CHAPITRE OS11
Filtrage analogique du signal

➢ Problématique

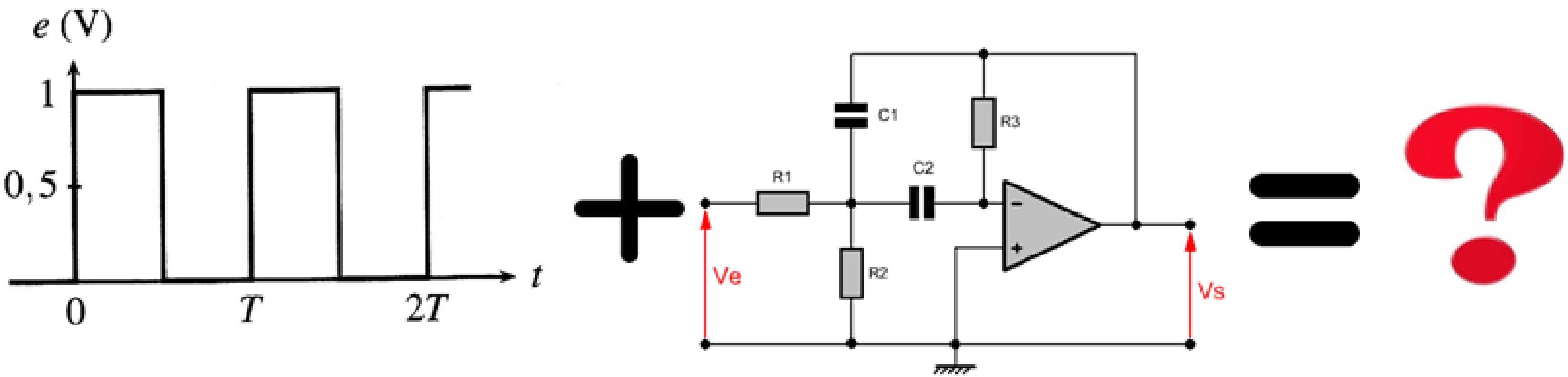


FIGURE 1 : Passage d'un signal carré à travers un filtre

Quelle est l'allure du signal de sortie ?

Quelles sont ses caractéristiques ?

Quelles sont les actions du filtre sur le signal d'entrée ?

➢ Étude des filtres **analogiques**

1 Signaux périodiques

1.1 Composante continue ou valeur moyenne

➢ **Définition**

$$\boxed{\langle s(t)\rangle = S_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt}$$

➢ Exemple

➢ Signal continu

1.2 Valeur efficace d'un signal périodique

➢ Puissance moyenne

Définition

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt}$$

➢ Valeur efficace

Définition

I_{eff} **intensité efficace** du courant alternatif $i(t)$

Définition : **valeur efficace S_{eff}**

$$\boxed{S_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$$

➢ Cas du signal sinusoïdal

$$\boxed{S_{eff} = \frac{S_M}{\sqrt{2}}}$$

➢ Mesure

1.3 Représentation fréquentielle ou spectre

1.3.1 Signal sinusoïdal

➢ Définition

$$s(t) = S_M \cos(\omega t + \varphi)$$

- **spectre en amplitude**
- **spectre de phase**

1.3.2 Signal périodique

➢ Décomposition en série de Fourier

Propriété

Harmonique de rang n ($n > 1$)

$$\boxed{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos\left(2\pi n f_S t + \varphi_n\right)}$$

➢ Vocabulaire

Composante continue = valeur moyenne

Fondamental ($n = 1$)

[1] P. Flandrin *et al.*, L'analyse de Fourier, pilier du numérique, *Pour La Science*, n°495, p. 54-62, Janvier 2019

➢ Spectre d'un signal périodique

spectre discret

➢ Exemples de spectres : signal carré et signal triangulaire

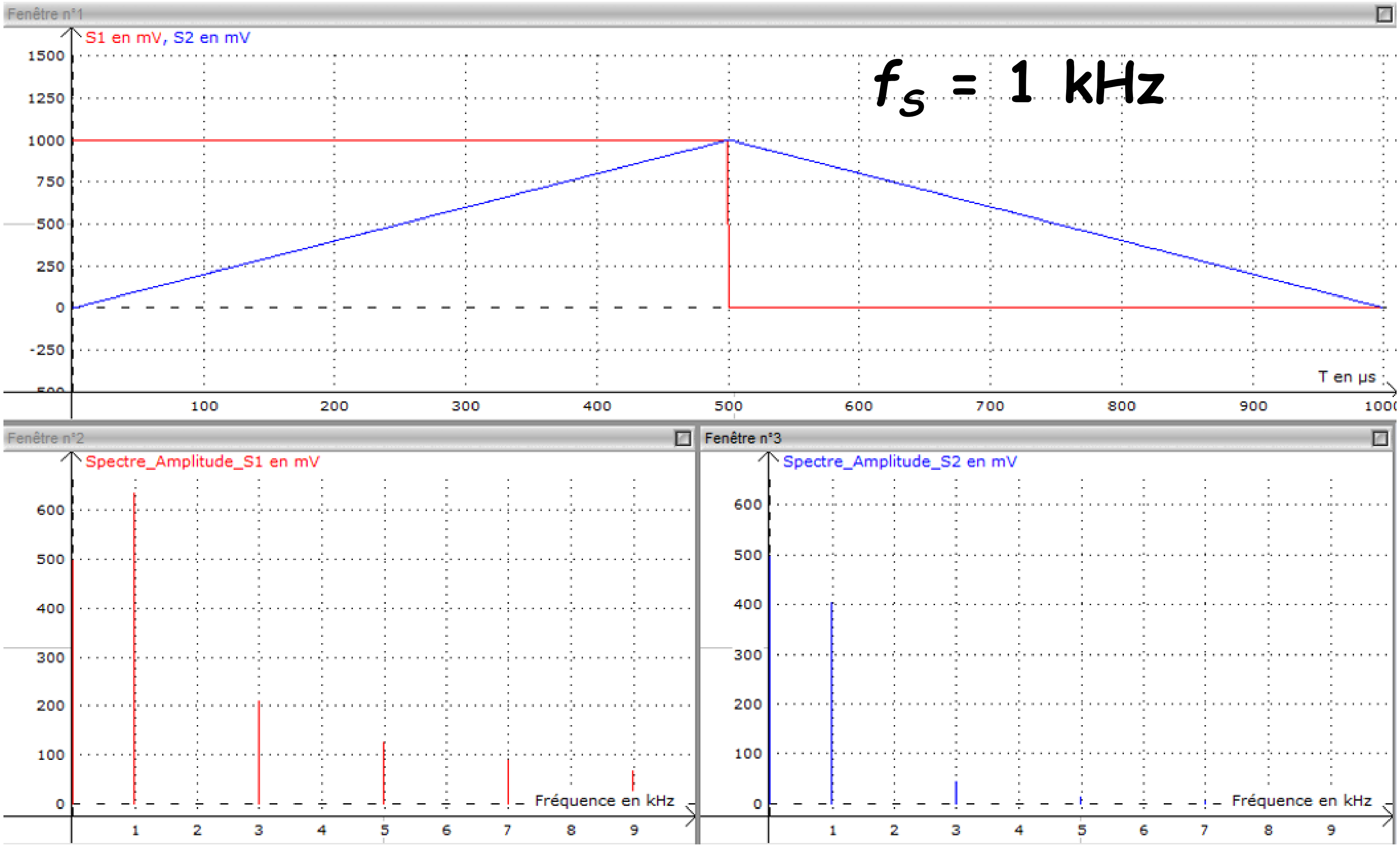
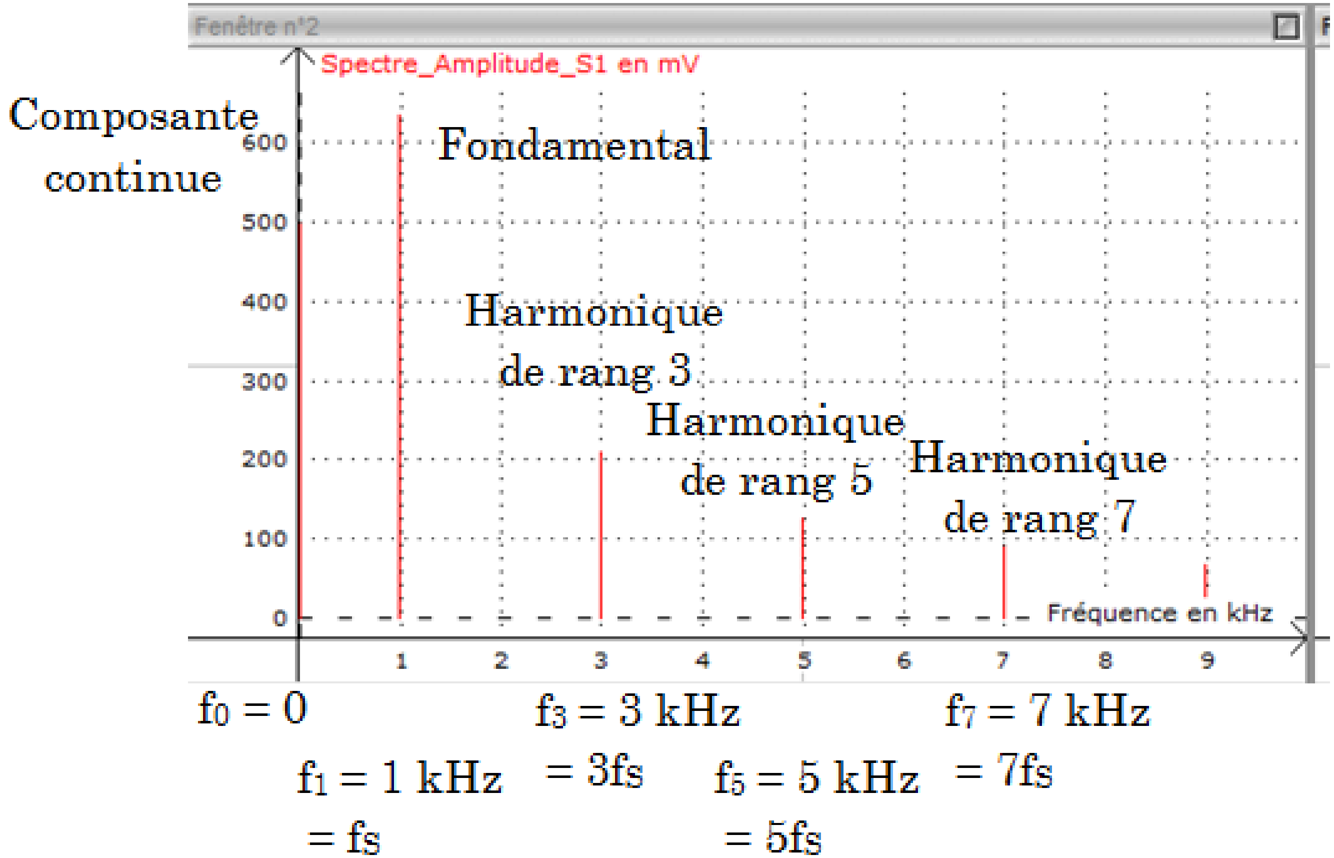


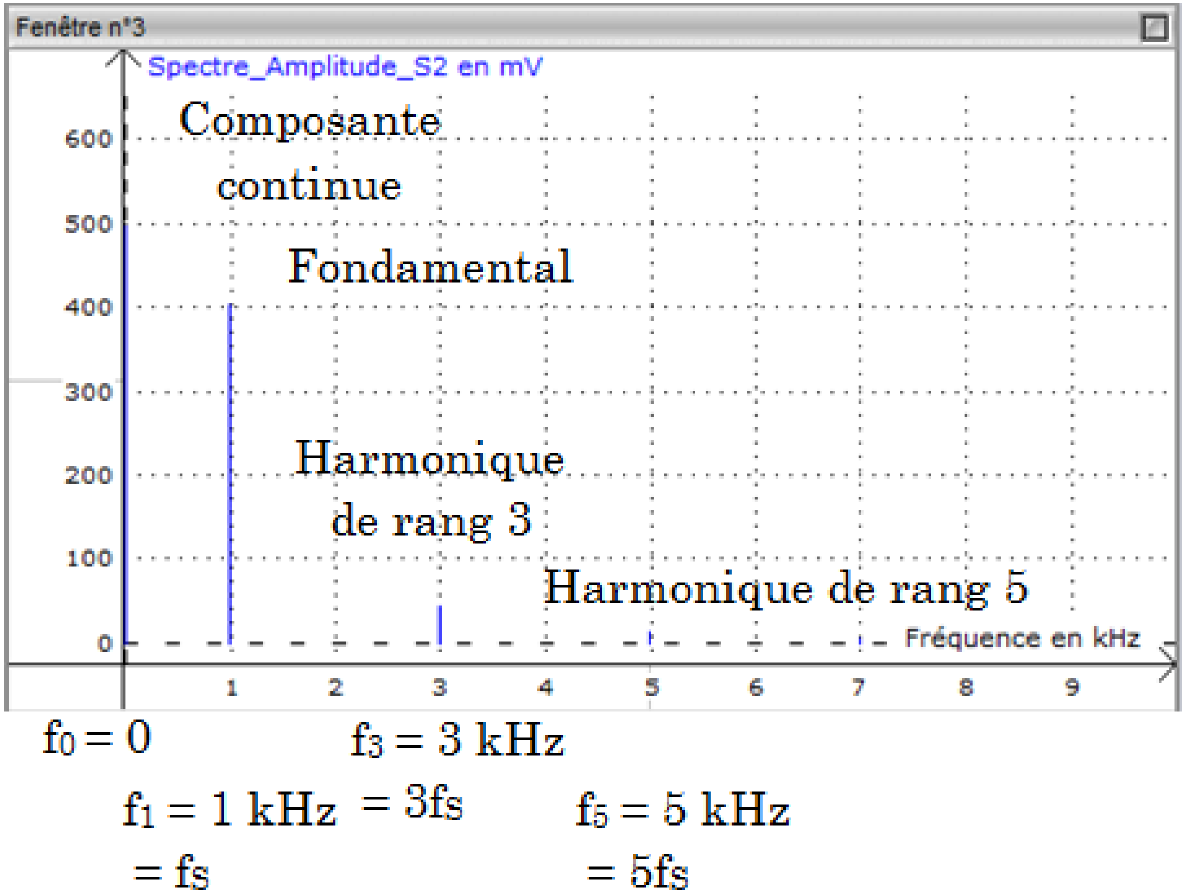
FIGURE 2 : Spectres des signaux carrés et triangulaires

➢ Exemples de spectres : signal carré et signal triangulaire



Signal carré

➢ Exemples de spectres : signal carré et signal triangulaire



Signal triangulaire

2 Filtrage analogique

2.1 Qu'est-ce qu'un filtre ?

➢ <u>Réalisation d'un filtre</u>

Convention récepteur

<u>Définition</u>

Convention générateur

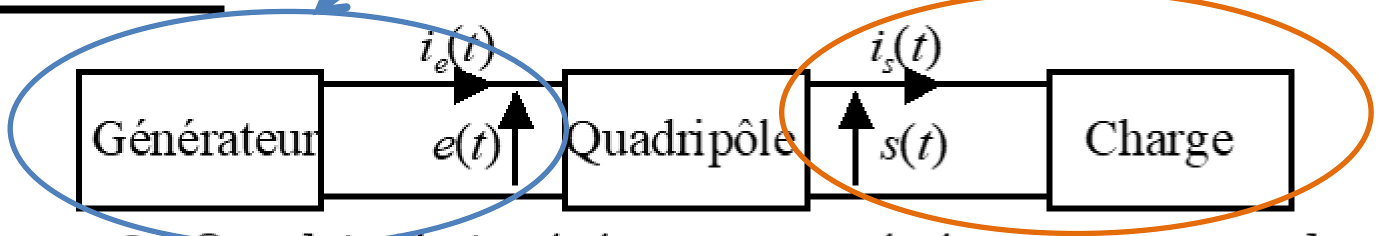


FIGURE 3 : Quadripôle inséré entre un générateur et une charge

➢ <u>Ordre d'un filtre</u>

- Filtre = quadripôle **linéaire**
- **signaux d'entrée et de sortie** reliés par une **équation différentielle**

<u>Définition</u> : **ordre du quadripôle**

➢ Actions d’un filtre

Étude en régime sinusoïdal forcé

Définition :

réponse fréquentielle ou harmonique

Propriété :

Actions d’un filtre sur un signal d’entrée sinusoïdal

- **conservation** de la **pulsation**
- **modification** de **l’amplitude**
  et de la **phase à l’origine**

2.2 Fonction de transfert

- Expressions des signaux d'entrée et de sortie
- Fonction de transfert

Définition : **fonction de transfert complexe (= transmittance)**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}=\frac{\underline{S}}{\underline{E}}}$$

- Établissement de la FT

Méthode 1 : avec circuit en RSF

Méthode 2 : avec éq. diff.

➢ Module et argument de la fct de transfert (FT)

$$\underline{H}(j\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| e^{j\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

Définitions :

- **Module : gain**

$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = G(\omega) = \frac{\left|\underline{S}\right|}{\left|\underline{E}\right|} = \frac{S_M}{E_M}}$$

rapport des amplitudes des signaux sinus

- **Argument : phase**

$$\boxed{\begin{aligned}\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) &= \varphi(\omega)\\ &= \arg\left(\underline{S}\right) - \arg\left(\underline{E}\right) = \varphi_s - \varphi_e\end{aligned}}$$

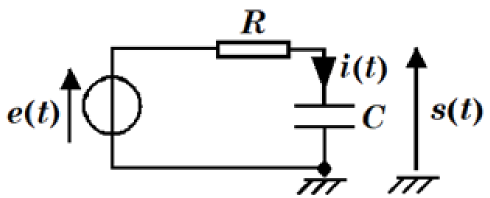
déphasage entre les signaux sinus

➢ Principe du filtrage

Propriété

Filtre agit sur les composantes d'1 signal sur un critère fréquentiel

➢ Exercice d'application 1



1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$ du circuit RC série ci-contre à partir du circuit étudié directement en notation complexe.
2. Déterminer les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert.
3. Retrouver l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert. Préciser l'ordre du filtre.

2.3 Réponse fréquentielle ou harmonique

➢ Tension d'entrée sinusoïdale

$$\boxed{e(t) = E_M \cos(\omega_e t + \varphi_e)}$$

➢ Expression de la réponse du circuit

La réponse, i.e. la tension de sortie, est :

sinusoïdale, de **même pulsation** ω_e

$$s(t) = S_M \cos(\omega_e t + \varphi_s)$$

? ?

$$\boxed{s(t) = G(\omega_e) E_M \cos(\omega_e t + \varphi_e + \varphi(\omega_e))}$$

3 Diagramme de Bode

Visualisa° action filtre sur 1 signal d'entrée selon sa pulsa° ω :

graphe variations module / argument de la FT **en fct de** ω

3.1 Échelle logarithmique

- Changement d'échelle
- Échelle logarithmique

Définition : Échelle logarithmique

- Exemple de papier semi-logarithmique à 4 décades

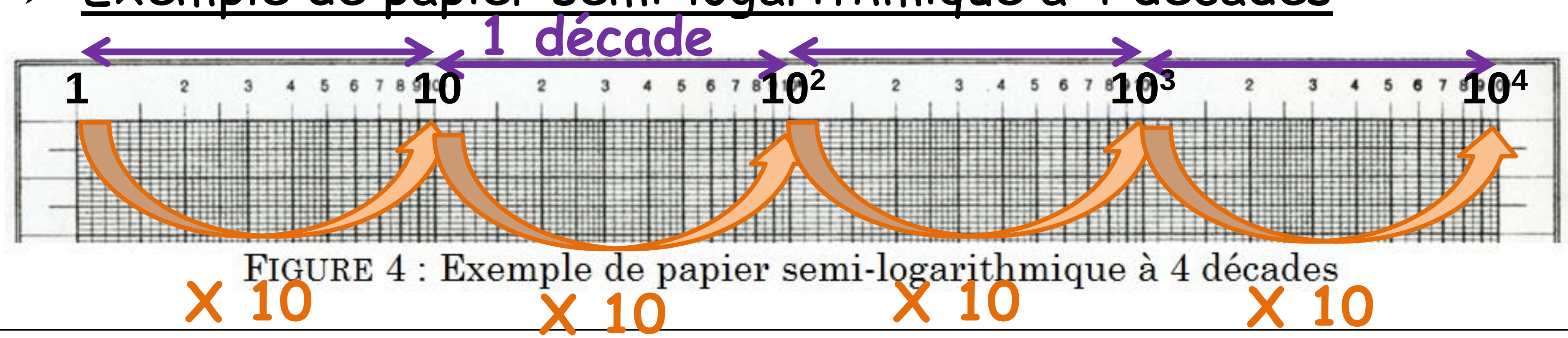


FIGURE 4 : Exemple de papier semi-logarithmique à 4 décades

➢ Exemple : courbe de gain avec les deux échelles

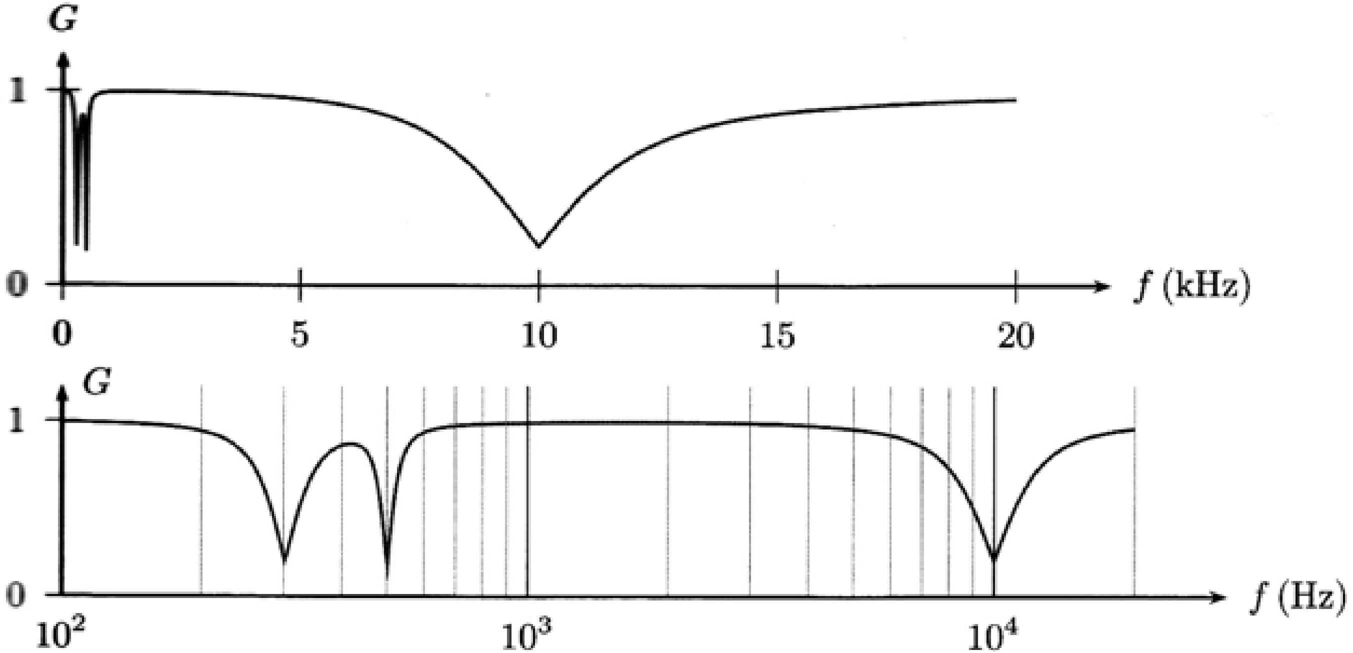


FIGURE 5 : Courbe de gain $G(f)$ tracée en échelle linéaire (en haut) et en échelle logarithmique (en bas)

Intérêt de l'échelle logarithmique

3.2 Gain en décibel

➢ **Définition** : Gain en décibel

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log\left(G(\omega)\right) \quad (\mathrm{dB})}$$

Amplification : $G_{dB} > 0$ ou atténuation $G_{dB} < 0$

3.3 Diagramme de Bode

3.3.1 Définition

➢ **Définition** : Diagramme de Bode

- courbe de gain $G_{dB}(\omega)$
- courbe de phase $\varphi(\omega)$

➢ **Remarque** $\log(x) = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = \log\left(\dfrac{f}{f_0}\right)$

3.3.2 Exemple du circuit RC série (ex. d'appl. 1)

- FT
- Diag. de Bode
- Commentaires

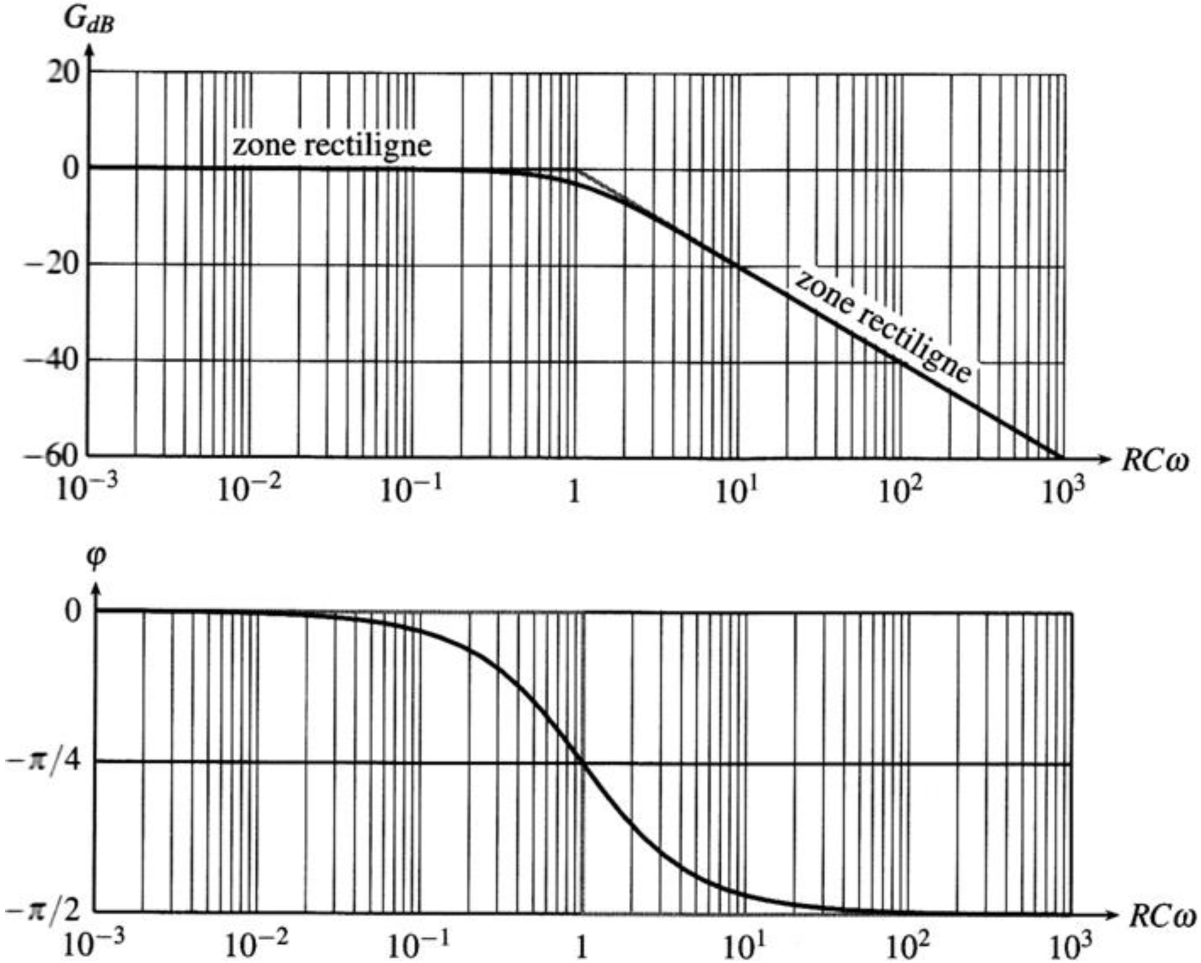


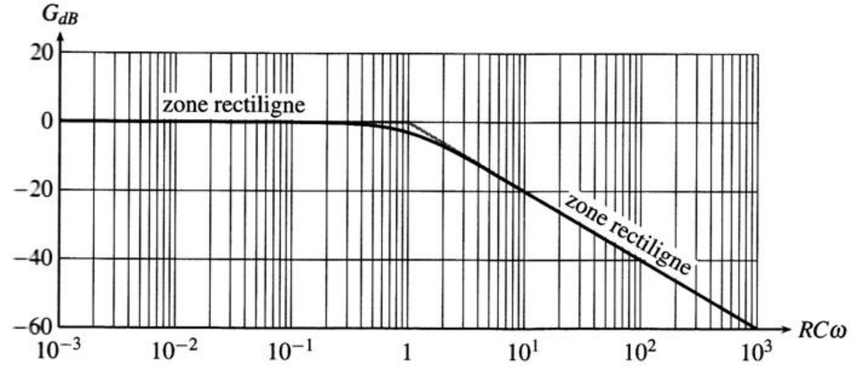
FIGURE 6 : Courbes de gain et de phase du circuit RC

3.3.3 Diagramme de Bode asymptotique

- **Modélisation**

  Portions rectilignes

  Méthode

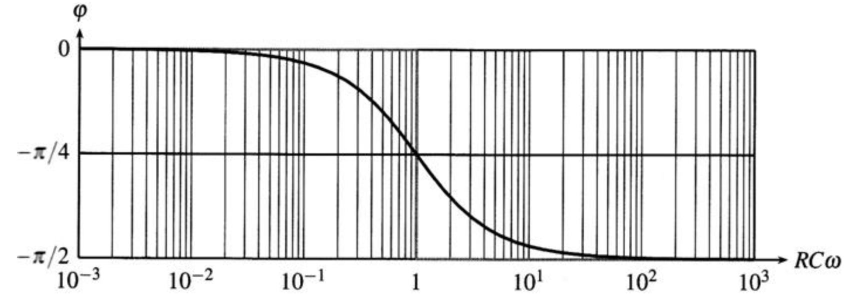


- **Asymptotes à la courbe de gain**

$$\boxed{G(\omega) = K\omega^n} \qquad \boxed{G_{dB}(\omega) = 20n\log(\omega) + B}$$

- **Asymptotes à la courbe de phase**

$$\boxed{\varphi(\omega) = cste}$$



3.3.4 Diagramme de Bode réel

Méthode

3.3.5 Cas d'un produit de FT

$$\underline{H} = \underline{H_1} \cdot \underline{H_2}$$

➢ Expression du gain et de la phase

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)}$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)}$$

➢ Obtention du diagramme de Bode

4 Caractéristiques d'un filtre

4.1 Pulsation de coupure – Bande passante

- **Définition** : Pulsation de coupure ω_C

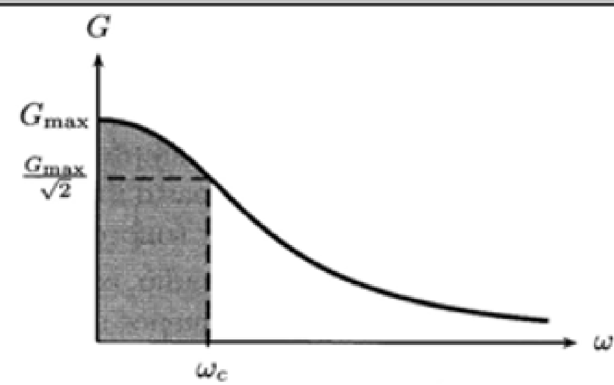
$$\boxed{G(\omega_C) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad G_{dB}(\omega_C) = G_{dB\max} - 3 \text{ dB}}$$

- **Définition** : Bande passante $\Delta\omega$

$$\boxed{\forall \omega \in \Delta\omega,\ \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{\max} \quad \Leftrightarrow \quad G_{dB\max} - 3\ dB \leq G_{dB}(\omega) \leq G_{dB\max}}$$

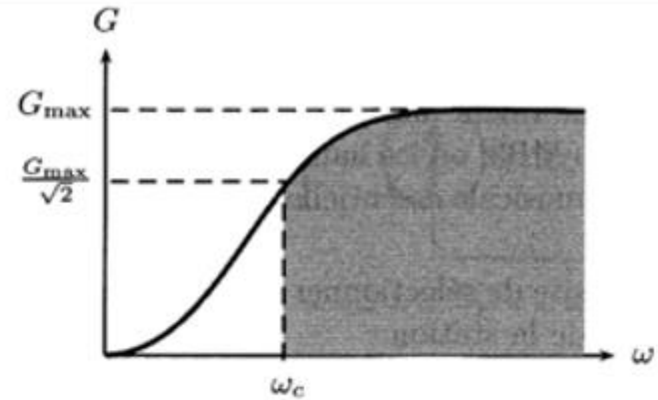
- Effet d'un filtre
  - laisse passer les signaux tq $\omega \in \Delta\omega$
  - atténue les signaux tq $\omega \notin \Delta\omega$

4.2 Modèles de filtres

<table>
<tr><th colspan="3">Filtre passe-bas</th></tr>
<tr><td>Courbe de gain</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Comportement aux limites</td><td>BF :
$\lim\limits_{\omega \to 0} G(\omega) = G_{\max} \neq 0$
$\lim\limits_{\omega \to 0} G_{dB}(\omega) = G_{dB\max}$</td><td>HF :
$\lim\limits_{\omega \to +\infty} G(\omega) = 0$
$\lim\limits_{\omega \to +\infty} G_{dB}(\omega) \to -\infty$</td></tr>
<tr><td>Bande passante</td><td colspan="2">$\mathrm{BP} = [0; \omega_C]$</td></tr>
</table>

4 Caractéristiques d'un filtre

4.2 Modèles de filtres

Filtre passe-haut		
Courbe de gain		
Comportement aux limites	BF : $\lim\limits_{\omega \to 0} G(\omega) = 0$; $\lim\limits_{\omega \to 0} G_{dB}(\omega) \to -\infty$	HF : $\lim\limits_{\omega \to +\infty} G(\omega) = G_{max} \neq 0$; $\lim\limits_{\omega \to +\infty} G_{dB}(\omega) = G_{dB\,max}$
Bande passante	$BP = [\omega_C ; +\infty]$	

4 Caractéristiques d'un filtre

4.2 Modèles de filtres

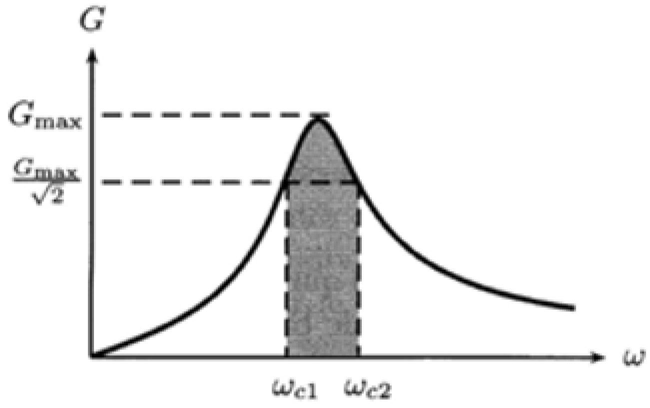
Filtre passe-bande		
Courbe de gain		
Comportement aux limites	BF : $\lim\limits_{\omega \to 0} G(\omega) = 0$ $\lim\limits_{\omega \to 0} G_{dB}(\omega) \to -\infty$	HF : $\lim\limits_{\omega \to +\infty} G(\omega) = 0$ $\lim\limits_{\omega \to +\infty} G_{dB}(\omega) \to -\infty$
Bande passante	$\text{BP} = [\omega_{C1} ; \omega_{C2}]$	

FIGURE 7 : Caractéristiques des filtres (bande passante en gris)

5 Étude de quelques filtres passifs

5.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

5.1.1 Exemple de circuit

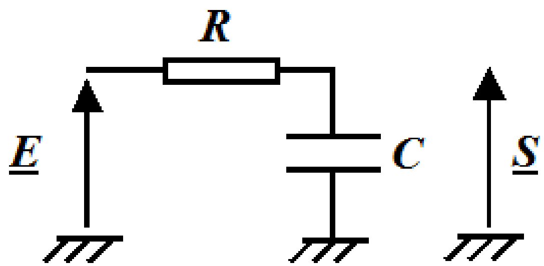


FIGURE 8 : Exemple de circuit réalisant un filtre passe-bas du 1er ordre

5.1.2 Étude qualitative à partir du circuit

- <u>Comportement du circuit aux limites</u>
- <u>Nature du filtre</u>

5.1.3 Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}}$$

τ : constante de temps (=*RC* pour ce circuit)

5.1.4 Diagramme de Bode

➢ Allure du diagramme de Bode

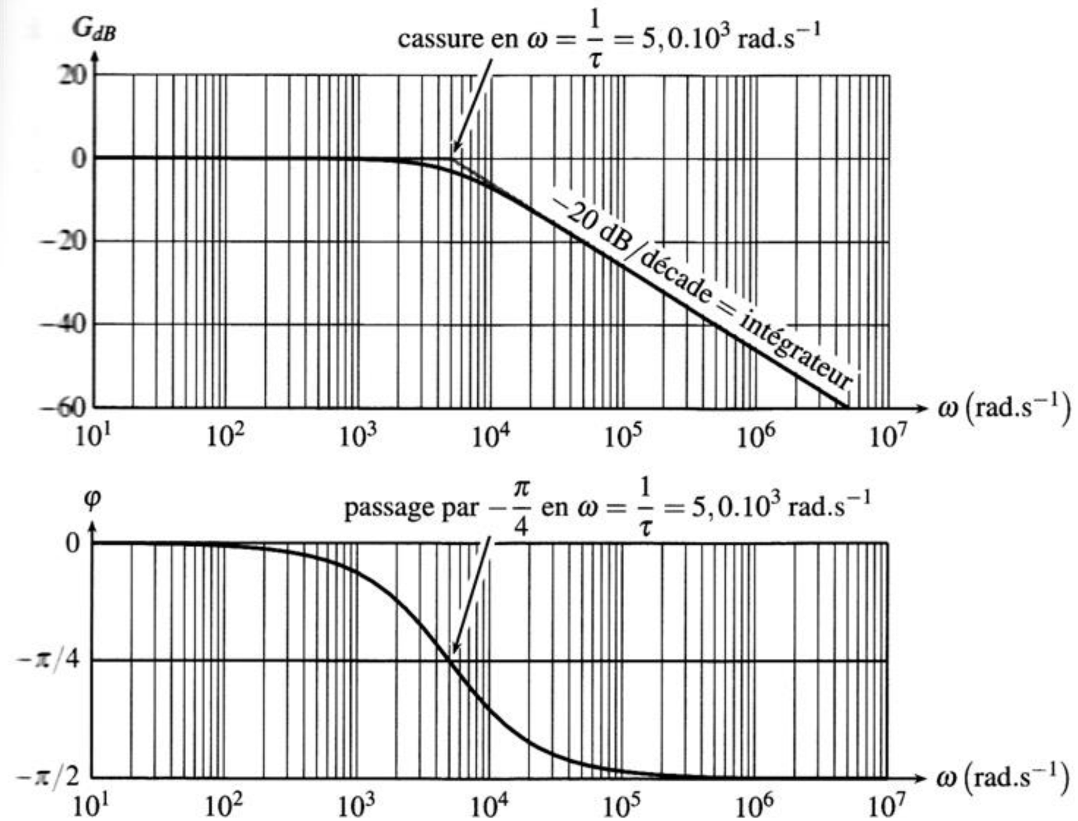
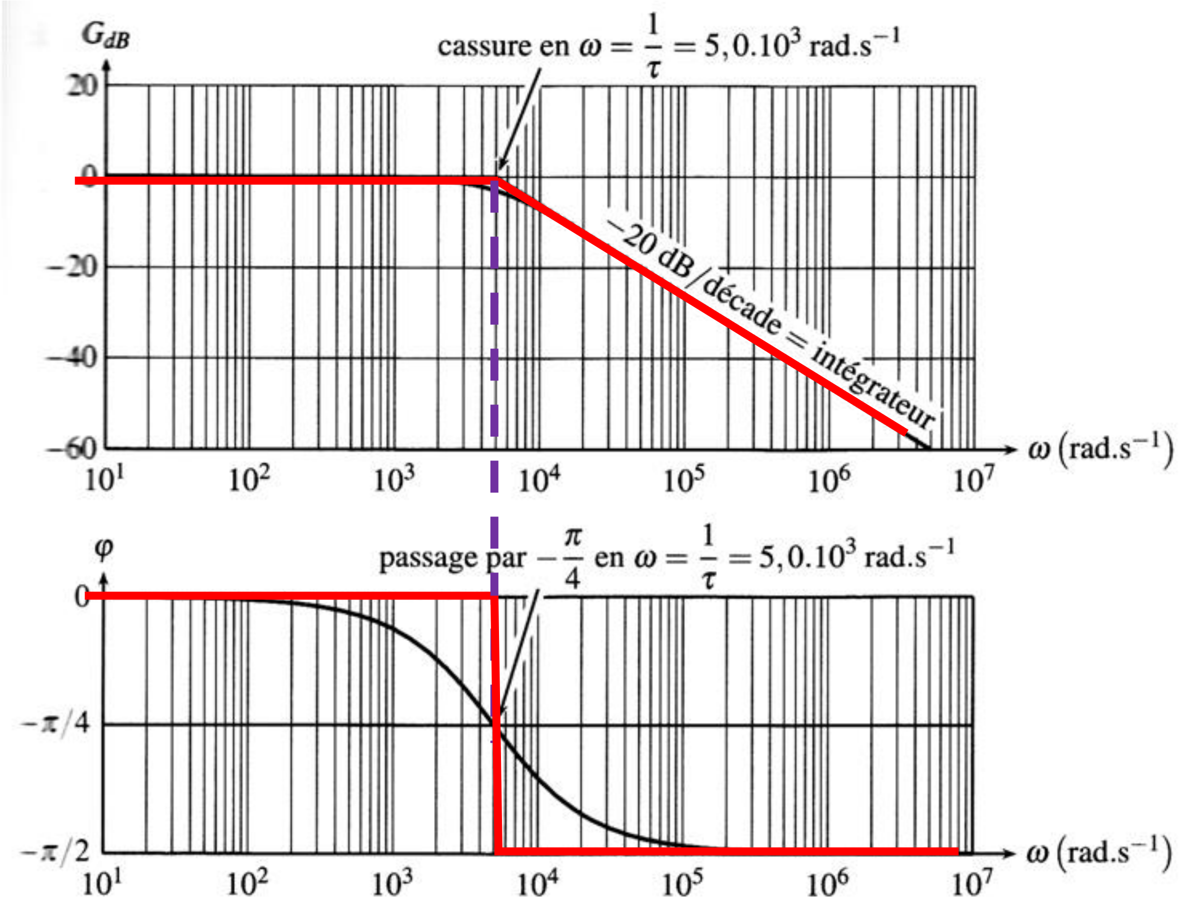


FIGURE 9 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du 1er ordre (avec $\tau = 2{,}0.10^{-4}$ s)

➢ Commentaires

- Diagramme de Bode asymptotique
- Diagramme de Bode réel (courbes réelles)



5.1.5 Pulsation de coupure - Bande passante

- **Pulsation de coupure**

Propriété

Pulsation de coupure : $\boxed{\omega_C = \dfrac{1}{\tau}}$

- **Bande passante** $\boxed{\mathrm{BP} = \left[0; \omega_C\right]}$

5.1.6 Forme normalisée de la fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}}$$

ω_C : pulsation de coupure

H_0 : gain en continu :

$$\boxed{H_0 = \lim_{\omega \to 0} \underline{H}(j\omega)}$$

Amplification si $\boxed{|H_0| > 1}$

Atténuation si $\boxed{|H_0| < 1}$

- <u>Exercice d'application 2</u>

  Tracer le diagramme de Bode asymptotique du filtre dont la fonction de transfert est $\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}$ avec $H_0 = 5$ puis avec $H_0 = -\dfrac{1}{5}$. Esquisser l'allure des courbes réelles.

5.1.7 Réponse à une excitation sinusoïdale

- **Tension d'entrée**

$$\boxed{e(t) = E_0 + E_M \cos(\omega_e t + \varphi_e)} \qquad \boxed{\omega_e >> \omega_C}$$

E_0 : composante continue ou valeur moyenne

- **Tension de sortie**

Propriété

filtre passe-bas = **moyenneur**

$$\boxed{\omega_e >> \omega_C}$$

5.1.8 Comportement du filtre dans le domaine temporel

- Domaine d'étude $\boxed{\omega >> \omega_C = \dfrac{1}{\tau}}$
- Passage de la fonction de transfert à l'équation différentielle

Propriété

filtre passe-bas = **intégrateur** $\boxed{\omega >> \omega_C}$

diagramme de Bode : ⓘ

❖ droite de pente **-20 dB/décade**

❖ Phase : $\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

5.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

5.2.1 Exemple de circuit

5.2.2 Étude qualitative à partir du circuit

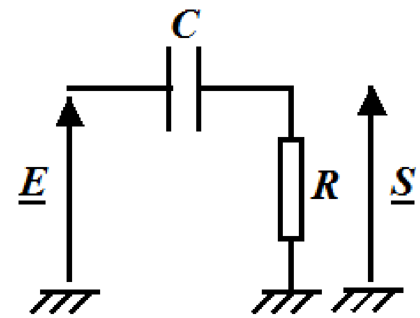


FIGURE 10 : Exemple de circuit réalisant un filtre passe-haut du 1er ordre

- <u>Comportement du circuit aux limites</u>
- <u>Nature du filtre</u>
- **5.2.3 Fonction de transfert**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}}$$

τ : **constante de temps**

5.2.4 Diagramme de Bode

➢ Allure du diagramme de Bode

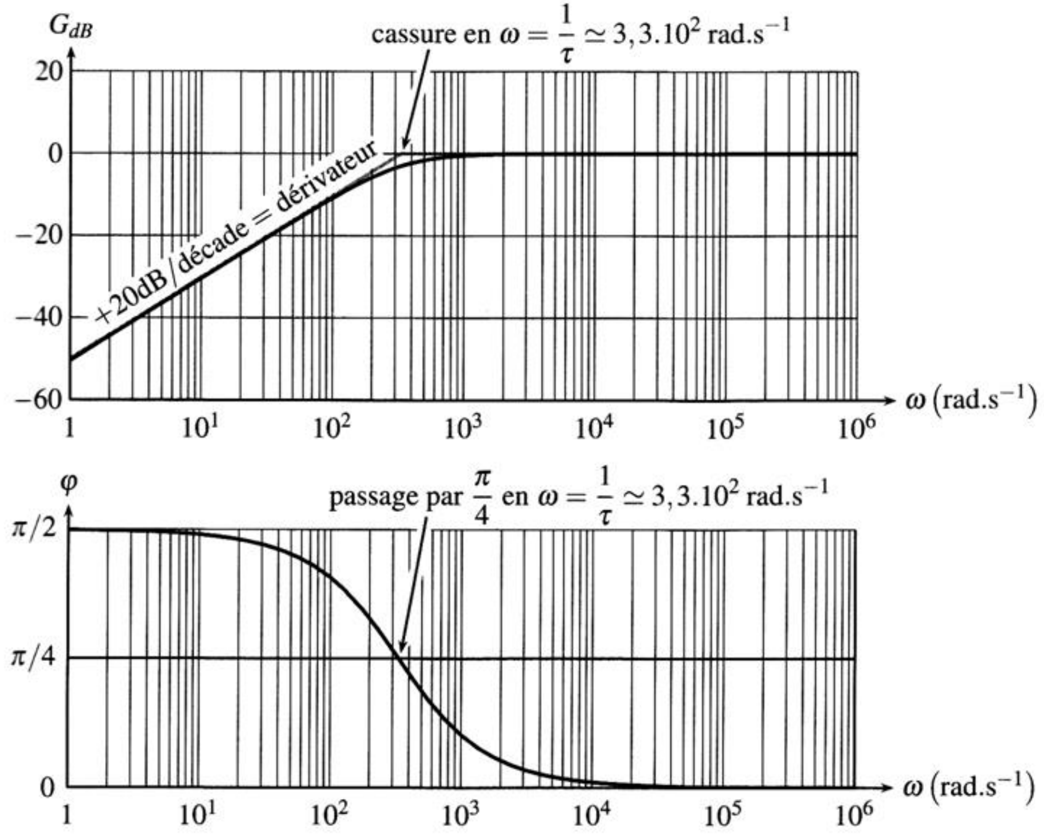
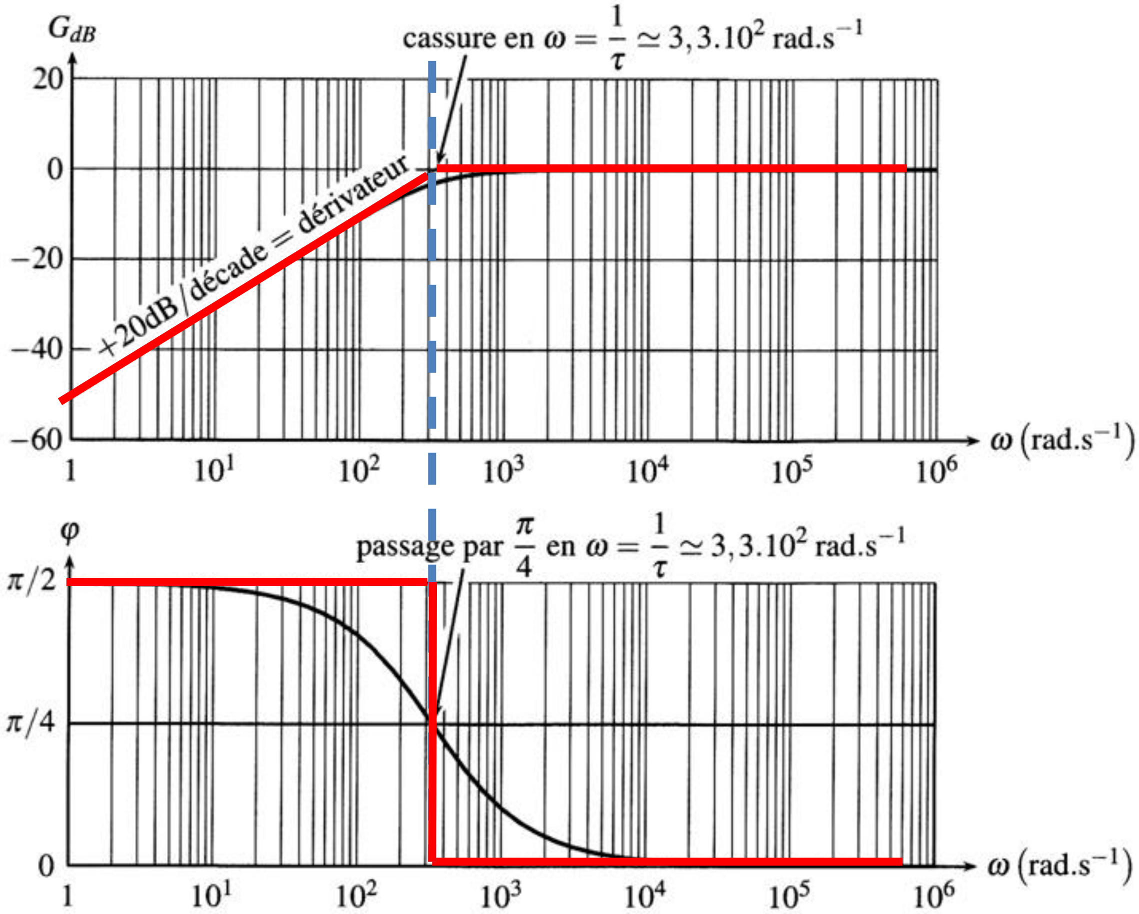


FIGURE 11 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du 1er ordre (avec $\tau = 3{,}0.10^{-3}$ s)

➢ Commentaires

- <u>Diagramme de Bode asymptotique</u>
- <u>Diagramme de Bode réel (courbes réelles)</u>



5.2.5 Pulsation de coupure – Bande passante

- **Pulsation de coupure**

Propriété

Pulsation de coupure : $\boxed{\omega_C = \dfrac{1}{\tau}}$

- **Bande passante** $\boxed{\mathrm{BP} = \left[\omega_C ;+\infty\right]}$

5.2.6 Forme normalisée de la fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}}}$$

ω_C : pulsation de coupure

H_0 : gain en HF :

$$\boxed{H_0 = \lim_{\omega \to +\infty} \underline{H}(j\omega)}$$

Amplification si $\boxed{|H_0| > 1}$

Atténuation si $\boxed{|H_0| < 1}$

- <u>Exercice d'application 3</u>

  Tracer le diagramme de Bode asymptotique du filtre dont la fonction de transfert est

  $\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ avec $H_0 = -2$. Esquisser l'allure des courbes réelles.

5.2.7 Réponse à une excitation sinusoïdale

➢ Tension d'entrée

$$\boxed{e(t) = E_0 + E_M \cos(\omega_e t + \varphi_e)} \qquad \boxed{\omega_e >> \omega_C}$$

E_0 : composante continue ou valeur moyenne

➢ Tension de sortie

Propriété

filtre passe-haut = **suppression de la composante continue**

5.2.8 Comportement du filtre dans le domaine temporel

- **Domaine d'étude** $\omega << \omega_C = \dfrac{1}{\tau}$
- **Passage de la fonction de transfert à l'équation différentielle**

Propriété

filtre passe-haut = **dérivateur** $\boxed{\omega << \omega_C}$

diagramme de Bode :

- droite de pente **+20 dB/décade**
- Phase : $\boxed{+\dfrac{\pi}{2}}$

5.3 Filtre passe-bande (d'ordre 2)

5.3.1 Exemple de circuit

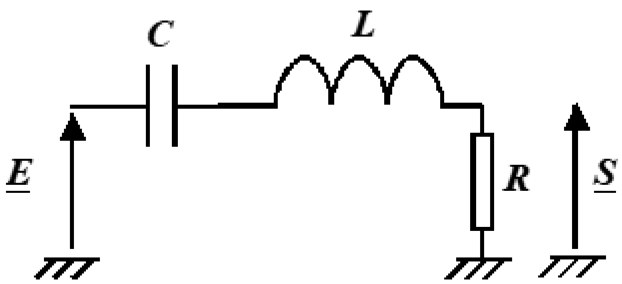


FIGURE 12 : Exemple de circuit réalisant un filtre passe-bande du 2ème ordre

5.3.2 Étude qualitative à partir du circuit

- Comporte[†] du circuit aux limites
- Nature du filtre

5.3.3 Fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(j\omega)=\frac{j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

5.3.4 Diagramme de Bode

➢ Allure du diagramme de Bode

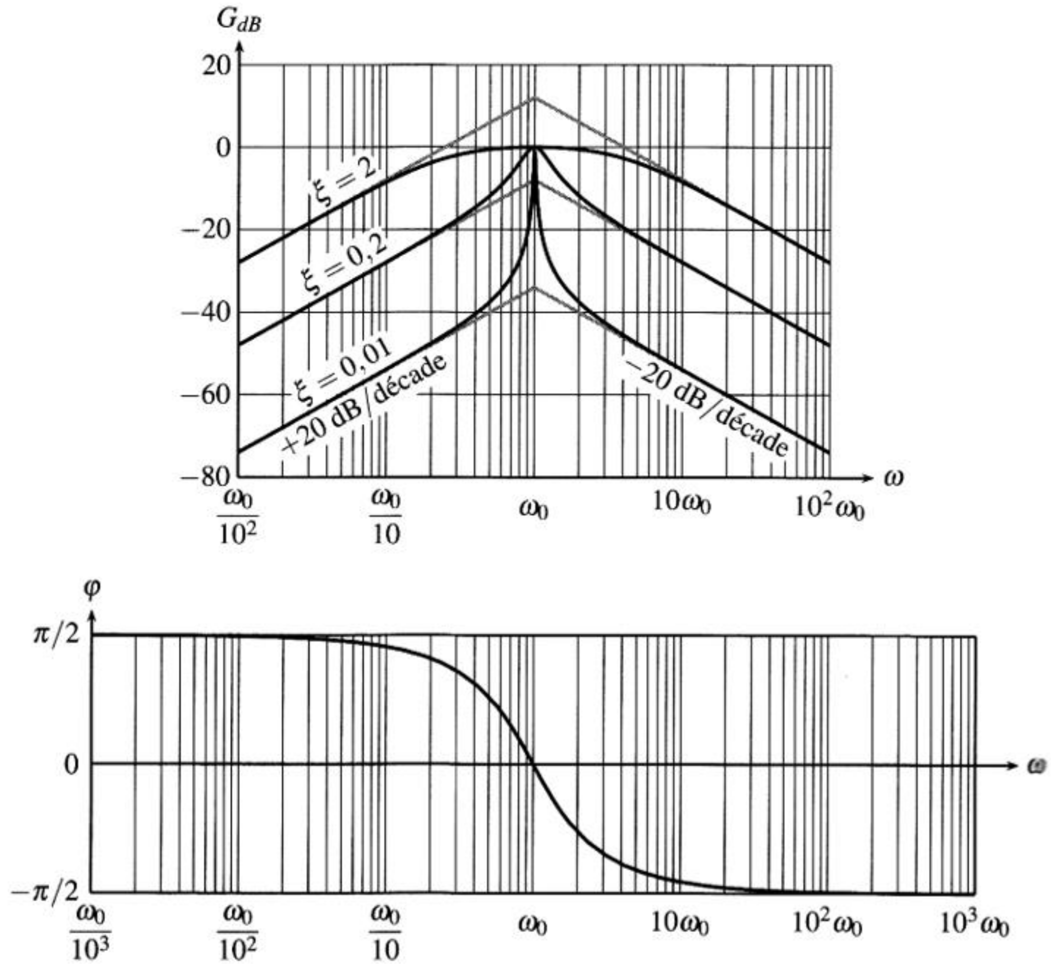


FIGURE 13 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande du 2ème ordre

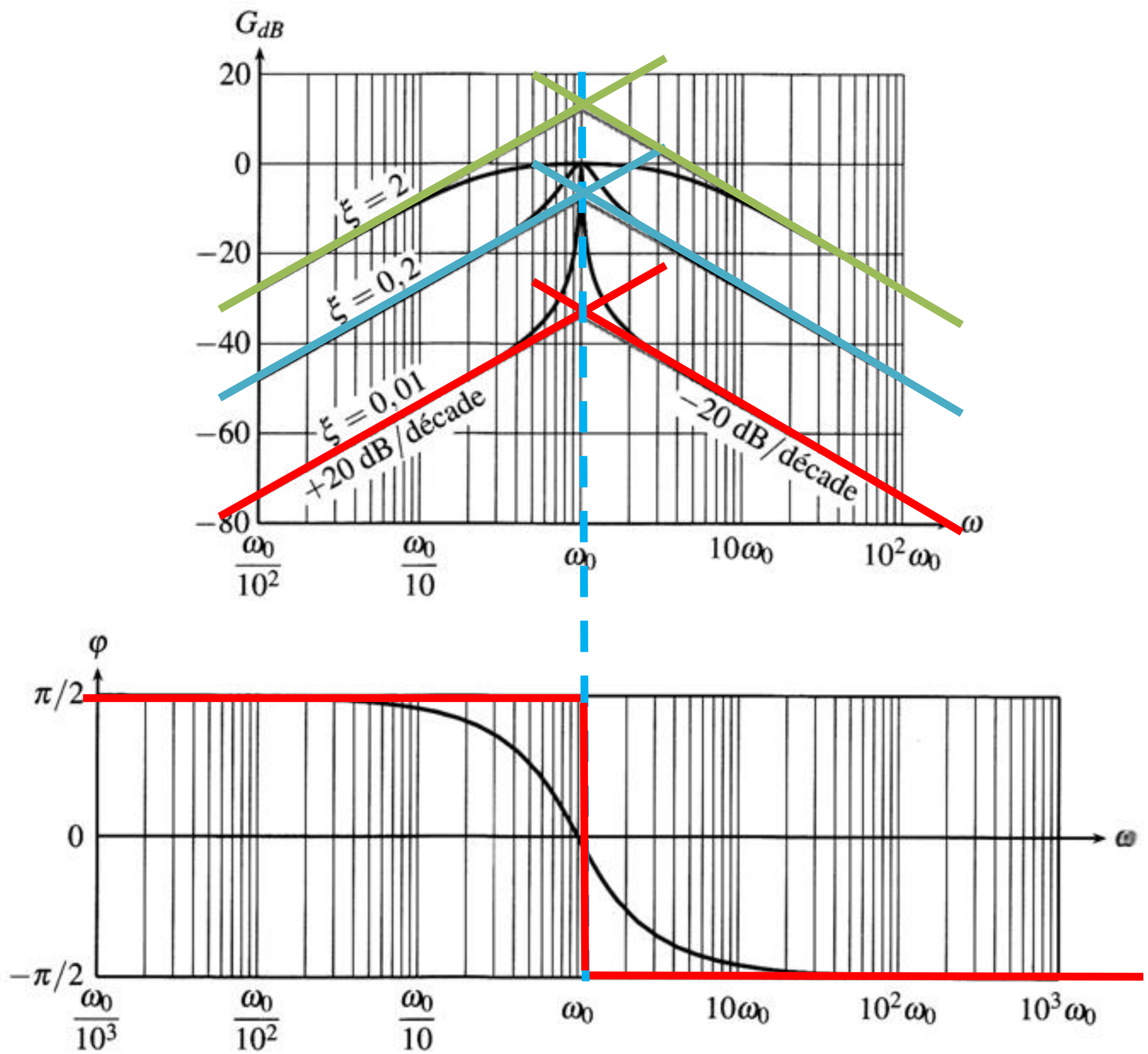
➢ Commentaires

- <u>Diagramme de Bode asymptotique</u>
- <u>Gain asymptotique en</u> $\omega = \omega_0$

5 Étude de quelques filtres passifs

5.3 Filtre passe-bande (d'ordre 2)

5.3.4 Diagramme de Bode



5.3.5 Formes normalisées de la fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = H_0 \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

ω_0 : pulsation propre

ξ : facteur d'amortissement

$Q = 1/(2\xi)$: facteur de qualité

H_0 : gain à la pulsation propre ω_0 : $\boxed{H_0 = \underline{H}(j\omega_0)}$

5.3.6 Résonance et bande passante

- Gain et phase en $\omega = \omega_0$

Propriété :

Propriété :

Passe-bande : $\omega_0 = \omega_r$

- Tracés asymptotiques / tracés réels
- Résonance en intensité

- Exercice d'application 4

Montrer que la bande passante $\Delta\omega$ du filtre passe-bande s'écrit : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

6 Filtrage d'un signal périodique

6.1 Réponse d'un système linéaire à une entrée périodique

➢ <u>Linéarité d'un système</u>

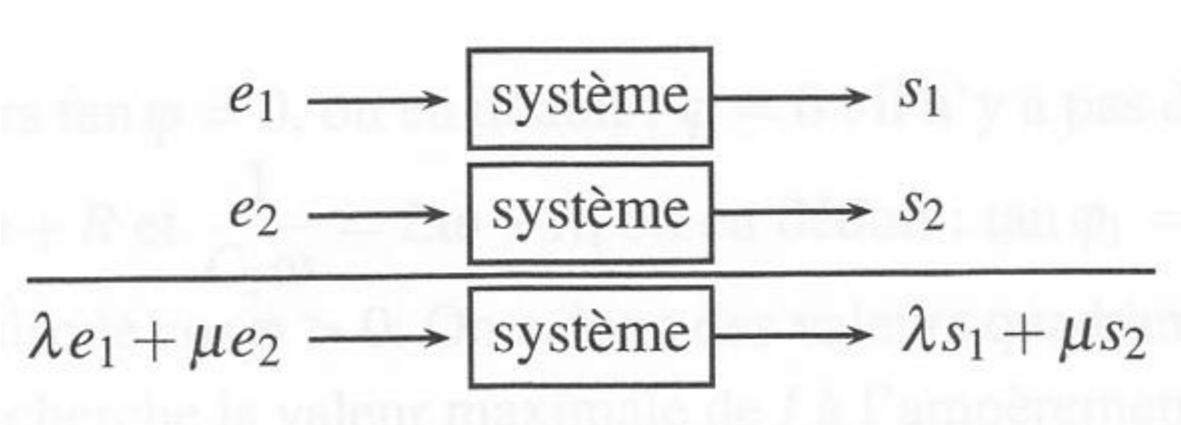


FIGURE 14 : Linéarité d'un système

principe de superposition

6.1 Réponse d'un système linéaire à une entrée périodique

- **Système linéaire (filtre) considéré**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}}$$

$$\boxed{G(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right|}$$

$$\boxed{\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \varphi(\omega)}$$

- **Tension d'entrée périodique**

Période : $T_e = \dfrac{2\pi}{\omega_e}$

$$\boxed{e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(n\omega_e t + \varphi_{en}\right)}$$

- **Tension de sortie**

Ppe de superposition : la tension de sortie est **périodique** de **même période** T_e

$$\boxed{s(t) = G(0)E_0\cos\left(\varphi(0)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega_e)E_n\cos\left(n\omega_e t + \varphi_{en} + \varphi(n\omega_e)\right)}$$

6.2 Exemple : filtrage d'une tension carrée

6.2.1 Retour à la problématique

- Observation de la réponse d'un filtre à une **tension d'entrée** carrée, périodique de période T, de fréquence $f_e = 1/T$

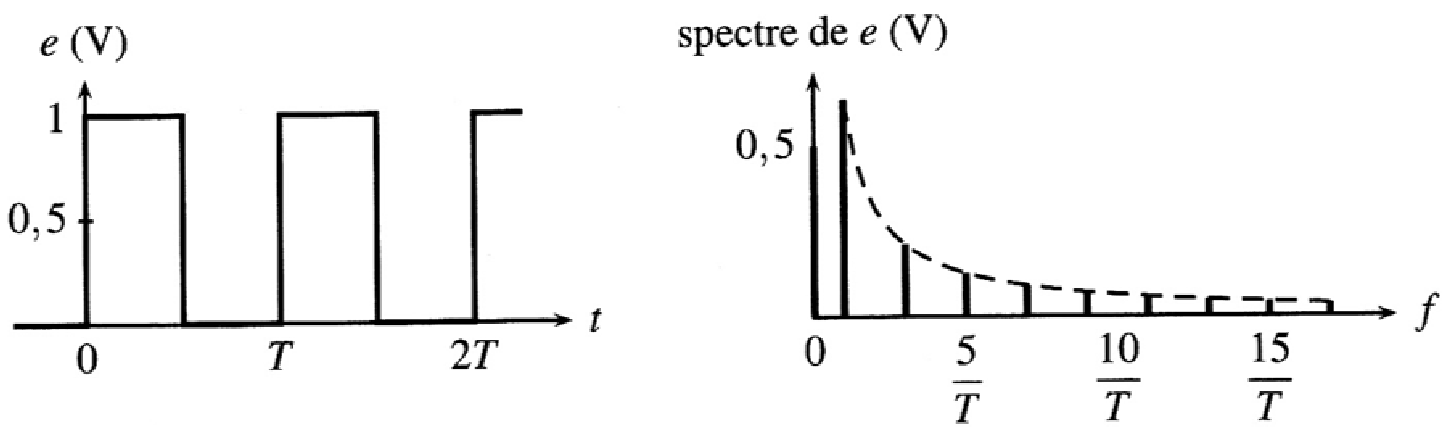


FIGURE 15 : Forme d'onde et spectre du signal d'entrée $e(t)$

- **Filtre** passe-bande avec f_0 réglable

6.2.2 Observations expérimentales et interprétation

- Observations expérimentales
- Interprétation

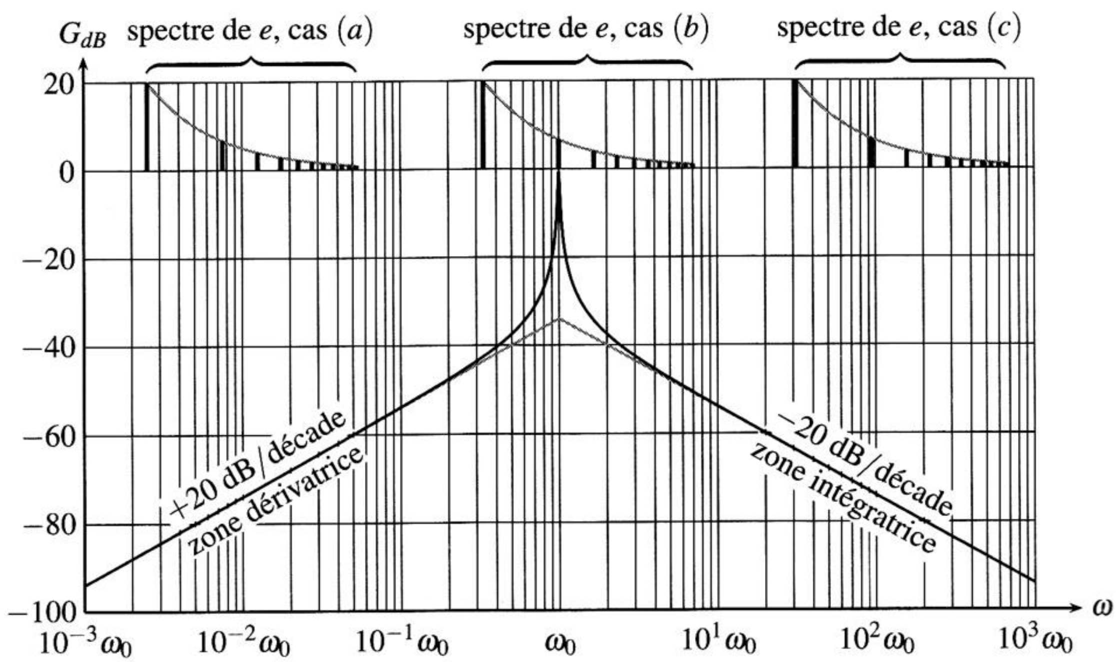


FIGURE 16 : Courbe de gain d'un filtre passe-bande et spectre du signal d'entrée

6 Filtrage d'un signal périodique

6.2 Exemple : filtrage d'une tension carrée

6.2.2 Observations expérimentales et interprétation