Programme de colle, semaine 29

Variables aléatoires :

— Nous avons défini les variables aléatoires, défini la loi d'une variable aléatoire comme la donnée de l'univers image $X(\Omega)$ et des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ et vu comment était défini la variable aléatoire image $f(X)$ et comment trouver sa loi.

— Nous avons vu les différentes lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale) et défini l'espérance d'une variable aléatoire. Nous avons montré qu'elle était linéaire et croissante. Nous avons démontré le théorème de transfert et calculé les espérances usuelles.

— Nous avons défini la variance d'une variable aléatoire réelle ($\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$)ainsi que l'écart type et les moments d'ordre k. Nous avons montré que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ et que $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$. Nous en avons déduit que la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. Nous avons ensuite montré l'inégalité de Tchebychev et terminé par le calcul des variances des lois usuelles.

— Nous avons continué le chapitre par l'étude des couples de variables aléatoires (ainsi que les n-uplets de variables aléatoires). Nous avons défini la loi conjointe d'un couple, les lois marginales et vu que la connaissance de la loi conjointe permet de trouver les lois marginales (réciproque fausse). Nous avons également défini les lois conditionnelles (loi de X sachant $Y = y_i$).

— Nous avons ensuite vu la notion d'indépendance de deux variables aléatoires, démontré que si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$ et que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

— Nous avons terminé le chapitre sur les variables aléatoires par l'indépendance de variables aléatoires, démontré que si X et Y sont indépendantes alors $P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ et que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Nous avons également défini l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires (qui implique l'indépendance 2 à 2, la réciproque étant fausse pour $n \geq 3$) et vu le lemme des coalitions. Nous avons alors vu les informations données par l'indépendance sur les calculs d'espérance et de variance. Nous avons montré que si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$ (réciproque fausse), nous avons défini la covariance $\mathrm{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$, démontré que la covariance est symétrique, linéaire à gauche et à droite et que $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Nous avons alors montré que $V(X+Y) = V(X)+2\mathrm{cov}(X,Y)+V(Y)$ et déduit que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellements indépendantes, alors $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$. Nous avons également démontré qu'une somme de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance d'une loi binomiale.

Compétences :

— Déterminer la loi d'une variable aléatoire (espace des valeurs $X(\Omega)$+ calcul des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$)

— Déterminer l'espérance (et la variance) d'une variable aléatoire réelle à l'aide de sa loi/du théorème de transfert.

— Retrouver à partir de la loi conjointe de deux variables aléatoires les lois marginales et les lois conditionnelles.

— Utiliser l'indépendance de variables aléatoires pour simplifier les calculs d'espérances/variances.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un système complet d'évènements, énoncer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes. Définir les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale), donner sans preuve leurs espérances/variances.
2. Donner la définition de l'espérance et rappeler ses propriétés (linéarité, croissance), énoncer le théorème de transfert, donner la définition de la variance et rappeler (pas de preuve) ses propriétés ($\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ et que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$) puis énoncer l'inégalité de Markov et de Tchebychev.
3. Donner la définition de deux variables aléatoires indépendantes et montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
4. Rappeler la définition de la covariance de deux variables aléatoires, faire le calcul de $\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k)$ (en fonction des covariances) et en déduire que si les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, alors la variance de la somme est la somme des variances.
5. Donner la loi d'une somme de n variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p et en déduire l'espérance et la variance de la loi binomiale.
6. Donner l'expression des produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ en démontrer (au choix du colleur), que l'un des deux est un produit scalaire (pour le second, on admet qu'une fonction positive continue d'intégrale nulle est nulle).
7. Faire le calcul du développement de $||x + y||^2$ et $||x - y||^2$ et en déduire l'égalité du parallélogramme.

Exercices à chercher pour lundi (indications au dos) : TD30 : 8,13,16. et TD31 : 1 (on le corrigera lundi matin)

Exercices à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD30 : 8.
- 2ieme du groupe : TD30 : 11.1) et 16.
- 3ieme du groupe : TD30 : 13 et 15.

Prochain (et dernier) programme : espaces préhilbertiens réels.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exercice 8

- L'espérance et la variance se calculent avec les formule du cours. L'inégalité de Tchebychev et le théorème des gendarmes devraient vous permettre de conclure.
- Pour la seconde question, vous pouvez commencer par justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - 2n| > n) = 0$ en utilisant la première question et le théorème des gendarmes (on justifiera l'inclusion d'évènements), puis passez au complémentaire. Vous devriez trouver une limite égale à 1.
- Vous pouvez aussi pour la deuxième question justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3n)$ sont nulles en revenant à la définition et en utilisant la formule de Stirling.
- Justifiez en revenant à la définition d'une loi binomiale que $\mathbb{P}(|X_n - 2n| \leq n) = \sum\limits_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k} \frac{1}{2^{4n}}$.

  L'équivalent devrait tomber de suite.

Exercice 11

- Pour calculer cette probabilité, il faut procéder par dénombrement. Justifiez que vous pouvez prendre comme univers $\Omega = [\![1, N]\!]^n$ muni de la probabilité uniforme.
- Une fois l'univers calculé, vous pouvez calculer son cardinal et ensuite justifier que $(X \geq x) = [\![x, N]\!]^n$. Vous devriez alors obtenir la probabilité recherchée par quotient.
- Pour conclure la première question, n'oubliez pas de justifier (brièvement) que $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et déterminez $\mathbb{P}(X = k)$ en utilisant le fait que $(X \geq k) = (X = k) \bigcup (X \geq k+1)$ (union disjointe).

Exercice 13 :

- Justifiez que $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ ce qui permet d'affirmer que Z suit une loi de Bernoulli. Il reste à calculer $\mathbb{P}(Z = 1)$ pour obtenir le paramètre. On écrira l'évènement $(Z = 1)$ en fonction de X et Y et on utilisera l'indépendance de X et Y pour calculer.
- On pourra noter X_i la variable aléatoire valant 1 si le premier archer touche la cible i (et 0 sinon), Y_i la variable aléatoire valant 1 si le second archer touche (et 0 sinon). Justifiez que la variable aléatoire $Z_i = \max(X_i, Y_i)$ vaut 1 si la cible i est touchée par un des deux archers et que le nombre de cibles touchées est $\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$. La fin du cours devrait vous permettre de conclure.
- Pour la dernière question, justifiez que la variable aléatoire à étudier est $n - \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (1 - Z_i)$.

  La variable aléatoire $1 - Z_i$ est normalement une Bernoulli d'un paramètre à déterminer...

Exercice 15 : Utiliser le fait que $\mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$ par indépendance. Cela donne normalement directement le résultat voulu.

Exercice 16 :

- Vous devriez arriver à justifier que X_1, X_2 et X_3 suivent toutes les trois la même loi, une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{3}$.
- Pour la variance de $X_1 + X_2$, on utilisera le fait (en le justifiant) que $X_1 + X_2 + X_3 = n$, ce qui implique que $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(n - X_3)$.
- Pour la covariance de X_1 et X_2, on utilisera le développement de $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$.