Problème 1 : Analyse

Partie I : Étude d'une fonction

Q1) *Préliminaires.*

a) La fonction arctan est la primitive sur $\mathbb{R}$, de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ qui s'annule en 0, par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x).}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+t^2} - (1-t^2) = \frac{1-(1-t^2)(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{t^4}{1+t^2} \geqslant 0$.
$\frac{1}{1+t^2} - (1-t^2+t^4) = \frac{t^4-(1+t^2)t^4}{1+t^2} = \frac{-t^6}{1+t^2} \leqslant 0$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 1-t^2 \leqslant \tfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1-t^2+t^4.}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, en appliquant la croissance de l'intégrale à l'encadrement précédent, on obtient : $\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \int_0^x (1-t^2+t^4)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne $\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \leqslant \arctan(x) \leqslant \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^x$, c'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \tfrac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5}.}$$

Q2) a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x} = \frac{\arctan(x)}{x} = f(x)$. On a aussi évidemment que $f(-0) = f(0)$, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x), \text{ la fonction } f \text{ est paire.}}$$

b) Pour x non nul, $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}$, on reconnaît le taux d'accroissement de arctan entre 0 et x, or la fonction arctan est dérivable en 0 et donc la limite lorsque x tend vers 0 (par valeurs non nulles) de $f(x)$ est $\arctan'(0) = 1 = f(0)$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\arctan(x)-x}{x^2}$, or d'après Q1c, pour $x > 0$, on a $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, ce qui entraîne que $-\frac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) - x \leqslant -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, et comme $x^2 > 0$, on en déduit que :
$-\frac{x}{3} \leqslant \frac{\arctan(x)-x}{x^2} \leqslant -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5}$, le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.
D'autre part, comme f est paire, on peut écrire en posant $X = -x$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{X\to 0^+} -\frac{f(X)-f(0)}{X-0} = 0$.
Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$$

Q3) a) Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[0;x]$, donc pour $t \in [0;x]$, on a $\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$, en utilisant la croissance de l'intégrale (car $0 < x$) on a $\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, comme $\frac{1}{1+x^2}$ est une constante dans la première intégrale, on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0, \tfrac{x}{1+x^2} \leqslant \int_0^x \tfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x).}$$

b) i) Sur $\mathbb{R}^*$, f est le produit de deux fonctions continues dérivables (arctan et la fonction inverse), donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour x non nul :

$$f'(x) = \frac{\arctan'(x)x - \arctan(x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} = \frac{x-(1+x^2)\arctan(x)}{(1+x^2)x^2}$$

$$\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \tfrac{x-(1+x^2)\arctan(x)}{(1+x^2)x^2}.}$$

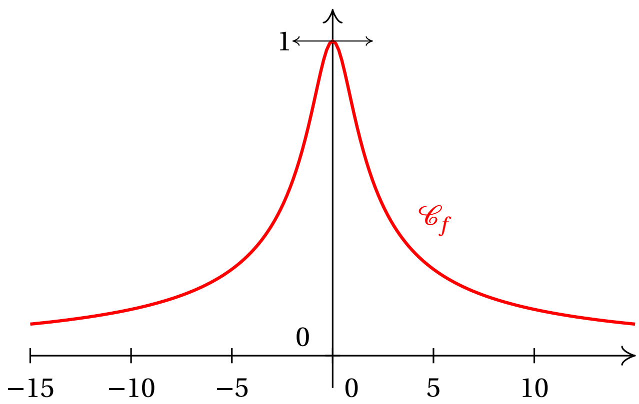
ii) Soit $x > 0$, on a vu que $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2}$, or on sait d'après la question précédente, que $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x)$, le numérateur de $f'(x)$ est donc négatif ou nul, et comme le dénominateur est positif, on obtient $f'(x) \leqslant 0$. On sait d'autre part que $f'(0) = 0$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) \leqslant 0.}$$

c) La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$, comme elle est paire, f est croissante sur $\mathbb{R}^-$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $\pm\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d) Allure de la courbe :



Q4) On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

a) La fonction $g \colon x \mapsto \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\frac{1}{x})$ est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables. On a :

$$g'(x) = \mathrm{F}'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{F}'(\frac{1}{x}) = \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\frac{\arctan(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})}{x}$$

Pour $x > 0$, on a $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ et donc $g'(x) = \frac{\pi}{2x}$, d'où :

$$\boxed{\forall x > 0, g'(x) = \frac{\pi}{2x}.}$$

b) On en déduit qu'il existe une constante c telle que $\forall x > 0$, $g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x) + c$, or $g(1) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(1) = 0$ ce qui entraîne que $c = 0$. D'autre part :

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)]_{\frac{1}{x}}^{x} = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\frac{1}{x})g(x)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall x > 0, \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(x) \text{ pour } x > 0.}$$

Partie II : Intégrales de Wallis

Q5) On a $\boxed{\mathrm{W}_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \mathrm{W}_1 = 1}$.

Q6) a) IPP dans W_{n+2} en posant $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = \sin^{n+1}(t)$, u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, on a $u'(t) = \sin(t))$ et $v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t)$, d'où :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \Big[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,dt \qquad (\text{car } \cos^2+\sin^2 = 1) \\
&= (n+1)[W_n - W_{n+2}]
\end{aligned}$$

on en déduit que $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n}$.

b) Avec une récurrence à deux pas, W_0 et W_1 sont strictement positifs, si pour un entier n on a $W_n > 0$ et $W_{n+1} > 0$, alors $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n > 0$, donc :

$$\boxed{\text{Tous les termes } W_n \text{ sont strictement positifs.}}$$

Q7) a) Lorsque $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ d'où $W_{n+1} \leqslant W_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

b) On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\frac{n+1}{n+2}W_n = W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, comme $W_n > 0$, on a : $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$ et donc par théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.}$$

Q8) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$, cette suite est donc constante donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}}$$

b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi = 2(n+1)W_nW_{n+1} = 2nW_n^2(1+\frac{1}{n})\frac{W_{n+1}}{W_n}$, comme $W_n > 0$, on en déduit que :

$$\sqrt{2n}W_n = \sqrt{\pi} \times \sqrt{\frac{W_n}{W_{n+1}(1+\frac{1}{n})}}$$

or $\frac{W_n}{W_{n+1}} \to 1$ et $(1+\frac{1}{n}) \to 1$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}W_n = \sqrt{\pi}.}$$

Q9) a) On pose $t = \sqrt{n}\cos(u)$ (fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$), on a $dt = -\sqrt{n}\sin(u)\,du$, si $u = 0$ alors $t = \sqrt{n}$, si $u = \frac{\pi}{2}$ alors $t = 0$, d'où $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}\left(1-\cos^2(u)\right)^n \sin(u)\,du$, ce qui donne (car $1-\cos^2(u) = \sin^2(u)$) :

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}\sin^{2n}(u)\sin(u)\,du = \sqrt{n}W_{2n+1}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{2(2n+1)}W_{2n+1} \times \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}$, or :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2(2n+1)}W_{2n+1} = \lim_{N\to+\infty} \sqrt{2N}W_N = \sqrt{\pi} \quad (\text{avec } N = 2n+1)$$

et $\frac{n}{2(2n+1)} = \frac{1}{4+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Partie III : Intégrale de Gauss

Q10) a) Pour $u = n$ c'est évident car $0 \leqslant e^{-u}$.
Supposons $u \in [0;n[$, alors $-\frac{u}{n} > -1$, donc $\ln(1-\frac{u}{n}) \leqslant -\frac{u}{n}$, d'où $n\ln(1-\frac{u}{n}) \leqslant -u$ et donc en prenant l'exponentielle (qui est croissante sur $\mathbb{R}$) :

$$\boxed{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}.}$$

b) Soit $f(u) = -u + \ln(1-\frac{u^2}{n}) - n\ln(1-\frac{u}{n})$ pour $u \in [0;\sqrt{n}[$, alors f est définie, continue, dérivable, et :

$$\begin{aligned}\forall u \in [0;\sqrt{n}[,\ f'(u) &= -1 - \frac{2u}{n-u^2} + \frac{n}{n-u}\\ &= \frac{(u^2-n)(n-u) - 2u(n-u) + n(n-u^2)}{(n-u)(n-u^2)}\\ &= \frac{u^2n - n^2 - u^3 + un + n^2 - u^2n - 2un + 2u^2}{(n-u)(n-u^2)}\\ &= -\frac{u(u^2-2u+n)}{(n-u)(n-u^2)} \leqslant 0 \text{ (car le trinôme } u^2-2u+n \text{ et le dénominateur sont positifs)}\end{aligned}$$

La fonction f est donc décroissante $[0;\sqrt{n}[$, or $f(0) = 0$ donc $\boxed{f(u) \leqslant 0}$ lorsque $u \in [0;\sqrt{n}[$.

c) Cette inégalité est évidente lorsque $u \in [\sqrt{n};n]$ car le membre de gauche est négatif ou nul, alors que celui de droite est positif.
Supposons $u \in [0;\sqrt{n}[$, alors on sait que $f(u) \leqslant 0$, c'est à dire $-u + \ln(1-\frac{u^2}{n}) \leqslant n\ln(1-\frac{u}{n})$, en prenant l'exponentielle, qui est croissante, on obtient $e^{-u} \times e^{\ln(1-\frac{u^2}{n})} \leqslant e^{n\ln(1-\frac{u}{n})}$, c'est à dire :

$$\boxed{e^{-u}\left(1-\frac{u^2}{n}\right) \leqslant \left(1-\frac{u}{n}\right)^n.}$$

d) Si $t \in [0;\sqrt{n}]$, il suffit de poser $u = t^2 \in [0;n]$ et d'appliquer les deux questions précédentes pour avoir :

$$e^{-t^2}\left(1-\frac{t^4}{n}\right) \leqslant \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t^2}\frac{t^4}{n} + \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n}$$

Q11) a) Pour $u \in \mathbb{R}^+$, on a $g'(u) = e^{-u}(3u^2 - u^3) = u^2e^{-u}(3-u)$, cette fonction s'annule en 0 et 3, elle est positive sur $[0;3]$ puis négative sur $[3;+\infty[$, il y a donc un maximum en 3 qui vaut :

$$\boxed{\mathrm{M} = g(3) = 27e^{-3}}$$

b) Soit $t \in [1;+\infty[$ et $u = t^2$, on sait que $e^{-u}u^3 \leqslant \mathrm{M}$, c'est à dire $e^{-t^2}t^6 \leqslant \mathrm{M}$, d'où :

$$e^{-t^2}t^4 \leqslant \frac{\mathrm{M}}{t^2}$$

En intégrant sur l'intervalle $[1,\sqrt{n}]$, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}\int_1^{\sqrt{n}} \frac{dt}{t^2} = \mathrm{M}\left[1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \leqslant \mathrm{M}$$

c) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}t^4$ étant positive, on a par positivité de l'intégrale et le relation de Chasles :

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_1^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{M}}{n}$$

on en déduit par le théorème des gendarmes (car $\int_0^1 e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t$ est une constante), que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Q12) a) On déduit de la question Q10d en intégrant de 0 à $\sqrt{n}$, et par croissance de l'intégrale, que :

$$\boxed{\mathrm{I}_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{I}_n + \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t.}$$

b) On sait également que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}t^4\,\mathrm{d}t = 0$, par conséquent d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{(intégrale de Gauss).}}$$

Problème 2 : Algèbre

Partie I

Q1) a) On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z\times\overline{z'}) &= \mathrm{Re}((x_1+iy_1)(x_2-iy_2))\\
&= \mathrm{Re}(\underbrace{(x_1x_2+y_1y_2)}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{(x_2y_1-x_1y_2)}_{\in\mathbb{R}})\\
&= \boxed{x_1x_2+y_1y_2}
\end{aligned}$$

b) Soit $u\in\mathbb{C}$, que l'on note $u = a+ib$ avec a, b réels. On écrit

$$\begin{aligned}
& 0\leqslant b^2 \quad \text{(car } b \text{ est réel)}\\
\Rightarrow\ & a^2 \leqslant a^2+b^2\\
\Rightarrow\ & \sqrt{a^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{(car } t\mapsto\sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+)\\
\Rightarrow\ & |a|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\\
\Rightarrow\ & \boxed{|\mathrm{Re}(u)|\leqslant|u|}
\end{aligned}$$

c) D'après Q1a appliquée à $u = z\overline{z'}$ et Q1b :

$$\begin{aligned}
|x_1y_1+x_2y_2| &= |\mathrm{Re}(z\overline{z'})|\\
&\leqslant |z\overline{z'}|\\
&\leqslant |z|\times|\overline{z'}|\\
&\leqslant |z|\times|z'|\\
&\leqslant \boxed{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\times\sqrt{y_1^2+y_2^2}}
\end{aligned}$$

Q2) a) On écrit

$$\begin{aligned}
|a| = r &\Rightarrow |a| = r^2\\
&\Rightarrow a\overline{a} = r^2\\
&\Rightarrow \boxed{\overline{a} = \frac{r^2}{a}} \quad \text{(car } a\neq 0)
\end{aligned}$$

De même pour $\boxed{\overline{b} = \dfrac{r^2}{b}}$.

b) On écrit

$$\overline{z_1} = \overline{\left(\frac{a+b}{r^2+ab}\right)} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{r^2+\overline{a}\overline{b}} = \frac{\frac{r^2}{a}+\frac{r^2}{b}}{r^2+\frac{r^2}{a}\frac{r^2}{b}} = \frac{r^2\frac{a+b}{ab}}{r^2\frac{r^2+ab}{ab}} = \frac{a+b}{r^2+ab} = z_1$$

donc $\boxed{z_1 \in \mathbb{R}}$. De même $\boxed{z_2 \in \mathbb{R}}$ car :

$$\overline{z_2} = \frac{\frac{r^2}{a}-\frac{r^2}{b}}{r^2-\frac{r^2}{a}\frac{r^2}{b}} = \frac{-r^2\frac{a-b}{ab}}{-r^2\frac{r^2-ab}{ab}} = z_2.$$

c) En notant $a = re^{i\alpha}$ et $b = re^{i\beta}$, on écrit

$$z_1 = \frac{re^{i\alpha}+re^{i\beta}}{r^2+re^{i\alpha}re^{i\beta}} = \frac{1}{r}\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i\alpha+\beta}} = \frac{1}{r}\frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}})}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}+e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}})} = \frac{1}{r}\frac{2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})} = \boxed{\frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{r\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}}$$

De même

$$z_2 = \frac{1}{r}\frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}})}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}-e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}})} = \frac{1}{r}\frac{2i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{-2i\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})} = \boxed{-\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{r\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}}$$

d) Utilisons Q1c avec

$$x_1 = \frac{|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})|}{|\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})|} \quad ; \quad x_2 = \frac{|\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})|}{|\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})|} \quad ; \quad y_1 = |\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})| \quad ; \quad y_2 = |\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})|$$

et en remarquant que

$$|x_1y_1+x_2y_1| = \left|\frac{|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})|}{|\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})|}\times|\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})| + \frac{|\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})|}{|\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})|}|\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})|\right| = |\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| + |\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})|$$

(la valeur absolue externe a été enlevée car $|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})|+|\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})| \geqslant 0$). D'autre part

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2}$$

(car les valeurs absolues dans un carré peuvent être enlevées), et

$$\sqrt{y_1^2+y_2^2} = \sqrt{\left(\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)^2 + \left(\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

On obtient donc bien

$$\boxed{|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| + |\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})| \leqslant \sqrt{\left(\frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2}}.$$

e) Commençons par prouver l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)|+|\sin(x)| \geqslant 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned}
&2|\cos(x)||\sin(x)| \geqslant 0\\
&\Rightarrow 1 + 2|\cos(x)||\sin(x)| \geqslant 1\\
&\Rightarrow \underbrace{(|\cos(x)|)^2 + (|\sin(x)|)^2}_{=1} + 2|\cos(x)||\sin(x)| \geqslant 1\\
&\Rightarrow (|\cos(x)| + |\sin(x)|)^2 \geqslant 1\\
&\Rightarrow \sqrt{(|\cos(x)| + |\sin(x)|)^2} \geqslant \sqrt{1}\\
&\Rightarrow \big|\,|\cos(x)| + |\sin(x)|\,\big| \geqslant 1\\
&\Rightarrow |\cos(x)| + |\sin(x)| \geqslant 1
\end{aligned}$$

Alors on déduit de Q2c par transitivité

$$1 \leqslant \sqrt{\left(\frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}\right)^2}$$

ce qui s'écrit

$$1 \leqslant \sqrt{(rz_1)^2 + (rz_1)^2}$$

et en divisant par $r > 0$

$$\boxed{\frac{1}{r} \leqslant \sqrt{z_1^2 + z_1^2}}$$

Partie II

Q3) a) On écrit

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 y_j^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 y_j^2 + 2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j x_j y_i$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 y_j^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^2 y_j^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \quad \text{(car } x_i^2 \text{ est indépendant de } j\text{)}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \quad \text{(car } \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \text{ est indépendant de } i\text{)}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)
\end{aligned}$$

La somme $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 y_j^2$ donne le même résultat (les rôles de i et j étant symétriques), et :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j x_j y_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i \sum_{j=1}^{n} y_j x_j\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc bien

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k \times y_k)\right)^2}.$$

b) La somme $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_iy_j - x_jy_i)^2$ est positive car tous ses termes sont positifs (les nombres x_i, y_i,x_j, y_j étant réels), donc

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k\times y_k)\right)^2 \geqslant 0$$

et en divisant par $2>0$ on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k\times y_k)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

puis en appliquant la fonction racine carrée (croissante sur $\mathbb{R}^+$) :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k\times y_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}}.$$

Q4) a) On utilise Q3b (en changeant l'indice k en p, et n en k) avec $x_p=\sqrt{a_p}$ et $y_p=\frac{p}{\sqrt{a_p}}$ (possible car $a_p>0$) :

$$\left|\sum_{p=1}^{k}\underbrace{\sqrt{a_p}\times\frac{p}{\sqrt{a_p}}}_{p}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{p=1}^{k}\left(\sqrt{a_p}\right)^2}\times\sqrt{\sum_{p=1}^{k}\left(\frac{p}{\sqrt{a_p}}\right)^2}$$

qui se simplifie en :

$$\frac{k(k+1)}{2} \leqslant \sqrt{\sum_{p=1}^{k} a_p}\times\sqrt{\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}}$$

et en élevant au carré (la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$) :

$$\boxed{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)\times\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}\right)}$$

b) En divisant l'inégalité précédente par $\frac{k(k+1)^2}{4}$ et par $\sum_{p=1}^{k} a_p$ (qui sont bien tous les deux strictement positifs) :

$$\underbrace{\frac{k}{\sum_{p=1}^{k} a_p}}_{=\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}$$

puis en sommant ces inégalités pour $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}\right) &= 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}\\
&= 4\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}\\
&= 4\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}\\
&= 4\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant 4\sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}}.$$

c) On écrit

$$\begin{aligned}
&2k \leqslant 2k+1\\
\Rightarrow &\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad \left(\text{car } \frac{1}{k^2(k+1)^2} > 0\right)\\
\Rightarrow &\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}\\
\Rightarrow &\boxed{\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}}
\end{aligned}$$

d) En sommant l'inégalité précédente (divisée par $2>0$) pour $k \in [\![p,n]\!]$:

$$\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\\
&= \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{\ell=p+1}^{n+1}\frac{1}{\ell^2} \quad (\text{en posant } \ell = k+1)\\
&= \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=p+1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\\
&= \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k^2} - \left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)\\
&= -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{p^2}\\
&\leqslant \frac{1}{p^2} \quad \left(\text{car } -\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2p^2}}.$$

e) En multipliant l'inégalité précédente par $\frac{p^2}{a_p} > 0$ on trouve

$$\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2a_p}$$

puis en sommant pour $p \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{a_p}$$

et en utilisant Q4b :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{a_p}}$$

(et l'indice de la deuxième somme peut bien sûr être renommé k au lieu de p).

Q5) a) D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1^n = \boxed{1}.$$

b) On écrit

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!\times(n-k)!} = k\frac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!\times(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!} = \boxed{n\binom{n-1}{k-1}}.$$

c) On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \underbrace{0}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\underbrace{x^{k+1}}_{x\times x^k}\underbrace{(1-x)^{n-(k+1)}}_{(1-x)^{(n-1)-k}} \qquad \text{(en posant } \ell = k+1)\\
&= nx(x+(1-x))^{n-1}\\
&= \boxed{nx}
\end{aligned}$$

d) Supposons d'abord $n \geqslant 2$. En utilisant deux fois successivement Q5b on obtient pour $k \in [\![2, n]\!]$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Alors, comme en Q5c

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{k+2}(1-x)^{n-2-k}\\
&= \boxed{n(n-1)x^2}
\end{aligned}$$

Alors, en écrivant que

$$(x-\frac{k}{n})^2 = x^2 - 2\frac{k}{n}x + \frac{\overbrace{k^2}^{k(k-1)+k}}{n^2} = x^2 + (-2\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2})k + \frac{1}{n^2}k(k-1)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= x^2\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)\\
&+(-2\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2})\left(\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)\\
&+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)\\
&= x^2\times 1+(-2\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2})nx+\frac{1}{n^2}n(n-1)x^2\\
&= x^2-2x^2+\frac{x}{n}+x^2-\frac{x^2}{n}\\
&= \boxed{\frac{x(1-x)}{n}}
\end{aligned}$$

e) On utilise Q3b (l'indice k commençant à 0 au lieu de 1) avec

$$x_k=|x-\frac{k}{n}|\sqrt{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}} \text{ et } y_k=\sqrt{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$

(possible car $x\in[0,1]$ donc $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geqslant 0$), on obtient :

$$\left|\underbrace{\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{=\Delta_n\geqslant 0}\right|\leqslant\sqrt{\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(x-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{=\frac{x(1-x)}{n}}}\times\sqrt{\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{=1}}$$

d'où

$$\boxed{\Delta_n(x)\leqslant\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}}.$$