Année Scolaire 2022 – 2023

MATHÉMATIQUES MPSI$_{1,2}$ et MP2I

DS N°3

Samedi 26/11/2022 (4h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être encadrés ou soulignés à la ***règle****.*

Les différents problèmes doivent être rédigés sur des copies séparées.
La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Problème 1 : Analyse

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : Équation différentielle d'Euler

Le but de cette partie est de trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$
Dans les deux premières questions, on suppose que y est solution de l'équation et on va chercher son expression de deux manières indépendantes.

Q1) *Par un changement d'inconnue.*

a) Vérifier que la fonction $y_0 : x \mapsto x$ est solution de l'équation différentielle.

b) On va alors chercher y sous la forme $y(x) = y_0(x)z(x)$ avec z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer y' et y'' en fonction de z, z' et z'' et en déduire que z vérifie l'équation différentielle :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ z''(x) + \frac{1}{x}z'(x) = 0.$$

c) Déterminer alors l'expression de z' sur $\mathbb{R}_+^*$. *On posera $Z = z'$ et on se ramènera à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

d) En déduire finalement l'expression de z sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Procéder de même sur $\mathbb{R}_-^*$ et en déduire que y vérifie : $\begin{cases} \forall x>0, & y(x)=\lambda_1 x+\mu_1 x\ln(x) \\ & y(0)=0 \\ \forall x<0, & y(x)=\lambda_2 x+\mu_2 x\ln(-x) \end{cases}$
où $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes qu'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.

Q2) *Par un changement de variable.* Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t)=y(e^t)$.

a) Vérifier que z est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de $y(e^t), y'(e^t)$ et $y''(e^t)$.

b) En déduire que z vérifie l'équation différentielle $z''(t)-2z'(t)+z(t)=0$.

c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire que $\exists(\lambda_1,\mu_1)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x>0,\ y(x)=\lambda_1 x+\mu_1 x\ln(x)$.
On pourrait alors trouver l'expression de y sur $\mathbb{R}_-^*$ en posant $z(t)=y(-e^t)$. On ne demande pas de le faire.

Q3) *Synthèse.* On reprend alors l'expression de y de la question 1.e et on cherche pour quelles valeurs de $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler la définition de « la fonction y est dérivable en 0 » et montrer que pour avoir y dérivable en 0, alors on doit avoir $\mu_1=\mu_2=0$ et $\lambda_1=\lambda_2$.

b) En déduire finalement toutes les solutions de l'équation différentielle proposée sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Intégrale de Poisson

Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. *On pose* $\forall t\in\mathbb{R},\ f_\alpha(t)=\ln(1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2)$.

Q4) Vérifier que f_α est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. *On pourra faire apparaître une identité remarquable.*
Ceci nous permet de poser $J_\alpha=\int_0^\pi f_\alpha(t)dt$ *l'intégrale de Poisson associée à* α.

Q5) *Quelques relations.*

a) Sans calculer l'intégrale, montrer que si $\alpha\neq 0$, $J_{\frac{1}{\alpha}}=J_\alpha-2\pi\ln(|\alpha|)$.

b) En posant le changement de variable $t=\pi-x$, montrer que $J_\alpha=J_{-\alpha}$.

c) En intégrant par parties, déterminer une relation entre $I_\alpha=\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}dt$ et J_α.

Q6) *Expression de* J_α *comme une limite.* Pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$, on pose $\beta_k=e^{\frac{ik\pi}{n}}$ les $2n$ racines $2n$-ièmes de l'unité (c'est à dire les solutions de $z^{2n}=1$) et on admet alors que l'on a la factorisation :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(z-\beta_k).$$

a) Donner les valeurs de β_0 et β_n et montrer que pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $2n-k\in[\![n+1,2n-1]\!]$ et que $\overline{\beta_k}=\beta_{2n-k}$.

b) Justifier à l'aide d'un changement d'indice que $\prod_{k=n+1}^{2n-1}(z-\beta_k)=\prod_{k=1}^{n-1}(z-\overline{\beta_k})$.

c) En déduire que $\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\beta_k)(\alpha-\overline{\beta_k})=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$.

d) En admettant que $J_\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$ (ce que l'on justifiera plus tard dans l'année à l'aide des sommes de Riemann), justifier que :

$$J_\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right).$$

Q7) *La conclusion.*

a) Montrer que $J_\alpha = 0$ si $\alpha \in [0;1[$.

b) En déduire l'expression de J_α selon si $|\alpha| < 1$ ou $|\alpha| > 1$. *On pourra utiliser la question 5.*

Q8) *Un exemple.* À l'aide des résultats précédents, déterminer $\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{5-4\cos(t)}\,dt$.

Problème 2 : Algèbre

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : Une formule de trigonométrie

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. *On pose* $A = \omega + \omega^4 + \omega^9 + \omega^5 + \omega^3$ *et* $B = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$.

Q1) a) Montrer que $\omega^{11} = 1$ et que $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega} = \omega^{10}$.

b) Calculer de même les conjugués de ω^4, ω^9, ω^5 et ω^3, en fonction de ω.

c) En déduire que A et B sont conjugués.

Q2) a) Montrer que la partie imaginaire de A est la somme de cinq sinus dont quatre sont strictement positifs, et un strictement négatif.

b) En déduire que la partie imaginaire de A est positive (**sans calcul numérique**).

Q3) a) Démontrer que $A + B = -1$ et $A \times B = 3$.

b) En déduire la valeur de A et celle de B.

Q4) a) Démontrer que $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$.

b) Vérifier que $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = (B - A) + 2(\omega - \omega^{10})$.

c) En déduire la formule trigonométrique : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$.

Partie II : Identité binomiale d'Abel

Q5) *Question préliminaire.* Soient n, p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$, on pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p$$

On veut prouver que $S_{n,p}$ est nul, pour cela on effectue une récurrence sur p en considérant le prédicat :

$$R(p) : \text{« } \forall n > p, S_{n,p} = 0 \text{ ».}$$

On rappelle que pour tout réel x, $x^0 = 1$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $S_{n,0} = 0$. *On a donc établi que* $R(0)$ *est vrai.*

b) Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $R(p)$ est vrai. Soit n un entier tel que $n > p+1$.

i) Montrer que $S_{n,p+1} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^p$.

ii) Justifier que pour $k > 0$, $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$.

iii) En déduire que $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$.

c) Terminer la récurrence et conclure.

Dans la suite de cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$, *pour* $t \in \mathbb{R}$, *on pose :*

$$f_n(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-k)^{k-1}(t+k)^{n-k}$$

où x *est un réel fixé (la somme est nulle par convention si* $n = 0$*). La fonction* f_n *ainsi définie est polynomiale.*

On va démontrer dans la suite, ***par récurrence sur*** n, *que :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ f_n(t) = (x+t)^n \text{ (prédicat noté } P(n)\text{)}.$$

Q6) Vérifier que $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on suppose* $P(n)$ *vraie, et on va montrer* $P(n+1)$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *un réel fixé.*

Q7) Soit $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f'_{n+1}(t) = (n+1)t^n + \sum_{k=1}^{n} (n+1)\binom{n}{k} x(x-k)^{k-1}(t+k)^{n-k}$.

On remarquera en justifiant que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $(n+1-k)\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k}$.

b) En déduire que $f'_{n+1}(t) = (n+1)(x+t)^n$.

c) En déduire que $f_{n+1}(t) = (x+t)^{n+1} + f_{n+1}(-x)$.

d) Montrer que $f_{n+1}(-x) = x \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}(x-k)^n$.

e) En déduire que :

$$f_{n+1}(-x) = x \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{n}{p} (-1)^{n+1-k}(-1)^p x^{n-p} k^p = x(-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x^{n-p} S_{n+1,p}$$

où $S_{n+1,p}$ a été défini dans la question Q5.

f) Terminer la récurrence et conclure.

Q8) *Généralisation.* Soient a, x, y des réels et $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} \quad \text{(identité binomiale d'Abel).}$$

On commencera par le cas où $a = 0$. *Puis pour* $a \neq 0$, *on utilisera la propriété* $P(n)$ *avec* $\frac{x}{a}$ *et* $\frac{y}{a}$.

– FIN –