6. Fonctions usuelles, corrigé

Exercice 1. Posons $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$. En étudiant le signe de f' et en effectuant le tableau de variations de f, on voit qu'elle est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$. Pour que f soit inversible sur un intervalle qui contient 2, il faut qu'elle soit strictement monotone sur cet intervalle. L'intervalle recherché est donc $I = [1, +\infty[$. f y est continue strictement croissante donc bijective de $[1, +\infty[$ dans $[2, +\infty[$ (que l'on trouve en calculant les limites).

Pour calculer la réciproque, il suffit d'inverser la relation $f(x) = y$ avec $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [2, +\infty[$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^4 - x^2 y + 1 = 0.$$

On a donc une équation de degré 2 en x^2 de discriminant $y^2 - 4$ qui est bien positif car $y \geq 2$. On trouve donc deux racines, $x_1^2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ et $x_2^2 = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}$. Il ne faut garder qu'une des deux solutions sachant que l'on veut des solutions dans $[1, +\infty[$.

Or, ici on peut vérifier que puisque $y \in [2, +\infty[$, on a $x_2^2 \leq 1$. En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y - 2 \leq \sqrt{y^2 - 4} \\
&\Leftrightarrow \quad (y - 2)^2 \leq y^2 - 4 \qquad \text{(car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad -4y + 4 \leq -4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2 \leq y.
\end{aligned}$$

La dernière condition étant toujours vraie. On en déduit donc qu'il qu'il faut choisir la première racine. Enfin, puisque x est positif, on a alors $x = \sqrt{\dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}}$.

On a donc $f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}}$, définie de $[2, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Exercice 2. **Avec le théorème de la bijection continue.**

1) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = x \ln(x)$. Sur $]0, 1]$, f est négative et ne peut donc pas prendre la valeur 1. Sur $[1, +\infty[$, on a f continue comme produit de fonctions continues. De plus, f est dérivable et pour $x \geq 1$, $f'(x) = \ln(x) + 1 > 0$. On a donc f strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

De plus, on a $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection continue, on a f bijective de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$. Puisque $1 \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution dans $[1, +\infty[$ (et donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ car il n'y a pas de solution dans $]0, 1]$).

2) Posons $f : x \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$. Remarquons que puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) \geq 1$, on a $\dfrac{1}{\text{ch}(x)} \in]0, 1]$. On en déduit que l'équation $f(x) = x$ ne peut pas avoir de solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$.

On pose donc pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. On a g continue sur $[0, 1]$ (somme/quotient de fonctions continues), on a $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \dfrac{1}{\text{ch}(1)} - 1 \leq 0$. On a aussi g dérivable et pour $x \in [0, 1]$:

$$g'(x) = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} - 1 < 0.$$

On a donc g strictement décroissante sur $[0,1]$. D'après le théorème de la bijection continue, on a donc g bijective de $[0,1]$ dans $\left[\frac{1}{\text{ch}(1)} - 1, 1\right]$. Puisque 0 est dans l'intervalle d'arrivée, on a donc que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, ce qui donne donc un unique point fixe de f sur cet intervalle.

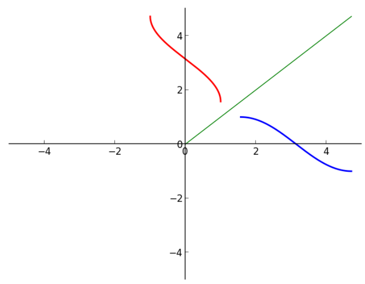
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = e^{-x^2} - e^x + 1$. On a h continue sur $\mathbb{R}$, dérivable (comme somme/composée de fonctions continues/dérivables). Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = -2xe^{-x^2} - e^x < 0.$$

h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On a de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0 - 0 + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$ (pas de forme indéterminée). D'après le théorème de la bijection continue, h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty, 1[$. Puisque $0 \in]-\infty, 1[$, on en déduit que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. sin est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, continue et $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin(3\pi/2) = -1$. D'après le théorème de la bijection continue, on en déduit que sin est bijective de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. On trace le graphe en réalisant le symétrique par rapport à $y = x$ du graphe de sinus sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

On peut alors tracer le graphe de g :



On peut obtenir la réciproque en résolvant l'équation $\sin(x) = y$ où $y \in [-1, 1]$ et d'inconnue $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(y) &\Leftrightarrow \arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(y) \\
&\Leftrightarrow \pi - x = \arcsin(y) \\
&\Leftrightarrow x = \pi - \arcsin(y).
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction réciproque est $g(y) = \pi - \arcsin(y)$. On peut donc obtenir son graphe à partir de celui de arcsin en effectuant le symétrique par rapport à l'axe des abscisses et en effectuant ensuite une translation de vecteur $\pi\vec{j}$ (si on trace dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto \text{sh}(x) - \sin(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \text{ch}(x) - \cos(x)$. On en déduit, puisque $\text{ch}(x) \geq 1$ et que la seule valeur pour laquelle ch vaut 1 est en 0 que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et vaut 0 en $x = 0$. Ceci entraine que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un seul point). Cette fonction est de plus continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et ses limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$ (car le sinus est borné et $\text{sh}(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On peut dire que f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$(car f l'est), strictement croissante (car f l'est), tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$ (comme f). Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (car f' ne s'annule qu'en 0 et que $f(0)=0$). Elle est impaire (car f l'est). On peut également tracer son graphe en effectuant le symétrique de celui de f par rapport à $y=x$.

Exercice 5. Il faut à chaque fois se ramener dans le bon intervalle pour pouvoir simplifier.

1) On a :

$$\begin{aligned}
\arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{11}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{11}-2\pi\right)\right)\\
&= \arccos\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{11}\right)\right)\\
&= \arccos\left(\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)\right)\\
&= \frac{6\pi}{11}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car $\frac{6\pi}{11}\in[0,\pi]$.

2) On a :

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)\right) &= \arcsin\left(\sin\left(-2\pi+\frac{13\pi}{7}\right)\right)\\
&= \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)\\
&= -\frac{\pi}{7}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car $-\frac{\pi}{7}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

3) On a :

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{5}\right)\right) &= \arctan\left(\tan\left(\frac{11\pi}{5}-2\pi\right)\right)\\
&= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{5}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car $\frac{\pi}{5}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6.

1) $f : x\mapsto \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\\
&= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci entraine que f est constante sur chacun des intervalles qui composent son domaine de définition. On a donc f constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et f constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour déterminer la valeur de cette constante, on peut étudier les limites en $\pm\infty$ ou plus simplement ici évaluer en -1 et en 1. En effet, on a $f(1)=\arctan(1)+\arctan(1)=\frac{\pi}{2}$ et de même $f(-1)=-\frac{\pi}{2}$. On en déduit que f est constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Posons $g : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$. Cette fonction est bien définie sur $[-1, 1]$ et est dérivable sur $]1, 1[$ comme somme de fonctions dérivables. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[\,,\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci entraine que f est constante sur $]-1, 1[$. Puisque $f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$, on en déduit que f est constante sur $]-1, 1[$ égale à $\frac{\pi}{2}$. On a de plus :

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

et :

$$f(1) = \arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci entraine que f est constante à égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 8. Pour résoudre l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \frac{2\pi}{3}$, le plus rapide est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$. Cette fonction est définie et continue sur $[-1/2, 1/2]$ et dérivable sur $] - 1/2, 1/2[$. On montre alors que f est strictement croissante (en étudiant la dérivée) sur $] - 1/2, 1/2[$, et donc aussi sur $[-1/2, 1/2]$ car f est continue. On remarque alors que $f(1/2) = \frac{2\pi}{3}$, ce qui prouve que l'équation admet comme unique solution $x = 1/2$.

Pour l'autre égalité, il n'est pas direct de trouver une solution évidente par contre le théorème de la bijection continue nous assure l'existence d'une unique solution (puisque $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Puisque $f(0) = 0$, on a d'ailleurs même que x est positif. Si on note $x \in [0, 1/2]$ cette unique solution, on a alors :

$$\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arcsin(2x) = \frac{\pi}{3} - \arcsin(x).$$

En appliquant la fonction sinus, on obtient alors :

$$\sin(\arcsin(2x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin(x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\arcsin(x)) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\arcsin(x)).$$

Puisque $2x$ et x sont dans $[-1, 1]$ et que pour $y \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$, on a alors :

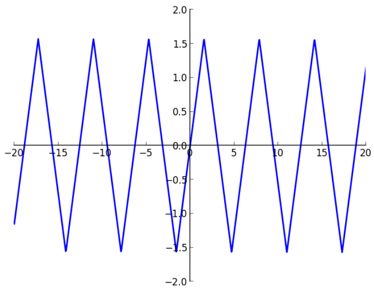
$$\begin{aligned} & 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5}{\sqrt{3}}x = \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Si on élève tout au carré, on obtient $\frac{25}{3}x^2 = 1 - x^2$ soit $x^2 = \frac{3}{28}$. Puisque x est positif, on a donc $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$.

Exercice 9.

1) $f : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ est 2π-périodique (car sinus l'est) et impaire (car sin et arcsin le sont). Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) = x$. De plus, pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ et $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $f(x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

On peut donc tracer ce graphe en traçant $x \mapsto x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto \pi - x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et on complète en utilisant l'imparité et la 2π périodicité.



2) Posons $g : x \mapsto \arcsin(\cos(x))$. Puisque $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. On obtient donc le graphe de g à partir de celui de f en effectuant une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

3) Posons $h : x \mapsto \arctan(\tan(x))$. h est définie pour tous les x tels que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. La fonction tangente étant périodique de période π, h l'est également. De plus pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $h(x) = x$. On en déduit que le graphe de la fonction h s'obtient en traçant la droite $y = x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et en répétant ce motif selon une période de π (et on ne trace pas les points où $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$).

Exercice 11.

Posons $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

h est alors définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$. Elle est donc continue et dérivable sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$. On a alors pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $h'(x) = 0$ (toutes les expressions se simplifient, il faut faire attention à ne pas faire d'erreur de calcul).

h est donc constante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition. Pour déterminer la valeur de h sur chacun des intervalles, on regarde par exemple les valeurs en $\pm\infty$ et en 0^-. On a $\lim_{x\to\infty} h(x) = -\arctan(1) + \arctan(1) = 0$. On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\arctan(1) + \arctan(1) = 0$. Enfin, on a $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Bilan : h est nulle sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ et constante égale à π sur $]-1, 0[$.

Exercice 12. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \times \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}} \\
&= \frac{1+x^2-(x^2+2x+2)}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} + \frac{2x+1}{1+(x^2+x+1)^2} \\
&= (2x+1)\left(-\frac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{1}{1+x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, on a donc f constante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} = 0$ donc f est nulle. On a donc bien l'égalité voulue.

On en déduit (en utilisant une somme télescopique) que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k)) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) \\ &= \arctan(n+1). \end{aligned}$$

On a donc par composition de limites que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14. Pour $x \in]0,1[$, on a $x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)}$. On va donc poser $f(x) = x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$ qui est dérivable sur $]0,1[$ comme somme/produit/composée de fonctions dérivables. Pour $x \in]0,1[$, on a :

$$f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a alors $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 1$ (par stricte croissante de l'exponentielle) et :

$$\frac{x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} > 0.$$

On a donc f décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. f a donc un minimum en $\frac{1}{2}$ donc :

$$\forall x \in]0,1[, \ f(x) \geq -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = -\ln(2).$$

On a donc par croissance de l'exponentielle, $\forall x \in]0,1[, e^{f(x)} \geq e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}$ ce qui est l'inÃ©galité demandée.

Exercice 15. (m)

1) On a $x \in D_f \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \in [-1,1] \Leftrightarrow x^2 \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1]$. $[-1,1]$ est bien symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in [-1,1]$:

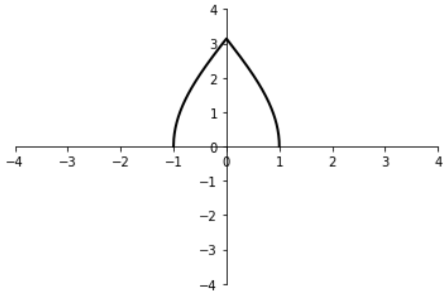
$$f(-x) = \arccos(2(-x)^2 - 1) = \arccos(2x^2 - 1) = f(x).$$

f est donc paire.

2) Puisque f est paire on peut l'étudier sur $[0,1]$. D'après le théorème de la bijection continue, la fonction cos : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ est bijective (elle est strictement décroissante, continue et $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/2) = 0$). Pour $x \in [0,1]$, il existe donc un unique $u \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \cos(u)$ (on a d'ailleurs $u = \arccos(x)$). On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \arccos(2\cos^2(u) - 1) \\ &= \arccos(\cos(2u)). \end{aligned}$$

Or, on a $2u \in [0, \pi]$, ce qui entraine que $f(x) = 2u = 2\arccos(x)$. On peut donc tracer le graphe de f sur $[0,1]$ en dilatant celui de arccos et on complète sur $[-1,0]$ par parité.



3) On pose $g : x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$. A cause du $\sqrt{1-x^2}$, on a forcément $x \in [-1, 1]$. Remarquons de plus que g est impaire (puisque arcsin l'est). On va donc l'étudier sur $[0, 1]$ (si elle est bien définie sur cet ensemble). On pose donc $x = \sin(u)$ où $u = \arcsin(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin(u)\sqrt{1-\sin^2(u)} = 2\sin(u)|\cos(u)|.$$

Puisque $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u) \geq 0$. On a donc :

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin(u)\cos(u) = \sin(2u) \in [-1, 1].$$

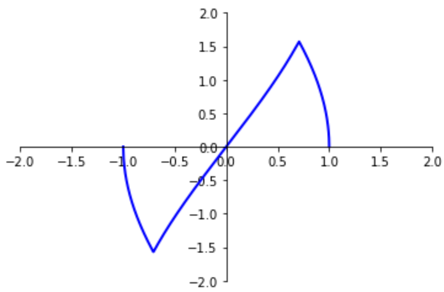
Ceci entraine que g est bien définie sur $[-1, 1]$! Il ne reste plus qu'à simplifier. Pour cela, on doit simplifier $\arcsin(\sin(2u))$. Si $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (donc si $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, alors :

$$g(x) = 2u = 2\arcsin(x).$$

Si $u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (donc si $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, alors :

$$g(x) = \arcsin(\sin(\pi - 2u)) = \pi - 2u = \pi - 2\arcsin(x).$$

On en déduit le graphe de g sur $[0, 1]$ et on complète par imparité :



Exercice 16.

1) Le domaine de définition de cette équation est $\mathbb{R}_+^*$ (pour avoir la puissance et la racine carrée bien définie). On a alors pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \qquad \text{(par injectivité de l'exponentielle).} \end{aligned}$$

On remarque donc que $x = 1$ est solution. Si $x \neq 1$, on peut alors simplifier par $\ln(x)$ et diviser par $\sqrt{x}$ (car $\sqrt{x} \neq 0$ pour obtenir une équation équivalente à $2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4 = x$. L'équation a donc 2 solutions : $x = 1$ et $x = 4$.

2) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} 2^{x^3} = 3^{x^2} &\Leftrightarrow e^{x^3 \ln(2)} = e^{x^2 \ln(3)} \\ &\Leftrightarrow x^3 \ln(2) = x^2 \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x^2(x \ln(2) - \ln(3)) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

3) Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$. On remarque déjà que si $x = y$, alors on a bien $x^y = y^x$. Cherchons les solutions pour $x \neq y$. On a $x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y \ln(x)} = e^{x \ln(y)}$. Ceci est équivalent à $y \ln(x) = x \ln(y)$, ce qui revient à $f(x) = f(y)$ où f est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Ceci entraine, puisque $2 < e < 3$, les seules possibilités pour avoir $f(x) = f(y)$ sont d'avoir $x = 1$ ou $x = 2$ (puisque si x et y sont distincts et strictement plus grand que 2, la fonction étant strictement décroissante, on ne peut pas avoir $f(x) = f(y)$). Si $x = 1$, on a $f(x) = 0$ et donc aucune solution à part $y = x$. On remarque de plus que $f(2) = f(4)$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{(2, 4), (4, 2), (x, x),\ x \in \mathbb{N}^*\}$.

4) L'équation est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $e^{\sqrt{x} \ln(x)} = e^{-\ln(2)}$, c'est à dire si et seulement si $\sqrt{x} \ln(x) = -\ln(2)$. On remarque alors que les éventuelles solutions sont dans $]0, 1[$ car on doit avoir $\ln(x) < 0$. On remarque que $x = \dfrac{1}{4}$ est solution. En étudiant les variations de $x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$, on remarque qu'il existe 2 solutions (la fonction étant décroissante puis croissante sur $]0, 1[$). Il existe donc une deuxième solution. En cherchant encore avec des puissances de 2, on remarque que $x = \dfrac{1}{16}$ est la deuxième solution.

Exercice 18.

1) Pour que $x \mapsto x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ soit bien définie, il faut tout d'abord que $x > 0$ (pour que la fonction puissance soit bien définie et que $\ln(x)$ soit bien définie). Il faut également avoir $\ln(x) > 0$ (pour pouvoir calculer $\ln(\ln(x))$ et $\ln(x) \neq 0$ (pour pouvoir diviser par $\ln(x)$). On en déduit que le domaine de définition de cette fonction est $D =]1, +\infty[$. On a alors pour $x \in D$ (en utilisant la définition de x^α et le fait que exponentielle est la réciproque de ln) :

$$\begin{aligned} x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} &= e^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \times \ln(x)} \\ &= e^{\ln(\ln(x))} \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

2) Posons $g(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(\ln(x)) + \mathrm{sh}(\ln(x))}{x}$. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+^*$ (pour que la fonction ln soit bien définie et que x soit différent de 0). On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\frac{e^{\ln(x)} + e^{-\ln(x)}}{2} + \frac{e^{\ln(x)} - e^{-\ln(x)}}{2}}{x} \\ &= \frac{e^{(\ln(x))}}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 19. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array} \right.$.

1) Pour $x \geq 1$, on a $x^2 - 1 \geq 0$. De plus, pour $x \geq 1$, on a $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1 + 0$ donc f est bien définie sur $[1, +\infty[$ et par croissance de ln, on a $f(x) \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est donc bien définie.

2) Soit $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(f(x)) &= \frac{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}{2} \\
&= \frac{x + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2 + 1}{2(x+\sqrt{x^2-1})} \\
&= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}}{2x + 2\sqrt{x^2-1}} \\
&= x.
\end{aligned}$$

De même, pour $t \geq 0$, on a $\operatorname{ch}(t) \geq 1$ donc $f(\operatorname{ch}(t))$ existe et :

$$\begin{aligned}
f(\operatorname{ch}(t)) &= \ln(\operatorname{ch}(t) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(t) - 1}) \\
&= \ln(\operatorname{ch}(t) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(t)}) \\
&= \ln(\operatorname{ch}(t) + |\operatorname{sh}(t)|) \\
&= \ln(\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)) && \text{car } t \geq 0 \\
&= \ln(e^t) \\
&= t.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $f \circ \operatorname{ch} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_+}$ et que $\operatorname{ch} \circ f = \operatorname{Id}_{[1,+\infty[}$. On a donc f qui est la fonction réciproque de $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.

Exercice 20. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$. On a alors f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables. En effet, arctan et sh donc dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la première partie ne pose pas de souci. De plus, $\forall x \neq 0$, $0 < \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} < 1$ et arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. Par contre, en $x = 0$, on a $\frac{1}{\operatorname{ch}(0)} = 1$ et arccos n'est pas dérivable en 1. En tout cas, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ f'(x) &= \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} - \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} \\
&= \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(x)-1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} \\
&= \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)\frac{|\operatorname{sh}(x)|}{|\operatorname{ch}(x)|}} \\
&= \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a utilisé plusieurs fois l'égalité $\text{ch}^2(x)-\text{sh}^2(x)=1$ et aussi le fait que $\sqrt{\text{sh}^2(x)}=|\text{sh}(x)|=\text{sh}(x)$ car $x>0$ (et $\sqrt{\text{ch}^2(x)}=\text{ch}(x)$ car $\text{ch}(x)>0$). Puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on a alors f constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a de plus par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}-\arccos(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$. f est donc constante égale à 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On traite à présent le cas particulier de $x=0$. On a $f(0)=\arctan(0)-\arccos(1)=0-0=0$. L'égalité demandée est donc bien vraie sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 21.

1) On a pour $x>0$, $\dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}=\dfrac{x}{x}\times\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\ln(x)}{x}+1}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ par croissances comparées, on en déduit que la limite recherchée est 1.

2) Pour $x>0$, on a $x^x=e^{x\ln(x)}$. Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)=0$ par croissances comparées, on en déduit par continuité de l'exponentielle que $\lim\limits_{x\to0^+} x^x=1$.

3) On pose $X=\ln(x)$. On a $\lim\limits_{x\to1^+} X=0$. Or, la limite étudiée est celle de $X\ln(X)$. Par croissances comparées et composition de limites, on en déduit que cette limite vaut 0 quand x tend vers 1^+ (car on a alors X qui tend vers 0^+).

4) Pour $x>0$, on a $(1+x)^{1/x}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{x+1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x+1}}$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$. On a également $\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ qui tend vers 1 quand x tend vers l'infini. Par produit et composée de limites, on en déduit que la limite recherchée est 1.

5) Pour $x>0$, on a $\dfrac{e^{2x}(\ln(x))^3}{x^4}=\dfrac{e^{2x}}{x^4}\times(\ln(x))^3$. Par croissances comparées, le terme de gauche tend vers $+\infty$ et le terme de droite aussi par produit de limites. On en déduit par produit de limites que la limite recherchée est $+\infty$.

6) On a pour $x>1$, $(\ln(x))^{\sin(x)/x}=e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(\ln(x))}=e^{\frac{\ln(x)}{x}\times\sin(x)\times\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}=0$. Puisque la fonction sinus est bornée, si on la multiplie par des fonctions qui tendent vers 0, elle tend aussi vers 0. On en déduit par composition de limites que la limite recherchée est 1.

Exercice 22. On a une forme indéterminée. On va simplifier le $\ln(\text{ch}(x))$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(\text{ch}(x)) &= \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\\ &= \ln(e^x+e^{-x})-\ln(2)\\ &= \ln(e^x(1+e^{-2x}))-\ln(2)\\ &= x+\ln(1+e^{-2x})-\ln(2).\end{aligned}$$

On en déduit que $x-\ln(\text{ch}(x))=\ln(2)-\ln(1+e^{-2x})$. Ceci entraine que la limite recherchée vaut $\ln(2)$ (par composition de limite).

Exercice 23. On considère le système $\begin{cases} x+e^x=y+e^y\\ x^2+xy+y^2=12\end{cases}$.

La première ligne du système nous donne que $x+e^x=y+e^y$. Or, la fonction $x\mapsto x+e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc injective. Ceci entraine que $x=y$. La deuxième équation nous donne alors $3x^2 = 12$, ce qui entraine $x = \pm 2$. On trouve donc 2 solutions : $(x, y) = (2, 2)$ et $(x, y) = (-2, -2)$.