À chercher pour lundi 05/06/2023, corrigé

Exercice 8.

1) D'après le cours, $\mathbb{V}(X_n) = 4n \times 1/2 \times 1/2 = n$ et on a $\mathbb{E}(X_n) = 4n \times 1/2 = 2n$.

On a $\mathbb{P}(|X_n - 2n| \geq n) = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq n)$. D'après l'inégalité de Tchebychev appliquée en $\varepsilon = n > 0$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq n) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Puisqu'une probabilité est toujours positive, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq n) = 0$.

2) On a $\mathbb{P}(|X_n-2n| \leq n) = \mathbb{P}(|X_n-2n| = n \cup (|X_n-2n| < n) = \mathbb{P}(|X_n-2n| = n)+\mathbb{P}(|X_n-2n| < n)$ car l'union est disjointe. On a donc finalement :

$$\mathbb{P}(|X_n - 2n| \leq n) = \mathbb{P}(|X_n - 2n| = n) + 1 - \mathbb{P}(|X_n - 2n| \geq n).$$

Il ne reste donc plus qu'à trouver la limite de

$$\mathbb{P}(|X_n - 2n| = n) = \mathbb{P}(X_n = n) + \mathbb{P}(X_n = 3n) = \binom{4n}{n}\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^{3n}} + \binom{4n}{3n}\frac{1}{2^{3n}} \times \frac{1}{2^n} = 2 \times \binom{4n}{n} \times \frac{1}{2^{4n}}.$$

Or, on a d'après la formule de Stirling :

$$\binom{4n}{n} = \frac{(4n)!}{n!(3n)!} \sim \frac{(4n)^{4n}\sqrt{8\pi n}e^n e^{3n}}{e^{4n}n^n(3n)^{3n}\sqrt{2\pi n}\sqrt{6\pi n}} \sim \left(\frac{4^4}{3^3}\right)^n \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi n}}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(|X_n - 2n| = n) \sim \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi n}}.$$

Or, $0 \leq \frac{2^4}{3^3} = \frac{16}{27} < 1$. On en déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - 2n| = n) = 0$. Par somme de limites, on en déduit d'après la question précédente que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - 2n| \leq n) = 1.$$

Plus simplement, on a que $\mathbb{P}(|X_n-2n| > n) \leq \mathbb{P}(|X_n-2n| \geq n)$ puisque l'évènement $(|X_n-2n| > n)$ entraine (est inclus dans) l'évènement $(|X_n-2n| \geq n)$. Puisqu'une probabilité est positive, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n-2n| > n) = 0$. En passant au complémentaire, on obtient donc que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - 2n| \leq n) = 1$.

3) On a par définition de la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(|X_n - 2n| \leq n) = \mathbb{P}(n \leq X_n \leq 3n) = \sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{4n-k}} = \frac{1}{2^{4n}}x_n.$$

D'après la question précédente, on a donc $x_n \sim 2^{4n} \sim 16^n$.

Exercice 11. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1) On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. On note X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au maximum des numéros obtenus.

Comme les tirages se font avec remise, on peut considérer $\Omega = [\![1, N]\!]^n$, muni de la probabilité uniforme (puisque tous les évènements élémentaires ont même probabilité).

a) On a $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$ puisque le plus petit numéro tiré va de 1 (si on tire la boule 1 une fois) à N (si on ne tire que la boule N lors des tirages). Soit $x \in [\![1, N]\!]$. L'évènement $(X \geq x)$ est réalisé quand au cours des n tirages toutes les boules ont un numéro plus grand que x. Il faut donc tirer nos boules uniquement parmi les numéros $[\![x, N]\!]$, ce qui entraine $(N - x + 1)$ tirages possibles. On a donc :

$$P(X \geq x) = \frac{(N - x + 1)^n}{N^n}.$$

Ceci entraine que $P(X = x) = P(X \geq x) - P(X \geq x + 1) = \dfrac{(N - x + 1)^n - (N - x)^n}{N^n}$.

b) Soit $y \in [\![1, N]\!]$. On procède de même. $(Y \leq y)$ signifie que les boules sont toutes tirées parmi les boules de 1 à y. On a donc $P(Y \leq y) = \dfrac{y^n}{N^n}$ puis :

$$P(Y = y) = P(Y \leq y) - P(Y \leq y - 1) = \frac{y^n - (y - 1)^n}{N^n}.$$

On a également Y à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

c) Soit $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$. Remarquons que si $x > y$, alors $P((X \geq x) \cap (Y \leq y)) = 0$. Si $x = y$, cela signifie que l'on a tiré n fois la boule numéro x et donc $P((X = x) \cap (Y = x)) = \dfrac{1}{N^n}$. Il reste alors le cas $x < y$. On a alors que l'évènement $(X \geq x) \cap (Y \leq y)$ correspond à tirer toutes les boules comprises entre x et y. On a donc, de même qu'avant :

$$P((X \geq x) \cap (Y \leq y)) = \frac{(y - x + 1)^n}{N^n}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} P((X = x) \cap (Y = y)) &= P((X = x) \cap (Y \leq y)) - P((X = x) \cap (Y \leq y - 1)) \\ &= P((X \geq x) \cap (Y \leq y)) - P((X \geq x + 1) \cap (Y \leq y)) - (P((X \geq x) \cap (Y \leq y - 1)) - \end{aligned}$$

On en déduit que si $x < y$, $P((X = x) \cap (Y = y)) = \dfrac{(y - x + 1)^n + (y - x - 1)^n - 2(y - x)^n}{N^n}$.

2) Cette fois, on tire sans remise et simultanément, ce qui revient à tirer n boules parmi N. Une réalisation est donc une partie à n éléments de $[\![1, N]\!]$ et toutes les possibilités sont équiprobables.

On garde alors exactement la même méthode. Ceci nous donne que $P(X \geq x) = \dfrac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}}$ (cela revient à choisir les n boules tirées entre x et N donc parmi un ensemble à $N - x + 1$ boules). On en déduit que :

$$P(X = x) = \frac{\binom{N-x+1}{n} - \binom{N-x}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-x}{n-1}}{\binom{N}{n}} \quad \text{d'après la formule de Pascal.}$$

On obtient ensuite $P(Y \leq y) = \dfrac{\binom{y}{n}}{\binom{N}{n}}$ puis $P(Y = y) = \dfrac{\binom{y-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$, toujours à l'aide de la formule de Pascal. Enfin, si $x, y \in [\![1, N]\!]$, on obtient :

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = \frac{\binom{y-x}{n-1} - \binom{y-x-1}{n-1}}{N^n} = \frac{\binom{y-x-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}.$$

Exercice 13. Puisque X et Y sont à valeurs dans $\{0,1\}$, alors Z aussi. On a donc que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $r = \mathbb{P}(Z=1)$. Or, on a :

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X=1 \bigcup Y=1) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1)).$$

En effet, puisque Z est le maximum des deux, il suffit que X ou Y soit égal à 1 pour que Z soit égal à 1 (et Z vaut 0 si et seulement si X et Y sont tous les deux nuls). On a donc par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z=1) = p + q - \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) = p + q - pq.$$

On a donc Z qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $r = p + q - pq$.

On pose X_i la variable aléatoire valant 1 si le premier archer touche la cible i et Y_i la variable aléatoire valant 1 si le second archer touche la cible i. X_i et Y_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre p et q. On note alors $Z_i = \max(X_i, Y_i)$ qui suit donc une loi de Bernoulli. Le nombre de cibles touchées au total est donc $\sum_{i=1}^{n} Z_i$. Or, puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes, le lemme des coalitations assure que les $Z_1, \ldots, Z_n$ sont mutuellement indépendantes. On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p+q-pq)$.

Pour les cibles non touchées, on en a exactement $n - \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n}(1-Z_i)$. Or, $1 - Z_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - r = 1 - (p+q-pq) = (1-p)(1-q)$. Par le même argument que ci-dessus, on en déduit que le nombre de cibles non touchées suit une loi binomiale de paramètre $(n, (1-p)(1-q))$.

Exercice 15. Puisque $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes, on a $V((X+Y) + (X-Y)) = V(X+Y) + V(X-Y)$. Ceci entraine que :

$$V(2X) = V(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y) + V(X) - 2\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y) = 2V(X) + 2V(Y).$$

Or, on a $V(2X) = 4V(X)$. On a donc l'égalité voulue.

Exercice 16. D'après l'énoncé, X_1 suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{3})$. On en déduit que $\mathbb{V}(X_1) = \frac{2n}{9}$. Par symétrie, X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1 donc $\mathbb{V}(X_2) = \frac{2n}{9}$. Puisque le nombre de voitures qui franchit le péage est égal à n, on a $X_1 + X_2 + X_3 = n$, ce qui entraine que :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(n - X_3) = (-1)^2 \mathbb{V}(X_3) = \frac{2n}{9}.$$

Or, on a aussi $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_2)$, ce qui entraine que :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}.$$

En particulier, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes !