À chercher pour lundi 10/10/2022, corrigé

Pour les exercices du TD 5, je vous invite à vous référer au corrigé du TD5.
TD 6 :

Exercice 12. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}} \\ &= \frac{1+x^2-(x^2+2x+2)}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} + \frac{2x+1}{1+(x^2+x+1)^2} \\ &= (2x+1)\left(-\frac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{1}{1+x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, on a donc f constante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} = 0$ donc f est nulle. On a donc bien l'égalité voulue.

On en déduit (en utilisant une somme télescopique) que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k)) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) \\ &= \arctan(n+1). \end{aligned}$$

On a donc par composition de limites que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16.

1) Le domaine de définition de cette équation est $\mathbb{R}_+^*$ (pour avoir la puissance et la racine carrée bien définie). On a alors pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \qquad \text{(par injectivité de l'exponentielle).} \end{aligned}$$

On remarque donc que $x = 1$ est solution. Si $x \neq 1$, on peut alors simplifier par $\ln(x)$ et diviser par $\sqrt{x}$ (car $\sqrt{x} \neq 0$ pour obtenir une équation équivalente à $2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4 = x$. L'équation a donc 2 solutions : $x = 1$ et $x = 4$.

2) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} 2^{x^3} = 3^{x^2} &\Leftrightarrow e^{x^3\ln(2)} = e^{x^2\ln(3)} \\ &\Leftrightarrow x^3\ln(2) = x^2\ln(3) \\ &\Leftrightarrow x^2(x\ln(2)-\ln(3)) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x=0$ et $x=\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

3) Soient $x,y\in\mathbb{N}^*$. On remarque déjà que si $x=y$, alors on a bien $x^y=y^x$. Cherchons les solutions pour $x\neq y$. On a $x^y=y^x \Leftrightarrow e^{y\ln(x)}=e^{x\ln(y)}$. Ceci est équivalent à $y\ln(x)=x\ln(y)$, ce qui revient à $f(x)=f(y)$ où f est la fonction $f : x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable et pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ceci entraine, puisque $2<e<3$, les seules possibilités pour avoir $f(x)=f(y)$ sont d'avoir $x=1$ ou $x=2$ (puisque si x et y sont distincts et strictement plus grand que 2, la fonction étant strictement décroissante, on ne peut pas avoir $f(x)=f(y)$). Si $x=1$, on a $f(x)=0$ et donc aucune solution à part $y=x$. On remarque de plus que $f(2)=f(4)$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est $S=\{(2,4),(4,2),(x,x),\ x\in\mathbb{N}^*\}$.

4) L'équation est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $x^{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$ si et seulement si $e^{\sqrt{x}\ln(x)}=e^{-\ln(2)}$, c'est à dire si et seulement si $\sqrt{x}\ln(x)=-\ln(2)$. On remarque alors que les éventuelles solutions sont dans $]0,1[$ car on doit avoir $\ln(x)<0$. On remarque que $x=\dfrac{1}{4}$ est solution. En étudiant les variations de $x\mapsto\sqrt{x}\ln(x)$, on remarque qu'il existe 2 solutions (la fonction étant décroissante puis croissante sur $]0,1[$). Il existe donc une deuxième solution. En cherchant encore avec des puissances de 2, on remarque que $x=\dfrac{1}{16}$ est la deuxième solution.

Exercice 20. Pour $x\in[0,+\infty[$, on pose $f(x)=\arctan(\mathrm{sh}(x))-\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$. On a alors f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables. En effet, arctan et sh donc dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la première partie ne pose pas de souci. De plus, $\forall x\neq 0$, $0<\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}<1$ et arccos est dérivable sur $]-1,1[$. Par contre, en $x=0$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(0)}=1$ et arccos n'est pas dérivable en 1. En tout cas, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x>0,\ f'(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} - \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\times\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}^2(x)}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)\frac{|\mathrm{sh}(x)|}{|\mathrm{ch}(x)|}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a utilisé plusieurs fois l'égalité $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ et aussi le fait que $\sqrt{\text{sh}^2(x)} = |\text{sh}(x)| = \text{sh}(x)$ car $x > 0$ (et $\sqrt{\text{ch}^2(x)} = \text{ch}(x)$ car $\text{ch}(x) > 0$). Puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on a alors f constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a de plus par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$. f est donc constante égale à 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On traite à présent le cas particulier de $x = 0$. On a $f(0) = \arctan(0) - \arccos(1) = 0 - 0 = 0$. L'égalité demandée est donc bien vraie sur $\mathbb{R}_+$.