19. Fractions rationnelles, méthodologie

I. Arithmétique des polynômes

I.1. PGCD

Proposition. *Lemme d'Euclide.* Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = BQ + R$ avec $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ (P|A \text{ et } P|B) \Leftrightarrow (P|B \text{ et } P|R).$$

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls. Alors, il existe un unique polynôme unitaire $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ (P|A \text{ et } P|B) \Leftrightarrow P|D$. D est appelé le plus grand diviseur commun à A et B et est noté $D = A \wedge B$.

m Les propriétés du PGCD de deux polynômes sont les mêmes que celles du PGCD de deux entiers (la différence étant qu'on imposait au PGCD de deux entiers d'être positif et qu'on impose ici au PGCD de deux polynômes d'être unitaire). On a donc par exemple que $A \wedge B = B \wedge A$, que $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $A \wedge B = (A+BQ) \wedge B$ (lemme d'Euclide), que si $P \in \mathbb{K}[X]$ est unitaire, alors $(PA) \wedge (PB) = P(A \wedge B)$, que l'on pose $0 \wedge 0 = 0$, etc.

m Quand A et B sont donnés sous forme développée, on calcule $A \wedge B$ en effectuant les divisions euclidiennes successives de A par B et $A \wedge B$ est alors égal au dernier reste non nul divisé par son coefficient dominant (car le PGCD est un polynôme **unitaire**).

Exercice d'application 1. Déterminer $A \wedge B$ avec $A = 2X^3 - 4X^2 + 2X - 4$ et $B = X^2 - 3X + 2$.

Proposition. Identité de Bezout. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = A \wedge B$.

I.2. Polynômes premiers entre eux

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont premiers entre eux si $A \wedge B = 1$.

Théorème. De Bezout. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X] \ / \ AU + BV = 1.$$

Théorème. *De Gauss.* Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A|BC$ et $A \wedge B = 1$. Alors $A|C$.

Proposition. Corollaire de Gauss. Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} A|C \\ B|C \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$. Alors, $AB|C$.

(m) Encore une fois, les propriétés sont les mêmes qu'en arithmétique. On retrouve donc le même genre d'exercices et les mêmes méthodes s'appliquent.

Exercice d'application 2. On pose $A = (X^3 + 1)$ et $B = (X^2 + 1)$.

1) Montrer que $A \wedge B = 1$ et en remontant l'algorithme d'Euclide, déterminer $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU_0 + BV_0 = 1$.

2) Déterminer l'ensemble des polynômes $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

Proposition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors :

$$A \wedge B = 1 \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ n'ont aucune racine complexe en commun.}$$

(m) Ce résultat permet de tester très rapidement si des polynômes sont premiers entre eux à condition de connaitre leurs racines.

Exercice d'application 3. Montrer sans utiliser l'algorithme d'Euclide que les polynômes suivants sont premiers entre eux :

1) $A = X^2 + 1$ et $B = X^3 + 1$.

2) $A = (X-2)^3(X+1)^2(X^2+1)$ et $B = (X+2)^2(X^4+2)^5$.

I.3. PPCM

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tous les deux non nuls. Alors, il existe un unique polynôme unitaire $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ (A|P \text{ et } B|P) \Leftrightarrow M|P$. M est appelé le plus petit multiple commun à A et B et est noté $M = A \vee B$.

(m) Comme en arithmétique, les propriétés du PPCM pour les polynômes sont les mêmes que celles du PPCM « usuel ». Il faut ici juste faire attention au fait que le PPCM pour les polynômes est unitaire, quand on utilise la formule suivante pour le calculer (et donc ne pas oublier de diviser par les coefficients dominants).

Proposition. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Si on note $\text{dom}(A)$ et $\text{dom}(B)$ leurs coefficients dominants, alors :

$$(A \wedge B) \times (A \vee B) = \frac{A \times B}{\text{dom}(A) \times \text{dom}(B)}.$$

I.4. Lien avec les polynômes irréductibles

(m) Un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant qui n'est divisible dans $\mathbb{K}[X]$ que par les polynômes constants non nuls et par les polynômes qui lui sont associés (autrement dit de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$). Ils jouent un role similaire aux nombres premiers en arithmétique et vérifient les mêmes propriétés.

Proposition. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Alors, $P|A$ ou $A \wedge P = 1$.

Proposition. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes irréductibles unitaire distincts. Alors $P \wedge Q = 1$.

Théorème. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors, P s'écrit de manière unique sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{r_i}$ où $k \in \mathbb{N}$, $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$, $(r_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont des entiers et λ est le coefficient dominant de P.

m Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 avec un discriminant strictement négatif. Cette factorisation sera très utile pour la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.

m Cette factorisation permet, comme en arithmétique, de trouver le PGCD de deux polynômes très rapidement car si $A = \lambda_1 \prod_{i=1}^{k} P_i^{r_i}$ et $B = \lambda_2 \prod_{i=1}^{k} P_i^{s_i}$ avec les $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ irréductibles et unitaires, alors :

$$A \wedge B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\min(r_i, s_i)} \text{ et } A \vee B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\max(r_i, s_i)}.$$

Exercice d'application 4. Déterminer les PGCDs dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes suivants :

1) $A = X(X+1)^2(X+2)^3(X+3)^4(X+4)^5$ et $B = 6(X+5)(X+4)^2(X+3)^3(X+2)^4(X+1)^5X^6$.

2) $A = (X^2+1)(X+1)^3(X-2)^2(X^2+X+1)^4$ et $B = (X^2-3X+2)(X+2)^3(X^2+X+1)^2$.

I.5. PGCD de plusieurs polynômes

II. Définition des fractions rationnelles

II.1. $\mathbb{K}(X)$

Définition. Une fraction rationnelle F à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$ (polynôme nul). On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème. $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Remarque : Les fractions rationnelles sont aux polynômes ce que $\mathbb{Q}$ est à $\mathbb{Z}$. Toutes les opérations s'effectuent de manière usuelle. Comme pour l'ensemble des rationnels, il est utile de pouvoir manipuler une écriture unique, qui est énoncée dans la proposition suivante.

Proposition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors, $\exists!(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ / $\begin{cases} F = \dfrac{P}{Q} \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ est unitaire} \end{cases}$. On dit alors que F est sous forme réduite ou sous forme irréductible.

II.2. Degré

Définition. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On node $\deg(F) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ le degré de F, défini par $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$. Seule la fraction rationnelle nulle à un degré égal à $-\infty$.

Exercice d'application 5. Déterminer le degré des fractions rationnelles suivantes.

1) $F_1 = X^2 + 2X + 3$.

2) $F_2 = \dfrac{X^4 - 3X^2 + 1}{X^2 + 7X - 2}$.

3) $F_3 = \dfrac{X + 1}{(X+2)^4 (X-3)^3 (X^2+1)}$.

Proposition. Soient $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$. Alors :

$$\deg(F_1 \times F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2) \text{ et } \deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2)).$$

II.3. Racines et pôles

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ où $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme réduite. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que :

- α est racine de F de multiplicité r si α est racine de P de multiplicité r.
- α est pôle de F de multiplicité r si α est racine de Q de multiplicité r.

m Avant de trouver les pôles et les racines d'une fraction rationnelle, il faut bien la mettre sous forme réduite afin de supprimer les éventuelles racines en commun du dénominateur avec le numérateur. On remarquera que $\alpha \in \mathbb{K}$ ne peut jamais être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle (sinon le numérateur et le dénominateur ne seraient pas premiers entre eux).

Exercice d'application 6. Déterminer les racines et les pôles dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1) $F_1 = \dfrac{X^3 - 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

2) $F_2 = \dfrac{X^2 + 1}{(X-1)^2 X (X+1)^2}$.

Exercice d'application 7. Une fraction rationnelle peut-elle admettre plus de racines que son degré ?

II.4. Fraction rationnelle dérivée

Définition. Soit $F = \dfrac{P}{q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose $F' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ la fraction rationnelle dérivée de F.

Remarque : Toutes les propriétés usuelles de la dérivation sont encore vraies (dérivée d'une somme, dérivée d'un produit, etc.). La seule propriété surprenante est que l'on a pas toujours $\deg(F') =$

$\deg(F)-1$. On peut juste montrer que $\deg(F') \leq \deg(F)-1$, l'inégalité pouvant parfois être stricte (prendre par exemple $F = \dfrac{1+X}{X}$).

III. Décomposition en éléments simples

III.1. Partie entière

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ où $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme réduite. Alors, il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $F = E + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$. On dit que E est la partie entière de F.

(m) Si $F \in \mathbb{K}(X)$, on a $\deg(F) < 0$ si et seulement si la partie entière de F est nulle. On commence donc en général par calculer le degré et s'il est positif, on calcule la partie entière en effectuant la division euclidienne de P par Q. Le quotient est alors égal à la partie entière de F.

Exercice d'application 8. Déterminer les parties entières des fractions rationnelles suivantes :

1) $F_1 = \dfrac{X^3+1}{X^2+1}$.
2) $F_2 = \dfrac{X^2+X+1}{X^2-4}$.
3) $F_3 = \dfrac{X^7}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2}$.

III.2. DES, plan de preuve

III.3. DES dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ avec $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme réduite. On a, en factorisant Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ que $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{r_i}$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ et $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ (la partie entière de F) et des uniques complexes $(\beta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq r_i}}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\beta_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}.$$

(m) La méthode pour calculer une décomposition en éléments simples est la suivante :
- On vérifie que la fraction est sous forme réduite (vérifier qu'il n'y a pas de racines en commun entre le numérateur et le dénominateur).
- On calcule le degré de F pour montrer qu'il n'y a pas de partie entière (et s'il y en a une, on la calcule).
- On factorise Q dans $\mathbb{C}[X]$ (Q sera souvent donné sous forme factorisée).
- On écrit la forme de la décomposition.
- On calcule les constantes qui apparaissent dans la décomposition avec les méthodes de la partie suivante.

Exercice d'application 9. Écrire la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes (on ne demande pas de trouver la valeur des coefficients).

1) $F_1 = \dfrac{X^2}{(X+1)(X+2)^2(X+3)^3}$.

2) $F_2 = \dfrac{X^2+X+1}{(X^2+1)^2X^3}$.

III.4. DES dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ avec $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme réduite. On a, en factorisant Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ que $Q = \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{k'}(X^2+a_jX+b_j)^{s_j}$ où les discriminants des polynômes de degré 2 sont strictement négatifs. Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ (la partie entière de F) et des uniques réels $(\beta_{i,i_2})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq i_2\leq r_i}}$, $(c_{j,j_2})_{\substack{1\leq j\leq k'\\ 1\leq j_2\leq s_j}}$ et $(d_{j,j_2})_{\substack{1\leq j\leq k'\\ 1\leq j_2\leq s_j}}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{r_i} \frac{\beta_{i,i_2}}{(X-\alpha_i)^{i_2}} + \sum_{j=1}^{k'}\sum_{j_2=1}^{s_j} \frac{c_{j,j_2}X + d_{j,j_2}}{(X^2+a_jX+b_j)^{j_2}}.$$

(m) La méthode pour calculer une décomposition en éléments simples est la suivante :

- On vérifie que la fraction est sous forme réduite (vérifier qu'il n'y a pas de racines en commun entre le numérateur et le dénominateur).
- On calcule le degré de F pour montrer qu'il n'y a pas de partie entière (et s'il y en a une, on la calcule).
- On factorise Q dans $\mathbb{R}[X]$ (Q sera souvent donné sous forme factorisée).
- On écrit la forme de la décomposition.
- On calcule les constantes qui apparaissent dans la décomposition avec les méthodes de la partie suivante.

Exercice d'application 10. Écrire la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes (on ne demande pas de trouver la valeur des coefficients).

1) $F_1 = \dfrac{X^2}{(X+1)(X+2)^2(X+3)^3}$.

2) $F_2 = \dfrac{X^2+X+1}{(X^2+1)^2X^3}$.

IV. Méthodes de calcul

IV.1. Méthode naïve

IV.2. Multiplication/évaluation

(m) Si on a $F = \dfrac{a}{(X-\alpha)} + \dfrac{b}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \dfrac{c}{(X-\alpha)^n} + \dfrac{d}{(X-\beta)} + \ldots$, on peut déterminer le coefficient c (celui associé à un pôle de plus haute multiplicité) en multipliant par $(X-\alpha)^n$ la fraction F et en évaluant en $X = \alpha$.

Exercice d'application 11. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de :

1) $F_1 = \dfrac{1}{X^2-1}$.

2) $F_2 = \dfrac{2X}{(X+3)(X-4)}$.

(m) La méthode fonctionne également dans le cas des polynômes irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$. Supposons par exemple que $F = \dfrac{cX+d}{X^2+aX+b} + \dots$ avec $\Delta = a^2 - 4b < 0$. On peut alors déterminer les racines complexes (conjuguées) de $X^2 + aX + b$ que l'on note α et $\bar{\alpha}$. On peut alors multiplier F par $X^2 + aX + b$ et évaluer en $X = \alpha$ pour obtenir une relation portant sur $\dots = c\alpha + b$. En étudiant alors la partie réelle et la partie imaginaire (et en utilisant le fait que a et b sont réels), on trouve a et b.

Exercice d'application 12. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de :

1) $F_1 = \dfrac{2X+1}{(X+1)(X^2+1)}$.

2) $F_2 = \dfrac{X+1}{(X-1)(X^2+X+1)}$.

IV.3. Limites en $+\infty$

(m) Si on a $F = \dfrac{a}{(X-\alpha)} + \dots + \dfrac{b}{(X-\alpha)^n} + \dfrac{c}{(X-\beta)} + \dots + \dfrac{d}{(X-\beta)^m} + \dots$, on peut déterminer une relation portant sur les coefficients de plus bas degré en multipliant par X, en posant $X = x$ et en faisant tendre x vers $+\infty$. On obtient alors une relation du type $\lim\limits_{x \to +\infty} xF(x) = a + c + \dots$ ce qui permet d'obtenir une relation liant les coefficients de plus bas degré.

Exercice d'application 13. Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{X^2-3}{(X+2)^2(X+1)}$.

(m) Pour obtenir une nouvelle relation sur les coefficients, on peut toujours évaluer en des valeurs particulières (à n'utiliser qu'en dernier recours). En général, évaluer en $X = 0$ donne une relation « simple ».

Exercice d'application 14. Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{X^2-3}{(X+2)^2(X+1)^2}$.

IV.4. Utilisation de symétries

(m) Si la fraction rationnelle est paire ou impaire, on utilise le fait que la décomposition en éléments simples est unique et le fait que $F(-X) = \pm F(X)$ pour trouver des relations entre les différents coefficients de la décomposition. Par exemple, si on a $F(X) = \dfrac{a}{X-\alpha} + \dfrac{b}{X+\alpha} + \dots$ et que F est paire, on a $F(-X) = \dfrac{-a}{X+\alpha} + \dfrac{-b}{X-\alpha} + \dots$, ce qui entraine $b = -a$. Il suffit donc de ne calculer qu'un des deux coefficients pour obtenir l'autre (division du temps de calcul par deux).

Exercice d'application 15. Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{64}{X(X-2)^2(X+2)^2}$.

IV.5. Dérivation tête en bas

Proposition. Si $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible et que α est un pôle simple de F, alors, on a dans la décomposition en éléments simples de F :

$$F = \frac{\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}}{X-\alpha} + \dots$$

(m) Cette propriété est utile quand on connait les racines de Q, qu'elles sont simples, mais que Q sous forme factorisée est plus compliqué que Q sous forme développée. *En général, quand les racines de Q sont des racines n-ièmes de l'unité...*

Exercice d'application 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{1}{X^{n+1} - X}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

IV.6. DES de $\dfrac{P'}{P}$

Proposition. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. On a donc $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{k_i}$. On a alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{X-\alpha_i}.$$

V. Application au calcul de primitives/intégrales

Remarque : cela peut être une bonne idée de revoir les résultats pour calculer des primitives de fractions rationnelles. La seule nouveauté est qu'à présent on peut à présent vous donner une fraction rationnelle qui n'est pas décomposée en éléments simples et qu'il faut d'abord décomposer avant d'appliquer les techniques vu dans le chapitre sur l'intégration. Je vous remets les différentes méthodes vues ainsi que les exercices d'applications associés.

V.1. Primitives de $\dfrac{P}{Q}$ *avec* $\deg(Q) = 1$

(m) On sait calculer $\displaystyle\int^x \frac{1}{t+a} dt$ car on a une expression de la forme $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{u(t)} dt$. Ici par exemple :

$$\int^x \frac{1}{t+a} dt = \ln(|x+a|).$$

(m) Pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{t+b}{t+a} dt$, on essaye de faire disparaitre les « t » du numérateur en se ramenant au cas précédent en écrivant $\dfrac{t+b}{t+a} = \dfrac{t+a-a+b}{t+a} = 1 + \dfrac{-a+b}{t+a}$. De manière générale, pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{P(t)}{t+a} dt$, on effectue la division euclidienne de P par $X+a$.

Exercice d'application 17. Calculer les intégrales/primitives suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{t+3}dt.$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-3}{2t+1}dt.$

3) $I_3 = \displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{t-2}dt.$ *On précisera les intervalles d'étude.*

V.2. Primitives de $\dfrac{P}{Q}$ *avec* $\deg(Q) = 2$

(m) Pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+bt+c}dt$, on trouve les racines de t^2+bt+c. On a alors trois cas :

- Si $\Delta > 0$, on a deux racines réelles distinctes, alors on décompose en éléments simples la fraction rationnelle et ensuite on primitive.
- Si $\Delta = 0$, on a une racine double et on a une primitive usuelle $\displaystyle\int^x \frac{1}{(t-x_0)^2}dt = -\frac{1}{x-x_0}$.
- Si $\Delta < 0$, alors il faut faire apparaitre la dérivée de arctan en écrivant t^2+bt+c sous la forme $\left(t+\dfrac{b}{2}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4}$. On factorise alors le dénominateur par $c - \dfrac{b^2}{4}$ pour arriver à une expression de la forme :

$$C\int^x \frac{1}{(\alpha t+\beta)^2+1}dt = \frac{C}{\alpha}\arctan(\alpha x+\beta).$$

Exercice d'application 18. Déterminer les primitives suivantes (on précisera les intervalles d'étude) :

1) $\displaystyle\int^x \frac{2}{t^2+4t-5}dt.$

2) $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+4t+4}dt.$

3) $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+2t+3}dt.$

(m) Pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{t+\alpha}{t^2+bt+c}dt$, on commence par se débarasser des t en faisant apparaitre la dérivée du dénominateur au numérateur. On a $\displaystyle\int^x \frac{t+\alpha}{t^2+bt+c}dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{(2t+b)}{t^2+bt+c}dt + \int^x \frac{\alpha-b}{t^2+bt+c}$.
La première intégrale est de la forme $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}dt$ et se calcule donc :

$$\int^x \frac{(2t+b)}{t^2+bt+c}d = \ln(|x^2+bx+c|).$$

Pour la seconde intégrale, on est ramené au cas précédent.

Exercice d'application 19. Déterminer les primitives suivantes (on précisera les intervalles d'étude) :

1) $\displaystyle\int^x \frac{2t+5}{t^2-2t+2}dt.$

2) $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2-t+5}dt.$

VI. Correction des exercices

Exercice d'application 1. On effectue la division euclidienne de A par B. On a tout d'abord :

$$2X^3 - 4X^2 + 2X - 4 = (X^2 - 3X + 2)(2X + 2) + 4X - 8.$$

On effectue ensuite la division euclidienne de B par $4X - 8$. Remarquons que puisque le PGCD est unitaire à la fin, on a $B \wedge (4X - 8) = B \wedge (X - 2)$. On effectue donc plutôt la division euclidienne de B par $X - 2$ (calcul plus simple). On a alors :

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1) + 0.$$

On en déduit finalement que $A \wedge B = X - 2$ (dernier reste non nul normalisé).
Déterminer $A \wedge B$ avec $A = 2X^3 - 4X^2 + 2X - 4$ et $B = X^2 - 3X + 2$.

Exercice d'application 2.

1) On a $X^3 + 1 = (X^2 + 1) \times X - X + 1$ puis $X^2 + 1 = (-X + 1) \times (-X - 1) + 2$. Ceci entraine que $A \wedge B = 1$ (le dernier reste non nul renormalisé vaut $\frac{2}{2} = 1$). En remontant l'algorithme d'Euclide, on a alors :

$$\begin{aligned} 2 &= B + (-X + 1) \times (X + 1) \\ &= B + (A - B \times X) \times (X + 1) \\ &= B \times (1 - X^2 - X) + A \times (X + 1). \end{aligned}$$

On a donc une solution particulière de $AU_0 + BV_0 = 1$ en posant $U_0 = \dfrac{X + 1}{2}$ et $V_0 = \dfrac{-X^2 - X + 1}{2}$.

2) On procède par analyse/synthèse. Supposons tout d'abord $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ solution (analyse). On a alors :

$$AU_0 + BV_0 = AU + BV \Leftrightarrow A(U_0 - U) = B(V - V_0).$$

Puisque $A \wedge B = 1$, on en déduit que $A|(V - V_0)$ d'après le théorème de Gauss. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $V - V_0 = AP$. En réinjectant, on a alors $A(U_0 - U) = ABP$, ce qui entraine après simplification par A (car A n'est pas le polynôme nul et que $\mathbb{K}[X]$ est intègre) que $U_0 - U = BP$.

Effectuons la synthèse. Supposons réciproquement qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $V = V_0 + AP$ et $U = U_0 - BP$. On trouve alors que $AU + BV = 1$. Ceci entraine par analyse/synthèse que l'ensemble des solutions de $AU + BV = 1$ est l'ensemble des couples de polynômes de la forme $(U_0 - BP, V_0 + AP)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice d'application 3.

1) Les racines de A sont i et $-i$ qui ne sont pas racines de B donc $A \wedge B = 1$.

2) Les racines de A sont 2 (racine triple), -1 (racine double) et i et $-i$. Les racines de B sont -2 (racine double) et les racines quatrièmes de $-2 = 2e^{i\pi}$ (racines quintuples) qui sont de la forme $2^{1/4}e^{i\pi/4}e^{\frac{2ik\pi}{4}},\ k \in [\![0, 3]\!]$. Il n'y a aucune racine commune donc $A \wedge B = 1$.

Exercice d'application 4.

1) On a $A \wedge B = X(X + 1)^2(X + 2)^3(X + 3)^3(X + 4)^2$.

2) Attention, B n'est ici pas sous forme de produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puisque $X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1)$. On a donc :

$$A \wedge B = (X - 2)(X^2 + X + 1)^2.$$

Exercice d'application 5. F_1 est de degré 2, F_2 est de degré 2 et F_3 est de degré $1-4-3-2=-8$.

Exercice d'application 6. Déterminer les racines et les pôles dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1) On a $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=(X-1)(X-j)(X-j^2)$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a donc :

$$F_1=\frac{X^2+X+1}{(X-2)(X-3)}=\frac{(X-j)(X-j^2)}{(X-2)(X-3)}.$$

Les racines de F_1 sont donc j et j^2 dans $\mathbb{C}$ (et elles n'en a pas dans $\mathbb{R}$). Les pôles sont 2 et 3 (pôles simples).

2) F_2 est ici sous forme réduite. Elle n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ (et admet i et $-i$ comme racines simples dans $\mathbb{C}$). Elle admet 1 et -1 comme pôles doubles et 0 comme pôle simple.
$F_2=\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2X(X+1)^2}$.

Exercice d'application 7. La réponse est oui. Par exemple, $F(X)=\dfrac{X(X+1)}{X+2}$ est de degré 1 et admet deux racines (0 et -1).

Exercice d'application 8.

1) $\deg(F_1)=1\geq 0$ dont il y a une partie entière non nulle. On a $X^3+1=X(X^2+1)-X+1$. On a donc $F_1=X+\dfrac{-X+1}{X^2+1}$ et la partie entière de F_1 est donc X.

2) $\deg(F_2)=0\geq 0$ donc il y a une partie entière non nulle. On a $X^2+X+1=X^2-4+(X+5)$ d'où $F_2=1+\dfrac{X+5}{X^2-4}$ et la partie entière de F_2 est donc 1.

3) $\deg(F_3)=7-4-4=-1<0$. La partie entière de F_3 est donc nulle.

Exercice d'application 9.

1) $\deg(F_1)=-4<0$ donc la partie entière est nulle. Il existe ici des constantes $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{C}$ tels que :

$$F_1=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X+2}+\frac{c}{(X+2)^2}+\frac{d}{X+3}+\frac{e}{(X+3)^2}+\frac{f}{(X+3)^3}.$$

2) $\deg(F_2)=-5<0$ donc la partie entière est nulle. Pour avoir la factorisation en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ du dénominateur, on doit factoriser $(X^2+1)=(X+i)(X-i)$. On en déduit qu'il existe des constantes $a,b,c,d,e,f,g\in\mathbb{C}$ telles que :

$$F_2=\frac{a}{X-i}+\frac{b}{(X-i)^2}+\frac{c}{X+i}+\frac{d}{(X+i)^2}+\frac{e}{X}+\frac{f}{X^2}+\frac{g}{X^3}.$$

Exercice d'application 10.

1) $\deg(F_1)=-4<0$ donc la partie entière est nulle. Il existe ici des constantes $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ tels que :

$$F_1=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X+2}+\frac{c}{(X+2)^2}+\frac{d}{X+3}+\frac{e}{(X+3)^2}+\frac{f}{(X+3)^3}.$$

2) $\deg(F_2)=-5<0$ donc la partie entière est nulle. Le dénominateur est bien factorisé sous forme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On en déduit qu'il existe des constantes $a,b,c,d,e,f,g\in\mathbb{C}$ telles que :

$$F_2 = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2} + \frac{e}{X} + \frac{f}{X^2} + \frac{g}{X^3}.$$

Exercice d'application 11.

1) On a $F_1 = \dfrac{1}{(X+1)(X-1)}$. La partie entière est nulle (degré strictement négatif). Par théorème de décomposition en éléments simples, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $F_1 = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X-1}$. On procède alors par multiplication/évaluation :

- $\times(X+1)$ et $X=-1$: on a donc $a = -\dfrac{1}{2}$.
- $\times(X-1)$ et $X=1$: on a donc $b = \dfrac{1}{2}$.

On a donc finalement $F_1 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X+1}\right)$.

2) On a $\deg(F_2) < 0$. Par théorème de DES, on a $F_2 = \dfrac{a}{X+3} + \dfrac{b}{X-4}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\times(X+3)$ et $X=-3$: on a donc $a = \dfrac{6}{7}$.
- $\times(X-4)$ et $X=4$: on a donc $b = \dfrac{8}{7}$.

On a donc $F_2 = \dfrac{\frac{6}{7}}{X+3} + \dfrac{\frac{8}{7}}{X-4}$.

Exercice d'application 12.

1) On a $\deg(F_1) < 0$ donc la partie entière est nulle. F_1 est sous forme réduite (X^2+1 est de discriminant strictement négatif). Par théorème de DES, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $F_1 = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2+1}$.

- $\times(X+1)$ et $X=-1$: on a donc $a = -\dfrac{1}{2}$.
- $\times(X^2+1)$ et $X=i$: on a donc $\dfrac{2i+1}{i+1} = bi + c$. Ceci entraine :

$$\frac{(2i+1)(1-i)}{|1+i|^2} = c + bi \Leftrightarrow \frac{3+i}{2} = c + bi.$$

  Par identification partie réelle/imaginaire (car $b, c \in \mathbb{R}$), on a $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{3}{2}$.

On a donc $F_1 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{X+1} + \dfrac{\frac{X+3}{2}}{X^2+1}$.

2) On a $\deg(F_2) < 0$ donc la partie entière est nulle. F_2 est sous forme irréductible (X^2+X+1 est de discriminant strictement négatif, ses racines étant j et j^2, les racines troisièmes de l'unité différentes de 1). Par théorème de DES, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F_2 = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}.$$

- $\times(X-1)$ et $X=1$: on a donc $a = \dfrac{2}{3}$.

- $\times(X^2+X+1)$ et $X=j$: on a donc $\dfrac{j+1}{j-1}=bj+c$. Ceci entraine :
$$\begin{aligned} j+1=(bj+c)(j-1) &\Leftrightarrow j+1=bj^2+(c-b)j-c \\ &\Leftrightarrow j+1=b(-1-j)+(c-b)j-c \\ &\Leftrightarrow j+1=(c-2b)j-(b+c). \end{aligned}$$
On a donc $b+c+1=j(c-2b-1)$. Puisque $b,c\in\mathbb{R}$ et que $j\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on a donc $\left\{\begin{array}{l} b+c+1=0 \\ c-2b-1=0 \end{array}\right.$.
On trouve alors $b=-\dfrac{2}{3}$ et $c=-\dfrac{1}{3}$.

On a donc $F_2=\dfrac{\frac{2}{3}}{X-1}+\dfrac{\frac{-2X-1}{3}}{X^2+X+1}$. *Quand on manipule le polynôme X^2+X+1, on utilise au maximum les propriétés des racines 3iemes de l'unité ($1+j+j^2=0$ et $j^3=1$) plutôt que la forme explicite de j ($j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$).*

Exercice d'application 13. $\deg(F)<0$ donc la partie entière est nulle. Par théorème de DES, il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que :

$$F=\frac{a}{X+2}+\frac{b}{(X+2)^2}+\frac{c}{X+1}.$$

- $\times(X+2)^2$ et $X=-2$: on a donc $b=-1$.
- $\times(X+1)$ et $X=-1$: $c=-2$.
- $\times X$ et $X=x\to+\infty$: on a donc $1=a+c$ d'où $a=3$. *On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=1$ car $xF(x)\sim\dfrac{x^3}{x^3}\sim 1$.*

On a donc $F=\dfrac{3}{X+2}+\dfrac{-1}{(X+2)^2}+\dfrac{-2}{X+1}$.

Exercice d'application 14. On a $\deg(F)<0$ donc la partie entière est nulle. Par théorème de DES, il existe $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que :

$$F=\frac{a}{X+2}+\frac{b}{(X+2)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{(X+1)^2}.$$

- $\times(X+2)^2$ et $X=-2$: on a donc $b=1$.
- $\times(X+1)^2$ et $X=-1$: $d=-2$.
- $\times X$ et $X=x\to+\infty$: on a donc $0=a+c$.
- $X=0$: on a donc $-\dfrac{3}{2}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+c+d$. Avec la relation précédente, on résout le système ce qui donne $a=-\dfrac{1}{2}$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

On a donc $F=\dfrac{-\frac{1}{2}}{X+2}+\dfrac{1}{(X+2)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{X+1}+\dfrac{-2}{(X+1)^2}$.

Exercice d'application 15. On a $\deg(F)<0$ donc la partie entière est nulle. Par théorème de DES, il existe $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ tels que :

$$F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{(X-2)^2}+\frac{d}{X+2}+\frac{e}{(X+2)^2}.$$

On remarque que F est impaire (puisque $F(X)=\dfrac{1}{X(X^2-4)^2}$ en reprenant l'expression de F et le fait que $(X-2)(X+2)=X^2-4$). On a alors :

$$F(X) = -F(-X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X+2)} + \frac{-c}{(X+2)^2} + \frac{d}{X-2} + \frac{-e}{(X-2)^2}.$$

Par unicité du DES, on en déduit que $a = a$, $b = d$ et $c = -e$.

- $\times X$ et $X = 0$: $a = 1$.
- $\times (X-2)^2$ et $X = 2$: $c = 2$ et donc $e = -2$.
- $\times X = x \to +\infty$, $0 = a + b + d$ d'où $0 = 1 + 2b$. On a donc $d = b = -\frac{1}{2}$.

On a donc $F = \dfrac{1}{X} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{(X-2)} + \dfrac{2}{(X-2)^2} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{X+2} + \dfrac{-2}{(X+2)^2}$.

Exercice d'application 16. On a $F = \dfrac{1}{X(X^n - 1)}$. F n'a donc que des pôles simples qui sont 0 et les racines n-ièmes de l'unité. On notera dans la suite $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Il existe alors $a, b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b_0}{X - \omega_0} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{X - \omega_{n-1}}.$$

- $\times X$ et $X = 0$: $a = -1$.
- par théorème de dérivation tête en bas, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $b_k = \dfrac{1}{(n+1)\omega_k^n - 1} = \dfrac{1}{n}$.

On a donc $F = \dfrac{-1}{X} + \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{X - \omega_k}$.

Exercice d'application 17.

1) L'intégrale existe bien puisque la fonction intégrée est définie et continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). On a de plus $2t + 5 = 2(t+3) - 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2t+5}{t+3} dt &= \int_0^1 2dt - \int_0^1 \frac{1}{t+3} dt \\
&= 2 - \big[\ln(t+3)\big]_0^1 \\
&= 2 - (\ln(4) - \ln(3)) \\
&= 2 - 2\ln(2) + \ln(3).
\end{aligned}$$

2) L'intégrale existe bien puisque la fonction intégrée est définie et continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). On a de plus $t - 3 = t + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(2t+1) - \frac{7}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t-3}{2t+1} dt &= \int_0^1 \frac{1}{2} dt - \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{2t+1} dt \\
&= \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \int_0^1 \frac{1}{t + \frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \left[\ln\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{7\ln(3)}{4}.
\end{aligned}$$

3) On se place sur $I =]-\infty, 2[$ ou sur $I =]2, +\infty[$. On a :

$$t^2 + 1 = t^2 - 2t + 2t + 1 = t(t-2) + 2t - 4 + 4 + 1 = t(t-2) + 2(t-2) + 5 = (t+2)(t-2) + 5.$$

On en déduit que pour x dans un des deux intervalles :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t^2+1}{t-2} dt &= \int^x (t+2) dt + \int^x \frac{5}{t-2} dt \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln(|x-2|). \end{aligned}$$

Exercice d'application 18.

1) On a ici $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$. On a donc deux racines réelles qui sont ici $x_1 = 1$ et $x_2 = -5$. On se place donc sur $I_1 =]-\infty, -5[$ ou sur $I_2 =]-5, 1[$ ou sur $I_3 =]1, +\infty[$. Par théorème de décomposition en éléments simples, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(t-1)(t+5)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+5}.$$

En multipliant par $t-1$ et en évaluant en $t = 1$, on trouve $A = \frac{1}{6}$ et en multipliant par $t+5$ et en évaluant en $t = -5$, on trouve $B = -\frac{1}{6}$. On a donc pour x dans un des intervalles d'étude :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{2}{t^2+4t-5} dt &= \frac{1}{3} \int^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-5} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \left(\ln(|x-1|) - \ln(|x-5|) \right). \end{aligned}$$

2) On a ici $\Delta = 0$. On trouve une racine réelle double $x_1 = -2$. On étudie donc sur $]-\infty, -2[$ ou sur $]-2, +\infty[$. On a alors pour x dans un de ces intervalles :

$$\int^x \frac{1}{t^2+4t+4} dt = \int^x \frac{1}{(t+2)^2} dt = -\frac{1}{x+2}.$$

3) On a cette fois $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. On peut donc se placer sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). On a alors :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{t^2+2t+3} &= \int^x \frac{1}{(t+1)^2+2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int^x \frac{1}{\frac{1}{2}(t+1)^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int^x \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Exercice d'application 19.

1) On a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. On peut donc chercher une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus, on cherche à faire apparaitre du $2t - 2$ au numérateur (puisqu'il s'agit de la dérivée du dénominateur). On a ici $2t + 5 = 2t - 2 + 7$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{2t+5}{t^2-2t+2}dt &= \int^x \frac{2t-2}{t^2-2t+2} + \int^x \frac{7}{t^2-2t+2} \\
&= \ln(|x^2-2x+2|) + \int^x \frac{7}{(t-1)^2+1}dt \\
&= \ln(|x^2-2x+2|) + 7\arctan(x-1)\,.
\end{aligned}$$

2) On a $\Delta = 1-20 = -19 < 0$. On peut donc chercher une primitive sur $\mathbb{R}$. On veut faire apparaitre du $2t-1$ au numérateur (puisqu'il s'agit de la dérivée du dénominateur). On a pour cela :

$$t+1 = \frac{1}{2}(2t+2) = \frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}.$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t+1}{t^2-t+5}dt &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-1}{t^2-t+5}dt + \frac{3}{2}\int^x \frac{1}{t^2-t+5}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{3}{2}\int^x \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{4}}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{2}{7}\int^x \frac{1}{\frac{4}{21}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{2}{7}\int^x \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{21}}-\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2-x+5|) + \frac{\sqrt{21}}{7}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{21}}-\frac{1}{\sqrt{21}}\right).
\end{aligned}$$

Dans les deux exercices, on aurait pu écrire $\ln(|x^2-2x+2|) = \ln(x^2-2x+2)$ *et* $\ln(|x^2-x+5|) = \ln(x^2-x+5)$ *puisque les fonctions polynomiales qui apparaissent dans le logarithme sont strictement positives sur* $\mathbb{R}$ *(elles ont un discriminant négatif et un coefficient dominant positif).*