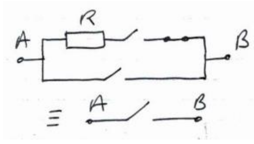
CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 11

Exercice 1 – Quartz piézoélectrique *(d'après E3A PC 2020)*

1. En basses fréquences :

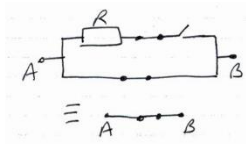


$\underline{Z_L} = jL\omega \to 0$: L est équivalente à un interrupteur fermé

$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega} \to \infty$: C est équivalent à un interrupteur ouvert

Quartz équivalent à un interrupteur ouvert : $\boxed{\underline{Z} \to \infty}$

➢ En hautes fréquences :



$\underline{Z_L} = jL\omega \to \infty$: L est équivalente à un interrupteur ouvert

$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega} \to 0$: C est équivalent à un interrupteur fermé

Quartz équivalent à un interrupteur fermé : $\boxed{\underline{Z} \to 0}$

2. Association en série : $\underline{Z}_1 = jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}$

Association en parallèle :

$$\underline{Y} = jC_0\omega + \frac{1}{\underline{Z}_1} = jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2} = \frac{jC\omega + jC_0\omega - jC_0LC\omega^3}{1 - LC\omega^2}$$

Impédance du quartz :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1 - LC\omega^2}{j(C + C_0)\omega - jC_0LC\omega^3} = \frac{1 - LC\omega^2}{j(C + C_0)\omega\left(1 - \dfrac{C_0LC}{C + C_0}\omega^2\right)}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{j(C + C_0)\omega}\frac{1 - LC\omega^2}{1 - \dfrac{C_0CL}{C + C_0}\omega^2} = \frac{1}{jC_{éq}\omega}\frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_S^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_P^2}}} \text{ avec } \boxed{C_{éq} = C + C_0}, \boxed{\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \text{ et}$$

$$\boxed{\omega_P = \frac{1}{\sqrt{L\dfrac{CC_0}{C + C_0}}} = \sqrt{\frac{C + C_0}{LCC_0}}}$$

3. Module $Z = |\underline{Z}| = \dfrac{1}{C_{éq}\omega}\dfrac{\left|1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_S^2}\right|}{\left|1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_P^2}\right|}$. La résonance est observée lorsque $Z = |\underline{Z}|$ est maximal, i.e. pour $\omega = 0$ ou lorsque $1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_P^2} = 0$ soit pour $\boxed{\omega_r = \omega_P}$. La fréquence de résonance est $\boxed{f_r = f_P}$ et $Z = |\underline{Z}|$ est infini.

De plus, $\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{C+C_0}{C_0}} = \omega_S\sqrt{\frac{C+C_0}{C_0}}$

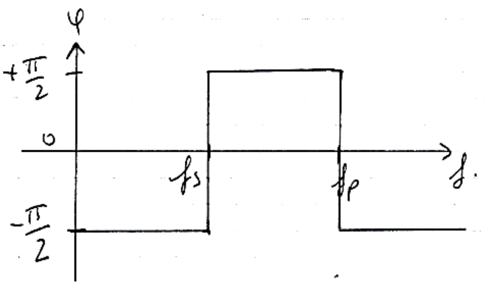
$C + C_0 > C_0 \Rightarrow \frac{C+C_0}{C_0} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{C+C_0}{C_0}} > 1$ donc $\omega_P > \omega_S$ et $\boxed{f_P > f_S}$

Pour $\boxed{f_a = f_S}$, $\boxed{Z = |\underline{Z}| = 0}$: c'est la valeur minimale de $Z = |\underline{Z}|$, d'où le nom de fréquence d'anti-résonance.

4. $\underline{Z} = jX$ avec $\boxed{X = -\frac{1}{C_{éq}\omega}\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_S^2}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_P^2}}}$

Domaines de pulsations / fréquences	$\omega < \omega_S$ $f < f_S$	$\omega_S < \omega < \omega_P$ $f_S < f < f_P$	$\omega_P < \omega$ $f_P < f$
Signe de $1-\frac{\omega^2}{\omega_S^2}$	>0	<0	<0
Signe de $1-\frac{\omega^2}{\omega_P^2}$	>0	>0	<0
Signe de X	<0	>0	<0
Comportement du quartz	Capacitif	Inductif	Capacitif
$\phi = \arg(\underline{Z})$	$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

5. Comportement inductif du quartz pour $f_S < f < f_P$



A.N. : $\boxed{f_S = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 32{,}76 \text{ kHz}}$

et $\boxed{f_P = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}} = 32{,}77 \text{ kHz}}$

On constate que $f_S \simeq f_P$ donc la fréquence des oscillations est $\boxed{f_0 \simeq 32{,}77 \text{ kHz}}$ et elle est stable.

6. Pour la courbe de résonance, pas de changement en BF et en HF. Par contre, à la fréquence de résonance f_r, Z n'est pas infini et à la fréquence d'anti-résonance f_a, Z n'est pas nul.

Facteur de qualité : $Q = \frac{1}{RC\omega_S} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ soit $\boxed{Q = 82{,}10.10^3}$

La valeur de Q est très élevée par rapport à des circuits RLC classiques (du fait d'une valeur de L très élevée et d'une valeur de C très faible). Le quartz est un dipôle résonnant avec une résonance très aigüe (c'est l'effet recherché pour bénéficier de la stabilité de la fréquence d'oscillations).

Problème 2 – Accordeur de guitare *(Centrale TSI 2019)*

1. Valeur moyenne $\boxed{U_{e0} \simeq 10 \text{ mV}}$
2. Période : $T_{co} = (4{,}6 - 1{,}4).10^{-3} = 3{,}2 \text{ ms}$ soit $\boxed{f_{co} = \dfrac{1}{T_{co}} \simeq 3{,}1.10^{2} \text{ Hz}}$. Cette fréquence est la plus proche de la fréquence accordée de la corde Mi aigu.
3. Ce signal est périodique et non sinusoïdal : il y aura donc des harmoniques de fréquence multiples de f_{co}.
4. Diviseur de tension : $\underline{H_1}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_1}}{\underline{u_e}} = \dfrac{R_1}{R_1 + \underline{Z_{C_1}}} = \dfrac{R_1 \underline{Y_{C_1}}}{R_1 \underline{Y_{C_1}} + 1} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H_1}(j\omega) = \dfrac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$
5. BF : $\omega \to 0$: $\underline{H_1}(j\omega) = 0$: les BF ne passent pas

   HF : $\omega \to \infty$: $\underline{H_1}(j\omega) \simeq \dfrac{jR_1C_1\omega}{jR_1C_1\omega} = 1$: les HF passent

   C'est un filtre passe-haut du 1er ordre.

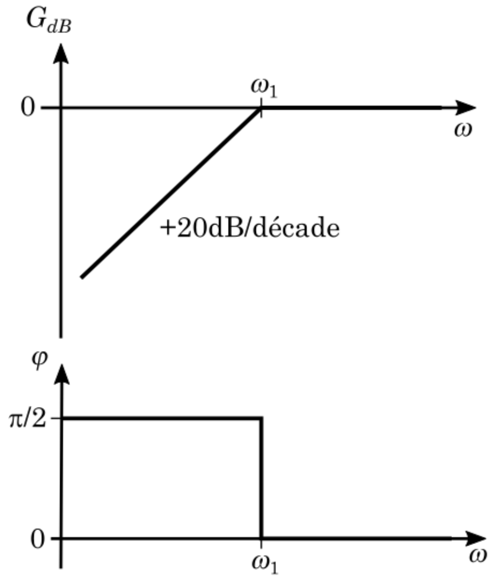
➢ Pulsation de coupure ω_1 telle que $\boxed{H_1(\omega_1) = \dfrac{H_{1\max}}{\sqrt{2}}}$

$$\left|\underline{H_1}(\omega_1)\right| = \frac{R_1C_1\omega_1}{\sqrt{1 + (R_1C_1\omega_1)^2}} \text{ et } H_{1\max} = 1 \text{ (en HF)}$$

$$H_1(\omega_1) = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{R_1C_1\omega_1}{\sqrt{1 + (R_1C_1\omega_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{(R_1C_1\omega_1)^2}{1 + (R_1C_1\omega_1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$2(R_1C_1\omega_1)^2 = 1 + (R_1C_1\omega_1)^2 \Leftrightarrow (R_1C_1\omega_1)^2 = 1 \Leftrightarrow R_1C_1\omega_1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}}$$

6. Cf. diagramme de Bode ci-dessous

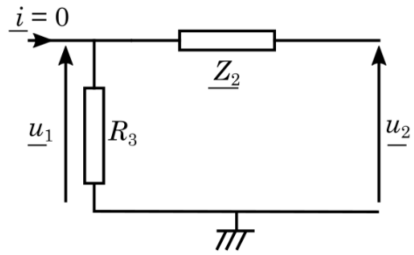


7. Fréquence de coupure $\boxed{f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi R_1C_1} = 15{,}9 \text{ Hz}}$

Le rôle de ce premier filtre est de <u>supprimer la composante continue</u> de fréquence nulle et de laisser passer toutes les autres composantes, la fréquence la plus basse étant $f_{co} = 3{,}1.10^2$ Hz $>> f_1$: le signal obtenu est à valeur moyenne nulle.

8. <u>Admittance équivalente</u> : $\underline{Y}_2 = \dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega = \dfrac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}$

<u>Impédance équivalente</u> : $\boxed{\underline{Z}_2 = \dfrac{1}{\underline{Y}_2} = \dfrac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}$



9. Diviseur de tension (R_3 et $\underline{Z}_2$ sont en série)

$$\underline{u}_1 = \frac{R_3}{R_3 + \underline{Z}_2}\underline{u}_2$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{R_3 + \underline{Z}_2}{R_3} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{R_3} = 1 + \frac{1}{R_3}\frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

$$\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{1 + jR_2C_2\omega} = 1 + \frac{G_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}} \text{ avec } \boxed{G_0 = \frac{R_2}{R_3}} \text{ et } \boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}}$$

10. $\underline{H}_2(j\omega) = \dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2} + G_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} = \dfrac{(1+G_0)\left(1 + j\dfrac{\omega}{(1+G_0)\omega_2}\right)}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} = (1+G_0)\dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{(1+G_0)\omega_2}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$

- $\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = H_0\dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}}$ avec $\boxed{H_0 = 1 + G_0}$ et $\boxed{\omega_3 = (1+G_0)\omega_2 = H_0\omega_2}$
- $\boxed{H_0 = 1 + \dfrac{R_2}{R_3}}$ et $\omega_3 = (1+G_0)\omega_2 = \dfrac{1 + \dfrac{R_2}{R_3}}{R_2C_2} \Leftrightarrow \boxed{\omega_3 = \dfrac{R_3 + R_2}{R_3R_2C_2}}$
- $\dfrac{R_2}{R_3} > 0$ donc $\boxed{H_0 > 1}$ et $\boxed{\omega_3 = H_0\omega_2 > \omega_2}$

11. <u>Produit de fonctions de transfert</u> :

$$\underline{H}_2(j\omega) = H_0 \cdot \underline{H}_3(j\omega) \cdot \underline{H}_4(j\omega)$$

avec $\boxed{H_0 = 1 + G_0 > 1}$, $\boxed{\underline{H}_3(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}}$, $\boxed{\underline{H}_4(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}}$

- <u>Courbe de gain total :</u> $\boxed{G_{dB2}(\omega) = G_{dB0} + G_{dB3}(\omega) + G_{dB4}(\omega)}$
- <u>Courbe de phase totale :</u> $\boxed{\varphi_2(\omega) = \varphi_1 + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega)}$
- <u>Étude de H_0</u> : $H_0 > 1$ d'où $G_{dB0} = 20\log|H_0| > 0$, $\varphi_0 = \arg(H_0) = 0$

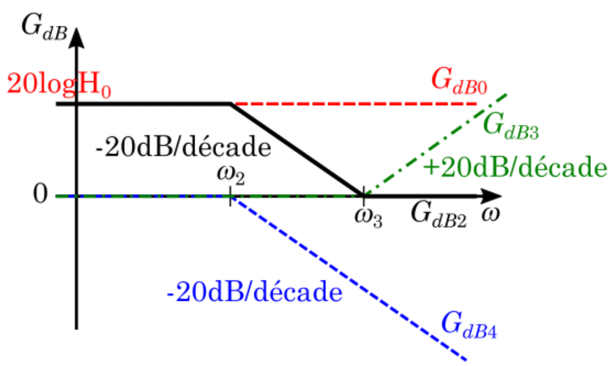
➢ <u>Étude asymptotique</u> de $\underline{H}_3(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}$

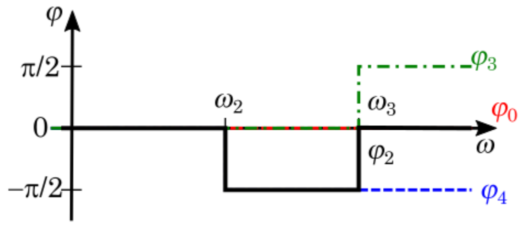
Domaine de pulsation	$\omega \ll \omega_3$	$\omega \gg \omega_3$
$\underline{H}_3(j\omega)$	1	$j\dfrac{\omega}{\omega_3}$
Courbe de gain G_{dB3}	Droite horizontale à 0 dB	Droite de pente +20 dB/décade
Courbe de phase φ_3	$\varphi_3 = 0$ Droite horizontale à 0 rad	$\varphi_3 = +\dfrac{\pi}{2}$ Droite horizontale à $+\dfrac{\pi}{2}$ rad

➢ <u>Étude asymptotique</u> de $\underline{H}_4(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$

Domaine de pulsation	$\omega \ll \omega_2$	$\omega \gg \omega_2$
$\underline{H}_4(j\omega)$	1	$-j\dfrac{\omega_2}{\omega}$
Courbe de gain G_{dB4}	Droite horizontale à 0 dB	Droite de pente –20 dB/décade
Courbe de phase φ_4	$\varphi_4 = 0$ Droite horizontale à 0 rad	$\varphi_4 = -\dfrac{\pi}{2}$ Droite horizontale à $-\dfrac{\pi}{2}$ rad

Tracé en tenant compte du fait que $\boxed{\omega_3 > \omega_2}$





➢ <u>HF</u> : $\underline{H_2}(j\omega) = H_0 \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_3}}{j\dfrac{\omega}{\omega_2}} = H_0 \dfrac{\omega_2}{\omega_3} = H_0 \dfrac{\omega_2}{H_0\omega_2} = 1$. <u>Asymptote horizontale</u> $\boxed{G_{dB2} = 0}$

12. $\boxed{H_0 = 1 + \dfrac{R_2}{R_3} = 114}$ et $\boxed{f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz}}$

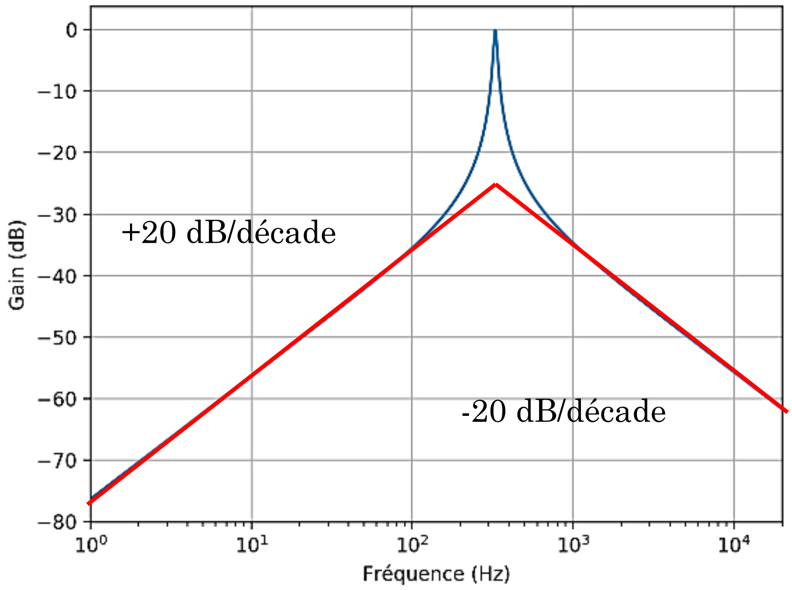
➢ Le rôle de ce deuxième filtre est <u>d'amplifier</u> fortement les composantes du signal de fréquence inférieure à 500 Hz : ce sera le cas pour le <u>fondamental</u> de fréquence $f_{co} \simeq 3{,}1.10^2$ Hz. Les harmoniques de fréquences supérieures seront également amplifiés, mais dans une moindre mesure.

13. BF : $\omega \to 0$: $G_{dB} \to -\infty \Rightarrow \left|\underline{H}(j\omega)\right| = 0$: les BF ne passent pas

HF : $\omega \to \infty$: $G_{dB} \to -\infty \Rightarrow \left|\underline{H}(j\omega)\right| = 0$: les HF ne passent pas

C'est un <u>filtre passe-bande du 2nd ordre.</u>

14. On trace les asymptotes tangentes à la courbe en BF et en HF (cf. figure ci-dessous). Les asymptotes à la courbe de gain se croisent au-dessous de la courbe réelle et le pic de résonance est très marqué : $\boxed{Q > 1}$

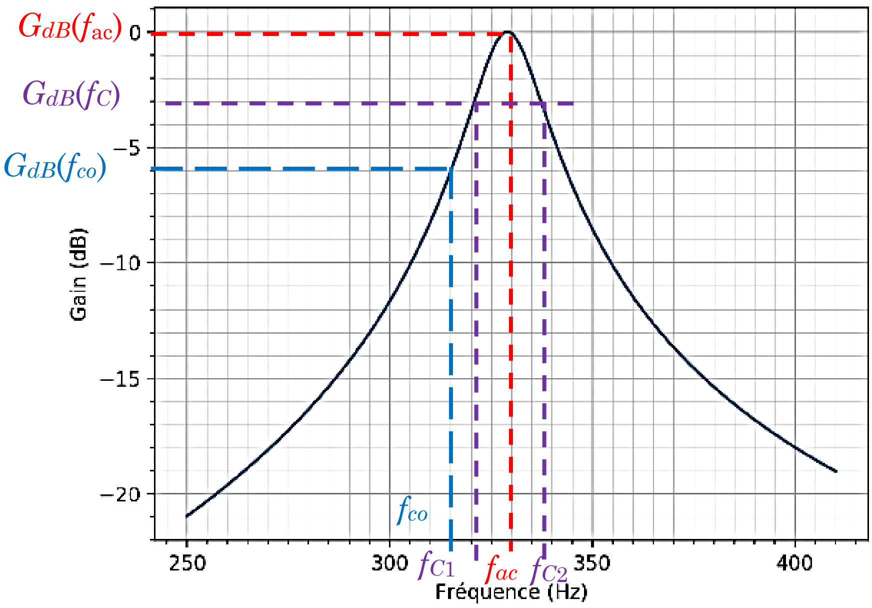


15. Fréquence centrale : $\boxed{f_{ac} = 330 \text{ Hz}}$ (c'est bien la fréquence du Mi aigu)

Fréquences de coupure telles que $G_{dB}(f_C) = G_{dB\max} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$ soit $f_{C1} = 320 \text{ Hz}$ et $f_{C2} = 337 \text{ Hz}$ (cf. figure ci-dessous).

Bande passante : $\boxed{BP = [f_{C2}; f_{C1}]}$ de largeur $\boxed{\Delta f = f_{C2} - f_{C1} = 17 \text{ Hz}}$

Facteur de qualité : $\boxed{Q = \dfrac{f_{ac}}{\Delta f} = 19}$. On vérifie $\boxed{Q > 1}$.



16. Gain : $G_{dB}(f_{co}) = -6$ dB et $\boxed{H(f_{co}) = 10^{\frac{G_{dB}(f_{co})}{20}} = 0{,}5 = \frac{1}{2}}$

    La composante spectrale fondamentale est divisée par deux (ou atténuée de 50%) en sortie de ce filtre (F_c).

17. On trouve une première raie (à $f = 0$) à 10 mV ce qui correspond bien à la valeur moyenne estimée en début de problème. On remarque que la raie suivante est située un peu au-dessus de 300 Hz, ce qui correspond bien à la fréquence du fondamental de la corde désaccordée. Enfin, toutes les autres raies ont une fréquence multiple de la fréquence du fondamental : ce sont les harmoniques du signal.

18. En sortie du premier filtre (F_a), seule la composante continue sera supprimée, le reste du spectre n'étant pas modifié. Il s'agit donc du spectre (a).

19. À 315 Hz, le filtre (F_b) amplifie environ 100 fois le fondamental, un peu moins l'harmonique de rang 2 et de moins en moins les autres harmoniques. L'amplitude du fondamental du signal de sortie doit être égale à $100 \times 18.10^{-3} = 1800$ mV : cela correspond au spectre (d).

20. Signal d'entrée du filtre (F_c) : $u_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{2,n} \cos(n2\pi f_{co} t + \varphi_{2,n})$

    Signal de sortie : $u_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{sn} \cos(n2\pi f_{co} t + \varphi_{sn})$ avec $\boxed{U_{sn} = U_{2,n} H(nf_{co})}$

Composante	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang > 2
Fréquence	$f_{co} = 315$ Hz	$2f_{co} = 630$ Hz	nf_{co}
Gain G_{dB}	-6	-28	< -33
$H(f) = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$	0,5	0,04	$< 0{,}02$

$U_{2,n}$ (mV)	1800	2000	<1200
U_{sn} (mV)	900	80	<24

On constate que tous les harmoniques sont fortement atténués, y compris l'harmonique de rang 2 car $U_{s2} < \frac{1}{10} U_{s1}$.

Expression du signal de sortie : $\boxed{u_s(t) \simeq U_{s1} \cos(2\pi f_{co} t + \varphi_{s1})}$ avec $\boxed{U_{s1} = 900\text{ mV}}$

$u_s(t)$ est <u>sinusoïdal</u> de fréquence $f_{co} = 315\text{ Hz}$ et d'amplitude $U_{s1} = 900\text{ mV}$