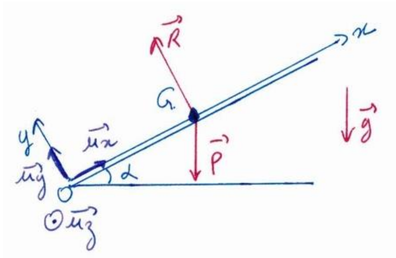
CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 8

Problème 1 – Glissement d'un chariot sur un plan incliné

1. Système : Chariot assimilé à son centre d'inertie G de masse m

- Référentiel terrestre supposé galiléen, muni du repère cartésien $\left(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$
- Bilan des forces :
  - Poids $\overrightarrow{P}=m\overrightarrow{g}=-mg\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x}-mg\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y}$
  - Réaction normale du support (frottements négligés) : $\overrightarrow{R}=R\overrightarrow{u_y}$ avec $R>0$



- PFD : $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{R}=m\overrightarrow{a}$
- Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_x}$: $m\ddot{x}=-mg\sin(\alpha)\Leftrightarrow\boxed{\ddot{x}=-g\sin(\alpha)=cste}$

  Mouvement rectiligne uniformément accéléré

2. Vitesse : $\dot{x}=-g\sin(\alpha)t+cste$ et $\dot{x}(0)=cste=v_0$ soit $\dot{x}=-g\sin(\alpha)t+v_0$

- Position : $x(t)=-\dfrac{g}{2}\sin(\alpha)t^2+v_0t+cste$ et $x(0)=cste=0$ soit

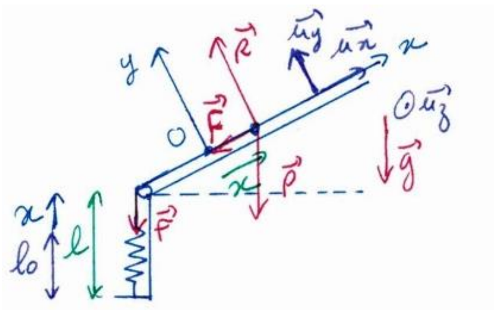
$$\boxed{x(t)=-\frac{g}{2}\sin(\alpha)t^2+v_0t}$$

3. On note t_A l'instant où $\dot{x}(t_A)=0$ soit $-g\sin(\alpha)t_A+v_0=0\Leftrightarrow t_A=\dfrac{v_0}{g\sin(\alpha)}$

$$x(t_A)=x_A\Leftrightarrow x_A=-\frac{g}{2}\sin(\alpha)t_A^2+v_0t_A\Leftrightarrow x_A=-\frac{g}{2}\sin(\alpha)\frac{v_0^2}{g^2\sin^2(\alpha)}+\frac{v_0^2}{g\sin(\alpha)}$$

$$x_A=\frac{v_0^2}{2g\sin(\alpha)}\Leftrightarrow v_0^2=2gx_A\sin(\alpha)\Leftrightarrow\boxed{v_0=\sqrt{2gx_A\sin(\alpha)}}$$

4. Le fil étant inextensible, il transmet la norme de la force exercée par le ressort. La force de rappel élastique exercée sur le chariot est : $\overrightarrow{F}=-k(l-l_0)\overrightarrow{u_x}$. À $t=0$, $l=l_0$ et $x=0$ donc $l-l_0=x$ (lorsque le chariot se déplace de x, l'allongement du ressort est aussi égal à x) donc $\boxed{\overrightarrow{F}=-kx\overrightarrow{u_x}}$.



5. Bilan des forces : $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{F}$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C=E_C(A)-E_C(O)=W_{O\to A}\left(\overrightarrow{P}\right)+W_{O\to A}\left(\overrightarrow{R}\right)+W_{O\to A}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

- <u>Énergie cinétique</u> : $E_C(A)=0$ et $E_C(O)=\frac{1}{2}mv_1^2$
- <u>Travaux des forces</u> : $W_{O\to A}(\vec{R})=0$ car $\vec{R}\perp\vec{v}$

  $W_{O\to A}(\vec{P})=\int_0^A \vec{P}\cdot d\overrightarrow{OG}=\int_0^A \vec{P}\cdot dx\overrightarrow{u_x}=-mg\sin(\alpha)x_A<0$: force résistante

  $W_{O\to A}(\vec{F})=\int_0^A \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OG}=\int_0^A \vec{F}\cdot dx\overrightarrow{u_x}=\int_0^A -kxdx=-\frac{k}{2}x_A^2<0$: force résistante
- <u>Expression de la vitesse</u> : $-\frac{1}{2}mv_1^2=-mg\sin(\alpha)x_A-\frac{k}{2}x_A^2\Leftrightarrow$

$$\boxed{v_1=\sqrt{2g\sin(\alpha)x_A+\frac{k}{m}x_A^2}=\sqrt{v_0^2+\frac{k}{m}x_A^2}}$$

6. <u>PFD</u> : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

- <u>Projection du PFD sur</u> $\overrightarrow{u_x}$: $m\ddot{x}=-mg\sin(\alpha)-kx\Leftrightarrow\boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}x=-g\sin(\alpha)}$
- Forme normalisée : $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2x_{éq}}$

  <u>Pulsation propre</u> : $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$

  <u>Position d'équilibre</u> $x_{éq}$ telle que :

$$\omega_0^2x_{éq}=-g\sin(\alpha)\Leftrightarrow\boxed{x_{éq}=-\frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha)=-\frac{gm}{k}\sin(\alpha)<0}$$

- Ce dispositif est un <u>oscillateur harmonique non amorti</u>.

7. Résolution de l'équation différentielle

   Solution de l'essm : $x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)$

   Solution particulière : $x(t)=x_{éq}$

   Solution complète : $x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)+x_{éq}$

   Conditions initiales :

   - $x(0)=0=A+x_{éq}$ d'où $A=-x_{éq}$
   - $\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0t)+B\omega_0\cos(\omega_0t)$ et $\dot{x}(0)=v_1=B\omega_0$ soit $B=\frac{v_1}{\omega_0}$

   Solution finale : $\boxed{x(t)=x_{éq}\left(1-\cos(\omega_0t)\right)+\frac{v_1}{\omega_0}\sin(\omega_0t)}$

8. Vitesse : $\dot{x}(t)=x_{éq}\omega_0\sin(\omega_0t)+\frac{v_1}{\omega_0}\omega_0\cos(\omega_0t)=x_{éq}\omega_0\sin(\omega_0t)+v_1\cos(\omega_0t)$

- Autre expression : $v(t)=V\sin(\omega_0t+\varphi)=V\sin(\omega_0t)\cos(\varphi)+V\sin(\varphi)\cos(\omega_0t)$

Identification : $\begin{cases} V\cos(\varphi) = x_{éq}\omega_0 \\ V\sin(\varphi) = v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V^2 = v_1^2 + \left(x_{éq}\omega_0\right)^2 \\ \tan(\varphi) = \dfrac{v_1}{x_{éq}\omega_0} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} V = \sqrt{v_1^2 + \left(x_{éq}\omega_0\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + \left(\dfrac{g\sin(\alpha)}{\omega_0}\right)^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_1}{x_{éq}\omega_0}\right) = \tan^{-1}\left(-\dfrac{v_1\omega_0}{g\sin(\alpha)}\right) \end{cases}}$$

➢ Expression de la position par intégration de la vitesse :

$$x(t) = -\frac{V}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \varphi) + cste$$

Condition initiale : $x(0) = 0 = -\dfrac{V}{\omega_0}\cos(\varphi) + cste \Rightarrow cste = \dfrac{V}{\omega_0}\cos(\varphi) = x_{éq}$

$$x(t) = -\frac{V}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{éq}$$

➢ En A : $v(t_A) = V\sin(\omega_0 t_A + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \omega_0 t_A + \varphi = 0[2\pi]$ d'où $\cos(\omega_0 t_A + \varphi) = 1$

$$x(t_A) = x_A = -\frac{V}{\omega_0} + x_{éq} \Leftrightarrow \left(x_A - x_{éq}\right)^2 = \frac{V^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow x_A^2 - 2x_A x_{éq} + x_{éq}^2 = v_1^2 + x_{éq}^2$$

$$\frac{v_1^2}{\omega_0^2} = x_A^2 - 2x_A x_{éq} = x_A^2 + 2x_A\frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha) = x_A^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

$$\boxed{v_1^2 = v_0^2 + \omega_0^2 x_A^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}x_A^2}}$$

9. <u>Énergie potentielle de pesanteur</u> :
   $dE_{P,pes} = -\vec{P}\cdot d\overrightarrow{OG} = -\vec{P}\cdot dx\overrightarrow{u_x} = mg\sin(\alpha)dx$ soit $\boxed{E_{P,pes}(x) = mg\sin(\alpha)x + cste}$

➢ <u>Énergie potentielle élastique</u> :

$dE_{P,elas} = -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OG} = kx\overrightarrow{u_x}\cdot dx\overrightarrow{u_x} = kxdx$ soit $E_{P,elas}(x) = \dfrac{1}{2}kx^2 + cste$. On peut choisir $cste = 0$ car en $x = 0$, le ressort est au repos : $\boxed{E_{P,elas}(x) = \dfrac{1}{2}kx^2}$

10. <u>Bilan des forces</u> :
   - Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ conservative, dérivant de $E_{P,pes}(x)$
   - Force de rappel élastique $\vec{F} = -kx\overrightarrow{u_x}$ conservative, dérivant de $E_{P,elas}(x)$
   - Réaction normale du support : $\vec{R} = R\overrightarrow{u_y}$ avec $R > 0$: non conservative telle que : $W(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R} \perp \vec{v}$
   - Force de frottement fluide : $\overrightarrow{F_f} = -h\vec{v}$ non conservative

➢ Système <u>non conservatif</u>

➤ Énergie mécanique : $E_m = E_C + E_{P,pes} + E_{P,élas} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\sin(\alpha)x + cste + \frac{1}{2}kx^2$

➤ Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathscr{P}^{NC} = \mathscr{P}(\vec{R}) + \mathscr{P}(\vec{F_f}) = \mathscr{P}(\vec{F_f}) = -h\vec{v}\cdot\vec{v} = -hv^2$$

$$\frac{1}{2}2m\dot{x}\ddot{x} + mg\sin(\alpha)\dot{x} + \frac{1}{2}2kx\dot{x} = -h\dot{x}^2 \Rightarrow m\ddot{x} + mg\sin(\alpha) + kx = -h\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = -mg\sin(\alpha) \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -g\sin(\alpha)$$

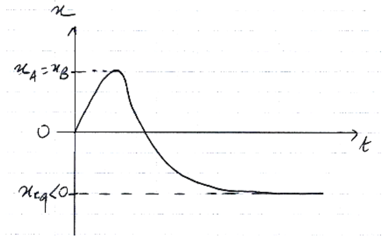
➤ Forme normalisée $\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{éq}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$\omega_0^2 x_{éq} = -g\sin(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{x_{éq} = -\frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha) = -\frac{gm}{k}\sin(\alpha) < 0}$

Coefficient d'amortissement ξ tel que : $\frac{h}{m} = 2\xi\omega_0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2}\frac{h}{m\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{km}}}$

11. Aucune oscillation autour de la position d'équilibre : régime transitoire apériodique : $\xi > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{km}} > 1 \Leftrightarrow \boxed{h > 2\sqrt{km}}$

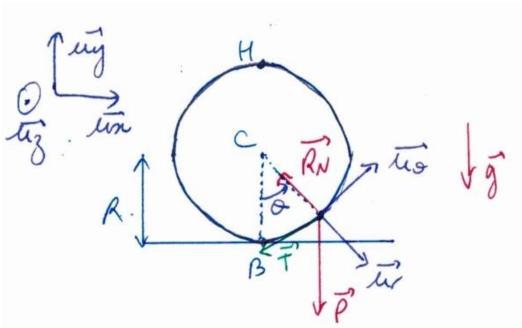
➤ Graphe de $x(t)$ ci-contre.



Problème 2 – Looping

1. Système : point M, de masse m

➤ Référentiel terrestre supposé galiléen, repère cartésien $(C,\vec{u_x},\vec{u_y})$ ou polaire $(C,\vec{u_r},\vec{u_\theta})$



➤ Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
  ou $\vec{P} = mg\cos(\theta)\vec{u_r} - mg\sin(\theta)\vec{u_\theta}$
- Réaction normale du cercle : $\vec{R_N} = -R_N\vec{u_r}$ avec $R_N > 0$

➤ Énergie potentielle de pesanteur en fonction de y :

$$dE_{P,pes} = -\vec{P}\cdot\vec{dCM} = -m\vec{g}\cdot\vec{dCM} = mg\vec{u_y}\cdot\vec{dCM} = mgdy$$

$$E_{P,pes}(y) = mgy + cste$$

Détermination de la constante d'intégration : $E_{P,pes}(B) = 0$ avec $y_B = -R$

Attention : **l'origine du repère est C (cf. énoncé) !**

$$E_{P,pes}(-R) = -mgR + cste = 0 \text{ soit } cste = mgR \text{ donc } \boxed{E_{P,pes}(y) = mgy + mgR}$$

- <u>Énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ</u> :

  Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{CM} = dR\overrightarrow{u_r} + Rd\theta\overrightarrow{u_\theta} = Rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$

$$dE_{P,pes} = -\vec{P}\cdot d\overrightarrow{CM} = +mg\sin(\theta)Rd\theta = d\left(-mgR\cos(\theta)\right)$$

$$dE_{P,pes}(\theta) = -mgR\cos(\theta) + cste$$

  Détermination de la constante d'intégration : $E_{P,pes}(B) = 0$ avec $\theta_B = 0$

  $E_{P,pes}(0) = -mgR + cste = 0$ soit $cste = mgR$ donc $\boxed{E_{P,pes}(\theta) = mgR(1-\cos\theta)}$

  <u>Remarque : autre méthode acceptée</u>

$$\boxed{E_{P,pes}(y) = mgy + mgR} \text{ et } y = -R\cos(\theta) \text{ donc } \boxed{E_{P,pes}(\theta) = mgR(1-\cos\theta)}$$

2. Le poids est une force conservative. La seule force non conservative est $\overrightarrow{R_N} \perp \vec{v}$: son travail est nul : le <u>système est conservatif</u>.

- <u>Théorème de l'énergie mécanique</u> : $\Delta E_m = W^{NC} = W\left(\overrightarrow{R_N}\right) \Leftrightarrow E_m(H) - E_m(B) = 0$

$$E_C(H) + E_{P,pes}(H) - E_C(B) - E_{P,pes}(B) = 0$$

- <u>Énergie cinétique</u> : $E_C(H) = 0$ et $E_C(B) = \frac{1}{2}mv_1^2$
- <u>Énergie potentielle de pesanteur</u> : $E_{P,pes}(H) = mgR(1-\cos\pi) = 2mgR$
- <u>Expression de la vitesse</u> : $\frac{1}{2}mv_1^2 = 2mgR \Leftrightarrow \boxed{v_1 = 2\sqrt{gR}}$

3. Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{CM} = R\overrightarrow{u_r}}$, vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$, vecteur accélération $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$ (cf. schéma de la question 1)

4. <u>PFD</u> : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

- <u>Projection des forces</u> dans la base polaire
  - $\vec{P} = mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$
  - $\overrightarrow{R_N} = -R_N\overrightarrow{u_r}$
- <u>Projection du PFD</u> sur $\overrightarrow{u_r}$: $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R_N \Leftrightarrow \boxed{R_N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2}$

5. Le système est <u>conservatif</u> : $E_m(M) = cste = E_m(B)$

- <u>Énergie cinétique</u> : $E_C(M) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ et $E_C(B) = \frac{1}{2}mv_0^2$
- <u>Énergie potentielle de pesanteur</u> : $E_{P,pes}(M) = mgR(1-\cos\theta)$ et $E_{P,pes}(B) = 0$
- <u>Expression de la vitesse angulaire</u> :

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$$

6. On remplace $\dot{\theta}^2$ dans l'expression de la question 4 :

$$R_N = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} - 2mg\left(1-\cos\theta\right) \Leftrightarrow R_N = mg\left(3\cos\theta - 2\right) + m\frac{v_0^2}{R}$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_N} = -\left(mg\left(3\cos\theta-2\right) + m\frac{v_0^2}{R}\right)\overrightarrow{u_r}}$$

7. Pas de décollage si $\boxed{R_N > 0}$. La valeur minimale de R_N est obtenue pour $\theta = \pi$:

$$R_{N,\min} = mg\left(3\cos\pi - 2\right) + m\frac{v_0^2}{R} = -5mg + m\frac{v_0^2}{R}$$

$$R_{N,\min} > 0 \Leftrightarrow -5mg + m\frac{v_0^2}{R} > 0 \Leftrightarrow v_0^2 > 5gR \Leftrightarrow \boxed{v_0 > v_2 = \sqrt{5gR}}$$

8. $v_0 = \sqrt{6gR} > v_2$: pas de décollage et un tour complet est possible.

- Vitesse angulaire (d'après question 5) :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}\left(1-\cos\theta\right)} = \sqrt{\frac{6gR}{R^2} - \frac{2g}{R}\left(1-\cos\theta\right)} = \sqrt{\frac{2g}{R}\left(2+\cos\theta\right)} = \frac{d\theta}{dt}$$

  En séparant les variables, on a : $\sqrt{\frac{2g}{R}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2+\cos\theta}}$

- Intégration sur un demi-tour : $\sqrt{\frac{2g}{R}}\int_0^{\frac{T}{2}} dt = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2+\cos\theta}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2g}{R}}\frac{T}{2} = 2{,}34$

- Durée d'un tour : $\boxed{T = 2{,}34\sqrt{\frac{2R}{g}} = 1{,}06 \text{ s}}$

9. Bilan des forces complété par la force de frottement, colinéaire à la vitesse et de sens opposé : $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_\theta}$ avec $T = cste > 0$: force non conservative !

- Théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = W\left(\overrightarrow{R_N}\right) + W\left(\vec{T}\right) \Leftrightarrow E_m\left(M\right) - E_m\left(B\right) = W_{B\to M}\left(\vec{T}\right)$$

- Travail de la force de frottement :

$$W_{B\to M}\left(\vec{T}\right) = \int_0^\theta -T\overrightarrow{u_\theta}\cdot d\overrightarrow{CM} = \int_0^\theta -T\overrightarrow{u_\theta}\cdot Rd\theta\overrightarrow{u_\theta} = -RT\int_0^\theta d\theta = -RT\theta$$

- Expression de la vitesse : $\frac{1}{2}mv^2 + mgR\left(1-\cos\theta\right) - \frac{1}{2}mv_0^2 = -RT\theta$

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2RT}{m}\theta - 2gR\left(1-\cos\theta\right)}}$$

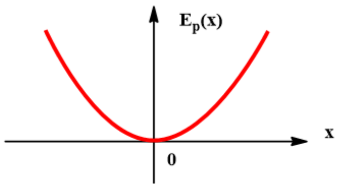
10. Le point le plus haut est atteint lorsque $v = 0$:

$$v_0^2 - \frac{2RT}{m}\theta_0 - 2gR\left(1-\cos\theta_0\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{2RT}{m}\theta_0 - 2gR\cos\theta_0 = v_0^2 - 2gR}$$

11. Petits angles : $\cos\theta_0 \simeq 1$: $\frac{2RT}{m}\theta_0 - 2gR \simeq v_0^2 - 2gR \Leftrightarrow \boxed{\theta_0 \simeq \frac{mv_0^2}{2RT}}$

Problème 3 – Modélisation mécanique du mouvement d'une plante carnivore *(Agro-Véto 2015)*

1. Système : point matériel M de masse m
   Référentiel terrestre supposé galiléen
   Bilan des forces :
   - Poids $\vec{P}$: force conservative telle que $E_{P,pes} = cste = 0$
   - Réaction normale du support $\vec{R_N}$: force non conservative telle que $W\left(\vec{R_N}\right) = 0$
   - Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -kx\vec{u_x}$ force conservative dérivant de l'énergie potentielle élastique telle que $dE_P = -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM} = +kx\vec{u_x}d\overrightarrow{OM} = kxdx$ soit $E_P = \frac{1}{2}kx^2 + cste$ On choisit $cste = 0$ pour que $E_P(0) = 0$. On a $\boxed{E_P(x) = \frac{1}{2}kx^2}$
2. L'énergie potentielle totale est $E_P(x)$.
   Graphe de $E_P(x)$: parabole dont le minimum est en $x = 0$



➢ Position d'équilibre : $\left(\frac{dE_P(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0 \Leftrightarrow kx_{éq} = 0$ soit $\boxed{x_{éq} = 0}$

➢ Stabilité : $\boxed{\left(\frac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} = k > 0}$: la position d'équilibre est stable.

➢ Ce modèle n'est pas adapté au mécanisme des pièges de la dionée, car il n'y a qu'une seule position d'équilibre stable, alors que le mécanisme biologique en fait apparaître deux.

3. L'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale. Le graphe de la FIGURE 5 montre qu'il y a deux positions d'équilibre stable : $\boxed{x_{éq1} = x_0}$ et $\boxed{x_{éq2} = -x_0}$. L'équilibre est instable si l'énergie potentielle est maximale (localement). Il y a une position d'équilibre instable : $\boxed{x_{éq3} = 0}$
4. Énergie potentielle élastique : $E_P = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cste = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ car $E_P(\ell = \ell_0) = 0$

   Triangle rectangle OAM : $\ell = AM = \sqrt{OM^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + d^2}$

$$\boxed{E_P(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell_0\right)^2}$$

Positions d'équilibre telle que $\left(\dfrac{dE_P(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0$

$$\frac{dE_P(x)}{dx} = \frac{1}{2}k2\left(\sqrt{x^2+d^2}-\ell_0\right)\frac{d\left(\sqrt{x^2+d^2}-\ell_0\right)}{dx} = k\left(\sqrt{x^2+d^2}-\ell_0\right)\frac{1}{2}2x\frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\frac{dE_P(x)}{dx} = k\left(1-\frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)x$$

$$\left(\frac{dE_P(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0 \Leftrightarrow x_{éq} = 0 \text{ ou } \frac{\ell_0}{\sqrt{{x_{éq}}^2+d^2}} = 1 \text{ soit } {x_{éq}}^2 = {\ell_0}^2 - d^2 > 0 \text{ car } d < \ell_0$$

On en déduit $\boxed{x_0 = +\sqrt{{\ell_0}^2-d^2} \text{ et } -x_0 = -\sqrt{{\ell_0}^2-d^2}}$

5. En partant de x_0 avec une vitesse nulle, il faut fournir à la masse m une énergie E supérieure à la barrière d'énergie potentielle $E_P(x=0)$ pour que le système puisse atteindre l'abscisse $-x_0$.

$$\boxed{E > E_{\min} = E_P(x=0) = \frac{1}{2}k\left(d-\ell_0\right)^2}$$

6. Modèle mécanique : deux positions d'équilibre stable $\pm x_0$ et une position d'équilibre instable $(x=0)$: correspondent à l'état ouvert et à l'état fermé du piège.
   Pour passer d'une position d'équilibre stable à l'autre, il faut fournir au système une énergie minimale E_{min}. Une fois le maximum dépassé, le système passe dans l'autre état stable, avec des oscillations pour le modèle mécanique sans frottements, mais sans oscillation du rayon de courbure du piège.

7. Stabilité : étude du signe de $\left(\dfrac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}$

$$\frac{d^2E_P(x)}{dx^2} = k\left(1-\frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+d^2}}\right) + kx\left(\frac{1}{2}2x\frac{\ell_0}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = k\left(1-\frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+d^2}}+\frac{x^2\ell_0}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

- Pour $\boxed{x_{éq}=0}$: $\left(\dfrac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} = k\left(1-\dfrac{\ell_0}{d}\right) < 0$ car $d < \ell_0$: position d'équilibre instable

- Pour $\boxed{\pm x_0 = \pm\sqrt{{\ell_0}^2-d^2}}$: $\left(\dfrac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} = k\left(1-\dfrac{\ell_0}{\ell_0}+\dfrac{{x_0}^2\ell_0}{\left(\ell_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = k\dfrac{{x_0}^2}{\ell_0^2} > 0$: positions d'équilibre stables