4. Nombres complexes, corrigé

Exercice 3. Géométriquement, les points recherchés doivent appartenir au disque de centre -1 et de rayon 1 (pour la première équation) et également au disque de centre 1 et de rayon 1. On voit donc que $z = 0$ est l'unique solution au système. Par le calcul à présent, si on cherche x sous forme algébrique ($z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} |1+z| \leq 1 & \Leftrightarrow & |1+z|^2 \leq 1 & \text{(car la fonction } u \mapsto u^2 \text{ est strict. croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ & \Leftrightarrow & (1+x)^2 + y^2 \leq 1 & \\ & \Leftrightarrow & 2x + x^2 + y^2 \leq 0. & \end{array}$$

De même, on a $|1-z| \leq 1 \Leftrightarrow -2x + x^2 + y^2 \leq 0$. En additionnant ces deux inéquations, on obtient $2x^2 + 2y^2 \leq 0$, ce qui implique, un carré étant toujours posifif que $x = y = 0$. Réciproquement, on vérifie que $z = 0$ est bien solution. On retrouve donc que le système admet comme unique solution $z = 0$.

Exercice 4. Supposons par l'absurde que a et b existent. Alors, en évaluant en $z = 0$, on obtient $0 = b$. En évaluant en $z = 1$, on obtient $1 = a + 0$. Enfin, en évaluant en $z = i$, on obtient $-i = i$, ce qui donne $2i = 0$: absurde ! La proposition proposée est donc fausse.

Exercice 5.

Si on cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ est équivalente à $|z|^2 = 1$, soit $x^2 + y^2 = 1$. La deuxième condition donne $|z| = |z-1|$ ce qui est équivalent à $|z|^2 = |z-1|^2$. On obtient alors :

$$|x+iy|^2 = |(x-1)+iy|^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

En développant et en simplifiant les x^2 et les y^2, on obtient $0 = -2x + 1$, soit $x = \frac{1}{2}$.

En utilisant alors $x^2 + y^2 = 1$, on obtient que $y^2 = \frac{3}{4}$ soit deux possibilités pour y : $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a finalement deux solutions : $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $z = e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Plus géométriquement, on peut également raisonner par analyse/synthèse :

Analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$. On a alors en utilisant la première égalité que $|z|^2 = 1$, ce qui entraine que z est de module 1. Si on note M le point d'affixe z, alors M est sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. De plus, en utilisant $|z| = |z-1|$, cette égalité signifie géométriquement que M est a égale distance du point O et du point $(1, 0)$. On en déduit que M est sur la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc que deux choix possibles pour z. On a :

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Autrement dit $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $z = e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Synthèse : Réciproquement, si $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $z = e^{\frac{-i\pi}{3}}$, alors, z vérifie bien les égalités proposés (il est de module 1 et sur la droite $x = 1/2$). Il n'y a donc que deux nombres complexes répondant à la question posée.

Exercice 10. Avant de calculer les puissances n-ièmes, il faut mettre les complexes sous forme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{12}}. \end{aligned}$$

On a donc $z_1^n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi n}{12}}$. On procède de même pour les autres calculs :

$$\begin{aligned} \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)} &= \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)} \\ &= \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} \\ &= e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

On a donc $z_2^n = e^{2in\theta}$. Enfin, on a $1 + j = -j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ puisque j est une racine troisième de l'unité. Ceci implique que $z_3^n = e^{\frac{in\pi}{3}}$.

Exercice 11. On va mettre les complexes sous forme trigonométrique afin de trouver le module et l'argument (on fera attention à bien avoir un module positif !).

1) On a :

$$\begin{aligned} e^{e^{i\theta}} &= e^{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} \\ &= e^{\cos(\theta)}\cdot e^{i\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Le module de z_1 est donc $e^{\cos(\theta)}$ et son argument est $\sin(\theta)$.

2) On a aussi, en factorisant par l'arc moitié :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{2i\theta} &= e^{\frac{3i\theta}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right) \\ &= e^{\frac{3i\theta}{2}}\cdot\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $|z_2| = 2|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|$. De plus, quand $\theta \in [0, \pi[$, alors l'argument de z_2 vaut $\frac{3\theta}{2}$ (car $\cos(\theta/2) > 0$), quand $\theta = \pi$, on a $z_2 = 0$ donc il n'y a pas d'argument et quand $\theta \in]\pi, 2\pi[$, alors l'argument de z_2 vaut $\frac{3\theta}{2} + \pi$ (car $e^{i\pi} = -1$).

3) On regroupe le premier et le dernier terme ensemble avec l'arc moitié. On a :

$$\begin{aligned} z_3 = e^{i0}+e^{i\theta}+e^{2i\theta} & \\ &= e^{i\theta}\left(2\cos(\theta)+1\right) \\ &= 2\left(\cos(\theta)+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}. \end{aligned}$$

On a donc $|z_3| = 2\left|\cos(\theta)+\frac{1}{2}\right|$. Pour l'argument, il faut savoir quand $\cos(\theta)+\frac{1}{2}$ est positif ou négatif. On a les trois cas suivants :

- Si $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$, alors $|z_3| = 0$ et il n'y a pas d'argument (car $z_3 = 0$).
- Si $\theta \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right[\bigcup \left]\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right[$, alors l'argument de z_3 vaut θ.
- Si $\theta \in \left]\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right[$, alors $z_3 = -2(\cos(\theta)+1/2)(-1)e^{i\theta} = -2(\cos(\theta)+1/2)e^{i(\theta+\pi)}$, ce qui entraine que l'argument de z_3 est $\theta + \pi$.

Exercice 12. On place à chaque fois z sous forme algébrique, $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1) On a $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. En identifiant module et argument, on obtient $e^x = 1$ et $y = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Les solutions sont donc les complexes de la forme :

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

2) On procède de la même façon en écrivant $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. En identifiant à nouveau les modules et les arguments, on trouve :

$$x = \ln(\sqrt{2}) \text{ et } y \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi].$$

Les solutions sont donc les $z = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$.

3) On a ici poser $Z = e^z \neq 0$. L'équation de départ est donc équivalente à :

$$Z + \frac{1}{Z} = 1 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Les solutions sont donc :

$$Z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } Z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Il reste à présent à résoudre $e^z = Z_1$ et $e^z = Z_2$. Toujours en identifiant module et argument, on obtient finalement comme solution :

$$z = 0 + i\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 13. L'équation $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ se simplifie à l'aide de la forme trigonométrique. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}} \\ &= 2^{-1/2} \cdot \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{i\pi}{6}}} \\ &= 2^{-1/2} \cdot e^{\frac{5i\pi}{12}}. \end{aligned}$$

On doit donc résoudre l'équation $z^8 = 2^{-1/2} \cdot e^{\frac{5i\pi}{12}}$. Pour résoudre cette équation, il suffit de trouver une solution particulière et on obtient les autres solutions en multipliant par les racines huitièmes de l'unité. On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{2^{-\frac{1}{16}} \cdot e^{\frac{5i\pi}{96}} \cdot e^{\frac{ik\pi}{4}}, \ k \in [\![0, 7]\!]\right\}.$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $z = 1$ n'est pas solution (on aurait $1 = 0$: absurde). Supposons donc $z \neq 1$. On peut alors diviser la relation par $(1-z)^n$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+z)^n = (1-z)^n \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ 1+z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(1-z) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1.
\end{aligned}$$

On remarque alors que si $k = n/2$ (ce qui n'est possible que si n est pair), on obtient $0 = -2$ ce qui est absurde. On obtient donc que les solutions sont de la forme, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \neq n/2$:

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \\
&= \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}} \times \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{e^{\frac{-ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}} \\
&= \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Si n est pair, on a donc $n-1$ solutions (ce qui est normal vu que les termes en z^n se simplifient dans l'équation de départ si on développe avec le binôme de Newton, on a donc une équation de degré $n-1$ et on trouve $n-1$ solutions). Si n est impair, on a n solutions (puisque k ne peut pas être égal à $n/2$), ce qui est normal car l'équation initiale est de degré n (les z^n ne se simplifiant pas cette fois).

Exercice 16. Pour trouver les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, il suffit de résoudre l'égalité $(a+ib)^2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases}
a^2 - b^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
2ab = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
a^2 + b^2 = 1
\end{cases}$$

On trouve donc $a^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ et $b^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$. Puisque $ab > 0$, on en déduit que les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sont :

$$\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right).$$

Puisque $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$, les racines carrées trouvées sont donc également égales à $\pm e^{\frac{i\pi}{8}}$. On peut donc trouver $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ (on sait que cette quantité est positive) et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ (positif également). On a donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Exercice 17. La difficulté pour résoudre ces équations est en général de trouver une racine carrée du discriminant. Attention, quand un polynôme de degré 2 est à coefficients complexes, les racines n'ont aucune raison d'être conjuguées !

1) Soit **(E')** $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$. On a $\Delta = -4 - 4(2-4i) = -12 + 16i$. Une racine carrée de $\Delta = 2 + 4i$ (on la trouve avec la méthode habituelle). Les solutions de **(E)** sont donc :

$$\frac{2i - (2+4i)}{2} = -1 - i \text{ et } \frac{2i + (2+4i)}{2} = 1 + 3i.$$

2) Soit **(E')** $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$. On a $\Delta = -4 - 4(-1+2i) = -8i$. On a donc $\Delta = 8e^{\frac{3i\pi}{2}}$. Une racine carrée de Δ est donc par exemple $2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}} = -2 + 2i$. Les solutions de **(E')** sont donc :

$$\frac{2i - (-2+2i)}{2} = 1 \text{ et } \frac{2i + (-2+2i)}{2} = -1 + 2i.$$

3) Soit (E) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$. On a $\Delta = (-16)^2 - 16(11-12i) = 16(16-11+12i) = 16(5+12i)$. En cherchant une racine carrée de $5+12i$ sous forme algébrique, on trouve qu'une racine carrée de Δ est $\delta = 4(3+2i)$. On en déduit que les racines sont :

$$\frac{16 + 4(3+2i)}{8} = \frac{7}{2} + i \text{ et } \frac{16 - 4(3+2i)}{8} = \frac{1}{2} - i.$$

4) Soit **(E")** $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0,\ \theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & 4e^{2i\theta} - 8i\sin(\theta)e^{i\theta} \\ & = & 4e^{i\theta} \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta) - 2i\sin(\theta)) \\ & = & 4e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} \\ & = & 4. \end{array}$$

Les solutions de **(E")** sont donc :

$$\frac{2e^{i\theta} + 2}{2} = 1 + e^{i\theta} \text{ et } \frac{2e^{i\theta} - 2}{2} = -1 + e^{i\theta}.$$

Exercice 18. Pour résoudre l'équation $z^{2n} - 2\cos(n\theta)z^n + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$, nous allons commencer par résoudre l'équation $Z^2 - 2\cos(n\theta)Z + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2(n\theta) - 1) = 4i^2\sin^2(n\theta)$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$Z_- = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \text{ et } Z_+ = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta).$$

Sous forme trigonométrique, on trouve donc $Z_- = e^{in\theta}$ et $Z_+ = e^{-in\theta}$. Il reste à calculer les racines n-ièmes de ces complexes afin de résoudre l'équation initiale. On en déduit que l'ensemble des solution de l'équation de l'énoncé est :

$$\left\{ e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \cup \left\{ e^{-i\theta + \frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

On remarque que l'on trouve à priori $2n$ solutions, ce qui est normal car on résout une équation de degré $2n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}, S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1) On a $\overline{\omega} = \omega^6$, $\overline{\omega^2} = \omega^5$, $\overline{\omega^3} = \omega^4$, etc. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \overline{S} & = & \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4} \\ & = & \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 \\ & = & T \end{array}$$

S et T sont donc conjugués. Étudions à présent la partie imaginaire de S. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(S) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).\end{aligned}$$

On a $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\geq 0$ car la fonction sinus est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Le terme $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ est positif car la fonction sinus est positive sur $[0,\pi]$. On en déduit que la partie imaginaire de S est positive.

2) Puisque la somme des racines septiemes de l'unité est nulle, on en déduit que $S+T=-1$. De plus, on a (on utilise pour simplifier $\omega^7=1$) :

$$\begin{aligned}ST &= (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6)\\ &= \omega^4+\omega^6+1+\omega^5+1+\omega+1+\omega^2+\omega^3\\ &= 2.\end{aligned}$$

Ceci entraine que S vérifie l'équation $S(-1-S)=2$, c'est à dire l'équation de degré 2 $S^2+S+2=0$. Cette équation admet deux racines complexes qui sont $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Puisque l'on sait que S a une partie imaginaire positive, on a alors que $S=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. On en déduit que $T=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 20. Soient u,v deux nombres complexes. On a alors, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|2u| &= |u+v+u-v|\\ &\leq |u+v|+|u-v|.\end{aligned}$$

De même, on montre que $|2v|\leq|u+v|+|u-v|$. En additionnant ces deux relations et en divisant par deux, on trouve :

$$|u|+|v|\leq|u+v|+|u-v|.$$

Exercice 21. La propriété est claire pour $n=1$ (puisque $|e^{i\theta_1}|=1\neq 0$, ce complexe ne peut pas être nul). Soit $n\geq 2$ et $\theta_1,\dots,\theta_n\in\mathbb{R}$. On va utiliser l'inégalité triangulaire pour démontrer cette propriété et principalement les deux propriétés suivantes :

$$|z_1+z_2|\geq|z_1|-|z_2| \text{ et } \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

On a en effet :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\theta_k}}{2^{k-1}}\right| &= \left|e^{i\theta_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{e^{i\theta_k}}{2^{k-1}}\right| \\
&\geq \left|e^{i\theta_1}\right|-\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{e^{i\theta_k}}{2^{k-1}}\right| \\
&\geq 1-\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{e^{i\theta_k}}{2^{k-1}}\right| \\
&\geq 1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \\
&\geq 1-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^j \qquad\qquad \text{(on a posé } j=k-2\text{)} \\
&\geq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) \qquad\qquad \text{(somme géométrique de raison } 1/2\neq 1\text{)} \\
&\geq \frac{1}{2^{n-1}} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Puisque la somme a un module strictement positif, on en déduit qu'elle est non nulle.

Exercice 23.

1) On remarque tout d'abord que $z=1$ n'est pas solution. On cherche donc l'ensemble des complexes $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ tels que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)=0$. On calcule alors, en écrivant $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-z)(1-\overline{z})}\right) \\
&= \frac{1-x+x-x^2-y^2}{|1-z|^2} \\
&= \frac{1-x^2-y^2}{|1-z|^2}.
\end{aligned}$$

Les z solutions sont donc les $z=x+iy$ différents de 1 tels que $x^2+y^2=1$. On reconnait alors le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

2) L'égalité proposée est équivalente à $|z-3|=|z-5|$. Il s'agit donc des complexes situés à égale distance des points $(3,0)$ et $(5,0)$. Il s'agit donc de la médiatrice de ce segment, c'est à dire de la droite d'équation $x=4$ (ce que l'on peut retrouver par le calcul en remplaçant dans l'expression $z=x+iy$ et en élevant au carré les modules et en simplifiant).

3) Remarquons que $z=-1$ n'est pas solution de $\left|\dfrac{z-2}{z+1}\right|=2$. On peut donc multiplier par $|z+1|$ sans rajouter cette solution. On a donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 2 &\Leftrightarrow |z-2| = 2|z+1| \\ &\Leftrightarrow |z-2|^2 = 4|z+1|^2 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 12x + 3y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 2^2.\end{aligned}$$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation proposée est donc le cercle de centre $(-2, 0)$ et de rayon 2.

4) Soit z vérifiant $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$. Remarquons tout d'abord que l'on doit avoir $z \neq i$. On a ensuite :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{(z-1)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{|z|^2 + iz - \overline{z} - i}{|z-i|^2}\right) \\ &= \frac{x^2 + y^2 - y - x}{|z-i|^2}.\end{aligned}$$

On en déduit que M d'affixe $z = x + iy$ vérifie l'équation $x^2 + y^2 - y - x = 0$, qui revient à :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que l'ensemble des points vérifiant la relation initiale est inclus dans le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réciproquement, tous les points de ce cercle vérifient la relation de départ, mis à part le point d'affixe $z = i$. Finalement, si on note $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$, l'ensemble des points recherchés est le cercle de diamètre AB privé de B, c'est à dire le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ privé de B.

Exercice 24. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) On a $z = z^2 \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0$. On a donc déjà $z = 0$ et $z = 1$ comme conditions. Il reste à étudier $z^2 = z^3$ et $z = z^3$. En factorisant de même, on trouve comme conditions $z = 0$ ou $z = 1$ et $z = 0$ ou $z = \pm 1$. On en déduit que les trois points sont distincts si et seulement si $z = 0$ ou $z = \pm 1$.

2)

a) Si on note A, B, C les points d'affixe z, z^2, z^3. Puisqu'ils sont distincts, ils sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si :

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z}\right) \equiv 0 \ [\pi] \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}.$$

Or, on a $\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z + 1$. Puisque $z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, on en déduit que T_z est plat si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ (avec $z \neq 0$ et $z \neq \pm 1$).

b) On procède de même avec rectangle en z. On a T_z rectangle en z si et seulement si :

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R}.$$

On en déduit que T_z est rectangle en z si et seulement si $z+1 \in i\mathbb{R}$. Les solutions sont donc de la forme $z = -1 + bi$ avec $b \in \mathbb{R}$.

c) Pour avoir le triangle équilatéral, il faut que $||\vec{AB}|| = ||\vec{AC}||$ et que $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.
On a donc le triangle équilatéral si et seulement si :

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z + 1 = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}.$$

On trouve donc $z = -1 + e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}}$. On a donc le triangle équilatéral si et seulement si $z = j$ ou $z = j^2$.

Exercice 25.

1) La rotation de centre Ω d'affixe $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ s'écrit $z \mapsto e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot (z - (1+i)) + (1+i)$, c'est à dire :

$$z \mapsto e^{\frac{i\pi}{4}} z + (1 + i(1 - \sqrt{2})).$$

2) L'homothétie de centre Ω' d'affixe 4 et de rapport -3 s'écrit $z \mapsto -3 \cdot (z-4) + 4$, c'est à dire :

$$z \mapsto -3z + 16.$$

3) Commençons par chercher les éventuels points fixes de f. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) - z = z + i$. On en déduit que f admet un unique point fixe, $z_0 = -i$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(z) - z_0 &= 2z + i - z_0 \\ &= 2(z+i) \\ &= 2(z - z_0). \end{aligned}$$

Ceci entraine que f représente l'homothétie de centre d'affixe $-i$ et de rapport 2.

4) On cherche les éventuels points fixes de g. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $g(z) - z = iz + 2 - i$. On en déduit que g admet un unique point fixe, $z_0 = 1 + 2i$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(z) - z_0 &= (1+i)(z - z_0) \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} (z - z_0). \end{aligned}$$

g est donc la similitude directe de centre d'affixe $z_0 = 1 + 2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.