CHAPITRE OM6

Vecteurs : produit vectoriel, produit mixte

1 Produit vectoriel de deux vecteurs

1.1 Définition

➢ **<u>Définition</u>** : Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$, est un **vecteur** défini par :

- <u>Direction</u> : orthogonale au plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$
- <u>Sens</u> : donné par la règle du tire-bouchon ou de la main droite : le trièdre $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ est direct
- <u>Norme</u> : $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$

1.2 Propriétés

- Anti commutativité $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}}$
- Non associativité $\boxed{\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)}$
- Distributivité $\boxed{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}}$
- Associativité avec le produit simple $\boxed{k\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \left(k\vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(k\vec{b}\right)}$

1.3 Cas particuliers

- Vecteur nul : $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0}}$
- Vecteurs colinéaires

Propriété : Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **colinéaires**, alors le **produit vectoriel** $\vec{a} \wedge \vec{b}$ **est nul**.

1.4 Expression en coordonnées cartésiennes

➢ <u>Expression de $\vec{a} \wedge \vec{b}$</u> :

On utilise la notation colonne :

$$\vec{a} = \begin{array}{|l} \cancel{a_x} \\ a_y \\ a_z \end{array} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{array}{|l} \cancel{b_x} \\ b_y \\ b_z \end{array}$$

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{array}{|l} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array}}$$

➢ <u>Calcul pratique des composantes</u>

- Composante selon $\overrightarrow{u_x}$: On raye la ligne a_x, b_x et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - a_z b_y$$

1.4 Expression en coordonnées cartésiennes

➢ Expression de $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

On utilise la notation colonne :

$$\vec{a} = \left| \begin{array}{l} a_x \\ \cancel{a_y} \\ a_z \\ a_x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{b} = \left| \begin{array}{l} b_x \\ \cancel{b_y} \\ b_z \\ b_x \end{array} \right.$$

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \left| \begin{array}{l} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array} \right.}$$

➢ Calcul pratique des composantes

- Composante selon $\overrightarrow{u_y}$: On raye la ligne a_y, b_y, **on rajoute la ligne a_x, b_x sous la ligne a_z, b_z** et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} = a_z b_x - a_x b_z$$

1.4 Expression en coordonnées cartésiennes

➢ Expression de $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

On utilise la notation colonne :

$$\vec{a} = \left| \begin{matrix} a_x \\ a_y \\ \cancel{a_z} \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad \vec{b} = \left| \begin{matrix} b_x \\ b_y \\ \cancel{b_z} \end{matrix} \right.$$

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \left| \begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{matrix} \right.}$$

➢ Calcul pratique des composantes

- Composante selon $\overrightarrow{u_z}$: On raye la ligne a_z, b_z et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

1.5 Dérivation

Comme pour tout produit (scalaire, simple), la dérivée d'un produit vectoriel est obtenue en dérivant successivement les deux éléments du produit :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}}$$

1.6 Base orthonormée

➢ <u>Base cartésienne</u>

$$\overrightarrow{u_x}\wedge\overrightarrow{u_y}=\overrightarrow{u_z}\qquad\overrightarrow{u_y}\wedge\overrightarrow{u_z}=\overrightarrow{u_x}\qquad\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_x}=\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_x}\wedge\overrightarrow{u_z}=-\overrightarrow{u_y}\qquad\overrightarrow{u_y}\wedge\overrightarrow{u_x}=-\overrightarrow{u_z}\qquad\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_y}=-\overrightarrow{u_x}$$

➢ <u>Base cylindrique</u>

$$\overrightarrow{u_r}\wedge\overrightarrow{u_\theta}=\overrightarrow{u_z}\qquad\overrightarrow{u_\theta}\wedge\overrightarrow{u_z}=\overrightarrow{u_r}\qquad\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{u_r}\wedge\overrightarrow{u_z}=-\overrightarrow{u_\theta}\qquad\overrightarrow{u_\theta}\wedge\overrightarrow{u_r}=-\overrightarrow{u_z}\qquad\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_\theta}=-\overrightarrow{u_r}$$

2 Produit mixte entre trois vecteurs

➢ **Définition** : Le produit mixte est une opération entre les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ combinant produit vectoriel et produit scalaire : $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

Le résultat obtenu est un **scalaire**.

➢ Permutation circulaire des vecteurs

$$\boxed{\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \cdot \vec{a}}$$