Programme de colle, semaine 13

Limites et continuité :

- Nous avons commencé par l'étude des limites de fonctions. Nous avons vu la définition epsilonesque, la définition d'une limite à gauche et à droite, la caractérisation séquentielle ainsi que les opérations usuelles (somme, produit, rapport, composition). Nous avons également rappelé les propriétés démontrées pour les suites (principes des gendarmes, passage à la limite dans les inégalités larges, etc.).
- Nous avons ensuite étudié le cas des fonctions monotones. Nous avons montré le théorème de la limite monotone ($f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante admet une limite finie en b si f est majorée et tend vers $+\infty$ en b si f n'est pas majorée. Nous en avons déduit qu'une fonction monotone admettait toujours une limite à gauche et à droite en tout point de son domaine de définition.
- Nous avons donné la définition d'une fonction continue, donné une caractérisation séquentielle, vu la continuité à gauche et à droite (et montré que f est continue en x_0 ssi elle est continue à gauche et à droite en x_0). Nous avons démontré le théorème de prolongement des fonctions continues (si $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $h :]b, c] \to \mathbb{R}$ sont continues et admettent la même limite en b, alors la fonction f égales à g à gauche, h à droite et la limite commune en b est continue).
- Nous avons déduit de l'étude des limites toutes les propriétés usuelles (somme, produit, rapport, composition de fonctions continues). Nous avons vu le cas particulier des fonctions monotones (elles sont continues en x_0 ssi leur limite à gauche est égale à leur limite à droite. Nous avons vu un contre exemple dans le cas où la fonction n'est pas monotone).
- Nous avons démontré les propriétés globales sur la continuité, en commençant par voir une application de la densité à l'étude des fonctions continues (deux fonctions continues égales sur un ensemble dense sont égales partout).
- Nous avons ensuite démontré le théorème des valeurs intermédiaires (et vu une extension dans le cas où f est défini sur un intervalle ouvert avec une limite strictement négative d'un côté et strictement positive de l'autre). Nous avons montré que si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.
- Nous avons montré que si f est continue sur un segment, alors elle est bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes). Nous avons ensuite démontré brièvement qu'une fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone (preuve non exigible) et le théorème de la bijection continue (f continue sur un intervalle I strictement monotone est bijective à valeurs dans $f(I)$ est bijective et sa réciproque est continue).

Remarques sur le programme :

L'uniforme continuité n'a pas été vue (elle sera étudiée en fin d'année dans le chapitre d'intégration conformément au programme). Les structures algébriques ainsi que les comparaisons de suites ont été vues.

Compétences :

- Utiliser des suites (caractérisation séquentielle de la continuité) pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite.
- Utiliser les limites à gauche et à droite pour montrer qu'une fonction n'est pas continue.
- Utiliser le théorème des gendarmes et des encadrements pour montrer qu'une fonction est continue en un point (en encadrant par des fonctions dont la limite est connue).

— Penser à utiliser la densité (de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par exemple) pour étendre une propriété vraie sur un ensemble dense à $\mathbb{R}$ pour une fonction continue.
— Déterminer l'existence de zéros de fonctions continues en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires / se ramener à une situation où l'on peut utiliser le TVI.
— Se ramener (quand cela est possible) à un segment pour pouvoir utiliser le théorème des bornes atteintes pour déterminer un minimum/maximum de fonctions.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un groupe, d'un anneau et d'un corps et illustrer par des exemples (attendu : pour le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$, pour l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et pour le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$).
2. Donner les caractérisations à l'aide du quotient de $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ si (v_n) ne s'annule pas et illustrer avec quelques exemples. Citer également la formule de Stirling.
3. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction f et l'utiliser pour démontrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.
4. Montrer que $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. *On séparera l'étude sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}$ en étudiant dans ce dernier cas les limites à gauche et à droite.*
5. Énoncer les différentes propriétés des fonctions monotones (théorème de la limite monotone et existence des limites à gauche et à droite en chaque point) et démontrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone sur un intervalle I et que x_0 est dans l'intérieur de I, alors f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
6. Montrer le théorème des valeurs intermédiaires (version $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule par la méthode dichotomique). *Attendu : explication graphique de l'algorithme pour construire les suites adjacentes puis démonstration propre de la convergence vers un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*
7. Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue alors elle admet un point fixe. *Attendu : en étudiant $x \mapsto f(x) - x$ et en utilisant le TVI.*
8. Montrer qu'une fonction continue sur un segment est majorée (première partie du théorème des bornes atteintes).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 14 : 14 et 15.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD14 : 5
- 2ieme du groupe : TD14 : 18
- 3ieme du groupe : TD14 : 10

Prochain programme : arithmétique

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 5 :

- Démontrer que f est paire en utilisant la propriété vérifiée par f pour réduire l'étude à $\mathbb{R}_+$.
- Montrer par récurrence que si on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (x_0)^{2^n}$.
- Fixer $x_0 \in [0, 1[$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = f(x_0)$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(0)$.
- En déduire que f est constante sur $[0, 1[$ égale à $f(0)$.
- Utiliser alors la continuité de f pour justifier que $f(1) = f(0)$.
- Procéder de la même manière en fixant $y_0 > 1$ et en étudiant la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \sqrt{y_n}$ pour montrer que f est constante égale à $f(1)$ sur $]1, +\infty$.

Exo 18 :

- Procéder par récurrence pour la première question.
- Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et utiliser le fait que g est à valeurs dans $[0, 1]$ pour montrer qu'elle est minorée par 0.
- En déduire la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite $l \in [0, 1]$ et démontrer que $f(l) = l$ et que $g(l) = l$.
- Utiliser ensuite le point l pour contredire $\forall x \in [0, 1],\ f(x) > g(x)$ et en déduire que $\exists x_1 \in [0, 1]\ /\ f(x_1) \leq g(x_1)$.
- Procéder de la même manière pour montrer que l'on a pas $\forall x \in [0, 1],\ f(x) < g(x)$ et en déduire que $\exists x_2 \in [0, 1]\ /\ f(x_2) \geq g(x_2)$.
- Montrer l'existence de a à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f - g$.

Exo 10 :

- Revenir à la définition pour écrire avec des quantificateurs $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.
- En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq b,\ f(x) \neq 0$.
- Utiliser alors le TVI (en en vérifiant les hypothèses !) pour montrer que $\forall x \geq b,\ f(x) > 0$ ou que $\forall x \geq b,\ f(x) < 0$. *Autrement dit que f ne change pas de signe à partir du rang b.*
- Revenir alors à la définition avec des quantificateurs de $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$ et se placer à un nouveau rang plus loin que b afin de pouvoir enlever les valeurs absolues, ce qui devrait vous faire apparaitre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.