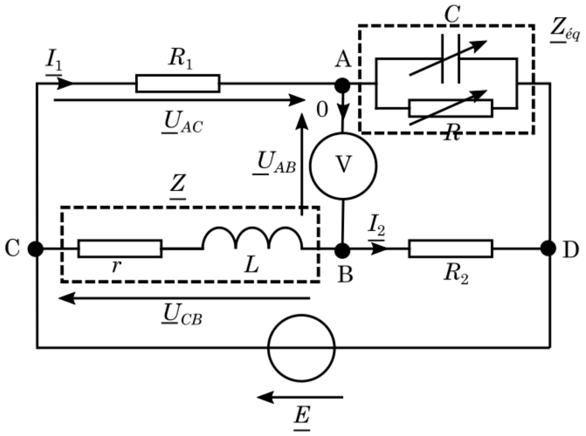
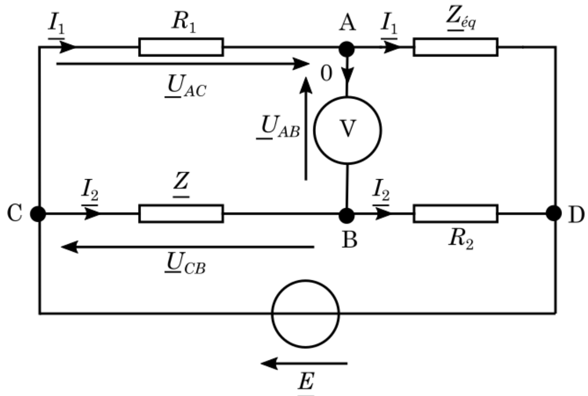
CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 6

Exercice 1 – Mesure des caractéristiques d'une bobine par équilibrage d'un pont

1. À $e(t) = E_M \cos(\omega t)$, on associe le nombre complexe $\underline{e}(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$ avec $\boxed{\underline{E} = E_M}$.

En régime sinusoïdal forcé, toutes les tensions ont la même pulsation ω. On travaille avec les amplitudes complexes et les impédances complexes des dipôles.





2. Impédance équivalente à L et r en série : $\boxed{\underline{Z} = r + jL\omega}$

3. Admittance équivalente à R et C en parallèle :

$$\underline{Y}_{éq} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{Z}_{éq} = \frac{1}{\underline{Y}_{éq}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}}$$

4. Diviseur de tension : $\underline{U}_{AC} = -\dfrac{R_1}{R_1 + \underline{Z}_{éq}} \underline{E}$ (Attention au signe « - » !)

$$\underline{U}_{AC} = -\frac{R_1}{R_1 + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}} \underline{E} = -\frac{R_1(1 + jRC\omega)}{R_1(1 + jRC\omega) + R} \underline{E} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{U}_{AC} = -\frac{R_1(1 + jRC\omega)}{R + R_1 + jR_1RC\omega} \underline{E}}$$

- Diviseur de tension : $\underline{U}_{CB} = \dfrac{\underline{Z}}{R_2 + \underline{Z}} \underline{E}$ soit $\boxed{\underline{U}_{CB} = \dfrac{r + jL\omega}{R_2 + r + jL\omega} \underline{E}}$

- Relation de Chasles : $\boxed{\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AC} + \underline{U}_{CB} = \left(-\dfrac{R_1(1 + jRC\omega)}{R + R_1 + jR_1RC\omega} + \dfrac{r + jL\omega}{R_2 + r + jL\omega} \right) \underline{E}}$

5. Pont équilibré : $\underline{U}_{AB} = 0 \Rightarrow -\dfrac{R_1(1 + jRC\omega)}{R + R_1 + jR_1RC\omega} + \dfrac{r + jL\omega}{R_2 + r + jL\omega} = 0$

$$\frac{r + jL\omega}{R_2 + r + jL\omega} = \frac{R_1(1 + jRC\omega)}{R + R_1 + jR_1RC\omega}$$

$$(r + jL\omega)(R + R_1 + jR_1RC\omega) = R_1(1 + jRC\omega)(R_2 + r + jL\omega)$$

On exploite l'égalité des parties réelles et des parties imaginaires.

$$\begin{cases} r\left(R+R_1\right)-L\omega R_1RC\omega = R_1\left(R_2+r\right)-R_1RC\omega L\omega \\ rR_1RC\omega + L\omega\left(R+R_1\right) = L\omega R_1 + R_1RC\omega\left(R_2+r\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} rR = R_1R_2 \\ L\omega R = R_1RC\omega R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} r = \dfrac{R_1R_2}{R} \\ L = R_1R_2C \end{cases}}$$

6. À $i_1(t) = I_{M1}\cos(\omega t+\varphi_1)$, on associe le nombre complexe $\underline{i_1}(t) = \underline{I_1}e^{j\omega t}$ avec $\boxed{\underline{I_1} = I_{M1}e^{j\varphi_1}}$.

➢ À $i_2(t) = I_{M2}\cos(\omega t+\varphi_2)$, on associe le nombre complexe $\underline{i_2}(t) = \underline{I_2}e^{j\omega t}$ avec $\boxed{\underline{I_2} = I_{M2}e^{j\varphi_2}}$.

7. Impédance équivalente à $\underline{Z_{éq}}$ et R_1 en série : $\underline{Z_1} = R_1 + \underline{Z_{éq}} = R_1 + \dfrac{R}{1+jRC\omega}$

$$\underline{Z_1} = \frac{R+R_1+jR_1RC\omega}{1+jRC\omega} \Leftrightarrow \underline{Y_1} = \frac{1+jRC\omega}{R+R_1+jR_1RC\omega}$$

Loi d'Ohm complexe : $\underline{E} = \underline{Z_1}\,\underline{I_1} \Leftrightarrow \underline{I_1} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z_1}} = \underline{Y_1}\,\underline{E} \Leftrightarrow \boxed{\underline{I_1} = \dfrac{1+jRC\omega}{R+R_1+jR_1RC\omega}\underline{E}}$

➢ Impédance équivalente à $\underline{Z}$ et R_1 en série : $\underline{Z_2} = R_2 + \underline{Z} = R_2 + r + jL\omega$

Loi d'Ohm complexe : $\underline{E} = \underline{Z_2}\,\underline{I_2} \Leftrightarrow \underline{I_2} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z_2}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{I_2} = \dfrac{\underline{E}}{R_2+r+jL\omega}}$

8. $i_1(t) = I_{M1}\cos(\omega t+\varphi_1)$ tel que :

Amplitude : $I_{M1} = \left|\underline{I_1}\right| = \left|\underline{Y_1}\right|\left|\underline{E}\right| \Leftrightarrow \boxed{I_{M1} = \dfrac{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}{\sqrt{(R+R_1)^2+(R_1RC\omega)^2}}E_M}$

Phase à l'origine : $\varphi_1 = \arg\left(\underline{I_1}\right) = \arg\left(\underline{Y_1}\right) + \arg\left(\underline{E}\right)$

$$\varphi_1 = \arg\left(1+jRC\omega\right) - \arg\left(R+R_1+jR_1RC\omega\right)$$

$$\boxed{\varphi_1 = \tan^{-1}\left(RC\omega\right) - \tan^{-1}\left(\frac{R_1RC\omega}{R+R_1}\right)}$$

➢ $i_2(t) = I_{M2}\cos(\omega t+\varphi_2)$ tel que :

Amplitude : $I_{M2} = \left|\underline{I_2}\right| = \dfrac{\left|\underline{E}\right|}{\left|\underline{Z_2}\right|} \Leftrightarrow \boxed{I_{M2} = \dfrac{1}{\sqrt{(r+R_2)^2+(L\omega)^2}}E_M}$

Phase à l'origine : $\varphi_2 = \arg\left(\underline{I_2}\right) = \arg\left(\underline{E}\right) - \arg\left(\underline{Z_2}\right) = -\arg\left(R_2+r+jL\omega\right)$

$$\boxed{\varphi_2 = -\tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{r+R_2}\right)}$$

Exercice 2 – La combinaison de plongée *(d'après CCP TPC 2015)*

1. $\left[\Phi_{p\to e}\right]=\left[\mathscr{P}\right]=\left[E\right]T^{-1}=MLT^{-3}$ et $\left[T\right]=\theta$ d'où $\left[K_{pe}\right]=\left[\Phi_{p\to e}\right]\theta^{-1}=MLT^{-3}\theta^{-1}$:
   K_{pe} est en <u>kg.m^2.s^3.K^{-1}</u> ou <u>W.K^{-1}</u>

- Analogie thermo-électrique : $T-T_e \leftrightarrow V_1-V_2$ et $\Phi_{p\to e}\leftrightarrow I$
- Loi d'Ohm : $V_1-V_2=RI=\dfrac{1}{G}I\leftrightarrow T-T_e=\dfrac{1}{K_{pe}}\Phi_{p\to e}$: G est une conductance électrique donc K_{pe} est une <u>conductance thermique</u> (plus K_{pe} est élevée, plus le flux thermique est important).

2. <u>Système</u> : plongeur = <u>phase condensée</u>

- Quantité de chaleur échangée avec l'extérieur : $\boxed{\delta Q=-\Phi_{p\to e}dt=-K_{pe}\left(T-T_e\right)dt}$
- Pour $T>T_e$, $\delta Q<0$: le <u>plongeur fournit du transfert thermique à l'eau</u> car le flux thermique va de la zone de température élevée (le plongeur) vers la zone de température faible (l'eau).

3. <u>Premier principe</u> pour une transformation élémentaire : $dU=\delta Q+\delta W_P+\delta W_u$
   Variation d'énergie interne : $dU=CdT$
   Travail des forces de pression $\delta W_P=0$
   Travail utile = chaleur produite par le plongeur : $\delta W_u=\Phi_{th}dt$

$$CdT=-K_{pe}\left(T-T_e\right)dt+\Phi_{th}dt\Leftrightarrow C\frac{dT}{dt}+K_{pe}\left(T-T_e\right)=\Phi_{th}$$

$$\frac{C}{K_{pe}}\frac{dT}{dt}+\left(T-T_e\right)=\frac{1}{K_{pe}}\Phi_{th}\Leftrightarrow\boxed{\tau\frac{dT(t)}{dt}+\left(T(t)-T_e\right)=\frac{\tau}{C}\Phi_{th}}\text{ avec }\boxed{\tau=\frac{C}{K_{pe}}}$$

4. Solution de l'essm : $T(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

   Solution particulière : $T-T_e=\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}\Leftrightarrow T=T_e+\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}$

   Solution complète : $T(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+T_e+\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}$

   Condition initiale : $T(0)=A+T_e+\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}=T_p\Leftrightarrow A=T_p-\left(T_e+\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}\right)$

   Solution finale : $\boxed{T(t)=\left(T_p-T_e-\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+T_e+\dfrac{\tau}{C}\Phi_{th}}$

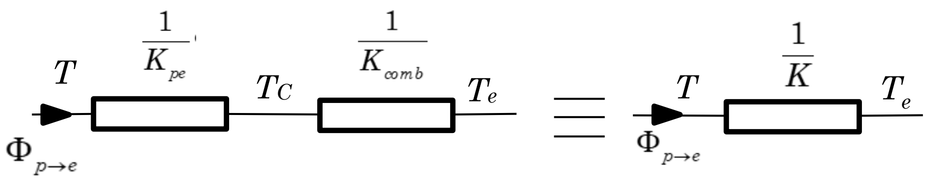
5. $\boxed{\tau=1{,}9.10^4\text{ s}=5{,}2\text{ h}}$ Le régime permanent est atteint au bout de 3τ soit 15 h environ, ce qui paraît suffisamment long. Mais la température considérée est celle de la totalité du corps du plongeur. Les extrémités se refroidiront plus rapidement.

6. Régime permanent : $\boxed{T_f = T_e + \frac{\tau}{C}\Phi_{th} = T_e + \frac{1}{K_{pe}}\Phi_{th} = 26\ °\text{C}}$

➢ $\boxed{T_f < T_h = 35\ °\text{C}}$: le plongeur est en <u>hypothermie</u> !

7. Analogie thermo-électrique : $T - T_e \leftrightarrow V_1 - V_2$ et $\Phi_{p\to e} \leftrightarrow I$

   Le flux thermique $\Phi_{p\to e}$ est la <u>grandeur commune</u> qui traverse différents matériaux (en série) : le corps du plongeur de conductance thermique K_{pe} et la combinaison de conductance thermique K_{comb}. On note T_C la température à l'intérieur de la combinaison.



   Lois d'Ohm thermiques : $T - T_C = \frac{1}{K_{pe}}\Phi_{p\to e}$ et $T_C - T_e = \frac{1}{K_{comb}}\Phi_{p\to e}$

$$T - T_e = (T - T_C) + (T_C - T_e) = \frac{1}{K_{pe}}\Phi_{p\to e} + \frac{1}{K_{comb}}\Phi_{p\to e} \Leftrightarrow T - T_e = \left(\frac{1}{K_{pe}} + \frac{1}{K_{comb}}\right)\Phi_{p\to e}$$

$$T - T_e = \frac{1}{K}\Phi_{p\to e} \text{ avec } \frac{1}{K} = \frac{1}{K_{pe}} + \frac{1}{K_{comb}}$$

$$\boxed{\Phi_{p\to e} = K(T - T_e)} \text{ avec } \boxed{K = \frac{K_{pe}K_{comb}}{K_{pe} + K_{comb}}}$$

8. <u>Résistance thermique</u> : $\frac{1}{K} = \frac{1}{K_{pe}} + \frac{1}{K_{comb}} > \frac{1}{K_{pe}}$

➢ <u>Constante de temps :</u> $\boxed{\tau' = \frac{C}{K} > \tau = \frac{C}{K_{pe}}}$: avec la combinaison, la température du plongeur diminue plus lentement.

➢ $\boxed{T'_f = T_e + \frac{1}{K}\Phi_{th} > T_f = T_e + \frac{1}{K_{pe}}\Phi_{th}}$: la <u>température finale</u> est plus élevée avec la combinaison : le risque d'hypothermie est réduit.

Exercice 3 – Gaz dans deux cylindres *(d'après ICNA 2017)*

1. Nombre de molécules de diazote dans un compartiment : $\boxed{N = nN_A = 2{,}4.10^{23}}$

➢ Masse d'une molécule de diazote : $\boxed{m = \frac{M}{N_A} = 4{,}7.10^{-26}\ \text{kg}\left(= 4{,}7.10^{-23}\ \text{g}\right)}$

2. $\begin{cases} C_P - C_V = nR \\ \gamma = \dfrac{C_P}{C_V} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_P = \gamma C_V \\ (\gamma - 1) C_V = nR \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} C_P = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1} \\ C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1} \end{cases}}$

Sous-système	Σ_1 : diazote = GP dans compartiment (I)	Σ_2 : diazote = GP dans compartiment (II)
État initial : EI	n, V_1, T_1, p_0	n, V_2, T_2, p_0
État final : EF	$n, V_{f1}, T_{f1} = T_f, p_{f1}$	$n, V_{f2}, T_{f2} = T_f, p_{f2}$

3. Pour Σ_1 : Équation d'état du GP : $\boxed{V_1 = \dfrac{nRT_1}{p_0} = 1{,}2.10^{-2}\ \text{m}^3 = 12\ \text{L}}$ Attention aux unités !

➢ Pour Σ_2 : Équation d'état du GP : $\boxed{V_2 = \dfrac{nRT_2}{p_0} = 1{,}0.10^{-2}\ \text{m}^3 = 10\ \text{L}}$

4. Densités moléculaires initiales : $\boxed{n_1^* = \dfrac{N}{V_1} = 1{,}9.10^{25}\ \text{m}^{-3}}$ et $\boxed{n_2^* = \dfrac{N}{V_2} = 2{,}4.10^{25}\ \text{m}^{-3}}$

5. Pour Σ_1 : 1ère loi de Joule : $\boxed{\Delta U_1 = C_V\left(T_f - T_1\right)}$.

6. Pour Σ_1 : transformation monobare : $p_{ext} = p_0 = cste$ (pression de l'autre côté de la paroi mobile $\mathcal{P}_1$) d'où $\boxed{p_{f1} = p_0}$

➢ Travail des forces de pression : $W_1 = -\int_{V_1}^{V_{f1}} p_{ext} dV = -p_0 \int_{V_1}^{V_{f1}} dV = -p_0\left(V_{f1} - V_1\right)$

➢ Équation d'état dans EF : $p_0 V_{f1} = nRT_f$ et dans EI : $p_0 V_1 = nRT_1$

$$\boxed{W_1 = -nR\left(T_f - T_1\right)}$$

7. Pour Σ_1 : 1er principe : $\Delta U_1 = W_1 + Q_1 \Leftrightarrow Q_1 = \Delta U_1 - W_1$

$$\boxed{Q_1 = C_V\left(T_f - T_1\right) + nR\left(T_f - T_1\right) = \left(C_V + nR\right)\left(T_f - T_1\right)}$$

8. Pour Σ_2 : 1ère loi de Joule : $\boxed{\Delta U_2 = C_V\left(T_f - T_2\right)}$.

➢ Pour Σ_2 : transformation monobare : $p_{ext} = p_0 = cste$ (pression de l'autre côté de la paroi mobile $\mathcal{P}_2$) d'où $\boxed{p_{f2} = p_0}$

➢ Travail des forces de pression : $W_2 = -\int_{V_2}^{V_{f2}} p_{ext} dV = -p_0 \int_{V_2}^{V_{f2}} dV = -p_0\left(V_{f2} - V_2\right)$

➢ Équation d'état dans EF : $p_0 V_{f2} = nRT_f$ et dans EI : $p_0 V_2 = nRT_2$

$$\boxed{W_2 = -nR\left(T_f - T_2\right)}$$

➢ Pour Σ_2 : 1er principe : $\Delta U_2 = W_2 + Q_2 \Leftrightarrow Q_2 = \Delta U_2 - W_2$

$$\boxed{Q_2 = C_V\left(T_f - T_2\right) + nR\left(T_f - T_2\right) = \left(C_V + nR\right)\left(T_f - T_2\right)}$$

9. L'échange d'énergie thermique a lieu uniquement à travers la paroi diatherme $\mathcal{P}$, donc $\boxed{Q_2 = -Q_1}$

$$(C_V + nR)(T_f - T_2) = -(C_V + nR)(T_f - T_1) \Leftrightarrow T_f - T_2 = -T_f + T_1$$

$$\boxed{T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = 65\ °\text{C}}$$

10. $T_f < T_1$: $\boxed{Q_1 < 0}$: GP de Σ_1 fournit de la chaleur au GP de Σ_2 à travers la paroi diatherme $\mathcal{P}$

   $\boxed{W_1 > 0}$: GP de Σ_1 reçoit du travail mécanique de la part de l'extérieur au travers de la paroi mobile $\mathcal{P}_1$

- $T_f > T_2$: $\boxed{Q_2 > 0}$: GP de Σ_2 reçoit de la chaleur de la part de GP de Σ_1 à travers la paroi diatherme $\mathcal{P}$

  $\boxed{W_2 < 0}$: GP de Σ_2 fournit du travail mécanique à l'extérieur au travers de la paroi mobile $\mathcal{P}_2$

11. Système fermé $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, EI : $V_i = V_1 + V_2 = \dfrac{nR}{p_0}(T_1 + T_2) = \dfrac{nR}{p_0} 2T_f$

   EF : $V_f = V_{f1} + V_{f2} = \dfrac{nR}{p_0}(T_f + T_f) = \dfrac{nR}{p_0} 2T_f$: $\boxed{V_f = V_i}$: transformation isochore.

12. Pour Σ : toutes les parois sont calorifugées : transformation adiabatique

- De l'autre côté des parois mobiles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, $p_{ext} = p_0 = cste$: transformation monobare

13. Pour Σ : transformation adiabatique : $Q = 0$; transformation isochore : $W_P = 0$

   1er principe $\boxed{\Delta U = Q + W_P = 0}$

14. Pour Σ : $p_{ext} = p_0 = cste$: transformation monobare

   $T_{ext} = T_e = cste$: transformation monotherme

15. Pour Σ : 1er principe pour transformation monobare : $\Delta H' = Q'$

- Additivité : $\Delta H' = \Delta H_1' + \Delta H_2'$

Sous-système	Σ_1 : diazote = GP dans compartiment (I)	Σ_2 : diazote = GP dans compartiment (II)
État initial : EI	n, V_1, T_1, p_0	n, V_2, T_2, p_0
État final : EF	$n, V'_{f1}, T'_{f1}, p'_{f1}$	$n, V'_{f2}, T'_{f2}, p'_{f2}$

- Pour Σ_1 : transformation monobare $p'_{f1} = p_0$ et monotherme : $T'_{f1} = T_e$

  2nde loi de Joule : $\Delta H'_1 = C_P(T_e - T_1)$

- Pour Σ_2 : transformation monobare $p'_{f2} = p_0$ et monotherme : $T'_{f2} = T_e$

  2nde loi de Joule : $\Delta H'_2 = C_P(T_e - T_2)$

- Pour Σ : $Q' = C_P(T_e - T_1) + C_P(T_e - T_2)$ soit $\boxed{Q' = C_P(2T_e - T_1 - T_2)}$