30. Variables aléatoires, méthodologie

I. Généralités

I.1. Variable aléatoire et univers image

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On dit que X est une variable aléatoire définie sur Ω si X est une fonction définie sur l'ensemble Ω. On dit que X est une variable aléatoire réelle si son ensemble d'arrivée est inclus dans $\mathbb{R}$.

Définition. Soit (Ω, P) un espace de probabilité et X une variable aléatoire définie sur Ω. L'univers image de X est $X(\Omega) = \{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$. *C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.*

Définition. Avec les mêmes notations, pour $x \in X(\Omega)$ et $A \subset X(\Omega)$, on note :
- « $X = x$ » l'évènement $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}$.
- « $X \in A$ » l'évènement $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$.

En particulier, $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X \in A)$ sont bien définies et représentent respectivement la probabilité que X prenne la valeur x et que X appartienne à l'ensemble A.

I.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. On suppose que l'univers image $X(\Omega)$ est fini et on l'écrit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Alors la loi de X est la fonction :

$$P_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x_i & \mapsto & \mathbb{P}(X = x_i) \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{m}}$ Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, il faut donc déterminer son univers image (l'ensemble des valeurs x_i qu'elle peut prendre) et les probabilités pour que la variable aléatoire soit égale à x_i.

Exercice d'application 1. On pose $\Omega = \{A, B, C, \dots, Z\}$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

1) Quelle expérience aléatoire est représentée par cet espace probabilisé ?

2) On pose la variable aléatoire X telle que pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = 0$ si ω est une consonne et $X(\omega) = 1$ si ω est une voyelle. Déterminer la loi de X.

3) On pose à présent $\Omega = \{A, B, C, \dots, Z\}^2$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. On pose Y la variable aléatoire telle que $Y(\omega)$ vaut le nombre de voyelles de ω. Déterminer la loi de Y.

4) On pose enfin $\Omega = \{A, B, C, \dots, Z\}^3$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. On pose Z la variable aléatoire telle que $Z(\omega)$ vaut le produit du nombre de voyelles par le nombre de consonnes de ω. Déterminer la loi de Z.

I.3. Variable aléatoire image

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E. Soit $f : E \to F$. Alors on note $f(X)$ la variable aléatoire image de X par f, définie par $f(X) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & F \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array} \right.$.

Proposition. Avec les mêmes notations, si on suppose $X(\Omega)$ fini et que l'on écrit $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $f(X)$ est une variable aléatoire d'univers image $(f(X))(\Omega) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} = \{y_1, \ldots, y_p\}$ et de loi :

$$P_{f(X)} : \left\{ \begin{array}{ccl} \{y_1, \ldots, y_p\} & \to & [0,1] \\ y_j & \mapsto & \mathbb{P}(f(X) = y_j) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \ / \\ f(x_i) = y_j}} \mathbb{P}(X = x_i) \end{array} \right.$$

(m) Très souvent, on construit des variables aléatoires à partir de variables aléatoires connues. La loi de ces nouvelles variables aléatoires est déterminée entièrement par la loi des anciennes variables aléatoires.

Exercice d'application 2. On pose $\Omega = [\![-10, 10]\!]$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. On pose alors X la variable aléatoire définie sur Ω par $X(\{\omega\}) = \omega$.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de X^2.
3) Déterminer la loi de $-X$. A-t-on $X = -X$?
4) Déterminer la loi de $Y = \cos\left(\dfrac{\pi X}{2}\right)$ et de $Z = \sin\left(\dfrac{\pi X}{2}\right)$.

I.4. Lois usuelles

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et on note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$.

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et que $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{array} \right.$.

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(m) Pour bien partir dans un exercice, il est important de bien traduire l'énoncé afin de savoir quelles lois suivent les variables aléatoires étudiées ! Ce sont souvent des lois usuelles...

Exercice d'application 3. Déterminer les lois des variables aléatoires qui simulent les expériences aléatoires suivantes (et préciser quand ce sont des lois usuelles). On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100 dont les 25 premières sont rouges et les autres sont noires.

1) On tire une boule dans l'urne au hasard et on note X la variable aléatoire représentant son numéro.

2) On considère la variable aléatoire X^2.

3) On considère $Y = X\ [2]$ (le numéro de la boule tiré modulo 2).

4) On effectue des tirages indépendants avec remise jusqu'à avoir tiré la boule numérotée 100 et on note W la variable aléatoire représentant le rang du tirage où l'on s'arrête.

5) On effectue 10 tirages indépendants avec remise et on note Z la variable aléatoire représentant le nombre de boules impaires rouges tirées.

6) On effectue 3 tirages sans remise et on note V la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires tirées.

II. Espérance et variance

II.1. Espérance

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. L'espérance de X est notée $\mathbb{E}(X)$ et est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition. L'espérance est linéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y$ va réelles, $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

Définition. Soit X une va réelle. On dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

(m) Cette propriété est très utilisée pour faire des calculs sur l'espérance d'une variable aléatoire sans repasser de nombreuses fois par la définition !

Exercice d'application 4. On considère une classe de n élèves et on pose pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la variable aléatoire représentant la note du i-ème élève au prochain devoir de maths. On pose

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1) Que représente la variable aléatoire Y ?

2) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction des espérances $(\mathbb{E}(X_i))_{1 \leq i \leq n}$

3) Le professeur décide de multiplier les notes par 2, puis d'enlever 3 points à tout le monde. Quelles seraient les nouvelles variables aléatoires X_i' représentant les nouvelles notes des élèves ? Déterminer alors $\mathbb{E}(Y')$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$.

4) Le professeur décide de fixer la moyenne à 10 en enlevant (ou en rajoutant) la même quantité de points à toute la classe. Quelle quantité doit-il rajouter ?

Proposition. Si X est une va réelle positive, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. De plus l'espérance est croissante, c'est à dire que si X et Y sont deux vas réelles telles que $X \geq Y$ (c'est à dire que $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq Y(\omega)$), alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Exercice d'application 5. Montrer que pour toute variable aléatoire réelle X, $2\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X^2) + 1$.

II.2. Théorème de transfert

Théorème. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

(m) Ce théorème est très utilisé pour calculer des espérances de variables aléatoires construites à partir de variables aléatoires connues.

Exercice d'application 6. Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket$ (X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1) Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$.

2) Déterminer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$. A-t-on $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$? Quelles sont les limite de ces deux quantités quand n tend vers l'infini ?

3) Déterminer $\mathbb{E}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{X}\right)\right)$.

Exercice d'application 7. Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ (X suit une loi de Bernoulli) avec $p \in]0, 1[$.

1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}(X^k)$.

2) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la variable aléatoire $\frac{1}{X - a}$ soit centrée.

II.3. Espérances usuelles

Proposition. Soit X une variable aléatoire certaine telle que $X(\Omega) = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathbb{E}(X) = \alpha$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (autrement dit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$). Alors, $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ (autrement dit $X \sim \mathcal{B}(p)$). Alors, $\mathbb{E}(X) = p$.

Exercice d'application 8. Soit X une variable aléatoire et $A \subset X(\Omega)$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(1_{X \in A}) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Proposition. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ (autrement dit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$). Alors, $\mathbb{E}(X) = np$.

II.4. Variance

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ est fini. La variance de X est notée $\mathbb{V}(X)$ et est définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

L'écart type de X est noté $\sigma(X)$ et est défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini. Alors :

$$\mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \ \mathbb{P}(X = \alpha) = 1.$$

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini. Alors :
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbb{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{V}(X)$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \sigma(\alpha X + \beta) = |\alpha| \sigma(X)$.

m Les différentes propriétés de la variance découlent toutes de la définition et de la linéarité/croissance de l'espérance. Il est cependant parfois utile de faire apparaitre des variances pour simplifier des calculs !

Exercice d'application 9. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

Exercice d'application 10. On note Y la variable aléatoire représentant la note moyenne de la classe à un devoir de maths (comme dans l'exercice d'application 4 même si ici la définition de Y ne sera pas utile). Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la variable aléatoire $aY + b$ ait une espérance de 11 et un écart type de 2.

Définition. Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est réduite si $\mathbb{V}(X) = 1$ (ce qui est équivalent à $\sigma(X) = 1$).

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{V}(X) > 0$. Alors, $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

II.5. Variances usuelles

Proposition. Soit X une variable aléatoire certaine telle que $X(\Omega) = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathbb{V}(X) = 0$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (autrement dit $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Alors, $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ (autrement dit $X \sim \mathcal{B}(p)$). Alors, $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ (autrement dit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$). Alors, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

II.6. Inégalités de concentration

Théorème. Inégalité de Markov. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini et positive (telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$). Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}.$$

Exercice d'application 11. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^X)}{e^a}.$$

Théorème. Inégalité de Tchebychev. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

m Cette inégalité est très utilisée pour estimer la probabilité qu'une variable aléatoire soit proche ou pas de son espérance. On voit que la majoration dépend de la variance de la variable aléatoire. Ceci est normal car plus une variable aléatoire a une grande variance, plus elle a tendance à souvent s'éloigner de son espérance.

Exercice d'application 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre p et de taille n.

1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

2) En déduire que $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3) Quelle valeur de n choisir pour que $\dfrac{X}{n}$ ait au moins 90% de chances d'être dans l'intervalle $]p - 0.05, p + 0.05[$?

III. Couples de variables aléatoires

III.1. Définition

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors $Z = (X, Y)$ est un couple de variables aléatoires. On remarque que $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

III.2. Loi conjointe

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. La loi conjointe de (X, Y) est l'application :

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & P(X = x \cap Y = y) \end{array}.$$

C'est la plupart du temps la loi du couple (X, Y).

m Pour représenter la loi conjointe de (X, Y) on utilise en général un tableau à double entrée où l'on précise les valeurs de $X(\Omega)$ en ordonnée et $Y(\Omega)$ en abscisse et où on écrit $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ en coordonnée (i, j).

Exercice d'application 13. On dispose de 3 dés à 6 faces indépendants pour cette expérience : le premier dé D_1 est équilibré, le second D_2 ne donne que des nombres pairs (de manière équiprobable) et le troisième D_3 ne donne que des nombres impairs (de manière équiprobable).

1) On lance d'abord D_1 et ensuite, on lance D_2 si D_1 a fait un résultat impair et on lance D_3 si D_1 a fait un résultat pair. On note X la variable aléatoire représentant la valeur du premier dé lancé et Y la variable aléatoire représentant la valeur du second dé lancé. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

2) Reprendre la question en modifiant l'expérience comme ceci : on lance toujours D_1 en premier et on lance D_2 si D_1 a fait un résultat impair et on relance D_1 si D_1 a fait un résultat pair (on ne lance donc plus D_3).

III.3. Lois marginales

Définition. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

m Les lois marginales s'obtiennent à partir de la loi conjointe en sommant les probabilités sur les lignes/colonnes (dépendant de si l'on veut la loi de X ou celle de Y). La somme des probabilités sur la i-ième ligne donne $P(X = x_i$, la somme sur la j-ième colonne donne $P(Y = y_j)$ (et la somme de tout le tableau donne 1).

Exercice d'application 14. On reprend l'énoncé de l'exercice précédent. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

Exercice d'application 15. Soient $p, q \in [0, 1]$ et X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p et q (autrement dit $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$). Déterminer la loi conjointe de (X, Y) en fonction de $a = P(X = 1 \cap Y = 1)$. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on X et Y indépendantes ?

III.4. Loi conditionnelle

Définition. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$.

- Si $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ est l'application

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ y_j & \mapsto & \mathbb{P}_{X=x_i}(Y = y_j) \end{array} \right. .$$

- Si $\mathbb{P}(Y = y_j) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ est l'application

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x_i & \mapsto & \mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i) \end{array} \right. .$$

(m) Puisque $\mathbb{P}_{X=x_i}(Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}$, les différentes lois conditionnelles se calcule toujours à partir du tableau en effectuant le quotient du coefficient (i, j) par la somme des probabilités sur la i-ème ligne. On procède de manière symétrique pour $\mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i)$ en étudiant les colonnes.

Exercice d'application 16. On considère le couple de variable aléatoire (X, Y) dont on connait les informations suivantes sur la loi conjointe :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	1	2	3
1	0.1		0.05
2		0.2	
3		0.1	0.1
4	0	0.1	

1) Y peut-elle suivre une loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$?
2) Les variables aléatoire X et Y peuvent-elles être indépendantes ?
3) On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$ et que $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.2$.
   a) Déterminer alors la loi conjointe de (X, Y).
   b) En déduire la loi de Y.
   c) Déterminer finalement la loi de X sachant que $Y = 2$ et la loi de Y sachant que $X = 4$.

IV. Indépendance

IV.1. Couple de variables aléatoires indépendantes

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et que $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$. On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si :

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

Proposition. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit f définie sur $X(\Omega)$ et g définie sur $Y(\Omega)$. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(m) Les deux propositions précédentes permettent de justifier le fait que si on a deux variables aléatoires X et Y indépendantes, alors toutes les événements/fonctions qui dépendent de X sont indépendant.e.s des événements/fonctions qui dépendent de Y, ce qui semble assez naturel !

IV.2. Indépendance de n variables aléatoires

Définition. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit qu'elles sont indépendantes si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega),\ \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n X_k = x_k) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

Proposition. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Alors :

- $\forall (A_1, \ldots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \ldots X_n(\Omega),\ \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n (X_i \in A_i)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$.
- Pour toutes $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définies sur $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$, $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
- $\forall I \subset [\![1, n]\!]$, les variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes.

Théorème. Lemme des coalitions. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Alors pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ et f et g des fonctions définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_p(\Omega)$ et $X_{p+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

(m) Ce résultat permet d'affirmer que si on a des variables aléatoires indépendantes, alors n'importe quelle séparation donnera des variables aléatoires indépendantes (ce qui est naturel d'un point de vue intuitif et très important d'un point de vue théorique). L'intérêt est donc de pouvoir séparer les événements/fonctions qui dépendent de X_1 de ceux qui dépendent de X_2 de ceux qui dépendent de X_3, etc.

IV.3. Lien avec l'espérance et la variance

Théorème. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors $\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

Exercice d'application 17. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que $\mathbb{E}(e^{X+Y}) = \mathbb{E}(e^X) \times \mathbb{E}(e^Y)$.

Exercice d'application 18. On considère le jeu suivant. On part d'une fortune X_0 et on réalise n lancers de pile ou face. A chaque pile, on double sa fortune, à chaque face, elle est divisée par 2. On note $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p et on note pour $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire du joueur après le k-ième lancer.

1) Déterminer l'expression de X_{k+1} en fonction de Y_k et de X_k. Que peut-on dire des variables aléatoires Y_k et X_k ?

2) En déduire que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(\dfrac{1+3p}{2}\right)\mathbb{E}(X_k)$.

3) Déterminer alors l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, p et X_0. Pour quelle(s) valeur(s) de p accepteriez-vous de jouer ?

Définition. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. La covariance de X et Y est notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et est définie par $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y)))$.

Proposition. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. Alors, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X \times Y) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

Proposition. Propriétés de la covariance.

- La covariance est symétrique : $\forall X, Y$ vas réelles, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- La covariance est une forme bilinéaire :

$$\forall X, Y, Z \text{ vas réelles, } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{Cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X,Z) + \mu \mathrm{Cov}(Y,Z) \\ \mathrm{Cov}(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X,Y) + \mu \mathrm{Cov}(X,Z) \end{cases}.$$

- Si X et Y sont indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. *On dit alors que X et Y sont décorrélées.*

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes deux à deux. Alors

$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

m Cette propriété est très souvent utilisée quand on manipule des variances de somme de variables aléatoires.

Exercice d'application 19. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Déterminer $\mathbb{V}(X-Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice d'application 20. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même espérance m et de même variance 1. Soient $(\varepsilon_i)_{1 \leq \leq n}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes (et indépendantes des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$) telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \dfrac{1}{2}$. Déterminer $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i)$ et $\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i)$.

IV.4. Application à la loi binomiale

Théorème. Soient $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Alors, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$ ($\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p).

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) On modélise ici le fait de choisir une lettre de l'alphabet « au hasard » (de manière uniforme).

2) X est une variable aléatoire de Bernoulli car $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Son paramètre est $p = P(X = 1) = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$ (car il y a 20 consonnes sur 26 lettres). On a par conséquent $P(X = 0) = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$.

3) On considère cette fois les mots de 2 lettres. On a donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On a en tout $26 \times 26 = 676$ mots de 2 lettres. Parmi ces mots, on en a $6 \times 6 = 36$ avec 2 voyelles, $20 \times 20 = 400$ avec 2 consonnes et donc $676 - (400 + 36) = 240$ mots avec 1 voyelle et 1 consonne. On en déduit :

$$P(Y = 0) = \frac{400}{676},\ P(Y = 1) = \frac{240}{676} \text{ et } P(Y = 2) = \frac{36}{676}.$$

4) On étudie cette fois les mots de 3 lettres. Les possibilités pour le nombre de consonnes/voyelles sont $(0, 3), (1, 2), (2, 1)$ et $(3, 0)$. On a donc $Z(\Omega) = \{0, 2\}$ (seuls résultats possibles). Le nombre de mots total est $26^3 = 17576$. Le nombre de mots de 3 voyelles est $6^3 = 216$ et ceux de 3 consonnes est $20^3 = 8000$. On a donc :

$$P(Z = 0) = \frac{20^3 + 6^3}{26^3} = \frac{79}{169}$$

et puisqu'il n'y a que 2 possibilités, $P(Z = 2) = 1 - P(Z = 0) = \frac{90}{169}$.

Exercice d'application 2. On pose $\Omega = [\![-10, 10]\!]$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. On pose alors X la variable aléatoire définie sur Ω par $X(\{\omega\}) = \omega$.

1) X suit une loi uniforme sur $X(\Omega) = [\![-10, 10]\!]$. On a donc pour tout $i \in [\![-10, 10]\!]$, $P(X = i) = \frac{1}{21}$.

2) On a $X^2(\Omega) = \left\{i^2,\ i \in [\![0, 10]\!]\right\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$. Enfin, d'après la définition d'une variable aléatoire image, $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{21}$ et pour $i \in [\![1, 10]\!]$, $P(X^2 = i^2) = P(X = i) + P(X = -i) = \frac{2}{21}$.

3) $-X$ et X ont la même loi. En effet, puisque $[\![-10, 10]\!]$ est symétrique par rapport à 0, on a $-X(\Omega) = [\![-10, 10]\!]$ et on a pour $i \in [\![-10, 10]\!]$, $P(-X = i) = P(X = -i) = \frac{1}{21}$. $-X$ suit donc une loi uniforme sur $[\![-10, 10]\!]$.

On a par contre pas $X = -X$. En effet, si on prend $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 1$ par exemple, on a alors $-X(\omega) = -1 \neq X(\omega)$ donc $-X \neq X$.

4) Puisque X est à valeurs entières, $\frac{\pi X}{2}$ ne prend que des valeurs multiples de $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Z(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

On a de plus, puisque $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0\ [2\pi]$, $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv \pi\ [2\pi]$ et $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$:

- $P(Y = 1) = P(X = -8) + P(X = -4) + P(X = 0) + P(X = 4) + P(X = 8) = \frac{5}{21}$.
- $P(Y = -1) = P(X = -10) + P(X = -6) + P(X = -2) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 10) = \frac{6}{21}$.
- $P(Y = 0) = P(X = -9) + P(X = -7) + P(X = -5) + P(X = -3) + P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 9) = \frac{10}{21}$.

De la même façon :

- $P(Z=1) = P(X=-7) + P(X=-3) + P(X=1) + P(X=5) + P(X=9) = \frac{5}{21}$.
- $P(Z=-1) = P(X=-9) + P(X=-5) + P(X=-1) + P(X=3) + P(X=7) = \frac{5}{21}$.
- $P(Z=0) = P(X=-10) + P(X=-8) + P(X=-6) + P(X=-4) + P(X=-2) + P(X=0) + P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + P(X=8) + P(X=10) = \frac{11}{21}$.

Exercice d'application 3. Déterminer les lois des variables aléatoires qui simulent les expériences aléatoires suivantes (et préciser quand ce sont des lois usuelles). On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100 dont les 25 premières sont rouges et les autres sont noires.

1) X suit une loi uniforme sur $[\![1,100]\!]$.

2) On a ici $X^2(\Omega) = \{k^2,\ k \in [\![1,100]\!]\}$ et $\forall k \in [\![1,100]\!]$, $P(X^2 = k^2) = \frac{1}{100}$. *On remarque que X^2 suit une loi uniforme sur $\{k^2,\ k \in [\![1,100]\!]\}$.*

3) On a ici $Y(\Omega) = \{0,1\}$. On a de plus :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{50} P(X=2k) = \frac{1}{2} \text{ et } P(Y=1) = \sum_{k=1}^{50} P(X=2k-1) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

4) On a ici $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (puisque l'on fait au moins un tirage et que l'on peut à priori en faire une infinité). A chaque tirage, on a une probabilité $p = \frac{1}{100}$ de tirer la boule numéro 100. Pour faire exactement k tirages avec $k \in \mathbb{N}^*$, il faut ne pas avoir tiré la boule 100 lors des $k-1$ premiers tirages et avoir tiré la boule 100 au k-ième. Par indépendance des tirages, on en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(W=k) = p \times (1-p)^{k-1}.$$

Vous verrez l'an prochain que W suit ici une loi géométrique.

5) La probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{4}$. Z suit donc une loi binomiale de paramètre $(10, \frac{1}{4})$.

6) Puisque l'on effectue 3 tirages, on a $V(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ (on peut tirer entre 0 et 3 boules noires). Pour avoir $V=0$, il ne faut tirer que des boules rouges. Si on note R_i l'événement « on tire une boule rouge au i-ème tirage » et B_i l'événement « on tire une boule noire au i-ième tirage », on a d'après les probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(V=0) &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \\ &= \frac{25}{100} \times \frac{24}{99} \times \frac{23}{98} \\ &= \frac{25! \times 97!}{22! \times 100!}. \end{aligned}$$

De même, $P(V=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{75!97!}{72!100!}$. Pour avoir $P(V=1)$, on a 3 manières de tirer une boule noire en 3 tirages, ces 3 manières étant incompatibles. On a donc :

$$\begin{aligned} P(V=1) &= P((B_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap B_3)) \\ &= P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap B_3)) \\ &= \frac{75 \times 25 \times 24}{100 \times 99 \times 98} + \frac{25 \times 75 \times 24}{100 \times 99 \times 98} + \frac{25 \times 24 \times 75}{100 \times 99 \times 98} \\ &= 3 \times \frac{75 \times 25!97!}{23!100!}. \end{aligned}$$

Enfin, on a $P(V=2) = 1 - P(V=0) - P(V=1) - P(V=3)$. *Ici V ne suis pas une loi usuelle.*

Exercice d'application 4.

1) Y représente la moyenne des notes du prochain devoir de maths. C'est bien une variable aléatoire (on ne connait pas sa valeur à l'avance !)

2) On par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$.

3) On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i' = 2X_i - 3$. On a alors :

$$\mathbb{E}(Y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(2X_i - 3) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(2\mathbb{E}(X_i) - 3)\right) = 2\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{n}\times 3n = 2\mathbb{E}(Y) - 3.$$

Ce résultat est attendu ! Si on applique la même modification linéaire à chaque note, on s'attend à ce que la moyenne change de la même manière.

4) On a cette fois $X_i' = X_i + a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et on veut que $\mathbb{E}(Y') = 10$. Le même calcul qu'à la question précédente montre que $\mathbb{E}(Y') = \mathbb{E}(Y) + a$ (toujours par linéarité de l'espérance). On doit donc prendre $a = 10 - \mathbb{E}(Y)$. *On remarque que si $\mathbb{E}(Y) = 10$, on a $a = 0$. Il n'y a aucune modification à apporter !*

Exercice d'application 5. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}((X-1)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2X + 1) = \mathbb{E}(X^2) + 1 - 2\mathbb{E}(X)$. Par croissance de l'espérance, on a $\mathbb{E}((X-1)^2) \geq 0$, ce qui entraine bien que $\mathbb{E}(X^2) + 1 \geq 2\mathbb{E}(X)$.

Exercice d'application 6.

1) Par théorème de transfert, on a $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Par théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

On a donc pas $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$ (puisque $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ ici). Concernant les équivalents, en utilisant l'équivalent usuel de la série harmonique, on a $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ équivalent à $\dfrac{\ln(n)}{n}$ (et qui tend donc vers 0). Pour l'autre, on a $\dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$ équivalent à $\dfrac{2}{n}$ et qui tend donc aussi vers 0. *Mais pas à la même vitesse que l'espérance précédente !*

3) Toujours par théorème de transfert (et somme télescopique pour la fin du calcul) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\times\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \frac{\ln(n+1) - \ln(1)}{n} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 7.

1) Par théorème de transfert, on a $\mathbb{E}(X^k) = 0^k \times \mathbb{P}(X=0) + 1^k \times \mathbb{P}(X=1) = p$. *On remarque d'ailleurs que dans ce cas, on a l'égalité des variables aléatoires X et X^k car X est à valeurs dans* $\{0,1\}$.

2) Fixons $a \in \mathbb{R}$ (qui sera sans doute différent de 0 et de 1 sinon nous aurons un problème de définition) et posons $Y = \dfrac{1}{X-a}$. On a alors par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X-a}\right) = \frac{1}{0-a} \times P(X=0) + \frac{1}{1-a} \times P(X=1) = -\frac{1-p}{a} + \frac{p}{1-a}.$$

En mettant au même dénominateur, on trouve que cette espérance est nulle si et seulement si $-(1-a)(1-p)+ap=0$, soit si et seulement si $a = 1-p$. *Ce qui ne pose aucun problème car $p \in]0,1[$ donc la variable aléatoire Y est bien définie.*

Exercice d'application 8. On rappelle que la fonction indicatrice $1_{X\in A}$ vaut 1 pour tous les ω tels que $X(\omega) \in A$ et vaut 0 pour tous les ω tels que $X(\omega) \notin A$. $1_{X\in A}$ est donc une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = P(\{\omega \ / \ X(\omega) \in A\}) = P(X \in A)$. Une variable aléatoire de Bernoulli a une espérance égale à son paramètre, ce qui prouve que :

$$E(1_{X\in A}) = P(X \in A).$$

Exercice d'application 9. On a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ et une variance est positive donc $\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \geq 0$, soit $\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}(X))^2$.

Exercice d'application 10. On a $\mathbb{E}(aY+b) = a\mathbb{E}(Y)+b$ par linéarité de l'espérance et $\mathbb{V}(aY+b) = a^2\mathbb{V}(Y)$. Puisque $\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(Y)}$, on veut donc $a^2\mathbb{V}(Y) = 4$ et $a\mathbb{E}(Y)+b = 11$. On doit donc prendre $a = \pm\dfrac{2}{\sigma(Y)}$ et $b = 11 - a\mathbb{E}(Y)$.

Exercice d'application 11. Puisque l'exponentielle est strictement croissante, on a $X \geq a \Leftrightarrow e^X \geq e^a$. On a donc :

$$P(X \geq a) = P(e^X \geq e^a).$$

On a à présent e^X une variable aléatoire positive et $e^a > 0$. D'après l'inégalité de Markov :

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^X)}{e^a}.$$

Exercice d'application 12.

1) On a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$. On en déduit que $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{n}\right) = p$ et que $\mathbb{V}\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ (on a bien $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$, attention à ne pas oublier le carré !). On a donc d'après l'inégalité de Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2) Une rapide étude de fonction montrer que $\forall p \in [0,1], \ p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ (on trouve un maximum en $\dfrac{1}{2}$), ce qui prouve ce qui est demandé.

3) On a $\mathbb{P}(\frac{X}{n} \in]p-0.05, p+0.05[) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0.05\right)$. En passant au complémentaire, on obtient :

$$\mathbb{P}(\frac{X}{n} \in]p-0.05, p+0.05[) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0.05\right) \geq 1 - \frac{1}{4n(0.05)^2}.$$

On veut donc ici $1 - \frac{1}{4n(0.05)^2} = 0.9$, soit $n = 1000$.

Exercice d'application 13.

1) On a $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$ (on ne sait pas encore si le second dé lancé est D_2 ou D_3, il faut prendre en compte toutes les éventualités !). Pour calculer chacune case du tableau, on utilise les probabilités conditionnelles. On a :

$$\mathbb{P}(X = a \cap Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \times \mathbb{P}_{X=a}(Y = b).$$

On a alors par exemple $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{1}{6} \times 0$ (car D_2 ne donne jamais un résultat impair et si $X = 1$, cela signifie que le second dé lancé est D_2) et $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ (car les deux dés sont équilibrés). On complète de même pour arriver au tableau suivant (on note $p = \frac{1}{18}$) :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	0	p	0	p	0	p
2	p	0	p	0	p	0
3	0	p	0	p	0	p
4	p	0	p	0	p	0
5	0	p	0	p	0	p
6	p	0	p	0	p	0

2) La situation change un peu ici car si D_1 fait un résultat pair, on relance le même dé D_1. On a donc par exemple $\mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 1) = \mathbb{P}(X = 2) \times \mathbb{P}_{X=2}(Y = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Quand X est un nombre impair, là rien ne change par rapport à avant. En notant cette fois $p = \frac{1}{36}$, on obtient pour la loi conjointe :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	0	$2p$	0	$2p$	0	$2p$
2	p	p	p	p	p	p
3	0	$2p$	0	$2p$	0	$2p$
4	p	p	p	p	p	p
5	0	$2p$	0	$2p$	0	$2p$
6	p	p	p	p	p	p

Exercice d'application 14. On reprend les mêmes notations que dans le corrigé ci-dessus. On obtient à chaque fois la loi de X en sommant sur les lignes et celle de Y en sommant sur les colonnes.

1) On a $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in [\![1,6]\!]$. On a $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\mathbb{P}(Y = i) = 3p = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in [\![1,6]\!]$.

2) On a $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in [\![1,6]\!]$. On a $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\mathbb{P}(Y = 2i) = 9p = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(Y = 2i-1) = 3p = \frac{1}{12}$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Exercice d'application 15. Puisque l'on a deux variables aléatoires de Bernoulli, on a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{0, 1\}^2$. On a donc une loi conjointe de la forme (on note $a = P(X = 1 \cap Y = 1)$) :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	0	1
0		
1		a

On sait ensuite que $P(X = 1) = p$ et $P(Y = 1) = q$ donc on peut compléter la ligne 2 (la somme sur la ligne doit faire p) et la colonne 2 (la somme doit faire q). On peut alors compléter le dernier coefficient en utilisant le fait que la somme des éléments du tableau doit faire 1. On obtient donc comme loi conjointe :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	0	1
0	$1 - p - q + a$	$q - a$
1	$p - a$	a

Si X et Y sont indépendantes, on a $a = P(X = 1 \cap Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = pq$. Réciproquement, si $a = pq$, on a que la loi conjointe est de la forme :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	0	1
0	$(1 - p)(1 - q)$	$q(1 - p)$
1	$p(1 - q)$	a

On a donc bien que pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ et les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

Exercice d'application 16.

1) On remarque en regardant la seconde colonne que $\mathbb{P}(Y = 2) \geq 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$ (car toutes les cases sont des probabilités et sont donc positives). On a donc donc $P(Y = 2) > \frac{1}{3}$, Y ne peut pas suivre une loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.

2) Supposons par l'absurde X et Y indépendantes. On a alors $\mathbb{P}(X = 4 \cap Y = 1) = \mathbb{P}(X = 4)\mathbb{P}(Y = 1)$. Ceci entraine, puisque $\mathbb{P}(X = 4 \cap Y = 1) = 0$ que $\mathbb{P}(X = 4) = 0$ ou que $\mathbb{P}(Y = 1) = 0$. Or, on a $\mathbb{P}(Y = 1) \geq 0.1 + 0 > 0$ et $\mathbb{P}(X = 4) \geq 0 + 0.1 > 0$: absurde ! X et Y ne peuvent donc pas être indépendantes.

3)

a) Puisque X suit la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$, on a que pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{4} = 0.25$. On a alors en utilisant le fait que la somme des probas sur chaque ligne vaut 0.25 les lignes 1, 3 et 4 en entier. En utilisant $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.2$, on a alors que la somme sur la première colonne vaut 0.2 et on en déduit ensuite le dernier coefficient. On obtient donc comme loi conjointe :

$X(\Omega)\backslash Y(\Omega)$	1	2	3
1	0.1	0.1	0.05
2	0.05	0.2	0
3	0.05	0.1	0.1
4	0	0.1	0.15

b) On a $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. En sommant sur les colonnes, on obtient la loi (marginale) de Y : $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.2$, $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.5$ et $\mathbb{P}(Y = 3) = 0.3$.

c) On a $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.5$ donc en se reportant à la 2ieme colonne :

$$\mathbb{P}_{Y=2}(X=1) = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}_{Y=2}(X=2) = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{P}_{Y=2}(X=3) = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}_{Y=2}(X=4) = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$$

De même, on a $\mathbb{P}(X=4) = 0.25$ donc en se reportant à la 4ieme ligne :

$$\mathbb{P}_{X=4}(Y=1) = \frac{0}{0.25} = 0$$

$$\mathbb{P}_{X=4}(Y=2) = \frac{0.1}{0.25} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{P}_{X=4}(Y=3) = \frac{0.15}{0.25} = \frac{3}{5}$$

Exercice d'application 17. On a X et Y indépendantes donc e^X et e^Y sont indépendantes. On a alors :

$$\mathbb{E}(e^{X+Y}) = \mathbb{E}(e^X \times e^Y) = \mathbb{E}(e^X) \times \mathbb{E}(e^Y).$$

Exercice d'application 18.

1) Si on fait pile au k-ième lancer (donc si $Y_k = 1$), on passe d'une fortune X_k à une fortune $2X_k$. Si on fait face (donc si $Y_k = 0$), on passe par contre de X_k à $\frac{X_k}{2}$. On a donc que :

$$X_{k+1} = 2Y_kX_k + \frac{1}{2}(1-Y_k)X_k = \left(\frac{3Y_k+1}{2}\right)X_k.$$

X_k est une variable aléatoire qui ne dépend que de X_0 (qui est fixé) et de $(Y_1, \dots, Y_{k-1})$. Puisque les variables aléatoires $(Y_1, \dots, Y_k)$ sont mutuellement indépendantes, on en déduit d'après le lemme des coalitions que X_k et Y_k sont indépendantes.

2) Puisque X_k et Y_k sont indépendantes, l'espérance du produit vaut le produit des espérances. On a donc d'après la question précédente, en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \mathbb{E}\left(\frac{3Y_k+1}{2}\right)\mathbb{E}\left(X_k\right) = \left(\frac{3p+1}{2}\right)\mathbb{E}(X_k).$$

3) On a une suite géométrique de raison $\frac{3p+1}{2}$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{3p+1}{2}\right)^n \mathbb{E}(X_0) = \left(\frac{3p+1}{2}\right)^n X_0$.

Si $\frac{3p+1}{2} \geq 1$ (en encore plus si $\frac{3p+1}{2} > 1$!), l'espérance de notre fortune est croissante. On a donc intérêt à jouer si $p \geq \frac{1}{3}$.

Exercice d'application 19. Puisque X et Y sont indépendantes, alors X et $-Y$ aussi. On a donc :

$$\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Exercice d'application 20. Par linéarité de l'espérance et indépendante de ε_i et X_i, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_i X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_i)\mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n 0 \times m \\ &= 0.\end{aligned}$$

On procède de même pour la variance. On remarque tout d'abord que les variables aléatoires $(\varepsilon_i X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions. On a donc :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(\varepsilon_i X_i).$$

Si on revient à la définition de la variance, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\varepsilon_i X_i) &= \mathbb{E}((\varepsilon_i X_i)^2) - (\mathbb{E}(\varepsilon_i X_i))^2 \\ &= \mathbb{E}(1 \times X_i^2) - (\mathbb{E}(\varepsilon_i)\mathbb{E}(X_i))^2 && \text{car } \varepsilon_i^2 = 1 \text{ et que } \varepsilon_i \text{ et } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \mathbb{E}(X_i^2) - 0 \\ &= \mathbb{V}(X_i) + (\mathbb{E}(X_i))^2 \\ &= 1 + m^2.\end{aligned}$$

On en déduit finalement par somme que $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i\right) = n(1+m^2)$.