Programme de colle, semaine 24

Matrices (début) (+ révision dim finie) :

— Nous avons commencé avec la définition de la matrice d'un vecteur x dans une base e d'un espace vectoriel E, puis de celle d'une famille vecteur et enfin de celle d'une application linéaire (notation $\text{Mat}_{e,f}(u)$ où $u \in L(E, F)$, e est une base de E et f une base de F). Nous avons alors vu quelques exemples (décomposition de projecteurs et de symétries dans des bases adaptées). Nous avons ensuite montré qu'étant donné des espaces E et F, des bases e et f de ces espaces, alors l'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans les bases e au départ et f à l'arrivée est bijective.

— Nous avons revu le produit matriciel et vu qu'il est compatible avec la composition, c'est à dire pour que $\text{Mat}_{e,g}(u \circ v) = \text{Mat}_{f,g}(u) \times \text{Mat}_{e,f}(v)$ où $u : F \to G$, $v : E \to F$ et e, f, g sont des bases de E, F, G et vu comment calculer la matrice de $u(x)$ en fonction de la matrice de u et de celle de x (dans les bonnes bases). Nous avons alors vu les différentes propriétés matricielles des applications linéaires (image et noyau d'une matrice).

— Nous avons alors vu comment changer de base en définissant les matrices de passage, les formules de changement de base pour les vecteurs et pour les applications linéaires.

— Nous avons alors défini le rang d'une matrice comme le rang de son application linéaire canoniquement associée et remarqué que cela coïncidait avec le rang de ses vecteurs colonnes. Nous avons alors utilisé les résultats du chapitre sur les espaces vectoriels, ainsi que les matrices de passage pour montrer que le rang était préservé quand on multipliait à gauche ou à droite par des matrices inversibles. Nous avons défini les matrices équivalentes, démontré qu'une matrice était de rang r ssi elle était équivalente à $J_{n,p,r}$ et que deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

— Nous avons alors ensuite revu l'algorithme du pivot (que l'on a utilisé en général sur les lignes même s'il est également possible de l'appliquer sur les colonnes) pour calculer le rang. Nous avons aussi vu comment calculer le noyau (action sur les lignes) et trouver une base de l'image (action sur les colonnes) d'une matrice. Nous avons également montré que tout matrice extraite (obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et de colonnes) d'une matrice de rang r était de rang inférieur ou égal à r et qu'il existe une matrice extraite carrée inversible de rang r.

Remarques sur le programme : nous n'avons pas encore vu les matrices semblables et donc quasiment pas travaillé sur les changements de base (ceci sera vu la semaine prochaine et en TD). Nous avons donc surtout travaillé sur l'écriture de la matrice d'une application linéaire dans des bases données et revu des propriétés énoncées dans le premier chapitre sur les matrices. Vous pouvez à nouveau interroger sur le chapitre portant sur la dimension finie ainsi que sur la partie « calculatoire » des matrices (recherche d'inverse, puissances de matrices, etc.).

Compétences :

— Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
— Pour montrer des propriétés qui ne dépendent que du rang, commencer par les prouver pour les matrices $J_{n,p,r}$ et s'y ramener avec des matrices équivalentes.
— Déterminer le rang d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires.
— Déterminer l'inverse d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires (uniquement sur les lignes **ou** uniquement sur les colonnes !)

Questions de cours :

1. Donner la définition pour $u \in L(E,F)$ et e, f sont des bases de E et F de $\text{Mat}_{e,f}(u)$ et déterminer la matrice de la dérivation de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ (en prenant les bases canoniques).
2. Donner la définition du noyau, de l'image et du rang d'une matrice et étudier l'application linéaire canoniquement associée à $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. *Pour les étudiants, cf exemple dans le II.2)*
3. Donner la définition de $P_e^{e'}$ (la matrice de passage de e vers e') où e et e' sont deux bases de E ainsi que le lien entre $P_e^{e'}$ et $P_{e'}^{e}$ et donner pour $u \in L(E)$ et $x \in E$ les formules de changement de base :
$$\text{Mat}_e(u) = P_e^{e'} \times \text{Mat}_{e'}(u) \times P_{e'}^{e} \text{ et } \text{Mat}_e(u(x)) = P_e^{e'} \times \text{Mat}_{e'}(x).$$
4. Donner (pas de preuve) les formules donnant $\text{Mat}_{e,g}(v \circ u)$ et $\text{Mat}_f(u(x))$ en fonction des matrices de u, v, x dans des bases à préciser (où $u \in L(E,F)$, $v \in L(F,G)$, $x \in E$ et où e, f, g sont des bases de E, F, G) et démontrer que $(P_e^{e'})^{-1} = P_{e'}^{e}$ et que $P_e^{e'} \times P_{e'}^{e''} = P_{e'}^{e''}$.
5. En utilisant le fait qu'une matrice de rang r est équivalente à $J_{n,p,r}$, montrer que deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.
6. Donner la définition de deux matrices équivalentes / deux matrices semblables et montrer que l'on a des relations d'équivalence.
7. Expliquer le principe de la méthode du pivot pour montrer qu'une matrice est inversible/trouver son inverse et mettre en oeuvre cette méthode sur une matrice 3×3 au choix du colleur.

Exercices à chercher pour mardi prochain (pour tout le monde) : TD25 : 9,15 et :

On pose $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 en justifiant que $e = (\cos, \sin)$ est une base de E et que $D : f \mapsto f'$ est bien définie et est dans $L(E)$.

2) Écrire la matrice de D dans la base $e = (\cos, \sin)$ (on prendra cette base au départ et à l'arrivée).

3) Reprendre les questions précédentes avec cette fois $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ où $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD25 : 9.
- 2ieme du groupe : TD25 : 15.
- 3ieme du groupe : TD25 : l'exercice énoncé au-dessus.

Prochain programme : matrices.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exercice 9

- La matrice A a des 1 sur la diagonale, la dernière ligne et la dernière colonne.
- Dans le cas $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pourra vérifier que les colonnes sont liées pour la non inversibilité.
- Pour le cas $n > 2$, on peut utiliser des opérations élémentaires sur les lignes pour simplifier toute la dernière ligne. Vous devriez vous ramener à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale sauf en (n, n) où on a $2 - n$.
- Pour trouver l'inverse, commencez alors par faire une dilatation sur la dernière ligne puis des transvections pour simplifier les 1 sur la dernière colonne. On effectue ensuite les mêmes opérations élémentaires en partant de I_n.
- Vérifiez votre calcul en calculant $A \times A^{-1}$ à la fin !

Exercice 15

- On trouve $A^2 = 3A$. Il faut alors chercher une matrice B telle que $B^2 = B$ et $B = \dfrac{1}{\lambda}A$ (et prendre pour p l'application linéaire canoniquement associée à B).
- On démontrera que $\ker(B)$ et $\ker(A)$ sont identiques (ainsi que $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Im}(A)$. Une fois ces espaces trouvés, cela donne directement $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Vous devriez trouver normalement une image de dimension 2 et un noyau de dimension 1.
- On utilisera le fait que p est un projecteur pour justifier que le noyau et l'image sont supplémentaires.
- Pour la base adaptée, il faut trouver une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$ (on procédera comme dans le cours en trouvant une base de $\ker(A)$ et une de $\mathrm{Im}(A)$).
- Pour obtenir la matrice de f dans cette base, on utilisera les propriétés de p pour calculer les images des vecteurs de cette base par p.

3ieme exercice :

- Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre (puisqu'elle est génératrice) en évaluant une relation de liaisons en des valeurs différentes.
- Pour justifier que $D \in L(E)$, il faut justifier que les fonctions de E sont dérivables (pour l'ensemble de départ), que $D(E)$ soit bien inclus dans E (ensemble d'arrivée cohérent) et enfin que D est linéaire.
- Pour calculer la matrice, on revient à la définition et on calcule $D(\cos)$ et $D(\sin)$ que l'on exprime en fonction de cos et sin. Vous devriez trouver une matrice 2×2 avec des 0 sur la diagonale.
- Mêmes conseils, vous devriez ici trouver une matrice 2×2 diagonale.