# Année Scolaire 2022 – 2023

**MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2}$ et MP2I**

**DS N°8**

**Vendredi 07/04/2023 (4h)**

*Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être* encadrés *ou soulignés à la* ***règle****.*

**Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.**
**La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.**

## Problème 1 : Analyse

*Étude de la fonction* $\mathrm{S} : x \mapsto \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$.

*Les préliminaires seront utilisés dans la dernière partie du problème.*

### Partie I : Préliminaires

*Pour* $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, *on note* $\mathrm{C}(x) = \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$, *où* $\mathrm{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.

**Q1)** a) Montrer que la fonction C est bien définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, continue, impaire, et qu'elle est 1-périodique.

b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

i) Montrer que $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ sont encore dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

ii) Montrer que $\mathrm{C}(\frac{x}{2}) + \mathrm{C}(\frac{x+1}{2}) = 2\mathrm{C}(x)$.

**Q2)** a) Calculer un $\mathrm{dl}_3(0)$ de $\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)$. En déduire un équivalent en 0.

b) Déterminer une constante K telle que $\mathrm{C}(x) - \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \mathrm{K}x$.

En déduire la limite en 0 de $\mathrm{C}(x) - \frac{1}{x}$.

### Partie II : Définition de S

**Q3)** Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{x^2-k^2}$ est bien définie et convergente.

*La fonction* S *est donc définie sur* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, *et* $\mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2} = \frac{1}{x} + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}$.

**Q4)** Vérifier que S est impaire.

**Q5)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on note $\mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}$.

a) Montrer que $\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

b) Montrer que $\mathrm{S}_n(x+1) - \mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}$.

c) En déduire que la fonction S est 1-périodique.

d) Montrer que $S(1-x) = -S(x)$. Qu'en déduisez-vous pour la valeur de $S(\frac{1}{2})$ ?

**Q6)** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

a) En utilisant la formule de la question Q5a, montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$S_n(\frac{x}{2}) + S_n(\frac{x+1}{2}) = 2S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}$$

b) En déduire que $S(\frac{x}{2}) + S(\frac{x+1}{2}) = 2S(x)$.

## Partie III : Continuité de S

**Q7)** Soit $a$ et $x$ dans $]0;1[$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$, montrer que $0 \leqslant \frac{1}{k^2-x^2} \leqslant \frac{1}{k^2-1}$.

b) Montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2a}{a^2-k^2}\right| \leqslant 2|x-a| \times \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$$

c) En déduire que $|S(x) - S(a)| \leqslant \left|\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2-1}\right| + 2|x-a| \times \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$, en justifiant l'existence de la dernière somme.

d) Déduire de ce qui précède que la fonction $x \mapsto S(x)$ est continue sur $]0;1[$, puis sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**Q8)** a) Pour $x \in ]0;1[$, montrer que $\left|S(x) - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1}\right| \leqslant 2x \times \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

b) En déduire la limite en 0 de $S(x) - \frac{1}{x}$ (distinguer gauche et droite).

c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0.

## Partie IV : Simplification de S

*Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note $f(x) = C(x) - S(x)$ (la fonction C a été définie dans la partie I).*

**Q9)** a) Vérifier que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue, impaire, et qu'elle est 1-périodique.

b) Montrer pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, que $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

d) En déduire que $f$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ (préciser le prolongement).

**Q10)** On suppose désormais que $f$ a été prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\forall x \in [0;1]$, $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$.

b) Justifier que $f$ possède un maximum (noté M) sur $[0;1]$.

c) Soit $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = M$. Montrer que $f(\frac{x_0}{2}) = M$, puis que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(\frac{x_0}{2^k}) = M$.

d) En déduire que $f(0) = M$. Que dire alors du signe de $f$ sur $[0;1]$ ?

e) Montrer que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

*On a ainsi montré que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2} \quad \textit{(formule due à Euler)}$$

---

## Problème 2 : Algèbre

*Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel.*

### Partie I : Préliminaires

Dans cette partie, on montre le résultat suivant, qui sera utilisé dans les deux parties suivantes :

« Si $P_0, \dots, P_n$ sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P_k) = k$ alors $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$. »

*(Attention ! ce résultat figure peut-être déjà dans votre cours sur la dimension des espaces vectoriels, mais il s'agit ici d'en proposer une démonstration élémentaire.)*
On raisonne par récurrence simple sur $n$.

**Q1)** *Initialisation :* soit $P_0$ un polynôme de degré 0. Justifier que $\mathrm{vect}(P_0) = \mathbb{R}_0[X]$.

**Q2)** *Hérédité :* soient $P_0, \dots, P_n, P_{n+1}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P_k) = k$. On suppose que $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Justifier que $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n, P_{n+1}) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

b) Soit $A \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. On note $A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$ et $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} p_k X^k$.
Prouver qu'il existe un réel $\lambda$ et un polynôme $B \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$A = \lambda P_{n+1} + B.$$

*On donnera l'expression de* $\lambda$ *et* $B$ *en fonction des coefficients* $a_k$ *et* $p_k$.

c) Conclure que $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n, P_{n+1}) = \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

### Partie II

**Q3)** Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

a) Vérifier que $\Delta$ forme un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $\Delta(P)$ si le polynôme $P$ est constant.

c) Calculer $\Delta(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et préciser le degré de ce polynôme.

d) En déduire que, si $P$ est un polynôme non constant, alors

$$\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.$$

e) Prouver que

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X].$$

f) Montrer que

$$\mathrm{vect}(\Delta(X), \dots, \Delta(X^{n+1})) = \mathbb{R}_n[X].$$

En déduire que l'endomorphisme $\Delta$ est surjectif.

**Q4)** On note $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$.

a) Justifier que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

b) Prouver que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_0[X] \oplus E$.

**Q5)** On note $f$ la restriction de $\Delta$ à E, c'est-à-dire

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \to & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \mapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array}.$$

a) Prouver que $f$ forme un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b) On note alors $\nabla = f^{-1} : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathrm{E}$ sa bijection réciproque.
*(Le symbole $\Delta$ se lit « Delta » et le symbole $\nabla$ se lit « Nabla ».)*
Justifier que pour tout $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}[\mathrm{X}])^2$

$$\nabla(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{P} = \Delta(\mathrm{Q}) \\ \mathrm{Q}(0) = 0 \end{cases}.$$

c) Montrer que

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{p} \mathrm{P}(i) = \nabla(\mathrm{P})(p+1).$$

## Partie III

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathrm{P}_m = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (\mathrm{X}-k).$$

(*Notez que* $\mathrm{P}_0 = 1$ *car le produit vide vaut* 1 *par convention.*)

**Q6)** a) Calculer $\Delta(\mathrm{P}_0)$, puis pour $m \in \mathbb{N}^*$ exprimer $\Delta(\mathrm{P}_m)$ en fonction de $\mathrm{P}_{m-1}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on rappelle que $\Delta^k = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}$ si $k \geqslant 1$ et $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$.
Exprimer $\Delta^k(\mathrm{P}_m)$ en distinguant suivant que $k \leqslant m$ ou $k > m$.

c) En déduire que $\Delta^k(\mathrm{P}_m)(0) = \delta_{k,m}$ *(où bien sûr $\delta_{k,m}$ désigne le symbole de Kronecker valant* 1 *si $k = m$ et* 0 *sinon.)*

**Q7)** a) Justifier que $\mathrm{vect}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n) = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b) En déduire que

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = \sum_{m=0}^{n} \Delta^m(\mathrm{P})(0)\, \mathrm{P}_m.$$

c) Conclure que

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ \nabla(\mathrm{P}) = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta^{m-1}(\mathrm{P})(0)\, \mathrm{P}_m.$$

## Partie IV

Dans cette partie, on propose une application des résultats des deux parties précédentes.

**Q8)** Déterminer sous forme factorisée $\nabla(\mathrm{X}^3)$.

**Q9)** Pour $p \in \mathbb{N}$ **déduire des questions précédentes** la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{p} i^3.$$

**– FIN –**