TD - Graphes

On dit qu'un graphe est un **graphe simple** s'il n'a pas de boucles et s'il ne peut exister plusieurs arcs entre deux mêmes sommets (pas de multi-arcs).
Dans la suite, on ne considère que des graphes simples ayant un nombre fini de sommets.

Exercice 1 (Résultats théoriques sur les graphes).

1. Si $g = (V, E)$ est un *graphe non orienté*, montrer que : $\displaystyle\sum_{v \in V} \delta(v) = 2n_e$.

2. Montrer qu'un graphe ayant $n_v \geq 3$ sommets et dont tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2 possède au moins un cycle.

3. Montrer qu'un *graphe acyclique non orienté* ayant $n_v \geq 1$ sommets possède au plus $(n_v - 1)$ arêtes.

4. Montrer qu'un *graphe connexe non orienté* ayant $n_v \geq 1$ sommets possède au moins $(n_v - 1)$ arêtes.

5. Un graphe non orienté est dit **complet** si deux sommets différents sont toujours les extrémités d'une arête.

- **a.** Dessiner le graphe complet à 5 sommets
- **b.** Dénombrer le nombre d'arêtes d'un graphe complet ayant n_v sommets.

6. Rappeler la définition générale d'un arbre, puis montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- — g est un arbre.
- — g est un graphe non orienté connexe comportant $n_v - 1$ arêtes.
- — g est un graphe non orienté acyclique comportant $n_v - 1$ arêtes.

Corrigé de l'exercice 1. [Retour à l'énoncé]

1. Dans la somme sur les sommets, chaque arête est comptée deux fois. En effet, g est non orienté donc chaque arête (u, v) est comptée deux fois : une fois dans le degré de u, une fois dans le degré de v.

2. Soit v_0 un sommet quelconque d'un graphe non orienté dont tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2. Construisons la suite de sommets $v_0, v_1, \ldots$ de la façon suivante :

- — $v_i \notin \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}\}$;
- — v_{i-1} et v_i sont voisins.

Le graphe étant de taille finie, chaque suite de ce type se termine car la suite (Card($\{u \in V,\ u$n'est pas un sommet de la
est une suite strictement décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui est bien fondé, donc elle est finie.
Considérons le dernier sommet v_k d'une telle suite. Son degré est supérieur ou égal à 2 et il ne possède pas de voisins en dehors de $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ par définition (sinon, on aurait pu continuer la construction de la suite). Il possède au moins deux voisins distincts dans cette même liste : le voisin v_{k-1} et un autre sommet $v_j \neq v_{k-1}$. La suite de sommets $(v_k, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ est alors un cycle de g.

3. Raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets n_v d'un graphe.
$\mathcal{P}(n_v)$: Tout graphe simple g acyclique ayant n_v sommets possède au plus $n_v - 1$ arêtes.

Initialisation. La propriété est vérifiée pour tout graphe simple réduit à un seul sommet car un graphe simple n'ayant qu'un sommet est par définition acyclique (un cycle est un chemin de longueur strictement supérieure à 0).

Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang $n_v \geqslant 2$ et considérons un graphe non-orienté acyclique g ayant $n_v + 1$. D'après la question précédente, il existe au moins un sommet de degré 0 ou 1, sinon, tous les sommets seraient de degré ≥ 2 et le graphe aurait un cycle. Supprimons ce sommet et l'éventuelle arête qui le relie au reste du graphe. Le sous-graphe acyclique obtenu possède au plus $n_v - 1$ arêtes par hypothèse de récurrence. Donc le graphe g en possède 0 ou 1 de plus, c'est-à-dire dans tous les cas n_v au plus, et donc la propriété est vraie au rang $n_v + 1$

Conclusion. Par principe de la récurrence, la propriété est donc vraie pour tout graphe g ayant $n_v \geq 1$ sommets

4. Voici une démonstration qui... ne marche pas !!!
Raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets n_v d'un graphe.
$\mathcal{P}(n_v)$: Tout graphe simple g connexe ayant n_v sommets possède au moins $n_v - 1$ arêtes.

Initialisation. La propriété est trivialement vérifiée pour un graphe réduit à un sommet (et qui est toujours connexe d'ailleurs)

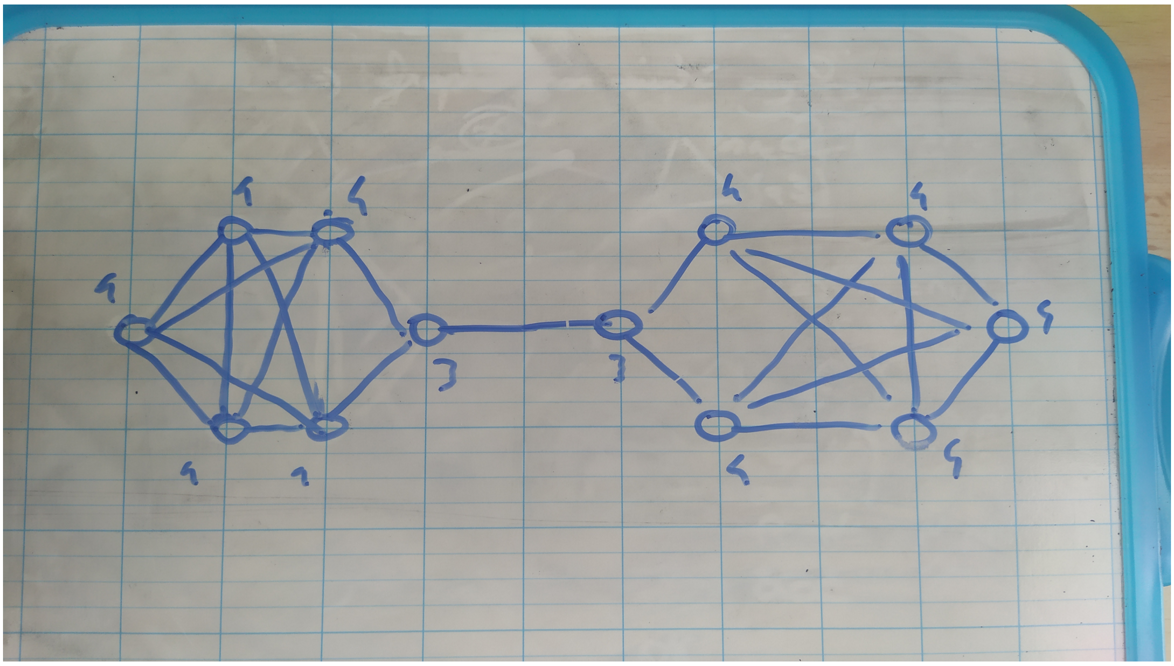
Hérédité. Si $n_v > 1$, supposons la propriété vérifiée pour tout graphe connexe simple à n_v sommets. Considérons un graphe connexe simple $g = (V, E)$ ayant $n_v + 1$ sommets.

- Si un sommet particulier v de g est de degré 1, le sous-graphe induit en supprimant v et toutes les arêtes connectées à v, $g' = (V', E')$ où $V' = V \setminus \{v\}$, est connexe et possède $n_v - 1$ sommets. Par hypothèse de récurrence, il contient au moins $n_v - 2$ arêtes. En comptant l'arête reliant v au graphe, g contient donc au moins n_v arêtes
- Si tous les sommets de g sont au moins de degré 2, il existe au moins un cycle dans g d'après la question 2. On retire alors le sommet de degré minimal que l'on note v_0 dans ce cycle et on considère le sous-graphe induit $g' = (V', E')$ où $V' = V \setminus \{v_0\}$ et E' est l'ensemble E privé de toutes les arêtes qui étaient reliées à v_0. **Comme v_0 fait partie d'un cycle, la connexité est préservée malgré le retrait de ce sommet et g' est connexe.** On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $n'_e \geq n'_v - 1$. Puis on rétablit les $k \geq 1$ arêtes et le sommet supprimés : $n'_e + k \geq n'_v - 1 + k \geq n_v - 2 + k \geq n_v - 1$

Dans tous les cas, la propriété $\mathcal{P}(n_v + 1)$ est vérifiée sous hypothèse de récurrence.

Conclusion. Par principe de la récurrence, la propriété est donc vraie pour tout graphe g ayant $n_v \geq 1$ sommets

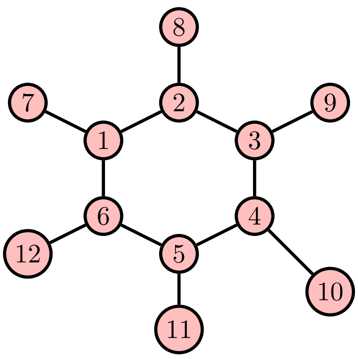
La phrase en rouge pose problème, car il existe des situations, comme la situation ci-dessous où le degré de chaque sommet est indiqué, où le choix du sommet de degré minimal dans le cycle casse la connexité du sous-graphe induit.



Le choix du sommet de degré minimal dans le cycle n'est donc pas le bon. **Mais même en levant ce critère de sélection, on peut montrer que le résultat suivant est faux :**

> Soit g un graphe connexe ayant un cycle $u_0 \to u_1 \to \ldots \to u_p$ de longueur $p \geq 2$. Alors il existe au moins un sommet parmi $\{u_0, u_1 \ldots u_p\}$ que l'on peut retirer en préservant la connexité du graphe.

Voici un contre-exemple où l'on ne peut retirer aucun des sommets du cycle $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$ sans altérer la connexité du sous-graphe induit



Cette tentative de démonstration est donc... vouée à l'échec !

Pour s'en sortir, on peut faire une démonstration par **récurrence forte** en acceptant l'altération de la connexité liée à la suppression d'un sommet et en raisonnant sur chaque composante connexe créée.
$\mathcal{P}(n_v)$: Tout graphe simple g connexe ayant n_v sommets possède au moins $n_v - 1$ arêtes.

Initialisation. La propriété est trivialement vérifiée pour un graphe réduit à un sommet (et qui est toujours connexe d'ailleurs)

Hérédité. Si $n_v > 1$, supposons la propriété vérifiée pour tout graphe connexe simple ayant $n'_v < n_v$ sommets. Considérons un graphe connexe simple $g = (V, E)$ ayant n_v sommets.

On retire une sommet v_0 du graphe et on considère le sous-graphe induit $g' = (V', E')$ avec $V' = V \setminus \{v_0\}$ et où E' est l'ensemble E privé des $p = \delta(v_0)$ arêtes qui étaient reliées à v_0.

En retirant ce sommet, le graphe n'est plus forcément connexe et est formé de k composantes connexes avec $1 \leq k \leq p$. On ne peut créer une nombre de composantes connexes strictement supérieur à p en retirant p arêtes d'un graphe connexe.

On note $g_c = (V_c, E_c)$ le graphe associé à chacune des composantes connexes créées, , avec $1 \leq c \leq k$. On note n_e^c et n_v^c le nombre d'arêtes et de sommets de la composante connexe g_c

On applique l'hypothèse de récurrence à chaque graphe g_c, ce qui est possible car $n_v^c \leq n_v - 1 < n_v$ et g_c est par définition connexe (c'est une composante connexe !) On a donc :

$$\forall c\, 1 \leq c \leq k\, n_e^c \geq n_v^c - 1$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{c=1}^{k} n_e^c \geq \sum_{c=1}^{k} (n_v^c - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{c=1}^{k} n_e^c \geq \sum_{c=1}^{k} n_v^c - k$$

Par ailleurs, le nombre total d'arête du graphe initial g est la somme de toutes les arêtes de toutes les composantes connexes, auquel on rajoute les p arêtes qui ont été supprimées en même temps que v_0 :

$$n_e = \left(\sum_{c=1}^{k} n_e^c\right) + p$$

Le nombre de sommet du graphe initial est égal à la somme de tous les sommets des composantes connexes, plus le sommet v_0 que l'on avait retiré :

$$n_v = \left(\sum_{c=1}^{k} n_v^c\right) + 1$$

En substituant $\sum_{c=1}^{k} n_e^c$ et $\sum_{c=1}^{k} n_e^c$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

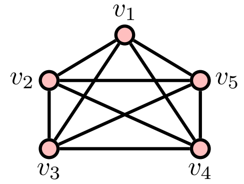
$$n_e - p \geq n_v - 1 - k \Leftrightarrow n_e \geq n_v - 1 + \underbrace{(p - k)}_{\geq 0} \geq n_v - 1$$

La propriété $\mathcal{P}(n_v)$ est vérifiée pour n'importe quel graphe g connexe à n_v sommet sous hypothèse de récurrence forte.

Conclusion. Par principe de la récurrence, la propriété est donc vraie pour tout graphe g ayant $n_v \geq 1$ sommets

5. Un graphe non orienté est dit **complet** si deux sommets différents sont toujours les extrémités d'une arête.

a. Le graphe complet d'ordre 5 est donné ci-dessous.



b. Le nombre d'arêtes d'un graphe à n_v sommets est $\binom{n_v}{2} = \dfrac{n_v(n_v-1)}{2}$.

6. Un arbre est un graphe non-orienté connexe acyclique. Les résultats établis aux questions précédentes établissent $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(i) \Rightarrow (iii)$. Montrons l'équivalence entre les deux dernières.

— $(ii) \Rightarrow (iii)$. Raisonnons par l'absurde. Soit un graphe connexe d'ordre n_v ayant $n_v - 1$ arêtes et supposons qu'il contient un cycle. En supprimant l'une des arêtes du cycle, le graphe non orienté g reste connexe et ne comporte plus que $n_v - 2$ arêtes. Ce qui est absurde d'après le résultat démontré précédemment, car un graphe connexe a au moins $n_v - 1$ arêtes. Un graphe connexe d'ordre n_v ayant $n_v - 1$ arêtes est donc acyclique.

— Raisonnons par l'absurde. Soit un graphe acyclique g d'ordre n_v ayant $n_v - 1$ arêtes et supposons qu'il ne soit pas connexe. Alors il existerait deux sommets non reliés par aucun chemin. En ajoutant une arête entre ces sommets, le graphe obtenu comporterait n_v arêtes et serait toujours acyclique, ce qui contredit le résultat démontré plus haut qui dit que tout graphe acyclique à n_v sommets a au plus $n_v - 1$ arêtes. Tout graphe acyclique à n_v sommets ayant $n_v - 1$ arêtes est donc connexe.

Il reste à montrer, par exemple $(ii) \Rightarrow (i)$. Si g est non orienté connexe à $n_v - 1$ arêtes, alors il est acyclique d'après le raisonnement ci-dessus, donc c'est un arbre.

Exercice 2 (Graphe biparti).
Démontrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.
Indication : on pourra remarquer qu'un graphe est biparti s'il existe une 2-coloration...

Corrigé de l'exercice 2.

[Retour à l'énoncé]

Il faut montrer le résultat dans les deux sens.
g est biparti $\Leftrightarrow$ g ne contient aucun cycle de longueur impaire
Soit $g = (V, E)$ un graphe. On appelle k-coloration d'un graphe g toute application φ de V dans $\{1, \ldots, k\}$ on étiquette les couleurs par des entiers. On dira qu'il s'agit d'une coloration φ est propre si deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.

($\Rightarrow$). Soit g un graphe biparti et φ une 2-coloration de g. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ est un chemin, on a pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_{i+1})$, d'où $\varphi(x_{2k}) = \varphi(x_0)$ et $\varphi(x_{2k+1}) = \varphi(x_1)$. Maintenant, si ce chemin est un cycle, on a $x_0 = x_n$, d'où $\varphi(x_0) = \varphi(x_n)$, ce qui implique que la taille du chemin n est pair. g ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.

($\Leftarrow$). Soit maintenant $g = (V, E)$ un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. Si on arrive à construire une 2-coloration de g, c'est gagné. Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où g est connexe : il suffira ensuite de créer une fonction de coloration globale en la définissant sur la réunion des composantes connexes disjointes.
Soit x_0 un sommet quelconque de V. Pour $x \in V$, on note $\ell(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x. On pose alors $\varphi(x) = 1$ si $\ell(x)$ est pair, $\varphi(x) = 2$ sinon. Nous allons montrer que ϕ est une 2-coloration valide.
Soit $\{x, y\} \in E$ une arête : il est facile de voir que $|\ell(x) - \ell(y)| \leq 1$ car x et y ne sont séparés que par une arête, donc à distance au plus 1. On a donc deux cas : soit ils sont à distance 0, soit à distance 1.

— S'ils étaient à distance 0, c'est-à-dire si on avait $\ell(x) = \ell(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2\ell(x) + 1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x, y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire.

— On a donc forcément $|\ell(x) - \ell(y)| = 1$, donc $\ell(x)$ et $\ell(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

φ est donc bien une 2-coloration valide, car deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur par l'application φ. On a donc montré qu'un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire est biparti.

Exercice 3 (Degrés d'un graphe).

1. Montrer qu'un graphe simple non orienté a un nombre pair de sommets de degré (degré total) impair.
2. Montrer que, dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis présents.
3. Est-il possible de relier quinze ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié exactement avec trois autres ?
4. Une suite décroissante d'entiers est graphique s'il existe un graphe simple non orienté dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

$$(3,3,2,1,1) \quad (3,3,1,1,1) \quad (3,3,2,2) \quad (4,2,1,1,1,1) \quad (3,2,2,2,1)$$

Corrigé de l'exercice 3. [Retour à l'énoncé]

1. Notons P l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair d'un graphe simple $g = (V, E)$. P et I forment une partition de V. Donc :

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in P} \delta(v) + \sum_{v \in I} \delta(v)$$

D'après la toute première question de ce TD :

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Or $2|E|$ et $\sum_{v \in P} \delta(v)$ sont des entiers pairs. Donc $\sum_{v \in I} \delta(v)$ est également pair. Par ailleurs, chaque terme de cette dernière somme est impair. La somme ne peut donc être paire que si le nombre de ses termes est pair. Donc $|I|$ est pair.

2. On représente cette situation par un graphe. Les sommets représentent les personnes, numérotées de 0 à $n-1$ et on représente le fait que deux personnes sont amies par une arête. On considère alors la fonction qui à une personne associe son nombre d'amis (degré du sommet correspondant dans la représentation sous forme de graphe) :

$$\begin{array}{llll} \delta : & [\![0, n-1]\!] & \to & [\![0, n-1]\!] \\ & p & \to & \delta(p) \end{array}$$

   — Si une personne a 0 ami, alors elle n'est connectée à aucune autre et le degré maximal d'un sommet n'est donc pas $n-1$ mais $n-2$. On a alors une application de $[\![0, n-1]\!]$ dans $[\![0, n-2]\!]$ qui ne peut donc être injective : il y a forcément deux personnes p qui ont la même image (= le même degré = le même nombre d'amis)

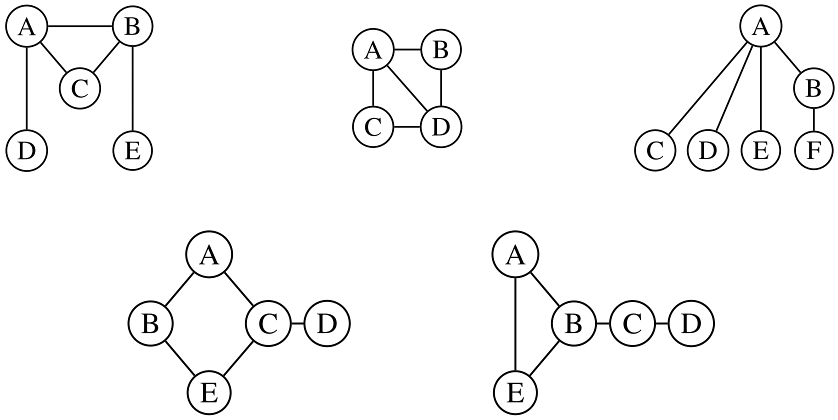
   — Si plus de deux personnes ont 0 ami, là encore, le résultat est vrai : il y a bien deux personnes qui ont le même nombre (0 !) d'amis

   — Sinon, cela signifie que toute personne a au moins 1 ami : le degré est donc toujours ≥ 1 et on a alors une application de $[\![0, n-1]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$ qui ne peut donc être injective : il y a forcément deux personnes p qui ont la même image (= le même degré = le même nombre d'amis)

   Dans tous les cas, on a montré qu'il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis.

3. Considérons le graphe simple dont les sommets représentent les 15 ordinateurs ; les arêtes représentent les liaisons entre ces ordinateurs. Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair. D'après le résultat établi à la première question, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

4. Toutes sont graphiques sauf la deuxième qui ne respecte par la condition nécessaire sur le nombre pair de degrés impairs. Les graphes suivants le montrent. Les graphes distincts suivants correspondent à la suite $(3, 2, 2, 2, 1)$.



Exercice 4 (Nombre cyclomatique).
Le *nombre cyclomatique* [a] d'un graphe non-orienté g à n_v sommets, n_e arêtes et n_c composantes connexes est :

$$\nu(G) = n_e - n_v + n_c$$

Démontrer que pour tout graphe g, $\nu(g) \geqslant 0$ et que $\nu(g) = 0$ si et seulement si g est acyclique.

a. http://www-igm.univ-mlv.fr/~dr/XPOSE2008/Mesure%20de%20la%20qualite%20du%20code%20source%20-%20Algorithmes%20et%20outils/complexite-cyclomatique.html

Corrigé de l'exercice 4. *[Retour à l'énoncé]*

On peut voir de la formule de la manière suivante, en sommant sur les composantes connexes c du graphe :

$$\nu(g) = \sum_{c=1}^{n_c} \left(\underbrace{n_e^c - (n_v^c - 1)}_{\geq 0} \right)$$

Il s'agit d'une somme de terme positifs car ,d'après un résultat démontré précédemment, pour chaque composante connexe c, on a au moins $n_v^c - 1$ arêtes, où n_v^c est le nombre de sommets de la composante connexe. Cette somme de termes positifs vaut 0, si chaque terme vaut 0. On a donc $\nu(g) \geq 0$ si, pour chaque composante, on a $n_e^c = n_v^c - 1$ ce qui, d'après le premier exercice, signifie que chaque composante connexe est acyclique, donc que le graphe dans son ensemble est acyclique.

Voici une autre démonstration possible. Soit $V = \{v_0, \dots, v_{n_v-1}\}$ et $E = \{e_0, \dots, e_{n_e-1}\}$. Construisons la suite de graphes $g_i = (V, E_i)$ avec $g_0 =$ et $g_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$ pour $i = 0, \dots, n_e - 1$. Le théorème est vrai pour g_0 car $n_e = 0$, $n_v = n_c$ et $\nu(g_0) = 0 - n_c + n_c = n_c$.
Supposons le théorème vrai pour g_i et étudions g_{i+1}. Deux cas peuvent se présenter :

— L'arête $e_{i+1} = (a, b)$ a ses extrémités dans deux composantes connexes distinctes de g_i, alors g_{i+1} aura une arête de plus $n_{e,i+1} = n_{e,i} + 1$, le même nombre de sommets n_v et une composante connexe de moins arêtes $n_{c,i+1} = n_{c,i} - 1$ composantes connexes donc : $\nu(g_{i+1}) = n_{e,i+1} - n_v + n_{c,i+1} = (n_{e,i} + 1) - n_v + (n_{c,i} - 1) = n_{e,i} - n_v + n_{c,i} = \nu(G_i) \geq 0$.

— L'arête $e_{i+1} = (a, b)$ a ses extrémités dans la même composante connexe de g_i , alors g_{i+1} aura $n_{e,i+1} = n_{e,i} + 1$ arêtes, n_v sommets et $n_{c,i+1} = n_{c,i}$ composantes connexes donc : $\nu(g_{i+1}) = n_{e,i+1} - n_v + n_{c,i+1} = (n_{e,i} + 1) - n_v + n_{c,i} = \nu(g_i) + 1 > \nu(g_i) \geq 0$.

Ainsi, dans les deux cas, on a $\nu(g_{i+1}) \geq \nu(g_i)$. On constate dans cette construction (cas 2), que le cas où $\nu(g_i)$ croit strictement et devient strictement supérieur à 0 correspond au cas où l'on ajoute une arête dans une composante déjà connexe, c'est à dire qu'on crée un cycle.

Exercice 5 (Graphe biparti).
Trois conférenciers C_1, C_2, C_3 doivent intervenir le même jour pour assurer un certain nombre d'heures de formation à trois groupes G_1, G_2, G_3.

— C_1 doit assurer 2 heures de formation à G_1, 1 heure à G_2.

— C_2 doit assurer 1 heure de formation à G_1, 1 heure à G_2, 1 heure à G_3.

— C_3 doit assurer 1 heure de formation à G_1, 1 heure à G_2, 2 heures à G_3.

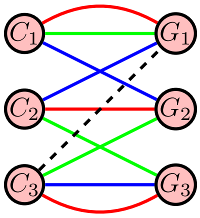
1. Représenter cette situation par un graphe.

2. Combien faut-il de plages horaires au minimum ?

3. Proposer un planning d'intervention des conférenciers.

Corrigé de l'exercice 5. *[Retour à l'énoncé]*

1. À chaque heure de formation peut être associée un lien entre un conférencier et un groupe. Une coloration est des arêtes est attribuée à chaque heure. On peut ainsi construire le graphe suivant.



2. C_3 devant assurer 4 heures de formation, au minimum 4 plages horaires sont nécessaires pour construire le planning.

3. Chaque arête d'une même couleur définit une plage horaire d'association conférencier-groupe. Une première lecture des lecture du graphe fournit les associations du tableau de gauche ci-dessous.

C_1	C_2	C_3	
G_1	G_2	G_3	*rouge*
G_1	G_3	G_2	*vert*
G_2	G_1	G_3	*bleu*
		G_1	*noir*

C_1	C_2	C_3	
G_2	G_1	G_3	*bleu*
G_1	G_2	G_3	*rouge*
G_1	G_3	G_2	*vert*
		G_1	*noir*

C_1	C_2	C_3	
G_1	G_3	G_2	*vert*
G_1	G_2	G_3	*rouge*
G_2	G_1	G_3	*bleu*
		G_1	*noir*

Afin d'assurer la continuité des interventions de 2 heures, les lignes doivent être ordonnées pour placer l'une en dessous de l'autre les heures consécutives. Ce qui mène aux deux plannings des tableaux de droite ci-dessus.