DS N° 10 : algèbre, commentaires

Problème 2

La présentation des copies est globalement satisfaisante.

Ce problème n'a pas été bien réussi dans l'ensemble, il y avait en réalité très peu de calculs à faire, c'était surtout du raisonnement autour de la notion d'orthogonalité et les propriétés du produit scalaire. Beaucoup se sont fourvoyés dans des calculs d'intégrales de produits de sommes dont ils ne se sont pas sortis...

Q1 Question bien réussie, à noter cependant que plusieurs ne connaissent pas encore la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$!

Q2 Très mal réussie. Cette question a mis en évidence dans bon nombre de copies, une confusion manifeste entre supplémentaire et complémentaire, beaucoup ont dit que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ (ce qui est vrai), or X^n n'est pas dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (ce qui est vrai), donc X^n est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ ce qui est faux!! Pour d'autres un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ ne peut pas être dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$!! Ce qui est faux bien sûr, le polynôme nul est bien dans les deux (et c'est le seul).

Q3a Question bien réussie dans l'ensemble.

Q3b Assez bien réussie, sauf pour prouver que Q_n est de degré au plus n et qu'il est non nul. Dire que le coefficient $a_{n,n}$ est non nul (car $\deg(P_n) = n$) ne suffit pas pour prouver que R_n est non nul, par exemple, 1 est non nul, pourtant $\frac{1}{X} + \frac{-1}{X}$ est nul...

Q3c Très peu ont fait le rapprochement entre R_n et le produit scalaire de l'énoncé. Il fallait voir que pour tout entier $k \in [\![0\,;n]\!]$, $R_n(k) = (X^k \mid P_n)$, et ne pas perdre de vue tout au long du problème que $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$...
La justification de la factorisation de Q_n est rarement bien faite, beaucoup y voit le théorème de D'Alembert-Gauss (qui dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos)!!
Dire que $\deg(Q_n) \leqslant n$ et Q_n admet $0,\dots,n-1$ comme racines ne suffit pas justifier la factorisation (le polynôme nul vérifie aussi ces hypothèses). Pour certains cela faisait $n-1$ racines pour Q_n...

Q3d Très peu ont su mené à bien la décomposition en éléments simples de la fraction R_n. Rares sont ceux qui ont pensé à la partie entière par exemple. Si beaucoup se souviennent néanmoins de la méthode pour calculer $a_{n,k}$, on multiplie par $X+k+1$ et on évalue en $-(k+1)$, beaucoup n'évaluent pas sur la bonne valeur!
Notons enfin une erreur grave de compréhension de la notion d'indice dans bon nombre de copies où on voit que si $Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$, alors $Q_n(-k-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(-k-1-k)$ ce qui est évidemment n'importe quoi, il faut changer le nom de l'indice avant d'évaluer en $-k-1$...
Les coefficients du polynôme P_n étant donnés dans l'énoncé, écrire seulement l'expression du polynôme ne rapportait évidement pas de points!

Q3e Très mal réussie bien que ce soit une question simple... Pour beaucoup une famille orthogonale est automatiquement une base dès qu'elle a le bon cardinal, c'est faux! Elle pourrait contenir le vecteur nul par exemple. Il n'y avait aucun calcul dans cette question.

Q4a Très mal réussie. Là encore, il n'y avait aucun calcul à faire. Certains ont bien écrit que $(P_n \mid P_n) = (\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k \mid P_n)$, puis ont affirmé que $\sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}X^k = P_{n-1}$, c'est évidemment n'importe quoi!! Il suffisait d'utiliser que si $k < n$, $X_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ donc $(X^k \mid P_n) = 0$.

Q4b Peu arrivent au bout du calcul. Les autres ont perdu de vue l'expression de R_n sous forme d'une seule fraction avec Q_n...

Q4c Dans la plupart des copies, l'inverse de $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ est exactement $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$!!

Quelques uns ont su justifier correctement la deuxième partie de la question en rappelant précisément l'énoncé du théorème de Schmidt, et en montrant que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ vérifiait bien TOUTES les conditions. L'unicité faisait le reste.

Ceux qui ont cherché à appliquer effectivement l'algorithme de Schmidt n'ont pas pu aboutir...

Q5ai Parfois bien traitée. Il ne fallait pas oublier que T_i est colinéaire à P_i pour éviter tout calcul...

Q5aii Rarement bien justifiée, et beaucoup d'erreurs d'indices. La matrice B exprime dans la base $(T_0, \dots, T_n)$ les coordonnées des polynômes de la famille $(1, X, \dots, X^n)$ et non l'inverse ! Le coefficient $b_{i,j}$ est la coordonnée sur T_{i-1} (et non pas T_i) de X^{j-1} (et non pas X^j), cette coordonnée est $(X^{j-1} \mid T_{i-1})$ car la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une b.o.n.

Q5aiii Bien réussie par ceux qui ont traité cette question.

Q5b Le calcul de $c_{i,j}$ sous forme d'une somme est souvent correct, mais très peu reconnaissent un produit scalaire dans la base $(T_0, \dots, T_n)$.

Q5c Assez bien réussie par ceux qui ont traité cette question.