Programme de colle, semaine 20

Développements limités :

- Nous avons commencé le chapitre sur les DLs par la définition des relations de comparaisons (équivalence, o, O). Nous avons ensuite vu les comparaisons usuelles (croissances comparées et équivalents usuels en 0).

- Nous avons juste ré-énoncé la formule de Stirling mais pas de rappel n'a été fait sur les applications des équivalents appliquées aux suites (tout s'applique de la même façon).

- Nous avons ensuite vu la définition d'un DL, quelques exemples, vu que nous pouvions toujours nous placer en 0 à l'aide d'une translation et démontré l'unicité du DL. Nous avons alors étudié l'influence de la parité/imparité sur le DL en 0. Nous avons ensuite admis le théorème d'intégration des DLs et en avons déduit la formule de Taylor Young. Nous avons démontré qu'une fonction admettait un DL à l'ordre 0 ssi elle était continue en x_0, qu'elle admettait un DL à l'ordre 1 ssi elle était dérivable en x_0 mais que l'équivalence entre n fois dérivable et admettre un DL à l'ordre n était fausse pour $n \geq 2$.
- Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ admettant un DL à tout ordre, nous avons déterminé à l'aide des propriétés précédentes la plupart des développements limités usuels (à connaitre ou savoir retrouver **rapidement**). Pour chaque DL, il est conseillé au moment de l'apprentissage d'écrire son expression à l'ordre 3 par exemple.
  - $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.
  - $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
  - $\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ et $\cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
  - $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ et $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
  - $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$.
  - $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$.
  - $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
  - $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} x^k + o(x^n)$.
- Nous avons étudié les opérations sur les DLs (somme, produit, composition, quotient, étude des DLs de fonctions réciproques à l'aide de $f(f^{-1}(x)) = x$ et unicité du DL).
- Nous avons terminé le chapitre par des applications des DLs : calcul d'équivalents, de limites (si forme indéterminée). Nous avons démontré qu'une fonction $\mathcal{C}^2$ vérifiant en a dans l'intérieur de I, $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ admettait un maximum local en a (resp. $f''(a) > 0$ pour un minimum local) ainsi que si la fonction admettait un maximum local, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$ (resp. $f''(a) \geq 0$ pour un minimum local). Nous en avons déduit le positionnement d'une courbe par rapport à sa tangente. Nous avons terminé le chapitre par les développements asymptotiques,

la définition d'une asymptote à une fonction et l'étude sur quelques exemples de la position de f par rapport à celle-ci.

Remarques sur le programme : Je n'ai pas fait beaucoup de preuves dans le chapitre mais nous avons beaucoup mis l'accent sur le calcul / la manière de calculer.

Compétences :

— Estimer à quel ordre faire le développement limité de chacune des fonctions avant de calculer.
— Utiliser les DLs afin de simplifier des formes indéterminées (calcul de limites/équivalents).
— Utiliser les DLs afin de trouver rapidement la tangente à une fonction en un point (ou faire un prolongement) et la position locale de la courbe par rapport à celle-ci.

Questions de cours :

1. Énoncer les développements limités usuels en donnant leur formule générale et leur écriture à l'ordre 3 (cf première page).
2. Citer (pas de preuve) la formule de Taylor Young et l'utiliser pour retrouver le DL de l'exponentielle en 0.
3. Retrouver par intégration des DLs le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.
4. Préciser quand on a un développement limité de la forme $f(x) = a + bx + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_n \neq 0$ la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0 en fonction de la parité de n et du signe de a_n. On illustrera graphiquement en utilisant les DLs en 0 de e^x, $\ln(1+x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$.
5. Montrer que $\sum u_n$ converge implique $u_n \to 0$ et donner un contre exemple à la réciproque (attendu : $u_n = \frac{1}{n}$) et montrer le théorème des séries géométriques.
6. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge et que $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ convergent en utilisant les critères de comparaisons des SATPS en comparant avec des séries de Riemann divergente/convergente.

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD21 : 21 ; TD22 : 1.1),2) et 2.1),2),3),5),6).

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD21 : 13.
- 2ieme du groupe : TD21 : 14.
- 3ieme du groupe : TD21 : 21.

Prochain programme : séries

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

TD21 : 13

- Il faut faire le développement limité de $\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ et de $\dfrac{1}{e^x-1}$ de manière séparée (surtout ne pas mettre au même dénominateur).
- D'après l'énoncé, on veut faire le développement asymptotique jusqu'à l'ordre $o(x)$.
- Attention à la perte d'ordre dans un développement limité de quotient : vous devriez normalement avoir des DLs jusqu'à l'ordre 3 au dénominateur (on renvoie à la correction de l'exercice 23 pour le DL de $\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ et on fera de la même manière pour l'autre.
- Il faut ensuite résoudre un système à 2 équations et 2 inconnues pour annuler les termes en $\dfrac{1}{x}$ et les termes constants.

TD21 : 14

- Il faut passer par la forme exponentielle pour étudier $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.
- Vu que le numérateur est divisé par x, il faut faire un DL à l'ordre 1 du numérateur. A vous de trouver à quel ordre faire le DL de $\ln(1+x)$ pour avoir ceci.
- Attention pour la composition de DL à bien avoir $X \to 0$ pour le DL de e^X. On utilisera $e^{a+b} = e^a \times e^b$ pour bien se ramener en 0.
- On trouve à la fin une limite finie.

TD21 : 21

- N'hésitez pas à poser $X = \dfrac{1}{x}$ pour vous ramener à une limite en 0.
- On suivra la méthode du cours en effectuant un DL de l'exponentielle.
- Normalement, vous devriez trouver que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ avec a, b, c non nuls (et pas de termes en $\dfrac{1}{x}$ donc il faut bien aller jusqu'à avoir du $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$).