À chercher pour mardi 02/05/2023, corrigé

TD 24 :

Exercice 9. (m) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En particulier, pour $n = 2$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\mathrm{rg}(A) = 1$ (les deux colonnes sont liées car identiques) donc A n'est pas inversible.

Supposons $n \geq 3$. On va se ramener à I_n en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes. On commence par faire $L_n \leftarrow L_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k$ pour obtenir la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2-n \end{pmatrix}.$$

On a $2 - n \neq 0$ donc on peut réaliser $L_n \leftarrow \frac{1}{2-n} L_n$ puis les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ pour se ramener à I_n. On effectue alors les mêmes opérations en partant de I_n. Après la première opération, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient A^{-1} après la seconde opération ce qui donne :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n-3}{n-2} & \frac{1}{2-n} & \dots & \frac{1}{2-n} & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{2-n} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2-n} & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{2-n} & \dots & \frac{1}{2-n} & \frac{n-3}{n-2} & \frac{1}{n-2} \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) On trouve $A^2 = 3A$. On en déduit que si l'on pose $B = \frac{1}{3}A$, alors $B^2 = \frac{1}{9}A^2 = \frac{1}{3}A = B$. Si on note p l'application linéaire canoniquement associée à B, alors on a que $p^2 = p$ et donc p est un projecteur. On a donc bien $f = 3p$ où p est un projecteur.

2) Puisque $f = 3p$, on a $\ker(f) = \ker(p)$ (car $x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow 3p(x) = 0_E \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \ker(p)$) et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p)$ (preuve similaire). Puisque p est un projecteur, on a $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$, ce qui donne $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Pour trouver $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, on étudie $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

On a donc $\ker(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$.

De même, on a :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

En effet, on a $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc les 3 vecteurs sont liés et les deux premiers sont libres car non colinéaires. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((2, -1, -1), (-1, 2, -1)\right).$$

Une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est alors la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3) = ((1, 1, 1), (2, -1, -1), (-1, 2, -1))$. On a par définition de la projection p que $p(f_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $p(f_2) = f_2$ et $p(f_3) = f_3$. Puisque $f = 3p$, on en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. On pose $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

1) La famille $(\cos, \sin)$ est génératrice de E par définition. De plus, cette famille est libre, puisque si on fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = 0$, alors en évaluant en $x = 0$, on a $a = 0$ et en $x = \pi/2$, on a $b = 0$.

e est donc une base de E et on a donc $\dim(E) = 2$. La dérivation est bien définie sur E car toutes les fonctions de E sont de la forme $a\cos + b\sin$ et sont donc dérivables. De plus, D est bien à valeurs dans E puisque $D(a\cos + b\sin) = -a\sin + b\cos \in E$. Enfin, D est bien linéaire. On a donc $D \in L(E)$.

2) On a $D(\cos) = -\sin$ et $D(\sin) = \cos$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_e(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) De même, f_1 et f_2 sont libres car si $\forall t \in \mathbb{R},\ af_1(t) + bf_2(t) = 0$, alors en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient que $a = 0$ (sinon on a une absurdité). En évaluant alors en $t = 0$, on obtient $b = 0$. On a donc $\dim(F) = 2$ puisque f est une base de F.

On a $D(f_1) = f_1$ et $D(f_2) = -f_2$. On a donc bien $D(F) \subset F$ et D est toujours linéaire donc on a de même que ci-dessus que $D \in L(F)$. Puisque $D(f_1) = f_1$ et $D(f_2) = -f_2$, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_f(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$