Programme de colle, semaine 23

Espaces vectoriels + dimension finie :

— Nous avons terminé le chapitre sur les espaces vectoriels par l'étude des applications linéaires (image/noyau/théorème de construction des applications linéaires) et par l'étude des projections et des symétries.

— Nous avons ensuite commencé le chapitre de la dimension finie par des rappels sur les familles libres et génératrices : Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice et $x_n \in \text{Vect}((x_i)_{1\leq n-1})$, alors la famille sans le dernier vecteur est encore génératrice ; une famille est liée ssi un vecteur s'exprime comme combinaison linéaire des autres ; si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre et que $x \notin \text{Vect}((x_i)_{1\leq n})$, alors la famille $(x_1, \ldots, x_n, x)$ est encore libre.

— Nous avons ensuite admis qu'une famille libre avait toujours un cardinal inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice (lemme fondamental). Nous avons à partir de là défini un espace vectoriel de dimension finie comme un espace admettant une famille génératrice de cardinal finie. Nous avons montré l'existence de bases en dimension finie et que la dimension est alors le cardinal d'une base (nous avons vérifié qu'elles avaient toutes le même cardinal).

— Nous avons alors démontré le théorème de la base extraite et de la base incomplète. Nous avons montré que dans E de dimension n, une famille de cardinal n est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.

— Nous avons continué avec tous les résultats sur les calculs liés à la dimension. La dimension d'un sev F de E est inférieure ou égale à celle de E (égalité ssi $F = E$), l'existence d'un supplémentaire en dimension finie, la dimension de $E \times F$ est égale à la dimension de E plus celle de F, et la formule de Grassmann ($\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$).

— Nous avons ensuite vu les liens entre dimension et application linéaire. Nous avons montré qu'étant donné une base de E et une famille de même cardinal de F, il existait une unique application linéaire envoyant les e_i sur les f_i et montré que u était injective/surjective/bijective si la famille des (f_i) est libre/génératrice/une base. Nous avons revu qu'une application linéaire injective/surjective/bijective envoyait respectivement les familles libres/génératrices/bases sur des familles libres/génératrices/bases et avons utilisé ce résultat pour montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes ssi ils sont de même dimension.

— Nous avons continué le chapitre par la définition du rang (pour une famille de vecteurs et pour une application linéaire). Nous avons ensuite démontré le théorème du rang et nous en avons déduit que si $u \in L(E, F)$, alors le rang de u est inférieur ou égal au minimum de $\dim(E)$ et de $\dim(F)$ (et $\text{rg}(u) = \dim(E)$ ssi u est injective ainsi que $\text{rg}(u) = \dim(F)$ ssi u est surjective).

— Nous avons ensuite montré que si v est injective, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$ et que si u est surjective, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$. Ceci entraine en particulier que composer par un isomorphisme préserve le rang. Nous avons alors montré que si $u \in L(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors elle est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective et que si $u \in L(E)$ avec $\dim(E)$ finie, alors elle est inversible à gauche ssi elle est inversible à droite ssi elle est inversible.

— Nous avons terminé le chapitre par l'étude des hyperplans et des formes linéaires (en dimension finie et infinie).

Remarques sur le programme : le cours a été fini tout juste avant les vacances, nous avons fait quelques exercices sur la dim finie et nous en referons en TD le mardi de la rentrée.

Compétences :

- Savoir déterminer les espaces caractéristiques (sur lequel/par rapport et parallèlement auxquels on projette) d'une projection et d'une symétrie.
- Pour montrer que $F = G$, montrer une inclusion ($F \subset G$ par exemple) et l'égalité des dimensions plutôt que de montrer l'autre inclusion.
- Utiliser la formule de Grassmann ($\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$) pour déterminer la dimension de $F+G$ connaissant les autres. En particulier, utiliser cette formule pour montrer que deux espaces sont supplémentaires (vérifier que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ par exemple).
- Construire un supplémentaire dans E d'un espace vectoriel donné en complétant une base de cet espace vectoriel en une base de E.
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs en éliminant les vecteurs liés aux autres afin de se ramener à une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- Utiliser le théorème du rang pour relier les dimensions de l'image et du noyau d'une application linéaire.

Questions de cours :

1. Énoncer la caractérisation des bases en dimension finie (attendu : une famille libre OU génératrice avec autant de vecteurs que la dimension est une base), citer les théorèmes de la base extraite et de la base incomplète et compléter la famille $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en base de $\mathbb{R}^3$ (attendu : en complétant avec deux vecteurs de la base canonique et en vérifiant ensuite que la famille des trois vecteurs est libre).
2. Montrer que si E est de dimension finie, alors $F \oplus G = E$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
3. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs et montrer que $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_p) \leq p$ avec égalité ssi la famille est libre. Montrer également que si $e_1, \dots, e_p$ est une famille de vecteurs de E avec $\dim(E) = n$, alors $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_p) \leq n$ avec égalité ssi la famille est génératrice.
4. Énoncer (pas de preuve) le théorème de construction des applications linéaires (en dimension finie), la formule de Grassmann et le théorème du rang (on redonnera la définition du rang d'une application linéaire).
5. Si $u \in L(E, F)$ avec E et F de dimensions finies, montrer que u est injective ssi $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$ et qu'elle est surjective ssi $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$. En déduire que si $\dim(E) = \dim(F)$, alors u est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.
6. Énoncer (pas de preuve) la caractérisation des hyperplans (H est un hyperplan de E ssi $H = \ker(\varphi)$ où φ est une forme linéaire non nulle) et démontrer que si E est de dimension n et F un sev de E, alors F est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(F) = n - 1$.

Exercices à chercher pour le lundi de la rentrée (pour tout le monde) : TD23 : 11,14,16.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths. Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD23 : 11.
- 2ieme du groupe : TD23 : 14.
- 3ieme du groupe : TD23 : 16.

Prochain programme : début des matrices.

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions ! Bonnes vacances à tous !

Indications pour les exercices :

Exercice 11

- On remarquera que vu que ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, leur rang sera forcément inférieur à 3 ($\dim(\mathbb{R}^3)$).
- Pour trouver le rang, on étudie la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3) (donc en étudiant $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$).
- On résout ensuite avec la méthode du pivot.
- Si je n'ai pas fait d'erreur de calcul, vous devriez avoir que la famille est libre si et seulement si x n'est pas racine d'un certain polynôme de degré 2 dont les racines sont $\dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.
- Dans l'autre cas, vous devriez normalement trouver un rang de 2 (la famille est liée donc le rang est inférieur à 2, il suffit alors de trouver juste 2 vecteurs libres pour avoir une famille de rang au moins 2).

Exercice 14

- On démontrera que $\ker(h) = textrmIm(f) \cap \ker(g)$ (par double inclusion par exemple).
- On démontrera que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ (par double inclusion par exemple).
- Attention quand vous utilisez le théorème du rang, l'espace de départ de h n'est pas E mais bien $\mathrm{Im}(f)$!
- Trouvez un argument simple pour justifier $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)) \leq \dim(\ker(g))$.
- Il ne reste plus qu'à réutiliser le théorème du rang (appliqué cette fois à l'application linéaire g) pour finir !

Exercice 16

- Vous pouvez commencer par utiliser le théorème du rang appliqué à la fois à f et à f^2.
- Vous pouvez aussi commencer par montrer que l'on a toujours $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
- Avec ces deux points, vous devriez arriver à montrer sans difficulté que (1) et (2) sont équivalents.
- Il est ensuite plus simple de montrer que (1) et (3) sont équivalents en démontrant que $\ker(f) = \ker(f^2)$ si et seulement si $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et d'utiliser la caractérisation des supplémentaires en dimension finie.