2. Sommes, corrigé

Exercice 1.

1) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{j=0}^{n-2}(n-j)^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{p=2}^{n} p^2 \qquad \text{(on a effectué le changement d'indice } p = n-j\text{)}\\ &= \sum_{k=0}^{1} k^2\\ &= 1.\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^5 - \sum_{j=4}^{n+2}(j-2)^5 &= \sum_{k=1}^{n} k^5 - \sum_{p=2}^{n} p^5 \qquad \text{(on a effectué le changement d'indice } p = j-2\text{)}\\ &= \sum_{k=1}^{1} k^5\\ &= 1.\end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3^{k+2} &= 3^3 \times \left(\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}\right)\\ &= 3^3 \times \left(\sum_{j=0}^{n-1} 3^{j}\right) \qquad \text{(on a effectué le changement d'indice } j = k-1\text{)}\\ &= 3^3 \times \frac{1-3^n}{1-3}\\ &= \frac{3^{n+3}}{2} - \frac{27}{2}.\end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} 2^{2k} &= \sum_{k=2}^{n} 4^k\\ &= 4^2 \times \sum_{2}^{n} 4^{k-2}\\ &= 16 \times \sum_{j=0}^{n-2} 4^{j} \qquad \text{(on a effectué le changement d'indice } j = k-2\text{)}\\ &= 16 \times \frac{1-4^{n-1}}{1-4}\\ &= \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}$. Après simplification et mise au même dénominateur, on en déduit que :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k\right) = \left(\frac{2^n-3^n}{-2^{n-1}}\right)$$

ce qui entraine l'égalité demandée en multipliant l'égalité précédente par 2^{n-1}.

2) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}$, ce qui entraine l'égalité demandée.

3) D'après le binôme de Newtion, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0^n$. La quantité proposée vaut donc 0 car $n \geq 1$. *Cette quantité vaut 1 si* $n = 0$.

4) On a en utilisant le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 3^k 2^{-k} &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k 2^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n}(-3+2)^n \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Exercice 3. Soient $p \leq q$ des entiers et $a, b \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(ak+b) &= a\sum_{k=p}^{q} k + b\sum_{k=p}^{q} 1 \\ &= a\left(\sum_{k=0}^{q-p}(k+p)\right) + (q-p+1)b \\ &= a\sum_{k=0}^{q-p} k + a\sum_{k=0}^{q-p} p + (q-p+1)b \\ &= a\frac{(q-p)(q-p+1)}{2} + ap(q-p+1) + (q-p+1)b \\ &= (q-p+1)\left(\frac{a(q-p)}{2} + ap + b\right) \\ &= (q-p+1)\left(\frac{a(q+p)}{2} + b\right).\end{aligned}$$

Exercice 4. On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\exp(k) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).\end{aligned}$$

On a ici seulement utilisé le fait que $\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$ *mais appliqué à une somme de* n *termes.*

Exercice 5.

1) On a $S_0 = n+1$ et $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) On va développer le cube :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\ &= 3S_2+3S_1+S_0.\end{aligned}$$

En utilisant une somme télescopique, on trouve également que $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}3S_2+3S_1+S_0 &= 3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= 3S_2+\frac{n+1}{2}\cdot(3n+2)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}3S_2 &= (n+1)^3-\frac{(n+1)(3n+2)}{2}\\ &= \frac{n+1}{2}\cdot\left(2(n+1)^2-3n-2\right)\\ &= \frac{n+1}{2}\cdot\left(2n^2+n\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) De la même manière, on a $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4=(n+1)^4$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4 &= \sum_{k=0}^{n}\left(4k^3+6k^2+4k+1\right)\\ &= 4S_3+6S_2+4S_1+S_0\\ &= 4S_3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n+1\\ &= 4S_3+(n+1)(2n^2+3n+1)\\ &= 4S_3+(n+1)^2(2n+1).\end{aligned}$$

On a alors, en identifiant les deux égalités :

$$\begin{aligned}4S_3 &= (n+1)^4-(n+1)^2(2n+1)\\ &= (n+1)^2(n^2+2n+1-2n-1)\\ &= (n+1)^2n^2.\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On remarque que l'on a $\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)^2$*, ce qui est plutôt surprenant !*

Toujours avec la même méthode, on trouve que $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5-k^5=(n+1)^5$ et que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5-k^5 &= \sum_{k=0}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)\\ &= 5\sum_{k=0}^{n}k^4+\frac{1}{6}(n+1)(15n^3+35n^2+25n+6).\end{aligned}$$

On trouve alors, après calculs, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Exercice 6.

1) On utilise une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

2) On fait cette fois apparaitre un produit télescopique :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

3) On fait apparaitre une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \ln(n+1) - \ln(2).
\end{aligned}$$

4) On utilise une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Exercice 8. On sÃ©pare en indices pairs/impairs. Pour la somme des pairs, si on pose $k = 2j$, on aura j variant entre 1 et n. Pour la somme des impairs, en posant $k = 2i - 1$, on aura i variant entre 1 et n. On en dÃ©duit que :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3 &= \sum_{j=1}^{n}(2j)^3 - \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 \\
&= 8\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{i=1}^{n}(8i^3 - 12i^2 + 6i - 1) \\
&= 12\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n \\
&= n(4n^2 + 6n + 2 - 3n - 3 + 1) \\
&= n(4n^2 + 3n) \\
&= n^2(4n+3).
\end{aligned}
$$

.

Exercice 10. On va montrer le résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall a_1, \dots, a_n \in]0,1[$, $\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$ ».

- La propriété est vraie au rang 1. En effet, on a bien pour tout $a_1 \in]0,1[$, $1 - a_1 \leq 1 - a_1$.

- Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in]0,1[$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\right) \times (1 - a_{n+1}) \\
&\geq \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times (1 - a_{n+1}) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que } \\
&\qquad\qquad 1 - a_{n+1} > 0 \text{ ce qui ne change pas les inégalités)} \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1} + a_{n+1} \times \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i + a_{n+1} \times \sum_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}
$$

  Or, le dernier terme de la somme est positif car les a_i sont tous strictements positifs. On a donc bien $\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est donc vraie à tout rang.

Exercice 11. Posons $A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$. Remarquons tout d'abord que si $n = 0$, on a $A_n = 1$ et $B_n = 0$. Supposons à présent $n \geq 1$. On remarque alors que la somme et la différence de A_n avec B_n se simplifie grandement (A_n correspond en effet à la somme des indices pairs et B_n à la somme des indices impairs). On a tout d'abord :

$$
\begin{aligned}
A_n + B_n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \\
&= 2^n.
\end{aligned}
$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \\ &= (1-1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

On déduit de ces deux équations que $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

Exercice 12. On va montrer l'égalité demandée par récurrence (les différents changements d'indice pour essayer de simplifier les sommes ne semblent pas donner de résultat).

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. »

- La propriété est vraie pour $n = 1$ (on a $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+j} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+j}. \end{aligned}$$

  On a donc montré $\mathcal{P}(n+1)$.
- La propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré qu'elle était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13.

On considère ce produit pour $n \geq 2$ (sinon le produit vaut 1 par convention). Factorisons le numérateur et le dénominateur pour faire apparaitre un produit télescopique. On a $p^3 - 1 = (p-1)(p^2+p+1)$ et $p^3 + 1 = (p+1)(p^2-p+1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1} &= \prod_{p=2}^{n} \frac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p+1)(p^2-p+1)} \\ &= \prod_{p=2}^{n} (p-1) \times \prod_{p=2}^{n} \frac{1}{p+1} \times \prod_{p=2}^{n} (p^2+p+1) \times \prod_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-p+1}. \end{aligned}$$

On peut alors effectuer des changements d'indice afin de faire apparaitre des simplifications. Dans le premier produit, on peut poser $k = p - 1$ et on peut poser $j = p + 1$ dans le second produit. On obtient donc, pour les deux premiers produits :

$$\begin{aligned}
\prod_{p=2}^{n}(p-1) \times \prod_{p=2}^{n} \frac{1}{p+1} &= \prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \\
&= \frac{2}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Pour les deux derniers produits, on va poser $p = i - 1$ dans le premier produit. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\prod_{p=2}^{n}(p^2+p+1) \times \prod_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-p+1} &= \prod_{i=3}^{n+1}((i-1)^2+(i-1)+1) \times \prod_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-p+1} \\
&= \prod_{i=3}^{n+1}(i^2-i+1) \times \prod_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-p+1} \\
&= \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{4-2+1} \\
&= \frac{n^2+n+1}{3}.
\end{aligned}$$

En regroupant les produits, on obtient $\displaystyle\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Exercice 14. Pour la première égalité, il faut simplifier les factorielles et réarranger les termes. Remarquons que l'on se place pour $0 \leq p \leq k \leq n$ pour que tout soit défini. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{(k-p)!((n-p)-(k-p))} \\
&= \frac{n!}{p!} \times \frac{1}{(k-p)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{k!}{p!(k-p)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{k}{p}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 2^k \qquad \text{(d'après le binome de Newton)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k \\
&= (-2+1)^n \qquad \text{(encore d'après le binome de Newton)} \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Exercice 15.

1) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij &= \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) && \text{(car les indices } i \text{ et } j \text{ sont indépendants)}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) && \text{(on factorise par une quantité indépendante de } i)\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j\\
&= \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}\\
&= n^2(n+1).
\end{aligned}$$

3) On remarque que si $i = j$ (les termes diagonaux du tableau), les termes sont nuls. Puisque $|i-j| = |j-i|$, on aura $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} |i-j| = \sum_{1\leq j<i\leq n} |i-j|$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| &= 2\sum_{1\leq i<j\leq n} |i-j|\\
&= 2\sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i)\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(j-i)\\
&= 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) - \frac{(j-1)j}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j(j-1)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{2n+1-3}{3}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.
\end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 1 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

5) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{2n+1+3}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

6) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq j\leq i\leq n} j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-i} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)i}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{2n+1-3}{3} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 16. Il est important de vérifier que les relations trouvées fonctionnent pour les petits indices ($n = 1$, $n = 2$ par exemple) afin de vérifier qu'il n'y a pas eu d'erreurs de calculs !

1) On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{1\leq i,j\leq n} ij &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij) \\
&= \prod_{i=1}^{n}(i^n n!) \\
&= (n!)^n \times (n!)^n \\
&= (n!)^{2n}.
\end{aligned}$$

2) On va séparer la somme selon si $i < j$ ou $i \geq j$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} i + \sum_{1\leq j\leq i\leq n} j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2-j}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2+j}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(2j^2+3j+1}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}+\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n}{6}\\
&= \frac{n}{36}\times\left(2(2n^2+3n+1)+9(n+1)+6\right)\\
&= \frac{n}{36}\times\left(4n^2+15n+17\right).
\end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq j\leq i\leq n}\binom{i}{j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}-1\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(2^i-1) \qquad \text{(d'après la formule du binôme)}\\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\right)-n\\
&= 2\frac{2^n-1}{2-1}-n\\
&= 2^{n+1}-n-2.
\end{aligned}$$

Exercice 18. Soient $n,m\in\mathbb{N}$ tels que $n\leq m$. On veut calculer $S_{n,m}=\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}$. Remarquons tout d'abord que si $n=m$, alors la somme proposée vaut 1. Supposons $m>n$. Quand on place les coefficients sur le triangle de Pascal, on remarque qu'ils sont tous sur la même diagonale. Afin d'utiliser la formule de Pascal, il suffit de changer le terme $\binom{n}{n}$ (le premier terme de la somme) en $\binom{n+1}{n+1}$ et on voit ensuite que l'on peut utiliser la formule de Pascal plusieurs fois afin de simplifier l'expression.

Afin de prouver ce résultat vraiment rigoureusement, on peut raisonner par récurrence sur m. Par récurrence sur m, on pose, pour $m\geq n$, $\mathcal{P}(m)$: « $\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\binom{m+1}{n+1}$ ».

La propriété est vraie pour $m=n$. Soit $m\geq n$ fixé. Grâce à la formule de Pascal, on montre ensuite que la propriété au rang m implique celle au rang $m+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m+1}\binom{k}{n} &= \sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}+\binom{m+1}{n}\\
&= \binom{m+1}{n+1}+\binom{m+1}{n}\\
&= \binom{m+2}{n+1}
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.