Programme de colle, semaine 30

Espaces préhilbertiens réels :

- Nous avons commencé le chapitre sur les espaces préhilbertiens. Nous avons défini les propriétés d'un produit scalaire, donné des exemples. Nous avons défini la norme euclidienne associée, vu le calcul de $||x+y||^2$, l'identité du parallélogramme et celle de polarisation. Nous avons démontré l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité triangulaire.
- Après avoir défini l'orthogonalité de deux vecteurs, nous avons défini l'orthogonal d'une partie de E. Nous avons montré que $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, que $A^\perp$ était un sous espace vectoriel, que si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$. Nous avons montré que $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$, ce qui permet si A est un espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_n$ de vérifier que x est orthogonal à chacun des e_i pour vérifier que $x \in A^\perp$.
- Nous avons défini la notion de famille orthogonale et orthonormale de vecteurs. Nous avons montré qu'une famille orthogonale avec tous les vecteurs non nuls était libre. Nous avons alors démontré le théorème de Pythagore.
- Nous avons défini les bases orthonormées (b.o.n) et montré qu'il suffisait de vérifier si $\dim(E) = n$ que la famille contient n vecteurs et est orthonormée. Nous avons alors montré que si $e_1, \dots, e_n$ est une b.o.n de E que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$, que $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$ et que $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2}$.
- Nous avons énoncé et démontré l'algorithme d'orthonormalisation de Gram Schmidt et nous en avons déduit le théorème de la base orthonormée incomplète (toute famille libre orthonormée peut être complétée en une base orthonormée d'un espace euclidien), ce qui nous a permis d'affirmer que tout espace euclidien admet une b.o.n.
- Nous avons alors montré que si F est un sev de dimension fini de E , alors $F \oplus F^\perp = E$ et que si E est de dimension finie alors $F^{\perp\perp} = F$. Nous avons défini les projections orthogonales et les symétries orthogonales. Nous avons en particulier vu comment déterminer la matrice d'une telle application (ainsi que le cas particulier d'une projection sur une droite ou sur un hyperplan, où l'on se ramène alors à la projection sur l'orthogonal pour avoir moins de calcul à faire).
- Nous avons ensuite défini la distance à un espace vectoriel et démontré que $d(x, F) = ||x - p_F^\perp(x)||$. Nous avons vu l'équation d'un hyperplan vectoriel en b.o.n avec l'interprétation des coefficients comme la donnée d'un vecteur normal à l'hyperplan. Nous avons alors vu en exemple comment calculer la distance d'un point à un hyperplan vectoriel (connaissant un vecteur normal ou son équation) et à une droite (connaissant un vecteur directeur).

Remarques sur le programme : Il n'y a plus d'isométries vectorielles, de matrices orthogonales et de classification des isométries en dimension 2.

Compétences :

- Montrer des inégalités faisant apparaitre des racines/carrés avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n.
- Savoir mettre en oeuvre l'algorithme de Gram-Schmidt afin d'orthonormaliser une famille de vecteurs.

— Déterminer la matrice d'une projection/symétrie orthogonale dans une b.o.n. En particulier dans $\mathbb{R}^3$, passer par la projection sur une droite pour simplifier les calculs.
— Déterminer la distance d'un vecteur à un espace vectoriel.

Questions de cours :

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec le cas d'égalité) et la démontrer (ne pas faire la preuve du cas d'égalité).
2. Mettre en oeuvre l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
3. Donner l'expression de $p_F^{\perp}(x)$ si on connait $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormée de F, illustrer par un dessin et rappeler les liens entre $p_F^{\perp}$, $p_{F^\perp}^{\perp}$, $s_F^{\perp}$.
4. Montrer que si E est un espace préhilbertien et F un sev de E de dimension finie, $F \oplus F^{\perp} = E$. En déduire brièvement si E est de dimension finie la valeur de $\dim(F^{\perp})$ en fonction de $\dim(E)$ et $\dim(F)$.
5. Donner la définition de la distance à un ensemble et montrer que si F est un sev de E de dimension finie, $d(x, F) = ||x - p_F^{\perp}(x)||$. *Ne pas prouver l'unicité du vecteur en lequel la distance est atteinte.*
6. Donner la définition de la continuité uniforme et montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue et qu'une fonction uniformément continue est continue.
7. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ et non lipschitzienne et que $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et non uniformément continue.

Exercices à chercher pour lundi (indications au dos) : TD31 : 7,10,16 et bien sûr vous entrainer sur les différents problèmes (corrigés ET commentaires des précédentes années disponibles sur l'ent, allez les voir uniquement si vous avez cherché).

Exercices à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD31 : 7.
- 2ieme du groupe : TD31 : 10.
- 3ieme du groupe : TD31 : 16.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exercice 7

- Pour la première question, il suffit d'évaluer la relation de l'énoncé en $x = e_j$. Vous devriez alors trouver une somme de carrés nulle, donc chaque terme est nul...
- Pour la seconde question, la liberté est facile à justifier.
- Pour le côté générateur, justifiez que si $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors il existe y non nul orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ (le construire en utilisant le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, faire un dessin...).
- En déduire une absurdité en évaluant l'expression proposée en y.

Exercice 10

- Un vecteur normal au plan est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On pourra vérifier qu'il est unitaire.
- Il est alors direct d'écrire la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}^\perp$.
- On peut alors retrouver à la fois l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$ (faire un dessin).

Exercice 16 :

- Le fait que ce soit un produit scalaire est dans le cours. Nous avons également traité en exemple dans le cours le fait que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique (le refaire au propre quand même). Il reste par contre à rejustifier proprement que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
- Pour la distance, il faut calculer le projeté orthogonal de M soit sur $S_n(\mathbb{R})$, soit sur $A_n(\mathbb{R})$ et ensuite utiliser le fait que la distance est $||M - P^\perp_{S_n(\mathbb{R})}(M)|| = ||p^\perp_{A_n(\mathbb{R})}(M)||$. Pour trouver les projetés orthogonaux, il faut réussir à écrire $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique (on pourra raisonner par analyse/synthèse) et on a alors S qui est le projeté orthogonal de M sur $S_n(\mathbb{R})$ et A le projeté orthogonal de M sur $A_n(\mathbb{R})$.
- Pour la question 2, on pourra écrire H comme le noyau d'une forme linéaire non nulle, ce qui donne sa dimension assez rapidement.
- Pour la distance, vu que c'est un hyperplan, il faut trouver un vecteur normal à H, c'est à dire une matrice B telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow \langle A, B \rangle = 0$ (vous devriez trouver une matrice simple qui correspond). Pour le calcul de distance, il reste à utiliser le fait qu'elle vaut $\dfrac{|\langle J, B \rangle|}{||B||}$ (cf cours).