16. Dérivabilité

Exercice 1. (c) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si f est une fonction paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).

2) Montrer que si f est T-périodique, alors f' aussi.

Exercice 2. (c) Étudier la dérivabilité en 0 à gauche et à droite de $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x \leq 0 \\ x & \mapsto & x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3. (m) Soit $f(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ ssi $\alpha > 0$, que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ssi $\alpha > 1$ et que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ ssi $\alpha > 2$.

Exercice 4. (m) Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = h(a)$ et que f et h soient dérivables en a. Montrer que g est dérivable en a.

Exercice 5. (c) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. À l'aide de la fonction $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 6. (m) Soit f et g deux fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\exists c \in]a,b[\ / \ [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Exercice 7. (c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Montrer que f'' s'annule sur $[0,1]$.

Exercice 8. (m) Soit f continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 9. (i) Soit f 1-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que f s'annule au moins n fois sur $[0,1[$. Montrer que f' s'annule également au moins n fois sur $[0,1[$.

Exercice 10. (i) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 11. (c) En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que :

1) Si $0 < a < b$, alors $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \dfrac{1}{a}$. En déduire que pour $x \neq 1$, $1 - \dfrac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$.

2) Si $0 < x < 1$, alors $\arcsin(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3) Si $0 < x$, alors $\dfrac{x}{1 + x^2} < \arctan(x)$.

Exercice 12. (m) En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 13. (i) Soit un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $P(t) = e^t$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles.

Exercice 14. (i) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que la dérivée de f s'annule sur $[a, b]$.

Exercice 15. (i) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ dérivable en 0 telle que $|f'(0)| < 1$ et $\forall x \in]0, 1],\ |f(x)| < x$.

1) Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, 1]$.

2) En déduire que $\exists k \in [0, 1[\ /\ \forall x \in [0, 1],\ |f(x)| \leq kx$.

Exercice 16. (m) ***f* de classe $\mathcal{C}^1$, c'est mieux que dérivable !**

1) Soit $f(x) = x + 2x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. Prolonger f par continuité en 0, montrer que f ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) > 0$. Montrer que f n'est cependant croissante sur aucun voisinage de 0 (c'est à dire sur aucun intervalle du type $[-a, a]$ avec $a > 0$).

2) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que f soit strictement croissante sur $[-a, a]$.

Exercice 17. (c) Soit f définie par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et par $f(x) = ax^2 + bx + c$ si $x > 0$. Déterminer les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que f soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^3$?

Exercice 18. (m) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

3) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) Construire à l'aide de la fonction f une fonction g $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x)$ est nulle pour $x \leq -1$, nulle pour $x \geq 1$ et non nulle sur $] - 1, 1[$.

Exercice 19. (m) Calculer sur $]-1, 1[$ les dérivée n-ièmes de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, de $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et de $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 20. (m) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1) Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = n! \left(\ln(x) + 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 21. (m) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.