26. Groupe symétrique, méthodologie

I. Définition

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Ces bijections sont appelées les permutations de $[\![1, n]\!]$.

Proposition. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n, \circ)$ est un groupe fini (non commutatif pour $n \geq 3$) appelé le groupe symétrique. On a $\mathrm{Card}(S_n) = n!$.

m Si $\sigma \in S_n$ est une permutation, on la représente en général ainsi :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On a donc sur la deuxième ligne les images des éléments des éléments de la première ligne, la première ligne étant ordonnée pour que le tout soit plus lisible. σ étant bijective, tous les éléments de $[\![1, n]\!]$ apparaissent tous exactement une fois dans la deuxième ligne.

m Pour déterminer σ^{-1} (la fonction réciproque de σ), il suffit de lire le tableau précédent à l'envers, σ^{-1} envoyant les éléments de la deuxième ligne sur les éléments de la première.

Exercice d'application 1. Représenter les permutations suivantes et leurs réciproques :

1) $\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, 7]\!] & \to & [\![1, 7]\!] \\ n & \mapsto & 8 - n \end{array} \right.$.

2) $\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, 8]\!] & \to & [\![1, 8]\!] \\ n & \mapsto & 2n \ [9] \end{array} \right.$. *On rappelle que $2n$ $[9]$ est $2n$ modulo 9.*

3) $\sigma : [\![1, 2n]\!] \to [\![1, 2n]\!]$ telle que $\sigma(k) = k + 1$ si k est impair et $\sigma(k) = k - 1$ si k est pair.

II. Cycles

Définition. Soit $\sigma \in S_n$ et $p \geq 2$. On dit que σ est un p-cycle (ou un cycle de longueur p) si il existe $x_1, x_2, \dots, x_p \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(x_1) = x_2, \ \sigma(x_2) = x_3, \ \dots, \ \sigma(x_{p-1}) = x_p, \ \sigma(x_p) = x_1 \\ \text{et } \forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{x_1, \dots, x_p\}, \ \sigma(k) = k \end{array} \right.$$

m En reprenant les notations de la définition d'un cycle, on note $\sigma = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_p)$. Cette notation se lit ainsi : chaque élément du tableau est envoyé sur le suivant et x_p qui est « au bout » du tableau est envoyé sur le premier (ici x_1). Cette notation permet de représenter le cycle de manière plus concise puisque tous les autres éléments de $[\![1, n]\!]$ n'y sont pas représentés (car ils sont fixes par σ). Cette notation n'est cependant pas unique puisque l'on peut « commencer » le cycle par l'élément que l'on veut.

Exercice d'application 2. Écrire la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sous forme d'un cycle. De combien de façons différentes peut-on l'écrire sous forme d'un cycle ?

Définition. Un cycle de longueur 2 est appelé une transposition. On note $\tau_{i,j} = (i\ j)$ la transposition qui échange i et j.

(m) Si $c_1 = (x_1\ x_2\ \dots\ x_p)$ et $c_2 = (y_1\ y_2\ \dots\ y_q)$ sont deux cycles de S_n, on peut alors calculer la permutation $c_1 \circ c_2$ (ou la permutation $c_2 \circ c_1$). Pour la représenter, on procède comme dans le I et pour cela, on calcule la valeur de $(c_1 \circ c_2)(k) = c_1(c_2(k))$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On regarde donc tout d'abord dans le cycle c_2 sur quel élément s'envoie l'élément k (s'il n'apparait pas, il s'envoie sur lui-même) et on regarde ensuite dans le cycle c_1 sur quel élément s'envoie l'élément sur lequel k a été envoyé.

Exercice d'application 3. Soit $n \geq 3$. Écrire $(1\ 2) \circ (2\ 3)$ et vérifier qu'il s'agit d'un cycle de S_n de longueur 3. Procéder de même avec $(2\ 3) \circ (1\ 2)$.

Exercice d'application 4. Écrire la permutation de S_8, $\sigma = (3\ 2\ 4\ 6) \circ (8\ 4\ 1\ 5) \circ (2\ 6\ 1) \circ (3\ 8)$.

III. Décomposition d'une permutation

III.1. En produit de cycles à supports disjoints

Définition. Soit $\sigma \in S_n$ une permutation et $k \in [\![1, n]\!]$. On dit que k est fixe (ou invariant) par σ si $\sigma(k) = k$. Le support de σ est l'ensemble des éléments de $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas des points fixes de σ.

Proposition. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ deux permutations à supports disjoints. Alors, $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Théorème. Toute permutation de S_n se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de cycles à supports disjoints.

(m) Pour déterminer cette décomposition à partir de l'écriture vue dans la première partie d'une permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, on commence par regarder où s'envoie 1, puis où s'envoie l'image de 1, puis où s'envoie l'image de l'image de 1, etc. , jusqu'à ce qu'on retombe sur 1. Cela constitue ainsi notre premier cycle et on ferme la parenthèse : $(1\ \sigma(1)\ \sigma(\sigma(1))\ \dots\ \sigma^p(1))$. On regarde ensuite le premier élément de $[\![1, n]\!]$ non utilisé et on commence un nouveau cycle que l'on termine quand on retombe sur l'élément de départ. On s'arrête quand on a utilisé tous les éléments de $[\![1, n]\!]$.

Exercice d'application 5. Déterminer la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de :

1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 10 & 8 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

III.2. En produit de transpositions

Proposition. Soit $\sigma = (x_1\ x_2\ \dots\ x_p)$ un p-cycle de S_n. Alors $\sigma = (x_1\ x_2) \circ (x_2\ x_3) \circ \dots \circ (x_{p-1}\ x_p)$.

Théorème. Toute permutation de S_n se décompose en produit de transpositions.

(m) Pour déterminer une telle décomposition (il n'y a pas unicité de la décomposition), on commence en général par décomposer la permutation en produit de cycles à supports disjoints et on décompose ensuite chacun des cycles en produit de transpositions.

Exercice d'application 6. Déterminer une décomposition en produit de transpositions de :

1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 10 & 8 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

IV. Signature

Théorème. La signature est l'unique morphisme de groupe $\varepsilon : (S_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ telle que $\forall \tau$ transposition de S_n, $\varepsilon(\tau) = -1$. On a donc en particulier :

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n,\ \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2).$$

Proposition. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ un p-cycle de S_n. Alors, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$.

(m) Pour déterminer la signature d'une permutation σ, on la décompose en produit de cycles à supports disjoints. On calcule alors la signature de chacun des cycles et on effectue le produit pour avoir la signature de σ. On peut également décomposer σ en produit de transpositions et compter la parité du nombre de transpositions.

Exercice d'application 7. Déterminer la signature de :

1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 10 & 8 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition. Soit $\sigma \in S_n$. On dit que σ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et qu'elle est impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Proposition. Soit $\sigma \in S_n$. Alors, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice d'application 8. On pose $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in S_n \ /\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$. Montrer que $(\mathcal{A}_n, \circ)$ est un groupe. *On l'appelle le groupe alterné.*

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma^{-1} = \sigma$.

2) On a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

3) On a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2k-1 & 2k & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2k & 2k-1 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$ et $\sigma^{-1} = \sigma$.

Exercice d'application 2. On a $\sigma = (1\ 3\ 4\ 6\ 5)$. Puisque l'on peut commencer par l'élément que l'on veut, on a 5 manières différentes de l'écrire :

$$(1\ 3\ 4\ 6\ 5) = (3\ 4\ 6\ 5\ 1) = (4\ 6\ 5\ 1\ 3) = (6\ 5\ 1\ 3\ 4) = (5\ 1\ 3\ 4\ 6).$$

Exercice d'application 3. On a $(1\ 2) \circ (2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ (car 1 est fixe par la première transposition et la seconde l'envoie sur 2, 2 est envoyé sur 3 par la première transposition et est laissé fixe par la seconde et enfin 3 est envoyé sur 2 par la première transposition qui est ensuite envoyé sur 1. Tous les autres éléments sont fixes par les deux transpositions et restent donc fixes). De la même façon, on a :

$$(2\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 3\ 2).$$

Exercice d'application 4. On a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Par exemple, pour calculer l'image de 3, on voit que la première transposition l'envoie sur 8. 8 est ensuite laissé fixe puis il est envoyé sur 4 (par $(8\ 4\ 1\ 5)$). Enfin, 4 est envoyé sur 6 ce qui permet d'affirmer que $\sigma(3) = 6$.

Exercice d'application 5.

1) On a $\sigma_1 = (1\ 6) \circ (2\ 7\ 5) \circ (3\ 4)$. *Par exemple, 2 s'envoie sur 7 qui s'envoie sur 5 qui s'envoie sur 2 donc cela donne bien le cycle* $(2\ 7\ 5)$.

2) On a $\sigma_2 = (1\ 2\ 5) \circ (3\ 7\ 8\ 4\ 6\ 10)$. *Ici 9 s'envoie sur lui même donc on ne le met pas dans la décomposition.*

Exercice d'application 6. On reprend l'exercice précédent.

1) On en déduit que $\sigma_1 = (1\ 6) \circ (2\ 7) \circ (7\ 5) \circ (3\ 4)$.

2) De même, $\sigma_2 = (1\ 2) \circ (2\ 5) \circ (3\ 7) \circ (7\ 8) \circ (8\ 4) \circ (4\ 6) \circ (6\ 10)$.

Exercice d'application 7. Avec les deux exercices précédents :

1) σ_1 se décompose en produit de 4 transpositions donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$. Avec la décomposition en cycles à supports disjoints, on a aussi $\varepsilon(\sigma) = (-1) \times (-1)^2 \times (-1) = 1$.

2) De même, σ_2 se décompose en produit de 7 transpositions donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^7 = -1$. Avec sa décomposition en cycles à supports disjoints, on a aussi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 \times (-1)^5 = -1$.

Exercice d'application 8. On a $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]} \in \mathcal{A}_n$ car $\varepsilon(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}) = (-1)^0 = 1$. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}_n$, alors :

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) = 1 \times 1 = 1$$

donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathcal{A}_n$. Enfin, si $\sigma \in \mathcal{A}_n$, alors σ est inversible et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = (\varepsilon(\sigma))^{-1} = 1$ d'où $\sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$. Ceci entraine $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de S_n (il n'est pas utile de remontrer l'associativité de $\circ$ puisqu'elle est associative sur S_n et donc sur $\mathcal{A}_n$ car $\mathcal{A}_n \subset S_n$).