1. Logique et calculs, méthodologie

I. Propositions mathématiques

I.1. Définition

I.2. Connecteurs logiques

Définition. Soient A et B deux propositions mathématiques. On peut définir d'autres propositions mathématiques à l'aide des connecteurs suivants :

- La conjonction : « A et B » est vraie si A est vraie et B est vraie (et fausse sinon).
- La disjonction : « A ou B » est vraie si A est vraie ou si B est vraie (et fausse sinon).
- La négation : « non A » (ou $\neg A$) est vraie si A est fausse (et fausse sinon).
- L'équivalence : « $A \Leftrightarrow B$ » est vraie si A et B ont le même statut (et fausse sinon).
- L'implication : « $A \Rightarrow B$ est vraie si A est fausse ou que B est vraie (et fausse sinon). On a donc « $A \Rightarrow B$ » $\Leftrightarrow$ « non(A) ou B ».

m Pour démontrer que des propositions mathématiques ont le même statut, on effectue en général une table de vérité en effectuant une disjonction de cas selon les statuts des différentes propositions.

Exercice d'application 1. Soient A et B deux propositions mathématiques.

1) Montrer que « $A \Leftrightarrow B$ » $\Leftrightarrow$ « ($A \Rightarrow B$) et ($B \Rightarrow A$) ».

2) Montrer que « $A \Rightarrow B$ » $\Leftrightarrow$ « non(B) $\Rightarrow$ non(A) ».

3) Si on veut démontrer une égalité portant sur trois propositions mathématiques A, B, C, combien de cas doit-on traiter ? Et pour une égalité portant sur n propositions mathématiques avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ?

Proposition. Soient A, B, C trois propositions mathématiques. Alors :

- « non (A et B) » $\Leftrightarrow$ « non(A) ou non(B) ».
- « non (A ou B) » $\Leftrightarrow$ « non(A) et non(B) ».
- « non(non(A)) » $\Leftrightarrow$ « A »
- « A et (B ou C) » $\Leftrightarrow$ «(A et B) ou (A et C) »
- « A ou (B et C) » $\Leftrightarrow$ «(A ou B) et (A ou C) »
- « non ($A \Rightarrow B$) » $\Leftrightarrow$ « A et non(B) »

Définition. Soient A et B deux propositions mathématiques.

- Quand on a « $A \Rightarrow B$ » vraie, on dit que A est une condition **suffisante** à B (il suffit de montrer A pour montrer B) et que B une condition **nécessaire** à A (si B est fausse, A ne peut pas être vraie).
- Quand on a « $A \Leftrightarrow B$ » vraie, on dit que A est une condition **nécessaire et suffisante** à B (abrégé en CNS). On peut aussi dire que A et B sont équivalents.

Exercice d'application 2. Dans tout l'exercice, x est une variable réelle. Compléter en justifiant les propositions suivantes par « il faut que » (condition nécessaire), « il suffit que » (condition suffisante) ou « il faut et il suffit que » (condition nécessaire et suffisante).

1) Pour que $|x-1| = 2$, ... $x = 3$.
2) Pour que $x^2 \leq 4$, ... $x \in [-2, 2]$.
3) Pour que $x^2 + x + 1 > 0$, ... $x > 0$.
4) Pour que $x = 1$, ... $x^2 + x + 1 = 3$.
5) Pour que $\dfrac{1}{x-2} < -1$, ... $x \in]1, 2[$.

II. Quantificateurs

II.1. Définitions

Définition. Soit $A(x)$ une proposition mathématique de paramètre x avec $x \in E$ où E est un ensemble.

- « $\forall x \in E,\ A(x)$ » est vraie si $A(x)$ est vérifiée pour tous les x de l'ensemble E (et fausse sinon).
- « $\exists x \in E\ /\ A(x)$ » est vraie si il existe au moins un x de l'ensemble E tel que $A(x)$ est vraie (et fausse sinon).
- « $\exists ! x \in E\ /\ A(x)$ » est vraie si il existe un unique x de E tel que $A(x)$ est vraie (et fausse sinon).

Proposition. Soit $A(x)$ une proposition mathématique de paramètre x avec $x \in E$ où E est un ensemble. Alors :

- « non $(\forall x \in E,\ A(x))$ » $\Leftrightarrow$ « $\exists x \in E\ /\ \text{non}(A(x))$ ».
- « non $(\exists x \in E\ /\ A(x))$ » $\Leftrightarrow$ « $\forall x \in E,\ \text{non}(A(x))$ ».
- « $\forall x \in E,\ A(x)$ » $\Leftrightarrow$ « $\forall y \in E,\ A(y)$ ».
- « $\exists x \in E\ /\ A(x)$ » $\Leftrightarrow$ « $\exists y \in E\ /\ A(y)$ ».

(m) Pour nier une proposition, il suffit donc de remplacer les $\exists$ par des $\forall$ et $A(x)$ par non$(A(x))$.

Exercice d'application 3. Écrire la négation des propositions suivantes :

1) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R}_+^*\ /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \times a \geq M$.
2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a > 0\ /\ a < \varepsilon$.
3) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}^*\ /\ (|x-y| \leq n \Rightarrow x + y$ est pair$)$.
4) $\exists x \in \mathbb{R}\ /\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$.

II.2. Preuves utilisant des quantificateurs

(m) Pour démontrer que « $\forall x \in E,\ A(x)$ » :
- On définit $x \in E$, en général en écrivant : « Soit $x \in E$. ». On a donc fixé notre élément dans E qui ne bougera plus pour le reste de la preuve (on ne peut donc pas changer sa valeur ou lui donner une valeur quelconque).
- On prouve (par le calcul par exemple) que $A(x)$ est vraie.

(m) Pour démontrer que « $\exists x \in E \ / \ A(x)$ » ou que « $\exists! x \in E \ / \ A(x)$ » :

- On trouve/construit/démontre qu'il existe un $x \in E$ qui vérifie $A(x)$. Il suffit d'en trouver un donc une preuve du genre : « le résultat est vrai pour $x = 1$ » serait tout à fait valable. Si on n'a à priori pas d'idée sur une solution, on peut raisonner par analyse/synthèse pour en trouver une.
- Si il faut en plus montrer l'unicité :
  — soit on suppose qu'il existe deux éléments $x, y \in E$ vérifiant la propriété et on montre que $x = y$.
  — soit la manière dont on a construit un élément x vérifiant la propriété permet d'affirmer en plus qu'il n'y a pas d'autres choix.

(m) Pour démontrer une proposition avec des quantificateurs, il faut tout d'abord la comprendre ! N'hésitez donc pas à la traduire « en français » dans votre tête avant d'écrire la moindre preuve.

Exercice d'application 4. Pour les énoncés de l'exercice d'application 3, les démontrer (s'ils sont vrais) ou démontrer leur négation (s'ils sont faux).

III. Méthodes de démonstration

III.1. Méthode directe

III.2. Contraposée/Par l'absurde

III.3. Raisonnement par analyse/synthèse

(m) Pour rédiger un raisonnement par analyse/synthèse :

- Analyse : on suppose que l'on a une solution et on cherche à l'exprimer en fonction des paramètres du problème ou on cherche des conditions sur cette solution. Par exemple, est-elle positive, son carré est-il égal à 5, etc.
- Synthèse : on définit alors une variable vérifiant les conditions trouvées dans l'analyse et on démontre qu'elle est alors bien solution du problème. Dans les exemples ci-dessus, il faudrait montrer soit que tous les réels positifs vérifient la propriété, soit tester si $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ sont solutions, etc. Cette étape est très importante car **il se peut que l'on trouve alors de nouvelles conditions !** Toujours dans les exemples précédents, il se peut que seuls les réels positifs inférieurs à 7 soient solutions ou que seule $\sqrt{5}$ soit solution.

Exercice d'application 5. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction qui s'annule en 0 et d'une fonction constante. A-t-on unicité de la décomposition ?

III.4. Récurrence

(m) Voici un plan de rédaction de récurrence simple (énoncé/initialisation/hérédité/conclusion) :

- Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « ... ».
- *On démontre* $\mathcal{P}(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. *On démontre* $\mathcal{P}(n+1)$.
- La propriété étant initialisée et héréditaire, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice d'application 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -2^{n-1} + 1$.

(m) Voici un plan de rédaction de récurrence double (énoncé/initialisation/hérédité) :

- Montrons par récurrence double $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « ... ».
- *On démontre* $\mathcal{P}(0)$ *et* $\mathcal{P}(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. *On démontre* $\mathcal{P}(n+2)$.

(m) Voici un plan de rédaction de récurrence forte (énoncé/initialisation/hérédité) :

- Montrons par récurrence forte $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « ... ».
- *On démontre* $\mathcal{P}(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. *On démontre* $\mathcal{P}(n+1)$.

Exercice d'application 7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = 2u_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n+1} = u_n + u_{n+1} \end{array}\right.$. Déterminer les valeurs de u_2, u_3, u_4 et u_5. Conjecturer alors la valeur de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture par récurrence. Quel type de récurrence doit-on faire ?

(m) Quelques conseils pour les récurrences :

- Ne JAMAIS écrire au début de l'hérédité « Supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ ». En effet, si vous supposez la propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle est aussi vraie au rang $n+1$ et il n'est pas utile de faire une preuve ! Il est donc important dans la rédaction que le « n » soit fixé (« Soit $n \in \mathbb{N}$ ») pour toute la preuve. De la même manière, écrire « Posons $\mathcal{P}(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$, ... » n'a pas de sens car $\mathcal{P}(n)$ représente l'hypothèse au rang n, pas à tous les rangs...

- Dans les preuves par récurrence, il est en général plus facile d'essayer d'exprimer $\mathcal{P}(n+1)$ et d'utiliser $\mathcal{P}(n)$ (donc d'utiliser nos hypothèses dans l'expression que l'on cherche à démontrer) plutôt que de partir de l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ et d'essayer de la manipuler par des suites d'implications hasardeuses pour arriver à $P(n+1)$.

- Avant de rédiger une récurrence, il faut avoir une idée de comment va marcher l'hérédité ou qu'il y ait vraiment un lien entre $P(n)$ et $P(n+1)$...

- Pour savoir en quels valeurs initialiser votre récurrence, il suffit de regarder votre rédaction de l'hérédité : l'initialisation doit être faite pour la plus petite valeur de n. Par exemple, si votre hérédité est « Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$. », alors l'initialisation doit démontrer $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ (qui sont les valeurs pour $n = 2$). Si votre hérédité est « Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}$ vraie jusqu'au rang n », alors il faut démontrer $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ pour l'initialisation !

IV. Inégalités

IV.1. Rappels

Proposition. Les inégalités larges sont stables :

- par somme : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
- par produit par un réel **positif** : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.

Multiplier par un réel négatif change le sens de l'inégalité.

Proposition. Les inégalités strictes sont stables :

- par somme : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow x + z < y + z$.
- par produit par un réel **strictement positif** : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}_+^*,\ x < y \Rightarrow xz < yz$.

Multiplier par un réel strictement négatif change le sens de l'inégalité stricte.

(m) Pour trouver le signe d'une expression, il faut essayer de la **factoriser** et d'étudier séparément le signe de chacun des termes du produit (éventuellement à l'aide d'un tableau de signes).

Exercice d'application 8. Déterminer le tableau de signes de $f : x \mapsto \left(\dfrac{4}{x^2} - 1\right) \times \left(x^2 - 5x + 4\right)$.

(m) Quand on cherche à comparer deux fonctions f et g (on veut donc trouver les x réels tels que $g(x) \geq f(x)$), il est souvent plus facile de faire une étude du signe de $g - f$ (et donc de chercher les x réels tels que $g(x) - f(x) \geq 0$, soit en factorisant cette expression, soit à l'aide d'une étude de fonctions). En effet, il vaut mieux avoir une inégalité avec l'inconnue x d'un seul côté plutôt que des deux côtés et nous avons plus l'habitude de visualiser quand une fonction est positive ou négative plutôt que de comparer deux fonctions entre elles.

(m) Parfois pour étudier le signe d'une dérivée, il faut refaire une étude de fonctions et donc dériver la dérivée... Avant de se lancer dans un multiple calcul de dérivées, il faut que les calculs se simplifient de plus en plus, sinon ce n'est pas la bonne méthode ! Il faut également bien vérifier son calcul sur la dérivée première avant de se lancer dans une longue suite de calculs tous faux car la première étape est fausse...

Exercice d'application 9. Démontrer les inégalités :

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -x + 1 \leq \dfrac{1}{x+1}$.
3) $\forall x \in \left]0, 1\right],\ x^2 - 3x + 3 \leq \dfrac{1}{x}$.

IV.2. Intervalle

Définition. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble qui contient tous les nombres réels compris entre ses deux bornes (incluses ou non selon si l'intervalle est fermé ou ouvert). *Par exemple,* $[a, b]$*,* $]a, b[$*,* $[a, b[$*,* $[0, +\infty[$ *sont des intervalles de* $\mathbb{R}$ *(les deux derniers n'étant ni ouvert, ni fermé).*

IV.3. Valeur absolue

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $|x| = \max(-x, x)$.

Proposition. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

- $|x| \geq 0$ et on a l'encadrement $-|x| \leq x \leq |x|$.
- $|-x| = |x|$.
- $|x \times y| = |x| \times |y|$.
- si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

m Quand on manipule des valeurs absolues, on utilise souvent le fait que $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ (et donc que $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\varepsilon$ ou $x > \varepsilon$).

Exercice d'application 10. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x^2 - x - 1| \leq 1$.

Théorème. Inégalité triangulaire. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x| + |y|$. On a égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

m Cette inégalité est utile pour déterminer rapidement un encadrement (c'est à dire un majorant et un minorant) d'une fonction. Les bornes obtenues ne sont cependant en général pas optimales.

Exercice d'application 11. Déterminer sans calcul un encadrement des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 2\sin(x) + \cos(3x) + 4x$ sur $[0, 3]$.
2. $g : x \mapsto x^2 - \cos(x)$ sur $[-2, 1]$.

Théorème. Inég. triang. v2. On a l'encadrement de $|x - y|$ (la distance entre x et y) suivant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

V. Calculs

m Pour ne pas se tromper quand on transforme une expression, bien faire des suites d'égalité en effectuant une simplification à la fois. On pourra voir la méthodologie *0. Calcul* pour des conseils et les erreurs les plus fréquentes.

m Quand on écrit une équivalence « $\Leftrightarrow$ » dans un calcul, il faut toujours se demander si on a perdu de l'information ou pas entre les deux expressions ! Si on a perdu de l'information, les deux propriétés ne sont pas équivalentes, il y aura juste une implication, qui d'ailleurs très souvent suffit car en exercice, on demande la plupart du temps de montrer des implications et pas des équivalences !

Exercice d'application 12. Les équivalences suivantes sont-elles vraies ? Justifier les implications vraies et donner un contre-exemple aux implications fausses.

1) $x = y + 2 \Leftrightarrow x^2 = (y+2)^2$.

2) $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

3) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < x^2 < y^2$.

4) $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

5) $a + b = c + d \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

VI. Conseils de rédaction

- Règle d'or : **toute affirmation doit être justifiée par un calcul ou l'utilisation d'une question précédente/d'un théorème du cours en en vérifiant la validité des hypothèses.** Si quand vous répondez à une question, vous recopiez l'énoncé (en écrivant par exemple « On a bien *résultat demandé* »), vous n'aurez aucun point ! Vous devez **toujours** apporter une valeur ajoutée à l'énoncé.

- Bien définir les variables avant de les utiliser.

- **Vérifier que l'on a le droit de faire quelque chose avant de le faire.** Par exemple justifier qu'un réel est non nul avant de diviser par ce réel ou qu'une fonction est dérivable (par exemple comme somme/produit/composée de fonctions dérivables) avant de la dériver.

- Faire des phrases et ne pas mélanger phrases et symboles mathématiques.

- Calculs : utiliser des suites d'égalité (alignées).

- Citer les théorèmes/résultats du cours/questions précédentes utilisé(e)s.

- En vérifier les hypothèses avant des les utiliser !

- Mettre en valeur les résultats (souligner ou encadrer les résultats/les hypothèses importantes). Il est fortement conseillé de **souligner/encadrer au cours de la rédaction** et non pas après avoir tout rédigé. Cela vous permettra de vérifier au cours de votre rédaction si vous n'avez pas oublié d'hypothèses ou de vérifier des points importants.

- Pour les devoirs, bien penser à utiliser les questions précédentes et l'architecture du sujet ! Si vous êtes à la question 3.c), il est très probable que les questions 3.a) et/ou 3.b) servent ! De la même manière, si vous êtes en question 4, il est très probable que les résultats des questions 1 et/ou 2,3 servent ! Si une question vous semble indépendante des questions précédentes (cela arrive aussi, n'hésitez pas à les chercher en devoir, surtout si vous bloquez sur d'autres questions !), c'est très souvent qu'elle est utilisée dans la suite...

VII. Correction des exercices

Exercice d'application 1. On effectue une table de vérité afin de vérifier que les affirmations proposées ont le même staut.

1)

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Leftarrow A$	$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

2)

A	B	$A \Rightarrow B$	non(B)	non(A)	non$(B) \Rightarrow$ non(A)
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

3) Si on veut démontrer une égalité portant sur trois propositions, on aura 8 cas possibles en tout. On peut visualiser la situation avec un arbre. On a tout d'abord deux possibilités pour la proposition A, puis après avoir fait ce choix, on a deux possibilités pour la proposition B (ce qui nous fait un arbre à 4 branches pour le moment). Enfin, il reste encore deux possibilités pour la proposition C, ce qui nous donne un arbre à 8 branches. On peut lister tous les cas ici : (V, V, V), (V, V, F), (V, F, V), (V, F, F), (F, V, V), (F, V, F), (F, F, V), (F, F, F).

Si on a n propositions mathématiques, on a deux possibilités pour chaque proposition ce qui multiplie par deux le nombre de branches de l'arbre à chaque étape. On a donc en tout 2^n cas à étudier.

Exercice d'application 2.

1) On a deux solutions à l'équation $|x - 1| = 2$ qui sont $x = 3$ et $x = -1$. Ceci entraine que l'on a juste $x = 3 \Rightarrow |x - 1| = 2$ et que la réciproque est fausse. Donc pour que $|x - 1| = 2$, il suffit que $x = 3$.

2) On a $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2$ (par stricte croissance de la fonction racine carrée). Puisque $|x| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$, on en déduit que pour que $x^2 \leq 4$, il faut et il suffit que $x \in [-2, 2]$.

3) Si $x > 0$, alors $x^2 + x + 1 > 0$. Par contre, on voit par exemple que si $x = 0$, on a aussi $x^2 + x + 1 > 0$. On a donc juste une condition suffisante, mais non nécessaire (il suffit que $x > 0$ pour que $x^2 + x + 1 > 0$).

4) On résout l'équation $x^2 + x + 1 = 3$ en trouvant les racines du polynôme $x^2 + x - 2$ qui sont $x = 1$ et $x = -2$. On a donc $x = 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 3$ mais la réciproque est fausse. Donc pour que $x = 1$, il faut que $x^2 + x + 1 = 3$.

5) On raisonne par équivalences en effectuant un tableau de signes (attention dans les manipulations d'inégalité à changer le sens de l'inégalité si vous multipliez par une quantité négative). On a :

$$\frac{1}{x-2} < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} < 0.$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

On a donc $\dfrac{1}{x-2} < -1 \Leftrightarrow x \in]1,2[$. Pour que $\dfrac{1}{x-2} < -1$, il faut et il suffit que $x \in]1,2[$.

Exercice d'application 3.

1) $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ / \ n \times a < M$.

2) $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall a > 0, \ a \geq \varepsilon$.
Attention à ne pas écrire $\exists \varepsilon \leq 0 \ / \ \forall a \leq 0, \ a \geq \varepsilon$! Dans la proposition initiale, on a $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a > 0 \ / \ a < \varepsilon$ qui est la même chose que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ / \ a < \varepsilon$. Ainsi, en remplaçant les quantificateurs quand on écrit la négation, on obtient $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ a \geq \varepsilon$, ce qui correspond bien à la réponse donnée.

3) $\exists x, y \in \mathbb{Z} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ |x-y| \leq n$ et $x+y$ est impair.

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} \ / \ \big(x < y$ et $x^2 \geq y^2\big)$.

Exercice d'application 4.

1) La question est de savoir si pour n'importe quel réel M (que l'on ne connait pas), on peut construire un réel a (que l'on peut choisir et qui peut dépendre de M) tel que si on le multiplie par n'importe quel entier n, $n \times a$ est plus grand que M. On voit alors que cette proposition est vraie. En effet, si M est négatif ou nul, on peut prendre $a = 1$ (on demande juste d'en trouver un qui convient). Si M est strictement positif, on peut prendre $a = M$ par exemple (puisque l'on aura bien $n \times M \geq M$ car $n \geq 1$ et M est positif).

2) La proposition signifie que quelque soit le réel ε strictement positif, on peut trouver un réel a lui aussi strictement positif et en plus strictement plus petit que ε. La proposition est donc vraie. En effet, si on fixe $\varepsilon > 0$, on peut prendre $a = \dfrac{\varepsilon}{2}$ qui vérifie bien ces deux conditions.

3) La proposition signifie que si l'on choisit des entiers relatifs x et y quelconque, alors on peut trouver un entier n strictement positif tel que si l'écart entre x et y est plus petit que n, alors $x+y$ est automatiquement pair. Si on pouvait choisir $n = 0$ (autrement dit si on avait $\exists n \in \mathbb{N}$ à la place de $\exists n \in \mathbb{N}^*$), alors la proposition serait vraie car on aurait $|x-y| \leq 0$ qui impliquerait $x = y$ et donc $x + y = 2x$ qui serait bien pair. La proposition est ici fausse et on va montrer sa négation. On va prendre $x = 1$ et $y = 0$ par exemple. On a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|1| \leq n$ et $1 + 0$ impair. Puisque la négation est vraie, cela signifie que la proposition initiale est fausse. *On remarquera que la proposition « $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}^* \ / \ (|x-y| < n \Rightarrow x+y$ est pair) » est elle vraie ! En effet, si on prend $x, y \in \mathbb{Z}$ quelconque et $n = 1$, alors si $|x-y| < 1$, cela signifie que $x = y$ et donc que $x+y$ est pair. On fera donc attention à bien différencier les inégalités larges et les inégalités strictes.*

4) La proposition signifie qu'il existe un certain réel x tel que pour tout les réels y, si ils sont strictement plus grands que x, alors leur carré est aussi strictement plus grand que le carré de x. Cette proposition est vraie. Si on prend par exemple $x = 0$ (mais n'importe quel réel positif convient ici car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$), on a bien que si $y > 0$, alors $y^2 > 0$.

Exercice d'application 5. Par analyse/synthèse. Supposons le résultat vrai. On a donc $f = g+k$ où g

est une fonction qui s'annule en 0 et $k \in \mathbb{R}$ est une constante. Ceci signifie que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)+k$. En évaluant en $x = 0$, on trouve que $f(0) = k$. Ceci nous permet de déterminer la constante k. La fonction g est elle automatiquement égale à $f - k$. On peut donc faire la synthèse.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (f(x) - f(0)) + f(0)$. $x \mapsto f(0)$ est bien une fonction constante et $x \mapsto f(x) - f(0)$ est bien une fonction qui s'annule en 0. On a donc bien montré la propriété voulue.

On a unicité de la décomposition car dans l'analyse, la valeur de la constante k a été déterminée de manière unique (c'est la valeur de f en 0). On peut également le prouver en supposant que $f = g_1 + k_1 = g_2 + k_2$ avec g_1, g_2 qui s'annulent en 0 et k_1, k_2 qui sont constantes. En évaluant en 0 cette relation, on obtient $k_1 = k_2$, ce qui entraine ensuite $g_1 = g_2$. On retrouve bien l'unicité.

Exercice d'application 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = -2^{n-1} + 1$ ». Pour $n = 1$, on a $u_1 = 0$ donc la propriété est initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & 2u_n - 1 & \\ & = & 2(-2^{n-1} + 1) - 1 & \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & -2^n + 2 - 1 & \\ & = & -2^n + 1. & \end{array}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

Exercice d'application 7. En appliquant les deux propriétés en $n = 1$, on trouve $u_2 = 2 \times 1 = 2$ et $u_3 = u_1 + u_2 = 3$. En les évaluant en $n = 2$, on trouve $u_4 = 2u_2 = 4$ et $u_5 = u_2 + u_3 = 5$. On conjecture donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n$ ».

Cette propriété est vraie pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. On va alors la démontrer par récurrence forte.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n et montrons là au rang $n+1$. On a alors deux possibilités :

- Si $n+1$ est pair, on a alors $n+1 = 2m$ avec $m \leq n$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence au rang m, ce qui entraine que :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_{2m} \\ & = & 2u_m \\ & = & 2m \\ & = & n+1. \end{array}$$

- Si $n + 1$ est impair, alors on peut écrire $n + 1 = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ (puisque $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n + 1 \geq 2$). On a alors m et $m + 1$ qui sont dans $\mathbb{N}^*$ et qui sont tous les deux inférieurs ou égaux à n (on a $m = \dfrac{n}{2} \leq n$ et $m + 1 = n + 1 - m \leq n$ puisque $m \in \mathbb{N}^*$). On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence aux rang m et $m + 1$. On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_{2m+1} \\ & = & u_m + u_{m+1} \\ & = & m + (m+1) \\ & = & n+1. \end{array}$$

Dans les deux cas, on arrive à montrer la propriété au rang suivant. Elle est donc héréditaire. Puisqu'elle est initialisée, on en déduit par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$.

Exercice d'application 8. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{4-x^2}{x^2}\right) \times \left(x^2-5x+4\right) \\ &= \left(\frac{(2-x)(2+x)}{x^2}\right) \times ((x-1)(x-4)). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice d'application 9.

1) On pose $f : x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq \ln(x)$. *Les limites obtenues dans le tableau de variations précédents ne sont pas importantes pour obtenir le signe. Pour déterminer la limite en $+\infty$, on a utilisé les croissances comparées et le fait que pour $x > 0$, $x - 1 - \ln(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ pour enlever la forme indéterminée.*

2) On peut ici ne pas faire d'étude de fonctions mais tout passer du même côté et mettre au même dénominateur. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + x - 1 &= \frac{1 + (x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{x+1} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité voulue.

3) On peut ici soit effectuer une étude de fonctions (en redérivant f' pour pouvoir trouver son signe), soit factoriser directement l'expression en remarquant que $x = 1$ est une racine évidente ou en reconnaissant un binôme de Newton. Tout d'abord avec l'étude de fonctions, on pose $f : x \mapsto \frac{1}{x} - x^2 + 3x - 3$ sur $]0,1]$. Cette fonction est infiniment dérivable (car somme de fonctions infiniment dérivables). On a pour $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x + 3 \text{ et } f''(x) = \frac{2}{x^3} - 2 = \frac{2(1-x^3)}{x^3}.$$

On en déduit que $\forall x \in]0,1]\,,\ f''(x) \geq 0$ donc f' est croissante sur $]0,1]$. Puisque $f'(1) = 0$, on a $\forall x \in]0,1]\,,\ f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante sur $]0,1]$. Puisque $f(1) = 0$, on a donc $\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) \geq 0$, ce qui était ce que l'on voulait démontrer.

Sans étude de fonctions à présent. Pour $x \in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} - x^2 + 3x - 3 \\ &= \frac{1 - x^3 + 3x^2 - 3x}{x} \\ &= -\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} \\ &= -\frac{(x-1)^3}{x}. \end{aligned}$$

On a donc bien f positive sur $]0,1]$.

Exercice d'application 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} |x^2 - x - 1| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq x^2 - x - 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - x \text{ et } x^2 - x - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x(x-1) \text{ et } (x+1)(x-2) \leq 0. \end{aligned}$$

Pour la première inégalité, l'ensemble des solutions est $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et pour la seconde inégalité, l'ensemble des solutions est $[-1, 2]$. L'ensemble recherché est donc l'intersection des deux, c'est à dire $\mathcal{S} = [-1, 0] \cup [1, 2]$.

Exercice d'application 11. En utilisant l'inégalité triangulaire pour un encadrement large, puis en étant un peu plus précis en séparant l'étude d'un minorant et d'un majorant :

1) Pour $x \in [0,3]$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |2\sin(x) + \cos(3x) + 4x| \\ &\leq 2|\sin(x)| + |\cos(3x)| + 4|x| \\ &\leq 2 + 1 + 12 \\ &\leq 15. \end{aligned}$$

On en déduit que f est minorée par -15 et majorée par 15.

On peut être un peu plus précis sur le minorant. En effet, on a $0 \leq 4x$ *sur* $[0,3]$*, et puisque sur* $[0,\pi]$*, sinus est positive, elle est également positive sur* $[0,3]$. cos *étant compris entre* -1 *et* 1*, on a alors* $\forall x \in [0,3]$, $-1 \leq f(x) \leq 15$.

2) Pour $x \in [-2,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |x^2 - \cos(x)| \\ &\leq x^2 + |\cos(x)| \\ &\leq 4 + 1 \\ &\leq 5. \end{aligned}$$

On en déduit que g est minorée par -5 et majorée par 5.

On peut être un peu plus précis sur le minorant. En effet, on a $0 \leq x^2$, *ce qui entraine que* $\forall x \in [-2, 1],\ -1 \leq x^2 - \cos(x) \leq 5$.

Exercice d'application 12.

1) On a juste une implication $\Rightarrow$. L'implication est vraie car on peut toujours élever au carré une égalité. L'implication réciproque est fausse car on pourrait avoir $x = -(y+2)$ (prendre par exemple $x = -1$ et $y = -1$).

2) Ici tout est faux. Un contre exemple pour le sens direct : prendre $x = -2$ et $y = 1$. On a bien $x \leq y$ mais on a pas $x^2 \leq y^2$. Un contre exemple pour le sens réciproque : on prend $x = 1$ et $y = -1$. On a bien $x^2 \leq y^2$ mais on a pas $x \leq y$. Si on veut rendre cette équivalence juste, il faut supposer x et y positifs et puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors l'équivalence est bonne (mais il faut bien le justifier avec cet argument de stricte monotonie).

3) Le sens direct est vrai par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Le sens réciproque est par contre faux. En effet, si $x = -1$ et $y = -2$, on a bien $0 < x^2 < y^2$ mais on a pas $0 < x < y$!

4) Le sens direct est vrai (on peut sommer des inégalités qui vont dans le même sens) mais le sens réciproque est faux. En effet, si par exemple $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ et $y_1 = y_2 = 2$, on a bien $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ mais on a pas $x_2 \leq y_2$!

5) Le sens direct est faux (par exemple $1 + 3 = 2 + 2$ mais $1 \neq 2$ et $3 \neq 2$) mais le sens réciproque est vrai (si $a = c$ et $b = d$, alors par somme d'égalités $a + b = c + d$).