À chercher pour mardi 09/05/2023, corrigé

TD 25 :

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$. On va utiliser des opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire. On va commencer par placer le « a » de la première colonne en 3ieme colonne pour avoir à discuter selon la valeur de a le plus tard possible. On effectue ensuite des opérations élémentaires sur les lignes. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & a \end{pmatrix} \quad (C_1 \leftrightarrow C_3) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a+1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & a \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \text{ et } L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3).
\end{aligned}$$

On en déduit que si $a = 3$, le rang de la matrice est 2. Si $a \neq 3$, alors le rang de la matrice est 4 (et elle est donc inversible).

Exercice 18. (m)

1) Pour $x = 1$, on remarque directement que $\mathrm{rg}(B) = 1$ (toutes les colonnes sont identiques). Supposons à présent $x \neq 1$. On peut simplifier des lignes en utilisant la 3ieme ligne comme pivot par exemple et en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - xL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$. On obtient alors que B est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Puisque $x - 1 \neq 0$, on peut diviser les lignes 1 et 2 par $x - 1$ et se ramener à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -x-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Pour se ramener à une matrice triangulaire inférieure, il reste à échanger L_1 et L_3 et ensuite effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ sur la nouvelle L_3. On a alors B équivalente à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x-2 \end{pmatrix}$$

On obtient donc que $\mathrm{rg}(B) = 3$ (et donc B inversible) si $x \neq -2$ et que $\mathrm{rg}(B) = 2$ si $x = -2$.

Si $x = 1$, une base de $\mathrm{Im}(B)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de $\ker(B)$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (car $(x, y, z) \in \ker(B)$ ssi $x + y + z = 0$ et on peut exprimer x en fonction du reste). Ces 2 vecteurs sont clairement libres (preuve immédiate ou par non colinéarité).

Si $x = -2$, alors, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ (car les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le noyau). On exprime tout en fonction de z et on a donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de $\ker(B)$.

Comme base de $\mathrm{Im}(B)$ (qui est de dimension 2 dans ce cas d'après le théorème du rang), on va avoir $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En effet, ces 2 vecteurs sont libres (preuve rapide...) et ce sont les 2 premiers vecteurs colonnes de B.

2) On a $A = B - xI_3$ donc $X \in \ker(B) \Leftrightarrow BX = 0 \Leftrightarrow (A + xI_3)X = 0 \Leftrightarrow AX = -xX$.

On prend les vecteurs (f_1, f_2) qui formaient une base de $\ker(B)$ dans le cas $x = 1$ et le vecteur f_3 qui formait une base de $\ker(B)$ quand $x = -2$. On a alors $Af_i = -f_i$ pour $i = 1, 2$ et $Af_3 = 2f_3$. Il reste à vérifier que (f_1, f_2, f_3) est libre (et on aura une base de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3). On a :

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

On a donc bien f qui est une base de $\mathbb{R}^3$.

Si on note $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ où e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (et u l'application linéaire canoniquement associée à A) et que l'on note $P = P_e^f$ la matrice de passage de la base e vers la base f, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

où $D = \mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car $u(f_i) = -f_i$ pour $i = 1, 2$ et $u(f_3) = 2f_3$. On a donc bien A semblable à D.

TD 26 :

Exercice 3. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On va séparer les cas n pair et n impair.

Supposons n pair. On a alors en notant $n = 2p$ que $\sigma = (1\ 2p)(2\ 2p-1)\dots(p\ p+1)$. σ se décompose en produit de p transpositions et on a donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p = (-1)^{n/2}$.

Supposons n impair. En notant $n = 2p+1$, on a alors $p+1$ qui est fixe par σ et on a :

$$\sigma = (1\ 2p+1)(2\ 2p)\dots(p\ p+2).$$

On a donc σ qui s'écrit comme le produit de p transpositions et on a encore $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

On en déduit que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{E(n/2)}$ (en notant $E(n/2)$ la partie entière de $n/2$).

Exercice 6. On sait que toute permutation peut s'écrire en produit de transpositions. Pour montrer le résultat voulu, il suffit donc de montrer que toute transposition peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$. On sépare alors différents cas :

- Toutes les transpositions qui contiennent 1 sont dans l'ensemble considéré.
- Considérons alors une transposition $(i\ j)$ avec $1 < i < j$. On remarque alors que :

  $$(i\ j) = (i\ 1) \circ (1\ j) \circ (1\ i).$$

  On peut le visualiser facilement avec l'analogie du jeu de cartes. Pour échanger les carte en position i et j, il suffit d'échanger la car i avec la carte 1, puis la carte j avec la carte 1 (on a ainsi placé la carte i en position j) et enfin d'échanger la carte 1 avec la carte i (pour placer j en i et remettre la 1ere carte à sa place).

TD 27 :

Exercice 1. Dans tous les cas, on peut utiliser la formule de Sarrus.

1) $\Delta = 0 + 0 + 24 - 16 - (-8) - 0 = 16$.

2) $\Delta = -16 - 15 + 0 - (-2) - 0 - (-40) = 11$.

3) $\Delta = (1+x)^3 + 1 + 1 - 3(1+x) = (1+x)^3 - 3x - 1 = x^2(x+3)$.

4) $\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

5) $\Delta = bc(a+c) + ab(b+c) + ac(a+b) - ab(a+c) - ac(b+c) - bc(a+b) = c^2(b-a) + b^2(a-c) + a^2(c-b)$.

6) $\Delta = acb + bac = 2abc$.