Programme de colle, semaine 12

Suites 2 et structures algébriques :

— Nous avons défini les notions de $o(\cdot)$ et $O(\cdot)$ et démontré (entre autres) la compatibilité par sommes. Nous avons montré que l'équivalence était une relation d'équivalence. Nous avons montré que $u_n \sim v_n$ ssi $u_n = v_n + o(v_n)$. Nous avons ensuite démontré les comparaisons des suites de référence :

$$n! = o(n^n),\ a^n = o(n!),\ \forall a > 1,\ n^b = o(a^n) \text{ et } \forall b > 0,\ (\ln(n))^c = o(n^b).$$

— Nous avons ensuite vu les opérations autorisées sur les équivalents (produit, passage à l'inverse, passage à la puissance avec un exposant indépendant de n). Attention à ne jamais faire de sommes ou de compositions d'équivalents et à ne jamais écrire $u_n \to_{n\to+\infty} v_n$!

— Nous avons ensuite démontré à l'aide des taux d'accroissements de fonctions dérivables les équivalents pour $u_n \to 0$ (à connaitre) :

$$\sin(u_n) \sim u_n,\ \ln(1+u_n) \sim u_n,\ \tan(u_n) \sim u_n,\ e^{u_n} - 1 \sim u_n,\ (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n,\ \dots$$

Nous avons vu des applications au calcul de limites (par exemple le calcul de la limite de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$). Nous avons également énoncé et admis la formule de Stirling et l'équivalent de la série harmonique.

— Nous avons traité quelques exemples de calculs d'équivalents de suites définies implicitement.

— Nous avons donné la définition d'une loi de composition interne, d'une loi associative, commutative. Nous avons donné la définition d'un élément neutre, un élément inversible puis vu les définitions de groupes, sous-groupes ainsi que des exemples. En particulier, nous avons démontré que l'intersection de deux sous-groupes est encore un sous-groupe et nous avons étudié les sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

— Nous avons ensuite vu la définition d'un anneau, d'un sous anneau, d'un corps et d'un sous corps, de l'intégrité ainsi que des exemples. Nous en avons en particulier revu la formule du binôme et la factorisation de $a^n - b^n$ dans le cas où a et b commutent.

Remarques sur le programme : l'étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est hors programme. **Il n' y a pas de colle de maths la semaine de la rentrée mais appren ez votre cours bien entendu !**

Compétences :

— Savoir déterminer un équivalent d'une expression donnée par une somme en factorisant par le terme dominant.

— Savoir déterminer un équivalent d'expressions « compliquées » (avec du sinus, de la tangente) à l'aide des équivalents classiques.

— Déterminer un équivalent d'une suite définie implicitement en identifiant le terme dominant dans l'expression définissant la suite.

— Utiliser les différentes caractérisations des sous-groupes/sous-anneaux/sous-corps pour démontrer qu'un ensemble est un groupe/anneau/corps.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un groupe, d'un anneau et d'un corps et illustrez par des exemples (attendu : pour le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$, pour l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et pour le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$).
2. Donner la définition d'un anneau, d'un anneau intègre, d'un élément inversible d'un anneau et d'un corps. Montrer qu'un corps est intègre.
3. Donner les définitions de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ en illustrant graphiquement et utiliser la première définition pour montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite en $x_0 \in I$, alors cette limite est $f(x_0)$.
4. Démontrer qu'une fonction qui admet une limite en x_0 admet une limite à gauche et à droite en x_0 mais que la réciproque est fausse (contre exemple attendu : la fonction valant 1 en 0 et 0 ailleurs)
5. Déterminer pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \lfloor x \rfloor$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} \lfloor x \rfloor$ en séparant les cas $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \notin \mathbb{Z}$.
6. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction f et l'utiliser pour démontrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Ce que je vous recommande de faire : bien apprendre les définitions/résultats du cours (surtout de la continuité car on commencera la dessus mardi !), faire des exercices de la méthodologie sur la fin des structures algébriques et le début de la continuité et bien entendu chercher le DM (mais pas pendant 10 heures non plus...)

Prochain programme : limites de fonctions et continuité !

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions, bonnes fêtes de fin d'année à tous !