TRAVAUX DIRIGÉS ECT3
Bilans d'entropie

Niveau 1

*Exercice 1. Transformation monobare

Un récipient, muni d'un piston mobile de masse négligeable pouvant se déplacer sans frottement, contient un gaz parfait occupant initialement un volume $V_1 = 10{,}0\ \text{L}$ à la température $T_1 = 373\ \text{K}$. Les parois du récipient ainsi que le piston sont calorifugés. La pression qui s'exerce sur le piston vaut initialement $P_1 = 1{,}00.10^6\ \text{Pa}$. On donne $R = 8{,}31\ \text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

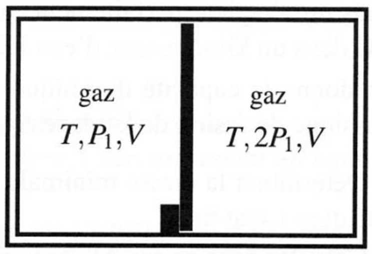
1. Calculer la quantité de matière n de gaz contenue dans le récipient.

La contrainte qui maintient le piston en équilibre est supprimée, de sorte que la pression qui s'exerce sur lui tombe brutalement à la valeur $P_2 = 1{,}00.10^5\ \text{Pa}$ correspondant à la pression atmosphérique du lieu. Le gaz évolue vers un nouvel état d'équilibre caractérisé par les valeurs respectives T_2 et V_2 de la température et du volume.

2. Calculer T_2 et V_2 pour une capacité thermique molaire à volume constant $C_V = \dfrac{5}{2} nR$.
3. Calculer la variation d'entropie ΔS du gaz.
4. Calculer l'entropie créée S^{cr} au cours de la transformation. Quelle est la cause de l'irréversibilité ?

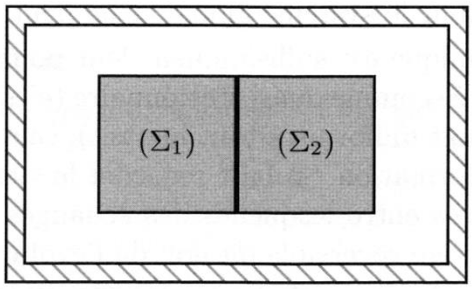
*Exercice 2. Gaz parfait dans deux compartiments

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées est séparée en deux compartiments par une cloison étanche de surface S, mobile et diathermane. Les deux compartiments contiennent chacun un gaz parfait. Dans l'état initial, le gaz du compartiment 1 est dans l'état $(T = 300\ \text{K},\ P_1 = 1{,}0\ \text{bar},\ V = 1{,}0\ \text{L})$, le gaz du compartiment 2 dans l'état $(T, 2P_1, V)$, une cale bloque la cloison mobile. On enlève la cale et on laisse le système atteindre un état d'équilibre.



1. Déterminer l'état final.
2. Calculer l'entropie créée.

*Exercice 3. Solides en contact



Deux blocs de cuivre identiques Σ_1 et Σ_2 de même masse $m = 200$ g sont placés en contact dans une enceinte indéformable adiabatique. Ils sont considérés comme indilatables et incompressibles, et peuvent échanger un transfert thermique entre eux. On donne la capacité thermique massique du cuivre $c = 385$ J.K^{-1}.kg^{-1}. Les solides sont initialement aux températures $T_{i,1}$ et $T_{i,2}$.

La température finale des deux corps a été déterminée dans l'exercice 2 du TD T3 : $T_f = \dfrac{T_{i,1} + T_{i,2}}{2}$.

1. Effectuer un bilan d'entropie pour le système $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ et discuter du caractère réversible ou non de la transformation.
2. Application numérique. Calculer l'entropie créée au sein du système $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ dans les cas suivants :
   a. $T_{i,1} = 20{,}0$ °C et $T_{i,2} = 50{,}0$ °C b. $T_{i,1} = 20{,}0$ °C et $T_{i,2} = 25{,}0$ °C

Exercice 4. Morceau de fer dans un lac

Un morceau de fer de 2 kg, chauffé à blanc (à la température de 880 K) est jeté dans un lac à 5° C. Quelle est l'entropie créée ? On donne la capacité calorifique massique du fer : $c_{fer} = 460$ J.K^{-1}.kg^{-1}. Quelle est la cause de cette création d'entropie ?

Niveau 2

Exercice 5. Sens d'un cycle monotherme

Une mole de gaz parfait $(\gamma = 1{,}4)$ subit la succession de transformations suivante :

- détente isotherme de $P_A = 2$ bar et $T_A = 300$ K jusqu'à $P_B = 1$ bar, en restant en contact avec un thermostat à $T_T = 300$ K ;
- évolution isobare jusqu'à $V_C = 20{,}5$ L toujours en restant en contact avec le thermostat à T_T ;
- compression adiabatique réversible jusqu'à l'état A.

1. Représenter ce cycle en diagramme (P,V). S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ?
2. Déterminer l'entropie créée entre A et B.

3. Calculer la température en C, le travail $W_{B\to C}$ et le transfert thermique $Q_{B\to C}$ reçus par le gaz au cours de la transformation BC. En déduire l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que l'entropie créée.
4. Calculer la valeur numérique de l'entropie créée au cours d'un cycle. Le cycle proposé est-il réalisable ? Le cycle inverse l'est-il ?

Exercice 6. Entrée d'air dans une bouteille

Une bouteille rigide de volume V_1 possède des parois calorifugées, et elle est fermée par un bouchon également calorifugé ; elle est initialement vide. L'air qui l'environne est à la pression P_0 et à la température T_0 ; on le considère comme un gaz parfait de coefficient γ constant. On enlève le bouchon et la bouteille se remplit très rapidement d'air ; dès que l'air n'entre plus, on rebouche la bouteille. On notera V_0 le volume occupé initialement par l'air qui est entré dans la bouteille.

1. Représenter sur un schéma l'état initial, un état intermédiaire et l'état final, en précisant bien le système fermé étudié.
2. Pourquoi peut-on considérer la transformation comme adiabatique ? Déterminer alors l'état final de l'air dans la bouteille, notamment sa température finale T_1, en fonction de T_0 et γ.
3. Déterminer l'entropie créée en fonction de P_0, V_0, T_0 et γ. Préciser la cause de cette création d'entropie.

SOLUTIONS

*Exercice 1. Transformation monobare

1. Système fermé : GP caractérisé dans l'état initial (EI) par P_1, V_1, T_1

   Équation d'état du GP dans EI : $\boxed{n = \dfrac{P_1 V_1}{R T_1} = 3{,}23 \text{ mol}}$

2. EF : P_2, V_2, T_2

   1er principe : $\Delta U + \Delta E_c^{macro} = \Delta U = W_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$

   1ère loi de Joule : $\Delta U = C_V \Delta T = C_V \left(T_2 - T_1\right)$

   Transformation adiabatique (parois calorifugées) : $Q_{1\to 2} = 0$

   Transformation monobare : $P_{ext} = cste = P_2$ donc $W_{1\to 2} = -P_{ext}\Delta V = -P_2\left(V_2 - V_1\right)$

   1er principe : $C_V\left(T_2 - T_1\right) = -P_2\left(V_2 - V_1\right) = -\left(P_2 V_2 - P_2 V_1\right) \qquad (1)$

   Équation d'état du GP dans EI : $P_1 V_1 = nRT_1$ soit $V_1 = \dfrac{nRT_1}{P_1}$

   Équation d'état du GP dans EF : $P_2 V_2 = nRT_2$

   Relation (1) : $\dfrac{5}{2} nR\left(T_2 - T_1\right) = -nR\left(T_2 - \dfrac{P_2}{P_1} T_1\right) \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} T_2 = \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{P_2}{P_1}\right) T_1$

$$\boxed{T_2 = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} + \frac{P_2}{P_1}\right)T_1 = 277\ \text{K}}$$

Équation d'état du GP dans EF : $\boxed{V_2 = \dfrac{nRT_2}{P_2} = 7{,}43.10^{-2}\ \text{m}^3 = 74{,}3\ \text{L}}$

3. Variation d'entropie du GP : $\Delta S = C_V \ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right) + nR\ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)$

$$\boxed{\Delta S = nR\left[\frac{5}{2}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right] = 33{,}0\ \text{J.K}^{-1}}$$

4. Transformation adiabatique : pas d'entropie échangée : $S^{éch} = 0$
   2nd principe : $\Delta S = S^{éch} + S^{cr} = S^{cr}$
   Entropie créée : $\boxed{S^{cr} = nR\left[\dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right) + \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)\right] = 33{,}0\ \text{J.K}^{-1}}$.
   La cause d'irréversibilité est l'inhomogénéité de la pression de part et d'autre du piston, qui provoque son déplacement brutal.

*Exercice 2. Gaz parfait dans deux compartiments

1. Sous-système 1 : Σ_1 : GP dans compartiment 1 (fermé)
   EI : n_1, T, P_1, V
   EF : n_1, T_{F1}, P_{F1}, V_{F1}

- Sous-système 2 : Σ_2 : GP dans compartiment 2 (fermé)
  EI : n_2, T, $2P_1$, V
  EF : n_2, T_{F2}, P_{F2}, V_{F2}
- Système global : $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ + enceinte + paroi mobile
  8 inconnues à déterminer !
- Équation d'état du GP dans EI pour Σ_1 et Σ_2 :

  $P_1V = n_1RT \Leftrightarrow \boxed{n_1 = \dfrac{P_1V}{RT} = 4{,}0.10^{-2}\ \text{mol}}$

  $2P_1V = n_2RT \Leftrightarrow \boxed{n_2 = \dfrac{2P_1V}{RT} = 2n_1 = 8{,}0.10^{-2}\ \text{mol}}$
- Paroi diatherme : équilibre thermique : $\boxed{T_{F1} = T_{F2}}$
- Paroi mobile : équilibre mécanique : $\boxed{P_{F1} = P_{F2}}$
- 1er principe pour le système global Σ :

$$\Delta U_\Sigma + \Delta E_{c,\Sigma}^{macro} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{\text{enceinte}} + \Delta U_{\text{cloison}} + \Delta E_{\text{c,cloison}}^{macro}$$

$$\Delta U_\Sigma + \Delta E_{c,\Sigma}^{macro} \simeq \Delta U_1 + \Delta U_2 = W_{\Sigma,EI\to EF} + Q_{\Sigma,EI\to EF}$$

Pour Σ : transformation adiabatique : $Q_{\Sigma,EI\to EF} = 0$

Pour Σ : enceinte indéformable : $W_{\Sigma,EI\to EF} = 0$

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \qquad (1)$$

- 1ère loi de Joule pour Σ_1 et Σ_2 : $\Delta U_1 = C_{V1}\Delta T = \frac{n_1 R}{\gamma - 1}(T_{F1} - T)$

$$\Delta U_2 = C_{V2}\Delta T = \frac{n_2 R}{\gamma - 1}(T_{F2} - T) = 2\frac{n_1 R}{\gamma - 1}(T_{F1} - T)$$

Relation (1) : $\frac{n_1 R}{\gamma - 1}(T_{F1} - T) + 2\frac{n_1 R}{\gamma - 1}(T_{F1} - T) = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_{F1} = T = T_{F2} = 300 \text{ K}}$

- Équation d'état du GP dans EF pour Σ_1 et Σ_2 :

$P_{F1}V_{F1} = n_1 R T_{F1} \Leftrightarrow P_{F1}V_{F1} = n_1 R T \quad (2)$

$P_{F2}V_{F2} = n_2 R T_{F2} \Leftrightarrow P_{F1}V_{F2} = 2n_1 R T \quad (3)$

Rapport des relations (2) et (3) : $\frac{V_{F2}}{V_{F1}} = 2 \quad (4)$

- Invariance du volume total : $V_{F2} + V_{F1} = 2V \quad (5)$

Relations (4) et (5) : $\boxed{V_{F1} = \frac{2}{3}V = 0{,}67 \text{ L}}$ et $\boxed{V_{F2} = \frac{4}{3}V = 1{,}3 \text{ L}}$

- Équation d'état du GP dans EF :

$$P_{F1} = \frac{n_1 R T}{V_{F1}} = \frac{3n_1 R T}{2V} \Leftrightarrow \boxed{P_{F1} = \frac{3}{2}P_1 = P_{F2} = 1{,}5 \text{ bar}}$$

2. Variation d'entropie du GP pour Σ_1 :

$$\Delta S_1 = C_{V1}\ln\left(\frac{T_{F1}}{T}\right) + n_1 R\ln\left(\frac{V_{F1}}{V}\right) = n_1 R\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

- Variation d'entropie du GP pour Σ_2 :

$$\Delta S_2 = C_{V2}\ln\left(\frac{T_{F2}}{T}\right) + n_2 R\ln\left(\frac{V_{F2}}{V}\right) = 2n_1 R\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

- Variation d'entropie du GP pour Σ :

$$\boxed{\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 2n_1 R\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 5{,}7.10^{-2} \text{ J.K}^{-1}}$$

- Transformation adiabatique : pas d'entropie échangée : $S^{éch} = 0$
- 2nd principe : $\Delta S = S^{éch} + S^{cr} = S^{cr}$
- Entropie créée : $\boxed{S^{cr} = \Delta S = 5{,}7.10^{-2} \text{ J.K}^{-1} > 0}$.

Transformation irréversible due à la non uniformité des pressions lorsque la cale est enlevée.

*Exercice 3. Solides en contact

1. Sous-système Σ_1 : bloc de cuivre de masse m, de capacité thermique massique c, subissant un échauffement de $T_{i,1}$ à T_f

Variation d'entropie : $\Delta S_1 = mc\ln\left(\frac{T_f}{T_{i,1}}\right)$

- Sous-système Σ_2 : bloc de cuivre de masse m, de capacité thermique massique c, subissant un échauffement de $T_{i,2}$ à T_f

  Variation d'entropie : $\Delta S_2 = mc\ln\left(\dfrac{T_f}{T_{i,2}}\right)$
- Système global $\Sigma = \{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$

  Variation d'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc\ln\left(\frac{T_f}{T_{i,1}}\right) + mc\ln\left(\frac{T_f}{T_{i,2}}\right) = mc\ln\left(\frac{T_f^{\,2}}{T_{i,1}T_{i,2}}\right)$$

- Transformation adiabatique : pas d'entropie échangée : $S^{éch} = 0$
- 2nd principe : $\Delta S = S^{éch} + S^{cr} = S^{cr}$
- Entropie créée : $\boxed{S^{cr} = \Delta S = mc\ln\left(\dfrac{T_f^{\,2}}{T_{i,1}T_{i,2}}\right) = mc\ln\left(\dfrac{\left(T_{i,1}+T_{i,2}\right)^2}{4T_{i,1}T_{i,2}}\right)}$

$$S^{cr} = mc\ln\left(\frac{\left(T_{i,1}-T_{i,2}\right)^2 + 4T_{i,1}T_{i,2}}{4T_{i,1}T_{i,2}}\right) = mc\ln\left(1+\frac{\left(T_{i,1}-T_{i,2}\right)^2}{4T_{i,1}T_{i,2}}\right)$$

$$1+\frac{\left(T_{i,1}-T_{i,2}\right)^2}{4T_{i,1}T_{i,2}} > 1 \text{ d'où } \ln\left(1+\frac{\left(T_{i,1}-T_{i,2}\right)^2}{4T_{i,1}T_{i,2}}\right) > 0 \text{ et } \boxed{S^{cr} > 0}$$

- Transformation <u>irréversible</u> due à la non uniformité des températures dans le système global.

2. a. $\boxed{S^{cr} = 0{,}183 \text{ J.K}^{-1}}$

   b. $\boxed{S^{cr} = 5{,}51.10^{-3} \text{ J.K}^{-1}}$

   <u>Attention</u> *! Il faut convertir les températures en K !*

Exercice 4. Morceau de fer dans un lac

$S^{cr} = 9{,}3.10^2 \text{ J.K}^{-1} > 0$

Exercice 5. Sens d'un cycle monotherme

1. Cycle moteur 2. $\Delta S_{AB} = nR\ln(2) = 5{,}76 \text{ J.K}^{-1} = S^{éch}_{A\to B}$ $S^{cr}_{A\to B} = 0$

3. $W_{B\to C} = P_B\left(V_B - V_C\right) = 440 \text{ J}$ $Q_{B\to C} = \dfrac{n\gamma R}{\gamma - 1}\left(T_C - T_T\right) = -1{,}54 \text{ kJ}$ $S^{éch}_{B\to C} = -5{,}14 \text{ J.K}^{-1}$

$S^{cr}_{B\to C} = -0{,}52 \text{ J.K}^{-1} < 0$: transformation irréalisable 4. $S^{cr}_{cycle} = -0{,}52 \text{ J.K}^{-1} < 0$ cycle irréalisable

Exercice 6. Entrée d'air dans une bouteille

2. $T_1 = \gamma T_0$ 3. $S^{cr} = \dfrac{P_0V_0}{T_0}\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\ln(\gamma) > 0$