28. Dénombrement, méthodologie

I. Ensembles finis

I.1. Définition

Définition. Soit E un ensemble. E est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f : E \to [\![1, n]\!]$ bijective. Cet entier n est alors unique. On pose $\text{Card}(E) = n$ le cardinal de E (c'est à dire son nombre d'éléments).

(m) Pour montrer qu'un ensemble est fini, il suffit de montrer qu'il est inclus dans un ensemble fini. Si l'on veut calculer son cardinal, on essaye en général de construire une bijection entre cet ensemble et un ensemble dont on connait déjà le cardinal (ces deux ensembles ont alors le même cardinal).

Exercice d'application 1. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de multiples de n dans $[\![1, m]\!]$.

(m) Pour montrer qu'un ensemble est infini, il suffit de le mettre en bijection avec un ensemble infini connu ou de montrer qu'il contient un ensemble infini.

Exercice d'application 2. Soit $r \in \mathbb{N}$ fixé. Les ensembles suivants sont-ils finis ou infinis ?

1) $A_r = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \ / \ a^2 + b^2 \leq r^2\}$.
2) $B_r = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \ / \ |a - b| \leq r\}$.
3) $C_r = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \ / \ \frac{a}{b} \leq r\}$.

I.2. Dénombrabilité

Définition. Soit E un ensemble. E est un ensemble dénombrable s'il existe $f : E \to \mathbb{N}$ bijective.

Remarque : Intuitivement, un ensemble est dénombrable si on peut «numéroter » tous ses éléments par les entiers naturels. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$ ne le sont pas.

I.3. Propriétés du cardinal

Proposition. Soit E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors A est fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$ avec égalité si et seulement si $A = E$.

Proposition. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fini et :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i).$$

(m) Il arrive souvent que quand on compte le nombre d'éléments d'un ensemble, on le sépare en une réunion d'ensembles disjoints (on réalise ainsi une partition de l'ensemble de départ) qui sont individuellement plus faciles à compter. On fait alors la somme des cardinaux pour obtenir le cardinal de l'ensemble de départ.

Exercice d'application 3. On considère un triangle. On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ couleurs et on veut savoir combien de triangles différents on peut obtenir en coloriant les côtés.

1) Combien de coloriages sont possibles si on utilise la même couleur pour les 3 côtés ?

2) De combien de façons différentes peut-on choisir deux couleurs parmi les n ? Une fois les deux couleurs choisies, de combien de façons différentes peut-on colorier le triangle ? Finalement, combien y-a-t-il de coloriages bicolores possibles ?

3) Répondre à la question initiale. *Application numérique : pour $n = 10$, il y a exactement 1000 façons de faire.*

4) Pouvez-vous retrouver le nombre de coloriages possibles directement ?

Proposition. Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Proposition. Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B).$$

I.4. Cardinaux et applications

Proposition. Soit A un ensemble fini, B un ensemble et $f : A \to B$. Alors :
- $f(A)$ est un ensemble fini.
- $\mathrm{Card}(f(A)) \leq \mathrm{Card}(A)$ avec égalité si et seulement si f est injective.
- Si B est fini, $\mathrm{Card}(f(A)) \leq \mathrm{Card}(B)$ avec égalité si et seulement si f est surjective.

Proposition. Soient A et B deux ensembles finis de même cardinal et $f : A \to B$. Alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Théorème. Soient A et B deux ensembles finis. Alors :
- Si $\mathrm{Card}(A) > \mathrm{Card}(B)$, il n'existe pas d'injection de A dans B.
- Si $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, il n'existe pas de surjection de A dans B.

Exercice d'application 4. Montrer le **principe des tiroirs** : « si une commode contient n tiroirs et que l'on veut y ranger strictement plus de n chaussettes, alors il y aura au moins 2 chaussettes dans le même tiroir. » *Ce principe peut être utilisé tel quel en devoir pour justifier que si strictement plus de n éléments (les chaussettes) vérifient une condition qui a n propriétés (les tiroirs), alors au moins deux éléments vérifient la même propriété.*

Exercice d'application 5. On rappelle qu'une note en colle est forcément entière et une note en devoir peut utiliser les demi-points.

1) Montrer que dans l'année, vous aurez au moins deux fois la même note en colle de maths (il y a en tout 28 colles de maths). Si vous avez toujours la moyenne en colle, combien de fois êtes-vous certain d'avoir la même note au cours de l'année au minimum ?

2) Montrer qu'à chaque devoir de maths, au moins deux personnes de la classe ont la même note.

Théorème. Lemme des bergers. Soient A et B deux ensembles finis et $f : A \to B$. On suppose que tout élément de B admet exactement p antécédents dans A par f. Alors $\mathrm{Card}(A) = p \times \mathrm{Card}(B)$.

II. Dénombrement

II.1. Avec ordre

Proposition. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-liste ou un p-uplet d'éléments de E est un élément de $E^p = \{(x_1, \ldots, x_p),\ x_1, \ldots, x_p \in E\}$. Alors :

- Le nombre de p-uplets d'éléments de E est n^p.
- Le nombre de p-uplets d'éléments distincts de E est $\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \end{cases}$.

(m) Quand on compte un nombre de possibilités où l'ordre intervient (par exemple quand on a un certain nombre de choix **puis** on a un certain nombre d'autres choix **puis** etc.), ce sont en général des p-uplets que l'on compte. Il faut alors compter le nombre de possibilités à chaque étape et multiplier ces nombres.

Exercice d'application 6. Un digicode est constitué de 4 chiffres (entre 0 et 9) et d'une lettre A ou B.

1) Combien de combinaisons sont possibles si la lettre est en dernière position ?

2) Combien de combinaisons sont possibles si tous les chiffres sont distincts et que la lettre est en dernière position ?

3) Combien de combinaisons sont possibles si la lettre peut être placée n'importe où dans la combinaison et que les chiffres sont distincts ?

Proposition. Soient A et B deux ensembles finis avec $\mathrm{Card}(A) = p$ et $\mathrm{Card}(B) = n$. Alors :

- Le nombre de fonctions définies de A dans B est n^p.
- Le nombre de fonctions injectives définies de A dans B est $\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \end{cases}$.
- En particulier, le nombre de bijections de A dans B est $n!$ si $p = n$ et 0 si $p \neq n$.

(m) Quand on dénombre des fonctions entre ensembles finis, on essaye de compter le nombre de possibilités dans l'ensemble d'arrivée pour le premier élément, puis le nombre de possibilités dans l'ensemble d'arrivée pour le second élément, etc. ce qui revient à dénombrer des p-uplets.

Exercice d'application 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [\![1, 2n]\!]$.

1) Déterminer le nombre de bijections de A dans A et le nombre d'applications de A dans A.

2) Déterminer le nombre de bijections de A dans A qui envoient un nombre pair sur un nombre pair.

3) Déterminer le nombre d'applications de A dans A qui envoient un nombre pair sur un nombre pair.

II.2. Sans ordre

Proposition. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-combinaison d'éléments de E est un sous-ensemble de E à p éléments de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$ où $x_1, \ldots, x_p \in E$ sont distincts. Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \in [\![0, n]\!]$ et 0 si $p > n$.

m Quand on compte un nombre de possibilités où l'ordre n'intervient pas (par exemple quand on fait des **tirages simultanés**), ce sont en général des p-combinaisons que l'on compte. On utilise alors le fait que l'on a exactement $\binom{n}{p}$ façons de choisir p éléments parmi n.

Exercice d'application 8. 48 élèves vont participer à un tournoi de futsal qui se joue en équipe de 6 (5 joueurs et 1 remplaçant) ce qui donnera donc 8 équipes.

1) De combien de façons différentes peut-on constituer les équipes (qui sont numérotées de 1 à 8) ?

2) On suppose à présent les équipes constituées.

a) Si toutes les équipes s'affrontent entre elles une fois, combien de matchs faudra-t-il effectuer au total ?

b) Si on effectue un tournoi en élimination directe, combien de premiers tours différents peut-on réaliser (autrement dit combien de quarts de finale différents peut-on réaliser) ?

c) Une fois les appariements pour les quarts de finale constitués, combien y-a-t-il de finales possibles ?

Proposition. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Autrement dit, E admet exactement 2^n sous-ensembles.

II.3. Coefficients binomiaux

Proposition. Puisque $\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, on peut retenir ou retrouver de nombreuses formules faisant intervenir des coefficients binomiaux de manière combinatoire :

- $\forall n, p \in \mathbb{N},\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- $\forall n, p \in \mathbb{N},\ \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$. *Formule de Pascal.*
- $\forall n, p \in \mathbb{N},\ \forall a, b \in \mathbb{C},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. *Binôme de Newton.*

m Compter de deux manières différentes la même quantité permet souvent en combinatoire d'obtenir des formules.

Exercice d'application 9. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

1) *Premier comptage.*
   a) De combien de façons différentes peut-on construire un ensemble $X \subset E$ tel que $\mathrm{Card}(X) = p+1$?
   b) En déduire le nombre de façons différentes de choisir un couple (x, X) tel que $x \in X$ et $X \subset E$ avec $\mathrm{Card}(X) = p+1$.
2) *Second comptage.*
   a) De combien de façons différentes peut-on construire un élément $x \in E$?
   b) En déduire le nombre de façons différentes de choisir un couple (x, X) tel que $x \in X$ et $X \subset E$ avec $\mathrm{Card}(X) = p+1$.
3) En déduire une égalité entre coefficients binomiaux et la vérifier par le calcul.

III. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Les multiples de n sont de la forme kn avec $k \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des multiples de n dans $[\![1, m]\!]$ est donc l'ensemble $\{kn,\ k \in \mathbb{N}^* \text{ et } kn \leq m\}$. Or, puisque $n > 0$, on a :

$$kn \leq m \Leftrightarrow k \leq \frac{m}{n}.$$

Puisque k est un entier, on a $k \leq \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow k \leq \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor$. On en déduit que la fonction $f : k \mapsto kn$ est bijective de $[\![1, \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor]\!]$ dans l'ensemble des multiples de n dans $[\![1, m]\!]$. On a donc exactement $\left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor$ multiples de n dans $[\![1, m]\!]$.

Exercice d'application 2.

1) Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ est tel que $a^2 + b^2 \leq r^2$, alors on a en particulier $a \in [\![-r, r]\!]$ et $b \in [\![-r, r]\!]$. On a donc au plus $2r + 1$ valeurs possibles pour a et $2r + 1$ valeurs possibles pour b, ce qui fait que l'on a qu'un nombre fini de valeurs. *Géométriquement, A_r est l'ensemble des points du plan à coordonnées entières qui sont dans le disque de centre O et de rayon r et dans cette preuve, on a utilisé le fait que le centre O de rayon r est inclus dans le carré de centre O et de côté de longueur $2r + 1$.*

2) B_r est infini car il contient par exemple tous les (a, a) avec $a \in \mathbb{N}$ (car si $b = a$, on a $|a-b| = 0 \leq r$.

3) C_r est infini car il contient par exemple tous les couples $(0, b)$ avec $b \in \mathbb{N}^*$ (car on a $0 \leq r$). Il contient donc un ensemble infini et est donc infini.

Exercice d'application 3.

1) Si on utilise la même couleur pour les 3 côtés, puisque l'on a n couleurs, on ne peut donc faire que n coloriages.

2) On a $\dbinom{n}{2}$ façons de choisir 2 couleurs parmi n. Une fois les deux couleurs choisies, on a trois côtés à colorier. Si on note A la première couleur et B la seconde, alors les coloriages possibles sont (la lettre en position i représente le coloriage du i-ième côté) :

$$AAB, ABA, BAA \text{ et } BBA, BAB, ABB.$$

On doit en effet choisir la couleur qui ne sera utilisée qu'une seule fois (2 possibilités) et ensuite choisir le côté qui ne sera colorié qu'une seule fois (3 possibilités) ce qui donne 6 triangles bicolores une fois les deux couleurs fixées. On a donc $6 \times \dbinom{n}{2}$ triangles bicolores.

3) Il reste à compter les triangles tricolores. On a $\dbinom{n}{3}$ façons de choisir 3 couleurs parmi n. Une fois les 3 couleurs choisies, il faut attribuer à chaque couleur un unique côté. On a donc 3 possibilités pour le côté de la première couleur, puis 2 possibilités pour le côté de la seconde couleur et 1 possibilité pour la dernière couleur, ce qui donne $3! = 6$ possibilités. Si on appelle A, B, C les trois couleurs, cela correspond à :

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

On a donc $6 \times \dbinom{n}{3}$ triangles tricolores.

Puisque nos coloriages sont soit unicolore, soit bicolore, soit tricolore et que ces possibilités sont incompatibles, on a donc au total $n + 6 \times \dbinom{n}{2} + 6 \times \dbinom{n}{3}$ coloriages possibles. Après simplifications, on a $n+6\times\binom{n}{2}+6\times\binom{n}{3}=n^3$.

4) On peut retrouver ce résultat directement. On a en effet n couleurs possibles pour le premier côté, n pour le second côté et n pour le troisième, ce qui donne $n\times n\times n=n^3$ coloriages possibles.

Exercice d'application 4. On note B l'ensemble des tiroirs et A l'ensemble des chaussettes. Ranger les chaussettes revient à se donner une fonction $f : A \to B$ qui à chaque chaussette lui associe un tiroir. On a $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$ donc f n'est pas injective. Il existe donc deux éléments de A (donc deux chaussettes) qui ont la même image par f (et qui sont donc dans le même tiroir).

Exercice d'application 5.

1) On a en tout 21 possibilités pour les notes en colle $(0,1,2,\ldots,19,20)$. Puisqu'il y a 28 colles, d'après le principe des tiroirs, tout élève aura au moins 2 fois la même note en colle dans l'année.

Si on a toujours la moyenne, alors on a plus que 11 possibilités $(10,11,\ldots,20)$. Puisqu'il y a 28 notes de colle, on aura donc dans le pire des cas au moins 3 fois la même note en colle dans l'année (toujours d'après le principe des tiroirs, si on veut ranger 28 notes dans 11 tiroirs, un tiroir contiendra au moins 3 notes).

2) À un devoir de maths, il y a 41 notes possibles (21 notes entières et 20 notes avec des demi-points). Puisqu'il y a strictement plus de 41 élèves dans la classe, il y a toujours au moins deux étudiants avec la même note.

Exercice d'application 6.

1) On a deux possibilités pour la lettre (c'est A ou B). Pour chaque position pour les chiffres, on a 10 possibilités (il y a exactement 10 chiffres). On a donc au total :

$$10\times 10\times 10\times 10\times 2=20000 \text{ combinaisons possibles.}$$

2) Si tous les chiffres sont différents, on a 10 possibilités pour le premier chiffre, puis seulement 9 pour le second (pour ne pas réutiliser le premier), puis 8 pour le troisième et enfin 7 pour le dernier. On a toujours 2 possibilités pour la lettre. On a donc :

$$10\times 9\times 8\times 7\times 2=10080 \text{ combinaisons possibles.}$$

3) Si la lettre peut être placée n'importe où, on a 5 positions possibles pour la lettre, puis 2 possibilités pour la lettre. On a ensuite encore 10 possibilités pour la première position libre pour le premier chiffre, puis 9, puis 8 et 7 pour le dernier chiffre. On a donc au total :

$$10\times 10\times 9\times 8\times 7=50400 \text{ combinaisons possibles.}$$

Exercice d'application 7.

1) On a exactement $(2n)!$ bijections de A dans A soit d'après la formule du cours, soit parce que l'on a $2n$ choix pour le premier élément, puis $2n-1$ choix pour le second (pour ne pas reprendre le même élément), puis $2n-2$ pour le troisième, etc. et une seule possibilité pour le $2n$-ième élément. Pour le nombre d'applications de A dans A, on a $2n$ images possibles pour chaque élément de l'ensemble de départ ce qui donne $2n\times 2n\times 2n\times\ldots\times 2n=(2n)^{2n}$ possibilités.

2) Si on veut envoyer les nombres pairs sur les nombres pairs, puisque l'on a n nombres pairs dans A et qu'on veut les envoyer sur les nombres pairs (n images possibles), on a donc $n!$ façons de répartir les nombres pairs (n images pour le premier nombre pair, $n-1$ pour le second, etc, 1 possibilité pour le dernier car on veut une bijection). Toujours puisque l'on construit une bijection, il faut envoyer

les nombres impairs sur les nombres impairs ce qui donne $n!$ façons d'envoyer les impairs sur les impairs. Au total, on a donc $(n!)^2$ bijections de A dans A qui envoient les nombres pairs sur les nombres pairs.

3) On veut cette fois les applications de A dans A qui envoient les pairs sur les pairs. Pour les n nombres pairs, on a donc n possibilités pour chaque image. Pour les n nombres impairs de l'ensemble de départ, on a $2n$ possibilités pour chaque nombre impair. On a donc au total $n^n \times (2n)^n$ applications qui conviennent.

Exercice d'application 8.

1) Pour la première équipe, on a $\binom{48}{6}$ équipes possibles (on choisit 6 personnes parmi les 48). Pour la seconde équipe, on a ensuite $\binom{42}{6}$ possibilités (car on ne peut pas choisir les 6 personnes de la première équipe). Pour la troisième équipe, on a $\binom{36}{6}$ possibilités, puis $\binom{30}{6}$ possibilités, puis $\binom{24}{6}$, puis $\binom{18}{6}$, puis $\binom{12}{6}$ et enfin $\binom{6}{6} = 1$ possibilité pour la dernière équipe (qui est automatiquement fixée une fois les autres constituées). On a donc au total :

$$\frac{48!}{42!6!} \times \frac{42!}{36!6!} \times \frac{36!}{30!6!} \times \frac{30!}{24!6!} \times \frac{24!}{18!6!} \times \frac{18!}{12!6!} \times \frac{12!}{6!6!} \times \frac{6!}{0!6!} = \frac{48!}{(6!)^8}.$$

2)

a) Puisqu'il y a 8 équipes, la première équipe devra faire 7 matchs. La seconde doit ensuite en faire 6 (puisqu'elle a déjà affronté la première équipe), la troisième équipe doit affronter les 5 dernières équipes (car elle a déjà affronté les deux premières équipes), etc. jusqu'au dernier match où on fait s'affronter la 7ième équipe avec la 8ième. On a donc $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ matchs à réaliser pour finir le tournoi. On aurait aussi pu remarquer que le nombre de matchs est le nombre de façons de choisir 2 équipes parmi 8 (car on choisit les 2 équipes qui s'affrontent pour faire un match), ce qui donne $\binom{8}{2} = 28$ matchs.

b) Si on numérote les quarts de finale de 1 à 4, il faut choisir deux équipes pour le quart de finale numéro 1 soit $\binom{8}{2}$ possibilités. Pour le second, on a alors $\binom{6}{2}$ matchs possibles (le premier étant fixé avec 2 équipes). Il reste alors $\binom{4}{2}$ pour le troisième et $\binom{2}{2} = 1$ pour le dernier. Au final, on a après simplifications $\frac{8!}{2^4}$ façons de faire un premier tour.

c) Une fois les quarts de finale fixés, chaque équipe du premier « bloc » peut arriver en finale (4 possibilités) et chaque équipe du second « bloc » peut également arriver en finale (de manière indépendante). On a donc $4 \times 4 = 16$ finales possibles.

Exercice d'application 9.

1)

a) On choisit $p+1$ éléments parmi $n+1$ pour constituer X donc on a $\binom{n+1}{p+1}$ façons de construire $X \subset E$.

b) Puisque l'on a compté le nombre de façons de choisir X, il reste à déterminer de combien de façons différentes on peut choisir $x \in X$. Puisque X a $p+1$ éléments, on a $p+1$ façons de choisir le x. Au total, on a donc $(p+1) \times \binom{n+1}{p+1}$ façons de choisir les couples (x, X) avec la condition imposée.

2)

a) Puisqu'il y a $n+1$ éléments dans E, on a $n+1$ façons de choisir $x \in E$.

b) Puisque l'on a fixé x, il reste à choisir p éléments pour construire X (car on veut qu'il contiennent $p+1$ éléments et il contient déjà x). Il faut les choisir parmi n éléments (puisqu'on veut des éléments dans E mais différents de x). On a donc $\binom{n}{p}$ façons de choisir X. Au total, on a donc $(n+1) \times \binom{n}{p}$ façons de choisir les couples (x, X) avec la condition imposée.

3) Puisque l'on a compté deux fois la même chose, on a $(p+1) \times \binom{n+1}{p+1} = (n+1) \times \binom{n}{p}$. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned}
(p+1) \times \binom{n+1}{p+1} &= (p+1) \times \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} \\
&= \frac{(n+1)!}{p!(n-p)!} \\
&= (n+1) \times \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= (n+1) \times \binom{n}{p}.
\end{aligned}$$