10. Nombres réels, méthodologie

I. Borne supérieure

I.1. Majorant et maximum

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est majoré si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A,\ x \leq M$. M est un majorant de A.

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que A admet M comme maximum si $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ majore } A \\ M \in A \end{array} \right.$.
Si A admet un maximum, alors ce dernier est unique et est noté $\max(A)$.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est minoré si $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A,\ m \leq x$. m est un minorant de A.

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que A admet m comme minimum si $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ minore } A \\ m \in A \end{array} \right.$.
Si A admet un minimum, alors ce dernier est unique et est noté $\min(A)$.

I.2. Borne supérieure

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est la borne supérieure de A si M majore A et que c'est le plus petit majorant de A. Si A admet une borne supérieure, alors cette dernière est unique et est notée $\sup(A)$.

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$.
- Si A admet un maximum, alors il admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
- Si A admet une borne supérieure :
  — si $\sup(A) \notin A$, alors A n'admet pas de maximum.
  — si $\sup(A) \in A$, alors A admet un maximum et $\max(A) = \sup(A)$.

$\boxed{\text{m}}$ Pour montrer que M est la borne supérieure d'un ensemble A, il est utile de tester d'abord si A n'admet pas un maximum ! C'est en général plus facile à montrer. Si ce n'est pas le cas, il faut montrer que M est le plus petit des majorants de A, c'est à dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A,\ a \leq M \\ \forall M' \in \mathbb{R} \ / \ M' \text{ majore } A,\ M \leq M' \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{m}}$ Quand on étudie un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$, on a directement que $b = \max(A) = \sup(A)$. Quand on a un intervalle de la forme $[a, b[$, on a $b = \sup(A)$ et cet intervalle n'a pas de maximum.

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est la borne inférieure de A si m minore A et que c'est le plus grand minorant de A. Si A admet une borne inférieure, alors cette dernière est unique et est notée $\inf(A)$.

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$.
- Si A admet un minimum, alors il admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.
- Si A admet une borne inférieure :
  - si $\inf(A) \notin A$, alors A n'admet pas de minimum.
  - si $\inf(A) \in A$, alors A admet un minimum et $\min(A) = \inf(A)$.

(m) Les méthodes précédentes sont également valables pour les bornes inférieures ! On commence par tester si on a un minimum et sinon pour montrer que m est la borne inférieure d'un ensemble A, il faut montrer que :

$$\begin{cases} \forall a \in A, \ m \leq a \\ \forall m' \in \mathbb{R} \ / \ m' \text{ minore } A, \ m' \leq m \end{cases}$$

Exercice d'application 1. Les ensembles suivants admettent-ils un minimum/maximum/borne inférieure/borne supérieure ?

1) $A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ n^2 < 5\}$.

2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 5\}$.

3) $A_3 = \left\{x^2, \ x \in \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[\right\}$.

I.3. Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Théorème. Soit $A \subset \mathbb{R}$.
- Si A est non vide et majoré, alors A admet une borne supérieure.
- Si A est non vide et minoré, alors A admet une borne inférieure.

(m) Ce théorème permet de démontrer facilement l'existence d'une borne inférieure/supérieure mais ne permet pas de les déterminer ! Au contraire, si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ n'est pas majoré (respectivement minoré), alors il n'admet pas de borne supérieure (respectivement inférieure) puisqu'il n'admet pas de plus petit majorant (respectivement plus grand minorant) dans $\mathbb{R}$.

(m) Pour déterminer les bornes inférieures/supérieures d'un ensemble caractérisé par une fonction (par exemple $\{f(x), \ x \in D\}$, on étudie en général les variations de la fonction et on s'aide du tableau de variations pour les déterminer.

Exercice d'application 2.

1) Étudier la fonction $x \mapsto x^2 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) L'ensemble $A = \{x^2 - \ln(x), \ x \in \mathbb{R}_+^*\}$ admet-il une borne inférieure/supérieure/un minimum/maximum ? Les déterminer s'ils existent.

3) En reprenant la méthode précédente, déterminer si les ensembles $B = \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \ x \geq 1\right\}$ et $C = \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \ x > 1\right\}$ admettent des bornes inférieures/supérieures/des minima/maxima.

I.4. Caractérisation epsilonesque de la borne supérieure

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \text{ majore } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ / \ M - \varepsilon < a \end{array} \right.$$

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Alors :

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \text{ minore } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ / \ a < m + \varepsilon \end{array} \right.$$

(m) Cette caractérisation nous permet de construire des éléments de A aussi proches que l'on veut de $\sup(A)$ (c'est à dire des éléments qui sont compris entre $\sup(A) - \varepsilon$ et $\sup(A)$, où ε est fixé aussi petit que l'on veut).

I.5. Exemples

Exercice d'application 3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ où $A \neq \emptyset$ et A est majorée. On a donc $\sup(A)$ qui existe. Soit $x \in A$ tel que $x < \sup(A)$.

1) Démontrer que $A \setminus \{x\}$ est non vide.

2) En déduire que $\sup(A \setminus \{x\})$ existe et que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup(A)$.

II. Convexité

II.1. La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition. On note $\overline{\mathbb{R}}$ et on appelle droite achevée l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ étendue à $\overline{\mathbb{R}}$ par $\forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ -\infty \leq x \leq +\infty$.

Remarque : L'intérêt de travailler dans $\overline{\mathbb{R}}$ est que tout ensemble non vide admet une borne inférieure et une borne supérieure (qui peuvent être égales à $-\infty$ ou $+\infty$). On peut également étendre les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $\forall y > 0$, $y \times (+\infty) = +\infty$, $y/(+\infty) = 0$, etc. Il y a par contre des formes indéterminées qui ne sont pas définies (comme $0 \times (+\infty)$, $+\infty - \infty$, etc.). Ces propriétés seront utiles lors des manipulations de limites (voir le prochain chapitre).

II.2. Convexes de $\mathbb{R}$

Définition. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble qui contient tous les nombres réels compris entre ses deux bornes (incluses ou non selon si l'intervalle est fermé ou ouvert). *Par exemple,* $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ *sont des intervalles de* $\mathbb{R}$ *(le dernier étant ni ouvert, ni fermé).*

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est convexe si $\forall a, b \in A \ / \ a \leq b,\ [a, b] \subset A$. *$A$ est donc convexe si dès qu'il contient deux réels, il contient toutes les valeurs comprises entre ces deux réels.*

Théorème. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

(m) Ce théorème permet de montrer qu'un ensemble est un intervalle en démontrant simplement qu'il est convexe (ce qui évite d'avoir à trouver ses bornes inférieures et supérieures).

III. Partie entière

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Proposition. La partie entière vérifie les propriétés suivantes :
- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

(m) Quand on manipule des expressions faisant apparaitre des parties entières, une bonne manière de les simplifier est de commencer par traiter le cas où $x \in [0,1[$ et ensuite de démontrer le cas général en écrivant $x = n + y$ avec $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $y \in [0,1[$.

(m) Dans le cas où $x \in [0,1[$, on effectue souvent des disjonctions de cas pour simplifier le calcul des parties entières.

Exercice d'application 4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1/3 \rfloor + \lfloor x+1/2 \rfloor - (\lfloor x+5/6 \rfloor) \leq \lfloor x \rfloor + 1$.

IV. Approximation d'un réel

IV.1. Limite

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon).$$

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $u_n \to_{n\to+\infty} l$ si $u_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

IV.2. Théorème des gendarmes

Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

(m) Ce théorème est très utile pour montrer que des suites convergent (en les encadrant entre deux suites qui convergent vers la même limite).

Exercice d'application 5. Déterminer les limites des suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{\sin(n^3)+2}{\ln(n)+1}$ et $v_n = \dfrac{n^{2\cos(n)}}{e^n}$.

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

IV.3. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \text{ majore } A \\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ / \ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \end{array} \right.$$

(m) Cette caractérisation est souvent la plus simple à utiliser pour calculer une borne supérieure. En effet, pour montrer que $M = \sup(A)$, il suffit de montrer que M majore A (ce qu'il faut démontrer quelque soit la caractérisation utilisée de toute façon) et de trouver une suite d'éléments de A qui converge vers M. Si l'ensemble A n'est pas trop compliqué, on y arrive en général sans trop de difficultés en utilisant les différentes propriétés sur les suites convergentes (voir le chapitre suivant : une somme de suites convergentes est convergente vers la somme des limites, idem pour un produit, etc.).

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Alors :

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \text{ minore } A \\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ / \ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m \end{array} \right.$$

Exercice d'application 6. On pose $A = \{\arctan(x) + \sin(x), \ x \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent.
2) Les déterminer à l'aide de la caractérisation séquentielle.

IV.4. Densité

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si $\forall x, y \in \mathbb{R} \ / \ x < y, \ \exists a \in A \ / \ a \in]x, y[$.

Exercice d'application 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $a \in A$, $A \setminus \{a\}$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.
2) Que peut-on dire d'un ensemble dense privé d'un nombre fini de valeurs ?

Proposition. Caractérisation epsilonesque de la densité. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ / \ |x - a| \leq \varepsilon.$$

Proposition. Caractérisation séquentielle de la densité. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ / \ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

m En général, il est plus facile d'utiliser la définition de la densité ou la caractérisation séquentielle de la densité pour démontrer qu'un ensemble est dense. À vous de voir si vous préférez manipuler des suites ou des inégalités...

Remarque : De manière générale, on dit qu'un ensemble A est dense dans un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ si $A \subset B$ et que $\forall x, y \in B \ / \ x < y,\ \exists a \in A \ / \ x < a < y$. On prouve de la même manière que A est dense dans B si et seulement si $\forall b \in B,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ / \ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Proposition. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 8. Montrer que $A = \{e^x,\ x \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$:

1) En utilisant la définition de la densité.

2) En utilisant la caractérisation séquentielle de la densité.

Exercice d'application 9. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $\mathbb{Q} \cap [-2, 2[$. A-t-on un minimum/maximum ? Mêmes questions avec $\mathbb{Q} \cap \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

IV.5. Nombres décimaux

Définition. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Il s'agit de l'ensemble des réels qui s'écrivent « avec un nombre fini de chiffres après la virgule ».

Proposition. $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est l'approximation par défaut de x à la précision $\dfrac{1}{10^n}$.
- $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$ est l'approximation par excès de x à la précision $\dfrac{1}{10^n}$.

Remarque : Pour les x positifs, l'approximation par défaut de x à la précision $\dfrac{1}{10^n}$ correspond au nombre x où l'on a gardé uniquement les $n-1$ premières décimales. On fait ainsi une erreur inférieure à $\dfrac{1}{10^n}$. Par exemple, l'approximation par défaut de $\pi = 3.14159...$ à la précision $\dfrac{1}{10^2} = 0.01$ est 3.14. L'approximation par excès à la précision $\dfrac{1}{10^2}$ de π est 3.15.

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On a $A_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. On en déduit que A_1 admet comme minimum (et comme borne inférieure) -2 et que A_1 admet comme maximum (et comme borne supérieure) 2.

2) Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $x^2 < 5 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$. On en déduit que :

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < \sqrt{5}\} = \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[.$$

On en déduit que A_2 n'admet pas de minimum ni de maximum mais qu'il admet $-\sqrt{5}$ comme borne inférieure et $\sqrt{5}$ comme borne supérieure.

3) Par parité de la fonction carrée, on a $A_3 = \left\{x^2, \ x \in \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[\right\} = \left\{x^2, \ x \in \left[0, \sqrt{5}\right[\right\}$. Puisque la fonction carrée est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de la bijection continue nous donne que $A_3 = \left[0^2, \lim\limits_{x \to \sqrt{5}} x^2\right[= [0, 5[$. On en déduit que A_3 admet comme minimum (et comme borne inférieure) 0. A_3 n'admet pas de maximum mais admet 5 comme borne supérieure.

Exercice d'application 2.

1) On étudie $f : x \mapsto x^2 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est dérivable comme différence de fonctions dérivables et on a pour $x > 0$, $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée est négative sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. On en déduit que f est décroissante puis croissante. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ par limites usuelles et pour $x > 0$, $f(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$. Par croissances comparées, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Finalement, la fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ mais elle est minorée par $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

2) L'étude de fonction précédente entraine que $A_2 = \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2), \ +\infty\right[$. On en déduit que A_2 admet comme minimum (et donc borne inférieure) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$. Il n'admet pas de borne supérieure (puisqu'il n'est pas majoré, il n'a pas de « plus petit majorant »).

On remarque qu'ici on peut être plus précis sur la borne inférieure. En effet, d'après l'étude de fonction, on remarque que A_2 admet en fait $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$ comme minimum (qui est donc égal à la borne inférieure).

3) On étudie la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$. Cette fonction est bien dérivable et pour $x \geq 1$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2 - x}{x^3}$.

On a donc g croissante sur $[1, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$. On a $g(1) = 0$, $g(2) = \dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. En utilisant le théorème de la bijection continue sur chacun $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$, on a donc :

$$B = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left]0, \frac{1}{4}\right] = \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

On en déduit que B admet 0 comme minimum (et comme borne inférieure) et $\frac{1}{4}$ comme maximum (et comme borne supérieure).

Pour l'ensemble C, la même étude de fonction prouve que $C = \left]0, \frac{1}{4}\right] \cup \left]0, \frac{1}{4}\right] = \left]0, \frac{1}{4}\right]$. C n'admet donc pas de minimum mais admet 0 comme borne inférieure. C admet encore $\frac{1}{4}$ comme maximum (et borne supérieure).

Exercice d'application 3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ où $A \neq \emptyset$ et A est majorée. On a donc $\sup(A)$ qui existe. Soit $x \in A$ tel que $x < \sup(A)$.

1) Puisque $x < \sup(A)$, par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure de A appliquée en $\varepsilon = \sup(A) - x > 0$, il existe $a_0 \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a_0$. On a donc $x < a_0$ et $a_0 \in A$. Ceci entraine que $a_0 \in A \setminus \{x\}$ et que $A \setminus \{x\}$ est non vide.

2) On remarque que $\sup(A)$ majore $A \setminus \{x\}$ donc il majore également A. Puisque $A \setminus \{x\}$ est non vide, il admet donc une borne supérieure (et puisque $\sup(A \setminus \{x\})$ est le plus petit des majorants, on a également $\sup(A \setminus \{x\}) \leq \sup(A)$.

Pour montrer l'égalité, on va utiliser la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure de A, il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a$. Si $a \neq x$, on a $a \in A \setminus \{x\}$. Si $a = x$, alors en reprenant la question 1, on a $\sup(A) - \varepsilon < a < a_0$ et $a_0 \in A \setminus \{x\}$. Dans tous les cas, on a réussi à construire un élément de A qui est strictement plus grand que $\sup(A) - \varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, on en déduit que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup(A)$.

Exercice d'application 4. Commençons par le cas où $x \in [0, 1[$. On procède alors par disjonction de cas (on notera $X = \lfloor x + 1/3 \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor - (\lfloor x + 5/6 \rfloor)$).

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{6}\right[$, on a alors $X = 0 + 0 - 0 = 0$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$, on a $X = 0 + 0 - 1 = -1$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on a $X = 0 + 1 - 1 = 0$.
- Si $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right[$, on a $X = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dans tous les cas, on a bien $X \leq 1$.

Supposons à présent $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On a alors $x = n + x_0$ avec $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \in [0, 1[$. On a alors :

$$\begin{aligned} X &= \lfloor n + x_0 + 1/3 \rfloor + \lfloor n + x_0 + 1/2 \rfloor - (\lfloor n + x_0 + 5/6 \rfloor) \\ &= n + \lfloor x_0 + 1/3 \rfloor + n + \lfloor x_0 + 1/2 \rfloor - (n + \lfloor x_0 + 5/6 \rfloor) \\ &= n + \lfloor x_0 + 1/3 \rfloor + \lfloor x_0 + 1/2 \rfloor - (\lfloor x_0 + 5/6 \rfloor) \\ &\leq n + 1. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie car on a montré l'inégalité pour $x_0 \in [0, 1[$. Puisque $n = \lfloor x \rfloor$, on a bien l'inégalité voulue.

Exercice d'application 5. Pour $n \geq 1$, on a $-1 \leq \sin(n^3) \leq 1$ d'où $\frac{1}{\ln(n) + 1} \leq u_n \leq \frac{3}{\ln(n) + 1}$ (car $\ln(n) + 1 > 0$). Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n) + 1} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

De la même manière, pour $n \geq 1$, on a $-2 \leq 2\cos(n) \leq 2$. On en déduit par croissance de la fonction $x \mapsto n^x = e^{\ln(x)n}$ sur $[1, +\infty[$ (une rapide étude de fonction prouve que cette fonction est croissante) que pour $n \geq 1$, $n^{-2} \leq n^{2\cos(n)} \leq n^2$. On en déduit que pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n^2 e^n} \leq v_n \leq \frac{n^2}{e^n}.$$

On en déduit d'après le théorème des gendarmes (et les croissances comparées pour la limite de droite) que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exercice d'application 6.

1) A est non vide (il contient $0 = \arctan(0) + \sin(0) = 0$. Il est minoré par $-\frac{\pi}{2} - 1$ et majoré par $\frac{\pi}{2} + 1$ (par encadrement usuel des fonctions arctan et sin). On en déduit que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent.

2) On va trouver des suites qui convergent vers les majorants/minorants précédents. Pour la borne supérieure, on va considérer une suite qui tend vers $+\infty$ (pour que l'arctangente tende vers $\frac{\pi}{2}$) et telle que le sinus soit toujours égal à 1. On prend donc $u_n = \arctan\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$. Par 2π périodicité du sinus, on a $u_n = \arctan\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + 1$. Par composition de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} + 1$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure (puisque la limite trouvée majore A), on a donc $\sup(A) = \frac{\pi}{2} + 1$.

De même pour la borne inférieure, en considérant la suite $v_n = \arctan\left(-\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) = \arctan\left(-\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) - 1$. Cette suite tend vers $-\frac{\pi}{2} - 1$ quand n tend vers l'infini donc par caractérisation séquentielle (cette limite minorant aussi A), on a $\inf(A) = -\frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice d'application 7.

1) Supposons A dense dans $\mathbb{R}$ et $a \in A$. Utilisons la définition de la densité (premier point). Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On sait alors qu'il existe un élément $b \in A$ tel que $x < b < y$. Si $b \neq a$, on a gagné. Si $b = a$, alors on peut réutiliser la densité de A dans $\mathbb{R}$ ce qui nous assure l'existence d'un $c \in A$ tel que $x < c < a$ (on replace un élément de A entre x et a. Puisque $a < y$, on a alors $x < c < y$ et $c \in A \setminus \{a\}$ et on a fini.

2) On a démontré que si on enlevait un point d'un ensemble dense, alors on avait encore un ensemble dense. Par récurrence directe, si on enlève un nombre fini de points à un ensemble dense, on a toujours un ensemble dense.

Exercice d'application 8. Montrer que $\{e^x,\ x \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$:

1) Puisque l'exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a bien $A \subset \mathbb{R}_+^*$. Fixons à présent $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. Puisque la fonction logarithme est strictement croissante, on a $\ln(x) < \ln(y)$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(x) < b < \ln(y)$. Par stricte croissance de l'exponentielle, on a alors :

$$e^{\ln(x)} < e^b < e^{\ln(y)} \Leftrightarrow x < e^b < y.$$

Puisque $b \in \mathbb{Q}$, on a $e^b \in A$. On a donc bien prouvé que A est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) On a toujours $A \subset \mathbb{R}_+^*$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \ln(x)$. Par composition de limites, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{q_n} = e^{\ln(x)} = x$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{q_n} \in A$ (car ce sont des exponentielles de rationnels). On a donc montré que A était dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice d'application 9. -2 minore $\mathbb{Q} \cap [-2, 2[$ et y appartient donc -2 est le minimum de cet ensemble. 2 majore l'ensemble et on a $2 - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \cap [-2, 2[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qui tend vers 2. On en déduit que 2 est la borne supérieure de $\mathbb{Q} \cap [-2, 2[$ (mais ce n'est pas un maximum).

On peut procéder de même pour $Q \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ à quelques différences près, puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On a $-\sqrt{2}$ qui minore mais qui n'est pas dans l'ensemble. On peut cependant trouver une suite de rationnels qui tend vers $-\sqrt{2}$ en restant toujours « au-dessus » (il suffit de prendre $u_n = \frac{\lfloor -n\sqrt{2} \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$, cf la preuve du cours). On a donc $-\sqrt{2}$ qui est la borne inférieure (et ce n'est pas un minimum). De même, on montre que $\sqrt{2}$ est la borne supérieure (on prend comme suite $v_n = \frac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n}$). Ce n'est pas un maximum.