26. Groupe symétrique, corrigé

Exercice 1. On a $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On a comme décomposition en cycles à supports disjoints :

$$\sigma_1 = (1, 2, 4, 3, 5) \text{ et } \sigma_2 = (1, 5) \circ (2, 6, 4).$$

Ceci entraine que $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^4 = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = (-1) \times (-1)^2 = -1$.

Exercice 2.

1) On a $\sigma_1 = (1\ 2\ 6)(7\ 9)$. On en déduit que $\varepsilon(\sigma_1) = -1$.
2) On a $\sigma_2 = (1\ 9)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)$. On en déduit que $\varepsilon(\sigma_2) = 1$.
3) On a $\sigma_3 = (1\ 2\ 5\ 7)(3\ 4\ 9\ 8)$. On en déduit que $\varepsilon(\sigma_3) = 1$.
4) On a $\sigma_4 = (1\ n\ 2\ 3\ \dots\ n-1)$. Puisque σ_4 est un cycle de longueur n, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n+1}$.

Exercice 3. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On va séparer les cas n pair et n impair.

Supposons n pair. On a alors en notant $n = 2p$ que $\sigma = (1\ 2p)(2\ 2p-1)\dots(p\ p+1)$. σ se décompose en produit de p transpositions et on a donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p = (-1)^{n/2}$.

Supposons n impair. En notant $n = 2p+1$, on a alors $p+1$ qui est fixe par σ et on a :

$$\sigma = (1\ 2p+1)(2\ 2p)\dots(p\ p+2).$$

On a donc σ qui s'écrit comme le produit de p transpositions et on a encore $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

On en déduit que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{E(n/2)}$ (en notant $E(n/2)$ la partie entière de $n/2$).

Exercice 4. On a $\binom{n}{p}$ façons de choisir les p éléments d'un cycle de longueur p et on peut ensuite construire $(p-1)!$ cycles associés (si on considère les éléments $\{x_1, \dots, x_p\}$ et qu'on veut les mettre en cycle, on prend par exemple x_1 en point de départ et on a $p-1$ choix pour son image (on la prend dans $\{x_2, \dots, x_p\}$) puis $p-2$ choix pour l'image suivante, puis $p-3$, etc. Tous les cycles construits sont bien distincts car les points ne s'envoient pas sur les mêmes images). On a donc $\binom{n}{p} \times (p-1)!$ cycles de longueur p dans S_n.

Une autre manière de compter les p-cyles est de voir de combien de manières différentes on peut construire $(x_1\ x_2\ \dots\ x_p)$. On a n choix pour x_1 puis $n-1$ choix pour x_2, ..., puis $n-(p-1)$ choix pour x_p. On a cependant compter chaque p-cycles p fois (puisqu'avec cette écriture, on peut commencer le cycle avec x_1 ou x_2 ou ... ou x_p). On a donc $\dfrac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p}$ cycles de longueur p dans S_n.

Exercice 5. Soit σ une permutation de S_n et c un p-cycle de la forme $c = (a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$. Posons alors $b_1 = \sigma(a_1)$, $b_2 = \sigma(a_2)$, ... , $b_p = \sigma(a_p)$. Montrons que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (b_1\ b_2\ \dots\ b_p)$ qui est un p-cycle. Pour cela, si $j \notin \{b_1, \dots, b_n\}$, on a $\sigma^{-1}(j) \notin \{a_1, \dots, a_p\}$. Ceci entraine que $c(\sigma^{-1}(j)) = \sigma^{-1}(j)$ (car

j n'est alors pas déplacé par c). On en déduit que $\sigma(c(\sigma^{-1}(j))) = \sigma(\sigma^{-1}(j)) = j$. Tous les nombres différents des b_i sont donc fixes. Il reste alors à déterminer l'image de b_i. On a (on notera $b_{p+1} = b_1$) :

$$\begin{aligned}(\sigma \circ c\sigma^{-1})(b_i) &= (\sigma \circ c\sigma^{-1} \circ \sigma)(a_i) \\ &= \sigma(c(a_i)) \\ &= \sigma(a_{i+1}) \\ &= b_{i+1}.\end{aligned}$$

Chaque b_i est donc envoyé sur b_{i+1} (et b_p est envoyé sur $b_{p+1} = b_1$). On a donc montré le résultat voulu.

Exercice 6. On sait que toute permutation peut s'écrire en produit de transpositions. Pour montrer le résultat voulu, il suffit donc de montrer que toute transposition peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$. On sépare alors différents cas :

- Toutes les transpositions qui contiennent 1 sont dans l'ensemble considéré.
- Considérons alors une transposition $(i\ j)$ avec $1 < i < j$. On remarque alors que :

$$(i\ j) = (i\ 1) \circ (1\ j) \circ (1\ i).$$

  On peut le visualiser facilement avec l'analogie du jeu de cartes. Pour échanger les carte en position i et j, il suffit d'échanger la car i avec la carte 1, puis la carte j avec la carte 1 (on a ainsi placé la carte i en position j) et enfin d'échanger la carte 1 avec la carte i (pour placer j en i et remettre la 1ere carte à sa place).

Exercice 7. On va montrer que ce système de transpostions engendrent l'ensemble des permutations. On va donc montrer que l'on peut générer n'importe quelle transposition. Soit donc $i < j$ dans $[\![1, n]\!]$. On a alors :

$$(i\ j) = (i\ i+1)(i+1\ i+2)\dots(j-2\ j-1)(j-1\ j)(j-2\ j-1)\dots(i\ i+1).$$

L'idée est de faire « remonter » i en position j et une fois que i est arrivé en position j, on fait redescendre j par le même chemin. Ainsi, toutes les nombres strictement compris entre i et j ne bougent pas, les nombres différents de i et j sont fixes et i et j sont échangés.

On peut donc engendrer toutes les transpositions qui engendrent à leur tour toutes les permutations.

Exercice 8. Posons $\sigma = (1, 2, \dots, n-1, n)$ et la transposition $\tau = (1, 2)$. Puisque σ est un n cycle, on a $\sigma^n = \mathrm{Id}$. On a donc $\sigma^{-1} = \sigma^{n-1}$ (on peut donc engendrer l'inverse de σ avec σ, ce qui est vrai pour toute permutation d'ailleurs puisqu'elles sont toutes d'ordre fini, c'est à dire qu'elles admettent toutes un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}$). On remarque alors que :

$$\sigma \circ \tau\sigma^{-1} = (2\ 3).$$

On a également $\sigma^2 \circ \tau \circ \sigma^{-2} = (3\ 4)$ et plus généralement pour $p \in [\![1, n-2]\!]$:

$$\sigma^p \circ \tau \circ \sigma^{-p} = (p+1\ p+2).$$

On peut donc engendrer toutes les transpositions de la forme $(i\ i+1)$, ce qui suffit d'après l'exercice 7 à engendrer toutes les permutations. On peut donc engendrer toutes les permutations avec σ et τ.

Exercice 9. Soit $n \geq 2$ et τ une transposition de S_n.

1) Notons $\varphi : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$. φ est bien définie de S_n dans S_n car une composée de bijections étant bijective, pour tout $\sigma \in S_n$, $\tau \circ \sigma \in S_n$. On remarque de plus que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{S_n}$ (puisque $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$). Ceci entraine que φ est une involution (c'est son propre inverse) donc elle est bijective de S_n vers S_n.

2) Si on note A_n l'ensemble des permutations de signature 1 et B_n l'ensemble des permutations de signature -1, on a $S_n = A_n \bigcup B_n$ (et A_n et B_n disjoints). De plus, on remarque que pour tout $\sigma \in A_n$, $\varphi(\sigma) \in B_n$ (puisque $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau) \times \varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$. Ceci entraine que le cardinal de A_n est inférieur ou égal au cardinal de B_n. Puisque φ envoie également tous les éléments de B_n dans A_n (même argument), le cardinal de B_n est inférieur ou égal au cardinal de A_n. On a donc $\mathrm{Card}(A_n) = \mathrm{Card}(B_n)$.

Puisque A_n et B_n sont de même cardinal et forment une partition de S_n, on en déduit que $\mathrm{Card}(A_n) = \dfrac{n!}{2}$.

Enfin, A_n contient l'identité, est stable par composition et par passage à l'inverse (puisque la signature d'une composée est le produit des signatures et que la signature de σ^{-1} est égale à la signature de σ). On en déduit que $(A_n, \circ)$ est un groupe (et donc un sous groupe de S_n).

Exercice 10. Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $\mathcal{S}_n$. Si $\tau_2 = \tau_1$, alors $\tau_1 \circ \tau_2 = \mathrm{Id}$.

Supposons donc $\tau_1 \neq \tau_2$. On a alors, si on note $\tau_1 = (i\ j)$ que $\tau_2 = (i\ k)$ avec $k \neq j$ ou $\tau = (k\ p)$ avec k et p distincts de i et j. Dans le second cas, on remarque que $(\tau_1 \circ \tau_2)^2 = \mathrm{Id}$ (car τ_1 et τ_2 commutent). Dans le premier cas, on a alors $\tau_1 \circ \tau_2 = (i\ k\ j)$. On a donc bien $(\tau_1 \tau_2)^3 = \mathrm{Id}$.

Exercice 11. Soit $n \geq 3$. L'identité commute avec toutes les permutations. Montrons qu'il s'agit de la seule permutation commutant avec toutes les permutations. Par l'absurde, soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ commutant avec toutes les permutations différente de l'identité. Il existe donc $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $i_0 \neq \sigma(i_0)$. Posons alors $j_0 = \sigma(i_0)$. Notons enfin $k_0 = \sigma(j_0)$.

Puisque $n \geq 3$, il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ différent de i_0 et de j_0. Puisque σ commute avec toutes les permutations, elle commute également avec toutes les transpositions. Considérons alors $\tau = (i_0\ j_0)$. On a alors $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Ceci implique que :

$$\begin{aligned} (i_0\ j_0) &= \tau \\ &= \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \\ &= (\sigma(i_0)\ \sigma(j_0)) \\ &= (j_0\ k_0). \end{aligned}$$

Ceci implique que $k_0 = i_0$. Puisque $n \geq 3$, il existe alors p_0 distinct de i_0 et j_0. On a alors :

$$\begin{aligned} (i_0\ p_0) &= \sigma \circ (i_0\ p_0) \circ \sigma^{-1} \\ &= (\sigma(i_0)\ \sigma(p_0)) \\ &= (j_0\ \sigma(p_0)). \end{aligned}$$

Or, p_0 est distinct de j_0 et de i_0. On a donc une absurdité. Il en découle que seule l'identité commute avec toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 12. Essayons de construire une permutation σ telle que $\mathrm{Card}\{i\ /\ \sigma(i) < i\} = 1$. Ceci signifie que σ n'admet qu'une unique inversion. Considérons alors l'ensemble des points qui ne sont pas fixes par σ et notons A cet ensemble. Puisque tous les autres points sont fixes et que σ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, on en déduit que $\sigma|_A$ est une permutation des points de A sans points fixes.

Puisque $\sigma|_A$ n'admet pas de points fixes et n'admet qu'une unique inversion, ceci signifie que si on note $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ avec $a_1 < \ldots < a_p$, alors on a forcément $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)$. En effet, si $\sigma(a_1) \neq a_2$, alors a_1 serait envoyé par σ sur un élément supérieur ou égal à a_3 (car a_1 n'est pas fixe). Il y a alors deux éléments parmi $\{a_2, \ldots, a_n\}$ qui s'envoient sur a_1 et sur a_2. Puisque $\sigma(a_2) \neq a_2$, on en déduit que l'on a au moins deux inversions ce qui est absurde). On a donc $\sigma(a_1) = a_2$ et de proche en proche, on montre que σ est un p-cycle.

Combien y a-t-il de permutations avec exactement une inversion ? On voit que cela consiste à choisir le nombre de points fixes ($\dbinom{n}{p}$ choix possibles) et qu'ensuite la permutation σ est entièrement déterminée (c'est le cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_{n-p})$. Puisque l'on veut au moins une inversion, on doit commencer cette somme à $p \geq 2$ (car on ne peut pas avoir un unique point fixe. Une permutation avec $n-1$ points fixes est obligatoire l'identité).

Le cardinal recherché est donc égal à $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} - 1 - n = 2^n - 1 - n$. On vérifie rapidement que cette formule marche pour $n = 2$ et $n = 3$.