OUTILS MATHÉMATIQUES 3
Résolution d'une équation différentielle du second ordre (sans dérivée première)

1 Mise en forme de l'équation différentielle du second ordre (sans dérivée première)

- **L'équation différentielle** que l'on cherche à résoudre est de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=f(t)\Leftrightarrow \ddot{y}+\omega_0^2 y=f(t)}$$

ω_0 étant une constante positive et *f(t)* représentant le **second membre**.

- **L'équation sans second membre** (essm) ou **équation homogène** associée est :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=0\Leftrightarrow \ddot{y}+\omega_0^2 y=0}$$

2 Résolution en 5 étapes

① <u>Solution de l'équation sans second membre / équation homogène</u>

$$\boxed{\begin{gathered} y_H(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t) \\ \text{ou}\quad y_H(t)=C\cos(\omega_0 t+\varphi) \\ \text{ou}\quad y_H(t)=D\sin(\omega_0 t+\psi) \end{gathered}}$$

avec ***A* et *B* (ou *C* et φ, ou *D* et ψ) deux constantes à déterminer**.

② <u>Solution particulière</u>

On la recherche sous la **même forme** que le **second membre *f*(*t*),** qui peut être une constante, un polynôme, une exponentielle ou une fonction sinusoïdale.

<u>Exemple</u> : Cas où $\boxed{f(t)=cste=F}$

On cherche la solution sous la forme $y_P=cste=K$. Cette solution vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y_P}{dt^2}+\omega_0^2 y_p=F\Leftrightarrow \frac{d^2K}{dt^2}+\omega_0^2 K=F\Leftrightarrow K=\frac{F}{\omega_0^2}$$

$$\boxed{y_p=\frac{F}{\omega_0^2}}$$

③ Solution complète

C'est la **somme** de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière.

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_P}$$

④ Conditions initiales

Par un raisonnement physique, on connaît **les valeurs initiales** de la fonction et de sa dérivée en $t = 0$:

$$\boxed{y(0)} \text{ et } \boxed{\dot{y}(0) = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}}$$

En remplaçant *t* par 0 dans l'expression de *y(t)* et dans celle de sa dérivée $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$, établie à partir de la solution complète, on **détermine les valeurs des constantes *A* et *B*.**

⑤ Solution finale

On **remplace *A* et *B*** par leurs expressions dans la solution complète.