6. Fonctions usuelles

Exercice 1. (m) Déterminer le plus grand intervalle contenant 2 sur lequel $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ est inversible. Calculer alors sa réciproque et tracer son graphe.

Exercice 2. (m) **Avec le théorème de la bijection continue.**

1) Montrer que l'équation $x\ln(x) = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $e^{-x^2} = e^x - 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (m) Montrer que sin est bijective de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ dans un intervalle que l'on précisera. Tracer le graphe de sa réciproque. Quel est le lien avec arcsin ?

Exercice 4. (m) Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) - \sin(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelles propriétés f^{-1} vérifient-elles (monotonie, régularité, symétrie) ?

Exercice 5. (c) Calculer $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{16\pi}{11}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{13\pi}{7}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{11\pi}{5}\right)\right)$.

Exercice 6. (c) Étudier $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$.

Exercice 7. (i) Montrer que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 8. (i) Résoudre l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \dfrac{2\pi}{3}$. Même question avec $= \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 9. (m) Étudier et tracer les fonctions $f : x \mapsto \arccos(\cos(x))$ et $g : x \mapsto \arctan(\tan(x))$.

Exercice 10. (m) Simplifier les expressions $f : x \mapsto \tan(2\arctan(x))$ et $g : x \mapsto \cos(\arctan(x))$.

Exercice 11. (m) On pose $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$. Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée. En déduire une expression simplifiée de f.

Exercice 12. (m) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 13. (m) Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$.

Exercice 14. (m) Montrer que $\forall x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 15. (m) On pose $f : x \mapsto \arccos(2x^2 - 1)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.

2) Simplifier l'expression de f et tracer son graphe. *On posera $x = \cos(u)$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ après avoir justifié que ce changement de variable est possible.*

3) On pose $g : x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$. Déterminer de même un changement de variable permettant de simplifier l'expression de g et tracer son graphe.

Exercice 16. (m) Résoudre les équations suivantes :

1) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

2) $2^{x^3} = 3^{x^2}$.

3) $x^y = y^x$ où $x, y \in \mathbb{N}^*$.

4) $x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 17. (m) Le but de l'exercice est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 3 \leq 2^{|\sin(x)|} + 2^{|\cos(x)|} \leq 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

1) Étudier la fonction $f : x \mapsto x2^{-x}$. On vérifiera en particulier que f est croissante sur $[0, 1]$.

2) On pose $g : \left\{ \begin{array}{lll} \left[0, \frac{\pi}{4}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^{\cos(x)} + 2^{\sin(x)} \end{array} \right.$. Justifier que g est croissante. *On pourra mettre $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = h(x) \times (f(\cos(x)) - f(\sin(x)))$ où h est à préciser.*

3) Déduire de la question précédente l'inégalité recherchée sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis la démontrer sur $\mathbb{R}$ tout entier à l'aide d'arguments de périodicité/symétrie.

Exercice 18. (m) Donner le domaine de définition et simplifier les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} \text{ et } f_2 : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(\ln(x)) + \operatorname{sh}(\ln(x))}{x}.$$

Exercice 19. (m) On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array} \right.$.

1) Vérifier que f est bien définie (c'est à dire que les ensembles de départ et d'arrivée sont corrects).

2) Simplifier pour $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{ch}(f(x))$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(\operatorname{ch}(t))$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 20. (m) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 21. (c) Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x$

3) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (\ln(x)) \cdot \ln(\ln(x))$

4) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

5) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(\ln(x))^3}{x^4}$

6) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln(x))^{\sin(x)/x}$.

Exercice 22. (i) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch}(x)))$.

Exercice 23. (m) Démontrer que $f : x \mapsto x + e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système $\left\{ \begin{array}{l} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{array} \right.$.