TRAVAUX DIRIGÉS OS7
Oscillateurs amortis en régime transitoire

Niveau 1

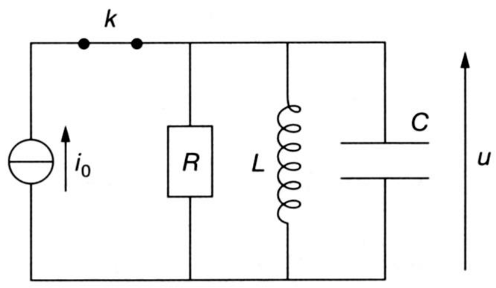
Exercice 1. Nombre de pseudo-oscillations

Un oscillateur amorti est régi par l'équation différentielle $\ddot{u}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}+\omega_0^2 u=0$, où ω_0 est la pulsation propre et Q le facteur de qualité, supposé être tel que $Q>0{,}5$.

1. Déterminer la période T des pseudo-oscillations.
2. Donner la durée τ du régime transitoire correspondant, en prenant le critère de 5%.
3. En déduire le nombre N de pseudo-oscillations ayant lieu pendant le régime transitoire.
4. Simplifier ce résultat pour $Q>>1$.

Niveau 2

*Exercice 2. Circuit RLC parallèle



On considère un dipôle RLC parallèle alimenté, à l'instant $t=0$, par une source de courant idéale de courant électromoteur i_0. À l'instant $t=0$, l'inductance est démagnétisée et le condensateur est déchargé.

1. Représenter le schéma du circuit en $t=0^+$ et déterminer les valeurs de toutes les tensions et intensités à cet instant.
2. Représenter le schéma du circuit en régime permanent et en déduire les valeurs de toutes les tensions et intensités en régime permanent.
3. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ se met sous la forme :
$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2 u=0$$
Calculer ω_0 et Q.
4. Quel est le régime de variations de $u(t)$? Donner les expressions littérale et numérique de $u(t)$.

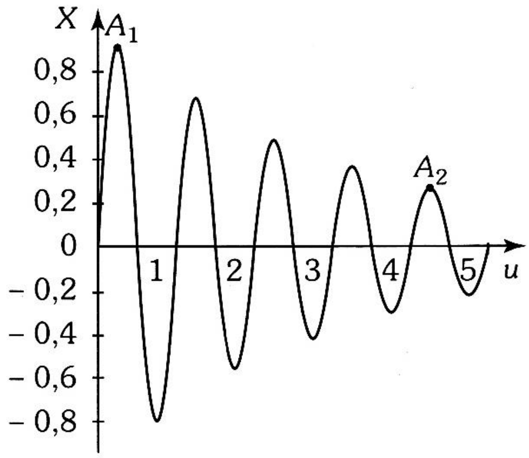
<u>Données</u> : $R=50\ \Omega$ $L=0{,}1\text{ mH}$ $C=10\text{ nF}$ $i_0=1.10^{-2}\text{ A}$

Exercice 3. Décrément logarithmique

L'évolution temporelle d'un oscillateur amorti est régie par l'équation différentielle $\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où σ est le coefficient d'amortissement.

1. Quelle est la dimension de σ ?
2. Mettre cette équation sous forme canonique faisant apparaître le facteur de qualité Q, à exprimer en fonction de σ.

On souhaite déterminer les valeurs de Q et σ à partir de l'analyse du régime libre de l'oscillateur dont la représentation en coordonnées réduites est donnée ci-contre.



3. Quelles sont les conditions initiales utilisées pour cet essai ?
4. Quelle condition sur la valeur de σ donne l'examen rapide des propriétés de cette réponse ?

On désire effectuer une détermination quantitative. Pour ce faire, on exploite le fichier des valeurs enregistrées lors de l'essai et on en extrait les maxima successifs, obtenus à chaque pseudo-période. On note X_n la valeur du n-ième maximum.

5. Montrer que le décrément logarithmique défini par $\delta = \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right)$ est indépendant de la valeur de n.
6. Exprimer Q puis σ en fonction de δ.
7. Comment peut-on déduire la valeur de δ en utilisant les points A_1 et A_2 représentés sur le graphe ?
8. La durée écoulée entre A_1 et A_2 est $\Delta t = 3{,}85$ s et le rapport des amplitudes est $\frac{X(A_1)}{X(A_2)} = 3{,}46$. En déduire Q, σ et ω_0.

* Exercice 4. Interprétation énergétique du facteur de qualité

On considère un circuit RLC série en régime libre, i.e. non soumis à une source de tension. Le condensateur est supposé initialement chargé. On suppose le circuit en régime pseudo-périodique très faiblement amorti : $Q >> 1$.

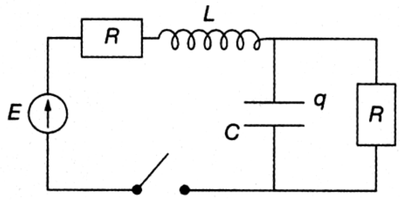
1. Donner les expressions approchées, en fonction de ω_0 et ξ, de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur et du courant $i(t)$ dans le circuit, en tenant compte des

hypothèses (en fonction également de deux constantes A et φ, qui ne sont pas à déterminer).

2. Montrer que l'énergie totale $\mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$ peut s'écrire, de manière approchée, sous la forme : $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\mathscr{E}_0$ et τ à déterminer.
3. Estimer la variation relative approchée de l'énergie totale sur une pseudo-période T définie par $\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} = \frac{\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}(t+T)}{\mathscr{E}(t)}$, en fonction du facteur de qualité Q.

   Rappel mathématique : $e^x \simeq 1+x$ pour $x \ll 1$

*Exercice 5. Évolution de la charge d'un condensateur

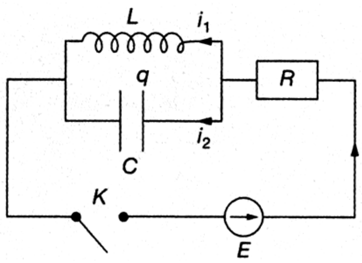


Soit le circuit représenté ci-contre. À $t=0$, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur.

On pose $\tau = RC = \frac{L}{R}$.

1. Montrer que la charge $q(t)$ de l'armature supérieure satisfait l'équation différentielle : $\ddot{q} + \frac{2}{\tau}\dot{q} + \frac{2}{\tau^2}q = \frac{E}{L}$.
2. En déduire l'expression de $q(t)$ en fonction de C, E et τ, puis tracer son allure.
3. Retrouver par un argument simple la charge finale du condensateur.
4. Estimer la durée du régime transitoire.

Exercice 6. Comportement d'un circuit



Sur le circuit ci-contre, le condensateur est initialement déchargé et on ferme l'interrupteur à $t=0$. Les différentes quantités $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $q(t)$ (charge du condensateur) vérifient une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants dont la solution homogène est pseudo-oscillante.

1. Déterminer en $t=0^+$ les valeurs des différentes intensités, de la charge ainsi que celle de $\frac{di}{dt}$.
2. Déterminer les valeurs de ces mêmes grandeurs, en régime permanent.
3. En déduire l'allure de l'évolution temporelle de l'intensité $i(t)$.
4. Établir les équations différentielles vérifiées par $i_1(t)$ et par $i(t)$.

SOLUTIONS

Exercice 1. Nombre de pseudo-oscillations

3. $N = \dfrac{3Q}{\pi}\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

*Exercice 2. Circuit RLC parallèle

1. L est démagnétisée donc équivalente à un interrupteur ouvert : $\boxed{i_L\left(0^+\right)=0}$

➢ C est déchargé donc équivalent à un interrupteur fermé : $\boxed{u\left(0^+\right)=0}$

➢ R est court-circuitée donc $\boxed{i_R\left(0^+\right)=0}$

➢ D'après la loi des nœuds, on en déduit que $\boxed{i_C\left(0^+\right)=i_0}$

2. En régime permanent, C est équivalent à un interrupteur ouvert : $\boxed{I_{CP}=0}$

➢ L est équivalente à un interrupteur fermé : $\boxed{U_P=0}$

➢ R est court-circuitée donc $\boxed{I_{RP}=0}$

➢ D'après la loi des nœuds, on en déduit que $\boxed{I_{LP}=i_0}$

3. Loi des nœuds : $i_0 = i_R + i_L + i_C$

➢ Lois d'Ohm : $i_R = \dfrac{u}{R}$, $i_C = C\dfrac{du}{dt}$ et $u = L\dfrac{di_L}{dt}$

➢ Il faut dériver la loi des nœuds pour pouvoir remplacer $\dfrac{di_L}{dt}$ et non i_L en fonction de u : $\dfrac{di_0}{dt}=0=\dfrac{di_R}{dt}+\dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{di_C}{dt}=\dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{u}{L}+C\dfrac{d^2u}{dt^2}$.

L'équation différentielle est donc :

$\boxed{\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt}+\omega_0^2u=0}$ avec $\boxed{\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=1.10^6\ rad.s^{-1}}$ et $\boxed{Q=RC\omega_0=R\sqrt{\dfrac{C}{L}}=0,5}$

4. $Q=0,5$: le régime transitoire est critique

① Solution de l'essm et ③ Solution complète :

Équation caractéristique : $r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$

Discriminant : $\Delta=\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=0$. Il y a donc une racine double : $r=-\dfrac{\omega_0}{2Q}=-\omega_0$

$$\boxed{u(t)=\left(At+B\right)e^{-\omega_0 t}}$$

④ Conditions initiales : $u\left(0^+\right)=0$ et $\left(\dfrac{du}{dt}\right)_{t=0^+}=\dfrac{i_C\left(0^+\right)}{C}=\dfrac{i_0}{C}$

$$\begin{cases} u(0^+) = B = 0 \\ \left(\dfrac{du}{dt}\right)_{t=0^+} = A - B\omega_0 = \dfrac{i_0}{C} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} B = 0 \\ A = \dfrac{i_0}{C} \end{cases}}$$

⑤ Solution finale : $\boxed{u(t) = \dfrac{i_0}{C} t e^{-\omega_0 t} = 10^6 t e^{-10^6 t}}$

Exercice 3. Décrément logarithmique

5. $\delta = \sigma\omega_0 T_P = \dfrac{\omega_0 T_P}{2Q}$ avec T_P la pseudo-période 6. $Q = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{\delta^2} + \dfrac{1}{4}}$ et $\sigma = \dfrac{1}{2Q}$

8. $Q = 10{,}1$, $\sigma = 49{,}3.10^{-3}$, $\omega_0 = 6{,}52$ rad.s^{-1}

*Exercice 4. Interprétation énergétique du facteur de qualité

1. Tension aux bornes du condensateur : le régime transitoire est pseudo-périodique donc : $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)e^{-\xi\omega_0 t}$ où $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ est la pseudo-pulsation et $\xi = \dfrac{1}{2Q} = \dfrac{R}{2L\omega_0}$ est le facteur d'amortissement. Comme $Q >> 1$, on a : $\omega \simeq \omega_0$ où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre. A et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales. On a donc :

$$\boxed{u(t) \simeq A\cos(\omega_0 t + \varphi)e^{-\xi\omega_0 t}}$$

➢ Intensité dans l'inductance (en série avec C) : on choisit une convention récepteur pour C et $i = C\dfrac{du}{dt} \simeq CA\left[-\xi\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$.

Comme $Q >> 1$, alors $\xi = \dfrac{1}{2Q} << 1$ et on néglige le cosinus dans la somme. On a donc :

$$\boxed{i \simeq -CA\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)e^{-\xi\omega_0 t}}$$

2. Énergie totale :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\mathscr{E} \simeq \frac{1}{2}C\left(A\cos(\omega_0 t + \varphi)e^{-\xi\omega_0 t}\right)^2 + \frac{1}{2}L\left(-CA\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)e^{-\xi\omega_0 t}\right)^2$$

$$\mathscr{E} \simeq \frac{1}{2}CA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)e^{-2\xi\omega_0 t} + \frac{1}{2}LC^2A^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)e^{-2\xi\omega_0 t}$$

Or, $LC\omega_0^2 = 1$, d'où :

$$\mathscr{E} \simeq \frac{1}{2}CA^2\cos^2\left(\omega_0 t+\varphi\right)e^{-2\xi\omega_0 t} + \frac{1}{2}CA^2\sin^2\left(\omega_0 t+\varphi\right)e^{-2\xi\omega_0 t}$$

$$\mathscr{E} \simeq \frac{1}{2}CA^2\left[\cos^2\left(\omega_0 t+\varphi\right)+\sin^2\left(\omega_0 t+\varphi\right)\right]e^{-2\xi\omega_0 t}$$

$$\boxed{\mathscr{E} \simeq \frac{1}{2}CA^2e^{-2\xi\omega_0 t} = \mathscr{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = \frac{1}{2\xi\omega_0} \text{ et } \mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}CA^2}$$

L'énergie totale <u>décroît exponentiellement avec la constante de temps</u> $\tau = \dfrac{1}{2\xi\omega_0}$

3. <u>Variation relative d'énergie</u> :

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} = \frac{\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}(t+T)}{\mathscr{E}(t)} = 1-\frac{\mathscr{E}(t+T)}{\mathscr{E}(t)} = 1-\frac{\mathscr{E}_0 e^{-\frac{t+T}{\tau}}}{\mathscr{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} = 1-e^{-\frac{T}{\tau}} = 1-e^{-2\xi\omega_0 T}$$

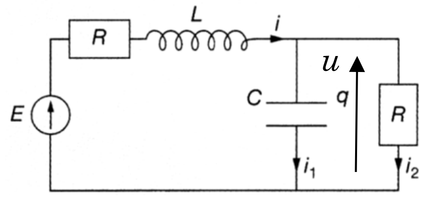
Comme $Q >> 1$, on a : $\omega \simeq \omega_0$ et $T \simeq T_0$ d'où $\omega_0 T \simeq \omega_0 T_0 = 2\pi$ et $\dfrac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} \simeq 1-e^{-4\pi\xi}$

Or, $\xi = \dfrac{1}{2Q} << 1$ et d'après le rappel mathématique, $e^{-4\pi\xi} \simeq 1-4\pi\xi$. La variation relative d'énergie s'écrit :

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} \simeq 1-e^{-4\pi\xi} \simeq 1-\left(1-4\pi\xi\right) \text{ soit } \boxed{\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} \simeq 4\pi\xi = \frac{2\pi}{Q}}$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la variation relative d'énergie est faible, ce qui traduit bien le comportement pseudo-périodique faiblement amorti.

*Exercice 5. Évolution de la charge d'un condensateur



1. Loi des mailles : $E = Ri + L\dfrac{di}{dt} + u$ avec $u = \dfrac{q}{C}$

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$ avec $i_1 = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$

Loi d'Ohm : $i_2 = \dfrac{u}{R} = \dfrac{q}{RC}$ donc : $i = \dot{q} + \dfrac{q}{RC} = \dot{q} + \dfrac{q}{\tau}$ $\quad(1)$

$$E = R\left(\dot{q}+\frac{q}{\tau}\right) + L\left(\ddot{q}+\frac{\dot{q}}{\tau}\right) + \frac{q}{C}$$

$$\frac{E}{L} = \frac{R}{L}\left(\dot{q}+\frac{q}{\tau}\right) + \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau} + \frac{q}{LC} \Leftrightarrow \frac{E}{L} = \frac{1}{\tau}\left(\dot{q}+\frac{q}{\tau}\right) + \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau} + \frac{q}{\tau^2}$$

$$\boxed{\ddot{q}+\frac{2}{\tau}\dot{q}+\frac{2}{\tau^2}q=\frac{E}{L}\Leftrightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{E}{L}\text{ avec }\omega_0=\frac{\sqrt{2}}{\tau}\text{ et }\xi=\frac{2}{2\tau\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

2. D'après l'énoncé, la solution homogène est pseudo-oscillante ($\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$)

① Solution de l'essm

$$q(t)=\left(A\cos(\omega_P t)+B\sin(\omega_P t)\right)e^{-\xi\omega_0 t}\text{ avec }\omega_P=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}=\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\tau}$$

$$q(t)=\left(A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right)+B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

② Solution particulière : $\frac{2}{\tau^2}q_P=\frac{E}{L}\Leftrightarrow q_P=\frac{E\tau^2}{2L}=\frac{1}{2}CE$

③ Solution complète : $q(t)=\left(A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right)+B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{2}CE$

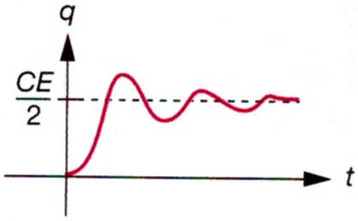
④ Conditions initiales : C est déchargé et pas de discontinuité de tension à ses bornes : $u(0^-)=u(0^+)=0$. Or, $q(t)=Cu(t)$, d'où $q(0^-)=q(0^+)=0$

L est démagnétisée et pas de discontinuité de courant : $i(0^-)=i(0^+)=0$.

La relation en $t=0^+$ s'écrit : $i(0^+)=\dot{q}(0^+)+\frac{q(0^+)}{\tau}$ soit $\dot{q}(0^+)=0$

$$\begin{cases}q(0)=A+\frac{1}{2}CE=0\\ \dot{q}(0)=-\frac{1}{\tau}A+B\frac{1}{\tau}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}CE\\ B=A=-\frac{1}{2}CE\end{cases}$$

⑤ Solution finale : $\boxed{q(t)=\frac{1}{2}CE\left[1-\left(\cos\left(\frac{t}{\tau}\right)+\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$



3. Au bout d'un temps très long, $q=cste$ et $i_1=\frac{dq}{dt}=0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. $i=cste$ et $u_L=L\frac{di}{dt}=0$: la bobine se comporte alors comme un fil. Donc le circuit est équivalent à deux résistances identiques branchées en série sur un générateur de fem E. D'après le diviseur de tension : $u(\infty)=\frac{R}{R+R}E=\frac{E}{2}$ et $\boxed{q(\infty)=Cu(\infty)=C\frac{E}{2}}$

4. Le régime transitoire est d'une durée de quelques τ étant donné qu'il y a un terme exponentiel $e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Exercice 6. Comportement d'un circuit

1. $i_1\left(0^+\right)=0$, $q\left(0^+\right)=0$, $i_2\left(0^+\right)=i\left(0^+\right)=\frac{E}{R}$, $\left(\frac{di(t)}{dt}\right)_{t=0^+}=-\frac{E}{R^2C}$

2. $\left(\frac{di(t)}{dt}\right)_{t\to\infty}=0$ $i_1(\infty)=i(\infty)=\frac{E}{R}$, $i_2(\infty)=0$, $q(\infty)=0$

4. $\frac{d^2i_1(t)}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{di_1(t)}{dt}+\omega_0^2 i_1(t)=\omega_0^2\frac{E}{R}$, $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, même équation différentielle pour $i(t)$