33. Familles sommables

Exercice 1. (c) Soit $p \geq 3$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.

Exercice 2. (m) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n}$. *On écrira* $\displaystyle\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k$.

Exercice 3. (i) Montrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{n,m\geq 1}$ est sommable et déterminer $\displaystyle\sum_{n,m\geq 1}\frac{1}{(n+m)^3}$.

Exercice 4. (m) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geq 2}$ est-elle sommable ?

Exercice 5. (i) Montrer que les familles suivantes ne sont pas sommables en les minorant par des familles dont la somme vaut $+\infty$:

1) $\displaystyle\left(\frac{1}{n^2-m^2}\right)_{n>m\geq 1}$ 2) $\displaystyle\left(\frac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}$.

Exercice 6. (i) En sommant par paquets, déterminer $\displaystyle l_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$ et $\displaystyle l_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{\lfloor\log_2(n)\rfloor}}$.

Exercice 7. (m) Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$.

Exercice 8. (m) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{1-z^{2k}}$.

Exercice 9. (∗) Si n est un entier, on note $b(n)$ le nombre de bits égaux à 1 dans son écriture en binaire. On veut calculer $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{n(n+1)}$.

1) Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $\beta_i(n) \in \{0,1\}$ le i-ème bit de $n \in \mathbb{N}$. Exprimer n et $b(n)$ en fonction d'une somme sur i dépendant de $\beta_i(n)$.

2) Justifier que $\displaystyle\{n \in \mathbb{N} \ / \ \beta_i(n) = 1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{2^{i+1}k + x,\ x \in [\![2^i, 2^{i+1}-1]\!]\right\}$.

3) Déduire des deux premières questions que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{n(n+1)} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$.

4) Justifier que pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) = H_{2N} - H_N$ où $\displaystyle H_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ et en utilisant le développement asymptotique de H_N à deux termes, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) = \ln(2)$ puis la valeur de S.