31. Espaces euclidiens, corrigé

Exercice 1. L'expression est clairement symÃ©trique et Ã valeurs rÃ©elles. On a la linÃ©aritÃ© Ã gauche car si $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl}(\lambda P + \mu Q|R) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda P(k) + \mu Q(k))R(k) \\ & = & \displaystyle\lambda \sum_{k=0}^{n} P(k)R(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q(k)R(k) \\ & = & \lambda(P|R) + \mu(Q|R).\end{array}$$

Puisque l'on a la symÃ©trie et la linÃ©aritÃ© Ã gauche, on en dÃ©duit que l'on a une forme bilinÃ©aire.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P|P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(P(k))^2 \geq 0$ donc on a la positivitÃ©. Supposons Ã prÃ©sent $(P|P) = 0$. Puisque tous les termes de la somme sont positifs, on en dÃ©duit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = 0$. P a donc $n+1$ racines distinctes et est de degrÃ© infÃ©rieur ou Ã©gal Ã n. On en dÃ©duit que $P = 0$. On a donc montrÃ© la dÃ©finition. On a donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (cette preuve n'aurait pas aboutie sur $\mathbb{R}[X]$ car on n'aurait pas eu la dÃ©finition).

Exercice 2. Remarquons tout d'abord que φ existe bien car les fonctions sont $\mathcal{C}^1$ donc on peut les dériver et les dérivées étant continues, l'intégrale existe. Montrons que l'on a bien un produit scalaire.

La symétrie est directe. La linéarité à gauche également puisque par linéarité de la dérivation et de l'intégrale, si $f, g, h \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcl}\varphi(\lambda f + \mu g, h) & = & \displaystyle(\lambda f(0) + \mu g(0))h(0) + \int_0^1 (\lambda f'(t) + \mu g'(t))h'(t)dt \\ & = & \displaystyle\lambda(f(0)h(0) + \lambda \int_0^1 f'(t)h'(t)dt + \mu(g(0)h(0) + \lambda \int_0^1 g'(t)h'(t)dt \\ & = & \lambda\varphi(f, h) + \mu\varphi(g, h).\end{array}$$

Puisque φ est symétrique et linéaire à gauche, elle est donc également linéaire à droite.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, on a également :

$$\varphi(f, f) = f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt.$$

Par croissance de l'intégrale et positivité d'un carré, on a bien $\varphi(f, f) \geq 0$. Enfin, une somme de termes positifs n'est nulle que si chacun des termes est nul. On en déduit que :

$$varphi(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 (f'(t)^2)dt = 0.$$

Puisque f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle, on en déduit que f'^2 (et donc f') est identiquement nulle sur $[0,1]$. Puisque $[0,1]$ est un intervalle, on a donc f constante sur $[0,1]$ et puisque $f(0) = 0$, on a bien f nulle sur $[0,1]$. φ est donc bien définie.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ des réels positifs. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué en $u_k = a_k\sqrt{c_k}$ et $v_k = b_k\sqrt{c_k}$ (ce qui est légitime car les c_k sont positifs). Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k v_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}$, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 c_k}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2 c_k}.$$

Exercice 4. Remarquons que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (produit scalaire usuel). Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est bien définie sur $[a,b]$, continue et à valeurs strictement positive. Les racines carrées de ces deux fonctions sont également continues. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$\langle \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}}\rangle \leq ||\sqrt{f}|| \times ||\frac{1}{\sqrt{f}}||.$$

On en déduit que $(b-a) \leq \sqrt{\displaystyle\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt}$. Puisque tout est positif, ceci est équivalent en élevant au carré à :

$$\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2.$$

Pour le cas d'égalité, on voit qu'on a égalité (puisque tout est positif) si et seulement si on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, autrement dit si $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires. Ceci n'est vrai que si f est constante. On a donc égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 5. On a donc d'abord :

$$||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2||y||^2.$$

On en dÃ©duit donc tout d'abord que si x et y sont orthogonaux, c'est Ã dire si $\langle x, y\rangle = 0$, alors $||x + \lambda y||^2 \geq ||x||^2$ ce qui donne le rÃ©sultat voulu par stricte croissance de la fonction racine.

Supposons rÃ©ciproquement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||x + \lambda y|| \geq ||x||$. En reprenant le calcul prÃ©cÃ©dent, on a donc que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2||y||^2 \geq 0.$$

Prenons $\lambda > 0$. En divisant par λ, on obtient que pour tout $\lambda > 0$, $2\langle x, y\rangle + \lambda||y||^2 \geq 0$. En faisant tendre λ vers 0 (par valeurs supÃ©rieures), on obtient $2\langle x, y\rangle \geq 0$.

On recommence en prenant cette fois $\lambda < 0$, ce qui va inverser le sens de l'inÃ©galitÃ© aprÃ¨s la division. En faisant tendre λ vers 0 par valeurs infÃ©rieures, on obtient alors $2\langle x, y\rangle \leq 0$, ce qui nous donne finalement que $\langle x, y\rangle = 0$. x et y sont donc orthogonaux.

Soient $x, y \in E$. Montrer que $x \perp y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||x + \lambda y|| \geq ||x||$.

Exercice 6. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E euclidien. On va montrer les égalités proposées par double inclusion. Commençons par $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

($\subset$) Soit $x \in (F+G)^\perp$. Montrons que $x \in F^\perp$. Soit donc $y \in F$. On a alors $y \in F + G$. On a donc $(x|y) = 0$ par hypothèse, ce qui implique que $x \in F^\perp$. De la même manière, puisque $G \subset F + G$, on a également $x \in G^\perp$. On a donc montré que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

($\supset$) Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrons que $x \in (F+G)^\perp$. Pour cela, fixons $y \in F+G$. Il existe donc $y_F \in F$ et $y_G \in G$ tels que $y = y_F + y_G$. On a alors par hypothèse $(x|y_F) = 0$ et $(x|y_G) = 0$. Par linéarité à droite du produit vectoriel, on a $(x|y_F + y_G) = 0$, ce qui implique $(x|y) = 0$. On a donc bien $x \in (F+G)^\perp$.

On a bien montré par double inclusion $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. On peut alors utiliser ceci pour montrer l'autre égalité. En effet, on peut appliquer la relation précédente en $F^\perp$ et $G^\perp$ que :

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp.$$

Or, l'orthogonal de l'orthogonal d'un espace vectoriel est lui-même (car on travaille dans un espace euclidien, qui est donc de dimension finie). On en déduit que $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$. En passant à l'orthogonal toute cette relation, on obtient alors :

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

Exercice 8. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On suppose que pour tout x de E, $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

1) Commençons par appliquer la relation proposée en e_j où $j \in [\![1, n]\!]$. On a alors $||e_j||^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_j|e_i)^2$. Ceci entraine, puisque e_j est unitaire que :

$$1 = 1 + \sum_{i \neq j} (e_j|e_i)^2.$$

On en déduit, puisqu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, que pour tout $i \neq j$, $(e_i|e_j) = 0$. Puisque les e_j sont tous unitaires, on en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée.

2) Une famille orthonormée est automatiquement libre. En effet, si on suppose que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$. Fixons $j \in [\![1, n]\!]$ et effectuons le produit scalaire de l'expression précédente avec e_j. On a alors (par bilinéarité du produit scalaire) :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k|e_j) = 0.$$

Ceci entraine, d'après l'expression précédente que $\lambda_j ||e_j||^2 = 0$, et puisque e_j est unitaire, on a donc $\lambda_j = 0$. Puisque j est quelconque dans $[\![1, n]\!]$, on en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Il reste donc à montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. Par l'absurde, si elle ne l'est pas, on peut poser $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ l'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_n$. Puisque la famille n'est pas génératrice, on a donc $F \neq E$ et donc $F^\perp \neq \{0\}$. Il existe donc $y \in F^\perp$ non nul. En appliquant la relation de l'énoncé en y, on obtient alors (puisque y est orthogonal à tous les e_i) :

$$||y||^2 = 0,$$

ce qui est absurde. On en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 10. On notera e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique.

1) Commençons par chercher une base des droites D et D' (ces droites passent bien par O). Pour D, on a $2x = y = z$ donc $D = \mathrm{Vect}(f_1)$ où $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour D', on a les équations $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ z + y = 0 \end{array} \right.$.

Un vecteur directeur de cette droite est donc $f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La projection orthogonale sur D est donc l'application $p_D : x \mapsto \dfrac{(f_1|x)f_1}{||f_1||^2}$ et celle sur D' est $p_{D'} : x \mapsto \dfrac{(f_2|x)f_2}{||f_2||^2}$ (attention à ne pas oublier de normaliser les vecteurs !). Avec ces expressions, on peut donc déterminer l'image de la base canonique par p_D et $p_{D'}$. On obtient alors :

$$\begin{cases} p_D(e_1) = \dfrac{1}{9}f_1 \\ \\ p_D(e_2) = \dfrac{2}{9}f_1 \\ \\ p_D(e_3) = \dfrac{2}{9}f_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_{D'}(e_1) = \dfrac{3}{11}f_2 \\ \\ p_{D'}(e_2) = \dfrac{1}{11}f_2 \\ \\ p_{D'}(e_3) = -\dfrac{1}{11}f_2 \end{cases}.$$

Si on note A et A' les matrices associées à ces projections dans la base canonique, on a donc :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A^2 = A$ et que $(A')^2 = A'$.

2) Il est ici dans ce cas plus simple de trouver un vecteur normal à P et à P' (ces plans passent bien par O). En effet, on sait que le vecteur $g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et que le vecteur $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

On peut alors déterminer les projections q et q' sur les droites de vecteur directeur g_1 et de vecteur directeur g_2. On pourra alors retrouver les projections orthogonales sur P et P' (que l'on notera p et p') en calculant $\mathrm{Id} - q$ et $\mathrm{Id} - q'$ (en effet, p est la projection sur P parallèlement à $P^\perp$ et q est la projection sur $P^\perp$ parallèlement à P).

Si on note A et A' les matrices des projections orthogonales sur $P^\perp$ et $(P')^\perp$ dans la base canonique, on trouve donc, de la même manière qu'à la première question :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit, si on note B et B' les matrices des projections orthogonales sur P et P' dans la base canonique, on a alors :

$$B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Notons r la réflexion par rapport au plan $P : ax + by + cz = 0$. Un vecteur normal à ce plan est le vecteur $e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (qui est unitaire par hypothèse). Si $x \in \mathbb{R}^3$, alors la projection sur $P^\perp$ est $p : x \mapsto (e|x)e$. Or, on a (faire un dessin pour retrouver cette relation) :

$$r = \mathrm{Id} - 2p.$$

On peut alors déterminer les images des vecteurs de la base canonique par cette réflexion. Si on note e_1, e_2, e_3 ces vecteurs, on trouve :

$$r(e_1) = \begin{pmatrix} 1-2a^2 \\ -2ab \\ -2ac \end{pmatrix}, \ r(e_2) = \begin{pmatrix} -2ab \\ 1-2b^2 \\ -2bc \end{pmatrix} \text{ et } r(e_3) = \begin{pmatrix} -2ac \\ -2bc \\ 1-2c^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan P est :

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soient E un espace euclidien et p un endomorphisme de E. Montrons par double implication que p est une projection orthogonale si et seulement si $p \circ p = p$ et $\forall x \in E, \ ||p(x)|| \leq ||x||$.

($\Rightarrow$) Soit p une projection orthogonale. On a alors $p \circ p = p$ (car p est une projection). Soit $x \in E$. Puisque p est une projection orthogonale, on a $p(x)$ qui est orthogonal à $x - p(x)$. On a donc, en utilisant le théorème de Pythagore que :

$$\begin{array}{rcl} ||x||^2 & = & ||x - p(x) + p(x)||^2 \\ & = & ||x-p(x)||^2 + ||p(x)||^2 \\ & \geq & ||p(x)||^2. \end{array}$$

On en déduit, en passant à la racine carrée (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) que $\forall x \in E, \ ||p(x)|| \leq ||x||$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que p soit une projection et que $\forall x \in E, \ ||p(x)|| \leq ||x||$. Supposons par l'absurde que p ne soit pas une projection orthogonale. Ceci signifie que $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ ne sont pas orthogonaux. Il existe donc $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \ker(p)$ tels que $(x|y) \neq 0$. Puisque $x \in \text{Im}(p)$, on a $p(x) = x$. Considérons alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $x_\lambda = x + \lambda y$. On a alors, puisque $y \in \ker(p)$ que $p(x_\lambda) = x$. On a de plus :

$$\begin{array}{rcl} ||x_\lambda||^2 & = & ||x + \lambda y||^2 \\ & = & ||x||^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2 ||y||^2. \end{array}$$

Puisque par hypothèse, $||p(x_\lambda)|| \leq ||x_\lambda||$ (ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), en élevant au carré cette relation (la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$), on a alors d'après les calculs précédents que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ 0 \leq 2\lambda(x|y) + \lambda^2 ||y||^2.$$

Puisque $(x|y) \neq 0$, on a également $y \neq 0$ et donc $||y||^2 \neq 0$. Le polynôme $P(\lambda) = \lambda(2(x|y) + \lambda ||y||^2)$ admet donc deux racines réelles distinctes (0 et $-\dfrac{2(x|y)}{||y||^2}$). Si on prend λ entre ces deux racines (par exemple $\lambda = -\dfrac{(x|y)}{||y||^2}$), on trouve $P(\lambda) < 0$ ce qui est absurde ! On en déduit que p est bien une projection orthogonale.

On a bien montré l'équivalence voulue par double implication.

Exercice 15.

La

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(R)$ sont des supplémentaires orthogonaux. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

2) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 16. Déterminants de Gram. On considère une famille $(x_1,\dots,x_p)$ d'un espace euclidien E.

1) On va montrer l'équivalence par la contraposée. Montrons que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée ssi $G(x_1,\dots,x_p)=0$.

($\Rightarrow$) Supposons la famille liée. Il existe alors des coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i=0$. Montrons alors que les colonnes $C_1,\dots,C_p$ de la matrice A associée à $G(x_1,\dots,x_p)$ sont liées. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p}\lambda_j C_j &= \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\begin{pmatrix}(x_1|x_j)\\(x_2|x_j)\\ \vdots\\(x_p|x_j)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(x_1|\sum_{j=1}^{p}x_j)\\(x_2|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j)\\ \vdots\\(x_p|\sum_{j=1}^{p}x_j)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Puisque les λ_j sont non tous nuls, on en déduit que les colonnes de la matrice A sont liées, ce qui implique que son déterminant est nul.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $G(x_1,\dots,x_p)=0$. Ceci entraine que les colonnes de la matrice A associée sont liées. Il existe donc des constantes $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ non toutes nulles telles que $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j C_j=0$. On en déduit, avec le même calcul que ci-dessus, que

$$\begin{pmatrix}(x_1|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j)\\(x_2|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j)\\ \vdots\\(x_p|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Notons $y=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j$. On a donc $\forall j\in[\![1,p]\!],\ (x_j|y)=0$. On en déduit que $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j(x_j|y)=0$, ce qui entraine, en regroupant tous les termes dans le produit scalaire que $(y|y)=0$, c'est à dire $||y||^2=0$. On en déduit que $y=0$, ce qui entraine que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée (puisque les $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont non tous nuls).

On a donc montré, par la contraposée, que $G(x_1,\dots,x_p)\neq 0 \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_p)$ libre.

2) Montrons que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p)$. On va procéder par double inégalité.

($\geq$) Supposons que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = q$. Supposons par exemple que les q premiers vecteurs soient libres et que les autres vecteurs s'obtiennent comme combinaisons linéaires des q premiers. Considérons la matrice extraite de la matrice A constituée des q premières lignes et q premières colonnes. Cette matrice est la matrice de Gram associée aux vecteurs $x_1, \ldots, x_q$ qui est une famille libre. D'après la première question, cette matrice est donc de déterminant non nul et est donc de rang q. Ceci implique que les q premières colonnes de la matrice A sont libres (rajouter des coordonnées ne permet pas de lier les vecteurs). On en déduit que $\mathrm{rg}(A) \geq q$.

Si ce ne sont pas les q premiers vecteurs qui sont libres mais d'autres q vecteurs, on peut se ramener au cas précédent. En effet, si par exemple on veut se ramener à la même famille mais où l'on a placé le vecteur x_k en première position. Pour cela, il suffit dans la matrice A d'échanger la 1ere colonne avec la k-ième et d'échanger la première ligne avec la k-ième (ce qui préserve le rang). On s'est alors ramené à la même situation sauf que l'on a placé le vecteur x_k en première position dans la famille de vecteurs. On procède ainsi pour placer q vecteurs libres dans les q premières positions et appliquer l'argument précédent.

($\leq$) De plus, en reprenant la preuve précédente, puisque les vecteurs $x_{q+1}, \ldots, x_p$ s'expriment en fonction des vecteurs $x_1, \ldots, x_q$, on peut avec des combinaisons linéaires se ramener à des vecteurs nuls. On peut alors, en appliquant les mêmes opérations à la matrice A, remplir les colonnes $C_{q+1}, \ldots, C_p$ de zéros avec des opérations élémentaires (ce qui ne change pas le rang). On en déduit que la matrice A a le même rang qu'une matrice où seulement les colonnes $C_1, \ldots, C_q$ sont éventuellement non nulles. Le rang de A est donc inférieur ou égal à q.

On a finalement montré que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.

3) Soit x orthogonal à tous les x_i. Notons A la matrice associée à $G(x_1, \ldots, x_p)$ et A' la matrice associée à $G(x_1, \ldots, x_p, x)$. Puisque x est orthogonal à $x_1, \ldots, x_p$, alors on a $(x_j|x) = 0$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. Ceci implique que la matrice A' est triangulaire par blocs :

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & ||x||^2 \end{pmatrix}$$

où les 0 sont une colonne avec p zéros et une ligne avec p zéros. On en déduit que $\det(A') = ||x||^2 \cdot \det(A)$. Ceci implique que :

$$G(x_1, \ldots, x_p, x) = ||x||^2 \cdot G(x_1, \ldots, x_p).$$

4) Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre. Soit $x \in E$. Notons $p(x)$ sa projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. La distance recherchée vaut alors $||x - p(x)||$. Considérons alors $G(x_1, \ldots, x_p, x)$. On peut alors agir sur la dernière colonne sans changer ce déterminant. Si on a $p(x) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$, on effectue l'opération $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j C_j$. On a alors dans la dernière colonne des produits scalaires de la forme $(x - p(x)|x_i)$ pour les n premières lignes et $(x - p(x)|x)$ pour la derniere ligne.

Puisque les termes en $x - p(x)$ sont orthogonaux aux $x_1, \ldots, x_p$, nous sommes en train de calculer un déterminant triangulaire inférieure par blocs. On en déduit que $G(x_1, \ldots, x_n, x) = (x - p(x)|x)G(x_1, \ldots, x_n)$. Or, on a :

$$\begin{aligned} (x - p(x)|x) &= (x - p(x)|x - p(x)) + (x - p(x)|p(x)) \\ &= ||x - p(x)||^2 + 0 \end{aligned}$$

(car $p(x)$ est orthogonal à $x - p(x)$). Ceci entraine (on a le droit de diviser car le déterminant $G(x_1, \ldots, x_p)$ est non nul d'après la première question) que :

$$||x - p(x)|| = \sqrt{\frac{G(x_1, \ldots, x_p, x)}{G(x_1, \ldots, x_p)}}.$$

Exercice 18. Le plan est de vecteur normal $\vec{n} = (\alpha, 2, 1)$ et passe par le point $B = (0, 0, -1)$. On a donc :

$$\begin{aligned} d(A, \mathcal{P}) &= \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle|}{||\vec{n}||} \\ &= \frac{|\alpha + 4|}{\sqrt{\alpha^2 + 5}}. \end{aligned}$$

On veut cette distance égale à 1 donc ceci est équivalent (en élevant au carré) que $(\alpha+4)^2 = (\alpha^2+5)$, soit $8\alpha + 16 = 5$. La seule valeur de α qui convient est $-\dfrac{11}{8}$.