LYCÉE MONTAIGNE

Année Scolaire 2022 – 2023

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2}$ et MP2I

DS N°6

Jeudi 23/02/2023 (4h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$ *ou* <u>*soulignés*</u> *à la* ***règle***.

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : Algèbre

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : Polynômes réels scindés

On note E *l'ensemble des polynômes non constants à coefficients dans* $\{-1,0,1\}$. *Autrement dit, si* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ *est de degré* $n \in \mathbb{N}^*$, *il peut s'écrire sous la forme :*

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \{-1,0,1\}$ *et* $a_n \in \{-1,1\}$.
On notera $\mathrm{E}_s \subset \mathrm{E}$ *l'ensemble des polynômes de* E *qui sont scindés sur* $\mathbb{R}$ *à racines simples. Autrement dit, si* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_s$ *est de degré* n, *alors il admet* n *racines réelles distinctes et peut donc se factoriser sous la forme* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - x_k)$ *avec* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *deux à deux distincts.*
Le but de cette partie est de déterminer tous les polynômes qui sont dans l'ensemble E_s.

Q1) *Étude de* E.

a) Montrer que $\mathrm{P} \in \mathrm{E} \iff -\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.

b) Donner la liste des polynômes unitaires de degré 1 et de degré 2 qui sont dans E. Combien y-a-t-il de polynômes de degré 1 et de degré 2 dans E ?

Q2) *Étude de* E_s.

a) Justifier brièvement que $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_s \iff -\mathrm{P} \in \mathrm{E}_s$ et donner la liste des polynômes unitaires de degré 1 et de degré 2 qui sont dans E_s. Combien y-a-t-il de polynômes de degré 1 et de degré 2 dans E_s ?

b) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_s$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\mathrm{P}(0) = 0 \iff \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_s, \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \\ \mathrm{Q}(0) \neq 0 \end{cases}$.

Ce résultat nous permet dans la suite de concentrer notre étude sur les polynômes de E_s *qui ne s'annulent pas en 0.*

Q3) *Un résultat intermédiaire.* Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.
On pose $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \mathrm{X} + b_i)^2$.

a) Expliciter les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$.

b) Justifier brièvement que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) \geqslant 0$. Que peut-on alors dire du signe du discriminant de P ? En déduire que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

c) Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ b_i = -\lambda a_i.$$

d) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right).$$

Q4) *Majoration du degré.* Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_s$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(0) \neq 0$. On notera $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. On note $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ les n racines réelles de P et pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ la k-ième fonction symétrique élémentaire en les $x_1, \dots, x_n$.

a) Citer la formule liant les racines de P à ses coefficients et en déduire que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma_k \in \{-1, 0, 1\}.$$

b) En développant σ_1^2, exprimer $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ en fonction de σ_1 et de σ_2. En déduire que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$.

c) On pose $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^{n-k}$.

   i) Vérifier que $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$, que Q est de degré n et que $\mathrm{Q}(0) \neq 0$.

   ii) Vérifier que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$ et que $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$. En déduire que $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}_s$.

   iii) En déduire que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \leqslant 3$.

d) Montrer finalement que $n \leqslant 3$.

Q5) *Étude du degré 3.* Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_s$ de degré 3 tel que $\mathrm{P}(0) \neq 0$. En remarquant que l'on a une égalité dans la question Q4.d, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1, 3]\!],\ x_i^2 = \lambda$ et en déduire une absurdité.

Q6) Combien y-a-t-il de polynômes dans E_s ?

Partie II : Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *non constant tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) \geqslant 0$. *Le but de cette partie est de montrer qu'il existe* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *tels que* $\mathrm{P} = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$.
Pour fixer les notations, on note $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{X}^2 + a_j \mathrm{X} + b_j)^{s_j}$ *la factorisation de* P *dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *où* $\lambda = dom(\mathrm{P}), \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *sont les racines réelles distinctes de* P *(de multiplicités* $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}^*$ *) et où pour* $j \in [\![1, m]\!]$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $a_j^2 - 4b_j < 0$ *avec* $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}^*$.

Q7) Justifier que $\lambda > 0$.

Q8) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \alpha_i)^{r_i} \mathrm{Q}(\mathrm{X})$.

a) Justifier que $Q(\alpha_i) \neq 0$ et en déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [\alpha_i - \eta, \alpha_i + \eta],\ Q(x) \neq 0$.

b) Justifier que Q est de signe constant sur $[\alpha_i - \eta, \alpha_i + \eta]$ et en déduire que r_i est pair.

Q9) On pose $\mathscr{E} = \{A^2 + B^2,\ (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$.

a) Vérifier que si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(X - \alpha)^2 \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a^2 - 4b < 0$, alors $X^2 + aX + b \in \mathscr{E}$. *On fera apparaître une identité remarquable.*

c) Pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$, on pose $C = A + iB \in \mathbb{C}[X]$ et $\overline{C} = A - iB \in \mathbb{C}[X]$.

i) Vérifier que $A^2 + B^2 = C \times \overline{C}$.

ii) Soient $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathbb{R}[X]$. On note toujours $C_1 = A_1 + iB_1$ et $C_2 = A_2 + iB_2$. Vérifier que

$$\overline{C_1 C_2} = \overline{C_1} \times \overline{C_2}.$$

iii) En déduire qu'il existe $A_3, B_3 \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(A_1^2 + B_1^2) \times (A_2^2 + B_2^2) = A_3^2 + B_3^2.$$

et en déduire que l'ensemble $\mathscr{E}$ est stable par produit.

Q10) Montrer finalement que $P \in \mathscr{E}$.

Problème 2 : Analyse

Partie I

On note $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{1 + t^2}$.

Q1) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$.
(On l'écrira sous la forme $f'(t) = \frac{e^t \times g(t)}{(1+t^2)^2}$ *où* $g(t)$ *est une expression à préciser.)*

Q2) Déterminer les limites de $f(t)$ lorsque $t \to -\infty$ et lorsque $t \to +\infty$, puis dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Q3) a) Calculer $f''(t)$.
(On l'écrira sous la forme $f''(t) = \frac{e^t \times (t-1) \times h(t)}{(1+t^2)^3}$ *où* $h(t)$ *est une expression à préciser.)*

b) Justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-\frac{1}{5}, 0[$ tel que

$$\begin{cases} h(t) < 0 \text{ si } t < \alpha \\ h(t) = 0 \text{ si } t = \alpha \\ h(t) > 0 \text{ si } t > \alpha \end{cases}.$$

c) Déterminer le signe de $f''(t)$ en fonction des valeurs du réel t et préciser sur quelle(s) partie(s) de $\mathbb{R}$ la fonction f est convexe (resp. concave).

Q4) Tracer l'allure du graphe de f.

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir par récurrence que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{«}\exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] : \ \forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = \frac{e^t \times \mathrm{P}_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}} \text{ ».}$$

Q5) a) Préciser l'expression à donner au polynôme $\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$ pour que l'assertion $\mathscr{A}(0)$ soit vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose l'assertion $\mathscr{A}(n)$ vraie. Prouver que $\mathscr{A}(n+1)$ est vraie, et préciser l'expression du polynôme $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})$ en fonction des polynômes $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})$ et $\mathrm{P}'_n(\mathrm{X})$.

Q6) Retrouver à l'aide du résultat précédent vos expressions de $f'(t)$ et $f''(t)$ trouvées en questions 1 et 3a.

Q7) Déterminer, en les justifiant, une expression du degré et du coefficient dominant du polynôme P_n.

Q8) Déterminer, en la justifiant, une expression de $\mathrm{P}_n(i)$. *(Bien sûr, i désigne le nombre complexe.)*

Partie III

$$\textit{On note } \mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$

Q9) Préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$, ainsi que sa convexité. Préciser l'équation de la tangente en 0 au graphe de F.

Q10) Déterminer la limite de $\mathrm{F}(x)$ quand $x \to +\infty$.

Q11) Montrer que $\mathrm{F}(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque $x \to -\infty$, et montrer que $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

Q12) Tracer l'allure du graphe de F.

Q13) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \mathrm{F}(n) = \int_0^n \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$$

et on pose

$$x_n = \int_1^n \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt, \quad y_n = \int_1^n \frac{e^t}{t^3}\,dt, \quad z_n = \int_1^n \frac{e^t}{t^4}\,dt.$$

a) Déterminer une constante réelle A (indépendante de n) telle que

$$u_n = \frac{e^n}{1+n^2} + \mathrm{A} + 2x_n.$$

b) Ranger dans l'ordre croissant les réels 0, x_n et y_n.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $y_n - 3z_n = o(\frac{e^n}{n^2})$ quand $n \to +\infty$.

d) Justifier que $e^{n^{3/4}} = o(\frac{e^n}{n^2})$.

e) Prouver que $z_n = o(\frac{e^n}{n^2})$.
(Indication : on pourra découper l'intervalle $[1, n]$ sous la forme $[1, n^{3/4}] \cup [n^{3/4}, n]$.)

f) En déduire que $x_n = o(\frac{e^n}{n^2})$, et déterminer un équivalent simple de u_n.

Q14) Préciser le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{F}(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x}.$$

Qu'en déduit-on sur le graphe de F ?

– FIN –