Pour le 04/05/23

DEVOIR À LA MAISON 13

Exercice 1 – Récupération de l'énergie houlomotrice

(E3A PSI 2018)

On considère un système à corps oscillant avec une partie fixe au fond de l'eau et une partie mobile, comme par exemple le dispositif Oyster (cf. FIGURE 1 à gauche), dispositif dont la partie supérieure dépasse légèrement de l'eau, qui est testé au large de l'Écosse, ou comme le dispositif WaveRoller (cf. FIGURE 1 à droite), dispositif complètement immergé, développé par une société finlandaise et qui est testé au large du Portugal.

FIGURE 1 : Dispositifs Oyster (à gauche) et WaveRoller (à droite).

On modélise ce dispositif par un pendule pesant composé d'un solide S en rotation autour de l'axe (Oy) et complètement immergé dans l'eau.

Le pendule est fixé au sol (au fond de la mer) par un dispositif non représenté sur le schéma. Le point O est donc fixe par rapport au sol. Les mouvements ont lieu dans le plan vertical (xOz). Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ forment une base orthonormée directe (cf. FIGURE 2).

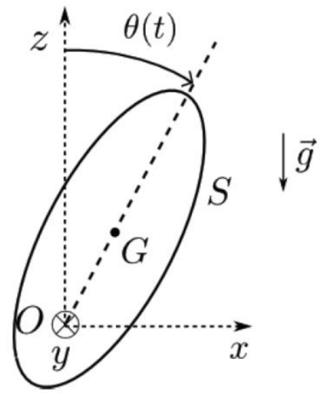


FIGURE 2 : Pendule pesant

On note :

- m la masse et V le volume du solide S ;
- J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oy) ;
- d la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du solide $d = OG$;
- ρ_e la masse volumique de l'eau.

On suppose que :

- le référentiel terrestre est galiléen ;
- le centre de poussée (point d'application de la poussée d'Archimède) pour le solide S est ici confondu avec son centre de gravité G ;
- il existe un couple résistant exercé au niveau de l'axe de rotation du pendule de moment : $\vec{\Gamma} = -\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}$ (avec $\alpha > 0$) ;
- la houle exerce en G une force de la forme $\vec{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ (avec $\beta > 0$).

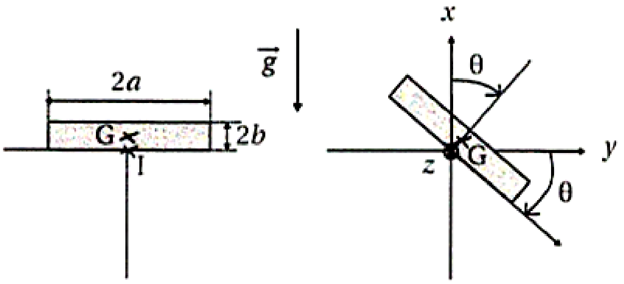
On considère que, en l'absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule correspond à $\theta = 0$, ce qui se traduit par $\rho_e V > m$.

1. Déterminer les moments des différentes forces s'exerçant sur le solide S par rapport à l'axe (Oy).
2. Établir l'équation différentielle du mouvement du solide S vérifiée par θ.
3. On se place dans l'approximation des petits angles. Linéariser alors l'équation différentielle précédente et la mettre sous la forme $\ddot{\theta}+\lambda\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=f(t)$ en précisant l'expression des différents termes λ, ω_0 et $f(t)$.
4. Calculer la pulsation propre ω_0 puis la période propre T_0 des oscillations.

Données :
Accélération de la pesanteur : $g=10\ \text{m.s}^{-2}$, $d=10\ \text{m}$, $\rho_e=10^3\ \text{kg.m}^{-3}$, $V=10^3\ \text{m}^3$
$m=300\ \text{t}$, moment d'inertie $J=md^2$.

Exercice 2 – La tartine beurrée et la loi de Murphy

On modélise une tartine beurrée de masse m par un parallélépipède rectangle de centre de gravité G. La tartine étant initialement posée au bord d'une table, elle se met à pivoter autour de l'axe fixe du bord de la table, axe qu'on note (Iz). $J=J_{(Iz)}$ désigne le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Iz) et on repère le mouvement de la tartine par l'angle θ qu'elle fait par rapport à l'horizontale. Compte tenu des conditions initiales, l'angle initial est $\theta(0)=0$ et la vitesse angulaire est nulle soit $\dot{\theta}(0)=0$.



1. Déterminer l'équation différentielle en θ qui régit le mouvement de la tartine.
2. En déduire une intégrale première du mouvement. Montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la tartine est donnée par $\dot{\theta}=\sqrt{\dfrac{2mgb\left(1-\cos(\theta)\right)}{J}}$.
3. Quand $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, la tartine commence à glisser et tombe de la table. Elle se retrouve alors en chute libre et on peut montrer qu'elle conserve la vitesse de rotation ω_0 qu'elle avait en quittant la table. En déduire l'expression de ω_0 et celle de $\theta(t)$ en fonction de ω_0. On négligera le temps de glissement en considérant que le mouvement de chute libre commence à l'instant $t=0$ où $\theta(0)=\dfrac{\pi}{4}$.
4. En considérant approximativement que le temps de chute t_c de la tartine est donné par le temps mis par G pour atteindre le sol après une chute libre d'une

hauteur h avec une vitesse initiale négligeable, exprimer t_c en fonction de h et g.

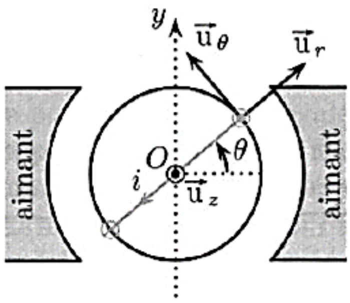
5. On donne $J = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{4}{3}mb^2$. On prend $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$, $b = 0{,}50\ \text{cm}$, $a = 8{,}0\ \text{cm}$ et $h = 0{,}80\ \text{m}$. Déterminer numériquement ω_0 et t_c. On pourra au préalable simplifier l'expression de J au vu des valeurs de a et b.
6. En déduire numériquement $\theta(t_c)$ et commenter. La loi de Murphy, loi de l'embêtement maximum, est-elle vérifiée ?

Exercice 3 – Multimètre analogique

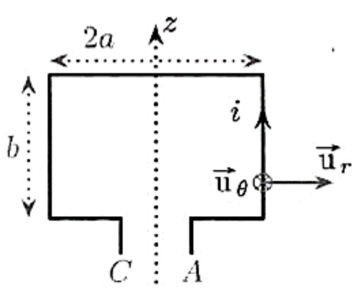
Un ampèremètre analogique indique la valeur d'un courant électrique mesuré sur un cadran à aiguille. Pour remplir cette fonction, l'aiguille est solidaire d'un cadre de cuivre parcouru par le courant d'intensité i constante, à mesurer. Ce cadre, de largeur $2a$ et de hauteur b, est monté sur une liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{u_z})$ vertical ascendant (voir figure). Les points A et C sont les points de branchement avec le circuit électrique dans lequel on cherche à mesurer le courant. Les branchements électriques en A et C ne gênent pas la rotation du cadre. L'ensemble baigne dans le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un aimant. Ce champ, non uniforme à l'échelle du cadre, est partout perpendiculaire à l'axe $(O,\overrightarrow{u_z})$.

En $r = a$, c'est-à-dire au niveau des côtés verticaux du cadre de cuivre, sa norme est constante et :

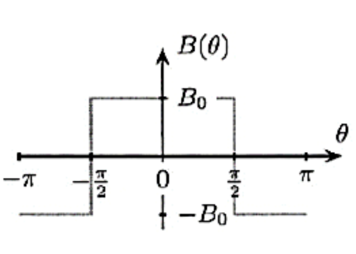
- il est radial sortant pour le côté du cadre où i est montant : $\vec{B} = B_0\overrightarrow{u_r}$;
- il est radial entrant pour le coté du cadre où i est descendant : $\vec{B} = -B_0\overrightarrow{u_r}$.



Multimètre vu de dessus



Cadre vu de face



Champ magnétique en fonction de θ

Le cadre a pour moment d'inertie J par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{u_z})$. La liaison pivot exerce sur lui un couple de frottement fluide de moment $\Gamma_f = -\lambda\dot{\theta}$ où $\lambda > 0$ est le coefficient de frottement et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du cadre. Un fil de torsion, non représenté sur le schéma, exerce sur le cadre un couple de rappel de moment $\Gamma_r = -\alpha\theta$, où $\alpha > 0$ est la constante de torsion du fil. Les éventuels phénomènes d'induction sont supposés négligeables dans tout cet exercice.

1. Exprimer les forces de Laplace subies par les côtés verticaux du cadre.
2. Justifier pourquoi les forces de Laplace subies par les côtés horizontaux du cadre n'auront pas d'influence sur la rotation du cadre autour de l'axe $\left(O,\overrightarrow{u_z}\right)$.
3. Exprimer le moment Γ_{La} par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{u_z}\right)$ des actions de Laplace subies par le cadre, en fonction de B_0, i et S la surface du cadre.
4. Établir l'équation mécanique du cadre (équation différentielle vérifiée par la position angulaire θ du cadre). Mettre cette équation sous la forme normalisée : $\ddot{\theta}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=A$, avec A une constante. Identifier la pulsation temporelle caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q.
5. En déduire que la position d'équilibre $\theta_{éq}$ est proportionnelle à l'intensité i à mesurer.
6. Comment choisir les différents paramètres α, λ et J pour éviter que l'aiguille n'oscille trop longtemps avant d'atteindre sa position d'équilibre ?
7. À l'intérieur du multimètre se trouve une résistance R de grande valeur. Le cadre mobile a une résistance négligeable devant R. On suppose que tous les branchements électriques sont possibles dans l'appareil sans affecter le comportement mécanique du cadre. Quels branchements faut-il effectuer pour transformer l'ampèremètre étudié en un voltmètre apte à mesurer une tension U constante ? Quelle est alors l'expression de la position d'équilibre $\theta_{éq}$ en fonction de U ?
8. Un wattmètre est destiné à mesurer la puissance moyenne P reçue par un dipôle dans un circuit en régime temporellement variable. On suppose que le dipôle est linéaire et que le circuit qui le contient fonctionne en régime sinusoïdal à la pulsation ω. On note $U(t)=U_m\cos(\omega t)$ la tension aux bornes de ce dipôle et $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$ le courant qui le traverse (U et i étant orientés en convention récepteur). Exprimer la puissance moyenne P en fonction de U_m, I_m et φ.

   <u>Rappel mathématique</u> : $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)$
9. La mesure de P nécessitant une mesure simultanée de $U(t)$ et $i(t)$, on adapte l'ampèremètre étudié précédemment pour le transformer en wattmètre analogique. Le courant $i(t)$ passe dans le cadre. L'aimant est remplacé par un électroaimant alimenté par la tension $U(t)$. On admet que l'intensité B_0 du champ magnétique des questions précédentes est alors remplacée par $B(t)=KU(t)$, où K est une constante de proportionnalité. Montrer que, si $\omega \gg \omega_0$, l'aiguille atteint une position d'équilibre dont l'angle de déviation est proportionnel à P.