CHAPITRE MI7
Mouvements d'un solide

- **Problématique 1 : métronome**
- Principe :
  Mouvement de balancier

- Question :
  Comment varie la période du **pendule pesant** en fonction de la position de la masselotte sur la tige ?

FIGURE 1 : Métronome

➢ Problématique 2 : expérience de Cavendish

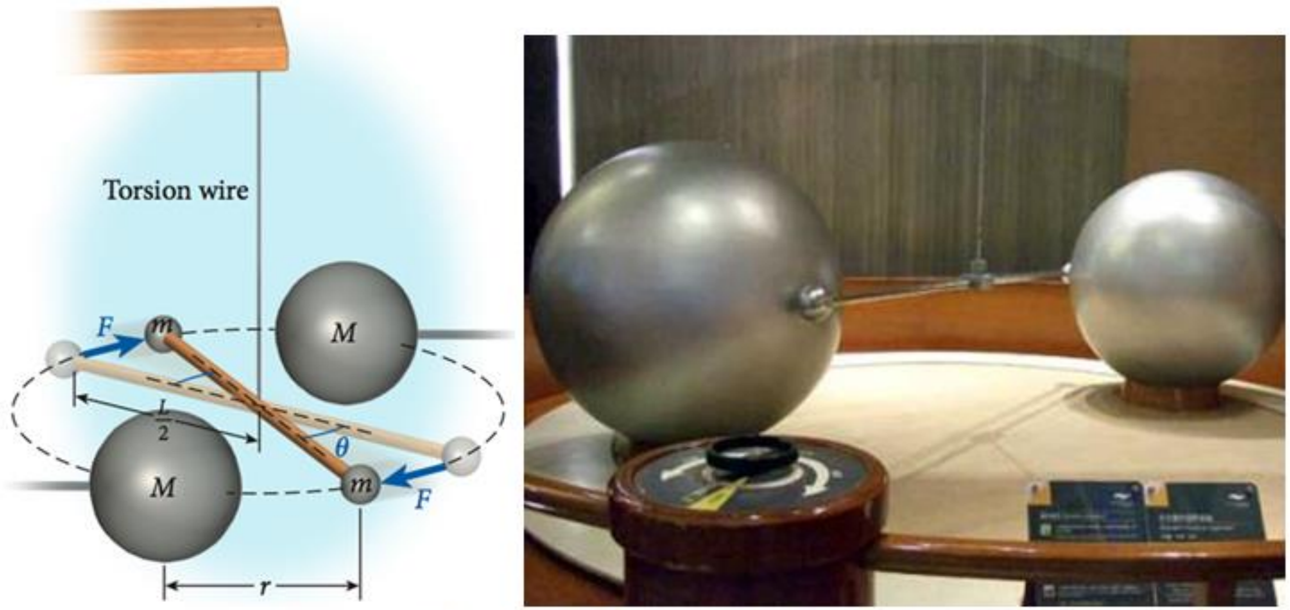

FIGURE 2 : Expérience de Cavendish :
mesure de la constante de gravitation avec un pendule de torsion

➢ Principe

➢ Question : Comment en déduire G, la constante de gravitation avec ce dispositif, appelé **pendule de torsion** ?

1 Mouvements particuliers d'un solide

1.1 Solide

➢ Modèle du solide indéformable

description syst. matériel avec 1 extension spatiale

Définition: **solide indéformable**

$$\boxed{\forall (A,B) \in S,\ \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = cste}$$

➢ Étude du mouvement d'un solide

6 degrés de liberté

1.2 Dynamique du solide

- Quantité de mouvement

Définition: résultante cinétique

$$\boxed{\overrightarrow{p}(S) = m\vec{v}_G}$$

G : centre d'inertie du solide

- 2ème loi de Newton (P.F.D.)

Énoncé

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \sum_i \vec{f}_{i,ext}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{p(S)}}{dt} = m\vec{a}_G}$$

1.3 Mouvement de translation

➢ Solide en translation

Animation 1 : Figures Animées pour la physique / Mécanique / Cinématique / Vitesse d'entraînement (Translation)
http://www.sciences.univ-nantes.fr
/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/entrainement_trans.php

Définition: solide indéformable en translation

$$\boxed{\text{À chaque instant t, } \overrightarrow{A_tB_t} = \overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{cste}}$$

➢ Vitesse des points du solide en translation

Propriété

$$\boxed{\vec{v}_{B/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{A/\mathcal{R}}(t)}$$

➢ Exemples de translations d'un solide

❖ Cas du camion se déplaçant sur une route rectiligne

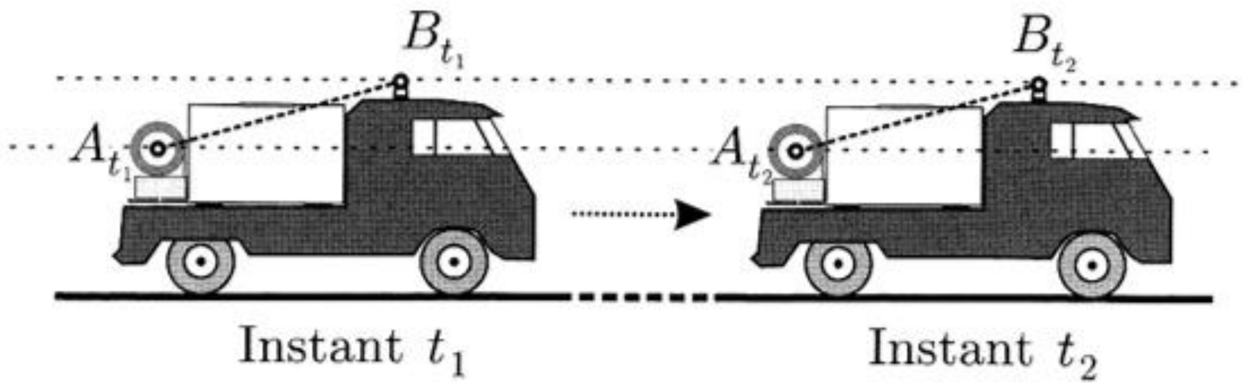

FIGURE 3 : Camion en translation rectiligne

Trajectoire des points du solide : une droite

Translation rectiligne

❖Cas d'une nacelle suspendue à une grande roue

Trajectoire des points du solide : un cercle

Translation circulaire

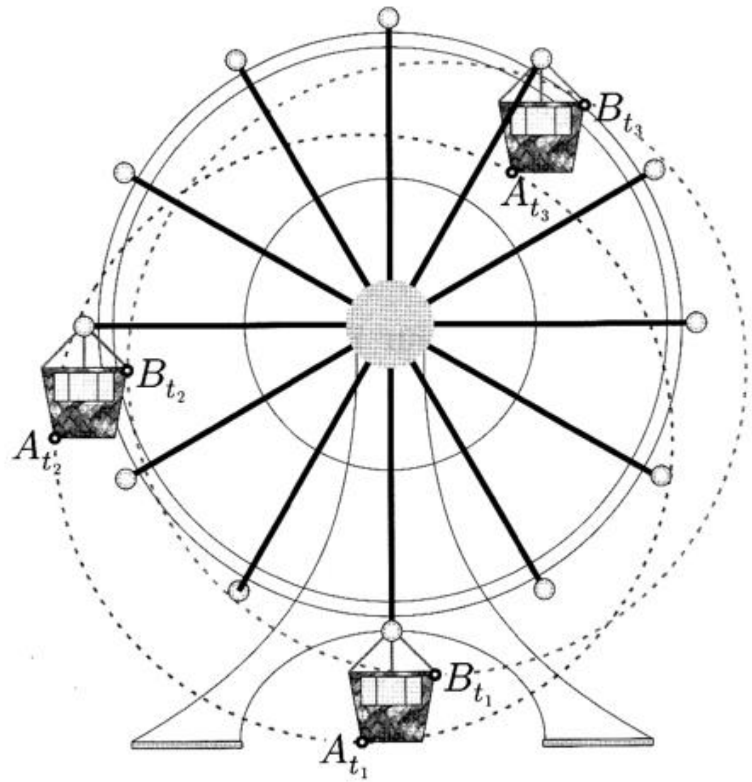

FIGURE 4 : Nacelle en translation circulaire

❖Translation : elliptique, parabolique, curviligne…

1.4 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

➢ Solide en rotation

Animation 2 : Figures Animées pour la physique / Mécanique / Cinématique / Vitesse d'entraînement (Rotation)
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/entrainement_rot.php

Définition :

Solide indéformable en rotation autour de Δ

ts pts : mvt circulaire autour de Δ

➢ Vitesse des points du solide en rotation

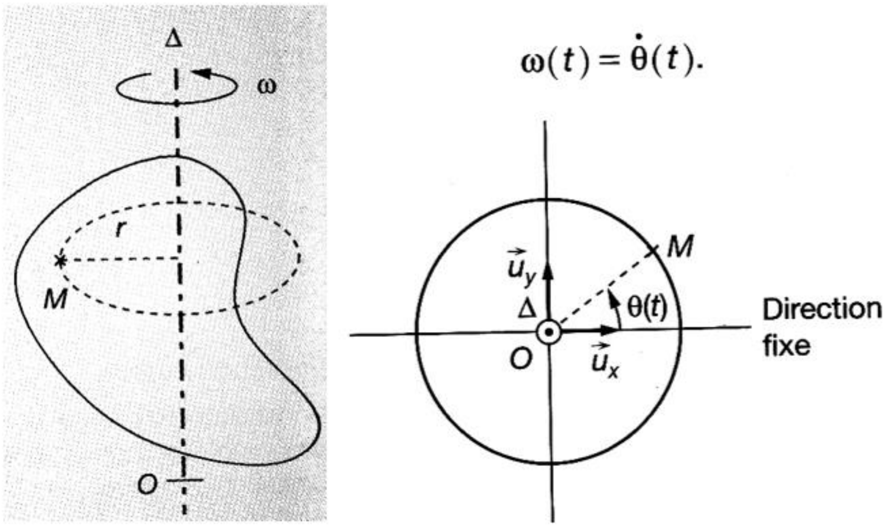

FIGURE 5 : Mouvement de M d'un solide en rotation dans l'espace (à gauche), dans le plan orthogonal à Δ (à droite)

Définition : **vitesse angulaire de rotation du solide**

$$\boxed{\omega(t) = \dot{\theta}(t)}$$

➢ Conséquences

2 Solide en rotation autour d'un axe fixe

2.1 Moment cinétique d'un solide

2.1.1 Cas d'un système de points matériels

➢ **Définition** : Moment cinétique du syst S p/r à O

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{L_O}(S)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L_O}(M_1) + \overrightarrow{L_O}(M_2) \\ = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{p_2}\end{aligned}}$$

➢ Moment cinétique par rapport à un axe Δ

$$\boxed{L_\Delta = \overrightarrow{L_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

➢ Généralisation

$$\boxed{L_\Delta(S) = \sum_i L_\Delta(M_i)}$$

➢ Expression en coordonnées cylindriques

2.1.2 Cas d'un solide en rotation

- Modélisation
- Moment d'inertie

Définition : **moment d'inertie** $J_{(Oz)}$ du solide p/r à l'axe (Oz)

$$\boxed{J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i) = \sum_i m_i r_i^2}$$

- Moment cinétique scalaire

Définition

$$\boxed{L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}}$$

➢ Moments d'inertie de quelques solides homogènes

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$

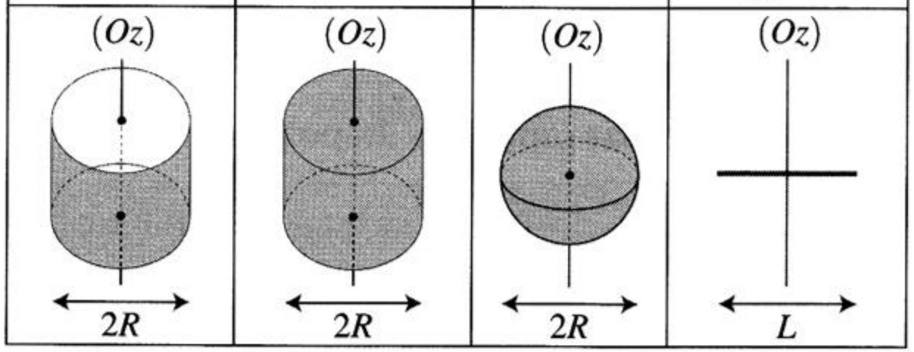

FIGURE 6 : Moments d'inertie par rapport à l'axe (Oz) d'un solide de masse m

➢ Répartition des masses

Propriété

Pour compléter... Pour approfondir...

[1] J.-M. Courty, É. Kierlik, Le chat contorsionniste, *Pour la Science*, n°431, p. 88-90, Septembre 2013

2.2 Moment d'un couple de forces

2.2.1 Couple de deux forces

➢ Principe

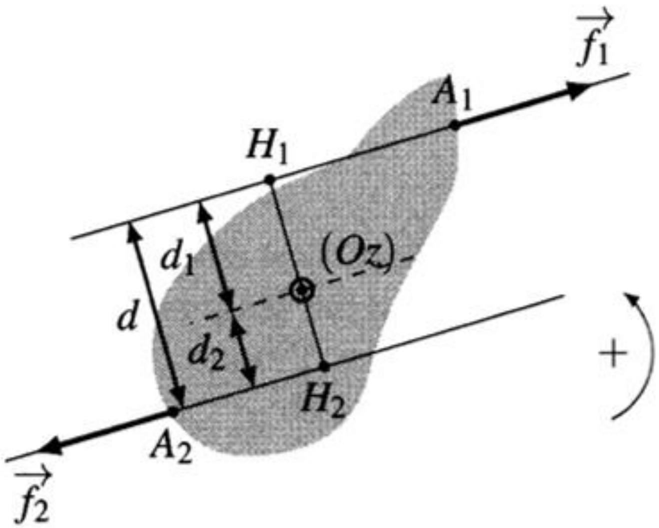

FIGURE 7 : Couple de deux forces

➢ Moment résultant par rapport à l'axe (Oz)

➢ Conséquence

Définition : couple de forces

$$\boxed{\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}}$$

$$\boxed{\Gamma = \mathcal{M}_{(Oz)} \neq 0}$$

2.2.2 Liaison pivot

- Solide en rotation
- **Définition** : liaison pivot
- Réalisation pratique

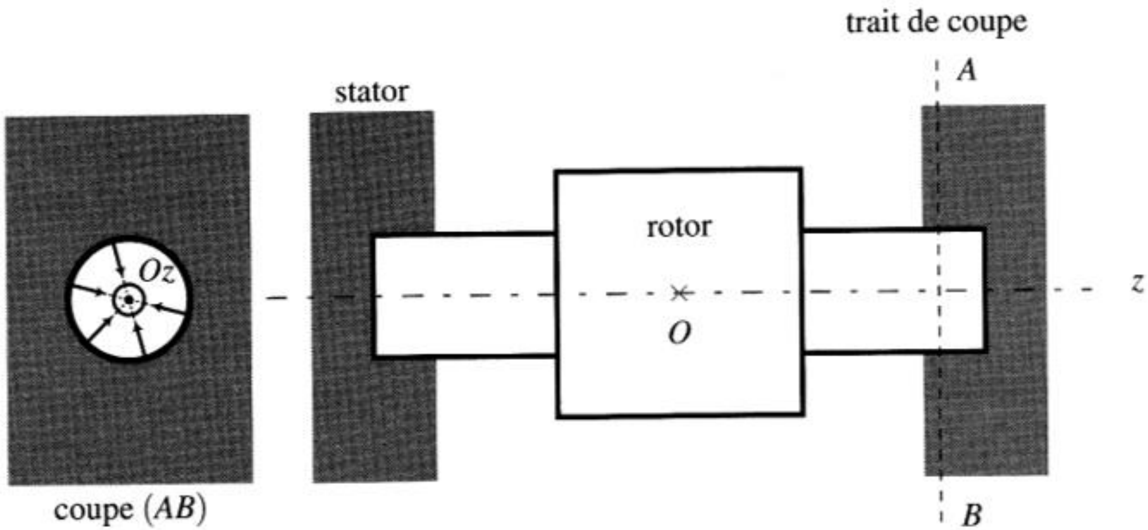

FIGURE 8 : Réalisation d'une liaison pivot

- Moment d'une liaison pivot

Propriété : liaison pivot idéale $\boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison pivot}) = 0}$

2.3 Théorème scalaire du moment cinétique pour un solide en rotation

➤ <u>Énoncé</u>

$$\boxed{\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right)}$$

➤ <u>Autre formulation</u>

$$\boxed{J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right)}$$

Similitude avec le PFD

- solide en translation rectiligne selon l'axe (Ox) : PFD

$$m\ddot{x} = \overrightarrow{F}_{ext} \cdot \overrightarrow{u_x}$$

Inertie

Accélération (conséquence)

Projection des causes

- solide en rotation autour de l'axe (Oz) : Th MC

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

Propriété

[2] P. Kervella, Les étoiles déformées par leur rotation, *Pour la Science*, n°329, p. 76-83, Mars 2005

[3] J.-M. Courty, É. Kierlik, Le vol de l'ovale, *Pour la Science*, n°359, p. 98-99, Septembre 2007

2.4 Pendule pesant

- Retour à la problématique 1
- Modèle : pendule pesant

Définition

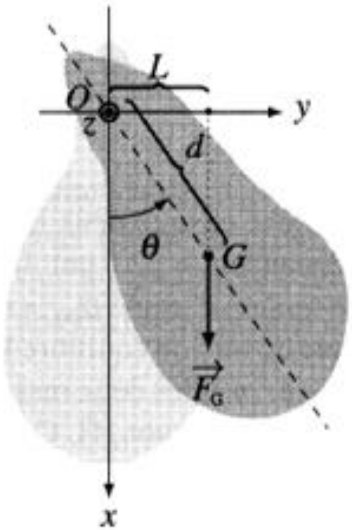

FIGURE 9 : Pendule pesant

- <u>Exercice d'application 1 : pendule pesant</u>

  On note (Oz) l'axe de rotation du solide, G son centre de gravité situé à une distance d du point O, $J_{(Oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz). On repère la position du solide par l'angle θ entre la droite (OG) et l'axe (Ox). On suppose que la liaison pivot entre le solide et le référentiel terrestre est parfaite d'axe (Oz).

  Déterminer l'équation du mouvement du pendule pesant.

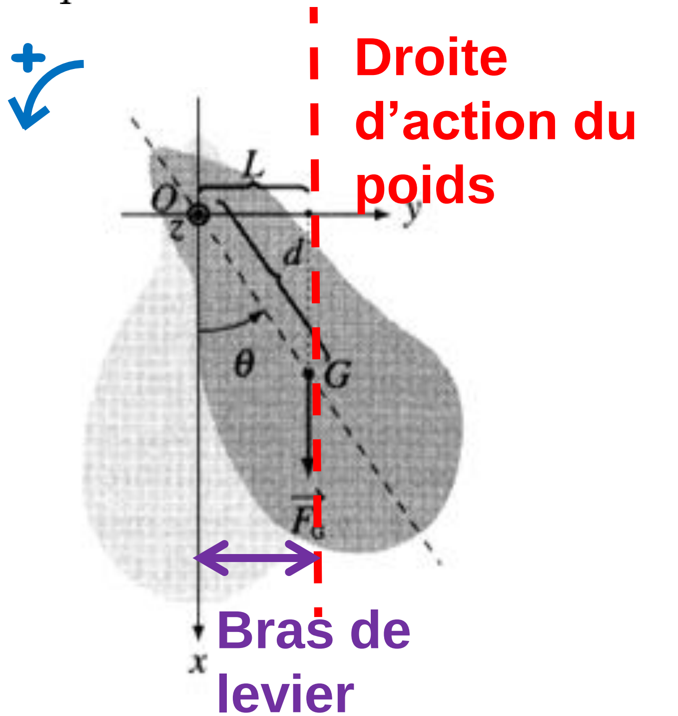

FIGURE 9 : Pendule pesant

- **Petites oscillations**

2.5 Pendule de torsion

➢ Couple de torsion

Définition :

Moment Γ du couple de torsion

$$\boxed{\Gamma = -C\alpha}$$

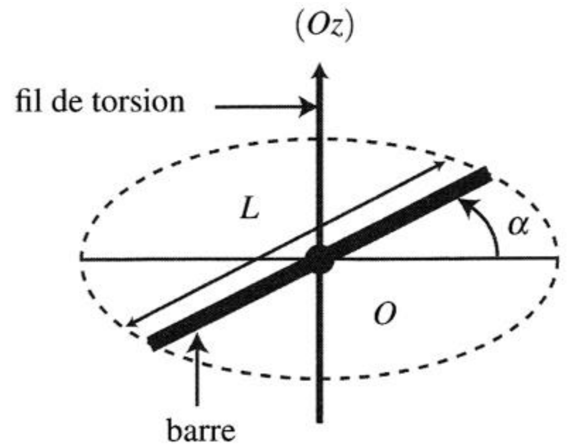

FIGURE 10 : Pendule de torsion vu en perspective

➢ Exercice d'application 2 : pendule de torsion

On étudie les mouvements dans lesquels le fil reste vertical (axe (Oz)) et la barre tourne autour du fil avec un mouvement oscillatoire en restant dans un plan horizontal.

Déterminer l'équation du mouvement du pendule de torsion.

Animation 3 : Physique et simulations numériques / Mécanique / Oscillateurs / pendule de torsion
http://subaru.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/torsion.html

➢ Retour à la problématique 2

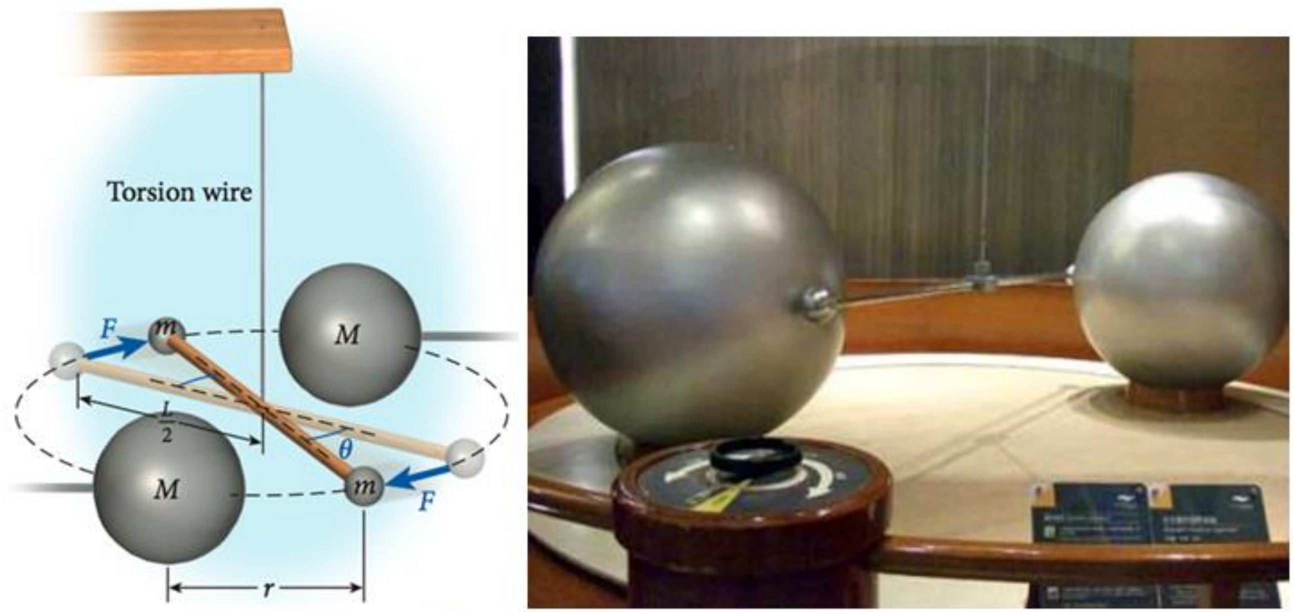

FIGURE 2 : Expérience de Cavendish :
mesure de la constante de gravitation avec un pendule de torsion

3 Étude énergétique du mouvement d'un solide en rotation

3.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation

- <u>Moment d'inertie du solide</u>
- <u>Caractéristiques cinétiques des points M_i</u>
- <u>Énergie cinétique du solide</u>

<u>Définition</u>

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \omega^2}$$

- <u>Analogie translation / rotation</u>

Vitesse

Inertie

$$E_C = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

3.2 Puissance et travail d'une force appliquée sur un solide en rotation

- **Définition** : Puissance

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\vec{f}_i\right)=\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{f}_i\right)\dot{\theta}}$$

- Couples moteur / résistant
- Analogie translation / rotation
- Travail d'une force
  - Travail élémentaire

$$\boxed{\delta W\left(\vec{f}_i\right)=\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{f}_i\right)d\theta}$$

  - Travail sur une trajectoire

$$\boxed{W\left(\vec{f}_i\right)=\int \delta W\left(\vec{f}_i\right)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{f}_i\right)d\theta}$$

3.3 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

- <u>Démonstration</u>
- <u>Énoncé</u>

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \sum_i \mathcal{P}\left(\vec{f_i}\right) = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{f_i}\right)\dot{\theta} \\ &\Leftrightarrow dE_C = \sum_i \delta W\left(\vec{f_i}\right) = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{f_i}\right) d\theta\end{aligned}}$$

3.4 Pendule pesant

👁 Animation 4 : Figures animées pour la Physique / Mécanique / Oscillateurs / Pendule pesant
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php

- Exercice d'application 3

Retrouver l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème de l'énergie cinétique.

- **Intégrale première du mouvement**
- **Nature du mouvement à partir du graphe d'énergie potentielle**

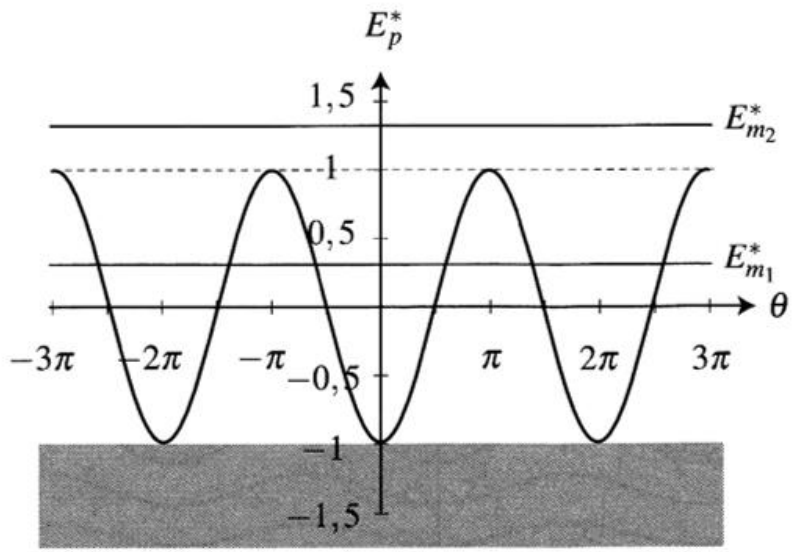

FIGURE 11 : Graphe d'énergie potentielle du pendule pesant

3.5 Pendule de torsion

- <u>Intégrale première du mouvement</u>