31. Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1. (c) Montrer que $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. (c) Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi(f,g)=f(0)g(0)+\displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3. (i) Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n$ des réels positifs. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_kc_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2c_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2c_k}.$$

Exercice 4. (i) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt\times\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 5. (m) Soient $x,y\in E$. Montrer que $x\perp y \Leftrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\ ||x+\lambda y||\geq ||x||$.

Exercice 6. (m) Soit E un espace euclidien et $f\in L(E)$ tel que $\forall x,y\in E$, $\langle f(x),y\rangle = \langle x,f(y)\rangle$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f)=\ker(f)^\perp$.
2) Montrer que si $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $\mathrm{Mat}_e(f)$ est symétrique.

Exercice 7. (m) Soient $(e_1,\dots,e_n)$ des vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E. On suppose que pour tout x de E, $||x||^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle^2$.

1) Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthonormée.
2) Montrer que $(e_1,\dots e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8. (m) Soit E un espace euclidien de dimension n et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\forall i\neq j,\ ||x_i-x_j||=1$. Déterminer $\langle x_i,x_j\rangle$ puis montrer que $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E.

Exercice 9. (c) Déterminer la matrice dans la base canonique des projections orthogonales de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces vectoriels suivants :

1) La droite $D: 2x=y=z$ et la droite $D': x-y=y-z=x+z$.
2) Le plan $P: 2x+y+z=0$ et le plan $P': x-y+z=0$.

Exercice 10. (c) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan $P: ax+by+cz=0$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$ vérifient $a^2+b^2+c^2=1$.

Exercice 11. (∗) Soient E un espace euclidien et p un endomorphisme de E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $p\circ p=p$ et $\forall x\in E,\ ||p(x)||\leq||x||$.

Exercice 12. (c) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt les familles suivantes :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. (m) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. En déduire $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - (a+bx))^2 dx$.

Exercice 14. (m)/ (i) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $\langle P, Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$ pour $P, Q \in E$.

1) Montrer que E est un espace euclidien.

2) Déterminer la bon obtenue à partir de la base canonique de E par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 15. (m) **Polynômes de Legendre.** On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

1) Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur E.

2) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $L_k = \left(\dfrac{(X^2-1)^{2k}}{2^k k!}\right)^{(k)}$. Justifier que $\deg(L_k) = k$, déterminer $\mathrm{dom}(L_k)$ et que la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est orthonormée. *On pourra effectuer des IPPs.*

3) Justifier sans calculer d'intégrale que $\langle L_k, X^k\rangle > 0$ et en déduire que $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(1, X, \dots, X^n)$.

Exercice 16. (m) On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. *On pourra remontrer, si ce n'est pas clair, qu'il s'agit d'un produit scalaire.*

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(R)$ sont des supplémentaires orthogonaux. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

2) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 17. (i) **Déterminants de Gram.** On considère une famille $(x_1, \dots, x_p)$ d'un espace euclidien E. On pose alors $A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p}$ et $G(x_1, \dots, x_p) = \det(A)$.

1) Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p)$ libre.

2) On considère x orthogonal à tous les x_i. Exprimer $G(x_1, \dots, x_p, x)$ en fonction de $G(x_1, \dots, x_p)$.

3) On prend $(x_1, \dots, x_p)$ libre. Calculer la distance de x à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ en fonction des déterminants G.

Exercice 18. (m) Déterminer la distance du point $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ à la droite D d'équation $\left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right.$.

Exercice 19. (m) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit situé à une distance égale à 1 du plan d'équation $\alpha x + 2y + z + 1 = 0$.