DM 1, corrigé

Exercice 1. Un calcul.

1)

a) Un petit calcul montre que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (cf cours).

b) La question précédente nous incite à faire appraitre un terme en $\binom{n}{n-k}$. On va donc effectuer dans la définition de u_n le changement d'indice $j = n - k$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{\binom{n}{n-j}} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^n \times (-1)^{-j}}{\binom{n}{j}}. \end{aligned}$$

Or, on peut remarquer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(-1)^{-j} = (-1)^j$. En effet, $(-1)^j$ vaut 1 si j et pair et -1 si j est impair et j et $-j$ ont la même parité. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n u_n$.

Ceci entraine que pour n impair, on a $u_n = -u_n$, ce qui implique que $u_n = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ pair. On va reposer le même changement d'indice ($j = n - k$) en partant de v_n. On obtient :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{n-j} \times (n-j)}{\binom{n}{n-j}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{(-1)^n \times (-1)^{-j} \times (n-j)}{\binom{n}{j}} \right). \end{aligned}$$

On a toujours $(-1)^{-j} = (-1)^j$ et puisque n est pair, on a $(-1)^n = 1$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{(-1)^j \times (n-j)}{\binom{n}{j}} \right) \\ &= \frac{n}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{(-1)^j}{\binom{n}{j}} \right) - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{(-1)^j \times j}{\binom{n}{j}} \right) \\ &= \frac{n}{n+1} u_n - v_n. \end{aligned}$$

On a donc bien le résultat voulu.

3)

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)\times n!}{k!(n-k+1)\times(n-k)!} \\
&= \frac{n+1}{n-k+1}\times\binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{\binom{n+1}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\binom{n+1}{k}}\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} - \frac{1}{\binom{n+1}{k}}\right) + (-1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} - \frac{(n-k+1)}{(n+1)\binom{n}{k}}\right) + (-1)^n \qquad \text{(d'après le a)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}\times\left(\frac{n+1-(n-k+1)}{(n+1)}\right) + (-1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}\times\left(\frac{k}{(n+1)}\right) + (-1)^n \\
&= v_n + (-1)^n.
\end{aligned}$$

4) Lorsque n est pair, on a d'après $u_{n+1} = 0$ (d'après la question 1.b) et d'après la question précédente :

$$u_n - 0 = v_n + 1.$$

Or, on a également $2v_n = \dfrac{n}{n+1}u_n$ d'après la question 1.c. En réinjectant, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
2(u_n - 1) = \frac{n}{n+1}u_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(n+1)-n}{n+1}u_n = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{2n+2}{n+2}.
\end{aligned}$$

On vérifie par exemple que le résultat est juste pour $n = 0$ (on trouve 1) et pour $n = 2$ (on trouve $\dfrac{3}{2}$).

PROBLÈME
Résolution d'une équation fonctionnelle

Partie I. Étude de fonctions

1) *Étude de φ*

a) Une exponentielle étant toujours strictement positive, le dénominateur ne s'annule jamais. φ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est d'ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui nous servira dans la question suivante) en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant pas). Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(-x) &= \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} \\
&= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} \\
&= \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \\
&= -\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\
&= -\varphi(x).
\end{aligned}$$

φ est donc une fonction impaire.

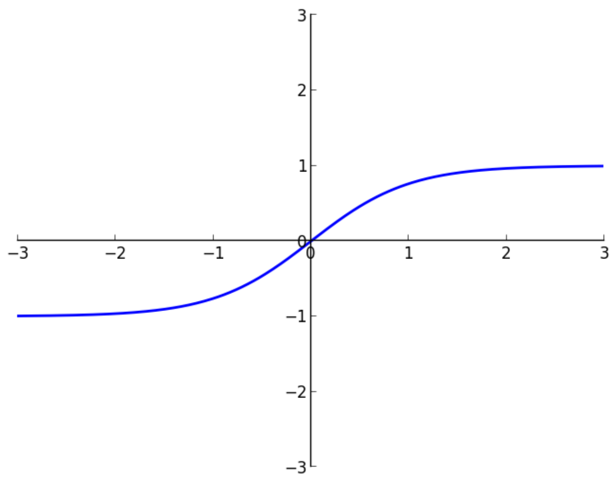
b) Comme on l'a vu à la question précédente, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - (e^{2x}-1) \times \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \\
&= \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \times \big((e^{2x}+1) - (e^{2x}-1)\big) \\
&= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.
\end{aligned}$$

Ceci entraine que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) > 0$. φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$, on en déduit par quotient de limites que $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$. Puisque la fonction est impaire, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.

c) On a le tracé suivant (la tangente à l'origine est la droite d'équation $y = x$) :



2) *Étude de ψ*

a) On doit étudier le signe de $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$. On remarque déjà que cette fonction n'est pas définie en 1. On a $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$ et $1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$. Un tableau de signes nous permet d'obtenir que $\dfrac{1+x}{1-x}>0$ si et seulement si $x \in]-1,1[$. Ceci entraine que ψ est définie sur $]-1,1[$.

On remarque que ψ est définie sur un ensemble symétrique par rapport à l'origine et que $\forall x \in]-1,1[$:

$$\psi(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\psi(x).$$

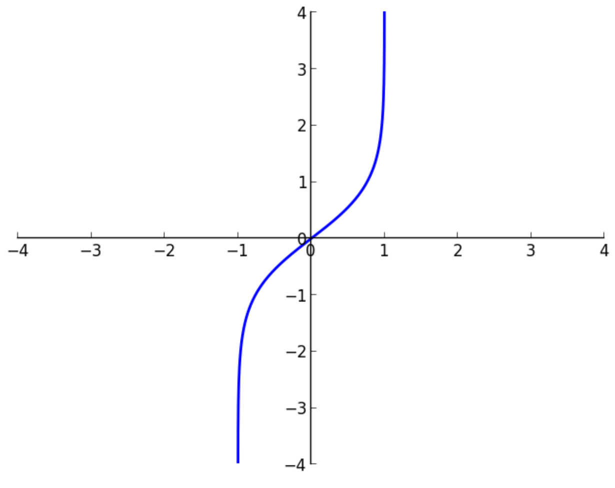
La fonction ψ est donc impaire.

b) Sur I, ψ est un composée de fonctions dérivables et est donc dérivable. On remarque que pour $x \in I$, on peut écrire $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$. On a alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}\right)\\ &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, $\forall x \in I,\ \psi'(x) > 0$. ψ est donc strictement croissante sur $I =]-1,1[$. On a $\dfrac{1+x}{1-x} \to_{x\to 1^-} +\infty$. Par composition de limites, on a donc $\psi(x) \to_{x\to 1^-} = +\infty$. De la même façon, $\dfrac{1+x}{1-x} \to_{x\to -1^+} 0^+$ donc par composition de limites, $\psi(x) \to_{x\to -1^-} = -\infty$.

d) On peut montrer que comme la fonction φ, ψ est impaire sur I. On a à nouveau une tangente d'équation $y = x$ en 0. On en déduit le tracé suivant :



3) On remarque que l'on a le droit de composer φ et ψ. En effet, ψ est définie sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et ψ est définie sur $\mathbb{R}$. On a alors pour $y \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(y)) &= \frac{e^{2\psi(y)}-1}{e^{2\psi(y)}+1} \\
&= \frac{e^{\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}-1}{e^{\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}+1} \\
&= \frac{\frac{1+y}{1-y}-1}{\frac{1+y}{1-y}+1} \\
&= \frac{\frac{1+y-(1-y)}{1-y}}{\frac{1+y+(1-y)}{1-y}} \\
&= \frac{\frac{2y}{1-y}}{\frac{2}{1-y}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

On remarque que les graphes de ϕ et ψ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Nous (re)verrons ceci dans le prochain chapitre...

Partie II. Une première équation

4) Dans toute cette question, on suppose qu'il existe f solution.

a) On a $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. Puisque f est dérivable en 0, on en déduit que $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$ existe et est finie (et égale à $f'(0)$).

b)

i) On a $\dfrac{x}{2^n} \to 0$ quand n tend vers l'infini. Pour $n \in \mathbb{N}$, si on pose $x_n = \dfrac{x}{2^n}$, on remarque que l'on a alors $u_n = \dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0}$. Autrement dit, quand n tend vers l'infini, puisque x_n tend vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite du taux d'accroissement de f en 0, c'est à dire $f'(0)$ (puisque f est dérivable en 0).

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \\
&= \frac{f\left(2\times\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}} \\
&= 2\frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}} \\
&= \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} \\
&= u_{n+1}.
\end{aligned}$$

On montre alors par récurrence directe que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 = \dfrac{f(x)}{x}$.

c) La question précédente implique que la suite (u_n) est constante. Or, on a démontré qu'elle convergeait vers $f'(0)$. Ceci entraine en particulier que $u_0 = f'(0)$. Or, on a $u_0 = \dfrac{f(x)}{x}$. On a donc montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f'(0)x$.

On remarque que cette égalité est encore vraie en $x = 0$ (puisque $f(0) = 0$). On a donc montré qu'il existait $a \in \mathbb{R}$ (on prend $a = f'(0)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

5) Si f est solution du problème, alors d'après l'étude précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$. Réciproquement, si f est de la forme $f : x \mapsto ax$ où a est constant, on a bien f dérivable en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2ax = 2f(x).$$

On a donc bien déterminé l'ensemble des fonctions solutions de cette équation.

Partie III. La résolution proprement dite

6) On suppose dans cette question que f est une solution à ce problème.

a) On a $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+(f(0))^2}$. On peut donc avoir $f(0) = 0$. Si $f(0) \neq 0$, on doit alors avoir $1 + f(0)^2 = 2$, ce qui donne $f(0)^2 = 1$. Les différentes valeurs possibles pour $f(0)$ sont donc -1, 0 et 1.

b) Posons $g = -f$. Puisque f est dérivable en 0 et définie sur $\mathbb{R}$, g l'est également. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} g(2x) & = & -f(2x) \\ & = & -\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2} \\ & = & \dfrac{2g(x)}{1+(g(x))^2}. \end{array}$$

Ceci entraine que $g = -f$ est également solution du problème étudié.

c) Montrons tout d'abord que pour tout $u \in \mathbb{R},\ -1 \leq \dfrac{2u}{1+u^2} \leq 1$. Soit $u \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} 1 - \dfrac{2u}{1+u^2} & = & \dfrac{u^2-2u+1}{1+u^2} \\ & = & \dfrac{(u-1)^2}{1+u^2} \\ & \geq & 0. \end{array}$$

Ceci nous permet donc d'affirmer que $\forall u \in \mathbb{R},\ \dfrac{2u}{1+u^2} \leq 1$. On procède de même :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2u}{1+u^2} + 1 & = & \dfrac{u^2+2u+1}{1+u^2} \\ & = & \dfrac{(u+1)^2}{1+u^2} \\ & \geq & 0. \end{array}$$

On en déduit que $\forall u \in \mathbb{R},\ -1 \leq \dfrac{2u}{1+u^2}$. On a donc bien montré l'encadrement voulu.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On a alors $f(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$. D'après l'étude précédente, on a donc $-1 \leq f(x) \leq 1$. On a donc bien montré l'encadrement voulu pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation vérifiée par f en $\frac{x}{2^{n+1}}$, on obtient directement que $u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

b) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{1+u_{n+1}^2} > 0$ et que $u_n = u_{n+1} \times \frac{2}{1+u_{n+1}^2}$, on en déduit que u_n et u_{n+1} sont de même signe. Par récurrence en posant $\mathcal{P}(n)$: « u_n est du signe de u_0 », on montre alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant.

Or, on a a admis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0) = 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc toujours de signe positif (si elle était de signe négatif, sa limite serait aussi négative ou nulle, ce qui n'est pas le cas).

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après la question 6.c, on a $u_{n+1} \leq 1$. De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive d'après ce que l'on vient de montrer. On a donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, ce qui implique par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ que $1 \leq u_{n+1}^2 + 1 \leq 2$. On en déduit que :

$$\frac{2}{1+u_{n+1}^2} \geq 1.$$

On en déduit, puisque $u_{n+1} \geq 0$ (ce qui préserve donc les inégalités quand on multiplie par u_{n+1}) que :

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} \geq u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Il s'agit donc d'une suite décroissante qui converge vers 1. Ceci entraine que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à 1. Or, toujours d'après la question 6.c et la définition de la suite, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$. Ceci entraine que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$. La suite est donc constante égale à 1.

d) On en déduit que $1 = u_0 = f(x)$. Ceci entraine que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. La fonction f est alors constante égale à 1.

e) Supposons à présent que $f(0) = -1$. Alors, d'après la question III.6.b, $g = -f$ est aussi solution du problème et vérifie cette fois $g(0) = 1$. D'après la question précédente, on a alors g constante égale à 1. Ceci entraine que f est constante égale à -1.

8) On suppose à présent que f est solution du problème posé et que $f(0) = 0$.

a) On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$. On peut montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 1$ ».

- La propriété est vraie au rang 0 (par hypothèse)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors $u_n = 1$. Or, on a également :

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.$$

  Ceci entraine que $1 + u_{n+1}^2 = 2u_{n+1}$, ce qui implique que $(1 - u_{n+1})^2 = 0$. On a donc $u_{n+1} = 1$.
- La propriété étant intialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1. Or, cette suite converge quand n tend vers l'infini vers $f(0) = 0$: c'est absurde !

b) Pour vérifier que g est bien définie, il faut que l'on ait le droit de composer f par ψ. Or, le domaine de définition de ψ est $]-1, 1[$. Il faut donc que f soit à valeurs dans $]-1, 1[$. Or, on a montré en question III.6.c que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1$ et à la question précédente que l'on ne pouvait jamais avoir égalité. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1.$$

On en déduit que $g = \psi \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus dérivable en 0 puisque f est dérivable en 0 et ψ est dérivable sur I (composée de fonctions dérivables). Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
g(2x) &= \psi(f(2x)) \\
&= \psi\left(\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}}{1-\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+f(x))^2}{(1-f(x))^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) \\
&= 2\psi(f(x)) \\
&= 2g(x).
\end{aligned}
$$

c) D'après la partie II, on a alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = ax$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ ax = \psi(f(x))$. Or, d'après la dernière question de la partie I, on a $\varphi(\psi(f(x))) = f(x)$ (puisque $f(x) \in]-1,1[$). Ceci entraine alors en composant par φ que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(ax).$$

9) On a donc montré que si f était solution, alors soit f était constante égale à 1, soit constante égale à -1, soit qu'il existait $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(ax)$.

Réciproquement, on vérifie que les fonctions constantes égales à 1 et -1 sont bien dérivables en 0 et vérifient bien l'égalité proposée. Elles sont donc solutions. Il faut également vérifier si les fonctions de la forme $f : x \mapsto \varphi(ax)$ sont également solutions. Elles sont bien dérivables en 0 (composées de fonctions dérivables). On a également, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{2\varphi(ax)}{\varphi^2(ax)+1} &= \frac{2\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}}{\left(\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}\right)^2+1} \\
&= \frac{2\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}}{\frac{e^{4ax}-e^{2ax}+1}{(e^{2ax}+1)^2}+1} \\
&= \frac{2\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}}{\frac{2e^{4ax}+2}{(e^{2ax}+1)^2}}.
\end{aligned}
$$

On peut alors simplifier cette expression, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\frac{2\varphi(ax)}{\varphi^2(ax)+1} &= \frac{(e^{2ax}-1)(e^{2ax}+1)^2}{(e^{2ax}+1)(e^{4ax}+1)} \\
&= \frac{(e^{2ax}-1)(e^{2ax}+1)}{e^{4ax}+1} \\
&= \frac{e^{4ax}-1}{e^{4ax}+1} \\
&= \varphi(2ax).
\end{aligned}
$$

On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les fonctions $f : x \mapsto \varphi(ax)$ sont bien solutions. On a donc déterminé toutes les solutions du problème.