# 27. Déterminant, méthodologie

Dans tout le chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

## I. Déterminant d'une matrice

### *I.1. Définition*

**Définition.** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de $A$ est défini par

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \left( \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \right).$$

On note également $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

(m) Cette formule théorique sert surtout à obtenir des informations sur la « structure » du déterminant (car il est construit uniquement à partir de sommes et de produits).

**Exercice d'application 1.** Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A) \in \mathbb{Z}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$, a-t-on $\det(A) \in \mathbb{N}$ ?

**Remarque :** Dans le cas des matrices $2\times 2$ (et $3\times 3$ si on ne cherche pas une forme factorisée), la formule théorique est utilisable « à la main ». On a :

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ (formule de Sarrus).

On peut visualiser graphiquement ces formules en sommant les produits « diagonaux » en attribuant un signe + aux produits $\searrow$ et un signe − aux produits $\nearrow$.

**Exercice d'application 2.** Entourer en rouge les termes à multiplier ensemble avec un signe + et en bleu les termes à multiplier ensemble avec un signe − dans les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Cette méthode de calcul fonctionne-t-elle pour des matrices $4\times 4$ (et plus grand) ?

**Exercice d'application 3.** Calculer (sous forme développée) les déterminants :

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} 1+x & -2 \\ -1 & 2+x \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

### *I.2. Premières propriétés*

**Proposition.** Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure). Alors, $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

**Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^T)$.

### *I.3. n-linéarité du déterminant*

**Proposition.** Le déterminant est une forme linéaire par rapport à chacune de ses colonnes (et de ses lignes). On a donc par exemple pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \lambda b_{1,j} + \mu c_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & \lambda b_{2,j} + \mu c_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \lambda b_{n,j} + \mu c_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & b_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & b_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & c_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & c_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & c_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

## II. Calcul pratique du déterminant

**Théorème.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

(m) Cette propriété fondamentale du déterminant simplifie grandement les calculs de déterminant de produits de matrices (il est en général plus facile de calculer les déterminants de chaque matrice et de faire le produit que de faire des produits matriciels et ensuite calculer le déterminant).

**Exercice d'application 4.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer en fonction de $\det(A)$ :

1) pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^k)$.
2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A)$.

### *II.1. Opérations élémentaires et déterminant*

**Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A'$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue à partir de la matrice $A$ après une opération élémentaire. Alors :

- Si l'opération effectuée est $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$), on a $\det(A') = \lambda \det(A)$.
- Si l'opération effectuée est $L_i \leftrightarrow L_j$ (ou $C_i \leftrightarrow \lambda C_j$), on a $\det(A') = -\det(A)$.

- Si l'opération effectuée est $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ (ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$) avec $i \neq j$, on a $\det(A') = \det(A)$.

(m) On utilise très souvent les opérations élémentaires (en particulier les transvections $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, qui préservent le déterminant) pour transformer une matrice en matrice triangulaire où le calcul du déterminant est alors immédiat.

**Exercice d'application 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$.

**Exercice d'application 6.** On pose $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix}$.

1) Justifier que $\det(B) = \varepsilon \det(A)$ où $\varepsilon = \pm 1$.

2) Préciser la valeur de $\varepsilon$ en fonction de $n$ en séparant les cas $n$ pair et $n$ impair.

*II.2. Déterminant et matrices inversibles*

**Théorème.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et on a alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(m) Pour justifier qu'une matrice est inversible, il suffit donc de prouver que son déterminant est non nul.

**Exercice d'application 7.** Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $ABC \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer à l'aide du déterminant que les trois matrices $A, B$ et $C$ sont inversibles.

*II.3. Développement du déterminant par rapport aux lignes/colonnes*

**Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue à partir de $A$ en effaçant la ligne $i$ et la colonne $j$. On dit que $\det(A_{i,j})$ est le mineur d'indice $(i, j)$ de la matrice $A$.

**Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det(A_{i,k})$ (développement p/r à la ligne $i$).
- $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det(A_{k,j})$ (développement p/r à la colonne $j$).

(m) Pour visualiser ce résultat graphiquement, on peut entourer la ligne /colonne par rapport à laquelle on développe le déterminant et placer des signes $+/-$ (qui sont « en damier » en commençant par un $+$ en haut à gauche) pour déterminer les signes de chaque terme $a_{i,j} \times \det(A_{i,j})$ qui correspond au coefficient $(i, j)$ de la matrice $A$ multiplié par le déterminant de la matrice extraite $A_{i,j}$ (où on a effacé la ligne et la colonne qui passent par $a_{i,j}$). Voici le positionnement des signes pour une matrice $4 \times 4$ :

$$\begin{pmatrix} a^+ & b^- & c^+ & d^- \\ e^- & f^+ & g^- & h^+ \\ i^+ & j^- & k^+ & l^- \\ m^- & n^+ & o^- & p^+ \end{pmatrix}.$$

Par exemple, en développant par rapport à la 2ième ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e^- & f^+ & g^- & h^+ \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -e \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + f \times \begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} - g \times \begin{vmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + h \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}.$$

et par rapport à la 3ième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c^+ & d \\ e & f & g^- & h \\ i & j & k^+ & l \\ m & n & o^- & p \end{vmatrix} = c \times \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - g \times \begin{vmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + k \times \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{vmatrix} - o \times \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}.$$

(m) Cette formule est très souvent utilisée pour trouver des formules de récurrence sur les déterminants contenant beaucoup de 0 (car beaucoup de termes du développement sont alors nuls) si la forme de la matrice est globalement préservée si l'on supprime une ligne/colonne puisqu'elle permet de passer de la matrice de taille $n$ à une matrice de taille $n-1$.

**Exercice d'application 8.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$ (c'est le déterminant d'une matrice $n \times n$). Déterminer $u_1$ puis en développant ce déterminant par rapport à la première ligne, déterminer $u_n$ en fonction de $n$.

*II.4. Déterminant de Vandermonde*

**Théorème.** Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

**Exercice d'application 9.** Déterminer une expression factorisée de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

**Exercice d'application 10.** Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}_n = \prod_{k=1}^{n-1} k!.$

## III. Comatrice

**Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i,j}$ la matrice extraite de la matrice $A$ où on a effacé la ligne $i$ et la colonne $j$. On pose $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ le cofacteur d'indice $(i, j)$ de la matrice $A$.

On note $\mathrm{Com}(A) = (\Delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la comatrice de $A$.

**Théorème.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_n$. En particulier, si $A$ est inversible, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^T$.

**Remarque :** On a donc une formule permettant de calculer $A^{-1}$. Cette formule est très peu utilisée en pratique pour calculer $A^{-1}$ car calculer tous les cofacteurs est très lent à part pour les matrices $2 \times 2$.

**Exercice d'application 11.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad - bc \neq 0$. Justifier que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

## IV. Construction du déterminant

### *IV.1. Longueur/aire/volume orienté.e*

### *IV.2. Formes n-linéaires alternées*

**Définition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$. On dit que $\varphi$ est une forme $n$-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses coordonnées, c'est à dire que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall f_1, \dots, f_i, f_i', \dots, f_n$ :

$$\varphi(f_1, \dots, \lambda f_i + \mu f_i', \dots, f_n) = \lambda \varphi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n) + \mu \varphi(f_1, \dots, f_i', \dots, f_n).$$

**Définition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$. On dit que $\varphi$ est :

- symétrique si

$$\forall f_1, \dots, f_n \in E, \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n) = \varphi(f_1, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_n).$$

- antisymétrique si

$$\forall f_1, \dots, f_n \in E,\ \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n) = -\varphi(f_1, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_n).$$

- alternée si

$$\forall f_1, \dots, f_n \in E,\ \forall i, j \in [\![1, n]\!] \ / \ i \neq j,\ f_i = f_j \Rightarrow \varphi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n) = 0.$$

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme $n$-linéaire. Alors, $\varphi$ est antisymétrique si et seulement si $\varphi$ est alternée.

*IV.3. Déterminant d'une famille de vecteurs*

**Définition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Le déterminant de la famille $f$ exprimée dans la base $e$ est $\det_e(f) = \det(\mathrm{Mat}_e(f))$.

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors il existe une unique forme $n$-linéaire alternée $\varphi$ telle que $\varphi(e) = 1$ et on a $\varphi = \det_e$.

*IV.4. Propriétés du déterminant*

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de $E$. Alors :

$$\det_{e'} = \det_{e'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_e.$$

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Alors, $f$ est une base de $E$ si et seulement si $\det_e(f) \neq 0$.

*IV.5. Retour sur le déterminant d'une matrice*

*IV.6. Déterminant d'un endomorphisme*

**Définition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in L(E)$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors, le déterminant de $u$ calculé dans la base $e$ est $\det_e(u) = \det(\mathrm{Mat}_e(u))$.

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in L(E)$. Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de $E$. Alors $\det_e(u) = \det_{e'}(u)$. *Autrement dit, le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle il est calculé. On le notera donc juste* $\det(u)$.

m Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on cherche en général une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est la plus simple possible

**Exercice d'application 12.** Calculer les déterminants des applications linéaires suivantes. *On ne demande pas de vérifier qu'elles sont bien linéaires, vous pouvez le faire si vous n'êtes pas convaincu, mais on vérifiera que les applications sont bien définies de $E$ dans $E$ et on déterminera une base simple de $E$.*

1) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P - 2P' + P'' \end{array} \right.$.

2) $E = \text{Vect}(\sin, \cos)$ et $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$.

**Proposition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soient $u, v \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

— $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.

— $u$ est inversible $\Leftrightarrow \det(u) \neq 0$ et alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

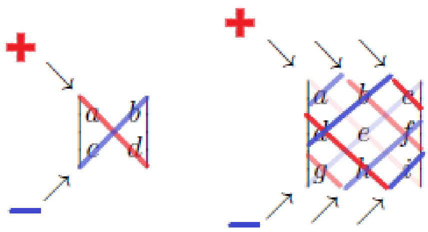
— $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.

— $\det(\text{Id}_E) = 1$.

## V. Correction des exercices

**Exercice d'application 1.** Si les coefficients de $A$ sont entiers, puisque l'on ne fait que des sommes et des produits en calculant le déterminant, alors $\det(A)$ est entier. Si $A$ est à coefficients entiers positifs, $\det(A)$ n'est pas nécessairement un entier positif car dans la définition de $\det(A)$, la signature $\varepsilon(\sigma)$ peut être négative. Par exemple, on a $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

**Exercice d'application 2.** On pourra se référer au cours si les couleurs sont difficiles à visualiser :




On ne peut pas adapter ces dessins pour des matrices $4 \times 4$ (et de taille plus grande). En effet, si une matrice est de taille $n \times n$, on a exactement $2n$ « diagonales » alors qu'il y a $n!$ permutations (on remarquera que pour $n = 2$, $n! = 2$ et on compte 2 diagonales et que pour $n = 3$, on a $2n = n!$ donc on n'oublie aucune permutation). Dans le cas $n = 4$, on manquerait par exemple la transposition $(1\ 2)$ qui correspond au terme suivant qui n'apparait dans aucune diagonale :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = -ebkp + \dots$$

**Exercice d'application 3.** On applique les formules :

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14$ et $\begin{vmatrix} 1+x & -2 \\ -1 & 2+x \end{vmatrix} = (1+x)(2+x) - 2 = x^2 + 3x$.

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 6 - (-9) - 0 - 8 = 5$.

3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

**Exercice d'application 4.**

1) pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^k) = \det(A \times A \times \dots A) = \det(A) \times \det(A) \times \dots \times \det(A) = (\det(A))^k$. *On peut le rédiger par récurrence si on veut une preuve plus formelle.*

2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda I_n \times A) = \det(\lambda I_n) \times \det(A) = \lambda^n \det(A).$$

**Exercice d'application 5.** On retranche la première ligne à toutes les autres lignes (ce qui préserve le déterminant). Après avoir effectué les opérations $L_i \to L_i - L_1$, on obtient la matrice :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

qui est triangulaire supérieure. On en déduit que le déterminant recherché vaut $1 \times 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) = (n-1)!$.

**Exercice d'application 6.**

1) On peut passer de la matrice $A$ à la matrice $B$ en effectuant les opérations $L_1 \leftrightarrow L_n$, $L_2 \leftrightarrow L_{n-1}$, etc. (autrement dit en échangeant les lignes symétrique par rapport au « milieu » de la matrice). Puisque échanger une ligne revient à multiplier le déterminant par $-1$, on en déduit que $\det(B) = \varepsilon \det(A)$ où $\varepsilon = \pm 1$.

2) Pour trouver la valeur de $\varepsilon$, il faut compter exactement combien d'échanges on effectue. Si $n$ est pair, on remarque que l'on effectue $n/2$ échanges donc on a $\varepsilon = (-1)^{n/2}$. Si $n$ est impair, la ligne médiane n'a pas à être échangée (elle est déjà au milieu) et on effectue donc $(n-1)/2$ échanges. On a donc $\varepsilon = (-1)^{(n-1)/2}$.

**Exercice d'application 7.** On a $\det(ABC) \neq 0$ car $ABC$ est inversible et $\det(ABC) = \det(A) \times \det(B) \times \det(C)$. Puisque ce produit est non nul, cela signifie que les trois déterminants dans le produit sont non nuls et donc que les matrices $A, B$ et $C$ sont inversibles.

**Exercice d'application 8.** On a $u_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1$ et $u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. En suivant les indications de l'énoncé :

$$u_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + 0 = -u_{n-1}.$$

On en déduit donc par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^{n+1}$ (ce qui confirme notre valeur de $u_2$).

**Exercice d'application 9.** Puisqu'une matrice a le même déterminant que sa transposée, on a en utilisant la formule de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

**Exercice d'application 10.** On reconnait un déterminant de Vandermonde de taille $n \times n$ avec $x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_{n-1} = n$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}_n &= \prod_{0\leq i<j\leq n-1} (j+1-(i+1)) \\
&= \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=0}^{j-1}(j-i) \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} j!.
\end{aligned}$$

**Exercice d'application 11.** On a $\det(A) = ad - bc \neq 0$ donc $A$ est inversible. On a $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc on en déduit que :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice d'application 12.** Calculer les déterminants des applications linéaires suivantes. *On ne demande pas de vérifier qu'elles sont bien linéaires, vous pouvez le faire si vous n'êtes pas convaincu, mais on vérifiera que les applications sont bien définies de $E$ dans $E$ et on déterminera une base simple de $E$.*

1) $u$ est bien définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ car en dérivant on ne peut que perdre des degrés. Elle est bien linéaire car la dérivation l'est. Une base de $\mathbb{R}_2[X]$ étant $(1, X, X^2)$ et puisque $u(1) = 1$, $u(X) = X - 2$ et $u(X^2) = X^2 - 4X + 2$, on a :

$$\det(u) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$u$ est donc un automorphisme (endomorphisme bijectif).

2) Si $f \in E$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $f = \lambda \sin + \mu \cos$. On a alors $f$ dérivable comme somme de fonctions dérivables et $u(f) = \lambda \cos - \mu \sin \in E$. $u$ est donc bien un endomorphisme. De plus, $(\sin, \cos)$ est une base de $E$ (elle est génératrice par définition et libre car sin et cos le sont. Pour le montrer, on part de $\lambda \sin + \mu \cos = 0$. Puisque cette fonction est nulle, en l'évaluant en 0, on obtient $\mu = 0$ et en $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda = 0$). On en déduit, en calculant le déterminant de $u$ dans cette base que :

$$\det(u) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$u$ est donc un automorphisme.