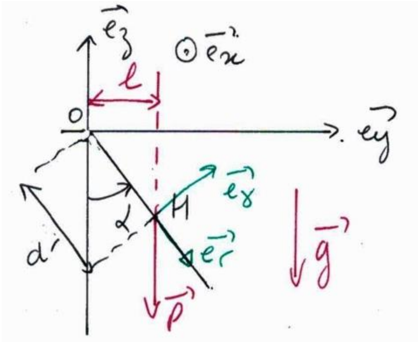
CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 8

Exercice 1 – Marcher à son rythme pour aller plus loin

(CCINP TSI 2019)



Système : jambe assimilée à un solide rigide de masse m_0 et de moment d'inertie J, en rotation autour d'un axe horizontal $\left(O,\vec{e_x}\right)$.

Référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$

Bilan des forces :

- Poids $\vec{P}$ appliqué au centre d'inertie H de la jambe
- Liaison pivot parfaite en O

1. Moment cinétique scalaire : $\boxed{L_{Ox} = J\dfrac{d\gamma}{dt} = J\dot{\gamma}}$

2. $\boxed{\Gamma_{Ox}\left(pivot\right) = 0}$ car liaison pivot parfaite (pas de frottement)

3. Moment du poids : $\left|\Gamma_{Ox}\left(\vec{P}\right)\right| = lm_0 g$ avec bras de levier : $l = OH\sin\left(\gamma\right) = d'\sin\left(\gamma\right)$

   Le poids fait tourner H dans le sens indirect donc $\Gamma_{Ox}\left(\vec{P}\right) < 0$:

   $$\boxed{\Gamma_{Ox}\left(\vec{P}\right) = -m_0 g d'\sin\left(\gamma\right)}$$

   OU

   $$\Gamma_{Ox}\left(\vec{P}\right) = \left(\overrightarrow{OH}\wedge\vec{P}\right)\cdot\vec{e_x} = m_0 g d'\left(\left(-\cos\left(\gamma\right)\vec{e_z} + \sin\left(\gamma\right)\vec{e_y}\right)\wedge\left(-\vec{e_z}\right)\right)\cdot\vec{e_x} = -m_0 g d'\sin\left(\gamma\right)$$

4. Théorème du moment cinétique : $\left(\dfrac{dL_{Ox}}{dt}\right) = \Gamma_{Ox}\left(\vec{P}\right) + \Gamma_{Ox}\left(pivot\right)$

   $$\boxed{J\ddot{\gamma} = -m_0 g d'\sin\left(\gamma\right)}$$

5. Énergie cinétique de la jambe : $\boxed{E_C = \dfrac{1}{2}J\dot{\gamma}^2}$

6. Énergie potentielle de pesanteur telle que : $dE_P = -\vec{P}\cdot d\overrightarrow{OH} = m_0 g\vec{e_z}\cdot d\overrightarrow{OH}$

   En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OH} = r\vec{e_r}$ et $d\overrightarrow{OH} = dr\vec{e_r} + rd\gamma\vec{e_\gamma}$ (cf. schéma)

   Mouvement circulaire : $d\overrightarrow{OH} = rd\gamma\vec{e_\gamma} = d'd\gamma\vec{e_\gamma}$

   $dE_P = m_0 g d'd\gamma\vec{e_z}\cdot\vec{e_\gamma} = m_0 g d'd\gamma\sin\left(\gamma\right)$ et intégration : $\boxed{E_P = -m_0 g d'\cos\left(\gamma\right) + cste}$

   OU

   $d\overrightarrow{OH} = dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$ et $dE_P = m_0 g\vec{e_z}\cdot d\overrightarrow{OH} = m_0 g dz$ soit $E_P = m_0 g z + cte$ avec $z = -d'\cos\left(\gamma\right) < 0$ donc $\boxed{E_P = -m_0 g d'\cos\left(\gamma\right) + cste}$

7. La jambe n'est soumise qu'à son poids, qui est une force conservative, et à la liaison pivot parfaite, i.e. sans frottement, dont le travail est nul : le système est conservatif et l'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}J\dot{\gamma}^2 - m_0 g d' \cos(\gamma) + cste = cste'$$

Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathscr{P}^{NC} = 0$

$$\frac{1}{2}J\frac{d\dot{\gamma}^2}{d\dot{\gamma}}\frac{d\dot{\gamma}}{dt} - m_0 g d\frac{d'\cos(\gamma)}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}J2\dot{\gamma}\ddot{\gamma} + m_0 g d'\sin(\gamma)\dot{\gamma} = 0$$

Simplification par $\dot{\gamma}$: $\boxed{J\ddot{\gamma} + m_0 g d'\sin(\gamma) = 0}$ (CQFD)

8. Approximation des petites oscillations : $\sin(\gamma) \simeq \gamma$

$$J\ddot{\gamma} + m_0 g d'\sin(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma} + \frac{m_0 g d'}{J}\gamma = 0 \text{ soit } \ddot{\gamma} + \omega_0^2\gamma = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{m_0 g d'}{J}}$$

Équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de période propre : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0 g d'}}}$

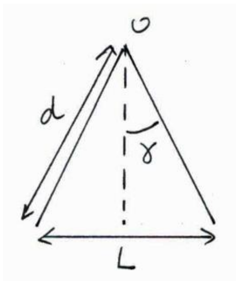
9. $J = k m_0 d^2$ et $d' = OH = \frac{d}{2}$: $T = \frac{2\pi\sqrt{k m_0 d^2}}{\sqrt{m_0 g \frac{d}{2}}} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi\sqrt{2kd}}{\sqrt{g}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}}\sqrt{d}}$

10. Pour l'adulte : $T_a = 1{,}6$ s et $d_a = 90$ cm et pour l'enfant : T_e et $d_e = 40$ cm

La constante k est la même pour les deux individus car elle est liée à la forme géométrique du modèle adopté pour la jambe.

$$\frac{T_a}{\sqrt{d_a}} = \frac{T_e}{\sqrt{d_e}} \Leftrightarrow \boxed{T_e = T_a\sqrt{\frac{d_e}{d_a}} = 1{,}1 \text{ s}}$$

11. Dans le cas des mouvements de petites amplitudes γ, la longueur d'un pas est : $L = 2d\sin(\gamma)$ et la vitesse de marche est $v = \frac{2L}{T} = \frac{4d\sin(\gamma)}{T}$.



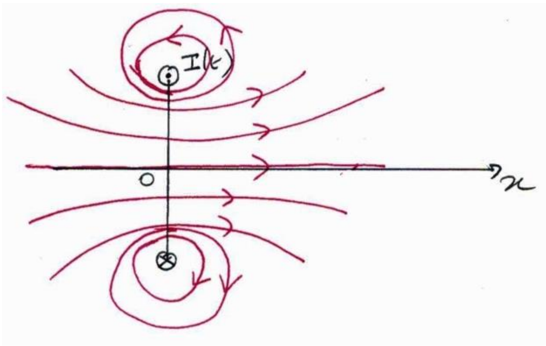
On considère la même amplitude γ pour l'adulte et l'enfant.

$$\frac{v_a}{v_e} = \frac{d_a}{T_a}\frac{T_e}{d_e} = \frac{d_a}{d_e}\sqrt{\frac{d_e}{d_a}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{v_a}{v_e} = \sqrt{\frac{d_a}{d_e}} = 1{,}5}$$

La vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Exercice 2 – Système d'alarme

1. Carte des lignes de champ ci-contre.

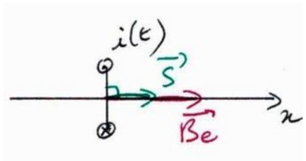


2. Le circuit émetteur parcouru par un courant électrique variable, crée un champ magnétique $\overrightarrow{B_e}(t)$ variable.

   L'antivol est un <u>circuit fixe placé dans un champ magnétique variable</u> : le flux magnétique qui le traverse est donc variable. D'après la loi de Faraday, il apparaît une <u>force électromotrice induite</u>, et donc un courant induit dans l'antivol.

   <u>Remarque</u> : La circulation de ce courant induit variable est responsable de la création d'un champ magnétique propre et d'un flux propre variable, donc d'une fem auto-induite : cf. question 6.

3. Comme l'antivol est de petite dimension, on considère que le champ magnétique $\overrightarrow{B_e}(t)$ est <u>uniforme</u> sur toute sa surface.



   On oriente le courant $i(t)$ dans l'antivol de façon à ce que le vecteur surface s'écrive : $\vec{S} = S\overrightarrow{u_x} = \pi b^2 \overrightarrow{u_x}$

   Flux extérieur dû à $\overrightarrow{B_e}(t)$ à travers les n spires : $\Phi = n\varphi = n\overrightarrow{B_e}(t)\cdot\vec{S} = nB_e(t)S$

$$\Phi(t) = n\pi b^2 \alpha I(t) = n\pi b^2 \alpha I_0 \cos(\omega t)$$

   Fem induite : <u>loi de Faraday</u> : $\boxed{e(t) = -\frac{\Phi(t)}{dt} = n\pi b^2 \alpha I_0 \omega \sin(\omega t)}$

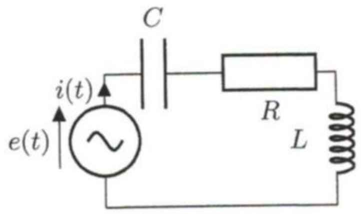
   La fem est sinusoïdale d'amplitude $E_m = n\pi b^2 \alpha I_0 \omega$

   Valeur efficace : $\boxed{E_{eff} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} n\pi b^2 \alpha I_0 \omega}$ (expression à connaître sinon à redémontrer !)

   <u>Rappel :</u> $E_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_M^2 \sin^2(\omega t)dt = \frac{e_M^2}{2T}\int_0^T \left(1-\cos(2\omega t)\right)dt$

$$E_{eff}^2 = \frac{E_M^2}{2T}T - \frac{E_M^2}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t)dt = \frac{E_M^2}{2} \text{ soit } E_{eff} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

4. Schéma électrique équivalent du circuit de l'antivol.



   <u>Attention</u> ! La fem induite $e(t)$ ne représente que la variation du <u>flux extérieur</u> ! Le <u>flux propre</u> est à prendre en compte avec le coefficient d'auto-inductance L.

   <u>Convention générateur</u> pour $e(t)$ et $i(t)$

5. Régime sinusoïdal forcé : notation complexe

Domaine temporel	Domaine complexe
$e(t)=\sqrt{2}E_{eff}\sin(\omega t)$	$\underline{e}(t)=\sqrt{2}E_{eff}e^{j\omega t}=\underline{E}e^{j\omega t}$ avec $\underline{E}=\sqrt{2}E_{eff}$
$i(t)=\sqrt{2}I_{eff}\sin(\omega t+\psi)$	$\underline{i}(t)=\sqrt{2}I_{eff}e^{j(\omega t+\psi)}=\underline{I}e^{j\omega t}$ avec $\underline{I}=\sqrt{2}I_{eff}e^{j\psi}$

Impédance complexe du circuit : $\underline{Z}=R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)$

Loi d'Ohm : $\underline{E}=\underline{Z}\,\underline{I}=\left[R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)\right]\underline{I}$

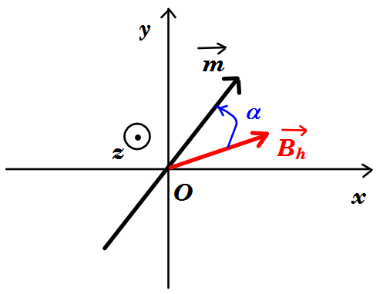
Amplitude complexe du courant : $\boxed{\underline{I}=\dfrac{\underline{E}}{R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}E_{eff}}{R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}}$

Valeur efficace : $\boxed{I_{eff}=\dfrac{|\underline{I}|}{\sqrt{2}}=\dfrac{E_{eff}}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}}$

Lorsque $LC\omega^2=1$, soit $L\omega=\dfrac{1}{C\omega}\Leftrightarrow L\omega-\dfrac{1}{C\omega}=0$, $\boxed{I_{eff}=\dfrac{E_{eff}}{R}}$: la valeur efficace est <u>maximale</u> pour la pulsation particulière $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$: phénomène de <u>résonance</u>.

6. L'apparition du courant induit variable dans l'antivol crée un <u>champ magnétique propre</u>, qui, d'après la <u>loi de Lenz</u>, tend à <u>s'opposer</u> à la cause qui lui a donné naissance, à savoir le champ magnétique créé par l'émetteur. Le <u>champ résultant</u> (champ de l'émetteur + champ induit créé par l'antivol) est donc <u>plus faible au niveau du récepteur</u> que le champ magnétique de l'émetteur seul. La <u>fem induite</u> au niveau du récepteur (tension à ses bornes) diminue également.

Exercice 3 – Champ magnétique terrestre



1. <u>Système</u> : boussole de moment d'inertie J, de moment magnétique $\vec{m}$

   <u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen

   <u>Bilan des forces</u> :

   - Poids $\vec{P}$ colinéaire à (Oz) : $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P})=0$
   - liaison pivot idéale : $\mathcal{M}_{(Oz)}(pivot)=0$
   - Couple électromagnétique : $\vec{\Gamma}=\vec{m}\wedge\vec{B_h}=-mB_h\sin(\alpha)\vec{u_z}$

Théorème du moment cinétique projeté sur (Oz) :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{P}\right) + \mathcal{M}_{(Oz)}\left(pivot\right) + \vec{\Gamma}\cdot\vec{u_z} \Leftrightarrow J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mB_h\sin\alpha$$

$$\boxed{J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mB_h\sin\alpha = 0}$$

À l'équilibre $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$, d'où $\sin\alpha_{éq} = 0$ et $\boxed{\alpha_{éq} = 0 \text{ ou } \pi}$. La position d'équilibre stable correspond à $\boxed{\alpha_{éq} = 0}$ car le couple électromagnétique tend à aligner le moment magnétique $\vec{m}$ avec $\vec{B_h}$, i.e. à le rendre parallèle et de même sens.

2. Approximation des petits angles : $\sin\alpha \simeq \alpha$

   Équation différentielle : $J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mB_h\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mB_h}{J}\alpha = 0$

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{mB_h}{J}}}$$

   Équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de période propre : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB_h}}}$.

3. Lorsqu'on place la bobine de façon que $\vec{B_e}$ et $\vec{B_h}$ soient <u>parallèles et de même sens</u>, le champ résultant est $\vec{B_{tot}} = \vec{B_e} + \vec{B_h}$ tel que $B_{tot} = B_e + B_h$. Un raisonnement analogue conduit à : $\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB_{tot}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\left(B_e + B_h\right)}}}$

- Lorsqu'on inverse le sens du courant dans la bobine, on inverse le sens de $\vec{B_e}$: $\vec{B_e}$ et $\vec{B_h}$ sont <u>parallèles et de sens opposés.</u> Le champ résultant est $\vec{B_{tot}} = \vec{B_e} + \vec{B_h}$ tel que $B_{tot} = B_e - B_h$ car $B_h < B_e$

  Un raisonnement analogue conduit à : $\boxed{T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB_{tot}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\left(B_e - B_h\right)}}}$

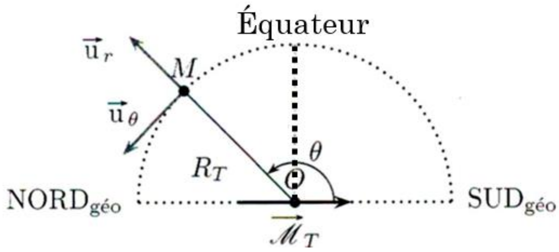
- <u>Expression de B_h :</u>

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_e - B_h}{B_e + B_h}} \Leftrightarrow \frac{B_e - B_h}{B_e + B_h} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \Leftrightarrow B_e - B_h = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\left(B_e + B_h\right)$$

$$B_e\left(1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right) = B_h\left(1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right) \text{ soit } \boxed{B_h = B_e\frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}}$$

4. A.N. : $\boxed{B_h = 2{,}4.10^{-5}\ \text{T} = 24\ \mu\text{T}}$

5. Le Nord géographique correspond à un Sud magnétique (et inversement). Donc le moment magnétique terrestre $\overrightarrow{\mathcal{M}_T}$ pointe <u>du Nord géographique vers le Sud géographique</u>.



6. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ est tangent au sol et pointe localement du sud vers le nord géographique (il suit un méridien en pointant vers les latitudes croissantes). La <u>composante horizontale</u> (parallèle au sol) du champ magnétique correspond à la composante sur $\overrightarrow{u_\theta}$ en $r = R_T$ (à la surface de la Terre) dans le système de coordonnées polaires donné par l'énoncé.

   La latitude géographique λ est repérée par rapport à l'équateur : $\theta = \lambda + \dfrac{\pi}{2}$

$$B_h = B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}_T \sin(\theta_{\exp})}{R_T^{\ 3}} \text{ soit } \boxed{\mathcal{M}_T = \frac{4\pi R_T^{\ 3}}{\mu_0 \sin(\theta_{\exp})} B_h = 9{,}0.10^{22} \text{ A.m}^2}$$

$$\text{avec } \theta_{\exp} = \lambda + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

7. La composante horizontale du champ magnétique est la plus grande quand $\sin(\theta_{\exp}) = 1$, i.e. en $\boxed{\theta = 90° = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}}$, soit à <u>l'équateur</u>.

   <u>Valeur maximale de B_h</u> : $\boxed{B_{h,\max} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathcal{M}_T}{R_T^{\ 3}} = 3{,}4.10^{-5} \text{ T} = 34 \text{ µT}}$

8. Pôles Nord et Sud géographiques : $\theta = 0$ ou π rad : $\overrightarrow{B_{pôle}} = B_r \overrightarrow{u_r}$ avec $B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\mathcal{M}_T \cos(\theta)}{R_T^{\ 3}}$: le champ magnétique est <u>uniquement vertical</u>, orienté vers le Sud géographique, d'intensité : $\boxed{|B_r| = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\mathcal{M}_T}{R_T^{\ 3}} = 68 \text{ µT}}$