Chapitre OM7
Nombres complexes

1 Écritures d'un nombre complexe

1.1 Forme cartésienne

$$\boxed{\underline{Z} = a + jb \quad \text{avec} \quad j^2 = -1}$$

$a = \mathrm{Re}(\underline{Z})$: **partie réelle** de $\underline{Z}$ et $b = \mathrm{Im}(\underline{Z})$: **partie imaginaire** de $\underline{Z}$

1.2 Forme exponentielle

$$\boxed{\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\arg(\underline{Z})} = |\underline{Z}|e^{j\varphi_Z} = |\underline{Z}|\cos(\varphi_Z) + j\,|\underline{Z}|\sin(\varphi_Z)}$$

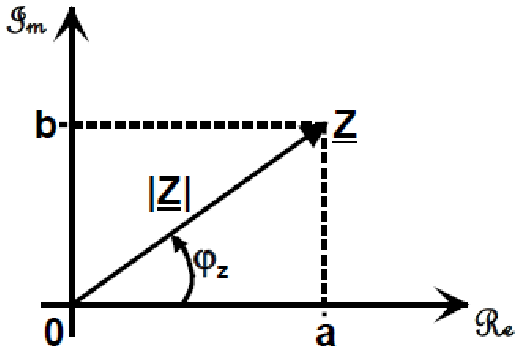
$|\underline{Z}|$: **module** de $\underline{Z}$ et φ_Z : **argument** de $\underline{Z}$

1.3 Représentation dans le plan complexe

Forme cartésienne
→ Forme exponentielle

$$\boxed{|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0}$$

$$\boxed{\varphi_Z = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}}$$



Forme exponentielle
→ Forme cartésienne

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \mathrm{Re}(\underline{Z}) \\ &= |\underline{Z}|\cos(\varphi_Z) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \mathrm{Im}(\underline{Z}) \\ &= |\underline{Z}|\sin(\varphi_Z) \end{aligned}}$$

2 Nombres complexes particuliers

$\underline{Z}$	Nature	Module	Argument
$\underline{Z} = a$	Réel pur	$\lvert\underline{Z}\rvert = \lvert a\rvert$	$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$
$\underline{Z} = jb$	Imaginaire pur	$\lvert\underline{Z}\rvert = \lvert b\rvert$	$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$

3 Opérations sur les nombres complexes

3.1 Addition – Soustraction

- Soient $\underline{Z}_1 = a_1 + jb_1 = |\underline{Z}_1| e^{j\varphi_1}$ et $\underline{Z}_2 = a_2 + jb_2 = |\underline{Z}_2| e^{j\varphi_2}$
- Addition :

$$\boxed{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = a_1 + a_2 + j\left(b_1 + b_2\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right) = a_1 + a_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right) = b_1 + b_2}$$

- Soustraction :

$$\boxed{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = a_1 - a_2 + j\left(b_1 - b_2\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2\right) = a_1 - a_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2\right) = b_1 - b_2}$$

3.2 Multiplication – Division

- Soient $\underline{Z}_1 = a_1 + jb_1 = \left|\underline{Z}_1\right| e^{j\varphi_1}$ et $\underline{Z}_2 = a_2 + jb_2 = \left|\underline{Z}_2\right| e^{j\varphi_2}$
- Multiplication :

$$\boxed{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \left|\underline{Z}_1\right| e^{j\varphi_1} \cdot \left|\underline{Z}_2\right| e^{j\varphi_2} = \left|\underline{Z}_1\right|\left|\underline{Z}_2\right| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

$$\boxed{\left|\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2\right| = \left|\underline{Z}_1\right| \cdot \left|\underline{Z}_2\right| \quad \text{et} \quad \arg\left(\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2\right) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg\left(\underline{Z}_1\right) + \arg\left(\underline{Z}_2\right)}$$

- Division :

$$\boxed{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\left|\underline{Z}_1\right| e^{j\varphi_1}}{\left|\underline{Z}_2\right| e^{j\varphi_2}} = \frac{\left|\underline{Z}_1\right|}{\left|\underline{Z}_2\right|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$\boxed{\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{\left|\underline{Z}_1\right|}{\left|\underline{Z}_2\right|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\left(\underline{Z}_1\right) - \arg\left(\underline{Z}_2\right)}$$

3.3 Dérivation – Intégration

- Soit $\underline{s}(t) = S_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}$
- Dérivation

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega S_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega \underline{s}(t)$$

- Intégration

$$\int \underline{s}(t)\,dt = \frac{S_M}{j\omega} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{s}(t) = -\frac{j}{\omega}\underline{s}(t)$$

Opération	Nombre complexe	Module	Argument
Dérivation	Multiplié par $j\omega$	Multiplié par ω	Ajout de $+\frac{\pi}{2}$
Intégration	Multiplié par $\frac{1}{j\omega}$	Multiplié par $\frac{1}{\omega}$	Ajout de $-\frac{\pi}{2}$