Problème 1 : Calcul matriciel

Partie I

Q1) a) Soit $(M,N) \in G^2$. On écrit

$$\begin{aligned} {}^t(M\times N)\times L\times(M\times N) &= ({}^tN\times{}^tM)\times L\times(M\times N)\\ &= {}^tN\times({}^tM\times L\times M)\times N\\ &= {}^tN\times L\times N \quad (\text{car } M\in G)\\ &= L \quad (\text{car } L\in G) \end{aligned}$$

donc $\boxed{M\times N\in G}$.

b) Comme $L^2 = I_3$, on écrit

$${}^tM\times L\times M = L \quad\Rightarrow\quad = (L\times{}^tM\times L)\times M = I_3$$

donc $\boxed{M \text{ est inversible}}$ et $\boxed{M^{-1} = L\times{}^tM\times L}$.

Alors

$$\begin{aligned} {}^t(M^{-1})\times L\times(M^{-1}) &= {}^t(L\times{}^tM\times L)\times L\times(L\times{}^tM\times L)\\ &= {}^tL\times M\times{}^tL\times L\times L\times{}^tM\times L\\ &= L\times M\times L\times{}^tM\times L \quad (\text{car } {}^tL = L \text{ et } L^2 = I_3) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} M\times M^{-1} = I_3 \quad&\Rightarrow\quad M\times(L\times{}^tM\times L) = I_3\\ &\Rightarrow\quad (M\times L\times{}^tM\times L)\times L = L\\ &\Rightarrow\quad M\times L\times{}^tM = L \quad (\text{car } L^2 = I_3) \end{aligned}$$

d'où

$${}^t(M^{-1})\times L\times(M^{-1}) = L\times L\times L = L$$

donc $\boxed{M^{-1}\in G}$.

c) Les matrices de G étant inversibles, montrons que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$.

- $G \neq \varnothing$ car $I_3 \in G$ puisque ${}^tI_3\times L\times I_3 = L$ puisque ${}^tI_3 = I_3$.
- Soit $(M,N)\in G^2$. Alors $N^{-1}\in G$ d'après Q1b, puis $M\times N^{-1}\in G$ d'après d'après Q1a.

Q2) a) Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

En suivant l'indication, calculons

$$\begin{aligned} {}^tX\times M\times X &= \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ax+by+cz\\ dx+ey+fz\\ gx+hy+iz\end{pmatrix}\\ &= \big(x(ax+by+cz)+y(dx+ey+fz)+z(gx+hy+iz)\big)\\ &= \big(ax^2+ey^2+iz^2+(b+d)xy+(c+g)xz+(f+h)yz\big). \end{aligned}$$

Procédons alors par double implication.

– Sens direct : supposons que ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$, et donc $a = e = i = b+d = c+g = f+h = 0$ d'où

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{X} \times \mathrm{M} \times \mathrm{X} = \boxed{0_{\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})}}.$$

– Réciproque. Supposons

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{X} \times \mathrm{M} \times \mathrm{X} = 0_{\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})}$$

d'où

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ ax^2 + ey^2 + iz^2 + (b+d)xy + (c+g)xz + (f+h)yz = 0.$$

En prenant $x = 1$ et $y = z = 0$, on trouve $a = 0$.
En prenant $y = 1$ et $x = z = 0$, on trouve $e = 0$.
En prenant $z = 1$ et $x = y = 0$, on trouve $i = 0$.
En prenant $x = y = 1$ et $z = 0$, on trouve $d = -b$.
En prenant $x = z = 1$ et $y = 0$, on trouve $g = -c$.
En prenant $y = z = 1$ et $x = 0$, on trouve $h = -f$.
D'où $\boxed{{}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}}$.

b) En suivant l'indication

$${}^t\mathrm{X} \times \mathrm{L} \times \mathrm{X} = \left(x^2 + y^2 - z^2\right).$$

Procédons par double implication

– Sens direct : supposons que $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$, donc que ${}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} = \mathrm{L}$. Alors

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^t(\mathrm{M} \times \mathrm{X}) \times \mathrm{L} \times (\mathrm{M} \times \mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X} \times {}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} \times \mathrm{X} = {}^t\mathrm{X} \times \mathrm{L} \times \mathrm{X}$$

ce qui donne bien $\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2}$.

– Réciproque : supposons que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$. Alors pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&{}^t(\mathrm{M} \times \mathrm{X}) \times \mathrm{L} \times (\mathrm{M} \times \mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X} \times \mathrm{L} \times \mathrm{X} \\
&\Rightarrow {}^t\mathrm{X} \times {}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} \times \mathrm{X} = {}^t\mathrm{X} \times \mathrm{L} \times \mathrm{X} \\
&\Rightarrow {}^t\mathrm{X} \times ({}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} - \mathrm{L}) \times \mathrm{X} = 0_{\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})} \\
&\Rightarrow {}^t\mathrm{N} = -\mathrm{N}
\end{aligned}$$

d'après 2a en posant $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} - \mathrm{L}$.
Or ${}^t\mathrm{N} = \mathrm{N}$ car ${}^t\mathrm{L} = \mathrm{L}$, donc $\mathrm{N} = 0_{\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})}$, ie. ${}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} = \mathrm{L}$, et donc $\boxed{\mathrm{M} \in \mathrm{G}}$.

Q3) On a

– $\boxed{\mathscr{H} \neq \varnothing}$ car $\mathrm{I}_3 \in \mathscr{H}$ puisque $\mathrm{I}_3 \in \mathrm{G}$ et que tous ses coefficient sont entiers ;
– soient M, N dans $\mathscr{H}$. On sait déjà que $\mathrm{M} \times \mathrm{N}^{-1} \in \mathrm{G}$, reste à vérifier que $\mathrm{M} \times \mathrm{N}^{-1}$ a tous ses coefficients entiers. Or par hypothèse M et N ont leurs coefficients entiers, c'est aussi le cas de la matrice L, et on sait que $\mathrm{N}^{-1} = \mathrm{L} \times {}^t\mathrm{N} \times \mathrm{L}$ d'après Q1b, donc N^{-1} est à coefficients entiers, d'où $\mathrm{M} \times \mathrm{N}^{-1}$ aussi. Ainsi $\boxed{\mathrm{M} \times \mathrm{N}^{-1} \in \mathscr{H}}$.

Partie II

Q4) a) On écrit

$$\begin{aligned}
{}^t\mathrm{R}_k \times \mathrm{L} \times \mathrm{R}_k &= \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & -2k^2 \\ -2k & 1 & -2k \\ 2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & 2k^2 \\ -2k & 1 & 2k \\ 2k^2 & -2k & -(1+2k^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2k^2)^2 + 4k^2 - 4k^4 & -2k(1-2k^2) + 2k - 4k^3 & 2k^2(1-2k^2) - 4k^2 + 2k^2(1+2k^2) \\ -2k(1-2k^2) + 2k - 4k^2 & 4k^2 + 1 - 4k^2 & -4k^3 - 2k + 2k(1+2k^2) \\ 2k^2(1-2k^2) - 4k^2 + 2k^2(1+2k^2) & -4k^3 - 2k + 2k(1+2k^2)) & 4k^4 + 4k^2 - (1+2k^2)^2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{L}
\end{aligned}$$

donc $R_k \in G$. Comme d'autre part R_k est à coefficients entiers, on a bien $\boxed{R_k \in \mathscr{H}}$.

b) On trouve $\boxed{A \times B = B \times A = B^2 = 0_{\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})}}$ et $\boxed{A^2 = B}$.

c) On a clairement $R_k = I_3 + 2kA + 2k^2B$. Alors

$$\begin{aligned} R_{k_1} \times R_{k_2} &= (I_3 + 2k_1A + 2k_1^2B)(I_3 + 2k_2A + 2k_2^2B) \\ &= I_3 + 2k_2A + 2k_2^2B + 2k_1A + 4k_1k_2A^2 + 4k_1k_2^2A \times B + 2k_1^2B + 4k_1^2k_2B \times A + 4k_1^2k_2^2B^2 \\ &= I_3 + 2(k_1 + k_2)A + 2(k_1 + k_2)^2B \\ &= \boxed{R_{k_1+k_2}} \end{aligned}$$

On a alors $R_k \times R_{-k} = R_0 = I_3$ donc $\boxed{R_k^{-1} = R_{-k}}$.

Montrons que $(\mathscr{R}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{H}, \times)$.

– $\mathscr{R} \neq \varnothing$ car $I_3 = R_0 \in \mathscr{R}$.
– Soit $(R_{k_1}, R_{k_2}) \in \mathscr{R}^2$. Alors $R_{k_1} \times R_{k_2}^{-1} = R_{k_1-k_2} \in \mathscr{R}$.

d) On écrit

$$(R_k - I_3)^2 = (2kA + 2k^2B)(2kA + 2k^2B) = 4k^2A^2 + 4k^3A \times B + 4k^3B \times A + 4k^4B^2 = 4k^2B$$

puis

$$(R_k - I_3)^3 = (2kA + 2k^2B)(4k^2B) = 8k^3A \times B + 8k^4B^2 = \boxed{0_{\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})}}.$$

Les matrices I_3 et $R_k - I_3$ commutent donc d'après la formule du binôme

$$\begin{aligned} R_k^n &= ((R_k - I_3) + I_3) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (R_k - I_3)^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0}(R_k - I_3)^0 + \binom{n}{1}(R_k - I_3)^1 + \binom{n}{2}(R_k - I_3)^2 \\ &= I_3 + n(R_k - I_3) + \frac{n(n-1)}{2}(R_k^2 - 2R_k + I_3) \\ &= \boxed{\frac{n(n-1)}{2}R_k^2 + n(2-n)R_k + \frac{n^2-3n+2}{2}I_3} \end{aligned}$$

Q5) a) En posant $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ on vérifie que $S_k = R_k \times C$ et que $S_{-k} = C \times R_k$.

Alors

$$^tS_k \times L \times S_k = ^t(R_k \times C) \times L \times (R_k \times C) = ^tC \times ^tR_k \times L \times R_k \times C = ^tC \times L \times C$$

et on vérifie aisément que $^tC \times L \times C = L$, donc $S_k \in \mathscr{H}$ puisque S_k est à coefficients entiers.

b) On a

– $R_{k_1} \times S_{k_2} = R_{k_1} \times R_{k_2} \times C = R_{k_1+k_2} \times C = \boxed{S_{k_1+k_2}}$;
– $S_{k_1} \times R_{k_2} = R_{k_1} \times C \times R_{k_2} = R_{k_1} \times S_{-k_2} = \boxed{S_{k_1-k_2}}$;
– $S_{k_1} \times S_{k_2} = S_{k_1} \times R_{k_2} \times C = S_{k_1-k_2} \times C = R_{k_1-k_2} \times C^2 = R_{k_1-k_2} \times I_3 = \boxed{R_{k_1-k_2}}$.

c) $(\mathscr{S}, \times)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathscr{H}, \times)$ car $I_3 \notin \mathscr{S}$ (considérer l'élément en position $(2,2)$ de S_k).
Montrons par contre $(\mathscr{R} \cup \mathscr{S}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{H}, \times)$.
En effet, $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$ est non vide car contient $I_3 = R_0$. D'autre part, on a vu que $R_k^{-1} = R_{-k}$ et on a $S_k \times S_k = R_0 = I_3$ donc $S_k^{-1} = S_k$. Alors en prenant deux matrices M et N dans $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$, les questions précédentes prouvent que le produit $M \times N^{-1}$ appartient à $\mathscr{R} \cup \mathscr{S}$ dans tous les cas.

d) Par définition φ_k est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et la relation $S_k^2 = I_3$ prouve que $\varphi_k^2 = id_{\mathbb{R}^3}$, donc $\boxed{\varphi_k \text{ est une symétrie de } \mathbb{R}^3}$.
C'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\varphi_k - id_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi_k + id_{\mathbb{R}^3})$.
Or $\mathrm{Ker}(\varphi_k - id_{\mathbb{R}^3}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_k(x) = x\}$.

En notant $x=(x_1,x_2,x_3)$ et en utilisant la matrice S_k on écrit le système

$$\begin{cases} (1-2k^2)x_1+2kx_2+2k^2x_3=x_1 \\ 2kx_1-x_2-2kx_3=x_2 \\ -2k^2x_1+2kx_2+(1+2k^2)x_3=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad kx_1-x_2-kx_3=0$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_k-id_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{vect}((1,k,0),(0,-k,1))}$.

De même $\mathrm{Ker}(\varphi_k+id_{\mathbb{R}^3})=\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,\varphi_k(x)=-x\}$, d'où

$$\begin{cases} (1-2k^2)x_1+2kx_2+2k^2x_3=-x_1 \\ 2kx_1-x_2-2kx_3=-x_2 \\ -2k^2x_1+2kx_2+(1+2k^2)x_3=-x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-k^2)x_1+kx_2+k^2x_3=0 \\ kx_1-kx_3=0 \\ -k^2x_1+kx_2+(1+k^2)x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+kx_2=0 \\ kx_1-kx_3=0 \\ kx_2+x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1=x_3=-kx_2$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_k+id_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{vect}((-k,1,-k))}$.

Partie III

Q6) Comme M est à coefficients entiers et que x,y,z sont entiers, on en déduit que x',y',z' sont entiers, donc $|x'|,|y'|,|z'|$ des entiers naturels.

D'autre part, comme $M\in G$ on sait d'après la partie I que $x'^2+y'^2-z'^2=x^2+y^2-z^2=0$ donc $|x'|^2+|y'|^2=|z'|^2$.

Reste à montrer que $|x'|,|y'|,|z'|$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Pour cela, notons p leur pgcd.

On sait d'après la partie I que M est inversible, et que la matrice M^{-1} est à coefficients entiers. En la notant $M^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ on écrit les relations

$$\begin{cases} x=ax'+by'+cz' \\ y=dx'+ey'+fz' \\ z=gx'+hy'+iz' \end{cases}$$

Or p divise à la fois x', y' et z', donc divise à la fois x, y et z, et donc divise leur pgcd, qui vaut 1 par hypothèse. Comme p est un entier naturel, on a montré que $p=1$, ie. que $|x'|$, $|y'|$ et $|z'|$ sont premiers entre eux.

Finalement, $\boxed{(|x'|,|y'|,|z'|)\in\mathcal{T}}$.

Q7) a) Par l'absurde, supposons que $x=0$. Alors $y^2=z^2$ et donc $y=z$, puisque y et z sont positifs.

Alors z divise à la fois x, y et z, donc divise leur pgcd, qui vaut 1. Ceci contredit $z>1$.

On a montré $\boxed{x>0}$. La situation étant symétrique en x et y, on a aussi $\boxed{y>0}$.

b) On vérifie sans difficulté que ${}^t U\times L\times U=L$, et comme U est à coefficients entiers, on déduit que $\boxed{U\in\mathcal{H}}$.

On a

$$z'=-2x-2y+3z$$

donc on écrit

$$\begin{aligned}
5(x-y)^2 \geqslant 0 > -2xy &\Rightarrow 5x^2+5y^2-10xy > -2xy \\
&\Rightarrow 5x^2+5y^2 > 8xy \\
&\Rightarrow 9x^2+9y^2 > 4x^2+4y^2+8xy \\
&\Rightarrow 9z^2 > 4x^2+4y^2+8xy \quad (\text{car } z^2 = x^2+y^2) \\
&\Rightarrow (3z)^2 > (2x+2y)^2 \\
&\Rightarrow 3z > 2x+2y \quad (\text{car } 3z \text{ et } 2x+2y \text{ sont positifs}) \\
&\Rightarrow \boxed{z' > 0}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
0 < 2xy &\Rightarrow x^2+y^2 < x^2+y^2+2xy \\
&\Rightarrow z^2 < x^2+y^2+2xy \quad (\text{car } z^2 = x^2+y^2) \\
&\Rightarrow z^2 < (x+y)^2 \\
&\Rightarrow z < x+y \quad (\text{car } z \text{ et } x+y \text{ sont positifs}) \\
&\Rightarrow 3z-2x-2y < z \\
&\Rightarrow \boxed{z' < z}.
\end{aligned}$$

c) On vérifie d'abord aisément que les matrices D_1 et D_2 données en indication sont bien dans $\mathscr{H}$, donc les matrices D_1U, D_2U et D_1D_2U aussi.

Avec les notations de la questions précédente, distinguons quatre cas :

- si $x' \geqslant 0$ et $y' \geqslant 0$, alors $(x', y', z') = (|x'|, |y'|, |z'|) \in \mathscr{T}$ avec $0 < z' < z$ et la matrice $M = U$ convient ;
- si $x' \leqslant 0$ et $y' \geqslant 0$, alors choisissons la matrice $M = D_1U$, ce qui a pour effet de changer le signe de x' sans changer celui de y' ni de z', on a donc bien encore $(x', y', z') \in \mathscr{T}$ avec $0 < z' < z$;
- si $x' \geqslant 0$ et $y' \leqslant 0$, idem en choisissant la matrice $M = D_2U$;
- si $x' \leqslant 0$ et $y' \leqslant 0$, idem en choisissant la matrice $M = D_1D_2U$.

Q8) Notons que $z \geqslant 1$ (en effet, si $z = 0$ alors $x^2 + x^2 = 0$ implique $x = y = 0$ et x, y, z ne seraient pas premiers entre eux).

Procédons par récurrence avec prédécesseurs sur $z \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : si $z = 1$ alors alors $x^2 + y^2 = 1$ implique que soit $x = 1$ et $y = 0$ auquel cas $M = I_3$ convient, soit $x = 0$ et $y = 1$ auquel cas la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient (on vérifie aisément qu'elle appartient à $\mathscr{H}$).
- Hérédité : supposons la propriété vraie jusqu'au rang $z \geqslant 1$. Alors $z+1 > 1$ et d'après la question précédente appliquée au triplet $(x, y, z+1)$, il existe une matrice $M_1 \in \mathscr{H}$ telle que le triplet (x', y', z') défini par
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}$$
appartienne à $\mathscr{T}$ avec $0 < z' < z+1$, donc $1 \leqslant z' \leqslant z$. Or d'après l'hypothèse de récurrence au rang z', il existe une matrice M_2 telle que
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_2 \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$
En posant $M = M_2 \times M_1 \in \mathscr{H}$, on a bien
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}.$$

Q9) Notons $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ où les coefficients sont tous entiers.

D'une part la relation

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

s'écrit

$$\begin{cases} a = 1 - c \\ f = -d \\ i = 1 - g \end{cases}$$

d'où $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1-c & b & c \\ d & e & -d \\ g & h & 1-g \end{pmatrix}$ est la forme forme générale des matrices vérifiant cette condition.

Déterminons à quelle condition une telle matrice est dans $\mathscr{H}$. La relation ${}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M} = \mathrm{L}$ s'écrit (on exprime uniquement l'égalité des coefficients du triangle supérieur car les matrices ${}^t\mathrm{M} \times \mathrm{L} \times \mathrm{M}$ et L sont symétriques)

$$\begin{cases} (1-c)^2 + d^2 - g^2 = 1 \\ b^2 + e^2 - h^2 = 1 \\ c^2 + d^2 - (1-g)^2 = -1 \\ (1-c)b + de - gh = 0 \\ (1-c)c - d^2 + g(g-1) = 0 \\ bc - de + h(g-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = c^2 + d^2 - g^2 \\ b^2 + e^2 - h^2 = 1 \\ g = -c \quad (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1) \\ b - bc + de - gh = 0 \\ g = -c \quad (\mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_1) \\ h = b \quad (\mathrm{L}_6 \leftarrow \mathrm{L}_6 - \mathrm{L}_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c = d^2 \\ e^2 = 1 \\ g = -c \\ b = -de \\ h = b \end{cases}$$

D'une part, la condition $2c = d^2$ prouve que d^2 est pair, donc que d est pair. Notons $d = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
D'autre part, la condition $e^2 = 1$ donne les deux cas $e = 1$ et $e = -1$.
Dans le premier on trouve

$$\begin{cases} d = 2k \\ c = 2k^2 \\ e = 1 \\ g = -2k^2 \\ b = -2k \\ h = -2k \end{cases}$$

qui conduit à $\mathrm{M} = \mathrm{R}_k$.
Dans le deuxième on trouve

$$\begin{cases} d = 2k \\ c = 2k^2 \\ e = -1 \\ g = -2k^2 \\ b = 2k \\ h = 2k \end{cases}$$

qui conduit à $\mathrm{M} = \mathrm{S}_k$.

Problème 2 : Étude de deux séries

Partie I : Étude de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{e^{ikx}}{k}$

Q1) a) La série de terme général $\frac{(-1)^k}{k}$ est une série alternée car $\frac{1}{k}\geqslant 0$. De plus, la suite $(\frac{1}{k})$ est décroissante et tend vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^k}{k} \text{ converge.}}$$

b) Soit $x>-1$.

i) La somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k$ est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x\neq 1$, on peut donc écrire $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k=\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)^n x^n}{1+x}$, d'où :

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.}$$

ii) Pour t dans l'intervalle $[0;x]$ ou $[x;0]$ suivant le signe de x, on a $\frac{1}{1+t}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}$, les fonctions en jeu étant définies continues sur cet intervalle (car il ne contient pas -1) on peut donc intégrer de 0 à x, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k\right\}\mathrm{d}t+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais $\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x)$, et donc :

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

c) On a $\ln(1+x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=(-1)^n\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Prenons $x=1$, on a alors $\ln(2)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Avec un changement d'indice très simple on obtient $\ln(2)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, et donc en valeur absolue on a :

$$\left|\ln(2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right|=\left|\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1\left|\frac{t^n}{1+t}\right|\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Pour t entre 0 et 1 on a $0\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1$ et donc $\frac{t^n}{1+t}\leqslant t^n$, d'où $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$, et donc :

$$\boxed{\left|\ln(2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}.}$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, on en conclut que $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\ln(2)$, c'est à dire :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln(2).}$$

Dans toute cette partie, x désigne un réel fixé dans l'intervalle $]0;2\pi[$.

Q2) a) La somme $M_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ est une somme de termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$ car $x \in]0;2\pi[$, on a donc :

$$\begin{aligned}
M_n &= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\\
&= \frac{e^{i(n+1)x/2}(-2i)\sin((n+1)\frac{x}{2})}{e^{ix/2}(-2i)\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{(utilisation de l'arc moitié)}\\
&= e^{in\frac{x}{2}}\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Comme $|e^{in\frac{x}{2}}| = 1$, on en déduit que $|M_n| = \left|\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right|$, et comme $|\sin((n+1)\frac{x}{2})| \leqslant 1$, il reste que :

$$\boxed{|M_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$.

i) Pour $k \geqslant 1$, on a $M_k - M_{k-1} = e^{ikx}$ (les autres termes s'annulent dans la différence), on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
S_n = S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k - M_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{M_{k-1}}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k}{k+1} \quad \text{(changement d'indice dans la deuxième somme)}\\
&= \frac{M_n}{n} - M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} M_k[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}]\\
&= \boxed{\frac{M_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_k}{k(k+1)}}
\end{aligned}$$

ii) Pour $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \left|\frac{M_k}{k(k+1)}\right| \leqslant \frac{A}{k^2}$, en posant $A = \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$ (ne dépend par de k). La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente, on en déduit que la série $\sum \frac{A}{k^2}$ est convergente (A est une constante), et donc la série $\sum \left|\frac{M_k}{k(k+1)}\right|$ est convergente (théorème de comparaison des séries positives). Finalement la série :

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \frac{M_k}{k(k+1)} \text{ est absolument convergente, et donc convergente.}}$$

c) On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_k}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de plus la suite $(\frac{M_n}{n})$ tend vers 0 car $|\frac{M_n}{n}| \leqslant \frac{A}{n}$. Par conséquent la suite (S_n) est convergente (somme de suites convergentes), d'où :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k} \text{ est convergente.}}$$

On peut remarquer qu'elle n'est pas absolument convergente car $\left|\frac{e^{ikx}}{k}\right| = \frac{1}{k}$, et on sait que la série harmonique diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1 \leqslant 1$).

Q3) a) Posons $g(t) = \frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda t}$, alors f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et $g'(t) = e^{i\lambda t}$, on peut faire une IPP :

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda t}f(t)\right]_a^b - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda t} f'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{e^{i\lambda b}f(b) - e^{i\lambda a}f(a) - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t)\,\mathrm{d}t}{i\lambda}
\end{aligned}$$

Le module du dénominateur vaut $|i\lambda| = \lambda$. Majorons le numérateur en module (inégalité triangulaire), les exponentielles en jeu ayant un module égale à 1 :

$$\begin{aligned}\left|e^{i\lambda b}f(b)-e^{i\lambda a}f(a)-\int_a^b e^{i\lambda t}f'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant |f(b)|+|f(a)|+\left|\int_a^b e^{i\lambda t}f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant |f(b)|+|f(a)|+\left|\int_a^b e^{i\lambda t}f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant |f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t=\mathrm{K}\quad\text{(une constante)}\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\left|\int_a^b e^{i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\mathrm{K}}{\lambda}}$.

b) On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t=0}$.

Q4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in]0;2\pi]$, on note $\mathrm{D}_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ikt}$.

a) D_n est une somme de fonctions continues sur $]0;2\pi]$ (et même sur $\mathbb{R}$), donc D_n est continue sur $]0;2\pi]$ et $\int_0^\pi \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^\pi e^{ikt}\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^\pi=\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{ik}}$.

b) En reprenant un calcul fait en Q2a, $\mathrm{D}_n(t)=\mathrm{M}_n-1=\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}-1=\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}$, en factorisant par l'arc moitié au dénominateur, on a $\mathrm{D}_n(t)=\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{e^{it/2}(-2i)\sin(t/2)}=\boxed{\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}-e^{i\frac{t}{2}}}{2i\sin(\frac{t}{2})}}$.

Q5) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{k}$.

a) $\int_0^x \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^x=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}-1}{ik}$. On en déduit que $i\int_0^x \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}-1}{k}=\mathrm{S}_n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, et donc :

$$\boxed{\mathrm{S}_n=i\int_0^x \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n&=i\int_0^x \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &=i\int_0^\pi \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t-i\int_x^\pi \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad\text{(relation de Chasles)}\\ &=i\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{ik}-i\int_x^\pi\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}-e^{i\frac{t}{2}}}{2i\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad\text{(d'après Q4)}\\ &=\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{2}\int_x^\pi\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_x^\pi\frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

c) En passant à la forme algébrique, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^\pi\frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t&=\int_x^\pi \mathrm{cotan}(\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t+\int_x^\pi i\,\mathrm{d}t\\ &=\left[2\ln|\sin(\frac{t}{2})|\right]_x^\pi+i(\pi-x)\\ &=-2\ln(\sin(\frac{x}{2}))+i(\pi-x)\quad(\text{car }\frac{x}{2}\in]0;\pi[)\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{\pi} \dfrac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t = -\ln(\sin(\dfrac{x}{2})) + i\dfrac{\pi - x}{2}}$.

d) La fonction $f\colon t \mapsto \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x;\pi]$ (ou $[\pi;x]$), d'après les théorèmes généraux, car $x > 0$.

On peut donc déduire de la question Q3, en posant $\lambda = n + \frac{1}{2}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_x^{\pi} \dfrac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_x^{\pi} \dfrac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t\right) - \ln(\sin(\frac{x}{2})) + i\frac{\pi-x}{2} = -\ln(2) - \ln(\sin(\frac{x}{2})) + i\frac{\pi-x}{2} = -\ln(2\sin(\frac{x}{2})) + i\frac{\pi-x}{2}$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in]0;2\pi[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = -\ln(2\sin(\tfrac{x}{2})) + i\frac{\pi-x}{2}.}$$

Q6) La série $\sum \frac{e^{ikx}}{k}$ converge, donc d'après le cours, les parties réelles et imaginaires sont des séries convergentes et qui convergent respectivement vers la partie réelle et la partie imaginaire de la somme, d'où :

$$\boxed{\forall x \in]0;2\pi[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2\sin(\tfrac{x}{2})) \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2}.}$$

$$\boxed{\forall x \in]0;\pi[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1} = -\frac{1}{2}\ln(\tan(\tfrac{x}{2})) \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Partie II : Série des inverses des nombres premiers

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3, \dots$)

Q7) Soit $k > 0$, sur l'intervalle $[k;k+1]$ la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît donc $f(x) \leqslant \frac{1}{k}$, en intégrant de K à $k+1$ on obtient $\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{k+1-k}{k}$, c'est à dire $\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$, sommant de 1 à n on obtient avec la relation de Chasles : $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, or cette intégrale est égale à $\ln(n)$ qui tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, et donc $\boxed{\text{la suite des sommes partielles de la série harmonique diverge.}}$

Dans la suite de cette partie, on montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ est également divergente. On raisonne par l'absurde ***en supposant que cette série converge vers un réel noté*** S.

Q8) Puisque la série converge, la suite des restes (R_k) où $R_k = S - \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n} = \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$, converge vers 0, or $0 < \frac{1}{2}$, et donc à partir d'un certain rang on aura $R_k < \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sum_{n=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}.}$$

Pour la suite, on pose $N = 2^{2k_0+2}$.

Q9) a) Il s'agit de trouver le nombre d'entiers de la forme $p_i k$ dans l'intervalle $[\![1;N]\!]$, or $1 \leqslant p_i k \leqslant N$ équivaut à $\frac{1}{p_i} \leqslant k \leqslant \frac{N}{p_i}$, ce qui équivaut encore (k étant entier) à $1 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'entiers de l'intervalle } [\![1;N]\!] \text{ divisibles par } p_i, \text{ est } \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor.}$$

b) Pour $i \geqslant k_0 + 1$, notons A_i l'ensemble des entiers de $[\![1;N]\!]$ divisibles par p_i, alors d'après la question précédente, cet ensemble contient $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ éléments, or $A \subset \bigcup\limits_{i\geqslant k_0+1} A_i$, donc le nombre d'éléments de A est majoré par la somme des cardinaux de chaque A_i (cette somme est finie en fait puisque A_i est vide dès que $p_i > N$), on a donc $N_A \leqslant \sum\limits_{i\geqslant k_0+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$, or $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \leqslant \frac{N}{p_i}$, donc :

$$N_A \leqslant \sum_{i\geqslant k_0+1} \frac{N}{p_i} = N \sum_{i\geqslant k_0+1} \frac{1}{p_i} \leqslant N \sum_{n=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{N}{2} \text{ d'après le choix de } k_0$$

$$\boxed{N_A \leqslant \sum_{i \geqslant k_0+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}.}$$

Q10) Soit $n \in [\![1\,;N]\!] \setminus A$.

a) Les diviseurs premiers éventuels de n sont dans l'ensemble $\{p_i \mid i \leqslant k_0\}$, donc on peut écrire n sous la forme $n = \prod_{i=1}^{k_0} p_i^{\alpha_i}$ avec les α_i dans $\mathbb{N}$, lorsque l'exposant α_i et pair, $\alpha_i = 2\beta_i$, on a $p_i^{\alpha_i} = (p_i^{\beta_i})^2$, c'est un carré, lorsque l'exposant α_i et impair $\alpha_i = 2\beta_i + 1$, alors on écrit $p_i^{\alpha_i} = p_i \times (p_i^{\beta_i})^2$. En procédant ainsi pour chaque facteur, on peut écrire n sous la forme :

$$\boxed{n = a \times b^2 \text{ où tous les diviseurs premiers de } a \text{ ont une valuation égale à 1.}}$$

b) D'après ce qui précède, $a = \prod_{i=1}^{k_0} p_i^{\gamma_i}$, avec chaque γ_i valant 0 ou 1, ce qui fait $\boxed{2^{k_0} \text{ valeurs possibles pour } a}$. Comme $1 \leqslant a$, on doit avoir $b^2 \leqslant ab^2 = n \leqslant N$, donc $b \leqslant \sqrt{N}$, et comme n est non nul, on doit avoir $b > 0$, c'est à dire $\boxed{b \text{ est dans l'intervalle } [1\,;\sqrt{N}].}$

c) D'après ce qui précède, le nombre de valeurs possibles pour n est majoré par $2^{k_0}\sqrt{N}$, et comme $N = 2^{2k_0+2}$, on a $\sqrt{N} = 2^{k_0+1}$, d'où $2^{k_0}\sqrt{N} = 2^{2k_0+1}\frac{N}{2}$.

$$\boxed{n \text{ ne peut prendre que } \frac{N}{2} \text{ valeurs au plus.}}$$

Q11) On a donc $\mathrm{card}(A) < \frac{N}{2}$ et $\mathrm{card}([\![1\,;N]\!] \setminus A) \leqslant \frac{N}{2}$, on en déduit donc que $\mathrm{card}([\![1\,;N]\!]) < \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$, ce qui est absurde, et donc :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{p_n} \text{ est divergente.}}$$