Programme de colle, semaine 3

Complexes :

- Nous avons admis la construction de $\mathbb{C}$. Après avoir vu la forme algébrique ($x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$) d'un complexe, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$, nous avons défini la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module d'un complexe.
- Nous avons ensuite démontré les règles de calculs sur les conjugués et sur les modules (conjugué d'une somme, d'un produit, module d'un produit, passage au puissance dans $\mathbb{Z}$, etc).
- Nous avons alors défini le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Après avoir posé $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, nous avons montré que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Nous avons ensuite démontré les formules d'Euler ainsi que la propriété fondamentale de l'exponentielle ($e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$) et en avons déduit la formule de Moivre.
- Nous avons effectué des rappels sur la forme trigonométrique d'un complexe et étudié l'argument d'un complexe ainsi que ses propriétés. Nous avons ensuite défini l'exponentielle complexe (et vu comment résoudre $e^z = a$).
- Nous avons alors effectué un complément de trigonométrie. Des rappels sur la congruence modulo 2π, les valeurs usuelles de cos, sin et tan, les formules d'addition ($\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$). Nous avons vu comment retrouver certaines formules ou valeurs sur le cercle trigonométrique.
- Nous avons alors à l'aide de l'arc moitié, vu comment retrouver les formules de factorisation de $\cos(a) \pm \cos(b)$ et $\sin(a) \pm \sin(b)$. Nous avons fait un ou deux exemples de linéarisation (en utilisant les formules d'Euler) et l'application des complexes aux calculs de somme avec des cos/sin.
- Nous avons terminé le chapitre de trigonométrie par des applications (classée par ordre d'importance) : linéarisation, calcul de sommes à l'aide de complexes, multiplication des arcs (comment exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$) et la transformation d'une expression de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$ sous la forme $A\cos(t - \varphi)$.
- Nous avons continué le cours sur les complexes en définissant les racines n-ièmes de l'unité et montré que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. Nous avons montré qu'il y avait exactement n racines n-ièmes de l'unité.
- Nous avons alors démontré différentes propriétés (somme des racines de l'unité nulle, application à la résolution de $z^n = z_0^n$ et de $z^n = a$). Nous avons alors vu comment trouver les racines carrées d'un complexe sous forme algébrique (la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe est **absolument interdite** !).
- Nous avons vu comment résoudre des équations de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Nous avons démontré l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

Remarques sur le programme : nous n'avons pas encore fait les rappels de géométrie et n'avons pas encore eu le temps de faire d'exercices sur les racines n-ièmes de l'unité et sur les équations polynômiales de degré 2 (mais les étudiants en ont à chercher pour lundi et des exemples ont été traités en cours).

Compétences :

- Savoir passer de la forme algébrique d'un complexe à la forme trigonométrique et réciproquement.
- Identifier sous quelle forme mettre un complexe avant de calculer (garder la forme $z \in \mathbb{C}$ pour des calculs théoriques, utiliser la forme $x + iy$ pour étudier les parties réelles/imaginaires et utiliser la forme $\rho e^{i\theta}$ quand il y a des produits ou des angles à trouver).
- Retrouver les formules de trigonométrie/résoudre des équations trigonométriques « simples » à l'aide du cercle trigonométrique ($\cos(x) = 1/2$, $|\sin(x)| \leq \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$, la résolution de $\cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$, etc.)
- Retrouver les formules de factorisation de $\cos(a) \pm \cos(b)$ et $\sin(a) \pm \sin(b)$ à l'aide de l'arc moitié ou d'une résolution de système linéaire.
- Linéariser une expression trigonométrique (à l'aide des formules d'Euler).
- Déterminer les racines n-ième d'un complexe a.
- Résoudre une équation de degré 2 à coefficients complexes.

Questions de cours :

1. Donner les formules pour le développement de $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ et démontrer celle de $\tan(a + b)$. *On précisera à quoi doivent appartenir $a, b, a + b$.*
2. Retrouver la formule pour la factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ à l'aide d'un système linéaire ET à l'aide de l'arc moitié.
3. Expliquer le principe de la linéarisation et l'illustrer en linéarisant $f(x) = \cos^3(x)$ et en déduire une primitive de f.
4. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ (pour avoir l'unicité de l'écriture).
6. Montrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0 pour $n \geq 2$ puis énoncer (sans preuve) la forme des solutions de l'équation $z^n = a$ d'inconnue z où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.
7. Énoncer et démontrer le théorème donnant la forme des solutions d'une équation polynomiale de degré 2.
8. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire (pas de preuve du cas d'égalité).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 4 : 13 et 17.1).

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne !) :

- 1er du groupe : TD4 : 18.
- 2ieme du groupe : TD4 : 19.
- 3ieme du groupe : Complément Trigo : 9.2)

Prochain programme : complexes (en entier) et début des applications.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 18 :

- Poser $Z = z^n$ pour se ramener à une équation de degré 2 en Z.
- Utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour écrire Δ sous la forme $(\delta)^2$.
- Vous devriez trouver des solutions de la forme $e^{\pm in\theta}$. Il ne reste plus qu'à résoudre $z^n = e^{\pm in\theta}$ (cf question de cours 6).

Exo 19 :

- ω est la première racine 7ième de l'unité donc $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = \omega^6$.
- Écrire la partie imaginaire de S comme une somme de sinus et placer les angles sur le cercle trigonométrique (à peu près). Essayez ensuite d'écrire le seul sinus négatif sous la forme de $-\sin(\varphi)$ où φ est un angle simple et de voir que les autres sinus compensent ce sinus négatif.
- Il faut utiliser le fait que la somme des racines 7ieme de l'unité fait 0 pour simplifier ST et $S + T$.
- On peut ensuite étudier le polynôme $P(X) = (X - S)(X - T)$ pour déterminer S et T.

Exo 9.2) :

- Faire la somme des deux sommes pour n'avoir à calculer qu'une seule des deux sommes (et déduire la valeur de l'autre presque sans calcul).
- Linéariser le $\cos^2$ afin de se ramener à une somme du même type que dans le cours (cf question de cours 4)
- Attention à bien traiter le cas où la raison de la somme géométrique vaut 1 à part !