DEVOIR À LA MAISON 11

***L'indispensable* :**

Exercice 1 : questions 1 à 3, Problème 2 : questions 1 à 12

***Pour approfondir* :**

Exercice 1 : questions 4 à 6, Problème 2 : questions 13 à 20

Nota Bene : Ne cherchez pas les FIGURES 3 et 4, elles n'y sont pas…

Exercice 1 – Quartz piézoélectrique *(d'après E3A PC 2020)*

En horlogerie, pour générer des oscillations à une fréquence stable, on utilise des oscillateurs à quartz, ce matériau ayant des propriétés piézoélectriques.
Le schéma électrique équivalent d'une lamelle de quartz est représenté sur la FIGURE 1.

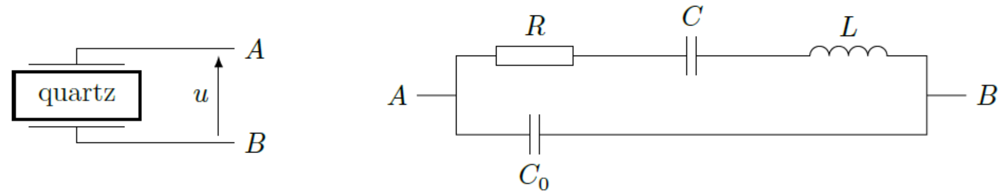


FIGURE 1 : Lamelle de quartz et son modèle électrique équivalent

Le condensateur de capacité C_0 représente le condensateur constitué par les deux électrodes en regard, séparées par le quartz. Les autres composants constituent la partie motionnelle du quartz et permettent de modéliser le comportement piézoélectrique du quartz.

1. En raisonnant sur le comportement des composants, déterminer le schéma équivalent du quartz (dipôle AB) en basses fréquences et en hautes fréquences et préciser les valeurs limites de son impédance $\underline{Z}$.

2. En considérant la résistance R négligeable, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du quartz et la mettre sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_{éq}\omega}\frac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_S^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_P^2}}$$

Préciser les expressions de $C_{éq}$, ω_S et ω_P en fonction de C, C_0 et L.

On pose : $\omega_S = 2\pi f_S$ et $\omega_P = 2\pi f_P$.

3. L'allure de $Z = |\underline{Z}|$ en fonction de la fréquence f est représentée sur la FIGURE 2. Quelle fréquence, f_S ou f_P, correspond à la fréquence de résonance f_r du quartz (justifier la réponse) ? Justifier le nom de fréquence d'anti-résonance, notée f_a, donnée à l'autre fréquence.

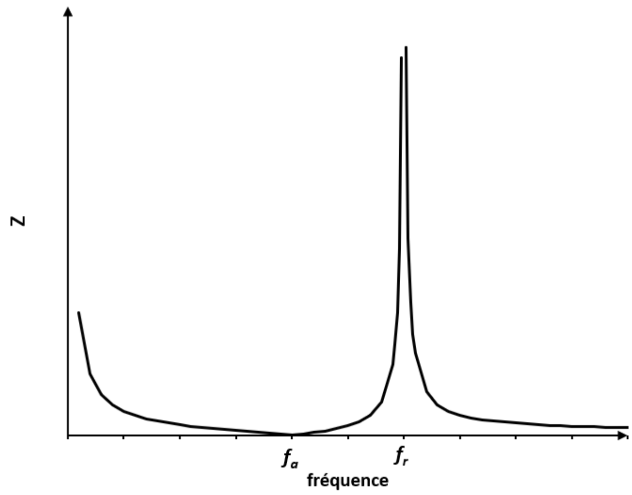


FIGURE 2 : Module Z de l'impédance complexe du quartz en fonction de la fréquence f

4. Étudier le comportement inductif (partie imaginaire positive) ou capacitif (partie imaginaire négative) du quartz en fonction de la fréquence. Représenter ϕ, l'argument de $\underline{Z}$, en fonction de la fréquence f.

Les valeurs numériques d'un quartz d'horloger, mesurées avec précision, sont : $L = 11395\ \text{H}$, $C = 2{,}071.10^{-15}\ \text{F}$, $C_0 = 3{,}050\ \text{pF}$, $R = 28{,}57\ \text{k}\Omega$.

5. Sachant que le fonctionnement d'une montre à quartz s'appuie sur le comportement inductif du quartz, déterminer la fréquence f_0 des oscillations obtenues.

En réalité, il existe toujours un léger amortissement et il faut tenir compte de la résistance R. Le facteur de qualité est alors défini par $Q = \dfrac{1}{RC\omega_S}$.

6. Comment est modifiée la courbe de la FIGURE 2 ? Calculer la valeur de Q. Commenter.

Problème 2 – Accordeur de guitare *(Centrale TSI 2019)*

La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-contre.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence du fondamental de vibration de la corde en question. Le signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder est un signal périodique, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co}. Au niveau de l'accordeur, ce signal subit un traitement électronique pour être comparé à un signal de référence. Différentes opérations sont nécessaires, notamment de l'amplification et du filtrage, afin d'extraire sa fréquence f_{co}. Ce problème s'intéresse donc au traitement du signal venant de la corde.

PARTIE A : LE SIGNAL

La FIGURE 5 ci-dessous montre un exemple de signal électrique $u_e(t)$ à la sortie du micro d'une guitare électrique.

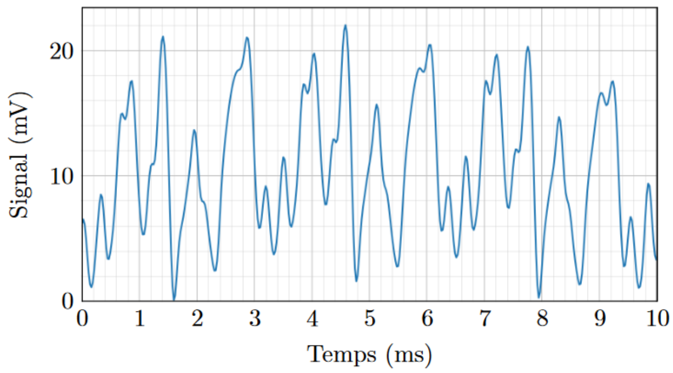


FIGURE 5 : Signal $u_e(t)$ en sortie du micro

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne U_{e0} du signal $u_e(t)$.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence f_{co} de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). De quelle corde de guitare s'agit-il ?
3. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.

PARTIE B : PREMIER FILTRE

Le signal électrique $u_e(t)$ provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre noté (F_a) de la FIGURE 6 ci-contre.

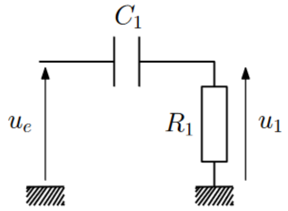


FIGURE 6 : Filtre (F_a)

4. En supposant l'entrée sinusoïdale de pulsation ω, exprimer la fonction de transfert $\underline{H_1}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_1}}{\underline{u_e}}$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω.

5. De quel type de filtre s'agit-il ? Justifier. Définir la pulsation de coupure, notée ω_1 et déterminer son expression en fonction de R_1 et C_1.
6. Tracer <u>sans calcul</u> l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain et à la phase.
7. On a choisi $R_1 = 100\ \text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\ \text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 de ce filtre. Au vu de l'allure du signal $u_e(t)$ de la FIGURE 5, quel est le rôle de ce premier filtre ?

PARTIE C : DEUXIÈME FILTRE

Le signal de sortie $u_1(t)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre actif (F_b), dont le schéma simplifié est représenté sur la FIGURE 7.

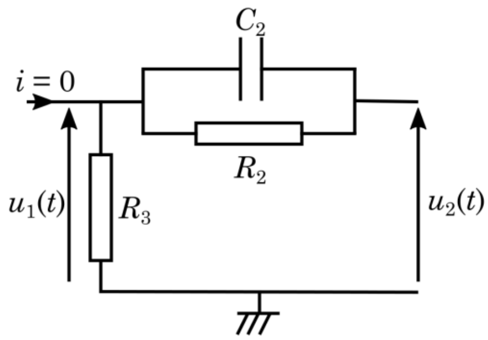


FIGURE 7 : Schéma simplifié du filtre (F_b)

8. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_2$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}$ du filtre (F_b) et la mettre sous la forme $\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \dfrac{G_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$. Préciser les expressions de G_0 et ω_2 en fonction de R_2, R_3 et C_2.
10. Montrer que $\underline{H}_2(j\omega)$ se met sous la forme $\underline{H}_2(j\omega) = H_0 \dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$ et préciser les expressions de H_0 et ω_3 en fonction de G_0 et ω_2, puis en fonction de R_2, R_3 et C_2. Montrer que $H_0 > 1$ et que $\omega_3 > \omega_2$.
11. Écrire la fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega)$ sous la forme d'un produit de trois transmittances élémentaires (préciser leur expression). À partir de l'étude de ces transmittances élémentaires, en déduire l'allure du diagramme de Bode asymptotique de $\underline{H}_2(j\omega)$ par une méthode graphique.
12. Calculer numériquement le gain H_0 et la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 6{,}00\ \text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\ \text{pF}$. Expliquer le rôle de ce deuxième filtre.

PARTIE D : TROISIÈME FILTRE

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal $u_2(t)$ dont la valeur est *a priori* voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique f_{ac} de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigu que l'on souhaite accorder. Un dispositif électronique permet de régler la fréquence caractéristique du filtre (F_c) à la valeur f_{ac}. La FIGURE 8 (en ANNEXE) représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

13. De quel type de filtre s'agit-il ? Justifier.
14. Sur la courbe (a) de la FIGURE 8 en ANNEXE (**à rendre avec la copie**), tracer les asymptotes et déterminer leur pente. Quel est l'intervalle de valeurs possibles pour le facteur de qualité Q ?
15. Sur la courbe (b) de la FIGURE 8 en ANNEXE (**à rendre avec la copie**), mesurer la fréquence centrale caractéristique de ce filtre. Déterminer la valeur de la bande passante en explicitant la méthode et en complétant la courbe (b) de la FIGURE 8 en ANNEXE (**à rendre avec la copie**). En déduire la valeur de Q.
16. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\ \text{Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre (F_c).

PARTIE E : ANALYSE SPECTRALE

La FIGURE 9 ci-après correspond au spectre du signal d'entrée $u_e(t)$ représenté sur la FIGURE 5.

17. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la FIGURE 5.
18. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la FIGURE 10 ci-après correspond à la sortie $u_1(t)$ du premier filtre (F_a).
19. Même question, pour la sortie $u_2(t)$ du filtre (F_b).
20. Déterminer l'expression du signal $u_s(t)$ en sortie du filtre (F_c). Représenter son son spectre et son graphe temporel.

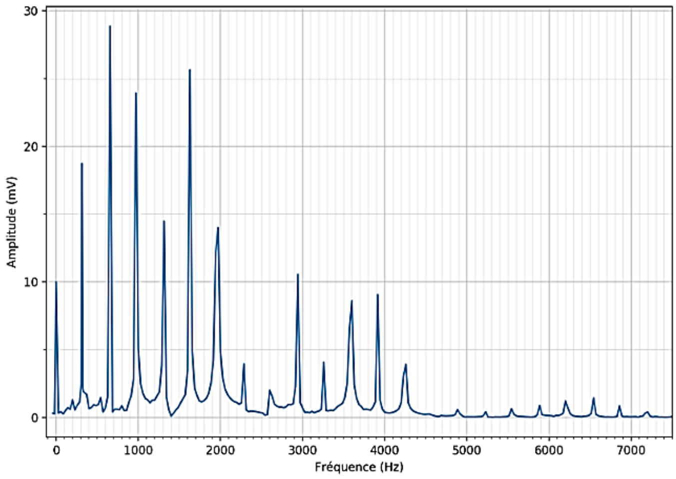
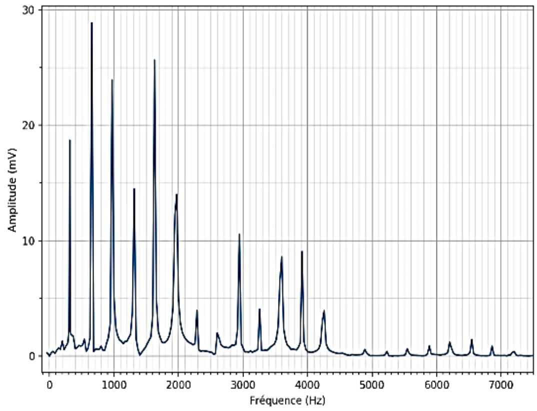
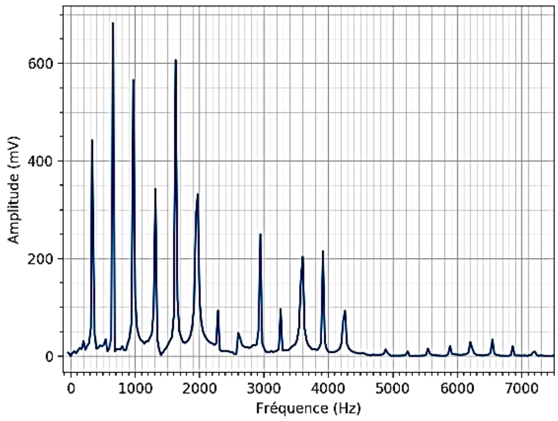


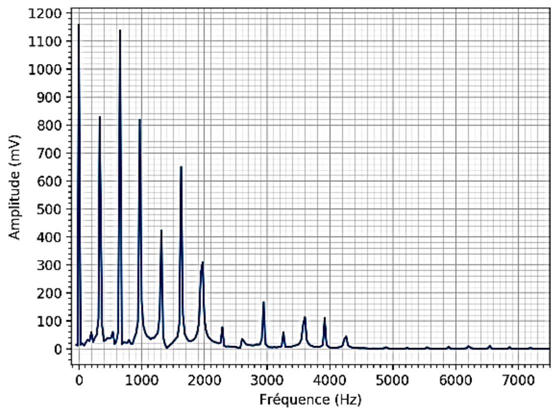
FIGURE 9 : Spectre du signal d'entrée $u_e(t)$



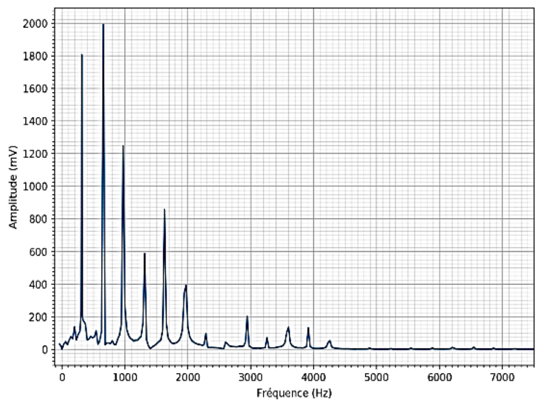
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 10 : Spectres

ANNEXE (à rendre avec la copie)

NOM :

Problème 2 – Questions 13, 14, 15, 16

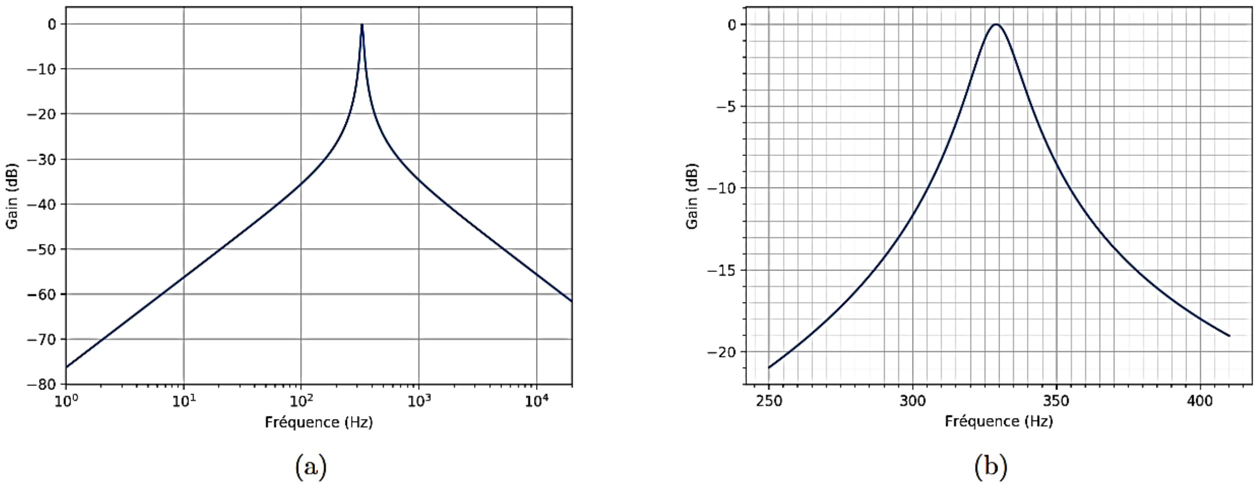


FIGURE 8 : Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)