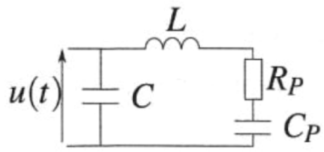
# TRAVAUX DIRIGÉS OS10
# Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

## Niveau 1

## *Exercice 1. Adaptation d'impédance

Un dipôle électrocinétique linéaire passif est caractérisé, en régime sinusoïdal permanent, par son impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$.

Un réacteur à plasma est modélisé par un circuit série $R_P$ / $C_P$. On veut diminuer au maximum la partie imaginaire (appelée *partie réactive*) de cette impédance $\underline{Z_P}$. Pour cela, on réalise le circuit de la figure ci-contre.




1. Exprimer l'admittance totale $\underline{Y}$ du dipôle.
2. Déterminer l'expression de $C$ qui annule la partie réactive de $\underline{Y}$.
3. La condition précédente étant réalisée, déterminer l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ totale du dipôle. Que constate-t-on ?

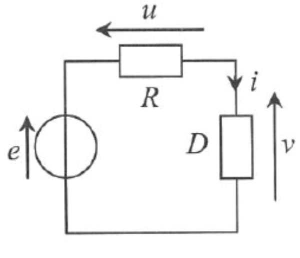
## *Exercice 2. Dipôles RL série ou parallèle

Soit le dipôle $AB$ constitué d'une résistance $R$ et d'une inductance $L$ associées en parallèle. Soit le dipôle $A'B'$ constitué d'une résistance $R'$ et d'une inductance $L'$ associées en série. Ces deux dipôles sont soumis à une tension sinusoïdale de pulsation $\omega$.

1. Déterminer $R'$ et $L'$ en fonction de $R$, $L$ et $\omega$ pour que, à la pulsation $\omega$, ces dipôles soient équivalents.
2. Quelle est alors la pulsation $\omega_0$ pour laquelle on a $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{L'}{L}$ ?
3. Calculer $\omega_0$ pour $R = 10^2\ \Omega$ et $L = 10^{-2}\ \text{H}$.

## *Exercice 3. Dipôle inconnu

Dans le montage ci-contre, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega$. $R$ est une résistance et $D$ est un dipôle inconnu. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ les tensions aux bornes respectivement de $R$ et $D$. On visualise à l'oscilloscope $v(t)$ et $u(t)$ et on obtient le graphe ci-après.

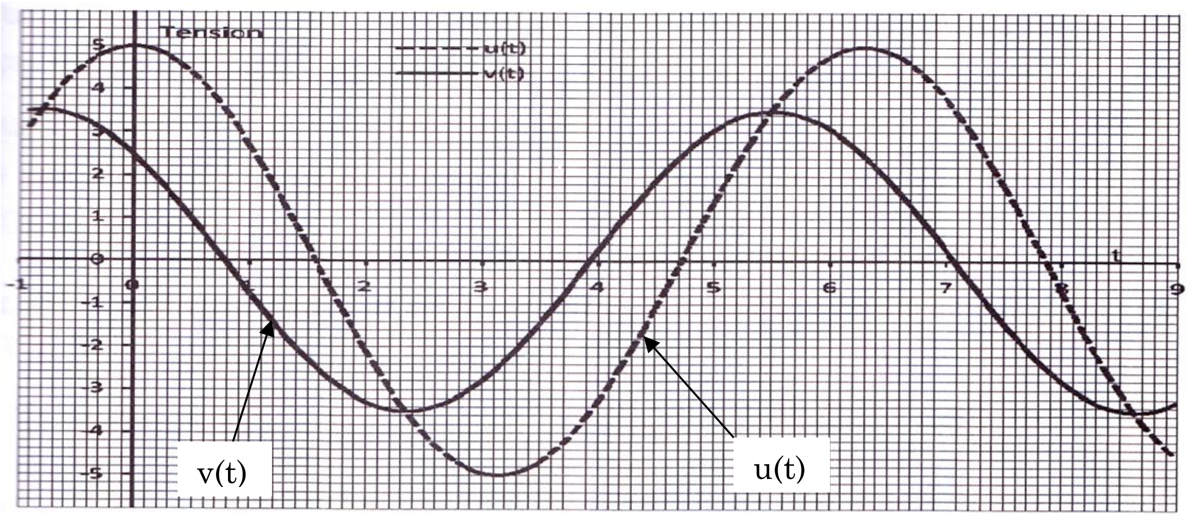


L'unité de l'axe des temps est $10^{-2}$ s et celle de l'axe des tensions est 1 V. On utilise ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de $D$, sachant que $R = 100\ \Omega$.

1. Déterminer $V_m$, $U_m$ ainsi que la pulsation $\omega$ des signaux.
2. La tension $v(t)$ est-elle en avance ou en retard sur la tension $u(t)$ ? En déduire le signe de $\varphi$. Déterminer la valeur de $\varphi$ à partir du graphe.

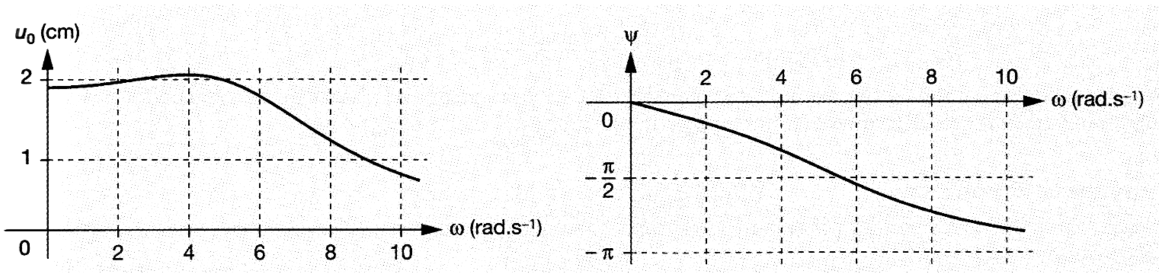
On note $\underline{Z} = R_D + jX_D$ l'impédance du dipôle $D$.

3. Déterminer à partir des résultats précédents les valeurs de $R_D$ et $X_D$.
4. Par quel dipôle (condensateur, bobine…) peut-on modéliser $D$ ? Donner ses caractéristiques.




## *Exercice 4. Détermination graphique des paramètres d'un oscillateur

On considère les graphes d'amplitude et de phase pour la résonance en tension d'un oscillateur électrique.



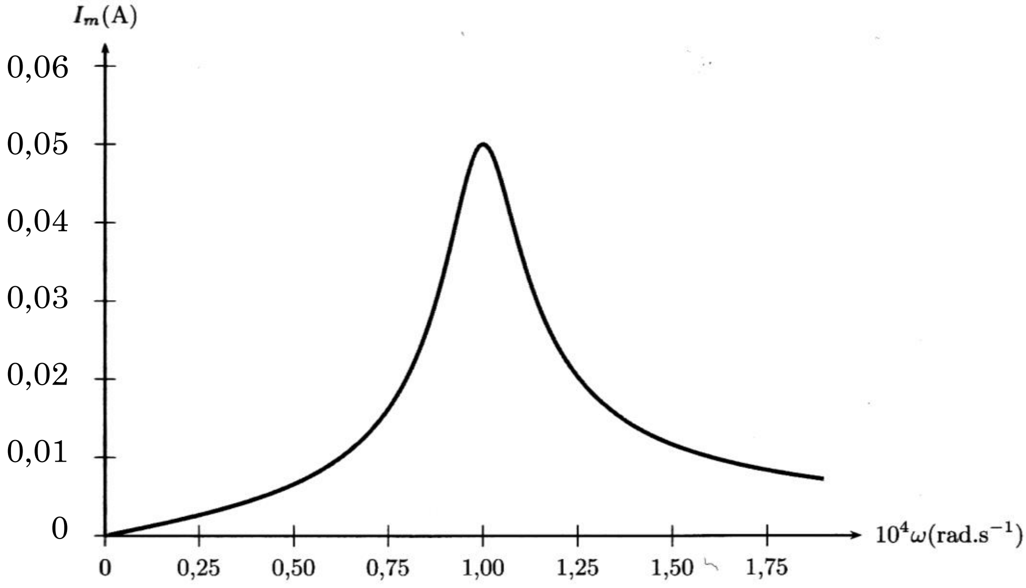

Évaluer sa pulsation propre $\omega_0$ et son facteur de qualité $Q$.

## Exercice 5. Exploitation d'une courbe de résonance

Un circuit RLC série est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ avec $E = 5\ \text{V}$.

1. Comment procéder à la mesure de l'intensité du courant dans le circuit ?

2. La figure ci-dessous est la courbe de résonance en intensité obtenue expérimentalement avec $I_m$ l'amplitude du courant en régime sinusoïdal forcé. En exploitant cette courbe, déterminer la valeur de la résistance $R$ du circuit.
3. Déterminer la pulsation de résonance et la bande passante. En déduire les valeurs de $L$, $C$ et du facteur de qualité $Q$ de ce circuit.

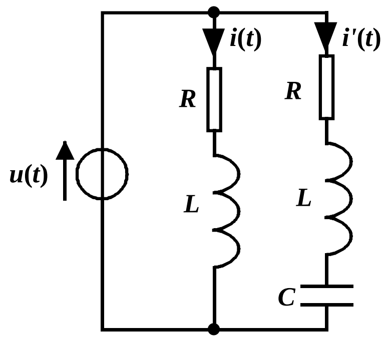



**Niveau 2**

## Exercice 6. Branches en parallèle

Soit un générateur idéal de tension de f.e.m. sinusoïdale : $u(t) = U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.

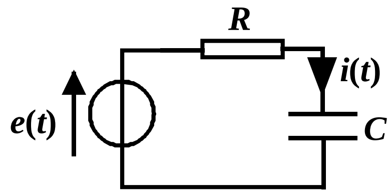
Il alimente un dipôle $RL$ et un dipôle $RLC$ branchés en parallèle.




1. Déterminer les intensités instantanées $i(t)$ et $i'(t)$ sous la forme :
   $$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } i'(t) = I'_m \cos(\omega t + \varphi')$$
2. À quelle condition doivent satisfaire $L$, $C$ et $\omega$ pour que les déphasages respectifs $\psi$ et $\psi'$ des courants $i(t)$ et $i'(t)$ avec la tension $u(t)$ soient opposés ?

# *Exercice 7. Circuits RC, RL et RLC série

On étudie le circuit $RC$ série ci-contre, soumis à un générateur idéal de tension, de f.e.m. : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. Le régime sinusoïdal forcé est supposé établi.

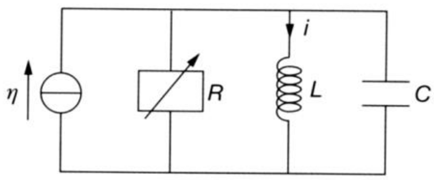



Données : $E_m = 10\ \text{V}$, $\omega = 63.10^2\ \text{rad.s}^{-1}$, $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$, $C = 0{,}16\ \mu\text{F}$, $L = 91\ \text{mH}$

1. Établir l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant circulant dans ce circuit en étudiant le circuit directement en notation complexe. Effectuer l'application numérique.
2. Même question pour un circuit $RL$ série.
3. Même question pour un circuit $RLC$ série. Comment aurait-il été possible d'obtenir les résultats des questions 1 et 2 à partir de celui obtenu pour le circuit $RLC$ série ?

# *Exercice 8. Résonance d'un circuit RLC parallèle

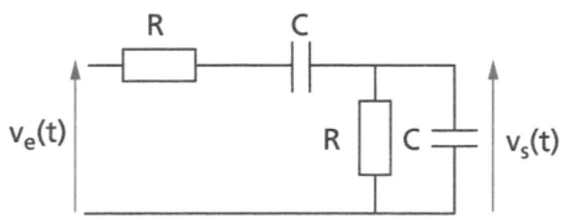
Un circuit $RLC$ parallèle est alimenté par une source de courant de c.e.m. $\eta(t) = \eta_m \cos(\omega t)$. La résistance $R$ est réglable. La bobine idéale, d'inductance $L$, est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$. On pose $A = \dfrac{I_m}{\eta_m}$.




1. Déterminer pour quelles valeurs de $R$ il y a résonance en intensité au niveau de la bobine.
2. Représenter le graphe de $A(\omega)$ en distinguant deux domaines pour les valeurs de $R$.

# *Exercice 9. Résonance d'un circuit de Wien

On considère le circuit de Wien ci-contre, où $v_e(t) = E\cos(\omega t)$ et $v_s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$. Les amplitudes complexes associées à $v_e(t)$ et $v_s(t)$ sont notées respectivement $\underline{E}$ et $\underline{S}$.




1. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ et des éléments du schéma.
2. Déterminer pour quelle pulsation $\omega_r$ l'amplitude $S$ est maximale.

# SOLUTIONS

## *Exercice 1. Adaptation d'impédance

1. Association de $R_P$, $L$ et $C_P$ en série : $\underline{Z}_1 = R_P + jL\omega + \dfrac{1}{jC_P\omega}$

   Association de $C$ et $\underline{Z}_1$ en parallèle : $\underline{Y} = jC\omega + \dfrac{1}{\underline{Z}_1} = jC\omega + \dfrac{1}{R_P + jL\omega + \dfrac{1}{jC_P\omega}}$

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R_P + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{Y} = jC\omega + \frac{R_P - j\left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)}{{R_P}^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}}$$

2. $\mathrm{Im}\left(\underline{Y}\right) = C\omega - \dfrac{\left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)}{{R_P}^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}$ et $\mathrm{Im}\left(\underline{Y}\right) = 0 \Leftrightarrow C\omega = \dfrac{\left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)}{{R_P}^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}$

$$\boxed{C = \frac{\left(L - \dfrac{1}{C_P\omega^2}\right)}{{R_P}^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}}$$

3. Admittance totale : $\underline{Y} = \dfrac{R_P}{{R_P}^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}$

   Impédance totale : $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} = \dfrac{{R_P}^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}{R_P} = R_P + \dfrac{1}{R_P}\left(L\omega - \dfrac{1}{C_P\omega}\right)^2}$

   L'impédance totale du dipôle est <u>réelle</u> : sa réactance est nulle.

## *Exercice 2. Dipôles RL série ou parallèle

1. Les impédances $\underline{Z}$ du dipôle $AB$ et $\underline{Z'}$ du dipôle $A'B'$ doivent être égales.

- <u>Dipôle $AB$</u> : $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega} = \dfrac{R + jL\omega}{jRL\omega} \Rightarrow \underline{Z} = \dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \dfrac{RL^2\omega^2 + jR^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$
- <u>Dipôle $A'B'$</u> : $\underline{Z'} = R' + jL'\omega$
- Équivalence : $\underline{Z'} = \underline{Z}$ . Égalité des parties réelles et des parties imaginaires :

$$\boxed{R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} \text{ et } L' = \frac{R^2 L}{R^2 + L^2\omega^2}}$$

2. $\frac{R'}{R} = \frac{L^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}$ et $\frac{L'}{L} = \frac{R^2}{R^2 + L^2\omega^2}$ $\quad \frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \Leftrightarrow L^2\omega_0^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$
3. A.N. : $\boxed{\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$

# *Exercice 3. Dipôle inconnu

1. On mesure $\boxed{V_m = 3{,}5 \text{ V}}$ et $\boxed{U_m = 5 \text{ V}}$. La période est $T = 6{,}3.10^{-2}$ s donc la pulsation vaut $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 100 \text{ rad.s}^{-1}}$.
2. La tension $v(t)$ est en avance sur $u(t)$ car elle passe par son maximum avant. Le déphasage de $v(t)$ par rapport à $u(t)$ est donc positif : $\varphi_{v/u} > 0$ et $\varphi_{v/u} = \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{U}) = \varphi - 0$. Donc $\boxed{\varphi > 0}$.

➢ Pour le passage par 0 sur front montant des deux tensions, on mesure $\Delta T = 0{,}75.10^{-2}$ s. On en déduit $\boxed{\varphi = 2\pi\frac{\Delta T}{T} = 0{,}75 \text{ rad} \simeq \frac{\pi}{4}}$

3. La loi d'Ohm complexe aux bornes de $D$ s'écrit : $\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}$ et celle aux bornes de $R$ est : $\underline{U} = R\underline{I}$. D'où $\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R\frac{\underline{V}}{\underline{U}}}$

➢ <u>Expression du module</u> :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R_D^2 + X_D^2} = R\frac{|\underline{V}|}{|\underline{U}|} = R\frac{V_m}{U_m} \text{ soit } R_D^2 + X_D^2 = R^2\frac{V_m^2}{U_m^2} = 4900$$

➢ <u>Expression de l'argument</u> :

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{X_D}{R_D}\right) = \arg(R) + \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{U}) = \varphi \text{, soit } \frac{X_D}{R_D} = \tan(\varphi) = 0{,}93$$

➢ <u>Résolution du système de deux équations à deux inconnues</u> :
$X_D = 0{,}93R_D$ et $R_D^2 + 0{,}93^2 R_D^2 = 4900$. On en déduit $\boxed{R_D = 51\ \Omega}$ et $\boxed{X = 48\ \Omega}$
Comme la réactance $X > 0$, le dipôle est inductif. Il s'agit d'une bobine composée d'une résistance $\boxed{r = 51\ \Omega}$ en série avec une inductance telle que $L\omega = 48\ \Omega$, soit $\boxed{L = 0{,}48 \text{ H}}$.

# *Exercice 4. Détermination graphique des paramètres d'un oscillateur

- Graphe de phase : on mesure la pulsation propre pour $\psi(\omega_0) = -\dfrac{\pi}{2}$ soit $\boxed{\omega_0 \simeq 5{,}5 \text{ rad.s}^{-1}}$
- Graphe d'amplitude : on mesure la pulsation de résonance lorsque $u_0$ est maximal : $\boxed{\omega_r \simeq 4{,}0 \text{ rad.s}^{-1}}$
- Facteur de qualité : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}} \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2Q^2} = \dfrac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2Q^2} = 1-\dfrac{\omega_r^2}{\omega_0^2}$ soit

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2\left(1-\dfrac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)}} = 1{,}0 > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$ : il y a effectivement résonance.

# Exercice 5. Exploitation d'une courbe de résonance

2. $R = 0{,}1 \text{ k}\Omega$ , 3. $C = 0{,}2\ \mu\text{F}$, $L = 0{,}05 \text{ H}$

# Exercice 6. Branches en parallèle

1. $i(t) = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)\right)$,

$i'(t) = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{R}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)\right)\right)$ 2. $2LC\omega^2 = 1$

# *Exercice 7. Circuits RC, RL et RLC série

1. On note l'intensité du courant dans le circuit $\boxed{i(t) = I_m\cos(\omega t+\varphi)}$.

- À $e(t)$, on associe le nombre complexe $\underline{e}(t) = \underline{E}e^{j\omega t}$ avec $\underline{E} = E_m$ ; à $i(t)$, on associe le nombre complexe $\underline{i}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$ avec $\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$.
- Expression de l'amplitude complexe : loi des mailles et lois d'Ohm :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R+\underline{Z}_C} = \frac{E_m}{R+\dfrac{1}{jC\omega}}$$

- Expression du module de l'amplitude complexe = amplitude de $i(t)$ :

$$\boxed{I_m = \left|\underline{I}\right| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 7{,}1 \text{ mA}}$$

➢ Expression de l'argument de l'amplitude complexe = phase de $i(t)$ :

$$\varphi = \arg\left(\underline{I}\right) = \arg\left(E_m\right) - \arg\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) = -\arg\left(R - j\frac{1}{C\omega}\right) = -\arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)$$

$$\boxed{\varphi = +\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = 0{,}78 \text{ rad} \simeq \frac{\pi}{4}}$$

2. Expression de l'amplitude complexe : loi des mailles et lois d'Ohm :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z_L}} = \frac{E_m}{R + jL\omega}$$

➢ Expression du module de l'amplitude complexe = amplitude de $i(t)$ :

$$\boxed{I_m = \left|\underline{I}\right| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega\right)^2}} = 8{,}7 \text{ mA}}$$

➢ Expression de l'argument de l'amplitude complexe = phase de $i(t)$ :

$$\varphi = \arg\left(\underline{I}\right) = \arg\left(E_m\right) - \arg\left(R + jL\omega\right) \text{ donc } \boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -0{,}52 \text{ rad} \simeq -\frac{\pi}{6}}$$

3. Expression de l'amplitude complexe : loi des mailles et lois d'Ohm :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

➢ Expression du module de l'amplitude complexe = amplitude de $i(t)$ :

$$\boxed{I_m = \left|\underline{I}\right| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 9{,}2 \text{ mA}}$$

➢ Expression de l'argument de l'amplitude complexe = phase de $i(t)$ :

$$\varphi = \arg\left(\underline{I}\right) = \arg\left(E_m\right) - \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) \text{ donc}$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) = 0{,}40 \text{ rad}}$$

➢ Obtention du résultat de la question 1 avec $\underline{Z_L} = 0$, soit $L = 0$, dans les expressions précédentes.

Obtention du résultat de la question 2 avec $\underline{Z_C} = 0$, soit $\frac{1}{C} = 0$, dans les expressions précédentes.

# *Exercice 8. Résonance d'un circuit RLC parallèle

1. Diviseur de courant : $\underline{I} = \dfrac{\underline{Y_L}}{\underline{Y_{éq}}}\underline{\eta}$ avec $\underline{Y_L} = \dfrac{1}{jL\omega}$ et $\underline{Y_{éq}} = \dfrac{1}{R} + j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\dfrac{L\omega}{R}}\underline{\eta}}$$

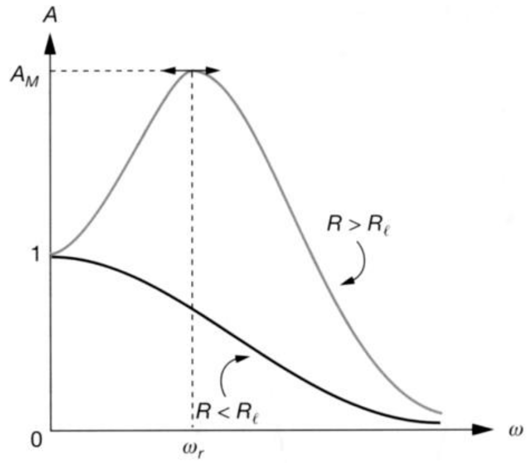
➢ L'amplitude s'écrit : $I_m(\omega) = |\underline{I}| = \dfrac{\eta_m}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{L\omega}{R}\right)^2}}$

$$A(\omega) = \frac{I_m}{\eta_m} = \frac{1}{\sqrt{g(\omega)}} \text{ avec } g(\omega) = \left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2$$

➢ Il y a **résonance en intensité**, i.e. $I_m(\omega)$ maximal, si $A(\omega)$ maximal, c'est-à-dire si $g(\omega)$ minimal : $\left(\dfrac{dg}{d\omega}\right)_{\omega_r} = 0 \Leftrightarrow -4LC\omega_r\left(1 - LC\omega_r^2\right) + 2\left(\dfrac{L}{R}\right)^2\omega_r = 0$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{L}{2CR^2}\right) > 0$$

$$\omega_r^2 > 0 \Rightarrow \boxed{R > R_l = \sqrt{\frac{L}{2C}}}$$




2. Si $R \leq R_l$, il n'y a **pas de résonance** et la courbe $A(\omega)$ est décroissante.

➢ Si $R > R_l$, il y a une **résonance à la pulsation $\omega_r$** et la courbe $A(\omega)$ présente un maximum.

# *Exercice 9. Résonance d'un circuit de Wien

1. À $v_e(t) = E\cos(\omega t)$, on associe l'amplitude complexe $\underline{E} = E$ et à $v_s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$, on associe l'amplitude complexe $\underline{S} = Se^{j\varphi}$.

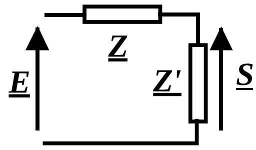
➢ Association en série de $R$ et $C$ : l'impédance complexe équivalente est :

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

➢ Association en parallèle de $R$ et $C$ : l'admittance complexe équivalente est :

$$\underline{Y'} = \underline{Y_R} + \underline{Y_C} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}$$

L'impédance complexe équivalente est : $\underline{Z}' = \dfrac{1}{\underline{Y}'} = \dfrac{R}{1+jRC\omega}$




- Le schéma du circuit de Wien se ramène au schéma équivalent ci-contre.
- Diviseur de tension : $\underline{S} = \dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}+\underline{Z}'}\underline{E} = \dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}+\underline{Z}'}\cdot\dfrac{\underline{Y}'}{\underline{Y}'}\underline{E} = \dfrac{1}{1+\underline{Z}\underline{Y}'}\underline{E}$

$$\underline{S} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+jRC\omega}{jC\omega}\right)\left(\dfrac{1+jRC\omega}{R}\right)}\underline{E} = \frac{1}{1+\dfrac{1+2jRC\omega+(jRC\omega)^2}{jRC\omega}}\underline{E} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{jRC\omega}+2+jRC\omega}\underline{E}$$

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{3+j\left(RC\omega-\dfrac{1}{RC\omega}\right)}\underline{E}}$$

2. L'amplitude $S$ correspond au module de $\underline{S}$ : $S = |\underline{S}| = \dfrac{E}{\sqrt{9+\left(RC\omega-\dfrac{1}{RC\omega}\right)^2}}$. Elle est maximale lorsque le dénominateur est minimal i.e. pour la pulsation de résonance $\omega_r$ telle que : $RC\omega_r - \dfrac{1}{RC\omega_r} = 0$, soit $\boxed{\omega_r = \dfrac{1}{RC}}$.