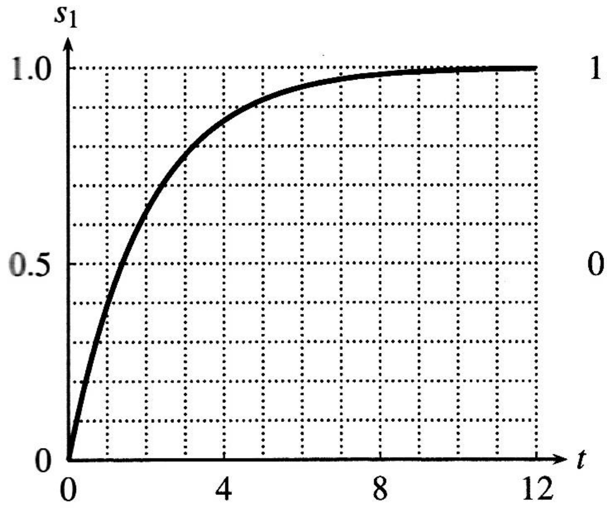
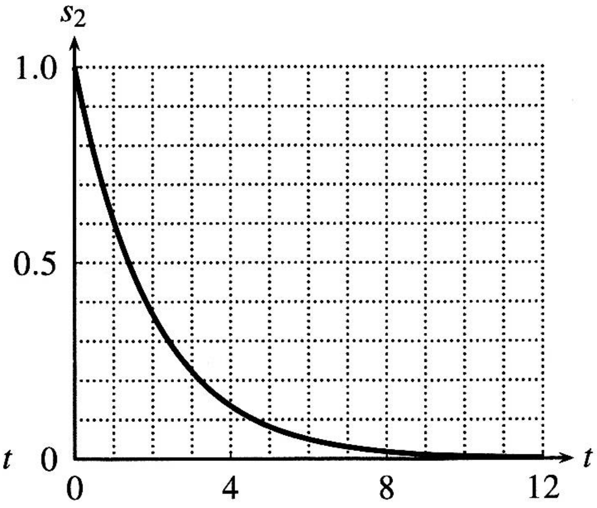
TRAVAUX DIRIGÉS OS5
Circuits linéaires du premier ordre

Niveau 1

Exercice 1. Constantes de temps

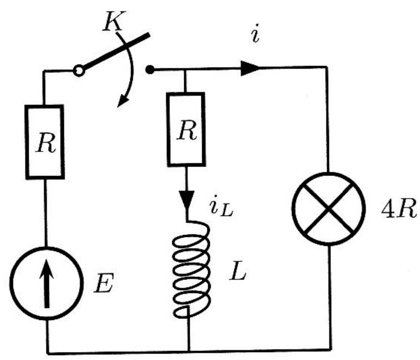
On soumet deux systèmes, 1 et 2, à une entrée en échelon. Les sorties sont représentées ci-dessous. Déterminer les constantes de temps de ces deux systèmes de trois façons différentes.





Exercice 2. Lampe témoin

On considère le montage ci-contre où l'on suppose la lampe équivalente électriquement à une résistance de valeur $4R$. Elle ne s'allume que si l'intensité du courant i qui la traverse vérifie $i > \dfrac{E}{8R}$.

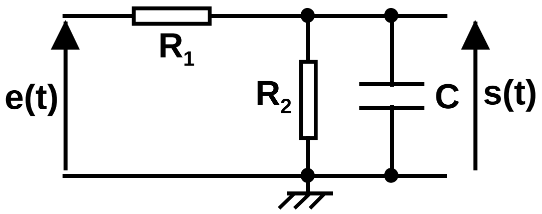


1. Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ dans les trois cas suivants :
   a. en $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur K ;
   b. lorsque le régime permanent est atteint ;
   c. juste après l'ouverture de K (l'ouverture a lieu une fois le régime permanent précédent atteint).
2. Quel peut être le rôle de cette lampe ?

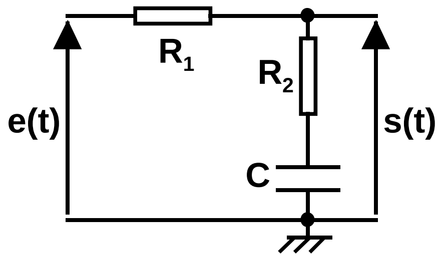
Niveau 2

*Exercice 3. Circuits du premier ordre

Pour les deux circuits suivants, la tension $e(t)$ est un échelon de hauteur E et le condensateur est initialement déchargé.



Circuit 1



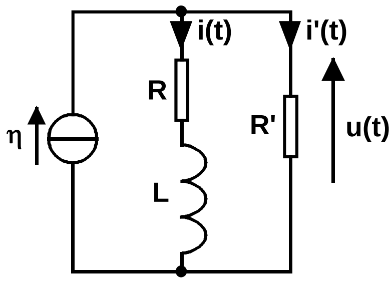
Circuit 2

On note s_0 la valeur de $s(t)$ à l'instant $t = 0^+$ et S_P la valeur de $s(t)$ en régime permanent.

Pour chacun des deux circuits, répondre aux questions suivantes.

1. En raisonnant sur le comportement des composants, déterminer les valeurs de s_0 et de S_P.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ à tout instant $t > 0$. La mettre sous forme normalisée et préciser l'expression de la constante de temps τ du circuit.
3. Déterminer l'expression de $s(t)$.

*Exercice 4. Branches en parallèle

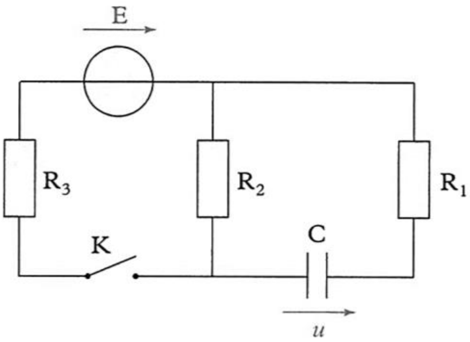


Le circuit que l'on considère est soumis à un échelon de courant délivré par un générateur idéal de courant tel que :

$$\begin{cases} \eta = 0 \text{ pour } t < 0 \\ \eta = I_0 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $i(0^+)$ et $i'(0^+)$.
2. Déterminer l'intensité instantanée $i(t)$ du courant qui traverse la bobine.
3. En déduire les expressions de l'intensité $i'(t)$ du courant dans la résistance R' et de la tension $u(t)$.
4. Tracer les courbes de réponse $i(t)$ et $u(t)$.

Exercice 5. Charge et décharge d'un condensateur



On considère le circuit suivant comportant les résistances R_1, R_2 et R_3, le condensateur de capacité C et le générateur de tension de fem E.

1. Initialement, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$. Pouvait-on prévoir la tension u_{max} aux bornes du condensateur ?
2. L'interrupteur K étant fermé depuis longtemps, on a alors $u = u_{\max}$. À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$.

SOLUTIONS

Exercice 1. Constantes de temps

$\tau = 2$ s

Exercice 2. Lampe témoin

1.a. $i\left(0^+\right) = \dfrac{E}{5R}$ b. $i(\infty) = I_P = \dfrac{E}{9R}$ c. $t = 0$: ouverture de K : $i\left(0^+\right) = -\dfrac{4E}{9R}$

*Exercice 3. Circuits du premier ordre

<u>Pour le circuit 1 :</u>

1. C est initialement déchargé et la tension à ses bornes ne subit pas de discontinuité, d'où $\boxed{s(0^-) = s(0^+) = 0 = s_0}$.

➢ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un <u>interrupteur ouvert</u> : R_1 et R_2 sont en série et on peut appliquer le DDT : $\boxed{S_P = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E}$

➢ ***<u>Rappel</u>*** : *En régime permanent, C est chargé sous une tension constante : le courant qui circule dans C est donc nul car* $i = C\dfrac{du}{dt}$*. Le condensateur est donc équivalent à un <u>interrupteur ouvert.</u>*

2. <u>Loi des mailles</u> : $E = R_1 i(t) + s(t)$, $i(t)$ circulant dans R_1 de E vers $s(t)$.

➢ <u>Loi des nœuds et lois d'Ohm</u> : $i(t) = i_2(t) + i_C(t) = \dfrac{s(t)}{R_2} + C\dfrac{ds(t)}{dt}$

$$E = R_1\left(\frac{s(t)}{R_2} + C\frac{ds(t)}{dt}\right) + s(t) = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)s(t) + R_1 C\frac{ds(t)}{dt}$$

➢ <u>Forme normalisée de l'équation différentielle</u> : $\boxed{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E}$

➢ <u>Constante de temps du circuit</u> : $\boxed{\tau = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$

3. Résolution de l'équation différentielle en 5 étapes

① <u>Solution de l'essm</u> : $s(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

② <u>Solution particulière</u> : $s(t) = cste = S_P = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$

③ <u>Solution complète</u> : $s(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$

④ <u>Condition initiale</u> : $s(0^+) = 0 = s_0$ et $s(0) = K + \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$ d'où $K = -\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$

⑤ <u>Solution finale</u> : $\boxed{s(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

<u>Pour le circuit 2 :</u>

1. C est initialement déchargé et la tension à ses bornes ne subit pas de discontinuité, d'où $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$: C est équivalent à un <u>interrupteur fermé</u>.

   R_1 et R_2 sont en série et on peut appliquer le DDT : $\boxed{s(0^+) = s_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E}$

- En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : il n'y a pas de courant donc la tension aux bornes de R_1 est nulle et $\boxed{S_P = E}$

2. Loi des mailles : $E = R_1 i(t) + s(t) \Leftrightarrow i(t) = \dfrac{E - s(t)}{R_1}$, $i(t)$ circulant dans R_1 de E vers $s(t)$

- Loi des mailles : $s(t) = R_2 i(t) + u_C(t)$.

On **dérive** cette relation : $\dfrac{ds(t)}{dt} = R_2 \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{du_C(t)}{dt} = R_2 \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C} i(t)$.

On remplace $i(t)$ par son expression :

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{R_2}{R_1}\frac{d\left(E - s(t)\right)}{dt} + \frac{1}{R_1 C}\left(E - s(t)\right) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C}\left(E - s(t)\right)$$

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C} s(t) = \frac{1}{R_1 C} E$$

- Forme normalisée de l'équation différentielle : $\boxed{\left(R_1 + R_2\right) C \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = E}$

- Constante de temps du circuit : $\boxed{\tau = \left(R_1 + R_2\right) C}$

3. Résolution de l'équation différentielle en 5 étapes

① Solution de l'essm : $s(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

② Solution particulière : $s(t) = cste = S_P = E$

③ Solution complète : $s(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + E$

④ Condition initiale : $s(0^+) = s_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$ et $s(0) = K + E$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - E = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

⑤ Solution finale : $\boxed{s(t) = E\left(1 - \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

*Exercice 4. Branches en parallèle

1. Pour $t < 0$, le circuit est en régime libre d'où $i\left(0^-\right) = 0$. Du fait de la continuité du courant dans l'inductance, on a $\boxed{i\left(0^+\right) = i\left(0^-\right) = 0}$.

- Loi des nœuds : $\boxed{i'\left(0^+\right) = I_0}$

2. Loi des nœuds pour $t > 0$: $I_0 = i(t) + i'(t)$

- Loi des mailles et lois d'Ohm pour $t > 0$: $i'(t) = \dfrac{u(t)}{R'}$ et $u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$

D'où $I_0 = i(t) + \dfrac{R}{R'} i(t) + \dfrac{L}{R'} \dfrac{di(t)}{dt}$ soit $R' I_0 = (R+R') i + L \dfrac{di}{dt}$

➢ Équation différentielle vérifiée par $i(t)$ sous <u>forme canonique</u> (équation du 1er ordre) :

$$\boxed{\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{R'}{R+R'} I_0 \text{ avec } \tau = \frac{L}{R+R'}}$$

➢ Résolution de l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $i(t)$:

① <u>Solution de l'essm</u> : $i(t) = K \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

② <u>Solution particulière</u> : $i(t) = cste = \dfrac{R'}{R+R'} I_0$

③ <u>Solution complète</u> : $i(t) = K \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{R'}{R+R'} I_0$

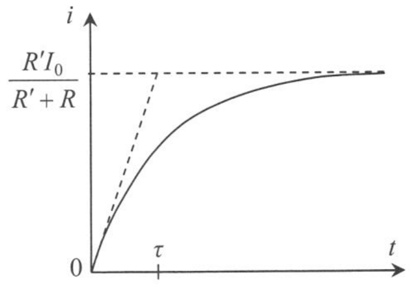
④ <u>Condition initiale</u> : $i(0^+) = 0$ et $i(0) = K + \dfrac{R'}{R+R'} I_0$ donc $K = -\dfrac{R'}{R+R'} I_0$

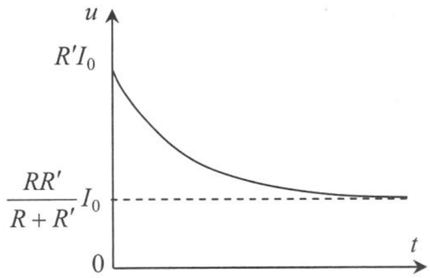
⑤ <u>Solution finale</u> : $\boxed{i(t) = \dfrac{R'}{R+R'} I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

3. <u>Loi des nœuds</u> : $i'(t) = I_0 - i(t)$ soit $\boxed{i'(t) = \dfrac{I_0}{R+R'} \left(R + R' e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

➢ <u>Loi d'Ohm</u> : $u(t) = R' i'(t)$ d'où $\boxed{u(t) = \dfrac{R' I_0}{R+R'} \left(R + R' e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

4. L'allure des courbes est donnée ci-dessous. On détermine les valeurs en régime permanent ($t \to +\infty$ et $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$) : $I_P = \dfrac{R'}{R+R'} I_0$ et $U_P = \dfrac{RR' I_0}{R+R'}$. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine passe par (0, *VI*) et (τ, *VF*), car c'est un circuit du 1er ordre.





Exercice 5. Charge et décharge d'un condensateur

1. $\tau \dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{R_2}{R_2+R_3} E$ avec $\tau = \dfrac{R_2R_3 + R_2R_1 + R_1R_3}{R_2+R_3} C$: $u = u_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $u_{\max} = \dfrac{R_2}{R_2+R_3} E$ 2. $\tau' \dfrac{du}{dt} + u = 0$ avec $\tau' = (R_1+R_2) C$: $u = u_{\max} e^{-\frac{t}{\tau'}}$