11. Suites, corrigé

Exercice 1. Soit $C > 0$. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété supposée appliquée en $C\varepsilon > 0$, on a qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq C\varepsilon$. On a donc montré la propriété voulue.

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. On applique la propriété supposée en $\frac{\varepsilon}{C} > 0$. Il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq C \times \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$. On a donc montré la propriété voulue.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang (disons n_0), alors il est direct (en écrivant la définition de la limite) qu'elle converge vers n_0. Supposons donc à présent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Á l'aide d'un dessin, on voit que la suite étant à valeurs entières, si on prend ε assez petit, alors les termes de la suite ne peuvent pas sauter d'une valeur entière à une autre. Formalisons ceci.

Appliquons la définition de la convergence en $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$. Il existe donc un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \frac{1}{3}$. On en déduit alors, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que :

$$\begin{array}{rcl} |u_n - u_{n_0}| & = & |u_n - l + (l - u_{n_0})| \\ & \leq & |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \\ & \leq & \frac{2}{3}. \end{array}$$

Or, puisque u_n et u_{n_0} sont entiers et à distance l'un de l'autre inférieure ou égale à $\frac{2}{3}$, on en déduit que $u_n = u_{n_0}$. On a donc montré que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$. La suite est donc stationnaire. On en déduit en même temps que $l = u_{n_0}$, ce qui entraine que $l \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{1}{k}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $0 \leq \frac{1}{k} \leq \varepsilon$. On a donc en particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k = K$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{K}{n} + \varepsilon.$$

Puisque $\frac{K}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \frac{K}{n} \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \leq 2\varepsilon.$$

Si on reprend les définitions des limites et que l'on applique les propriéts en $\varepsilon/2 > 0$ au lieu de ε, on obtient exactement la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 0.

On peut aussi appliquer la propriété en $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. On obtient alors que pour $n \geq 1$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} + \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}.$$

Puisque $\sqrt{n} - 1 < \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 0$ et on a aussi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = 0$ et donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4. Pour $n > 0$, on a $u_n = \frac{1}{n} \times (nu_n)$. Par produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite qui tend vers 1, on en déduit que (u_n) tend vers 0.

La suite (u_n) n'a aucune raison d'etre décroissante à partir d'un certain rang. Considérons la suite u_n définie par :

pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{n^2}$ si n est impair et $u_n = \frac{1}{(n+2)^2}$ si n est pair. La suite (u_n) n'est alors pas décroissante (ni croissante) Ã partir d'un certain rang (puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(2n+2)^2} = u_{2n} < u_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$ et est bien strictement positive et on a bien

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce qui prouve bien par théorème d'encadrement que la suite tend vers 0.

Exercice 5.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) \\ &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Supposons par l'absurde que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas majorée par 0. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_N > 0$. Puisque (v_n) est croissante, on en déduit que pour tout $n \geq N$, $v_n \geq v_N$, ce qui entraine $u_{n+1} - u_n \geq v_N > 0$.

Ceci entraine que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang et elle admet donc une limite en $+\infty$. Puisque la suite est bornée, c'est une limite finie $l \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} - u_n = v_N$, on obtient $l - l = v_N$ et donc $0 = v_N$: absurde !

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 0.

Une autre manière de faire est de sommer la relation $u_{n+1} - u_n \geq v_N$ pour n allant de N à k avec $k \geq N$. On a alors par somme télescopique :

$$\sum_{n=N}^{k} (u_{n+1} - u_n) \geq \sum_{n=N}^{k} v_N \Leftrightarrow u_{k+1} - u_N \geq (k - N + 1) v_N.$$

Puisque $v_N > 0$, on a que $\lim\limits_{k \to +\infty} (k - N + 1) v_N = +\infty$ ce qui implique $\lim\limits_{k \to +\infty} u_{k+1} = +\infty$ par comparaison, ce qui est absurde car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2) La suite (v_n) est croissante et majorée par 0. Elle converge donc vers une limite $l \leq 0$. Supposons par l'absurde que $l \neq 0$. On a alors $l < 0$ et donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est toujours négative (car inférieure à sa limite car elle est croissante). On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$, soit que (u_n) est décroissante.

Puisque (u_n) est minorée (car bornée), on en déduit qu'elle converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'égalité $v_n = u_{n+1} - u_n$, on obtient alors $l = L - L$, soit $l = 0$: absurde !

On en déduit finalement que (v_n) converge vers 0.

Exercice 6. Soient u_n et v_n deux suites réelles telles que $0 \leq u_n \leq 1$, $0 \leq v_n \leq 1$ et que $u_n v_n \to 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant l'encadrement $0 \leq u_n \leq 1$ par v_n (qui est positif, ce qui ne change pas le sens des inégalités), on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n v_n \leq v_n.$$

Or, par hypothèse, on a aussi $v_n \leq 1$. On a donc $u_n v_n \leq v_n \leq 1$, ce qui entraine, en utilisant le théorème des gendarmes, que $v_n \to 1$. De même, en multipliant l'encadrement $0 \leq v_n \leq 1$ par u_n (qui est positive), on trouve que $u_n v_n \leq u_n$ et $u_n \leq 1$ par hypothèse. On en déduit encore par théorème des gendarmes que $u_n \to 1$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $(-1)^n u_n$ soit également convergente. Notons l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l' celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En considérant les termes pairs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve que pour $n \geq 0$, $v_{2n} = u_{2n}$. On en déduit, puisqu'une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite que $l' = l$. De plus, en considérant les termes impairs, on a que pour tout $n \geq 0$, $v_{2n+1} = -u_{2n+1}$. On a donc $l' = -l$.

On en déduit que $l = 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée. En traduisant ceci avec des quantificateurs, cela signifie que $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ u_n > M$ (on notera cette propriété $(*)$). On va alors construire une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$.

En appliquant la propriété $(*)$ en $M = 0$, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 0$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$.

Supposons construite φ jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, telle que $\forall k \in [\![0, n]\!] u_{\varphi(k)} > k$ et telle que $\varphi(n) > \varphi(n-1) > \ldots > \varphi(0)$. Appliquons alors la propriété $(*)$ en $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{\varphi(n)}, n+1)$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m > M$.

Par construction, cet entier m est strictement plus grand que $\varphi(n)$ (sinon on aurait $u_m \leq M$ ce qui est absurde). Posons donc $\varphi(n+1) = m$. On a alors bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} > n+1$. On a donc construit φ au rang $n+1$.

On a donc construit par récurrence une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$. Par minoration par une suite qui tend vers $+\infty$, on en déduit que $u_{\varphi(n)}$ diverge vers $+\infty$. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 9. Notons $L_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$, $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ et $L_3 = \lim\limits_{n\to+\infty}$. Si on considère la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$, alors cette suite est une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (car $6n = 2 \times (3n)$) donc elle converge vers L_1. C'est également une suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ car $6n = 3 \times (2n)$ donc elle converge vers L_3. On a donc $L_1 = L_3$.

De la meme manière, on a $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ (car $6n+3 = (3(2n+1)) = 2(3n+1)+1$). On a donc $L_2 = L_3$. Par transitivité, on a $L_1 = L_2$, ce qui entraine d'après le théorème des indices pairs et impairs que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune.

Exercice 10. Si une suite est constante, il est clair qu'elle est périodique. Considérons une suite périodique convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $T \in \mathbb{N}^*$ une de ses périodes (on a donc pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n$).

Supposons par l'absurde que cette suite ne soit pas constante. On a donc $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ distincts tels que $u_{N_1} \neq u_{N_2}$. Considérons alors les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{N_1+nT}$ et $w_n = u_{N_2+nT}$. Ces deux suites sont constantes égales à u_{N_1} et u_{N_2} (puisque la suite est périodique) et elles convergent donc chacune vers deux limites distinctes. Ceci contredit le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (sinon toutes ses sous suites devraient converger vers la même limite).

Exercice 11. Définissons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. On pose pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{cases} x_{2n} = 0 & \text{et } y_{2n} = 2n \\ x_{2n+1} = 2n+1 & \text{et } y_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent alors toutes les deux une sous-suite convergente (il suffit de considérer pour l'une la suite des termes pairs et pour l'autre la suite des termes impairs). Si on pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ z_n = x_n + iy_n$, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = n$. On a alors que pour toute suite extraite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette suite vérifie $|z_{\varphi(n)}| = \varphi(n)$ et donc $|z_{\varphi(n)}| \to +\infty$. Aucune suite extraite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger (sinon son module convergerait aussi). On en déduit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente.

Exercice 12. Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u_n = a_n - b_n$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \frac{2a_n + b_n}{3} - \frac{a_n + 2b_n}{3} \\ &= \frac{a_n - b_n}{3} \\ &= \frac{u_n}{3}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $a_0 - b_0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a_0 - b_0}{3^n}$. On en déduit que $u_n \to 0$. On remarque aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours du signe de $a_0 - b_0$ et garde donc un signe constant.

Étudions à présent $a_{n+1} - a_n$ et $b_{n+1} - b_n$ afin de voir laquelle de ces deux suites est croissante et laquelle des deux est décroissante. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = -\dfrac{u_n}{3} \\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{u_n}{3} \end{cases}$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant, on en déduit que $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{n+1}-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gardent également un signe constant et qu'elles sont de signe contraire. On a donc bien que l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante (et que ceci dépend du signe de $a_0 - b_0$).

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite l.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$. On en déduit que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $a_0 + b_0$. En passant à la limite, puisque $a_n \to l$ et que $b_n \to l$ et que la limite est unique, on a que $2l = a_0 + b_0$. On en déduit que $l = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 13. On commence par étudier la monotonie de (a_n). Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} \\
&= \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= a_n + \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que la suite (a_n) est croissante. Montrons à présent que (b_n) est décroissante. Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= b_n + \frac{-(2n+1)(2n+2) + n(2n+2) + n(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)} \\
&= b_n + \frac{-4n-2}{n(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que (b_n) est décroissante. Il ne reste plus qu'à montrer que la différence tend vers 0. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
b_n - a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= -\frac{1}{2n}.
\end{aligned}
$$

La différence tend donc vers 0. On a donc une suite croissante, l'autre décroissante et la différence qui tend vers 0. Les deux suites sont adjacentes.

Exercice 14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $\begin{cases} u_0 = 1, & \dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} \\ v_0 = 2, & v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$. Montrons qu'elles sont rationnelles, adjacentes et que leur limite commune est $\sqrt{2}$.

Il est tout d'abord clair que ces deux suites sont bien définies et rationnelles. En effet, u_0 et v_0 sont rationnels et strictement positifs. Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, u_n et v_n soient positifs et rationnels. Puisque v_{n+1} est la moyenne de u_n et v_n, alors, v_{n+1} est également strictement positif et rationnel. De même, $\frac{1}{u_n}$ et $\frac{1}{v_n}$ sont aussi rationnels et strictement positifs. On en déduit que $\frac{1}{u_{n+1}}$ est rationnel et strictement positif. u_{n+1} est donc aussi rationnel et strictement positif. Les deux suites sont donc rationnelles et bien définies.

On peut alors vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$. Ceci est vrai pour $n = 0$. On a de plus pour

$n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

En utilisant cette comparaion entre les deux suites, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n - v_n}{2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n \\ &= \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0. Ces deux suites sont donc convergentes et on peut noter l_1 et l_2 leurs limites respectives. En faisant tendre n vers l'infini dans la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on en déduit que $l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}$ ce qui implique que $l_1 = l_2$. Les deux suites convergent donc vers la même limite. En particulier, elles sont donc adjacentes.

Montrons à présent que cette limite commune vaut $\sqrt{2}$. Pour cela, en étudiant la relation de récurrence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \\ &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n v_n}{v_{n+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$. La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $u_0 v_0 = 2$. En passant à la limite dans la relation $u_n v_n = 2$, on en déduit que $l^2 = 2$, ce qui implique (la limite des suites étant positives) que $l = \sqrt{2}$.

Exercice 15. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ n, p \geq N \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition de la convergence en $\frac{\varepsilon}{2}$, on trouve qu'il existe une constante N tel que pour tout $n, p \geq N$, $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_p - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que pour tout $n, p \geq N$:

$$\begin{aligned} |u_n - u_p| &= |u_n - l + l - u_p| \\ &\leq |u_n - l| + |l - u_p| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une suite réelle convergente est de Cauchy.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. En appliquant alors la définition en $\varepsilon = 1$, on a qu'il existe une constante N tel que pour tout $n \geq N$ (on prend $p = N$), $|u_n - u_N| \leq 1$. On en déduit que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq 1 + |u_N|$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée à partir du rang N. Elle est donc bornée par $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_N|, |u_N| + 1)$. Une suite de Cauchy est donc bornée.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. D'après la question précédente, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet donc au moins une valeur d'adhérence. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $u_{\varphi(n)} \to \lambda$. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_1 associé à la définition des suites de Cauchy, appliquée en $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et N_2 associé à la convergence de la suite $(u_{\varphi(n)})$. On en déduit que pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\begin{array}{rcl} |u_n - \lambda| & = & |u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \lambda| \\ & \leq & |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \lambda| \\ & \leq & \varepsilon. \end{array}$$

La dernière inégalité est bien justifiée car on a $\varphi(n) \geq n \geq N_1$. On peut donc bien appliquer la définition d'une suite de Cauchy en $p = \varphi(n)$. On a montré ici que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers λ.

Autrement dit, dans $\mathbb{R}$, on a équivalence entre être une suite convergente et être une suite de Cauchy.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence λ. Montrons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.

Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers λ. Il existe donc ε_0 tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - \lambda| \geq \varepsilon_0$. On peut alors construire une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \lambda| \geq \varepsilon_0$. En effet, en appliquant la propriété précédente en $N = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0} - \lambda| \geq \varepsilon_0$. On pose $\varphi(0) = n_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la fonction φ construite jusqu'à l'entier n (strictement croissante vérifiant la propriété voulue). En appliquant la propriété précédente en $N = \varphi(n)+1$, on a qu'il existe $m \geq \varphi(n)+1$ tel que $|u_m - \lambda| \geq \varepsilon_0$. On pose alors $\varphi(n+1) = m$. On a alors bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

On a donc construit une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \lambda| \geq \varepsilon_0$. Or, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cette sous-suite l'est également. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet donc une sous-suite convergente. Or, cette sous-suite est également une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on a extrait deux fois). Par hypothèse, elle converge donc vers la même limite que les autres sous-suites convergentes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire vers λ. Ceci est absurde car cette sous suite vérifie également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\psi(n)} - \lambda| \geq \varepsilon_0$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on trouve que $0 \geq \varepsilon_0$ ce qui est absurde !

On a donc montré par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente.

Exercice 17. Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\dfrac{p_n}{q_n}$ une suite de rationnels tendant vers α. On suppose $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que (q_n) ne diverge pas vers $+\infty$. Ceci signifie que l'on peut extraire de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite bornée (on la construit par récurrence, de la même manière que dans les exercices précédents). D'après le théorème de Bolzano-Weiestrass, on peut donc extraire de cette sous-suite une suite convergente. De plus, puisqu'il s'agit d'une suite d'entiers qui converge, elle est stationnaire à partir d'un certain et converge vers une limite entière.

On a donc montré qu'il existait une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $q_{\psi(n)} \to a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α, on en déduit qu'en considérant l'extraction ψ, la suite $\left(\dfrac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. Par composition de limite, on en déduit que $p_{\psi(n)} \to a\alpha$. Or, $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers qui converge. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang et converge donc vers un entier. On en déduit que $a\alpha \in \mathbb{Z}$, ce qui implique, puisque $a \in \mathbb{N}^*$ que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ceci est absurde !

On en déduit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 18.

1) *Ordre 1.*

a) Le point fixe est ω tel que $\omega = 3\omega - 2$ donc $\omega = 1$. On en déduit que $(u_n - 1)$ est géométrique de raison 3. On a alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 1 = 3^n(u_0 - 1),$$

ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

b) Le point fixe vérifie $\omega = \dfrac{\omega}{2} + 3$, soit $\omega = 6$. La suite $(u_n - 6)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, ce qui entraine :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u_n - 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(u_1 - 6),$$

ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\dfrac{3}{2^{n-1}} + 6$.

2) *Ordre 2.*

a) déjà fait en cours, c'est la suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est $X^2 - X - 1 = 0$. Les racines sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les suites solutions sont donc de la forme (avec λ et μ à déterminer) :

$$u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On détermine λ et μ à l'aide des conditions initiales en évaluant en $n = 0$ et $n = 1$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

b) $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. L'équation caractéristique est $X^2 - X + 1 = 0$. On a $\Delta = -3$. On en déduit que les racines du polynômes caractéristiques sont $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$. Ceci entraine qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = ax_1^n + bx_2^n.$$

Avec les conditions initiales, on trouve que $a + b = 0$ et $ax_1 + bx_2 = 1$. On a alors $b = -a$ et $a(x_1 - x_2) = 1$ d'où :

$$a \times (-\sqrt{3}i) = 1.$$

On en déduit que $a = \dfrac{i}{\sqrt{3}}$ et $b = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}$. On en déduit finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n - \frac{i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n.$$

On peut en déduire une expression réelle de (u_n) en exprimant les racines sous la forme $\rho e^{i\theta}$. Le module est ici égal à 1 et l'argument égal à $\pm\frac{\pi}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^n - \frac{i}{\sqrt{3}}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left(e^{-\frac{in\pi}{3}} - e^{\frac{in\pi}{3}}\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}} \times \left(-2i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

c) L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = 0$. On a 2 qui est racine double. Les solutions sont donc de la forme $u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Avec les conditions initiales, on veut $3 = 2\lambda + 2\mu$ et $8 = 4\lambda + 12\mu$. On obtient alors $2 = 8\mu$ donc $\mu = \frac{1}{4}$ et $\lambda = \frac{5}{4}$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{5}{4}2^n + \frac{1}{4}n2^n.$$

Exercice 19. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On pose $u_0 = 2$, $u_1 = 1 + k$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \left(k^2 - \frac{1}{4}\right)u_n$.

L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $X^2 - X - \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$. Son discriminant vaut $4k^2$.

Si $k = 0$, alors l'équation caractérisque admet $\frac{1}{2}$ comme racine double. On en déduit qu'il existe des constantes λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + n\mu)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On en déduit, avec les conditions initiales, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cette suite converge alors vers 0.

Si $k \neq 0$, on en déduit que les racines de cette équation sont $x_1 = \frac{1+2k}{2}$ et $x_2 = \frac{1-2k}{2}$. Si $k \neq 0$, on a deux racines distinctes. Il existe donc des réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda(x_1)^n + \mu(x_2)^n.$$

Utilisons à présent les conditions initiales pour déterminer λ et μ. On trouve que :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 &= 1 + k \end{cases}$$

On en déduit que $\begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda(1+2k) + \mu(1-2k) &= 2 + 2k \end{cases}$. On a donc que $\begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda - \mu &= 1 \end{cases}$. On en déduit que $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$.

On en déduit que si $k \neq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1+2k}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1-2k}{2}\right)^n.$$

On peut alors déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $1+2k > 1-2k$, on a l'impression que le premier terme va l'emporter sur le second. En effet, on a :

$$u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1+2k}{2}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1-2k}{1+2k}\right)^n\right).$$

On a alors puisque $1+2k>0$, $-1 < \dfrac{1-2k}{1+2k} < 1 \Leftrightarrow -1-2k < 1-2k < 1+2k$. L'inégalité de gauche est vraie puisqu'elle est équivalente à $-1<1$. Celle de droite est également vraie car elle est équivalente à $0<4k$. On a donc par limite de suite géométrique :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-2k}{1+2k}\right)^n = 0.$$

On en déduit que $u_n \sim \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1+2k}{2}\right)^n$. Ceci entraine que si $0 \leq \dfrac{1+2k}{2} < 1$ (c'est à dire si $0<k<\dfrac{1}{2}$) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si $k=\dfrac{1}{2}$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$ et si $k>\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1,\ u_1=2$ et pour $n\geq 0$, $u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}u_n}$. Elle est bien définie. En effet, on peut montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$. On a donc toujours le droit de prendre la racine carrée.

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\ln(u_n)$. Cette suite vérifie alors :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \text{ et } v_1 = \ln(2) \\ v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2},\ n\geq 0 \end{cases}$$

On donc trouver une expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'équation caractéristique associée à cette suite est $X^2-\dfrac{X}{2}-\dfrac{1}{2}=0$. Ses racines sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$. On en déduit qu'il existe des constantes réelles λ et μ telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\lambda+\mu\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. On trouve la valeur des constantes à l'aide des conditions initiales. On trouve alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{2\ln(2)}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

On trouve alors l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant l'exponentielle de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut alors montrer que $v_n \to \dfrac{2\ln(2)}{3}$, ce qui implique par composition (la fonction exponentielle étant continue) que $u_n \to 2^{2/3}$.

Exercice 21.

1) Soit $f(x)=\ln(1+x)$. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ce qui nous donne que $\mathbb{R}_+$ est stable par f). La suite $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $u_0\in\mathbb{R}_+$ est donc bien définie. Il faut à présent pour trouver le comportement de la suite chercher les points fixes de f et le signe de $x\mapsto f(x)-x$. Posons $g(x)=f(x)-x$ pour $x\in\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x}-1 \\ &= \frac{-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Ceci entraine que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (car la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle en un seul point). Puisque $g(0)=0$, on en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}_+$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que 0 est le seul point fixe de f et que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)-x\leq 0$.

L'inégalité précédente nous donne alors que $f(u_0) - u_0 \leq 0$, ce qui entraine que $u_1 \leq u_0$. Par croissance de f, on montre alors par récurrence que la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 (car la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). On en déduit qu'elle est convergente. Elle converge d'après le cours vers un point fixe de f (puisque f est continue). Or, le seul point fixe de f est 0. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

2) On a cette fois $f(x) = \arctan(x)$, qui est croissante sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = f(x) - x$ (dérivable comme somme de fonctions dérivables). On trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (car la dérivée est négative et s'annule en un seul point). Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que g est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle ne s'annule qu'en 0.

Ceci entraine en particulier que l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$ est 0. Puisque f est continue, on en déduit que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers 0 (cf cours).

Puisque $g(u_0) = f(u_0) - u_0 = u_1 - u_0$, l'étude précédente montre que si $u_0 \in \mathbb{R}_+$, alors $u_1 \leq u_0$. Par croissance de f, on a alors $f(u_1) \leq f(u_0)$ soit $u_2 \leq u_1$. On montre alors par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or, elle est minorée par 0 (puisque $\forall x \geq 0,\ \arctan(x) \geq 0$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$ par récurrence). Elle est donc convergente. La seule limite possible étant 0, elle est convergente vers 0.

De la même façon, si $u_0 \leq 0$, on a $u_1 \geq u_0$, on montre alors par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0. Elle est donc convergente et tend vers 0 (seul point fixe de f).

Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3) f est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \geq 0,\ f(x) \geq 0$ donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f. On étudie alors le signe de $f(x) - x$. Pour $x \geq 0$:

$$f(x) - x = x^3 - \frac{x}{4} = x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

On a donc deux points fixes sur $\mathbb{R}_+$: 0 et $\dfrac{1}{2}$. On obtient ici que $f(x) - x$ est négative sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. On procède alors par récurrence.

Si $u_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$ et donc la suite est constante et tend vers 0. De même si $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

Si $u_0 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, alors, on a $f(u_0) - u_0 \leq 0$ donc $u_1 \leq u_0$. Par récurrence, si on fixe $n \in \mathbb{N}$ et que l'on suppose $u_{n+1} \leq u_n$, alors $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. On en déduit par récurrence que la suite (u_n) est décroissante. Puisque $\mathbb{R}_+$ est stable par f, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$. La suite est décroissante et minorée donc elle converge. Puisque f est continue, elle converge vers un point fixe de f (car f est continue) et le seul point fixe de f dans $\mathbb{R}_+$ et strictement inférieur à $\dfrac{1}{2}$ est 0. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Si $u_0 > \dfrac{1}{2}$, alors on a cette fois $f(u_0) - u_0 \geq 0$ donc $u_1 \geq u_0$. On montre alors par récurrence que (u_n) est croissante. Elle admet donc une limite en $+\infty$. Or, puisque f n'a aucun point fixe strictement plus grand que $\dfrac{1}{2}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 > \dfrac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (en effet, si (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f car f est continue).

4) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, croissante et $\mathbb{R}_+$ est stable par f. La suite (u_n) est donc bien définie et si elle converge, c'est vers un point fixe de f (car f est continue).

Pour $x \geq 0$, $f(x) - x = \sqrt{x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}(2 - \sqrt{x})$. On en déduit que les points fixes de f sont 0 et 4 et que pour $x \in [0, 4]$, $f(x) \geq x$ et pour $x \geq 4$, $f(x) \leq x$.

On procède alors par récurrence. Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 4$, alors par récurrence directe, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ (ou $u_n = 4$). Supposons à présent $u_0 \in]0, 4[$. On a alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ (car $f(u_0) \geq u_0$ donc $u_1 \geq u_0$) et on applique f dans l'hypothèse $u_{n+1} \geq u_n$). On a donc (u_n) croissante. On montre de même par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$ (l'hypothèse est vraie au rang 0 et si $u_n \leq 4$, par croissance de f, $f(u_n) \leq f(4)$ donc $u_{n+1} \leq 4$). On en déduit que (u_n) est croissante majorée donc elle converge. Puisqu'elle converge vers un point fixe de f et qu'elle est croissante avec $u_0 > 0$, on en déduit qu'elle converge vers 4.

On procède exactement de même si $u_0 > 4$. D'après le signe de $f(x) - x$, on montre tout d'abord que (u_n) est décroissante puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 \leq u_n$. On en déduit que (u_n) converge et puisque f n'a qu'un seul point fixe supérieur ou égal à 4, on en déduit que (u_n) converge vers 4.