2. Sommes

Dans toute la feuille, $n \in \mathbb{N}^*$. On essaiera autant que possible d'éviter de raisonner par récurrence même si cela sera parfois (rarement !) nécessaire.

Exercice 1. (c) Montrer les égalités suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{j=0}^{n-2} (n-j)^2 = 1.$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5 - \sum_{j=4}^{n+2} (j-2)^5 = 1.$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k+2} = \frac{3^{n+3}}{2} - \frac{27}{2}.$

4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{2k} = \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{16}{3}.$

Exercice 2. (c) Montrer les égalités suivantes :

1) $\displaystyle 2^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \cdot 2^{-k}\right) = 3^n - 2^n.$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2}.$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 3^k \cdot 2^{-k} = \frac{(-1)^n}{2^n}.$

Exercice 3. (c) Déterminer $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (ak+b)$ où a et b sont des réels fixés et $p \leq q$ des entiers fixés.

Exercice 4. (c) Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp(k) = \exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$

Exercice 5. (m) Le but de cet exercice est de fournir une méthode pour déterminer des formules pour calculer les sommes arithmétiques $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ où $p \in \mathbb{N}$. On pose $P_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^p - k^p\right)$.

1) Rappeler sans justification les valeurs de $S_0,\ S_1$.

2) Montrer en calculant P_3 de deux manières différentes que $P_3 = (n+1)^3$ et $P_3 = 3S_2 + 3S_1 + S_0$. Retrouver alors la valeur de S_2 vue en cours.

3) De la même manière, déterminer P_4 tout d'abord en fonction de n, puis en fonction de S_3, S_2, S_1 et S_0 et en déduire que :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 6. (m) Déterminer les sommes et produits suivants :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$

2) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 7. (m) Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est croissante et majorée.

Exercice 8. (m) Calculer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3$.

Exercice 9. (m) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 10. (i) Soient $a_1, \ldots, a_n \in]0, 1[$. Montrer que $\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Exercice 11. (i) Déterminer $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ en fonction de n.

Exercice 12. (i) Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 13. (∗) Simplifier le produit $\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}$.

Exercice 14. (m) Montrer que $\forall p, k, n \in \mathbb{N} \ /\ 0 \leq p \leq k \leq n,\ \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

Exercice 15. (m) Montrer les égalités suivantes :

1) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j) = n^2(n+1)$.
3) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
4) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 = \frac{n(n+1)}{2}$
5) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
6) $\sum_{1 \leq j < i \leq n} j = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

Exercice 16. (m) Calculer les expressions suivantes :

1) $\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij$. 2) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$. 3) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}$. 4) $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \binom{i}{j}$.

Exercice 17. (m) Montrer que $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geq 2$ et en déduire que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n > 0,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

Exercice 18. (i) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$. Que représente sur le triangle de Pascal la somme $\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}$? Conjecturez la valeur de cette somme puis prouver le résultat.