OUTILS MATHÉMATIQUES 2
Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

1 Définitions

1.1 Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

- **Définition** : Une **équation différentielle** est une relation entre les différentes dérivées d'une fonction $y(t)$, dépendant de la variable t.

- **Définition** : Si une équation différentielle est **linéaire**, cela signifie que si y_1 et y_2 sont solutions, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution (α et β étant des constantes).

- **Définition : L'ordre** de l'équation différentielle est donné par le degré n de la dernière dérivée.
- Remarque
  On se limitera à l'étude d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.

1.2 Que veut dire « résoudre une équation différentielle » ?

- **Définition** : **Résoudre** une équation différentielle consiste à trouver **l'expression** de la fonction inconnue $y(t)$ qui :
  • vérifie cette équation
  ET
  • respecte les **conditions initiales** (connues)

2 Mise en forme de l'équation différentielle d'ordre 1

- **L'équation différentielle** que l'on cherche à résoudre est de la forme :

$$\boxed{a\frac{dy}{dt} + by = f(t) \Leftrightarrow a\dot{y} + by = f(t)}$$

a et b étant deux constantes et $f(t)$ représentant le **second membre**.
En **sciences physiques**, il faut avoir $b = 1$ pour poser $a = \tau$ (constante de temps). La forme canonique de l'équation différentielle est :

$$\boxed{\tau\frac{dy}{dt} + y = f(t) \Leftrightarrow \tau\dot{y} + y = f(t)}$$

➢ **L'équation sans second membre** (essm), ou **homogène**, associée est :

$$\boxed{a\frac{dy}{dt}+by=0 \Leftrightarrow a\dot{y}+by=0} \text{ soit } \boxed{\tau\frac{dy}{dt}+y=0 \Leftrightarrow \tau\dot{y}+y=0}$$

3 Résolution en 5 étapes

① Solution de l'équation sans second membre $\boxed{y(t)=Ke^{-\frac{b}{a}t}=Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$

avec ***K* une constante à déterminer**.

② Solution particulière

On recherche la solution particulière y_P sous la **même forme** que le **second membre *f*(*t*),** qui peut être une constante, un polynôme, une exponentielle ou une fonction sinusoïdale.

On la détermine en remplaçant $y(t)$ par y_P dans l'équation différentielle, qu'elle vérifie puisqu'elle en est une solution.

③ Solution complète

C'est la **somme** de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière.

$$\boxed{y(t)=Ke^{-\frac{b}{a}t}+y_P=Ke^{-\frac{t}{\tau}}+y_P}$$

④ Condition initiale

Par un raisonnement physique, on détermine **la valeur initiale** de $y(t)$: $\boxed{y(0)}$. En remplaçant t par 0 dans la solution complète, on **détermine la valeur de la constante *K*.**

⑤ Solution finale

On **remplace *K*** par son expression dans la solution complète.