Devoir Surveillé 4, corrigé

PROBLÈME
Étude de plusieurs ensembles denses.

Partie I. Ensemble stable par moyenne.

1) $\mathbb{Q}$ vérifie cette propriété. En effet, il est bien non minoré et non majoré et si $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, alors on peut les écrire sous la forme $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ et $x_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ avec $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$, et on a alors :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p_1 q_2 + q_2 p_1}{2q_1 q_2} \in \mathbb{Q}.$$

$\mathbb{Q}$ est donc bien stable par moyenne.

2) Par hypothèse, X n'est pas bornée. En particulier, a ni minore pas X et b ne majore pas X. Il existe donc tel que $u \in X$ tel que $u < a$ et il existe $v \in X$ tel que $b < v$.

3) Il suffit de résoudre le système $\begin{cases} f(u) = 0 \\ f(1) = v \end{cases}$. On trouve comme système $\begin{cases} cu + d = 0 \\ cv + d = 1 \end{cases}$.

En effectuant la différence, on trouve $c = \dfrac{1}{v-u}$ (possible car $u \neq v$) puis $d = \dfrac{-u}{v-u}$. On trouve ainsi une unique solution ce qui donne finalement :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-u}{v-u} \end{cases}.$$

La fonction f est alors strictement croissante puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée égale à $\dfrac{1}{v-u} > 0$ (on peut aussi dire que c'est une fonction affine avec un coefficient directeur strictement positif).

4) Soient $y_1, y_2 \in X'$. Par définition de X', il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Puisque X vérifie la propriété $(*)$, on a $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \in X$. On en déduit alors, par définition de l'image directe, que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \in X'$. Or, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= c\frac{x_1 + x_2}{2} + d \\ &= \frac{1}{2}(cx_1 + d + cx_2 + d) \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\dfrac{y_1 + y_2}{2} \in X'$, ce qui implique que X' vérifie encore la propriété $(*)$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mathcal{P}(n)$: « $\left\{\dfrac{m}{2^n},\ m \in [\![0, \dots, 2^n]\!]\right\} \subset X'$ ». Nous allons montrer cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- La propriété est vraie au rang 0. En effet, on a $0 \in X'$ et $1 \in X'$ par construction car $u \in X$ donc $f(u) = 0 \in X'$ et $v \in X$ donc $f(v) = 1 \in X'$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $m \in [\![0, \dots, 2^{n+1}]\!]$. On va alors montrer que $\frac{m}{2^{n+1}} \in X'$ en séparant les cas m pair et m impair.

  — Supposons m pair. Il existe donc $j \in [\![0, 2^n]\!]$ tel que $m = 2j$. On a alors $\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{j}{2^n}$. Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on en déduit alors que $\frac{j}{2^n} \in X'$, ce qui implique que $\frac{m}{2^{n+1}} \in X'$.

  — Supposons m impair. Il existe donc $j \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ tel que $m = 2j + 1$. Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on en déduit que $\frac{j}{2^n}$ et $\frac{j+1}{2^n}$ appartiennent à X'. Puisque X' vérifie la propriété $(*)$, on en déduit que $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{j}{2^n} + \frac{j+1}{2^n}\right) \in X'$. Or, ce nombre vaut exactement $\frac{2j+1}{2^{n+1}} = \frac{m}{2^{n+1}}$. On en déduit donc que $\frac{m}{2^{n+1}} \in X'$.

  m étant pris quelconque dans $[\![0, 2^{n+1}]\!]$, on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- La propriété étant héréditaire et vraie au rang 0, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \frac{\lfloor 2^n \alpha \rfloor}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors, par définition de la partie entière, on a que :

$$2^n \alpha - 1 < \lfloor 2^n \alpha \rfloor \leq 2^n \alpha.$$

On en déduit que $-\frac{1}{2^n} < \frac{E(2^n \alpha)}{2^n} - \alpha \leq 0$, ce qui implique que :

$$\left| \frac{\lfloor 2^n \alpha \rfloor}{2^n} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\frac{1}{2^n} \to 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

7) Puisque f est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $u < a < b < v$, on en déduit que $f(u) < f(a) < f(b) < f(v)$, c'est à dire que $0 < f(a) < f(b) < 1$. Posons alors $\alpha = \frac{f(a) + f(b)}{2}$. On a alors également $0 < \alpha < 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha 2^n < 2^n$. On a donc $\lfloor \alpha 2^n \rfloor \in [\![0, 2^n]\!]$.

Considérons donc la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{\lfloor \alpha 2^n \rfloor}{2^n}$. D'après la question 5, tous les éléments de cette suite sont dans X' et d'après la question 6, cette suite converge vers α. Posons alors $\varepsilon = \frac{f(b) - f(a)}{2} > 0$. D'après la définition de la convergence, il existe un rang N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$. En particulier, en appliquant cette propriété en $n = N_0$, on trouve que :

$$|u_{N_0} - \alpha| < \varepsilon.$$

On en déduit que $-\varepsilon < u_{N_0} - \alpha < \varepsilon$, ce qui implique que $f(a) < u_{N_0} < f(b)$.

Or, $u_{N_0} \in X'$. On a donc construit un élément $x' = u_{N_0} \in X'$ tel que $f(a) < x' < f(b)$.

8) Puisque $x' \in X' = f(X)$, on en déduit qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) = x'$. Cet élément vérifie alors $f(a) < f(x) < f(b)$. Puisque f est strictement croissante, on en déduit que $a < x < b$.

On a montré qu'entre deux réels quelconques distincts, il existe toujours un élément $x \in X$ entre les deux. On a donc montré que X était dense dans $\mathbb{R}$.

Partie II. Ensemble dense dans $[0,1]$.

9) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$, ce qui entraine que $0 \leq \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < 1$. On a donc $X \subset [0,1]$ (on a même $X \subset [0,1[$ d'ailleurs).

X est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ minoré par 0 et majoré par 1 et non vide (il contient 0 par exemple quand $n = 0$) donc il admet une borne inférieure et une borne supérieure. Puisqu'il est minoré par 0 et qu'il contient 0, sa borne inférieure est en fait un minimum (et qui vaut donc 0). Pour la borne supérieure, on peut pour le moment juste dire qu'elle est inférieure ou égale à 1.

10)

a) On a $(b+k)^2 - (a+k)^2 = b^2 - a^2 + 2(b-a)k$. Puisque $b - a > 0$, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} (b+k)^2 - (a+k)^2 = +\infty.$$

En particulier, ceci entraine que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $(b+k)^2 - (a+k)^2 \geq M$. On en déduit en particulier qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(b+k)^2 - (a+k)^2 > 2$. L'écart entre ces deux réels étant strictement plus grand que 2, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ entre les deux et différent des deux réels (il suffit de prendre par exemple $n = \lfloor (b+k)^2 \rfloor - 1$). On a enfin $n \in \mathbb{N}$ puisque $0 \leq (a+k)^2$ et n est donc positif.

b) Puisque la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $0 < a + k$ et $0 < b + k$, on a alors $a + k < \sqrt{n} < b + k$. Puisque $a, b \in [0,1]$, on en déduit que :

$$k < \sqrt{n} < k + 1.$$

Puisque k est entier, on a alors $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$. En reprenant l'encadrement précédent, on en déduit que

$$a < \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < b.$$

11) On a $X \subset [0,1]$ et pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ tels que $a < b$, il existe un élément $x \in X$ tel que $a < x < b$. Ceci entraine que X est dense dans $[0,1]$.

On peut alors montrer que $\sup(X) = 1$. En effet, si on fixe $\varepsilon > 0$ et que l'on prend $a = 1 - \varepsilon$, on a alors d'après la question précédente qu'il existe un élément de $x \in X$ tel que $1 - \varepsilon < x$. Puisque 1 majore X, on reconnait la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure et on a donc bien $\sup(X) = 1$.

Partie III. Ensemble dense dans $[-1,1]$.

12) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Par quotient de limites usuelles, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

13) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^y \cos(t)dt = [\sin(t)]_x^y = \sin(y) - \sin(x)$. On en déduit que si $x \leq y$, par croissance de l'intégrale :

$$|\sin(y) - \sin(x)| = \left|\int_x^y \cos(t)dt\right| \leq \int_x^y |\cos(t)|dt \leq \int_x^y 1dt.$$

On a alors $|\sin(y) - \sin(x)| \leq y - x \leq |y - x|$. On procède de même si $y \leq x$ en inversant les bornes :

$$|\sin(y) - \sin(x)| = \left|-\int_y^x \cos(t)dt\right| \leq \int_y^x |\cos(t)|dt \leq \int_y^x 1dt.$$

On a alors $|\sin(y) - \sin(x)| \leq x - y \leq |y - x|$. Dans tous les cas, on a bien :

$$|\sin(y) - \sin(x)| \leq |y - x|.$$

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\pi(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{2}.$$

D'après la question précédente et le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

14) On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n^2} = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = (-1)^n$. On en déduit qu'en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = (2n)^2$ et $\psi(n) = (2n+1)^2$, on a bien deux fonctions strictement croissantes telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)} = -1.$$

15) On a puisque sin est bornée entre -1 et 1 que $X \subset [-1, 1]$. De plus, la question précédente prouve que -1 et 1 sont valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fixons $a, b \in [-1, 1]$ avec $a < b$. Posons alors $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Autrement dit, l'écart entre deux termes consécutifs de la suite est inférieur à ε à partir de ce rang.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\psi(n)} = -1$, alors il existe des rangs aussi grands que l'on veut de la suite (u_n) aussi près que l'on veut de -1 et de 1 (par exemple à ε près). On prend donc de tels rangs plus grand que N. La suite (u_n) va donc perpétuellement osciller entre -1 et 1 et l'écart entre deux termes consécutifs est inférieur à ε. On en déduit que la suite va nécessairement passer entre a et b car on a pris $\varepsilon < b - a$ (la suite ne peut pas passer de la gauche de a à la droite de b sans passer entre les deux car l'écart entre a et b est trop grand). On en déduit qu'il existe un rang n_0 tel que $a < u_{n_0} < b$.

Puisque a et b ont été pris quelconques dans $[-1, 1]$, on en déduit que X est dense dans $[-1, 1]$.

PROBLÈME

Algèbre : ensembles cristallins.

Partie I. Généralités

1)

a) $N(\mathcal{A}) = 1$ (seul 0 est dans $\mathcal{A} \cap \Delta$).

b) $N(\mathcal{A}) = 2$ (seuls 0 et 1 sont dans $\mathcal{A} \cap \Delta$).

c) $N(\mathcal{A}) = 1$ (seul 1 est dans $\mathcal{A} \cap \Delta$).

2)

a) On pose $\mathcal{A} = \{2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ les entiers pairs strictement plus grands que 1. Cet ensemble est bien cristallin car il est stable par produit (un produit de nombre pair est bien pair), stable par somme de carrés (un carré et une somme de nombres pairs est paire). Enfin, $\mathcal{A} \cap \Delta = \emptyset$ qui est bien fini. On a donc $N(\mathcal{A}) = 0$.

b) On prend $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ est stable par produit, par somme de carrés et $\mathbb{Z} \cap \Delta = \{-1, 0, 1\}$ donc $\mathbb{Z} \cap \Delta$ est fini. On a donc bien $\mathbb{Z}$ cristallin et $N(\mathbb{Z}) = 3$.

3) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble cristallin.

a) On procède par récurrence. Fixons $z \in \mathcal{A}$ (ceci fait l'initialisation). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $z^n \in \mathcal{A}$. On a alors $z \times z^n = z^{n+1} \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, on a donc bien que $\forall z \in \mathcal{A},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n \in \mathcal{A}$.

b) Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ contienne z tel que $|z| \in]0, 1[$. La suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (|z^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors strictement décroissante et tend vers 0 (comme suite géométrique). On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z^n \in \mathcal{A} \cap \Delta$. Or, tous les z^n sont ici deux à deux distincts (ils ont des modules différents) donc $\mathcal{A} \cap \Delta$ contient un nombre infini d'éléments : c'est absurde !

On en déduit que $\mathcal{A}$ ne possède pas d'éléments dont le module appartient à $]0, 1[$. Les éléments de $\mathcal{A}$ de module inférieur ou égal à 1 sont donc soit 0, soit de module 1.

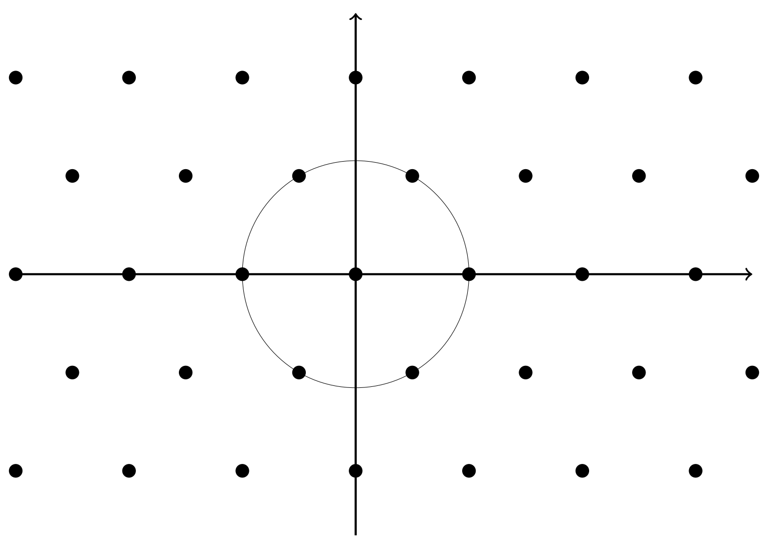
Partie II. Quatre exemples d'ensembles cristallins

4) *E est cristallin.*

a) On a $1 + j + j^2 = 0$ (somme des racines troisièmes de l'unité) :

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

b) Représentation de E dans le plan complexe :



c) Soient $z_1, z_2 \in E$. Alors, il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$. On a alors :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j.$$

Puisque $a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$, alors $z_1 + z_2 \in E$. De plus :

$$\begin{array}{rcl} z_1 z_2 & = & (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) \\ & = & a_1 a_2 + (b_1 a_2 + b_2 a_1)j + b_1 b_2 j^2 \\ & = & a_1 a_2 + (b_1 a_2 + b_2 a_1)j + b_1 b_2(-1 - j) \\ & = & a_1 a_2 - b_1 b_2 + (b_1 a_2 + b_2 a_1 - b_1 b_2)j. \end{array}$$

Puisqu'une somme/produit d'entiers est entier, on en déduit que $z_1 z_2 \in E$.

d) Soit $z \in E$. On a donc $z = a + bj$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} |a + bj|^2 & = & \left| a - \dfrac{b}{2} + \dfrac{b\sqrt{3}}{2} i \right|^2 \\ & = & \left(a - \dfrac{b}{2} \right)^2 + \dfrac{3b^2}{4}. \end{array}$$

On a donc $z \in \Delta \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{b}{2} \right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \leq 1$. Or, on a ici une somme de deux termes positifs (ce sont deux carrés) qui doit être inférieure ou égale à 1. En particulier, on doit avoir $\dfrac{3b^2}{4} \leq 1$, soit, puisque b est entier, que $b \in \{-1, 0, 1\}$. On teste alors suivant les valeurs de b :

- Si $b = 1$, on veut alors $\left(a - \dfrac{1}{2} \right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$, soit $a^2 - a \leq 0$. Or, on a $a^2 - a = a(a-1) \leq 0 \Leftrightarrow a \in [0, 1]$. Puisque a est entier, on en déduit que $a \in \{0, 1\}$. On trouve donc dans ce cas deux solutions : $z = j$ et $z = 1 + j = -j^2$.

- Si $b = -1$, le raisonnement est le même. On veut alors $\left(a + \dfrac{1}{2} \right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$, soit $a^2 + a \leq 0$. Or, on a $a^2 + a = a(a+1) \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-1, 0]$. Puisque a est entier, on en déduit que $a \in \{-1, 0\}$. On trouve donc dans ce cas deux solutions : $z = -j$ et $z = -1 - j = j^2$.

- Enfin, si $b = 0$, on veut $a^2 \leq 1$, soit $a \in \{-1, 0, 1\}$. On trouve donc trois solutions : $z = -1$, $z = 0$ et $z = 1$.

On a donc $E \cap \Delta = \{-1, 0, 1, j, j^2, -j, -j^2\}$.

e) Puisque E est stable par produit, si $z_1, z_2 \in E$, alors z_1^2 et z_2^2 sont dans E et puisque E est stable par somme, on a $z_1^2 + z_2^2 \in E$. Enfin, on a $E \cap \Delta$ qui est fini d'après la question précédente. On en déduit que E est cristallin et que $N(E) = 7$.

5)

a) On procède par double inclusion.

($\subset$) En reprenant les notations de la question 4, et le fait que $\overline{j} = j^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{z_1}{z_2} & = & \dfrac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} \\ & = & \dfrac{(a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j^2}{|a_2 + b_2 j|^2} \\ & = & \dfrac{a_1 a_2 + a_1 b_2 j^2 + a_2 b_1 j + b_1 b_2 j^3}{|a_2 + b_2 j|^2}. \end{array}$$

Puisque $j^3 = 1$ et $j^2 = -1 - j$, on en déduit par somme/produit d'entiers que le numérateur appartient à E. Or, le dénominateur vaut :

$$|a_2 + b_2 j|^2 = \left(a_2 - \frac{b_2}{2}\right)^2 + \frac{3b_2^2}{4} = a_2^2 - a_2 b_2 + b_2^2 \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit par quotient d'entiers que $\dfrac{z_1}{z_2} = \alpha + \beta j$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

($\supset$) Réciproquement, si $z = \alpha + \beta j$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, alors on a $z = \dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} j$ avec $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$z = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1 j}{q_1 q_2}.$$

On a alors toujours car un produit d'entier est entier que $p_1 q_2 + p_2 q_1 j \in E$ et que $q_1 q_2 \in \mathbb{N}^* \subset E^*$. On a donc bien l'inclusion réciproque.

b) Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha + \beta j = i$. On a alors :

$$\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} i = i.$$

On a alors en identifiant les parties imaginaires que $frac\beta\sqrt{3}2 = 1$. On a donc $\beta \neq 0$ et :

$$\sqrt{3} = \frac{2}{\beta} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde ! On a donc bien i qui n'est pas dans l'ensemble précédent.

c) Soient $z_1, z_2 \in E^*$. On sait que $z_1 z_2$ et $z_1^2 + z_2^2$ sont dans E (car E est cristallin). Montrons qu'ils sont non nuls.

Puisque z_1 et z_2 sont non nuls, alors $z_1 z_2$ aussi (produit de complexes non nuls) donc $z_1 z_2 \in E^*$. Supposons par l'absurde que $z_1^2 + z_2^2 = 0$. On a alors $z_1^2 = -z_2^2$, soit $z_1^2 = (iz_2)^2$. On en déduit que :

$$z_1 = \pm i z_2.$$

Ceci entraine que $i = \dfrac{z_1}{z_2}$ ou $i = \dfrac{-z_1}{z_2}$. Le premier point est absurde d'après la question précédente. Le second point également car $-z_1 \in E$ (car $-1 \in E$ et $z_1 \in E$ donc $(-1) \times z_1 \in E$) et donc $i \neq \dfrac{-z_1}{z_2}$. On a donc bien $z_1^2 + z_2^2 \in E^*$.

Enfin, on a $E^* \cap \Delta = (E \cap \Delta) \setminus \{0\}$ qui est fini et contient $7 - 1 = 6$ éléments d'après la question 4.

On a donc bien que E^* est cristallin avec $N(E^*) = 6$.

6)

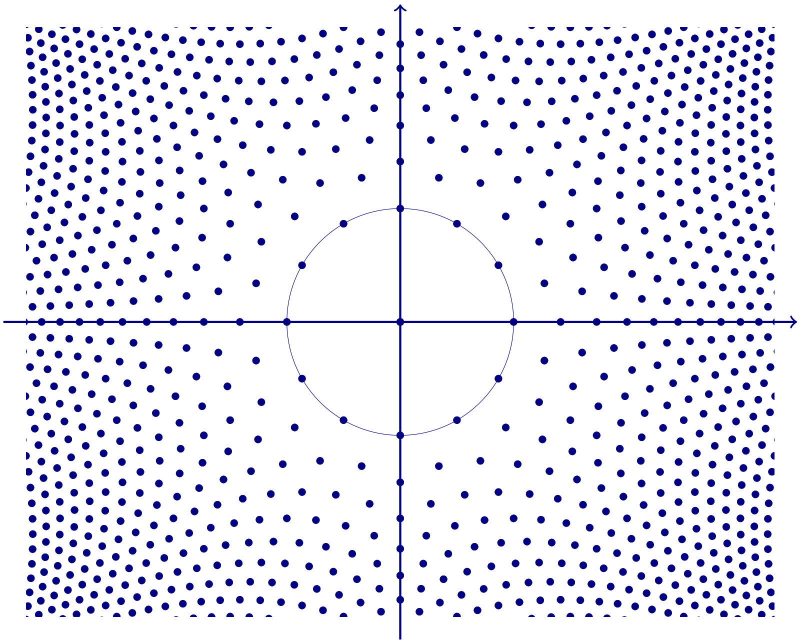
a) Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$. On a alors z_1^2 et z_2^2 dans E. On en déduit que $z_1^2 z_2^2 \in E$, ce qui entraine que $z_1 z_2 \in \mathcal{R}$ (car $(z_1 z_2)^2 \in E$).

Pour montrer que $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{R}$, il faut montrer que $(z_1^2 + z_2^2)^2 \in E$, ce qui revient à prouver que $z_1^4 + 2z_1^2 z_2^2 + z_2^4 \in E$. Or, E étant stable par somme et produit et contenant z_1^2 et z_2^2, on a bien le résultat voulu.

Enfin, $z \in \mathcal{R} \cap \Delta$ si et seulement si $z^2 \in E$ et $|z| \leq 1$. Or, on a $|z| \leq 1 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1^2$ (par stricte croissante de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) donc si et seulement si $|z^2| \leq 1$. On a donc 7 possibilités d'après la question 4 :

$$z^2 = 0,\ z^2 = 1,\ z^2 = -1,\ z^2 = j,\ z^2 = -j,\ z^2 = j^2 \text{ et } z^2 = -j^2.$$

Puisqu'un nombre complexe admet toujours deux racines carrés distinctes (opposées) sauf 0 qui en admet une seule, on en déduit que $\mathcal{R} \cap \Delta$ contient exactement 13 éléments. Cet ensemble est donc fini, ce qui permet d'affirmer que $\mathcal{R}$ est cristallin. Voici une représentation de $\mathcal{R}$ (non demandée) :



b) D'après la question précédente, $N(\mathcal{R}) = 13$.

7) On pose $E_2 = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Il est clair que E_2 est stable par somme et par produit (car $i^2 = -1 \in \mathbb{Z}$). En procédant comme à la question 4, on en déduit que si $z_1, z_2 \in E_2$, alors $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$.

Enfin, on a $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$ qui est inférieur à 1 si et seulement si $a = 0$ et $b \in \{-1, 0, 1\}$ ou si $a = 1$ et $b = 0$ ou si $a = -1$ et $b = 0$. On a donc $E_2 \cap \Delta$ qui est fini et qui contient 5 éléments $(0, 1, i, -1, -i)$.

On a donc bien E_2 cristallin et $N(E_2) = 5$.

On pose alors $\mathcal{R}_2 = \{zin\mathbb{C}\ /\ z^2 \in E_2\}$. De même qu'à la question précédente, on montre que $\mathcal{R}_2$ est cristallin et que $N(\mathcal{R}_2) = 9$ (on a une racine carrée de 0 et 2 racines carrées pour $1, i, -1$ et $-i$ donc 9 éléments en tout dans $\mathcal{R}_2 \cap \Delta$).

Partie III. Quelques propriétés des racines de l'unité

8) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$. On a alors :

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1$$

donc $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n$.

9) *Carrés des racines n-ièmes de l'unité.*

a) On suppose que n est pair. En notant $n = 2q$, on a :

$$\begin{aligned}
\{\omega^2,\ \omega\in\mathbb{U}_n\} &= \left\{\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\
&= \left\{e^{\frac{4ik\pi}{2q}},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\
&= \left\{e^{\frac{2ik\pi}{q}},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\
&= \mathbb{U}_q=\mathbb{U}_{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

b) On suppose que $n=2m+1$ est impair.

i) Posons $\omega=e^{\frac{2i\pi(m+1)}{2m+1}}\in\mathbb{U}_{2m+1}$ (car $m+1\in\mathbb{Z}$). On a donc :

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= e^{\frac{2i\pi(2m+2)}{2m+1}}\\
&= e^{\frac{2i\pi(2m+2)}{2m+1}}\\
&= e^{\frac{2i\pi(2m+1+1)}{2m+1}}\\
&= e^{2i\pi+\frac{2i\pi}{2m+1}}\\
&= e^{2i\pi}e^{\frac{2i\pi}{2m+1}}\\
&= e^{\frac{2i\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

ii) On procède par double inclusion. Si $z\in\{\omega^2,\ \omega\in\mathbb{U}_n\}$, alors il existe $\omega\in\mathbb{U}_n$ tel que $z=\omega^2$. On a alors :

$$z^n=\omega^{2n}=(\omega^n)^2=1^2=1$$

d'où $z\in\mathbb{U}_n$.

Réciproquement, si $z\in\mathbb{U}_n$, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}=\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$. En reprenant les notations de la question précédente, on a donc :

$$z=(\omega^2)^k=\omega^{2k}=(\omega^k)^2.$$

On a $\omega^k\in\mathbb{U}_n$ car $\mathbb{U}_n$ est stable par produit donc $z\in\{\omega^2,\ \omega\in\mathbb{U}_n\}$ ce qui prouve l'inclusion réciproque.

10)

a) En factorisant par l'arc moitié, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\left|1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| &= \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}}+e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right|\\
&= \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right|\times\left|2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\\
&= 2\left|\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|.
\end{aligned}$$

b) Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $\dfrac{k\pi}{n}\in[0,\pi]$. On a donc :

$$\left|1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|<1\Leftrightarrow\left|\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}<\frac{k\pi}{n}<\frac{2\pi}{3}.$$

En multipliant par $\dfrac{3n}{\pi}>0$ l'encadrement, on obtient bien la condition nécessaire et suffisante $n<3k<2n$. On a de plus que le seul zéro de cosinus sur $[0,\pi]$ est en $\dfrac{\pi}{2}$, soit si et seulement si $k=\dfrac{n}{2}$. On a donc bien la condition demandée.

c)

i) si n est impair tel que $n > 3$, on a $2n - n = n > 3$. L'écart entre n et $2n$ étant strictement plus grand que 3, il existe au moins un multiple de 3 entre les deux et donc un tel entier k existe et on a bien $k \neq \frac{n}{2}$ car n est impair et k est entier.

ii) si n est pair et $n > 6$, on a $2n - n = n > 6$ donc il existe au moins deux multiples de 3 entre n et $2n$, donc au moins un différent de $\frac{n}{2}$ (qui lui est entier) ce qui donne bien le résultat voulu.

Partie IV. Valeurs possibles de $N(\mathcal{A})$

11) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble cristallin. On a alors $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$ fini (car $\mathbb{U} \subset \Delta$). Si cet ensemble est vide, alors on a $N(\mathcal{A}) \in \{0, 1\}$ (selon si 0 est dans $\mathcal{A}$ ou pas). S'il est non vide, alors puisque $\mathcal{A}$ et $\mathbb{U}$ sont stables par produit, $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$ aussi et on peut utiliser le théorème admis. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_n$.

On a donc $1 \in \mathcal{A}$ et pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, $1^2 + \omega^2 = 1 + \omega^2 \in \mathcal{A}$. On a alors plusieurs cas :

- Si n est impair, alors ω^2 parcourt $\mathbb{U}_n$ (d'après la partie III.9.b). Puisque $\mathcal{A}$ est cristallin, il ne doit contenir aucun élément de module dans $]0, 1[$ d'après la partie I. D'après le III.10, on en déduit que $n \leq 3$. Ceci entraine que $N(\mathcal{A}) \leq 4$ (il y a au plus 4 éléments : les trois de $\mathbb{U}_3$ et 0).

- Si n est pair, alors ω^2 parcourt $\mathbb{U}_{n/2}$ (d'après la partie III.9.a). Puisque $\mathcal{A}$ est cristallin, il ne doit contenir aucun élément de module dans $]0, 1[$ d'après la partie I. D'après le III.10, dans le pire cas, $n/2 \leq 6$, soit $n \leq 12$. Ceci entraine que $N(\mathcal{A}) \leq 13$ (il y a au plus 13 éléments : les douze de $\mathbb{U}_{12}$ et 0).

On a donc bien $N(\mathcal{A}) \leq 13$.

12) D'après les résultats précédents, on a au moins comme possibilités $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13\}$. Montrons que toutes les autres possibilités inférieures à 13 sont absurdes. Si on veut un nombre d'éléments plus grand que 4, on doit avoir $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, si n est impair, alors $n = 1$ ou $n = 3$. Si $n = 1$, alors on a $N(\mathcal{A}) \in \{1, 2\}$ ce qui a déjà été construit. Supposons à présent que $n = 3$. On a alors $j \in \mathcal{A}$ et $j^2 \in \mathcal{A}$ donc $j^2 + j^4 = j^2 + j = -1$ qui est dans $\mathcal{A}$ ce qui contredit $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_3$!

On a donc $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_n$ avec n pair. Si $n = 2$ ou $n = 6$, alors $N(\mathcal{A}) \in \{2, 3, 6, 7\}$ ce qui a déjà été construit.

Si $n = 4$, alors puisque $i \in \mathbb{U}_4$, on a $1^2 + (i)^2 = 0 \in \mathcal{A}$ donc puisque $0 \in \mathcal{A}$, on a $N(\mathcal{A}) = 5$ (et le nombre 4 est impossible).

On procède de même si $n = 8$ et $n = 12$ (on montre que $i \in \mathcal{A}$ et donc $0 \in \mathcal{A}$ d'où $N(\mathcal{A})$ qui vaut 9 et 13 donc 8 et 12 sont impossibles.

Il ne reste plus que le cas où $n = 10$, c'est à dire le cas où $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_{10}$. Puisque $\mathbb{U}_5 \subset \mathbb{U}_{10}$, on a alors $\mathbb{U}_5 \subset \mathcal{A}$. D'après la partie III, on peut alors construire un élément de $\mathcal{A}$ de module dans $]0, 1[$ (on se ramène au cas n impair avec $n > 3$) : absurde !

Les seules possibilités pour un ensemble cristallin sont donc $N(\mathcal{A}) \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13\}$ et on a à chaque fois construit de tels ensembles !