12. Suites 2

Exercice 1. (m) **Étude du cas f décroissant.** On pose $f : x \mapsto (1-x)^2$ et on considère la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Vérifier que $[0,1]$ est un intervalle stable par f et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Déterminer l'unique $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

3) Quelle est la monotonie de f ? Quelle est celle de $f \circ f$? En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $u_0 \leq u_2$ et décroissante si $u_0 \geq u_2$. Dans chacun des cas considérés, que peut-on alors dire de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?

4) Étudier le signe de $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$ sur $[0,1]$ et déterminer les points fixes de $f \circ f$.

5) En déduire que si $u_0 \in [0, x_0[$, alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Traiter de même le cas $u_0 \in\ ]x_0, 1]$. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2. (m) **Étude du cas f décroissant 2.** On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et on considère la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Reprendre les questions de l'exercice précédent sauf pour la question 5) qui devient :

5) En déduire que si $u_0 \in [0, x_0]$, alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0. Traiter de même le cas $u_0 \in [x_0, 1]$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3. (c) **Vrai ou faux.** Que pensez vous des énoncés suivants ?

1) Si $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{2}{n}$, alors $u_n + v_n \sim \dfrac{3}{n}$.

2) Si $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, alors $u_n + v_n \sim \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

3) Si $u_n \sim \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n \sim \dfrac{1}{n}$, alors $u_n - v_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 4. (c) **Théorème des gendarmes pour les équivalents.** Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$ et $w_n \sim_{+\infty} u_n$. Montrer que $v_n \sim_{+\infty} u_n$.

Exercice 5. (c) Classer par ordre de négligeabilité les suites ont les termes généraux sont les suivants :

1) $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{\ln(n)}{n}, \dfrac{\ln(n)}{n^2}, \dfrac{1}{\ln(n)}, \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

2) n, n^2, $n\ln(n)$, $\sqrt{n}\ln(n)$, $\dfrac{n}{\ln(n)}, \dfrac{n^2}{\ln(n)}$.

Exercice 6. (m) Donner un équivalent simple des suites suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n^2+3n+2}{n-1}$.

2) $v_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3) $w_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.

4) $x_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

5) $y_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

6) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

Exercice 7. (m) Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et déterminer leur limite :

$$u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)},\ v_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \text{ et } w_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}.$$

Exercice 8. (m) Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et déterminer leur limite :

$$u_n = \frac{n^2 - \sqrt{n^5+1}}{\ln(n) - 2n^2},\ v_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2+1} \text{ et } w_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}.$$

Exercice 9. (m) Déterminer les limites de :

1) $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$.

2) $v_n = \sqrt[n]{n^2}$.

3) $w_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.

4) $x_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}}$.

Exercice 10. (m) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$. *On pourra découper la somme.*

Exercice 11. (m) Soit $u_n = \dfrac{1}{n^n}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} u_k \sim u_n$.

Exercice 12. (c) En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de $u_n = \dbinom{2n}{n}$.

Exercice 13. (m) Montrer que $n! \geq \left(\dfrac{n}{2}\right)^{n/2}$. En déduire que la suite $\left(\sqrt[n]{(n!)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Pourquoi ne peut-on pas utiliser la formule de Stirling pour montrer ceci ?

Exercice 14. (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.

1) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

2) On pose $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$ et déterminer un équivalent de u_n. Conclusion ?

Exercice 15. (m) Pour $n \geq 3$, on pose $f_n : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n + nx - 1 \end{array}\right.$.

1) Montrer qu'il existe un unique $u_n \geq 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2) Déterminer un encadrement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa limite et un équivalent.

Exercice 16. (m) Soit $f : \left\{\begin{array}{l} [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x+1} \end{array}\right.$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = n$ admet une unique solution u_n.

2) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (monotonie/limite) et en donner un équivalent.