7. Calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 1. (c) Calculer les intégrales suivantes en reconnaissant l'intégrale d'une fonction de la forme $u'(t)F'(u(t)) = (F \circ u)'(t)$:

1) $\displaystyle\int_0^3 te^{t^2}dt$ 2) $\displaystyle\int_0^1 t^3(t^4+1)^3dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\arctan(t)}{1+t^2}dt$

4) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt$ 5) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan(t)}dt$

Exercice 2. (c) Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

$$I_1 = \int_0^\pi x^2\cos(3x)dx,\ I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx,\ I_3(x) = \int_0^x e^t\sin(2t)dt \text{ et } I_4 = \int_1^2 x^4\ln(x)dx$$

Exercice 3. (c) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ pour tout $x \geq 1$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$.

Exercice 4. (m) Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \cos(\ln(x))dx,\ I_2 = \int_1^4 e^{-\sqrt{x}}dx,\ I_3 = \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))^3}dt \text{ et } I_4 = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}dx.$$

Exercice 5. (i) On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))dt$. Déterminer I en posant $t = \dfrac{\pi}{4} - x$.

Exercice 6. (m) Calculer les primitives suivantes $\displaystyle\int^x \cos^3(t)dt$, $\displaystyle\int^x \sin^4(t)dt$ et $\displaystyle\int^x \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.

Exercice 7. (m) Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cos^2(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi x\sin^2(x)dx$.

Exercice 8. (i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. Montrer que f est T-périodique si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)du$ est constante.

Exercice 9. (m) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$. Montrer que f est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$.

Exercice 10. (c) **et** (i) On pose $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\ln(t)}dt$. Déterminer D_f, justifier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée et ses variations. En étudiant alors les variations de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$, déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 11. (m) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$. Justifier que f_n se prolonge par continuité sur $[0,1]$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ et sa limite en l'infini.

Exercice 12. (m) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}dx,\ I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx,\ I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+4}dx \text{ et } I_4 = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx.$$

Exercice 13. (m) Déterminer les primitives $\displaystyle\int^x \frac{1}{2t^2+t+1}dt$, $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2-6t+10}dt$ et $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2-3t+\frac{9}{2}}dt$.

Exercice 14. (m) **Intégrales de Wallis.** On pose pour $n \geq 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)d\theta$.

1) Justifier sans la calculer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, positive et décroissante.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

3) Prouver que $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$. Déterminer une formule similaire pour I_{2k+1}.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = nI_n^2$.
   a) Montrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.
   b) En utilisant alors la décroissance de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n\pi}{2n+2} \leq u_n \leq \dfrac{\pi}{2}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 15. (m) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1) Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$.

2) Montrer que si $p \geq 1$, alors $I_{p,q} = \dfrac{p}{q+1}I_{p-1,q+1}$.

3) En déduire $I_{p,q}$ en fonction de factorielles faisant intervenir p et q.

Exercice 16. (m) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$.

1) Sans la calculer, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tend vers 0.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3) En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 17. (i) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $I_{n-1} + I_n$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.