14. Limites, continuité, corrigé

Exercice 1. Soit f une fonction périodique tendant vers l en $+\infty$. Soit $T > 0$ une période de f. Supposons par l'absurde que f ne soit pas constante. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. On a alors en considérant les suites $x_n = a + nT$ et $y_n = b + nT$ que $f(x_n) \to l$ et $f(y_n) \to l$ (car la fonction f tend vers l en $+\infty$ donc pour toute suite (u_n) qui tend vers l'infini, $f(u_n) \to l$). Or, $(f(x_n))$ est une suite constante égale à $f(a)$ et $(f(y_n))$ est une suite constante égale à $f(b)$. On a alors $l = f(a)$ et $l = f(b)$ donc $f(a) = f(b)$ ce qui est absurde !

La fonction f est donc constante.

Par la contraposée, on a donc montré que toute fonction périodique non constante ne converge pas en $+\infty$. Ceci nous permet par exemple de montrer que sin *et* cos *n'admettent pas de limites en $+\infty$.*

Exercice 3. On va utiliser une fonction proche de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ en posant f la fonction qui vaut 1 sur chaque rationnel et -1 sur chaque irrationnel. Cette fonction est alors discontinue en tout point. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels (u_n) et une suite d'irrationnels (v_n) qui tendent vers x. On a alors $f(u_n) \to 1$ et $f(v_n) \to -1$. La fonction f n'est donc pas continue en x.

f est donc discontinue en tout point. Or, on a $|f|$ qui est constante égale à 1 et qui est donc continue en tout point.

Exercice 5. Remarquons déjà que f est paire puisque pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$. On va donc étudier f sur $\mathbb{R}_+$. Fixons à présent $x \in]0, 1[$. Posons $x_n = x^{2^n}$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{2^n \ln(x)}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini par composition de limites. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(0)$ par continuité de f.

Or, on peut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = f(x)$. Cette propriété est vraie au rang 0. Si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$f(x_{n+1}) = f(x^{2^{n+1}}) = f((x^{2^n})^2) = f(x^{2^n}) = f(x_n).$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc la propriété voulue au rang $n+1$, et elle est donc vraie à tout rang. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = f(0)$. On en déduit que $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = f(0)$. Par continuité de f en 1 à gauche, on a également $f(1) = f(0)$.

Si on fixe à présent $x > 1$, en considérant cette fois la suite $x_n = x^{\frac{1}{2^n}}$, alors cette suite tend vers 1 quand n tend vers l'infini et en reprenant la même preuve que ci-dessus, on montre que la suite $(f(x_n))$ est constante égale à $f(x)$. Par passage à la limite, on a donc $f(x) = f(1) = f(0)$. On en déduit donc que f est constante sur $\mathbb{R}_+$ et par parité, elle est constante égale à la même constante sur $\mathbb{R}_-$.

Réciproquement, si f est constante, elle est bien continue et vérifie la propriété demandée. Les fonctions vérifiant cette équation sont donc exactement les fonctions constantes.

Exercice 9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ (f(x))^2 = 1$. On a donc $\forall x \in I,\ f(x) = \pm 1$. La difficulté est de montrer que le signe est le meme pour tous les $x \in I$. Supposons donc par l'absurde qu'il existe $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = -1$. Puisque I est un intervalle, on a $[x_1, x_2] \subset I$ et puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a alors qu'il existe $y \in [x_1, x_2]$ tel que $f(y) = 0$. Ceci est absurde car $f(y)^2 = 1 \neq 0$.

On en déduit que f garde un signe constant sur I et donc que $\forall x \in I,\ f(x) = 1$ ou $\forall x \in I,\ f(x) = -1$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

On en déduit que $\forall M > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \geq x_0,\ |f(x)| \geq M$. Montrons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou bien que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour cela, fixons $M > 0$. Soit le x_0 associé à la limite de $|f(x)|$ vers l'infini. On va séparer les cas selon les signes de $f(M)$:

Supposons $f(x_0) > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 > x_0$ tel que $f(x_1) < 0$. On en déduit alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires (que l'on peut utiliser car f est continue sur $[x_0, x_1]$) qu'il existe $x_2 > x_0$ tel que $f(x_2) = 0$. On a alors $|f(x_2)| < M$: absurde ! Ceci entraine que pour tout $x > x_0$, $f(x) \geq 0$ et donc que $|f(x)| = f(x)$. On en déduit en utilisant la définition de la limite écrite au début de l'énoncé que :

$$\forall x \geq x_0,\ f(x) \geq M.$$

M étant choisi quelconque, on a donc montré que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Si $f(x_0) < 0$, alors par une preuve similaire, on montre que $f(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 11.

1) On peut montrer que f est constante. En effet, si f n'est pas constante, alors il existe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ et $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$ avec $n_0 < n_1$ par exemple tels que $f(x_0) = n_0$ et $f(x_1) = n_1$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f atteint la valeur $n_0 + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ entre x_0 et x_1 : absurde !

2) De même, si f n'est pas constante, alors il existe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ et $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$ avec $q_0 < q_1$ tels que $f(x_0) = q_0$ et $f(x_1) = q_1$. Alors, puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $q_0 < y < q_1$. Toujours d'après le théorème des valeurs intermédaires, y est atteint par la fonction f entre x_0 et x_1 : absurde !

Exercice 12. On va montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que f converge vers $k\pi$ quand x tend vers $+\infty$.

Appliquons la définition de la limite de $\sin(f)$ en $+\infty$ en $\dfrac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq a$, $-\varepsilon \leq \sin(f(x)) \leq \varepsilon$. Ceci entraine que pour $x \geq a$, $f(x) \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} [k\pi - \arcsin(\varepsilon), k\pi + \arcsin(\varepsilon)]$. Or, on a ici $\arcsin(\varepsilon) < \arcsin(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$. Ceci entraine que les différents intervalles sont disjoints. Or, la fonction f étant continue, elle ne peut pas prendre des valeurs qui sont dans deux intervalles disjoints (sinon en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, elle prendrait des valeurs qui seraient en dehors de l'union des intervalles ce qui est absurde).

On en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel qu'à partir du rang a, on a pour tout $x \geq a$, $f(x) \in [k_0\pi - \arcsin(\varepsilon), k_0\pi + \arcsin(\varepsilon)]$. Si au départ, on avait appliqué la propriété en $\varepsilon = \sin(\varepsilon')$ avec $\dfrac{\pi}{2} > \varepsilon' > 0$, on aurait alors un rang a tel que pour tout $x \geq a$, $f(x) \in [k_0\pi - \varepsilon', k_0\pi + \varepsilon']$, ce qui entraine que f tend vers $k_0\pi$ en l'infini.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone surjective. Supposons f croissante (la preuve est identique dans la cas f décroissante). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue en x_0.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $y_1 = f(x_0) - \varepsilon$ et $y_2 = f(x_0) + \varepsilon$. Puisque f est surjective, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Puisque $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ et que f est croissante, on a alors $x_1 < x_0 < x_2$ (par exemple, si on avait $x_1 \geq x_0$, on aurait alors $f(x_1) \geq f(x_0)$: absurde !). Puisque f est croissante, on a que pour tout $x \in [x_1, x_2]$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. On a donc $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Posons $\eta = \min(x_0 - x_1, x_2 - x_0) > 0$. On a donc $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset [x_1, x_2]$. On a donc construit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est donc continue en x_0. Puisque x_0 est pris quelconque dans $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrons que f admet un minimum.

Posons $M = f(0) + 1$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \leq x_1,\ f(x) \geq M \\ \forall x \geq x_2,\ f(x) \geq M \end{cases}$$

Par construction, on a $0 \in [x_1, x_2]$ (puisque $M > f(0)$). De plus, sur le segment $[x_1, x_2]$, la fonction f étant continue, elle admet un minimum, atteint en x_0, que l'on notera m. On a donc en particulier $f(0) \geq m$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq m$. m minore donc f et il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = m$. La fonction f admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17.

1) Supposons que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Posons $g : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{cases}$. Puisque g est une différence de fonction continue, elle est continue. De plus, on a $g(0) = f(0) \geq 0$ (puisque f est à valeurs dans $[0,1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (puisque f est à valeurs dans $[0,1]$). On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$. On a donc $f(c) = c$. f admet donc au moins un point fixe.

2) Supposons à présent que $[0,1] \subset f([0,1])$. Il existe donc $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = 0$ et il existe $x_2 \in [0,1]$ tel que $f(x_2) = 1$. Considérons toujours $g : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{cases}$. On a alors $g(x_1) = -x_1 \leq 0$ et $g(x_2) = 1 - x_2 \geq 0$. Puisque g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$. On a donc $f(c) = c$. f admet donc au moins un point fixe.

Exercice 18.

1) On procède par récurrence. Pour $n = 0$, on a $f(x_0) = x_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $f(x_n) = x_n$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x_{n+1}) & = & f(g(x_n)) \\ & = & g(f(x_n)) \\ & = & g(x_n) \\ & = & x_{n+1}. \end{array}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Par récurrence, elle est donc vraie à tout rang.

2) On suppose que $\forall x \in [0,1],\ f(x) > g(x)$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) > g(x_n)$ donc $x_n > x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc (strictement) décroissante. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0,1]$ (car $[0,1]$ est stable par g et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et que $x_0 \in [0,1]$). On a donc (x_n) minorée. Elle est donc convergente et tend vers $l \in [0,1]$.

Par passage à la limite dans l'égalité $f(x_n) = x_n$ et par continuité de f, on a $f(l) = l$. Par passage à la limite dans $x_{n+1} = g(x_n)$ et continuité de g, on a $l = g(l)$. On obtient donc $f(l) = g(l)$: absurde !

3) D'après la question précédente, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) \leq g(x)$. On procède ensuite comme à la question précédente : si par l'absurde $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$, alors on trouve que (x_n)

est croissante et majorée donc converge et de meme que dans la question précédente, on obtient $f(l) = l = g(l)$: absurde ! On en déduit qu'il existe $y \in [0,1]$ tel que $f(y) \geq g(y)$.

On en déduit que la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ change de signe (elle n'a pas le meme signe en x et en y) et est continue. On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que h s'annule sur $[x,y] \subset [0,1]$ et donc qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $h(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = g(a)$.

Exercice 21. Soit $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. On a alors $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$. Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$. On a donc $f(x_n) \to 0$ et $f(y_n) \to 1$. f n'admet donc pas de limite en 0.

2) Prolongeons f par $f(0) = 0$. f n'est pas continue en 0 (on a construit une suite (y_n) qui tend vers 0 telle que $f(y_n) \to 1$). Montrons que f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

- Si $0 < a < b$ ou $a < b < 0$, alors, $f|_{[a,b]}$ est continue (le seul problème de continuité est en 0) et elle vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires.
- Si $a < 0 < b$. Montrons que $f([a,b]) = [-1,1]$ (ce qui montrera que f vérifie le TVI car on aura alors $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$). Considérons les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $z_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$. Puisque ces deux suites tendent vers 0 par valeurs supérieures, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < y_N < b$ et tel que $0 < z_N < b$. f est alors continue sur $[y_N, z_N]$ et on a $f(y_N) = 1$ et $f(z_N) = -1$. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que $[-1,1] \subset f([y_N, z_N])$. On a donc $[-1,1] \subset f([a,b])$ et l'inclusion réciproque est toujours vraie car la fonction sinus est à valeurs dans $[-1,1]$. On a donc bien $f([a,b]) = [-1,1]$.

- Si $a = 0 < b$, la preuve précédente fonctionne. Si $a < b = 0$, alors on considère les suites $(-y_n)$ et $(-z_n)$ et on montre, exactement comme dans le point précédent, que f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

On en déduit que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$. f vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires.

On remarque ici que la valeur que l'on a donné à f en 0 n'a pas d'importance du moment que cette valeur est dans $[-1,1]$.

Exercice 22. Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Remarquons tout d'abord que f est impaire. On peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. On a donc f continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante, telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. On en déduit que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1[$ (d'après le théorème de la bijection continue).

Par imparité, f est également bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $]-1,0]$. On en déduit finalement que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ (car elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue, et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$).

2) Soit $y \in]-1,1[$. On étudie l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que la question précédente nous garantit l'existence d'un unique x solution (puisque f est bijective, elle admet une

réciproque). On a $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+|x|}=y$. On peut alors séparer deux cas :

- Si $y \geq 0$, alors on doit nécessairement avoir $x \geq 0$ (si $x<0$, on a $f(x)<0$ et $y \geq 0$: absurde). On a donc :

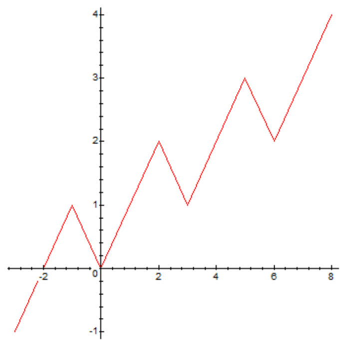
$$\begin{aligned} f(x)=y & \Leftrightarrow \frac{x}{1+x}=y \\ & \Leftrightarrow x=y+xy \\ & \Leftrightarrow x(1-y)=y \\ & \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

  Remarquons que le x trouvé est bien positif puisque $y \in [0,1[$.
- De la même manière, si $y \leq 0$, on doit avoir $x \leq 0$ (même argument) et en résolvant de la même manière, on trouve que $f(x)=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1+y}$ (on trouve bien x négatif car $y \in]-1,0]$.

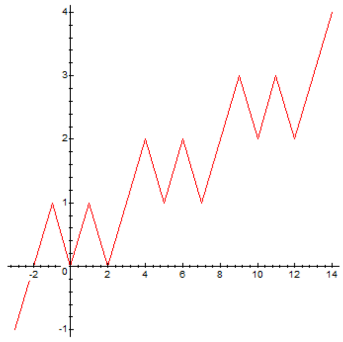
On a donc trouvé que $f(x)=y$ si et seulement si $x=g(y)$ avec $g : \begin{cases}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1-y} \text{ si } y \geq 0 \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1+y} \text{ si } y \leq 0 \end{cases}$.

On a donc $f^{-1}=g$. Pour avoir une formule plus « compacte », on peut remarquer que pour tout $y \in]-1,1[$, $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{1-|y|}$.

Exercice 23. Pour $n=1$, n'importe quelle fontion bijective continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convient, par exemple $f : x \mapsto x$. Pour $n=2$, on commence à avoir des difficultés à construire une telle fonction. Pour $n=3$, on y arrive en considérant une fonction qui répète le même motif. Par exemple, considérons la fonction suivante :



On continue à répéter indéfiniment ce motif. Il suffit pour cela de définir f par morceaux. La construction rigoureuse ainsi que la vérification que tout point admet exactement 3 antécédents n'a ici pas d'intérêt. On remarque que l'on peut alors construire une telle fonction f pour n'importe quel n impair. Par exemple, ci-dessous pour $n=5$:



Attaquons nous à présent au cas n pair. On va montrer qu'une telle fonction n'existe pas pour $n = 2$. Supposons par l'absurde qu'une telle fonction existe. 0 admet alors exactement deux antécédents, que l'on notera x_0 et x_1 et on supposera $x_0 < x_1$. f ne repasse donc par 0 en aucun autre point. Elle garde donc un signe constant sur $[x_0, x_1]$. Elle y est par exemple positive, ce que l'on peut supposer sans perte de généralités (le raisonnement pour f négative est le même). Puisque f est continue sur ce segment, elle y admet donc un maximum égal à $M > 0$, atteint en $y \in]x_0, x_1[$. Aucun point strictement plus grand que M n'admet donc d'antécédent sur ce segment. Que se passe-t-il pour les points compris entre 0 et M ? D'après le théorème des valeurs intermédiaires, chaque point est atteint au moins une fois sur $[x_0, y]$ et une fois sur $[y, x_1]$. On a donc construit deux antécédents de chacun de ces points. La fonction f ne peut donc plus reprendre des valeurs entre $[0, M]$ en dehors du segment $[x_0, x_1]$. Ceci est absurde car dans ce cas, aucun point strictement plus grand que M n'admet d'antécédent par f ! On a donc une absurdité.

On peut alors faire le cas général où $n = 2p$ est pair. Supposons par l'absurde qu'une telle fonction existe. 0 admet alors exactement $2p$ antécédents par f, $x_0 < x_1 < \ldots < x_{2p}$. Sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$, f garde donc un signe constant (et sur $]-\infty, x_0]$ et sur $[x_{2p}, +\infty[$ également).

On a exactement $2p-1$ segment entre x_0 et x_{2p}. Il y a donc au moins p segments où f est positive ou au moins p segments où p est négative. Supposons qu'il y ait au moins p segments où f soit positive. Sur chacun de ses segments, elle admait un maximum strictement positif. Notons alors M le minimum de tous ces maximums (qui est aussi strictement positif car c'est le minimum d'un nombre fini de termes strictements positifs). En utilisant le même raisonnement que précédemment, tout point de $]0, M_0[$ admet alors exactement 2 antécédents par f sur chacun des segments, ce qui nous donne les $2p$ antécédents de ces éléments. On en déduit que sur $]-\infty, x_0]$ et sur $[x_{2p}, +\infty[$, f n'est pas positive. Ceci est absurde puisque, f étant bornée sur $[x_0, x_{2p}]$, il y a alors des points qui ne sont jamais atteints !

Exercice 24. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $M(x) = \sup\limits_{t \in [0,x]} f(t)$.

1) f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, elle est continue sur le segment $[0, x]$. Elle est donc bornée sur ce segment et elle atteint ses bornes. Elle admet donc une borne supérieure (et plus précisemment un maximum). On en déduit que M est bien définie.

2) M est de plus croissante. En effet, si $x \leq y$, alors, puisque $[0, x] \subset [0, y]$, on en déduit que le maximum de f sur $[0, x]$ est plus petit que le maximum de f sur $[0, y]$. On a donc $M(x) \leq M(y)$. La fonction M est bien croissante.

3) Montrons que M est continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon$. On en déduit en particulier que :

$$\forall y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ f(x_0) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Cette propriété implique que le maximum de f sur $[x_0, x_0 + \eta]$ est inférieur ou égal à $f(x_0) + \varepsilon$. On en déduit, puisque $f(x_0) \leq M(x_0)$ et que $\forall x \in [0, x_0],\ f(x) \leq M(x_0)$ que $M(x_0 + \eta) \leq M(x_0) + \varepsilon$.

Cherchons à présent une minoration de $M(x_0 - \eta)$. On va séparer deux cas :

— Si le maximum de f sur $[0, x_0]$ est atteint sur le segment $[0, x_0 - \eta]$, on a alors $M(x_0 - \eta) = M(x_0)$.

— Si le maximum de f sur $[0, x_0]$ n'est atteint que sur le segment $[x_0 - \eta, x_0]$, soit $y_0 \in [x_0 - \eta, x_0]$ tel que $f(y_0) = M(x_0)$. En utilisant la continuité de f en x_0 et l'inégalité triangulaire, on a alors que :

$$\begin{array}{rcl} |f(x_0 - \eta) - f(y_0)| & \leq & |f(x_0 - \eta) - f(y_0)| + |f(y_0) - f(x_0)| \\ & \leq & 2\varepsilon. \end{array}$$

On en déduit, puisque $f(x_0 - \eta) \leq f(y_0) = M(x_0)$ (car f est maximale en y_0), que $f(x_0 - \eta) \geq M(x_0) - 2\varepsilon$. Puisque $M(x_0 - \eta) \geq f(x_0 - \eta)$, on a alors $M(x_0 - \eta) \geq M(x_0) - 2\varepsilon$.

Dans les deux cas, on a montré que $M(x_0) - 2\varepsilon \leq M(x_0 - \eta)$. On a donc montré au final l'encadrement :

$M(x_0) - 2\varepsilon \leq M(x_0 - \eta) \leq M(x_0 + \eta) \leq M(x_0) + \varepsilon$ (l'inégalité du milieu étant vraie par croissance de M).

On en déduit, toujours par croissance de M que :

$$\forall z \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ M(x_0) - 2\varepsilon \leq M(y) \leq M(x_0) + \varepsilon.$$

Le $\eta > 0$ ne dépendant que du $\varepsilon > 0$ qui lui était quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, on a donc montré que M était continue en x_0. Puisque le x_0 était pris quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que M est continue sur $\mathbb{R}$.