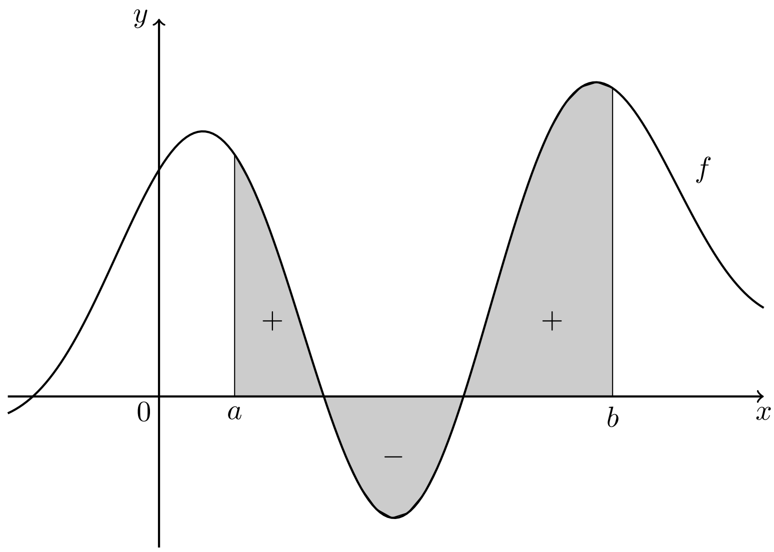
7. Calcul d'intégrales et de primitives, méthodologie

I. Propriétés de l'intégrale

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est également continue sur I *(se lit ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).*

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors l'intégrale de f entre a et b existe et est notée $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$. L'intégrale de f entre a et b représente l'aire sous la courbe représentative de f (comptée négativement si f est négative).



Définition. Avec les mêmes notations, on pose $\int_a^a f = 0$ et si $a > b$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

m Quand on vous demande de justifier l'existence d'une intégrale, il faut justifier que la fonction que vous intégrez est bien définie et continue sur le segment $[a,b]$ (en général car c'est une somme/produit/composée de fonctions continues).

Exercice d'application 1. Les intégrales suivantes existent-elles ? *On ne demande pas de les calculer.*

1) $\displaystyle\int_1^\pi \frac{\tan(x)}{x}dx.$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} \arctan(2x)\ln(4+x)dx.$

3) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)e^{-x^2}dx.$

Proposition. Relation de Chasles. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Soient $a,b,c \in I$. Alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition. Linéarité de l'intégrale. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Proposition. Croissance de l'intégrale. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$. Alors, pour $a,b \in I$ tels que $a \leq b$:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

En particulier, si g est positive sur I et $a \leq b$, on a $0 \leq \displaystyle\int_a^b g$.

m Attention au sens des bornes quand vous utilisez ce résultat ! Si les bornes ne sont pas dans le bon sens, cela inverse l'inégalité.

Exercice d'application 2.

1) Soient f croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et $a \leq b$. Déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ faisant intervenir $f(a)$ et $f(b)$.

2) En déduire sans calculer l'intégrale que $1 - e^2 \leq \displaystyle\int_e^{1/e} x\ln(x)dx \leq 1 - \frac{1}{e^2}$.

Proposition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Soient $a,b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors :

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

m Ce résultat est utile pour encadrer des intégrales sans les calculer si on peut majorer $|f|$ par une fonction simple que l'on sait intégrer.

Exercice d'application 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n \sin(t)}{1+t^3}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

1) Démontrer que $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{1}{1+t^3} \leq 1$.

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |I_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

3) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

II. Intégrales et primitives

II.1. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \in I$. Alors l'unique primitive de f qui s'annule en x_0 est $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array} \right.$.

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur I. Alors pour tout $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

(m) Ce résultat nous permet de calculer des intégrales. En effet, si on reconnait des fonctions que l'on sait primitiver, alors on peut calculer leur intégrale.

Exercice d'application 4. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^3 2t^4 dt$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2\cos(t) - t^2 + 3e^t dt)$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{1+t^2} dt$

II.2. Fonctions définies avec une intégrale

Proposition. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $u, v : I \to J$ dérivables. Soit $f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$. Alors, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

(m) On peut retrouver ce résultat en se souvenant que $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et en écrivant $\forall x \in I,\ \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) - F(u(x))$ avec la relation de Chasles. Puisque $F' = f$, on retrouve la formule ci-dessus avec la formule pour la dérivée d'une composée de fonctions dérivables.

Exercice d'application 5. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver les fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \displaystyle\int_2^x t\ln(t)dt.$

2) $f_2 : x \mapsto \displaystyle\int_x^0 \arcsin(t)dt.$

3) $f_3 : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos(t)dt.$

II.3. Primitives usuelles

I est un intervalle sur lequel la primitive est valable et f est continue sur I.

f	I	$x \mapsto \int^x f$
Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(\|x\|)$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	I où u est $\mathcal{C}^1$ sur I et ne s'annule pas	$x \mapsto \ln(\|u(x)\|)$
Pour $n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1$, $x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^\alpha$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}_-^*,\ \alpha \neq -1$, $x \mapsto x^\alpha$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
exp	$\mathbb{R}$	exp
cos	$\mathbb{R}$	sin
sin	$\mathbb{R}$	$-\cos$
ch	$\mathbb{R}$	sh
sh	$\mathbb{R}$	ch
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	arctan
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	arcsin

(m) Quand vous avez une intégrale à calculer qui a l'air compliquée, testez la forme $\displaystyle\int_a^b \frac{u'}{u}$.

Exercice d'application 6. Déterminer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{t}dt$.

2) Pour $x \in I$ avec I un intervalle à préciser, $\displaystyle\int_0^x \tan(t)dt$.

3) Pour $x \in I$ avec I un intervalle à préciser, $\displaystyle\int_{1/2}^x \frac{1}{t\ln(t)}dt$.

III. Techniques de calcul d'intégrales

III.1. Avec une primitive

III.2. Intégration par parties

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Soient $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

(m) Quand on rédige une intégration par parties, on écrit $\begin{cases} u(t) = \dots & v(t) = \dots \\ u'(t) = \dots & v'(t) = \dots \end{cases}$ en précisant que u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ (en général ce sont des composées de fonctions usuelles). On a ainsi en haut à gauche et en bas à droite les fonctions qui apparaissent dans l'intégrale de départ (ce sont celles que l'on écrit en premier), le produit des deux fonctions du haut nous donne le crochet et le produit des fonctions en haut à droite et en bas à gauche (l'autre « diagonale ») nous donne le terme dans l'intégrale qu'il reste à calculer.

(m) Pour voir quelle fonction primitiver et quelle fonction dériver (entre u et v), on essaye de voir laquelle des deux fonctions se dérive le plus facilement (autrement dit nous donnera une intégrale plus simple que l'intégrale d'origine). Par exemple, si on a une intégrale de la forme $\int_a^b t^n f(t)dt$ avec $n \in \mathbb{N}$, c'est parfois une bonne idée de dériver $t \mapsto t^n$ puisqu'en utilisant n fois une intégration par partie, on aura une dérivée constante, ce qui permettra de calculer l'intégrale. Il faut par contre que l'autre fonction se primitive simplement.

Exercice d'application 7. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^\pi t\cos(t)dt.$

2) $I_2 = \displaystyle\int_1^2 t^2\ln(t)dt.$

(m) On peut toujours réaliser une intégration par parties car $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b 1 \times f(t)dt$ et on peut donc poser $\begin{cases} u(t) = f(t) & v(t) = t \\ u'(t) = f'(t) & v'(t) = 1 \end{cases}$. Cela permet de calculer des intégrales dans le cas où la dérivée de f est simple.

Exercice d'application 8. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_1(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)dt.$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)dt.$

(m) On peut parfois exprimer l'intégrale que l'on est en train de calculer en fonction d'elle-même en réalisant des intégrations par parties successives, ce qui permet de calculer l'intégrale d'origine.

Exercice d'application 9. Déterminer $I = \displaystyle\int_0^\pi e^{3t}\sin(2t)dt$ en effectuant deux IPPs.

III.3. Changement de variable

Théorème. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$. Alors pour $\alpha,\beta \in J$, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Le changement de variable qui a été réalisé ici est « $x = \varphi(t)$ ».

(m) Pour rédiger un changement de variable :
- On commence par poser $x = \varphi(t)$ en précisant que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$.
- On calcule les nouvelles bornes : $\begin{array}{c|c} t & x \\ \hline \alpha & \varphi(\alpha) \\ \beta & \varphi(\beta) \end{array}$
- On calcule $\varphi'(t)$ en écrivant : $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$.
- On cite le théorème et on l'utilise en remplaçant les bornes, les $\varphi(t)$ par des x et le $\varphi'(t)dt$ par dx.

Exercice d'application 10. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé.

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$ en posant $x = \cos(t)$.

2) $I_2 = \displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ en posant $x = \ln(t)$.

(m) Il n'est pas toujours facile de voir quel changement de variable poser. Quelques pistes :
- Essayer de reconnaitre un terme en $(\varphi'(t)dt)$ dans l'intégrale peut permettre de trouver φ.
- Quand une fonction apparait plusieurs fois dans l'intégrale, on peut parfois poser φ égale à cette fonction.
- En général, le changement de variable transforme les bornes en bornes plus simples. Par exemple, si on a du « e » dans les bornes, peut être qu'un changement de variable avec du logarithme simplifiera les choses.
- Enfin si un terme nous gène pour intégrer (par exemple un terme avec du $\sqrt{x}$), on peut toujours essayer de poser comme φ l'expression qui nous gène (dans l'exemple $\varphi(t) = \sqrt{x}$) et voir si l'expression obtenue est plus simple...

Exercice d'application 11. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sin(e^t)e^{2t}dt$ à l'aide d'un changement de variable.

(m) On peut aussi réaliser le changement de variable en partant de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et en posant $x = \varphi(t)$. Il faut alors déterminer α et β tels que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$ et vérifier que φ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$.

Exercice d'application 12. Calculer les intégrales suivantes avec un changement de variable.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ en posant $x = \sin(t)$.

2) $\displaystyle\int_0^{4} e^{\sqrt{x}}dx$.

III.4. Problèmes au bord

(m) On peut utiliser la continuité de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour utiliser les techniques de calcul sur un segment où les hypothèses des théorèmes sont vérifiées et passer à la limite pour se ramener au calcul initial. Ainsi, si par exemple f a un « problème » en 0 et que l'on désire calculer $\int_0^1 f(t)dt$, on pourra calculer pour $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^1 f(t)dt$ et utiliser le fait que par continuité des intégrales fonction de leur borne supérieure, $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(t)dt$.

Exercice d'application 13. Pour $t \in]0,1]$, on pose $f(t) = \sqrt{t}\ln(t)$.

1) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et justifier l'existence de $\int_0^1 f(t)dt$.

2) Déterminer la valeur de cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

IV. Calcul de primitives

(m) Toutes les techniques précédentes s'appliquent pour calculer $F(x) = \int^x f(t)dt$. Il est important de préciser sur quel **intervalle** on se place avant de calculer. Il peut être bon de préciser que toutes les égalités s'effectuent à une constante additive près (puisque sur un **intervalle**, toutes les primitives sont égales à une constante près). Ceci permet d'avoir des calculs moins lourds (pas de terme constant).

Exercice d'application 14.

1) Déterminer une primitive de $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide d'une intégration par parties.

2) Déterminer une primitive de $f_2 : t \mapsto \dfrac{\ln(\ln(t))}{t}$ sur $]1,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $y = \ln(t)$ puis d'une intégration par parties.

V. Primitives de fractions rationnelles

V.1. Primitives de polynômes

Exercice d'application 15. Déterminer $\int^x (2t^3 - 4t^2 + 3t + 1)dt$ sur $\mathbb{R}$.

V.2. Primitives de $\dfrac{P}{Q}$ *avec* $\deg(Q) = 1$

(m) On sait calculer $\int^x \dfrac{1}{t+a}dt$ car on a une expression de la forme $\int^x \dfrac{u'(t)}{u(t)}dt$. Ici par exemple :

$$\int^x \frac{1}{t+a}dt = \ln(|x+a|).$$

(m) Pour calculer $\int^x \dfrac{t+b}{t+a}dt$, on essaye de faire disparaitre les « t » du numérateur en se ramenant au cas précédent en écrivant $\dfrac{t+b}{t+a} = \dfrac{t+a-a+b}{t+a} = 1 + \dfrac{-a+b}{t+a}$.

(m) De manière générale, pour calculer $\int^x \frac{P(t)}{t+a}dt$, on trouve un polynôme Q et une constante α tels que $P(t)=(t+a)\times Q(t)+\alpha$ et on peut alors calculer l'intégrale en se ramenant aux cas précédents.

Exercice d'application 16. Calculer les intégrales/primitives suivantes :

1) $I_1=\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{t+3}dt.$

2) $I_2=\displaystyle\int_0^1 \frac{t-3}{2t+1}dt.$

3) $I_3=\displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{t-2}dt.$ *On précisera les intervalles d'étude.*

V.3. Primitives de $\frac{P}{Q}$ *avec* $\deg(Q)=2$

(m) Pour calculer $\int^x \frac{1}{t^2+bt+c}dt$, on trouve les racines de t^2+bt+c. On a alors trois cas :

- Si $\Delta>0$, on a deux racines réelles distinctes, alors on décompose en éléments simples la fraction rationnelle et ensuite on primitive. *Voir le cours de SI pour la méthode, nous reverrons cela plus tard dans l'année.*
- Si $\Delta=0$, on a une racine double et on a une primitive usuelle $\int^x \frac{1}{(t-x_0)^2}dt=-\frac{1}{x-x_0}$.
- Si $\Delta<0$, alors il faut faire apparaitre la dérivée de arctan en écrivant t^2+bt+c sous la forme $\left(t+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$ (on regroupe le terme en t^2 et le terme en bt en visualisant ce dernier comme un double produit quand on développe le carré). On factorise alors le dénominateur par $c-\frac{b^2}{4}$ pour arriver à une expression de la forme :

$$C\int^x \frac{1}{(\alpha t+\beta)^2+1}dt=\frac{C}{\alpha}\arctan(\alpha x+\beta).$$

Exercice d'application 17. Déterminer les primitives suivantes (on précisera les intervalles d'étude) :

1) $\displaystyle\int^x \frac{2}{t^2+4t-5}dt.$

2) $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+4t+4}dt.$

3) $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+2t+3}dt.$

(m) Pour calculer $\int^x \frac{t+\alpha}{t^2+bt+c}dt$, on commence par se débarasser des t en faisant apparaitre la dérivée du dénominateur au numérateur. On a $\int^x \frac{t+\alpha}{t^2+bt+c}dt=\frac{1}{2}\int^x \frac{(2t+b)}{t^2+bt+c}dt+\int^x \frac{\alpha-b}{t^2+bt+c}$.
La première intégrale est de la forme $\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}dt$ et se calcule donc :

$$\int^x \frac{(2t+b)}{t^2+bt+c}d=\ln(|x^2+bx+c|).$$

Pour la seconde intégrale, on est ramené au cas précédent.

Exercice d'application 18. Déterminer les primitives suivantes (on précisera les intervalles d'étude) :

1) $\displaystyle\int^x \frac{2t+5}{t^2-2t+2}dt.$

2) $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2-t+5}dt.$

(m) De manière générale, pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{P(t)}{t^2+bt+c}dt$, on trouve un polynôme Q et des constantes α, β tels que $P(t) = (t^2+bt+c) \times Q(t) + \alpha t + \beta$ et on peut alors calculer l'intégrale en se ramenant aux cas précédents. *Nous verrons plus tard dans l'année pourquoi une telle décomposition est toujours possible et comment la trouver relativement rapidement.*

VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) La fonction tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \in [1, \pi]$ donc l'intégrale n'existe pas.

2) arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(4+x)$ est définie et continue sur $]-4, +\infty[$. Puisque $[-\pi, 2\pi] \subset]-4, +\infty[$, on a $f : x \mapsto \arctan(2x)\ln(4+x)$ qui est bien définie et continue comme produit de fonctions continues sur $[-\pi, 2\pi]$. L'intégrale existe donc.

3) La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et $\forall x \in [-2, 3]$, $\frac{x}{3} \in \left[-\frac{2}{3}, 1\right]$. Par produit de fonctions continues, la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) e^{-x^2}$ est bien définie et continue sur $[-2, 3]$. L'intégrale existe donc.

Exercice d'application 2.

1) L'intégrale existe puisque f est continue. Puisque f est croissante, on a pour tout $t \in [a, b]$, $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$. On a donc par croissance de l'intégrale (puisque $a \leq b$) :

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(a)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b f(b)dt \\ \Leftrightarrow \quad & (b-a)f(a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(b). \end{aligned}$$

2) Commençons par remettre les bornes dans le bon sens : $\int_e^{1/e} x\ln(x)dx = -\int_{\frac{1}{e}}^e x\ln(x)dx$. Posons $f : x \mapsto x\ln(x)$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \ln(x) + 1.$$

On a pour tout $x \geq \frac{1}{e}$, $\ln(x) \geq -1$ (par croissance du logarithme) et donc $f'(x) \geq 0$. f est donc croissante sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ et on peut utiliser la première question pour affirmer que :

$$\begin{aligned} & \left(e - \frac{1}{e}\right) f\left(\frac{1}{e}\right) \leq \int_{\frac{1}{e}}^e x\ln(x)dx \leq \left(e - \frac{1}{e}\right) f(e) \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{\left(e - \frac{1}{e}\right)}{e} \leq \int_{\frac{1}{e}}^e x\ln(x)dx \leq \left(e - \frac{1}{e}\right) \times e \\ \Leftrightarrow \quad & -\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \leq \int_{\frac{1}{e}}^e x\ln(x)dx \leq e^2 - 1. \end{aligned}$$

En multipliant par -1, on en déduit que :

$$1 - e^2 \leq \int_e^{1/e} x\ln(x)dx \leq 1 - \frac{1}{e^2}.$$

Exercice d'application 3.

1) Pour $t \in [0, 1]$, on a $1 \leq 1 + t^3$. Par passage à l'inverse (qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), on en déduit que $\frac{1}{1+t^3} \leq 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord que I_n existe bien car la fonction f_n est bien définie et continue sur $[0, 1]$. De plus, puisque les bornes sont dans le bon sens $(0 \leq 1)$, on a :

$$
\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_0^1 f_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |f_n(t)|dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{|t^n| \times |\sin(t)|}{|1+t^3|}dt.
\end{aligned}
$$

Pour $t \in [0,1]$, t est positif donc on a $|t^n| = t^n$. De plus, on a $|\sin(t)| \leq 1$ et le dénominateur est majoré par 1 d'après la première question. On a donc :

$$
\begin{aligned}
|I_n| &\leq \int_0^1 t^n \times 1dt \\
&\leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&\leq \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

3) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice d'application 4.

1) On a $\displaystyle\int_0^3 2t^4dt = \left[\frac{2t^5}{5}\right]_0^3 = \frac{2\times 3^5}{5} - \frac{2\times 0^5}{5} = \frac{486}{5}$.

2) On peut utiliser la linéarité de l'intégrale. On a :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi (2\cos(t) - t^2 + 3e^t dt) &= 2\int_0^\pi \cos(t)dt - \int_0^\pi t^2dt + 3\int_0^\pi e^t dt \\
&= 2\big[\sin(t)\big]_0^\pi - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi + 3\big[e^t\big]_0^\pi \\
&= 2(0-0) - \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 3(e^\pi - e^0) \\
&= -\frac{\pi^3}{3} + 3(e^\pi - 1).
\end{aligned}
$$

On aurait aussi pu directement écrire : $\displaystyle\int_0^\pi (2\cos(t) - t^2 + 3e^t dt) = \left[2\sin(t) - \frac{t^3}{3} + 3e^t\right]_0^\pi$.

3) On reconnait la dérivée de l'arctangente. On a donc :

$$
\int_0^1 \frac{3}{1+t^2}dt = 3\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = 3\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{3\pi}{4}.
$$

Exercice d'application 5.

1) Puisque $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors pour $x > 0$:

$$
f_1'(x) = x\ln(x).
$$

2) Puisque arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$, f_2 est définie et dérivable sur $[-1,1]$. On a pour $x \in [-1,1]$, $f_2(x) = -\displaystyle\int_0^x \arcsin(t)dt$ et donc :

$$f_2'(x) = -\arcsin(x).$$

3) cos est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que f_3 n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables. *Elle est par contre définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ étant bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.*

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_3'(x) = 2x\cos(x^2) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$.

Exercice d'application 6.

1) Pour $t \in [0,1]$, $t\sqrt{t} = t^{3/2}$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe. On a alors :

$$\int_0^1 t\sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

2) On se place sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle qui contient 0 sur lequel la fonction tangente est bien définie et continue. On remarque que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = -\dfrac{\cos'}{\cos}$. On en déduit que pour $x \in I$:

$$\int_0^x \tan(t)dt = \big[-\ln(|\cos(t)|)\big]_0^x = -\ln(\cos(x)).$$

On a enlevé les valeurs absolues dans la dernière égalité puisque pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$.

3) On se place sur $I =]0,1[$ pour avoir $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ bien définie et continue et $\dfrac{1}{2} \in I$. On reconnait encore la forme $\dfrac{u'}{u}$ et on a pour $x \in I$:

$$\int_{1/2}^x \frac{1}{t\ln(t)}dt = \int_{1/2}^x \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}dt = \big[\ln(|\ln(t)|)\big]_{1/2}^x.$$

Puisque pour $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ et que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, on en déduit que pour $x \in]0,1[$:

$$\int_{1/2}^x \frac{1}{t\ln(t)}dt = \ln(-\ln(x)) - \ln(\ln(2)).$$

Exercice d'application 7.

1) On réalise l'intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t & v(t) = \sin(t) \\ u'(t) = 1 & v'(t) = \cos(t) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t\cos(t)dt &= \big[t\sin(t)\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t)dt \\ &= 0 - \big[-\cos(t)\big]_0^\pi \\ &= -(1+1) \\ &= -2. \end{aligned}$$

2) On réalise l'intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = \ln(t) & v(t) = \dfrac{t^3}{3} \\ u'(t) = \dfrac{1}{t} & v'(t) = t^2 \end{cases}$. En effet, dériver la fonction

ln nous fera apparaitre du $\frac{1}{t}$ qui se simplifiera avec les puissances de t. Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 t^2\ln(t)dt &= \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{3}dt\\ &= \frac{8\ln(2)}{3} - 0 - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^2\\ &= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

Exercice d'application 8.

1) On réalise l'intégration par parties avec $\begin{cases} u(t)=\ln(t) & v(t)=t\\ u'(t)=\frac{1}{t} & v'(t)=1\end{cases}$. u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)dt &= \big[t\ln(t)\big]_1^x - \int_1^x 1dt\\ &= x\ln(x) - \big[t\big]_1^x\\ &= x\ln(x) - x + 1.\end{aligned}$$

2) On réalise l'intégration par parties avec $\begin{cases} u(t)=\arctan(t) & v(t)=t\\ u'(t)=\frac{1}{1+t^2} & v'(t)=1\end{cases}$. u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\int_0^x \arctan(t)dt = \big[t\arctan(t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt.$$

On reconnait alors dans l'intégrale une expression de la forme $\frac{u'}{u}$. On en déduit que pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \arctan(t)dt &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\big[\ln(|1+t^2|)\big]_0^x\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

Exercice d'application 9. On va réaliser deux intégrations par parties en intégrant deux fois le terme en exponentiel et en dérivant le terme en sinus (qui sera transformé en cosinus après une première dérivation). Toutes les fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2\pi]$ donc on peut réaliser les intégrations par parties. On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} e^{3t}\sin(2t)dt \\
&= \left[\frac{e^{3t}}{3}\sin(2t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{3t}}{3}\times 2\cos(2t)dt \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi} e^{3t}\cos(2t)dt \\
&= -\frac{2}{3}\left(\left[\frac{e^{3t}}{3}\cos(2t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{3t}}{3}\times(-2\sin(2t))\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left(\frac{e^{3\pi}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}I\right) \\
&= \frac{2-2e^{3\pi}}{9} - \frac{4}{9}I.
\end{aligned}$$

En passant tous les I à gauche, on obtient $\frac{13}{9}I = \frac{2-2e^{3\pi}}{9}$, soit $I = \frac{2-2e^{3\pi}}{13}$.

Exercice d'application 10.

1) cos est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour les nouvelles bornes, on a :

t	x
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0

Enfin, $x = \cos(t) \Rightarrow dx = -\sin(t)dt$. Par théorème de changement de variable, on en déduit que :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt = \int_1^0 \frac{-dx}{1+x^2}.$$

On a alors $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2) La fonction ln est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$. Pour les nouvelles bornes, on a :

t	x
1	0
e	1

Enfin, $x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$. Par théorème de changement de variable, et en utilisant le fait que $x = \ln(t) \Leftrightarrow t = e^x$, on en déduit que :

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{x}{e^x}dx = \int_0^1 xe^{-x}dx.$$

On peut alors calculer cette nouvelle intégrale par intégration par parties en posant $\begin{cases} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ et u et v sont bien des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}dx &= \big[-xe^{-x}\big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx \\ &= -\frac{1}{e} - \big[e^{-x}\big]_0^1 \\ &= -\frac{2}{e} + 1.\end{aligned}$$

Exercice d'application 11. On va poser le changement de variable $x = e^t$. L'exponentielle est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(2)]$. Pour les bornes, on a :

t	x
0	1
$\ln(2)$	2

Enfin, on a $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$. On a alors par théorème de changement de variable :

$$I = \int_0^{\ln(2)} \sin(e^t)e^t \times (e^t dt) = \int_1^2 \sin(x)x dx.$$

On termine alors le calcul à l'aide d'une intégration par parties (on dérive le $x \mapsto x$, on primitive le sinus, tout est bien $\mathcal{C}^1$). On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sin(x)xdx &= \big[-x\cos(x)\big]_1^2 - \int_1^2 (-\cos(x))dx \\ &= -2\cos(2) + \cos(1) + \big[\sin(t)\big]_1^2 \\ &= -2\cos(2) + \cos(1) + \sin(2) - \sin(1).\end{aligned}$$

Exercice d'application 12.

1) On a $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. La fonction sin étant $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on peut réaliser le changement de variable. On a $dx = \cos(t)dt$. On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)dt.$$

Or, on a $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$. La fonction cos étant positive sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, on a $|\cos(t)| = \cos(t)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(t)dt \\ &= \big[-\cos(t)\big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.\end{aligned}$$

2) On pose le changement de variable $x = t^2$. On prend comme nouvelles bornes 0 et 2 (qui vérifient $0^2 = 0$ et $2^2 = 4$). Cette fonction est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2]$. On a $dx = 2tdt$. On a alors par théorème de changement de variable :

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^2 e^{\sqrt{t^2}}2tdt.$$

Sur $[0,2]$, on a $\sqrt{t^2}=|t|=t$. On peux donc calculer l'intégrale restante par intégration par parties (encore une fois tout est de classe $\mathcal{C}^1$ et cette intégrale a été calculée plusieurs fois) :

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{\sqrt{t^2}}2tdt &= 2\int_0^2 te^t dt\\ &= 2\left(\left[te^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t dt\right)\\ &= 2\left(2e^2-\left[e^t\right]_0^2\right)\\ &= 2e^2+2.\end{aligned}$$

Attention ici à ne PAS poser le changement de variable $t=\sqrt{x}$! En effet, ce changement de variable n'est PAS de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,4]$ (non dérivable en 0).

Exercice d'application 13.

1) f est bien définie et continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues. En 0, on a d'après les croissances comparées que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=0$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. f étant prolongeable en fonction continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe.

2) Soit $\varepsilon>0$. Les fonctions étudiées étant $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,1]$, on peut utiliser une intégration par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \sqrt{t}\ln(t)dt &= \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\ln(t)\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{2}{3}t^{1/2}dt\\ &= \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln(\varepsilon)-\frac{4}{9}(1-\varepsilon^{3/2}).\end{aligned}$$

La fonction $\varepsilon\mapsto\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)dt$ étant continue sur $[0,1]$ comme primitive d'une fonction continue, on en déduit par passage à la limite quand ε tend vers 0 (en utilisant encore une fois les croissances comparées) que :

$$\int_0^1 f(t)dt=-\frac{4}{9}.$$

Exercice d'application 14.

1) La fonction $t\mapsto t\ln(t)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut en déterminer une primitive. On procède par intégration par partie en intégrant le terme en $t\mapsto t$ et en dérivant le terme en $t\mapsto\ln(t)$. Toutes les fonctions considérées sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ (on écrit les égalités à une constante près) :

$$\begin{aligned}\int^x t\ln(t)dt &= \left(\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]^x-\int^x\frac{t}{2}dt\\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2}-\left[\frac{t^2}{4}\right]^x\\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

2) La primitive existe bien puisque pour $x \in \,]1,+\infty[$, on a $\ln(x) > 0$ et la fonction f_2 est donc bien définie (et continue comme composée de fonctions continues) sur $]1,+\infty[$. On a $\ln$ $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et $y = \ln(t) \Rightarrow dy = \frac{1}{t}dt$. Par changement de variable, on en déduit que pour $x \in \,]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\ln(\ln(t))}{t}dt &= \int^{\ln(x)} \ln(y)dy \\ &= [y\ln(y)]^{\ln(x)} - \int^{\ln(x)} 1dy \\ &= \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln(x).\end{aligned}$$

Exercice d'application 15. Par linéarité de l'intégrale, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int^x (2t^3 - 4t^2 + 3t + 1)dt = 2\int^x t^3dt - 4\int^x t^2dt + 3\int^x t + \int^x 1dt = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x.$$

Exercice d'application 16.

1) L'intégrale existe bien puisque la fonction intégrée est définie et continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). On a de plus $2t + 5 = 2(t + 3) - 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2t+5}{t+3}dt &= \int_0^1 2dt - \int_0^1 \frac{1}{t+3}dt \\ &= 2 - \big[\ln(t+3)\big]_0^1 \\ &= 2 - (\ln(4) - \ln(3)) \\ &= 2 - 2\ln(2) + \ln(3).\end{aligned}$$

2) L'intégrale existe bien puisque la fonction intégrée est définie et continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). On a de plus $t - 3 = t + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(2t+1) - \frac{7}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t-3}{2t+1}dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}dt - \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{1}{2t+1}dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\int_0^1 \frac{1}{t+\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\left[\ln\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7\ln(3)}{4}.\end{aligned}$$

3) On se place sur $I = \,]-\infty, 2[$ ou sur $I = \,]2,+\infty[$. On a :

$$t^2 + 1 = t^2 - 2t + 2t + 1 = t(t-2) + 2t - 4 + 4 + 1 = t(t-2) + 2(t-2) + 5 = (t+2)(t-2) + 5.$$

On en déduit que pour x dans un des deux intervalles :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t^2+1}{t-2}dt &= \int^x (t+2)dt + \int^x \frac{5}{t-2}dt \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln(|x-2|).\end{aligned}$$

Exercice d'application 17.

1) On a ici $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$. On a donc deux racines réelles qui sont ici $x_1 = 1$ et $x_2 = -5$. On se place donc sur $I_1 =]-\infty, -5[$ ou sur $I_2 =]-5, 1[$ ou sur $I_3 =]1, +\infty[$. Par théorème de décomposition en éléments simples, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(t-1)(t+5)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+5}.$$

En multipliant par $t-1$ et en évaluant en $t = 1$, on trouve $A = \frac{1}{6}$ et en multipliant par $t+5$ et en évaluant en $t = -5$, on trouve $B = -\frac{1}{6}$. On a donc pour x dans un des intervalles d'étude :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{2}{t^2+4t-5}dt &= \frac{1}{3}\int^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+5}\right) dt \\ &= \frac{1}{3}\left(\ln(|x-1|) - \ln(|x+5|)\right).\end{aligned}$$

2) On a ici $\Delta = 0$. On trouve une racine réelle double $x_1 = -2$. On étudie donc sur $]-\infty, -2[$ ou sur $]-2, +\infty[$. On a alors pour x dans un de ces intervalles :

$$\int^x \frac{1}{t^2+4t+4}dt = \int^x \frac{1}{(t+2)^2}dt = -\frac{1}{x+2}.$$

3) On a cette fois $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. On peut donc se placer sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). On a alors :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{t^2+2t+3} &= \int^x \frac{1}{(t+1)^2+2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\frac{1}{2}(t+1)^2+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Exercice d'application 18.

1) On a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. On peut donc chercher une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus, on cherche à faire apparaitre du $2t-2$ au numérateur (puisqu'il s'agit de la dérivée du dénominateur). On a ici $2t+5 = 2t-2+7$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{2t+5}{t^2-2t+2}dt &= \int^x \frac{2t-2}{t^2-2t+2} + \int^x \frac{7}{t^2-2t+2} \\
&= \ln(|x^2-2x+2|) + \int^x \frac{7}{(t-1)^2+1}dt \\
&= \ln(|x^2-2x+2|) + 7\arctan(x-1)\,.
\end{aligned}$$

2) On a $\Delta = 1-20 = -19 < 0$. On peut donc chercher une primitive sur $\mathbb{R}$. On veut faire apparaitre du $2t-1$ au numérateur (puisqu'il s'agit de la dérivée du dénominateur). On a pour cela :

$$t+1 = \frac{1}{2}(2t+2) = \frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}.$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t+1}{t^2-t+5}dt &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-1}{t^2-t+5}dt + \frac{3}{2}\int^x \frac{1}{t^2-t+5}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{3}{2}\int^x \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{6}{19}\int^x \frac{1}{\frac{4}{19}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{6}{19}\int^x \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{19}}-\frac{1}{\sqrt{19}}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{3}{\sqrt{19}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{19}}-\frac{1}{\sqrt{19}}\right).
\end{aligned}$$

Dans les deux exercices, on aurait pu écrire $\ln(|x^2-2x+2|) = \ln(x^2-2x+2)$ *et* $\ln(|x^2-x+5|) = \ln(x^2-x+5)$ *puisque les fonctions polynomiales qui apparaissent dans le logarithme sont strictement positives sur* $\mathbb{R}$ *(elles ont un discriminant négatif et un coefficient dominant positif).*