32. Intégration

Exercice 1. (i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 2. (m) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies a et b en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3. (∗) Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a + b|x|$.

Exercice 4. (i) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 5. (i) On suppose que f est continue et que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt = \int_0^\pi f(t)\cos(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.

Exercice 6. (m) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exercice 7. (i) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que pour toute fonction g en escalier sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$. Montrer que $\forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$.

Exercice 8. (m) Soit f continue sur $[0,1]$.

1) On suppose que $f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

2) En déduire, dans le cas général, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$.

Exercice 9. (m) Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(1) = 0$ et $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leq g(t) < 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)g(t)^n dt = 0.$$

Exercice 10. (c) Déterminer les limites des suites :

1) $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

2) $\displaystyle v_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2+k^2}$

3) $\displaystyle w_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2n+\frac{k^2}{n}}$

4) $\displaystyle x_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 11. (m) Déterminer les limites des suites :

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/n}$ 2) $v_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k^k) - \ln(n^k))$

3) $w_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ 4) $x_n = n\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}$.

Exercice 12. (m) Déterminer les limites des suites :

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ 2) $v_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right)}$

3) $w_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ 4) $x_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 13. (i) Soit $a > -1$. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^a$.

Exercice 14. (m) Vérifier que $\forall x \in [0,1],\ x^2 - \dfrac{1}{3}x^4 \leq \sin^2(x) \leq x^2$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$.

Exercice 15. (i) Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que

$$f\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \leq \int_0^1 f(g(t))dt.$$

Exercice 16. (m) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{1\leq i,j\leq n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)f\left(\dfrac{j}{n}\right)$.

2) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} T_n$ où $T_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)f\left(\dfrac{j}{n}\right)$.

Exercice 17. (∗) Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)g\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

Exercice 18. (∗) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ à valeurs strictements positives et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe une unique subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt.$$

2) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Exercice 19. (∗) Soit f continue et positive sur le segment $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$