Devoir Surveillé 6, commentaires

Le premier problème du devoir portait sur deux parties indépendantes : la détermination du nombre de polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ et la caractérisation des polynômes positifs sur $\mathbb{R}$ (qui s'écrivent comme une somme de deux carrés de polynômes). Certains étudiants ont manqué de temps et se sont concentrés exclusivement sur la première partie, ce qui les a empêchés d'aborder des questions très faciles de la seconde partie. La présentation des copies était globalement bonne. La plupart des étudiants maîtrisaient bien le cours sur les polynômes (critère de multiplicité des racines, relations coefficients/racines) mais les affirmations non justifiées (même sur des points « simples » ont coûté de nombreux points. On rappellera l'importance de tout justifier, à l'aide d'un résultat du cours ou d'une question précédente dont on vérifiera les hypothèses ou d'un calcul, encore plus quand le résultat est donné dans l'énoncé (auquel cas, trouver le résultat ne suffit en général pas pour avoir tous les points !). Dans le détail :

Partie I. Polynômes réels scindés

1) *Étude de E.*

a) Très bien traitée mais certains étudiants oublient de dire que la réciproque est évidente (il fallait bien justifier une équivalence).

b) Certains étudiants ne répondent pas à la question en redonnant la définition sans expliciter les polynômes demandés ! Attention à ne pas oublier la seconde partie de la question où il fallait doubler le nombre de polynômes pour ne pas oublier les non unitaires.

2) *Étude de E_s.*

a) De nombreux étudiants pensent que si B est stable par passage à l'opposé et que si $A \subset B$, alors A est stable par passage à l'opposé, ce qui est faux (prendre $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1]$ par exemple). D'autres font un calcul sans définir leurs variables et montrent dans les exemples ensuite qu'ils n'ont visiblement pas compris la définition de E_s (on voulait des racines réelles simples). On attendait juste une phrase disant que les racines de P étaient les mêmes que celles de $-P$ avec la même multiplicité... Pour la seconde partie de la question, là encore beaucoup d'erreurs, de nombreux étudiants oubliant que l'on cherche bien les polynômes de E (dont ils ont donné la liste à la question précédente) qui sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$. Il suffisait donc de reprendre la liste précédente (d'où l'intérêt de l'expliciter) et de vérifier ceux qui avaient un discriminant strictement positif...

b) Certains étudiants oublient de justifier le sens réciproque (qui était évident). Pour le sens direct, la justification de $Q(0) \neq 0$ était souvent bonne mais la vérification de $Q \in E_s$ trop souvent absente !

3) *Un résultat intermédiaire.*

a) De nombreuses copies ont décidé arbitrairement de fixer la valeur de n à 1 ou à 2 en se basant sur le degré de P. On rappelle qu'en mathématique, les variables peuvent être muettes (d'où l'importance de les définir) donc le n du préambule et le n de cette question n'étaient pas le même. La suite de l'énoncé aurait du permettre de corriger cette étourderie...

b) Globalement bien traitée même si une vraie justification du signe du discriminant était bienvenue.

c) Le sens direct est celui qui a été le plus traité, souvent bien traitée même si la rédaction était parfois maladroite. Peu d'étudiants ont fait la réciproque (sens difficile) où il fallait utiliser le fait qu'un discriminant nul donnait une racine réelle.

d) Souvent très bien traitée.

4) *Majoration du degré.*

a) Souvent très bien traitée quand la formule du cours était connue.

b) Question très peu abordée malgré l'indication. Souvent bien traitée quand abordée.

c)

i) Il fallait bien vérifier ici que le coefficient dominant de Q et le coefficient constant étaient non nuls, et donc justifier que $a_0 \neq 0$ et que $a_n \neq 0$, ce qui a parfois était oublié...

ii) Pour la fin de la question, de nombreux étudiants oublient de justifier que les racines trouvées sont simples (on a trouvé n racines distinctes et le degré de Q est n donc elles sont simples !)

iii) Souvent bien traitée par ceux qui ont utilisé la question 4b en le polynôme Q mais il fallait bien dire que Q vérifiait les hypothèses de la question 4b !

d) Bien traitée.

5) *Étude du degré 3.* La première partie de la question a souvent été bien traitée, moins d'étudiants ont vu pour la seconde partie que cela contredisait la simplicité des racines.

6) Question de synthèse souvent très mal traitée car presque tous les étudiants ont oublié que Q5 avait comme hypothèse que $P(0) \neq 0$. Il y a donc bien des polynômes de degré 3 dans E_s (qui sont de la forme $XQ(X)$ avec $Q \in E_s$, $\deg(Q) = 2$ et $Q(0) \neq 0$ d'après la question 2b).

Partie II. Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$

7) Peu d'étudiants pensent à utiliser la limite en l'infini du polynôme pour justifier le signe de λ.

8)

a) La première partie de la question est souvent très bien faite mais peu d'étudiants pensent à utiliser la continuité de Q pour justifier l'existence du η. Certains ont regardé l'écart entre les racines réelles de Q, ce qui était une très bonne idée (vu qu'il y a un nombre fini de racines).

b) Il y a là encore un argument de continuité à donner (et encore mieux si le TVI était cité...). Pour la seconde partie, certains étudiants ont oublié que l'on était sur l'intervalle $[\alpha_i - \eta, \alpha_i + \eta]$ et pas sur $\mathbb{R}$!

9)

a) Très bien traitée quand abordée.

b) Une racine carrée de polynôme n'est pas un polynôme ! Il fallait bien faire apparaitre une somme de deux carrés...

c)

i) Très bien traitée quand abordée (il fallait bien détailler ce court calcul, le résultat étant donné).

ii) Très bien traitée quand abordée.

iii) Souvent très bien traitée même si les définitions de A_3 et B_3 ne sont pas toujours très claires. Il fallait bien faire une petite phrase de justification pour la dernière partie de la question, le résultat étant donné...

10) Souvent bien traitée par des étudiants qui ont bien fait le lien entre les résultats de la partie. Attention cependant à ne pas oublier le coefficient dominant et à bien justifier aussi que $\lambda \in \mathcal{E}$!