À chercher pour lundi 27/02/2023, corrigé

TD 19 :

Exercice 4.
4) On a ici deux pôles simples (i et $-i$) et un pôle double (1). On en déduit qu'il existe des complexes a, b, c, d tels que :

$$F_4 = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}.$$

Puisque F_4 est à coefficients réels, on a directement que $b = \overline{a}$. Pour obtenir a et b, il suffit donc de multiplier par $(X-i)$ et d'évaluer en i, puis d'utiliser le fait que b et a sont conjugués. Pour obtenir d, on multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1. Enfin, pour obtenir c, on peut multiplier par X et faire ensuite tendre X vers l'infini. On obtient alors que $0 = a + b + c$. On déduit de toutes ces remarques que :

$$F_4 = \frac{-3/4}{X-i} + \frac{-3/4}{X+i} + \frac{3/2}{X-1} + \frac{-1/2}{(X-1)^2}.$$

Exercice 6.
5) On a $\deg(F_5) = -1 < 0$ donc la partie entière est nulle. La fraction est sous forme irréductible (les racines du dénominateur sont i, $-i$, j et j^2 qui ne sont pas racines du numérateur). Par théorème de décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F_5(X) = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$

Pour obtenir a et b, on multiplie par X^2+1 et on évalue en $X = i$ ce qui donne :

$$ai + b = \frac{i^3+1}{i^2+i+1} = \frac{1-i}{i} = -1-i.$$

Par identification des parties réelles/imaginaires, on a $a = -1$ et $b = -1$.

Pour obtenir c et d, on multiplie par X^2+X+1 et on évalue en $X = j$. On obtient (en utilisant $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$) :

$$cj + d = \frac{j^3+1}{j^2+1} = \frac{2}{-j} = -2j^2 = 2 + 2j.$$

On a donc $c = 2$ et $d = 2$ (en utilisant le fait que $j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

TD 20 :

Exercice 4. On utilise la formule pour calculer le produit matriciel. On a déjà $JMJ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque les trois matrices sont carrées de taille n. Ensuite pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
(JMJ)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (J)_{i,k}(MJ)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (MJ)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (M)_{k,p}(J)_{p,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} m_{k,p}.
\end{aligned}$$

On en déduit qu'en posant $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} m_{k,p}$ (c'est à dire la somme de tous les coefficients de M), on a :

$$JMJ = \lambda J.$$

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec D. On a alors $AD = DA$. Ceci signifie que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} (AD)_{i,j} = (DA)_{i,j} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} d_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} a_{k,j} \\ &\Leftrightarrow \quad a_{i,j} d_j = d_i a_{i,j}. \end{aligned}$$

En effet, dans les sommes, seuls les termes où $k = j$ (dans la première somme) et $k = i$ (dans la seconde) sont non nuls puisque $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{i,i} = d_i$ (la matrice est diagonale). On en déduit que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j}(d_i - d_j) = 0$. Si $i = j$, ceci ne donne aucune information $(0 = 0)$ et si $i \neq j$, puisque $d_i \neq d_j$, alors on a $a_{i,j} = 0$. Autrement dit, la matrice A doit être diagonale.

Réciproquement, si A est diagonale, on a $AD = DA$ (le calcul précédent prouve que la matrice AD et la matrice DA sont diagonales avec comme coefficients sur la diagonale les $a_{i,i} d_i$ (produit des coefficients diagonaux).

TD 20-2 :

Exercice 5. Notons (S) : $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$. On a alors :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -3y - 3z = 2 & L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x + y + z = 0 & \\ -3y - 3z = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 sont incompatibles. Le système n'a donc pas de solution.

Exercice 6. Notons (S) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 4y + 9z = 3 \end{cases}$. On a :

$$\begin{aligned} (S) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 1 & \\ y + 2z = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y + 8z = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 1 & \\ y + 2z = 1 & \\ 2z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$