxed{l_0=1\text{ m}}$.

Exercice 3. Grandeurs énergétiques

1. $[E]=M.L^2.T^{-2}$ 2. $[P]=M.L^2.T^{-3}$ 3. $[a]=L$ et $[K]=M.L^3.T^{-2}$

Exercice 4. Grandeurs de Planck

1. $m_P=\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$, $l_P=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$, $t_P=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ 3. $T_P=\frac{m_P c^2}{k_B}$

*Exercice 5. Dimension d'une pression

1. Relation : $\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$ d'où équation aux dimensions :

$$[F]=M\frac{[v]}{T}=M.\frac{L.T^{-1}}{T} \text{ soit } \boxed{[F]=M.L.T^{-2}}$$

2. La relation entre une pression et une force est : $P = \dfrac{F}{S}$.

   L'équation aux dimensions s'écrit : $\left[P\right] = \dfrac{\left[F\right]}{\left[S\right]} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L^2}$ soit $\boxed{\left[P\right] = M.L^{-1}.T^{-2}}$.

   Unité dans le système international : P est en kg.m^{-1}.s^{-2}.
   L'unité usuelle est le Pascal (Pa).

3. Dimension de chaque grandeur :

   $\left[\Delta P\right] = M.L^{-1}.T^{-2}$ $\quad\left[g\right] = L.T^{-2}$ $\quad\left[T\right] = \theta$ $\quad\left[h\right] = L$

   Masse volumique : relation $\rho = \dfrac{m}{V}$ d'où : $\left[\rho\right] = \left[\dfrac{m}{V}\right] = \dfrac{M}{L^3} = M.L^{-3}$

   Équation aux dimensions :

$$\left[\Delta P\right] = \left[g\right]^a \left[T\right]^b \left[h\right]^c \left[\rho\right]^d$$

$$M.L^{-1}.T^{-2} = \left(L.T^{-2}\right)^a \left(\theta\right)^b \left(L\right)^c \left(M.L^{-3}\right)^d$$

$$M.L^{-1}.T^{-2} = L^a T^{-2a} \theta^b L^c M^d L^{-3d}$$

   Identification :

$$\begin{cases} M = M^d \\ L^{-1} = L^a L^c L^{-3d} = L^{a+c-3d} \\ T^{-2} = T^{-2a} \\ 1 = \theta^b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ -1 = a + c - 3d \\ a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ soit } \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}}$$

   La relation s'écrit donc : $\boxed{\Delta P = gh\rho}$: la variation de pression est indépendante de la température.