Devoir Surveillé 1

Bon courage pour votre premier devoir de mathématiques ! Je vous rappelle les consignes :

- Écrire lisiblement sur des feuilles grandes et doubles, au stylo ou à l'encre bleu foncé ou noir et **souligner ou encadrer ses résultats**. On accordera de l'importance à la présentation.
- La calculatrice est interdite.
- Vous avez le droit de sauter des questions et d'admettre les résultats correspondants pour traiter les questions suivantes.
- Les différents exercices sont indépendants et vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous désirez. Il est conseillé de parcourir le sujet dans sa globalité avant de commencer.
- La durée de ce devoir est de **2 heures**.

Exercice 1. Limite d'une somme. Le but de l'exercice est de déterminer la limite quand n tend vers l'infini de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^n}\sum_{k=0}^{n} k^n.$$

1) *Majoration de la suite.* Dans toute la question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) À l'aide d'un changement d'indice, montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n$.

   b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leq e^x$.

   c) En déduire que pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \leq e^{xn}$, puis que $u_n \leq \displaystyle\sum_{j=0}^{n} e^{-j}$.

   d) Calculer la somme précédente et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\dfrac{e}{e-1}$.

On admet alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (on ne demande pas de le vérifier), ce qui implique puisqu'elle est majorée qu'elle converge. Dans toute la suite, on notera $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) *Minoration de L.* Soient $1 \leq m < n$ des entiers.

   a) Justifier que $\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n \leq u_n$.

   b) Rappeler la définition de « la fonction f est dérivable en 0 ». En introduisant une fonction f dérivable bien choisie, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   c) Soit $j \in [\![0, m]\!]$ fixé.

      i) Justifier que $1 - \dfrac{j}{n} > 0$ puis que $\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)}$.

      ii) Montrer finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{j}{n}\right)^n = e^{-j}$.

   d) En déduire que $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} e^{-j} \leq L$.

3) Montrer finalement que $L = \dfrac{e}{e-1}$.

Exercice 2. Deux équations fonctionnelles. Les deux questions sont indépendantes.

1) On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = xf(x) + yf(y)$.
   a) On suppose f solution.
      i) En évaluant en des valeurs simples de x et y, montrer que $f(0) = 0$.
      ii) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
   b) Réciproquement, montrer que la fonction nulle vérifie bien l'équation proposée. Déterminer alors toutes les fonctions vérifiant l'équation proposée.

2) On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\big(x - f(y)\big) = 1 - x - y$.
   a) On suppose f solution.
      i) Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = 0$.
      ii) En déduire que $\exists k \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + k$.
   b) Déterminer toutes les fonctions vérifiant l'équation proposée.

Exercice 3. Autour de la périodicité. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On rappelle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique* si :

$$\exists T \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n.$$

Un tel T est appelé une période de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ est périodique.

On donne alors les définitions suivantes :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique à partir d'un certain rang* si : $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\exists T \in \mathbb{N}^*$ / $\forall n \geq N,\ u_{n+T} = u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *répétable* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists T \in \mathbb{N}^*$ / $u_{n+T} = u_n$.

2) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique, alors elle est périodique à partir d'un certain rang et elle est répétable.

3) Donner un exemple de suite périodique à partir d'un certain rang mais non périodique.

4) Donner un exemple de suite périodique à partir d'un certain rang mais non répétable.

5) On étudie dans cette question la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont :

$$\underbrace{1}_{u_0},\ \underbrace{1,\ 2}_{u_1,u_2},\ \underbrace{1,\ 2,\ 3}_{u_3,u_4,u_5},\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4}_{u_6,u_7,u_8,u_9},\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}_{u_{10},u_{11},u_{12},u_{13},u_{14}},\ldots$$

   a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{\frac{k(k+1)}{2}} = 1$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N},\ v_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

   b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}$ / $v_k \leq n < v_{k+1}$.
   c) Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est répétable. *On justifiera de manière précise en utilisant la définition avec des quantificateurs de la répétabilité.*
   d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle périodique à partir d'un certain rang ? *On justifiera soigneusement.*