DEVOIR À LA MAISON 8

Schémas, méthode et rigueur sont nécessaires et indispensables !

<u>L'indispensable</u> :

Problème 1 : questions 1 à 7, Problème 2 : questions 1 à 7,
Problème 3 : questions 1 à 3

<u>Pour approfondir</u> :

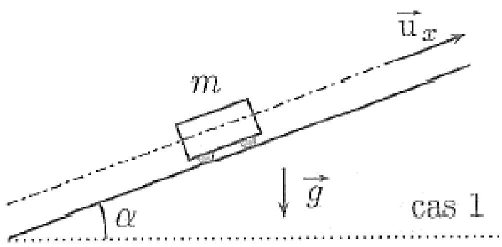
Problème 1 : questions 9 à 11, Problème 2 : questions 9 à 11,
Problème 3 : question 4

|| ***<u>L'optionnel</u> :*** *Les questions avec <u>un double trait</u> dans la marge*

Problème 1 – Glissement d'un chariot sur un plan incliné

PARTIE 1 : CAS 1

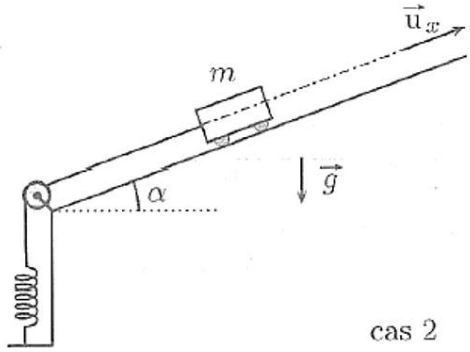
On considère une portion de plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α (cf. figure ci-contre). Un chariot de masse m est mobile sans frottement sur des rails posés parallèlement à une ligne de plus grande pente du plan. Sa position est repérée sur l'axe $\left(O;\overrightarrow{u_x}\right)$ par l'abscisse x de son centre d'inertie G. On suppose qu'à l'instant $t=0$, le chariot est lancé vers le haut depuis la position $x(t=0)=0$ avec la vitesse $\vec{v}(t=0)=\overrightarrow{v_0}=v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $v_0>0$.



1. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle du mouvement. Préciser la nature du mouvement.
2. Intégrer deux fois l'équation précédente pour déterminer l'expression de la position $x(t)$ à tout instant.
3. À l'aide de la question précédente, déterminer, en fonction de g, α et x_A, l'expression de la vitesse v_0 pour que la vitesse du chariot s'annule au point A d'abscisse $x=x_A$.

PARTIE 2 : CAS 2

On considère le même plan incliné que dans le cas 1, muni à présent d'un dispositif à ressort, poulie et fil (inextensible), qui permet d'exercer sur le chariot une force de rappel élastique $\vec{F}$, avec k la constante de raideur et l_0 la longueur à vide du ressort (cf. figure ci-contre). On suppose qu'à l'instant $t=0$, la longueur du ressort est telle que $l = l_0$ et que le chariot est lancé vers le haut depuis la position $x(t=0)=0$ avec la vitesse $\vec{v}(t=0) = \vec{v_1} = v_1\vec{u_x}$. Il atteint ensuite le point B où sa vitesse s'annule, puis il redescend.



cas 2

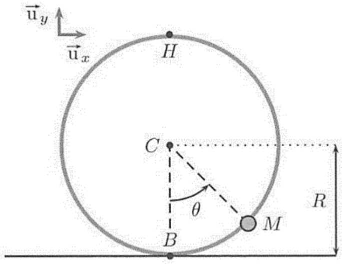
4. Justifier que la force élastique exercée sur le chariot s'écrit $\vec{F} = -kx\vec{u_x}$ (schémas, propriété du fil…).
5. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression de la vitesse v_1 pour laquelle le point B est confondu avec le point A : exprimer v_1 en fonction de v_0, k, m et x_A.
6. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous la forme normalisée $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{éq}$. Préciser les expressions et les significations de ω_0 et $x_{éq}$. Quel nom porte ce dispositif ?
7. Résoudre l'équation différentielle précédente pour déterminer l'expression de la position $x(t)$ à tout instant, en fonction de v_1, ω_0 et $x_{éq}$.
8. Exprimer la vitesse $v(t)$ à tout instant en l'écrivant sous la forme $v(t) = V\sin(\omega_0 t + \varphi)$: préciser les expressions de V et φ. Déterminer l'expression de la vitesse v_1 pour laquelle le point B est confondu avec le point A et vérifier la cohérence du résultat avec celui de la question 5.
   Rappel mathématique : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

PARTIE 3 : CAS 3

On reprend le dispositif du cas 2, en tenant compte d'une force de frottement fluide de type visqueux : $\vec{F_f} = -h\vec{v}$, avec $h > 0$ le coefficient de frottement.

9. Déterminer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{P,pes}(x)$ et de l'énergie potentielle élastique $E_{P,élas}(x)$.
10. Par application du théorème de la puissance mécanique, déterminer l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous la forme normalisée $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{éq}$. Préciser l'expression et le nom de ξ.
11. Quelle est la condition sur le coefficient de frottement h pour que le chariot n'effectue aucune oscillation autour de la position d'équilibre ? Représenter l'évolution de $x(t)$ dans ce cas.

Problème 2 – Looping



Un point matériel mobile M de masse m parcourt un circuit comportant une boucle, située dans un plan vertical, circulaire de centre C et de rayon R représenté sur la figure ci-contre. Le point C est considéré comme l'origine des repères. Le mobile aborde le cercle en son point le plus bas B avec une vitesse $\vec{v} = v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $v_0 > 0$ et une énergie potentielle de pesanteur nulle. À l'instant t, le point M est repéré sur le cercle par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right)$. On note $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_y}$ le champ de pesanteur.

PARTIE A : ABSENCE DE FROTTEMENT

Un dispositif approprié empêche le décollage du mobile.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_{P,pes}$ en fonction de y puis en fonction de θ (la constante d'intégration doit être déterminée !)
2. Par application du théorème de l'énergie mécanique, déterminer l'expression de la valeur minimale v_1 à donner à v_0 pour que le mobile atteigne le point H le plus haut du cercle. Exprimer v_1 en fonction de R et g.
3. Exprimer dans le repère polaire $\left(C; \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$ (à représenter sur un schéma) les vecteurs position, vitesse et accélération du point M.
4. Déterminer, en fonction de m, R, g, θ et $\dot{\theta}^2$, l'expression de la force de réaction $\overrightarrow{R_N}$ exercée sur le mobile.
5. Par des considérations énergétiques, déterminer l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de g, R, θ et v_0.
6. En déduire l'expression de la force de réaction $\overrightarrow{R_N}$ en fonction de m, R, g, θ et v_0.

On enlève à présent le dispositif empêchant le décollage du mobile.

7. Montrer que, si $v_0 > v_2$, le cercle entier peut être parcouru sans risquer le décollage. Préciser l'expression de v_2 en fonction de R et g.
8. On suppose dans cette question que $v_0 = \sqrt{6gR}$. Calculer la durée d'un tour sachant que $\int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{2+\cos(u)}} = 2{,}34$, $g = 9{,}80\ \text{m.s}^{-2}$ et $R = 1{,}00\ \text{m}$.

PARTIE B : PRÉSENCE DE FROTTEMENT

Un dispositif approprié empêche à nouveau tout décollage du mobile, qui est soumis à une force de frottement de norme constante T lors de sa montée.

9. Déterminer l'expression, en fonction de m, v_0, g, R, T et θ, de la vitesse v du mobile lorsqu'il atteint un point repéré par θ.
10. Donner l'équation vérifiée par l'angle θ_0 définissant le point le plus haut atteint par le mobile.

11. Proposer une expression approchée de θ_0, en fonction de m, v_0, R et T, dans le cas de petits angles.

Problème 3 – Modélisation mécanique du mouvement d'une plante carnivore *(Agro-Véto 2015)*

La dionée (*Dionaea muscipula*) est une plante carnivore originaire des Etats-Unis d'Amérique. Cette plante de petite taille est constituée d'un pied principal duquel émergent entre dix et vingt longues tiges qui portent chacune un piège leur permettant d'attraper des insectes. Chacun des pièges est constitué de deux lobes en regard reliés par une nervure principale, portant de nombreux cils qui ressemblent à des dents.

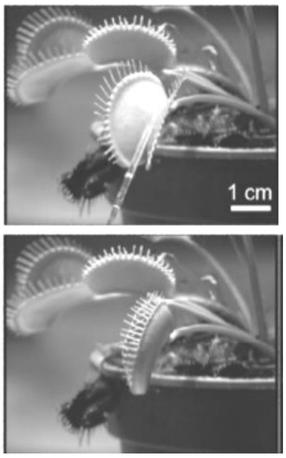


FIGURE 1 : Piège de la dionée dans l'état ouvert (en haut) et dans l'état fermé (en bas).

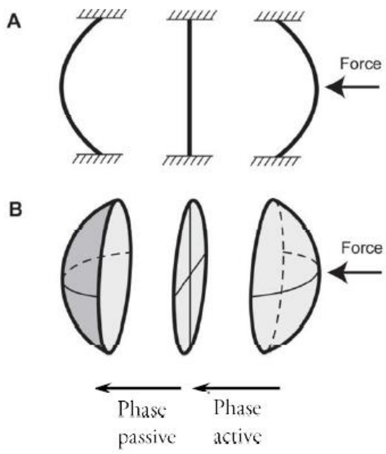


FIGURE 2 : Passage en deux phases d'un état de repos avec une courbure naturelle à un autre état de repos avec une courbure inversée, pour une coque sphérique, sous l'action d'une force.

Chaque lobe du piège a une forme de coque mince courbée vers l'extérieur dans l'état ouvert et vers l'intérieur dans l'état fermé (FIGURE 1). Lorsque le piège se déclenche, la plante change activement la courbure naturelle des lobes. Ce changement de courbure s'accompagne d'une compression du tissu végétal ce qui nécessite un apport d'énergie. Il existe une barrière d'énergie correspondant à l'état où la compression est maximale. Lorsque cette barrière est franchie, le lobe se retourne brutalement en prenant une courbure inverse de la courbure initiale. Le mécanisme de fermeture du piège comprend donc deux phases : une phase active nécessitant un apport d'énergie et une phase passive pendant laquelle l'énergie précédemment emmagasinée est brutalement libérée (FIGURE 2).

L'objet de ce problème est de proposer un modèle mécanique validant ce mécanisme de fermeture du piège.

MODÈLE BASIQUE

On considère un système assimilable à un point matériel M de masse m, accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un support fixe en un point

FIGURE 3 : Modèle simple

O (FIGURE 3). La longueur du ressort est $\ell = OM$. L'ensemble est horizontal et posé sur un plan sur lequel M peut glisser. Tous les frottements sont négligés. La position de M est repérée par son abscisse x comptée à partir de la position où le ressort est au repos.

1. Rappeler l'expression de la force de rappel du ressort et déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique E_P de M en fonction de x.
2. Tracer l'allure du graphe de l'énergie potentielle élastique de M en fonction de x. Déterminer les positions d'équilibre possibles et leur stabilité. Expliquer en quelques mots pourquoi ce modèle n'est pas adapté au mécanisme des pièges de la dionée.

ÉVOLUTION DU MODÈLE

Le modèle précédent est maintenant remplacé par le suivant : le système assimilable à un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottement sur un axe (Ox) horizontal. Il est accroché au même ressort mais l'autre extrémité de celui-ci est fixée en un point A, situé à la verticale de O et à la distance fixe d de celui-ci (FIGURE 4). La longueur du ressort est $\ell = AM$. La distance d vérifie la condition $d < \ell_0$. Pour ce système, le graphe de l'énergie potentielle élastique E_P en fonction de l'abscisse x de M est donné à la FIGURE 5.

L'origine de l'énergie potentielle est prise lorsque le ressort est au repos.

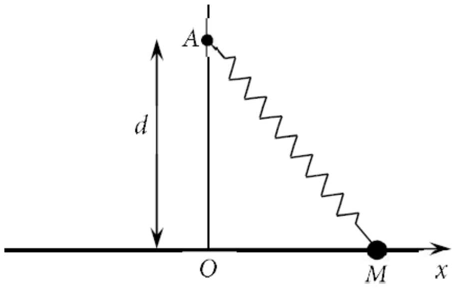


FIGURE 4 : Modèle évolué

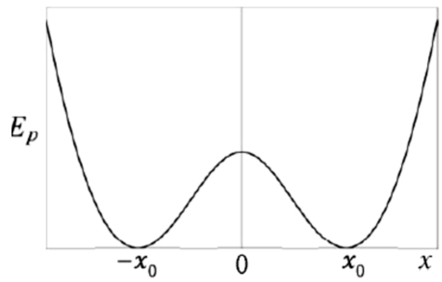


FIGURE 5 : Graphe d'énergie potentielle

3. À partir de l'étude qualitative du graphe de $E_P(x)$, indiquer les positions d'équilibre possibles et leur stabilité.
4. Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_P(x)$ puis déterminer l'expression de x_0, abscisse de M lorsque l'énergie potentielle est minimale, en fonction de ℓ_0 et d.
5. Le système étant initialement à une abscisse x_0 avec une vitesse nulle, établir l'expression de l'énergie minimale qu'il faut lui communiquer pour qu'il puisse atteindre l'abscisse $-x_0$. On exprimera le résultat en fonction de k, d et ℓ_0.
6. Expliquer l'analogie entre les propriétés du système étudié aux questions 3, 4, 5 et le mécanisme de fermeture du piège de la dionée.
7. Retrouver par le calcul le caractère stable ou instable des positions d'équilibre.