Programme de colle, semaine 14

Arithmétique :

- Nous avons vu la définition de $a|b$, admis la propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$ (une partie de $\mathbb{Z}$ non vide majorée admet un maximum) et démontré le théorème de division euclidienne. Nous avons ensuite vu la relation de congruence, démontré qu'elle était stable par somme et par produit. Nous avons également vu ce qu'était une table de congruence et des exemples d'utilisation. Nous avons également démontré le théorème de division euclidienne (je l'ai énoncé en prenant $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ pour avoir une preuve plus facile à faire, et on a vu en remarque que l'on pouvait prendre $b \in \mathbb{Z}^*$).
- Après l'étude des congruences (opérations possibles, exemple de tables de puissances) et le théorème de division euclidienne, nous avons défini le PGCD. Nous avons vu l'algorithme d'Euclide afin de le calculer (trouver le dernier reste non nul après des divisions successives)et nous avons montré ses propriétés ($d|a$ et $d|b$ ssi $d|(a \wedge b)$ et $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$ si $k \in \mathbb{N}^*$)
- Nous avons donné la définition d'un couple de Bézout associé à (a, b) (couple (u, v) tel que $au + bv = a \wedge b$) ainsi que celle de deux entiers premiers entre eux. Nous avons alors montré le théorème de Bézout, le théorème de Gauss ainsi que son corollaire ($a \wedge b = 1$ et $a|c$ et $b|c$ alors $ab|c$). Nous avons également montré que si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge (bc) = 1$.
- Nous avons ensuite étudié les équations du type $ax + by = c$, défini le PGCD de plusieurs entiers ainsi que les notions d'entiers premiers entre eux dans leur ensemble et premiers entre eux deux à deux.
- Nous avons rapidement défini le PPCM, énoncé que m est multiple de a et de b ssi m est un multiple de $a \vee b$ et nous avons montré les relations $(ka) \vee (kb) = k(a \vee b)$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et $|ab| = (a \wedge b) \times (a \vee b)$.
- Nous avons ensuite étudié les nombres premiers. La définition, le fait que si p est premier, alors $p|a$ ou $p \wedge a = 1$, le crible. Nous avons montré que l'ensemble des nombres premiers est infini. Nous avons démontré le petit théorème de Fermat.

Remarques sur le programme : L'étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas au programme et n'a pas été vue. Nous n'avons pas encore eu le temps de faire la définition de la valuation p-adique d'un entier, le théorème de factorisation en produits de nombres premiers, ainsi que l'application au calcul du pgcd, du ppcm et à la recherche des diviseurs d'un entier. Nous n'avons pas eu le temps de faire d'exercices impliquant les nombres premiers.

Compétences :

- Savoir faire la table d'un entier modulo n (a^k $[n]$ afin de trouver une période.
- Déterminer des restes de division euclidienne à l'aide de modulos.
- Calculer un pgcd à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
- Connaitre la méthode de résolution d'une équation du type $ax + by = c$.
- Utiliser le lemme d'Euclide pour simplifier les calculs de pgcd.

Questions de cours :

1. Montrer le théorème de Bézout (on pourra utiliser l'identité de Bézout) et l'utiliser pour démontrer le théorème de Gauss.
2. Montrer les deux autres conséquences du théorème de Bézout : si $a|c$ et $b|c$ avec $a \wedge b = 1$, alors $ab|c$ et si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge (bc) = 1$.
3. Résoudre l'équation $51x - 36y = 39$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
4. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{N}$, $ab = (a \wedge b) \times (a \vee b)$.
5. Montrer que si $p \in \mathbb{P}$ est premier et $a \in \mathbb{Z}$, alors $p|a$ ou $p \wedge a = 1$.
6. Montrer que pour $p \in \mathbb{P}$ et $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p|\binom{p}{k}$
7. Énoncer le petit théorème de Fermat et démontrer que $\forall a \in \mathbb{N},\ a^p \equiv a\ [p]$.
8. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini (en admettant que tout entier admet un diviseur premier).

Exercices à chercher pour lundi (pour tout le monde) : TD 15 : 17, 20, 22. Pour le 17, montrez en fait que l'on a une équivalence : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (ab) = 1$. Pour le 20, vous pouvez utiliser la calculatrice pour les calculs/factorisations.

Exercice à rédiger au propre et à me rendre lundi pour ceux qui n'ont pas colle de maths (un seul exercice par personne ! Je rappelle qu'il y a des indications sur la 3ième page du programme de colle !) :

- 1er du groupe : TD15 : 17
- 2ieme du groupe : TD15 : 20
- 3ieme du groupe : TD15 : 22

Prochain programme : arithmétique

N'hésitez pas à me contacter si vous avez des questions !

Indications pour les exercices :

Exo 17 :

- Pour le sens direct, utiliser le lemme d'Euclide pour montrer que $a \wedge (a+b) = 1$ et que $b \wedge (a+b) = 1$. Conclure avec un des résultats du cours.
- Pour le sens indirect, utiliser le théorème de Bézout appliqué à $a+b$ et ab pour trouver des $u_2, v_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $au_2 + bv_2 = 1$.

Exo 20 :

- Commencer par déterminer $a \wedge b$ et se ramener à une équation sur $a' = \dfrac{a}{a \wedge b}$ et $b' = \dfrac{b}{a \wedge b}$.
- Chercher les diviseurs de $a'b'$ (on pourra s'aider de la calculatrice) et en déduire toutes les possibilités pour a' et b'.

Exo 22 :

- On pourra par exemple raisonner par l'absurde pour montrer que y est impair ou travailler modulo 2.
- Pour la seconde partie de la question, on pourra étudier les différentes valeurs possibles de y [8].
- Pour la seconde question, on pourra étudier l'équation de départ modulo 8 et pour la deuxième partie, étudier les possibilités pour 3^x modulo 8 avec $x \in \mathbb{N}^*$.
- L'identité remarquable est de la forme $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- x ne peut finalement pas être très grand... Conclure sur cette analyse/synthèse.