9. Ensembles et applications, corrigé

Exercice 1. On peut procéder par triple implication (montrer que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$).

- Supposons ($E \subset F$). On a alors $E \cup F = F$, l'égalité est ici directe.
- Supposons $E \cup F = F$. Montrons que $E \cap F = E$. Il est tout d'abord clair que $E \cap F \subset E$. Réciproquement, considérons $x \in E$. Alors, on a $x \in E \cup F$ d'où $x \in F$ en utilisant l'hypothèse. On a donc finalement $x \in E \cap F$ ce qui prouve l'inclusion réciproque.
- Enfin, supposons que $E \cap F = E$. Montrons que $E \subset F$. Soit $x \in E$. On a alors par hypothèse $x \in E \cap F$ et donc $x \in F$. L'inclusion est donc montrée.

On a montré par triple implication que les trois propriétés sont équivalentes.

Exercice 2. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. On va montrer l'équivalence voulue par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $A \cap B = A \cap C$. Montrons que $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$.

Soit $x \in A \cap \overline{B}$. On a alors $x \in A$. Montrons que $x \in \overline{C}$. Par l'absurde, si $x \notin \overline{C}$, alors, on a $x \in C$ (car le complémentaire du complémentaire d'un ensemble est l'ensemble de départ). On a alors $x \in A \cap C$, c'est à dire $x \in A \cap B$ par hypothèse. On a donc $x \in B$: absurde car $x \in \overline{B}$.

L'élément x étant pris quelconque dans $A \cap \overline{B}$, on en déduit que :

$$A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}.$$

De la même manière, B et C jouant des rôles symétriques, on montre que $A \cap \overline{C} \subset A \cap \overline{B}$.

On a donc montré que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$. Montrons que $A \cap B \subset A \cap C$.

Soit $x \in A \cap B$. On a alors $x \in A$. Montrons que $x \in C$. Par l'absurde, si $x \notin C$, alors, on a $x \in \overline{C}$. On a alors $x \in A \cap \overline{C}$, c'est à dire $x \in A \cap \overline{B}$ par hypothèse. On a donc $x \notin B$: absurde car $x \in B$.

L'élément x étant pris quelconque dans $A \cap B$, on en déduit que :

$$A \cap B \subset A \cap C.$$

De la même manière, B et C jouant des rôles symétriques, on montre que $A \cap C \subset A \cap B$.

On a donc montré que $A \cap B = A \cap C$.

On a bien montré l'équivalence voulue.

Exercice 3.

1) On a :

$$
\begin{aligned}
\overline{A} \setminus \overline{B} &= \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} \\
&= \overline{A} \cap B \\
&= B \cap \overline{A} \\
&= B \setminus A.
\end{aligned}
$$

2) On procède par double implication.

Supposons que $A \setminus B = A$ et montrons que $B \setminus A = B$ par double inclusion. On a tout d'abord $B \setminus A \subset B$ (car si x est dans B privé de A, il est aussi dans B). Réciproquement, fixons $x \in B$. On a alors $x \notin A \setminus B$, ce qui entraine que $x \notin A$. On a donc bien $x \in B \setminus A$, ce qui termine l'inclusion.

Réciproquement, supposons que $B \setminus A = B$ et montrons que $A \setminus B = A$. On a tout d'abord $A \setminus B \subset A$ (toujours vrai). Réciproquement, si on prend $x \in A$, alors on a $x \notin B \setminus A$ et donc $x \notin B$. Ceci entraine que $x \in A \setminus B$ ce qui termine l'inclusion.

Exercice 4. Soient A, B, C trois parties de E.

1) Raisonnons par double inclusion.

- Soit $x \in A \Delta B$. On a alors $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. Dans le premier cas, on a $x \in A$ et dans le second on a $x \in B$. On en déduit que dans tous les cas $x \in A \cup B$. De plus, dans le premier cas, on a $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$. Dans le second cas, on a $x \notin A$ donc $x \notin A \cap B$. Dans tous les cas, on voit que $x \notin A \cap B$. On en déduit que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- Réciproquement soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On a donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Puisque $x \in A \cup B$, on a donc $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, puisque $x \notin A \cap B$, alors, on a $x \notin B$, ce qui entraine $x \in A \setminus B$. De même, si $x \in B$, puisque $x \notin A \cap B$, alors on a $x \notin A$ donc $x \in B \setminus A$. En réunissant ces deux cas, on obtient $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.

Par double inclusion, on a donc montré que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2) Si $B = C$, on a directement $A \Delta B = A \Delta C$. Supposons réciproquement que $A \Delta B = A \Delta C$. On va montrer que $B = C$ par double inclusion.

Soit $x \in B$. On a alors deux possibilités : soit $x \in A$, soit $x \notin A$.
— Si $x \in A$, alors on a $x \in A \cap B$ et donc $x \notin A \Delta B$ d'après la question précédente. Ceci entraine que $x \notin A \Delta C$. Or, puisque $x \in A \cup C$ (car $x \in A$), on en déduit que $x \in A \cap C$ (sinon on aurait $x \in A \Delta C$), ce qui entraine que $x \in C$.

— Si $x \notin A$, alors on a $x \in B \setminus A$, ce qui entraine que $x \in A \Delta B$. On a donc $x \in A \Delta C$. Ceci entraine, puisque $A \Delta C = (A \cup C) \setminus (A \cap C)$ que l'on a en particulier $x \in A \cup C$. Puisque $x \notin A$, on a donc $x \in C$.

Dans tous les cas, on a montré que $x \in C$. On a donc bien montré l'inclusion $B \subset C$.

L'inclusion réciproque se montre de la même façon, les rôles de B et C étant symétriques.

3) Supposons $A \Delta B = A \cap B$. Supposons par l'absurde que $A \neq \emptyset$. Il existe alors $x \in A$. On a alors deux cas possibles :
— Soit $x \in B$, et alors on a $x \in A \cap B$ donc $x \in A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ d'où $x \notin A \cap B$: ABSURDE !
— Soit $x \notin B$ et alors $x \in A \setminus B$ donc $x \in A \Delta B = A \cap B$ (par hypothèse). On a alors $x \in B$: ABSURDE !

Toutes les possibilités sont absurdes ! On en déduit que $A = \emptyset$. On a alors $A\Delta B = (\emptyset \cup B) \setminus (\emptyset \cap B) = B \setminus \emptyset = B$ et $A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$, ce qui entraine que $B = \emptyset$.

Exercice 5. (m) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$, $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ et $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array} \right.$.

1) Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$), cos est strictement décroissante et continue donc d'après le théorème de la bijection continue, on a $f\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[) =]0, 1]$. Sur $[-\pi, \pi[$, f atteint $]0, 1]$ uniquement pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. On en déduit par 2π périodicité que :

$$f^{-1}(]0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[.$$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. On a donc g strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Puisque g est continue et que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $g(1) = 2$, on en déduit que $g(]0, 1]) = [2, +\infty[$.

D'après l'étude de g, elle admet un minimum en 1 qui vaut $g(1) = 2$. Pour déterminer $g^{-1}([1, 3])$, il faut donc résoudre $g(x) = 3$ (qui a deux solutions d'après l'étude des variations de g). On a $g(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$. On trouve donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{8}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{8}}{2}.$$

D'après l'étude des variations de g, on en déduit que $g^{-1}([1, 3]) = [x_1, x_2]$.

3) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3x^2 - 1$ montre que h est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$. Puisque pour $x \neq 0$, on a $h(x) = x(x^2 - 1)$ qui tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Puisque h est continue et tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit qu'elle est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On a donc $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

En utilisant le théorème de la bijection continue, on a que :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) = \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0\right] \text{ et } f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[\right) = \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, +\infty\right[.$$

Puisque l'image directe d'une union est l'union des images directes, on en déduit que $f(\mathbb{R}_+) = \left[-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

On a $f^{-1}([-6, 6]) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in [-6, 6]\}$. Or, on remarque que $f(-2) = -6$ et $f(2) = 2$. On en déduit alors, d'après le tableau de variation de f et le fait que $f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) \leq 6$ et $f(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) \geq -6$ que $f^{-1}([-6, 6]) = [-2, 2]$.

Exercice 6.

1) f n'est pas injective. On a par exemple $f(1) = f(-1)$.

2) Montrons que f est surjective. On va écrire f comme la composée des fonctions :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{array} \right. \text{ et } h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

On va montrer que g et h sont surjectives, ce qui montrera que $f = h \circ g$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

- Montrons que g est surjective. Soit $y \in \mathbb{C}^*$. Il existe alors $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $y = \rho e^{i\theta}$. Posons alors $z = \ln(\rho) + i\theta$. On a bien $z \in \mathbb{C}$ et :

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{\ln(\rho)+i\theta} \\ &= \rho e^{i\theta} \\ &= y. \end{aligned}$$

  On a construit un antécédent à y par g dans $\mathbb{C}$. y étant pris quelconque dans $\mathbb{C}^*$, g est donc surjective.

- Montrons que h est surjective. Soit $y \in \mathbb{C}$. Cherchons $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $h(z) = y$. Ceci revient à résoudre l'équation $z + \dfrac{1}{z} = y$, c'est à dire $z^2 - yz + 1 = 0$. Or, il s'agit d'une équation de degré 2 à coefficients complexes. Elle admet donc toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$. De plus, cette solution est en fait dans $\mathbb{C}^*$, sinon on aurait en remplaçant dans l'équation 1=0. On peut donc toujours trouver un élément $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $h(z) = y$. La fonction h est donc surjective.

3) On a $i\mathbb{R} = \{i\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$. On a alors :

$$f(i\mathbb{R}) = \{f(i\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(i\theta) &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ &= 2\cos(\theta). \end{aligned}$$

Puisque cos est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$, on en déduit que $\{2\cos(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} = [-2,2]$. On a donc :

$$f(i\mathbb{R}) = [-2,2].$$

4) On a $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \ /\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{R}) &= \{z \in \mathbb{C} \ /\ \mathrm{Im}(f(z)) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \ /\ \mathrm{Im}(e^z + e^{-z}) = 0\} \\ &= \{x + iy \in \mathbb{C} \ /\ \mathrm{Im}(e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}) = 0\} \\ &= \{x + iy \in \mathbb{C} \ /\ \sin(y)(e^x - e^{-x}) = 0\}. \end{aligned}$$

On a $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0\ [\pi]$ et $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. On en déduit que $f^{-1}(\mathbb{R})$ est la réunion des droites d'équation $y = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et de la droite d'équation $x = 0$.

Exercice 7.

1) Déjà fait (f est bien définie à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ car l'exponentielle ne s'annule pas et elle est non injective (car par exemple $e^0 = e^{2i\pi} = 1$ et surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ (on avait résolu l'équation $e^z = z_0$ dans le cours sur les complexes. En étudiant $z = x + iy$ sous forme algébrique et $z_0 = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ sous forme exponentielle, on a en identifiant module et argument :

$$e^z = z_0 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow x = \ln(\rho) \text{ et } y \equiv \theta\ [2\pi].$$

La fonction exponentielle est donc bien surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

2) On a $f(R_1) = \{e^{x+iy},\ x \in \mathbb{R}_-, y \in [0, 2\pi[\} = \{e^x \times e^{iy},\ x \in \mathbb{R}_-, y \in [0, 2\pi[\}$. Puisque l'exponentielle (réelle) est bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $]0,1]$ (par le théorème de la bijection continue) et que tous les arguments sont atteints par y, on en déduit que $f(R_1) = \{z \in \mathbb{C} \ /\ |z| \leq 1 \text{ et } z \neq 0\}$. Autrement dit $f(R_1)$ est le disque unité privé de O.

De la même manière, puisque l'exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on atteint tous les arguments entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a $f(R_2)$ qui vaut le quart de plan supérieur privé de l'origine (donc les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ et $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ avec $z \neq 0$.

3) Avec une représentation implicite de $\mathbb{U}$, on a $f^{-1}(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |e^z| = 1\}$. Or, si on écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|e^z| = e^x$. On a donc $f^{-1}(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) = 0\} = i\mathbb{R}$ (les imaginaires purs).
De la même façon, on a $f^{-1}(i\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(f(z)) = 0\}$. On a donc :

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R} \ / \ e^x \cos(y) = 0\}.$$

Puisque l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'il faut chercher quand $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On en déduit que $f^{-1}(i\mathbb{R}) = \{x + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \ x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient donc une union de droites horizontales parallèles.

Exercice 8. Soient E, F, G trois ensembles.

1) Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Soit $x \in E$. On a alors :

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)).$$

Puisque g est injective, on a $f_1(x) = f_2(x)$, ce qui prouve que $f_1 = f_2$.

2) Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ et f surjective. Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors :

$$g_1(f(x)) = g_2(f(x))$$

ce qui entraine $g_1(y) = g_2(y)$. On en déduit que $g_1 = g_2$.

Exercice 9. Soient A, B, C trois ensembles et $f : A \to C$ et $g : B \to C$ deux bijections.

1) Soient $(c_1, c_2) \in C^2$. Puisque f est surjective, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = c_1$. Puisque g est surjective, il existe $b \in B$ tel que $g(b) = c_2$. On a donc $h(a, b) = (c_1, c_2)$ ce qui prouve la surjectivité de h.

Soient à présent $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in C^2$ tels que $h(a_1, b_1) = h(a_2, b_2)$, soit $f(a_1) = f(a_2)$ et $g(b_1) = g(b_2)$. Puisque f et g sont injectives, on en déduit que $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$, soit $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. La fonction h est donc injective.

On en déduit que h est bijective.

On aurait aussi pu vérifier que la fonction $\left\{ \begin{array}{lcl} C^2 & \to & A \times B \\ (c_1, c_2 & \mapsto & (f^{-1}(c_1), g^{-1}(c_2)) \end{array} \right.$ *est la fonction réciproque de h.*

2) Soit $c \in C$. Puisque f est bijective, elle est en particulier surjective et donc il existe $a \in A$ tel que $c = f(a)$. Puisque $a \in A$, on a $k(a) = f(a) = c$, ce qui prouve la surjectivité de k.

a) Pour que chaque élément de C soit atteint exactement deux fois par k, il faut et il suffit que $A \cap B = \emptyset$. En effet, puisque f et g sont bijectives, si $A \cap B = \emptyset$, alors tout élément de C aura un antécédent dans A par f (et donc par k) et un dans B par g (et donc par k car cet antécédent ne sera pas dans A). Réciproquement, on voit que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors si on prend $x \in A \cap B$ et que l'on pose $y = g(x) \in C$, alors y aura un antécédent par f dans A (et donc un antécédent par k). Si cet antécdent est x, alors aucun autre élément ne peut aller sur y et sinon, la seule autre possibilité comme antécédent pour y est x mais on aura $k(x) = f(x) \neq g(x)$ et donc $k(x) \neq y$.

b) On va montrer que k est injective si et seulement si $B \subset A$. Si $B \subset A$, alors on a $A \cup B = A$ et donc $k = f$ qui est injective. Réciproquement, si $B \not\subset A$, alors il existe $b \in B \setminus A$. On a alors $k(b) = g(b) \in C$ et $g(b)$ admet également un antécédent par f dans A (et donc par k aussi) qui est différent de b car $b \notin A$. On a donc un élément qui a deux antécdent donc k n'est pas injective.

k soit injective.

Exercice 10. Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1) On procède par double inclusion.

- Soit $y \in f^(f^{-1}(B))$. Il existe donc $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Ceci entraine déjà que $y \in f(X)$ (puisque $f^{-1}(B) \subset X$, f étant définie sur X). De plus, $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$. Puisque $y = f(x)$, on a donc $y \in B$. On a donc bien $y \in B \cap f(X)$.

- Réciproquement, soit $y \in B \cap f(X)$. Puisque $y \in f(X)$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Or, on a $y \in B$ donc $f(x) \in B$. Ceci entraine que $x \in f^{-1}(B)$. On a donc bien $y \in f(f^{-1}(B))$.

2) Par double implication. Si f est surjective, on montre l'égalité demandée par double inclusion.

Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$. On a donc $y \in B$.

Soit $y \in B$. f est surjective donc il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Or, on a $y \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$. On a bien montré que $y \in f(f^{-1}(B))$.

Réciproquement, supposons à présent que $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$. En appliquant cette propriétée en $B = Y$, puisque $f^{-1}(Y) = X$ (car f est à valeurs dans Y), on obtient $f(X) = Y$ ce qui entraine que f est surjective.

3) La encore par double implication. Si f est injective alors par double inclusion :

Soit $x \in A$. Alors $f(x) inf(A)$. On en déduit alors que $x \in f^{-1}(f(A))$.

Réciproquement, supposons $x \in f^{-1}(f(A))$. On a alors $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Or, f est injective donc $x = a$ ce qui prouve que $x \in A$.

Supposons à présent que $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Montrons que f est injective. Pour cela, considérons $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Notons $A = x$. On a alors $f(A) = f(x)$. Or, si on note $y = f(x)$, on a $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\})$ qui est l'ensemble des antécédents de Y dans X. Or, cet ensemble contient au moins x et x'. Or, par hypothèse, on a aussi que $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Ceci entraine que $x' = x$ (car x' est dans cet ensemble). On a bien montré que f était injective.

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E.

1) Pour le sens ($\Leftarrow$), c'est du cours. Réciproquement, supposons que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons alors $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. On a alors par hypothèse :

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}).$$

Or, l'ensemble de droite n'est pas l'ensemble vide (car on a $f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(\{x_2\})$). On en déduit que $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$ (car on a vu en cours que l'image direct de l'ensemble vide est toujours l'ensemble vide). On en déduit que $x_1 = x_2$ (sinon on aurait $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$). f est donc injective.

2)

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall A \subset E,\ f(\overline{A}) = \overline{(f(A))}$. On a alors, en appliquant cette relation en $A = \emptyset$ que $f(X) = Y$ (puisque $f(\emptyset) = \emptyset$). On en déduit que f est surjective.

Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $A = \{x\}$. On a donc $f(A) = \{f(x)\}$. On a alors $f(\overline{A}) = \overline{\{f(x)\}}$. Puisque $f(x') = f(x)$, on a $f(x') \notin f(\overline{A})$. On en déduit que $x' \notin \overline{A}$, ce qui implique que $x' \in A$. Or, A ne contient qu'un seul élément : x. On a donc $x = x'$. On en déduit que f est injective.

La fonction f est donc bijective.

($\Rightarrow$) Soit $A \subset E$. Montrons que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(\overline{A})$. Il existe donc $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Supposons par l'absurde que $y \notin \overline{f(A)}$. On a alors $y \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Par injectivité de f, on a alors $x = a$ ce qui est absurde car alors x est à la fois dans A et $\overline{A}$.

($\supset$) Soit $y \in \overline{f(A)}$. On a donc $y \notin f(A)$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $y \notin f(A)$, on a cependant $x \notin A$. Ceci entraine que $x \in \overline{A}$ et donc $y \in f(\overline{A})$.

Exercice 12. Soient deux parties A et B d'un ensemble E. Soit f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1) Montrons que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. On remarque alors que :

$$\begin{array}{rcl} f(E) & = & (E \cap A, E \cap B) \\ & = & (A, B) \end{array}$$

et que :

$$\begin{array}{rcl} f(A \cup B) & = & ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) \\ & = & ((A \cap A) \cup (A \cap B), (A \cap B) \cup (B \cap B)) \\ & = & (A \cup (A \cap B), (A \cap B) \cup B) \\ & = & (A, B). \end{array}$$

Puisque f est injective et que $f(E) = f(A \cup B)$, on en déduit que $E = A \cup B$.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $A \cup B = E$. Montrons que f est injective. Soient C et D deux parties de E telles que $f(C) = f(D)$. On a donc :

$$\begin{cases} A \cap C = A \cap D \\ B \cap C = B \cap D \end{cases}$$

On a alors $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap D) \cup (B \cap D)$, ce qui entraîne $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap D$, c'est à dire $C = D$ puisque $A \cup B = E$. f est donc injective.

On a bien montré l'équivalence voulue.

2) Montrons que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

($\Rightarrow$) Supposons f surjective. Il existe $C \in \mathcal{P}(E)$ telle que $f(C) = (A, \emptyset)$, puisque $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On en déduit que C vérifie $C \cap A = A$ et $C \cap B = \emptyset$. On a donc $(C \cap A) \cap B = A \cap B$ et également que $(C \cap B) \cap A = \emptyset$. Puisque l'ordre des parenthèses n'est pas important, on en déduit que $A \cap B = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $A \cap B = \emptyset$ et montrons que f est surjective. Soit $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a alors $C \cup D \in \mathcal{P}(E)$ et :

$$\begin{array}{rcl} f(C \cup D) & = & ((C \cup D) \cap A, (C \cup D) \cap B) \\ & = & ((C \cap A) \cup (D \cap A), (C \cap B) \cup (D \cap B)). \end{array}$$

Puisque $C \in \mathcal{P}(A)$, on a par définition $C \subset A$. On a donc $C \cap A = C$ et, puisque $A \cap B = \emptyset$, on a également $C \cap B = \emptyset$.

De la même manière, on a $D \cap B = D$ et $D \cap A = \emptyset$. On en déduit que :

$$f(C \cup D) = (C, D).$$

On a donc construit un antécédent de (C, D) par f. On en déduit que f est surjective.

On a donc bien montré l'équivalence voulue.

3) On suppose f bijective. On a donc $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ d'après les questions précédentes. Posons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (C, D) & \mapsto & C \cup D \end{array} \right.$. Vérifions que $g = f^{-1}$.

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(C) & = & g(A \cap C, B \cap C) \\ & = & (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ & = & (A \cup B) \cap C \\ & = & E \cap C \\ & = & C. \end{array}$$

On a donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Soit $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)((C, D)) & = & f(C \cup D) \\ & = & ((C \cup D) \cap A, (C \cup D) \cap B) \\ & = & ((C \cap A) \cup (D \cap A), (C \cap B) \cup (D \cap B)) \\ & = & (C \cup \emptyset, \emptyset \cup D) \quad \text{car } (C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & = & (C, D). \end{array}$$

On a donc $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$.

On a donc montré que $g = f^{-1}$.

Exercice 13. (m)

1) La réflexivité est vraie car si on prend $n = 1$, on a bien $x = x$.

Pour la transitivité, soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe alors $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $z = y^m$. On a donc $z = (x^n)^m = x^{nm}$. On a $nm \in \mathbb{N}^*$ par produit d'entiers donc on a bien $x\mathcal{R}z$.

Enfin, pour l'antisymétrie, soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Il existe donc $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $x = y^m$. On a donc $y = y^{nm}$. En prenant le logarithme (on est sur $\mathbb{R}_+^*$), on a donc $\ln(y) = nm \ln(y)$. On a donc deux possibilités :

- Si $y \neq 1$, alors $\ln(y) \neq 0$. On a donc $nm = 1$ et puisque n et m sont des entiers positifs, on a donc $n = m = 1$. On en déduit donc que $y = x$.
- Si $y = 1$, alors puisque $x = y^m$, on a $x = 1$. On a donc bien $y = x$.

Dans tous les cas, on a $x = y$ donc $\mathcal{R}$ est bien antisymétrique.

On a donc bien $\mathcal{R}$ qui est une relation d'ordre.

2) Cette relation d'ordre n'est pas totale. Prenons par exemple $x = 1$ et $y = 2$. Il n'existe alors aucun $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = 2^n$ (car $n > 0$) ni tel que $2 = 1^n = 1$. On a donc ni $x\mathcal{R}y$, ni $y\mathcal{R}x$. La relation d'ordre est donc partielle.

Exercice 14. Notons $(z,r)\mathcal{R}(z',r')$ si $|z-z'| \leq r'-r$ et montrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$.

- Réflexivité. Soit $(z,r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$. Alors $|z-z| = 0$ et $r-r=0$ donc on a bien $(z,r)\mathcal{R}(z,r)$.

- Transitivité. Soient $(z_1,r_1)\mathcal{R}(z_2,r_2)$ et $(z_2,r_2)\mathcal{R}(z_3,r_3)$. On a alors :
$$|z_1 - z_2| \leq r_2 - r_1 \text{ et } |z_2 - z_3| \leq r_3 - r_2.$$
On a alors par inégalité triangulaire :
$$\begin{array}{rcl} |z_1 - z_3| & = & |z_1 - z_2 + z_2 - z_3| \\ & \leq & |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \\ & \leq & r_2 - r_1 + r_3 - r_2 \\ & \leq & r_3 - r_1. \end{array}$$
On a donc bien $(z_1,r_1)\mathcal{R}(z_3,r_3)$.

- Antisymétrie. Supposons $(z_1,r_1)\mathcal{R}(z_2,r_2)$ et $(z_2,r_2)\mathcal{R}(z_1,r_1)$. On a alors :
$$|z_1 - z_2| \leq r_2 - r_1 \text{ et } |z_2 - z_1| \leq r_1 - r_2.$$
Puisque $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, on en déduit par somme que :
$$2|z_1 - z_2| \leq 0.$$
Un module étant positif, on en déduit que $|z_1 - z_2| = 0$, soit que $z_1 = z_2$. Ceci entraine que $0 \leq r_2 - r_1$ et que $0 \leq r_1 - r_2$. On a donc également $r_1 = r_2$, ce qui entraine bien $(z_1,r_1) = (z_2,r_2)$.

- La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'ordre. Cette relation n'est cependant pas totale puisque par exemple $(0,1)$ et $(1,1)$ ne sont en relation dans aucun sens car $|0-1| = 1$ n'est pas inférieur à $1-1=0$ et que $|1-0| = 1$ n'est pas inférieur à $1-1=0$.

Géométriquement, cette relation d'ordre s'interprète ainsi : on a $(z_1,r_1)\mathcal{R}(z_2,r_2)$ si le disque de centre z_1 et de rayon r_1 est inclus dans le disque de centre z_2 et de rayon r_2.

Exercice 15. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire circulaire et réflexive. Montrons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

- Symétrie. Soient a, b tels que $a\mathcal{R}b$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a également $a\mathcal{R}a$. On a alors, en utilisant la « circularité » $b\mathcal{R}a$. La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

- Transitivité. Soient a, b, c tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. On a alors par « circularité » que $c\mathcal{R}a$ et en utilisant la symétrie, on en déduit que $a\mathcal{R}c$. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

On a donc montré que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (la réflexivité est admise par hypothèse).

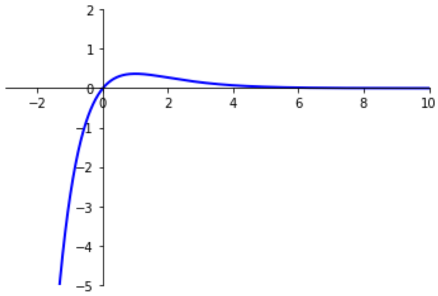
Exercice 16. Cette relation est clairement réflexive ($|z| = |z|$), symétrique (si $|z_1| = |z_2|$, alors $|z_2| = |z_1|$ et transitive (car $|z_1| = |z_2|$ et $|z_2| = |z_3|$ implique $|z_1| = |z_3|$). $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$. Si $z \in C$, tous les éléments dans sa classe d'équivalence sont les complexes de même module. Si on note $r = |z|$, il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon r.

Exercice 17. Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $x\mathcal{R}y$ ssi $ye^x = xe^y$.

On peut réécrire la relation $\mathcal{R}$. Puisque l'exponentielle ne s'annule pas, on a $x\mathcal{R}y$ ssi $ye^{-y} = xe^{-x}$. Avec cette écriture, il est alors direct que $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et symétrique.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On va chercher à déterminer le nombre d'éléments dans $\overline{x_0}$ (la classe d'équivalence de x_0). Pour cela, étudions sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. On en déduit (faire un tableau de variation) que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par produit de limite et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d'après les croissances comparées.

On peut alors tracer le graphe de la fonction. De part la définition de f, on a $x\mathcal{R}x_0$ ssi $f(x) = f(x_0)$. On peut alors déterminer le nombre d'éléments dans la classe de x_0.



Si $x_0 \in \mathbb{R}_-$ ou $x_0 = 1$, on a un seul élément dans cette classe (il s'agit de x_0). Si $x_0 \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a deux éléments dans cette classe.

Exercice 18. Pour visualiser, on rappelle que $A_i = f^{-1}(A_i) = \{x \in E \ / \ f(x) = i\}$.

Puisque f est surjective, on a que $\forall i \in I, \ \exists x \in E \ / \ f(x) = i$ donc $A_i \neq \emptyset$.

Soient $i, j \in I$ avec $i \neq j$. Montrons que $A_i \cap A_j = \emptyset$. Par l'absurde si il existe $x \in A_i \cap A_j$, alors on a $f(x) = i$ et $f(x) = j$, ce qui est absurde car $i \neq j$. On a donc bien A_i et A_j disjoints pour $i \neq j$.

Pour finir, il ne reste plus qu'à montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i = E$. L'inclusion $\subset$ est toujours vraie car les A_i sont des sous-ensembles de E. Pour l'autre inclusion, fixons $x \in E$. On a $f(x) \in I$, donc on peut poser $i_0 = f(x)$, ce qui entraine que $x \in A_{i_0}$. On a donc bien $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

On en déduit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E.

Exercice 19. Théorème de Cantor. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Posons $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$ et supposons par l'absurde que f est surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$. Puisque $A \in \mathcal{P}(E)$, il existe donc $y \in E$ tel que $f(y) = A$. On a alors deux cas possibles.

- Si $y \in A$. Alors, par définition de A, on a $y \notin f(y)$, c'est à dire $y \notin A$: absurde !
- Si $y \notin A$. Alors, on a $y \notin f(y)$. Par définition de A, on a alors $y \in A$: absurde !

Dans tous les cas on a une absurdité. On en déduit que l'hypothèse f surjective est absurde ! Pour tout ensemble E, il n'existe donc pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.