DM 2,corrigé

PROBLÈME
Fonctions hyperboliques réciproques

Partie I. Cosinus et sinus hyperboliques

1)

a) Les fonctions ch et sh sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que sommes de fonctions dérivables. On vérifie sans difficultés (voir cours) que ch est paire, que sh est impaire, que $\text{sh}' = \text{ch}$ et que $\text{ch}' = \text{sh}$.

b) Puisqu'une exponentielles est strictement positive, on en déduit que ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ceci entraine que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\text{sh}(0) = 0$, on en déduit que sh est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci entraine que ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ceci entraine (pour le détail du calcul, voir le cours) que $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty$. On a de plus pour $x \in \mathbb{R}$:

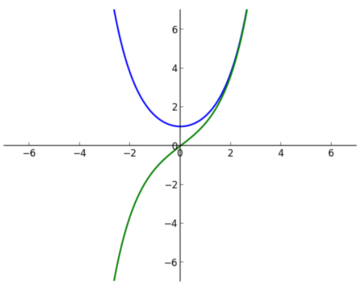
$$\begin{aligned} \text{ch}(x) - \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Ceci entraine que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = 0$.

Ceci signifie graphiqement que les graphes de ch *et* sh *se rapprochent l'un de l'autre au voisinage de* $+\infty$.

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x} \geq -e^{-x}$ donc on a directement $\text{ch}(x) \geq \text{sh}(x)$.

e) On en déduit les graphes suivants (la fonction ch est la fonction paire et sh est la fonction impaire) :



2)

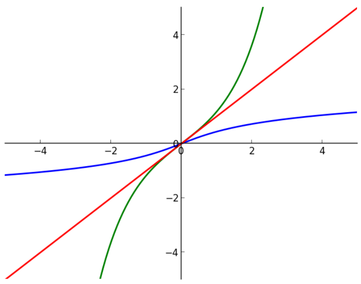
a) La fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De même, ch est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante, $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, on a donc que ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

b) argsh et argch sont continues car ce sont des réciproques de fonctions continues. On a $\text{sh}' = \text{ch}$ et ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc ne s'annule pas. On en déduit que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas). Par contre, on a $\text{ch}' = \text{sh}$ et sh s'annule uniquement en 0. On en déduit que argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ (puisque le seul point où la dérivée de ch s'annule est en 0 et que $\text{ch}(0) = 1$).

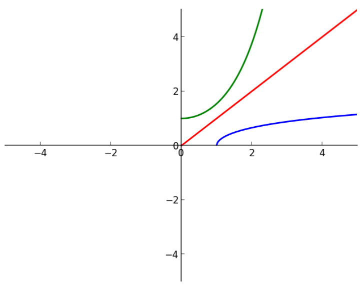
3)

a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \text{sh}(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) = \text{ch}(x) - 1 \geq 0$ (en effet la fonction ch est minimale en 0 où elle vaut 1). On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\text{sh}(x) \geq x$.

b) On en déduit les graphes suivants :



c) On a de même :



4)

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(y) - \text{sh}^2(y) &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} - \frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) Soit $x \in [1, +\infty[$. En utilisant la relation précédente en $y = \text{argch}(x)$, on a alors :

$$\text{ch}^2(\text{argch}(x)) - \text{sh}^2(\text{argch}(x)) = 1.$$

Or, on a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\text{ch}(\text{argch}(x)) = x$ (par définition de la fonction réciproque). Ceci entraine que :

$$\operatorname{sh}^2(\operatorname{argch}(x)) = x^2 - 1.$$

Or, puisque $\operatorname{argch}(x) \geq 0$ (puisque argch est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$), on en déduit que $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) \geq 0$. Ceci entraine que $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.

De même si on fixe $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la relation de la question précédente en $y = \operatorname{argsh}(x)$, on trouve :

$$\operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh}(x)) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(x)) = 1.$$

Puisque $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x$ et que $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) \geq 0$ (car ch est toujours positif), on en déduit que :

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

c) Les fonctions sh et argsh sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On peut donc dériver $\operatorname{sh} \circ \operatorname{argsh}$. On en déduit en dérivant la relation donnée par l'énoncé que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{argsh}'(x) \times \operatorname{sh}'(\operatorname{argsh}(x)) = 1.$$

Puisque $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, et en utilisant la question précédente, on trouve donc $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

d) De même, ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et argch est dérivable sur $]1, +\infty[$. Ceci entraine que $\operatorname{ch} \circ \operatorname{argch}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$. On en déduit alors en dérivant la relation de l'énoncé que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\operatorname{argch}'(x) \times \operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(x)) = 1.$$

Puisque $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, on en déduit alors que $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5)

a) On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on considère l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

i) On pose $X = e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow \quad X - \frac{1}{X} = 2y \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - 2Xy - 1 = 0. \end{aligned}$$

ii) Le discriminant vaut $\Delta = 4(y^2 + 1)$. On en déduit que les deux solutions de l'équation sont :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 + 1} \text{ et } X_2 = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

Or, on a $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2}$ (par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). Ceci entraine que $X_1 > y + |y|$, ce qui entraine $X_1 > 0$. La solution X_1 est donc toujours strictement positive.

On a de même $-\sqrt{y^2 + 1} < -|y|$. On en déduit que $X_2 < y - |y|$, et donc que $X_2 < 0$.

iii) Puisque l'on a $X = e^x$, on doit garder la solution où $X > 0$. Ceci entraine que l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$ admet une unique solution qui est $x = \ln(X_1) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Ceci nous donne alors la réciproque de sh puisque $\operatorname{sh}(x) = y \Leftrightarrow x = \operatorname{argsh}(y)$. On peut alors dériver l'expression trouvée (c'est une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). On retrouve alors pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsh}'(y) &= \left(1+\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right)\times\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\\
&= \left(\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}\right)\times\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.
\end{aligned}$$

b) On fixe $y \in [1,+\infty[$ et on considère l'équation $\operatorname{ch}(x)=y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$. Posons alors $X=e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x)=y &\Leftrightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2}=y\\
&\Leftrightarrow X+\frac{1}{X}=2y\\
&\Leftrightarrow X^2-2yX+1=0.
\end{aligned}$$

On peut alors résoudre cette équation, son discriminant étant $4(y^2-1)\geq 0$ car $y\in[1,+\infty[$. Les deux solutions de cette équation sont donc :

$$X_1 = y+\sqrt{y^2-1} \text{ et } X_2 = y-\sqrt{y^2-1}.$$

Démontrons alors que $X_1 \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
X_1-1 &= y-1+\sqrt{(y-1)(y+1)}\\
&= \sqrt{y-1}\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}\right)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

De même, on peut montrer que $X_2 \leq 1$. En effet :

$$\begin{aligned}
X_2-1 &= y-1-\sqrt{(y-1)(y+1)}\\
&= \sqrt{y-1}\left(\sqrt{y-1}-\sqrt{y+1}\right)\\
&= \sqrt{y-1}\left(\sqrt{y-1}-\sqrt{y+1}\right)\times\frac{\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}}\\
&= \sqrt{y-1}\times\frac{y-1-(y+2)}{\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}}\\
&= \frac{-2\sqrt{y-1}}{\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}}\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Or, en résolvant l'équation, on a posé $X=e^x$. Puisque l'on cherche une solution $x\in\mathbb{R}_+$, on doit donc garder la solution X telle que $X\geq 1$, c'est à dire X_1. On en déduit que l'unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+$ de $\operatorname{ch}(x)=y$ est $x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. Ceci nous donne, puisque $\operatorname{ch}(x)=y \Leftrightarrow x=\operatorname{argch}(y)$ (si $x\in\mathbb{R}_+$ et $y\in[1,+\infty[$, on en déduit que $\operatorname{argch}(y)=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. En dérivant (sur $]1,+\infty[$ pour que la fonction soit dérivable, il faut enlever 1 car $u\mapsto\sqrt{u}$ n'est pas dérivable en 0 (et en $y=1$, $y^2-1=0$). On a donc pour $y\in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}'(y) &= \left(1+\frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}\right)\times\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\\
&= \frac{y+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{y^2-1}}\times\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.
\end{aligned}$$

Partie II. Tangente hyperbolique

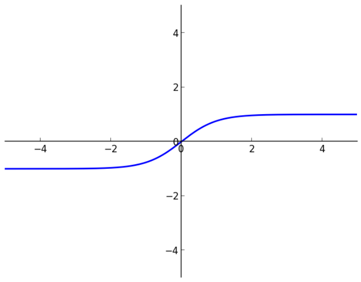
6) Puisque ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, th est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x) \times \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \times \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.\end{aligned}$$

Ceci entraine que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.\end{aligned}$$

Ceci entraine que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. On remarque également que th est impaire, ce qui entraine que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$. On en déduit alors le graphe de th :

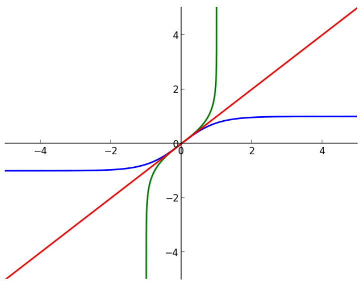


7) La fonction th est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. On en déduit d'après le théorème de la bijection que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

8) argth est la réciproque d'une fonction continue et est donc continue. C'est également la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et elle est donc dérivable sur $]-1, 1[$.

9) On avait pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.

10) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f(x) = \mathrm{th}(x) - x$. On a alors f dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\mathrm{th}^2(x) \leq 0$. Ceci entraine que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que f est négative sur $\mathbb{R}_+$, ce qui nous donne l'égalité voulue. On en déduit alors le tracé suivant de argth :



11) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(x)) = x$ (par définition de la fonction réciproque). On a montré que th et argth étaient dérivables et on a donc :

$$\text{argth}'(x) \times \text{th}'(\text{argth}(x)) = 1.$$

Or, on a $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$. On en déduit que $\text{th}'(\text{argth}(x)) = 1 - x^2$. On en déduit que :

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,, \ \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

12) Pour $x \in \,]-1, 1[$, on a en mettant au même dénominateur :

$$\frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a+b+(b-a)x}{1-x^2}.$$

Pour déterminer a et b, on doit donc résoudre le système $\begin{cases} a+b=1 \\ b-a=0 \end{cases}$. On trouve comme solution $a = b = 1/2$. On en déduit que pour tout $x \in \,]-1, 1[$, on a :

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right).$$

Puisque $\text{argth}(0) = 0$, on a pour tout $x \in \,]-1, 1[$, $\text{argth}(x) = \displaystyle\int_0^x \text{argth}'(t)dt$. On en déduit alors que pour $x \in \,]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \text{argth}(x) &= \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} (\ln(1+t) - \ln(1-t)) \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) - 0 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

PROBLÈME
Une bijection explicite entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$

1) Puisque la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ est bijective, on a alors $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ qui est également bijective. On a donc bien $\mathbb{Z}$ dénombrable. *Pour montrer qu'un ensemble est dénombrable, il suffit donc de contruire une fonction bijective entre cet ensemble et $\mathbb{N}$, le « sens » n'est pas important car avec la fonction réciproque on peut aller dans l'autre sens.*

2) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\varphi(n) \in \mathbb{Q}_+^*$ ». On va procéder par récurrence **forte**.

- La propriété est vraie au rang 1. En effet, on a $\varphi(1) = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Considérons alors $\varphi(n+1)$. On a deux cas possibles :
  Si $n+1$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k$. On a alors $\varphi(n+1) = \varphi(k) + 1$. Puisque $\varphi(k) \in Q_+^*$ d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\varphi(n+1) \in \mathbb{Q}_+^*$.
  Si $n+1$ est impair, alors on a $\varphi(n+1) = \dfrac{1}{\varphi(n)}$ par définition de φ et puisque $\varphi(n) \in \mathbb{Q}_+^*$, on en déduit que $\varphi(n+1) \in \mathbb{Q}_+^*$.

  Dans tous les cas, on a montré que $\varphi(n+1) \in \mathbb{Q}_+^*$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang. On en déduit que φ est bien à valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$.

3) *Premiers résultats.*

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\varphi(2k) = 1 + \varphi(k)$. Puisque $\varphi(k) \in \mathbb{Q}_+^*$ d'après la question précédente, on en déduit que $\varphi(2k) > 1$. De plus, on a si $k = 1$, $\varphi(2k-1) = \varphi(1) = 1 \leq 1$ et si $k > 1$, $\varphi(2k-1) = \dfrac{1}{\varphi(2k-2)}$. Puisque $2k-2$ est pair et strictement positif (car $k > 1$), d'après ce que l'on vient de montrer, on a $\varphi(2k-2) > 1$. On en déduit que $\varphi(2k-1) < 1$.

On a donc montré un résultat un tout petit plus fort que l'énoncé, c'est à dire que pour tous les n impairs strictement plus grands que 1, $\varphi(n) < 1$ et que $\varphi(1) = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que 2^{n+1} étant pair, on a $\varphi(2^{n+1}) = \varphi(2^n) + 1$. Ceci entraine que la suite $(\varphi(2^n))_{n \to \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $\varphi(2^0) = \varphi(1) = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(2^n) = n + 1$. *On peut aussi montrer ceci par récurrence.*

4)

a) Après calculs, on obtient : $\varphi(1) = 1$. $\varphi(2) = \varphi(1) + 1 = 2$. $\varphi(3) = \dfrac{1}{\varphi(2)} = \dfrac{1}{2}$. $\varphi(4) = 3$. $\varphi(5) = \dfrac{1}{3}$. $\varphi(6) = \varphi(3) + 1 = \dfrac{3}{2}$. $\varphi(7) = \dfrac{2}{3}$. $\varphi(8) = 4$.

b) $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 4$. On suppose que $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2k)$ sont distincts deux à deux. Remarquons tout d'abord que $2k+1$ étant impair, on a $\varphi(2k+1) \leq 1$ d'après la question 1.b. Ceci entraine, $\varphi(n)$ étant strictement plus grand que 1 pour tout n pair que $\varphi(2k+1)$ est automatiquement distint de $\varphi(2), \varphi(4), \dots, \varphi(2k), \varphi(2k+2)$. Il reste à montrer qu'il est distinct de tous les impairs précédents. Remarquons que d'après la remarque du 1.b, il est déjà différent de $\varphi(1) = 1$.

Supposons donc par l'absurde qu'il existe $j \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $\varphi(2j+1) = \varphi(2k+1)$. On en déduit alors par définition de φ que $\dfrac{1}{\varphi(2j)} = \dfrac{1}{\varphi(2k)}$, ce qui revient à $\varphi(2j) = \varphi(2k)$. Ceci est absurde car on a supposé que tous les $\varphi(n)$ pour $n \in [\![1, 2k]\!]$ étaient distincts deux à deux !

Il reste à montrer que $\varphi(2k+2)$ est distincts de tous les termes précédents. Par le même argument que ci-dessus, cette valeur est différente de tous les $\varphi(n)$ précédents avec n impair. Supposons par l'absurde qu'il existe $j \in [\![1, k]\!]$ tel que $\varphi(2j) = \varphi(2k+2)$. On a alors $\varphi(j) + 1 = \varphi(k+1) + 1$, soit $\varphi(j) = \varphi(k+1)$. Puisque $j \leq 2k$ et que $k+1 \leq 2k$ (car $k \geq 1$), on en déduit que ceci est absurde d'après ce qui a été supposé (les $\varphi(n)$ sont tous distincts deux à deux pour $n \in [\![1, 2k]\!]$).

On en déduit que les $\varphi(1), \dots, \varphi(2k+1), \varphi(2k+2)$ sont tous distincts deux à deux.

c) On a montré dans le a) l'initialisation et dans le b) l'étape d'hérédité. On a donc démontré par récurrence que les $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont distincts deux à deux. Ceci démontre l'injectivité de la fonction φ.

5)

a) On a montré à la question 2.a que $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$ admettent tous les trois un antécédent par φ (respectivement 3, 5 et 7). Ceci entraine que P_3 est vraie.

b) Si $a = 1$, on cherche à construire un antécédent de $\dfrac{1}{q+1}$. Pour cela, puisque $\varphi(2^q) = q + 1$, on remarque que $\varphi(2^q + 1) = \dfrac{1}{q+1}$ ce qui nous permet de trouver un antécédent.

c) Si $a = \dfrac{q+1}{2}$, on a alors $2 = \dfrac{q+1}{a}$ ce qui entraine que a divise $q+1$. C'est absurde car on a supposé a et $q+1$ premiers entre eux sauf si $a = 1$. Ceci n'est pas possible car on aurait alors $q + 1 = 2$ donc $q = 1$ alors que $q \geq 3$.

d) On suppose que $a > \dfrac{q+1}{2}$.

i) Supposons par l'absurde que a et $q+1-a$ ne soient pas premiers entre eux. Il existe alors $b \in \mathbb{N}^*$, $b \neq 1$ tel que b divise a et b divise $q+1-a$. On en déduit que b divise $q+1-a+a = q+1$. On a alors b qui divise a et $q+1$ et a et $q+1$ ne sont donc plus premiers entre eux : c'est absurde ! On en déduit que a et $q+1-a$ sont premiers entre eux.

De plus, puisque $a > \dfrac{q+1}{2}$, on a $2a > q+1$, soit $a > q+1-a$. On a également bien $q+1-a > 0$ puisque $a \in [\![1, q]\!]$.

ii) Puisque d'après la question précédente, a et $q+1-a$ sont premiers entre eux, et que $a \in [\![1, q]\!]$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour affirmer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(k) = \dfrac{q+1-a}{a}$.

iii) D'après la question précédente, on a $\varphi(k) = \dfrac{q+1}{a} - 1$, donc $\varphi(k) + 1 = \dfrac{q+1}{a}$. Ceci entraine que :

$$\varphi(2k) = \frac{q+1}{a}.$$

Ceci entraine finalement que $\varphi(2k+1) = \dfrac{1}{\varphi(2k)} = \dfrac{a}{q+1}$. On a donc $m = 2k+1$ qui convient.

e)

i) On a $\dfrac{q+1}{a} > 2$. On en déduit que le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{q+1}{a}$ est supérieur ou égal à 2 ce qui implique que $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $a > 1$, alors puisque a et $q+1$ sont premiers entre eux, on a a qui ne divise pas $q+1$ et donc $\dfrac{q+1}{a}$ ne peut pas être entier. On en déduit que :

$$n < \frac{q+1}{a} < n+1 \Leftrightarrow an < q+1 < an+a \Leftrightarrow 0 < q - na + 1 < a.$$

ii) De même qu'au c)i), on a a et $q+1-na$ premiers entre eux (on effectue exactement la même preuve). En raisonnant comme au c)ii), on a $\dfrac{q+1-na}{a}$ qui est dans $]0,1[$ avec le numérateur premier avec a et $a \in [\![1, q]\!]$, ce qui entraine d'après l'hypothèse de récurrence, qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(k) = \dfrac{q+1-na}{a}$.

On procède alors comme dans le c)iii). On a alors $\varphi(k) = \dfrac{q+1}{a} - n$, soit $\varphi(k) + n = \dfrac{q+1}{a}$. On en déduit alors par propriété de φ (on peut montrer ceci par récurrence, de la même manière qu'au 3.b) que :

$$\varphi(2^n k) = \frac{q+1}{a}.$$

On en déduit alors que $\varphi(2^n k + 1) = \dfrac{1}{\varphi(2^n k)} = \dfrac{a}{q+1}$. On a donc construit un antécédent de $\dfrac{a}{q+1}$ par φ.

f) Par récurrence, on vient de démontrer que tous les rationnels dans $]0,1[$ admettaient un antécédent par φ (on a fait l'initialisation en a) et l'hérédité dans les questions b), c) et d) par disjonction de cas : on a montré la propriété au rang $q+1$). Ceci entraine que la propriété est vraie pour tout q, ce qui entraine bien que tous les rationnels de $]0,1[$ ont un antécédent par φ.

6) On a montré à la question 4 que φ est injective. Il reste à prouver la surjectivité. Fixons donc $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Si x est dans $]0,1[$, il a un antécédent par φ d'après ce que l'on vient de démontrer. Si x est entier strictement positif, d'après la question 3.b), il a un antécédent par φ (puisque $\varphi(2^{x-1}) = x$). Si à présent x n'est pas entier et $x > 1$, alors, on peut écrire x sous la forme $x = n + y$ avec n entier

et $y \in]0,1[$ et y rationnel. y admet un antécédent par φ d'après ce que l'on vient de démontrer donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$x = n + y = n + \varphi(k).$$

On en déduit alors (toujours de la même manière qu'au 3.b) que $x = \varphi(2^n k)$. On a donc construit un antécédent de x par φ. En conclusion, φ est surjective (de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$) !

7) φ étant injective (question 2) et surjective (question 3), elle est bijective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$. On peut alors construire l'application :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ n & \mapsto & \varphi(n) \text{ si } n > 0 \\ 0 & \mapsto & 0 \\ n & \mapsto & -\varphi(-n) \text{ si } n < 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est alors bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ (elle envoit les entiers positifs sur les rationnels positifs, les entiers négatifs sur les rationnels négatifs et 0 sur 0). On a donc bien ψ bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$.

8) On a f^{-1} bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Ceci entraine par composition de fonctions bijectives que $\varphi \circ f^{-1}$ est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Puisque l'on a construit une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, alors $\mathbb{Q}$ est dénombrable !