4. Complexes, méthodologie

I. Ensemble des nombres complexes

I.1. Définition

Définition. On admet qu'il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, $\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ z = x + iy$. C'est l'écriture **algébrique** de z.

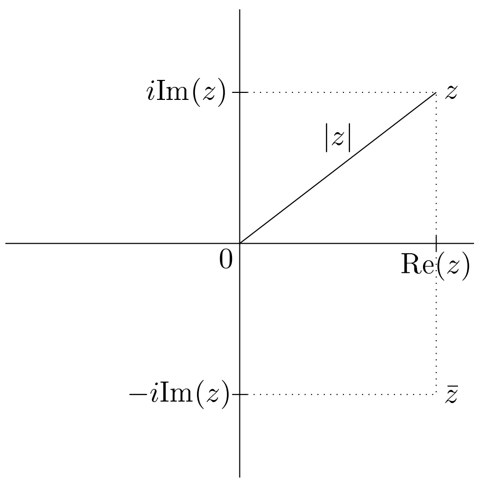
On pose alors $\mathrm{Re}(z) = x$ la partie réelle de z et $\mathrm{Im}(z) = y$ la partie imaginaire de z.

m Pour prouver qu'un complexe est réel, il faut montrer que sa partie imaginaire est nulle et pour prouver qu'un complexe est imaginaire pur, il faut montrer que sa partie réelle est nulle.

Définition. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On pose alors :

- $\overline{z} = x - iy$ le conjugué de z.
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ le module de z.

I.2. Interprétation géométrique



I.3. Propriétés liées au conjugué

Proposition.

- $\forall z \in \mathbb{C}, \ \overline{\overline{z}} = z$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
- $\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

I.4. Propriétés du module

Proposition. $\forall z \in \mathbb{C},\ z\overline{z} = |z|^2$. En particulier, $\forall z \in \mathbb{C},\ z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ et $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition.

- $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- $\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(m) Quand on veut écrire une fraction sous forme algébrique, on multiplie le dénominateur par son conjugué (multiplication par la quantité conjuguée).

Exercice d'application 1. Déterminer les parties réelles et imaginaires de $z_1 = \dfrac{1}{1+i}$ et $z_2 = \dfrac{2-i}{3+4i}$.

(m) Ainsi pour calculer le module d'un nombre complexe, il n'est pas obligatoire de le mettre sous forme algébrique et d'utiliser le fait que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ mais on peut calculer le module de chacun des termes du produit/quotient.

Exercice d'application 2. Déterminer le module de $\dfrac{1+i}{3-4i}$.

II. Le groupe unimodulaire et ses applications

II.1. Le groupe unimodulaire

Définition. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Proposition. $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe, c'est à dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :

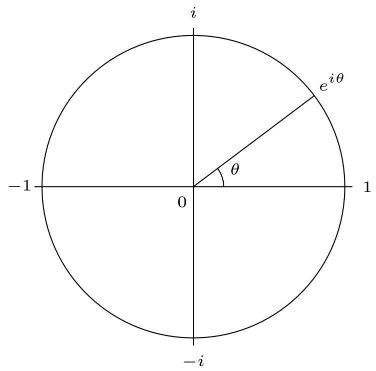
- $1 \in \mathbb{U}$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U},\ z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\forall z \in \mathbb{U},\ z \neq 0$ et $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Remarque : On a $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Théorème. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Alors, on a :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Représentation géométrique de $\mathbb{U}$:



Proposition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler).

Théorème. Propriété fondamentale de l'exponentielle. $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$.

Théorème. Formule de Moivre. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

II.2. Forme trigonométrique et argument

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$.
On a $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \text{Arg}(z)$ l'argument de z est défini modulo 2π.

m Pour déterminer la forme trigonométrique d'un complexe z, on commence en général par calculer le module et on factorise l'expression par $|z|$.

m En général, on utilise la forme trigonométrique quand on effectue des produits, des quotients ou que l'on calcule des puissances n-ièmes de complexes. On utilise la forme algébrique quand on fait des sommes ou des différences.

Exercice d'application 3. Déterminer les formes trigonométriques de :

1. $1 - i$, $2\sqrt{3} + 2i$ et $z_1 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{3}+2i}$.
2. $z_2 = \left(3 - 3\sqrt{3}i\right)^4$.

II.3. Exponentielle complexe

(m) Pour résoudre $e^z = a$, on écrit e^z et a sous forme trigonométrique ($e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)} = \rho e^{i\theta}$) afin d'identifier module et argument modulo 2π.

Exercice d'application 4. Résoudre $e^{5z} = 2\sqrt{3} - 2i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

III. Le groupe des racines n-ièmes de l'unité

III.1. Définition

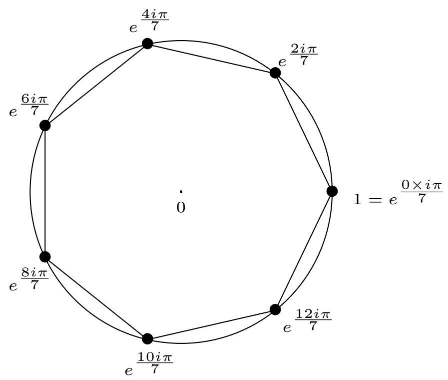
Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. C'est le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

III.2. Description de $\mathbb{U}_n$

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$. En particulier, $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments.

Représentation géométrique de $\mathbb{U}_7$:



III.3. Propriétés

Proposition. Soit $n \geq 2$. Alors, $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.

IV. Résolution d'équations polynomiales

IV.1. $z^n = a$

Théorème. Soit $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors les solutions de $z^n = a$ sont de la forme :

- Une unique solution $z = 0$ si $a = 0$.
- n solutions distinctes si $a \neq 0$ de la forme $z_k = \rho_a^{1/n} \times e^{\frac{i\theta_a}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k \in [\![0, n-1]\!]$ où $a = \rho_a e^{i\theta_a}$ avec $\rho_a > 0$ et $\theta_a \in \mathbb{R}$.

(m) La résolution de $z^n = a$ commence donc (quasiment) toujours par la mise sous forme trigonométrique de a.

Exercice d'application 5. Résoudre $z^5 = 3 + 3i$.

IV.2. Calcul de racines carrées

(m) Pour trouver les solutions de $z^2 = a$ et que a ne s'écrit pas sous forme trigonométrique, on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et on remplace z par cette expression dans l'équation. Le point important est d'obtenir une équation supplémentaire **en appliquant le module dans l'égalité** $z^2 = a$, ce qui donne $|z|^2 = |a| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = |a|$. Une fois x^2 et y^2 déterminés, l'équation $2xy = \mathrm{Im}(a)$ permet de déterminer le signe de x par rapport à celui de y et ainsi d'obtenir les deux solutions.

Exercice d'application 6. Déterminer une racine carrée de $z = 5 + 12i$.

IV.3. Équations de degré 2

Théorème. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ (donc un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$). Alors, les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

On a de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

V. Géométrie dans $\mathbb{C}$

V.1. Rappel

V.2. Inégalité triangulaire

Théorème. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

On a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $\left\{\begin{array}{c} z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0 \\ \text{ou} \\ \text{si } z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0,\ \mathrm{Arg}(z_1) \equiv \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi] \end{array}\right.$.

Proposition. On a un encadrement de $|z_1 - z_2|$ (la distance entre les points d'affixes z_1 et z_2) :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

V.3. Équations de cercle

V.4. Angles et distances

Proposition. Soient A, B, C trois points d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$ et $a \neq c$. Alors, $\dfrac{c - a}{b - a}$ représente :

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$.
- $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi]$.

(m) Cette proposition est très utile car elle permet de ramener une étude de distance ou d'angle entre vecteurs à l'étude du module ou de l'argument d'un seul nombre complexe, ce qui simplifie beaucoup les raisonnements.

Exercice d'application 7. Quel nombre complexe a un argument congru à l'angle $(\vec{BC}, \vec{BA})$ modulo 2π ?

a. $\dfrac{b-c}{b-a}$.	*b.* $\dfrac{a-b}{b-c}$.
c. $\dfrac{b-c}{a-b}$.	*d.* $\dfrac{b-a}{b-c}$.

Exercice d'application 8. On considère les points de $\mathbb{R}^2$ suivants : $A(3, 1+\sqrt{3})$, $B(2,1)$, et $C(0, 1+2\sqrt{3})$.

1. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{BA}, \vec{BC})$.
2. Quelle est la plus grande longueur entre $||\vec{BA}||$ et $||\vec{BC}||$?

V.5. Transformations du plan complexe

Proposition. La rotation de centre Ω d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est représentée par l'application $r : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$.

Proposition. L'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est représentée par l'application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & k(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$.

Théorème. Soit l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array} \right.$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

- Si $a = 1$, alors s représente une translation de vecteur d'affixe b.
- Sinon, s est la composée commutative d'une homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k et d'une rotation de même centre Ω et d'angle θ où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \dfrac{b}{1-a} \\ k = |a| \\ \theta \equiv \operatorname{Arg}(a) \ [2\pi] \end{array} \right. .$$

Dans ce dernier cas, on dit que s représente la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On a alors $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$

(m) Il n'est pas utile de retenir par coeur la formule du centre d'une similitude directe. Il suffit de se souvenir que c'est le seul point fixe par cette application et qu'il faut résoudre le système $z = s(z) \Leftrightarrow z = az+b$ pour le déterminer.

(m) Quand on connait le centre z_0 d'une similitude directe (par exemple d'une rotation/homothétie), il est utile pour la traduire en application complexe de l'écrire sous la forme $z \mapsto a(z - z_0) + z_0$ et de déterminer a à l'aide des paramètres du problème.

Exercice d'application 9. Quelle est l'expression complexe de la rotation de centre $(2, 3)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$?

Exercice d'application 10. Identifier la transformation $s : z \mapsto 2iz + 1$ et la mettre sous forme réduite.

VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$z_1 = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

On a donc $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -\frac{1}{2}$.
De même,

$$z_2 = \frac{(2-i)(3-4i)}{9+16} = \frac{6-8i-3i-4}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11i}{25}.$$

On a donc $\mathrm{Re}(z_2) = \frac{2}{25}$ et $\mathrm{Im}(z_2) = -\frac{11}{25}$.

Exercice d'application 2. On a $\left|\frac{1+i}{3-4i}\right| = \frac{|1+i|}{|3-4i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9+16}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Exercice d'application 3.

1. On a $|1-i| = \sqrt{2}$ donc $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
   On a $|2\sqrt{3}+2i| = \sqrt{12+4} = 4$ donc $2\sqrt{3}+2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 4e^{\frac{i\pi}{6}}$.
   Enfin, on a d'après ce qui précède $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{4e^{\frac{i\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{5i}{12}}$.
2. En factorisant le terme dans la parenthèse par 6, on voit que l'on fait apparaitre un complexe d'argument connu. On a donc :

$$z_2 = \left(6\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right)^4 = 6^4\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^4 = 1296e^{-\frac{4i\pi}{3}}.$$

Puisque $-\frac{4\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, *on a aussi* $z_2 = 1296e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice d'application 4. On pose $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a $2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 4e^{-\frac{i\pi}{6}}$.
On a donc l'équation de départ équivalente à :

$$e^{5a}e^{i5b} = 4e^{-\frac{i\pi}{6}}.$$

On en déduit que $e^{5a} = 4$ et que $5b \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, c'est à dire :

$$a = \frac{\ln(4)}{5} = \frac{2\ln(2)}{5} \text{ et } b \equiv -\frac{\pi}{30}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right].$$

Exercice d'application 5. On commence par mettre $3+3i$ sous forme trigonométrique. Le module étant $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, on a $3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = (18)^{1/2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que les solutions de $z^5 = 3+3i$ sont de la forme :

$$z_k = (18)^{1/10}e^{\frac{i\pi}{20}} \times e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k \in [\![0, 4]\!].$$

Exercice d'application 6. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a+ib)^2 = 5+12i$. En étudiant en plus le module, on a le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{25+144} = 13 \end{cases}$. Les équations 1 et 3 nous donnent $a^2 = 9$ et $b^2 = 4$ d'où $a = \pm 3$ et $b = \pm 2$. Puisque a et b sont de même signe, on en déduit qu'une racine carré de $5+12i$ est $3+2i$ (l'autre étant $-3-2i$).

Exercice d'application 7. réponse d. On a en effet, $\dfrac{b-a}{b-c} = \dfrac{a-b}{c-b}$ qui a bien le même argument modulo 2π que $\left(\vec{BC}, \vec{BA}\right)$.

Exercice d'application 8. Notons $a = 3 + i(1+\sqrt{3})$ l'affixe de A, $b = 2+i$ l'affixe de B et $c = i(1+2\sqrt{3})$ l'affixe de C.

1. On étudie le complexe $\dfrac{c-b}{a-b}$ et on cherche son argument. On a :

$$\begin{aligned} \frac{c-b}{a-b} &= \frac{-2+2i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\ &= 2 \times \frac{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} \\ &= 2 \times \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{3}}} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

   On en déduit que $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. D'après le calcul précédent, on a $\dfrac{||\vec{BC}||}{||\vec{BA}||} = 2$ donc $||\vec{BC}|| = 2||\vec{BA}||$. C'est donc $||\vec{BC}||$ la plus grande longueur.

Exercice d'application 9. On a $r : z \mapsto e^{\frac{i\pi}{6}}(z-\omega)+\omega$ avec $\omega = 2+3i$. On peut alors développer cette expression, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} r(z) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(z-2-3i)+2+3i \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z - \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}i}{2} - i + \frac{3}{2} + 2 + 3i \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z + \left(\frac{7}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice d'application 10. On a une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (car $2i = 2e^{i\pi/2}$). Pour le centre, on résout $\omega = 2i\omega + 1$ (car c'est le seul point fixe), on trouve alors :

$$\omega = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$$

et donc un centre Ω de coordonnée $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. On a donc sous forme réduite $s : z \mapsto 2e^{i\pi/2}(z-\omega)+\omega$.