À chercher pour lundi 13/03/2023, corrigé

TD 21 :

Exercice 12. On veut à la fin de l'ordre 1 donc on va faire tous les DLs à l'ordre 3 (on perd un ordre en factorisant par x et un autre en divisant ensuite par le x). Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + o(x).
\end{aligned}$$

De même, on a $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + o(x)$. On en déduit donc que :

$$f(x) = (1-a-b)\frac{1}{x} + \frac{(-a+b)}{2} + \frac{a-b)}{12}x + o(x).$$

Pour répondre à la question posée, on doit donc prendre a et b tels que $a+b=1$ et $a=b$, soit $a = b = \frac{1}{2}$. On a alors bien $f(x) = o(x)$.

Exercice 13. Effectuons un développement limité du numérateur à l'ordre 1. On a :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{1/x} - e &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e \\
&= e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - e \\
&= e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - e \\
&= e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x)} - e \\
&= e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) - e \\
&= -\frac{ex}{2} + o(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction étudiée converge vers $-\frac{e}{2}$ quand x tend vers 0.

Exercice 21. Posons $f(x) = \frac{1}{x}(2x^2-1)e^{1/x}$. Les branches infinies de cette fonction sont en $\pm\infty$ et en $x = 0^+$ (en 0^-, $f(x)$ tend vers 0). En $\pm\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(2x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= 2x + 2 - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que la droite $y = 2x+2$ est asymptote à f en $\pm\infty$ et que f est en dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

TD 22 :

Exercice 1.

1) On a une somme géométrique de raison $0 < e^{-3} < 1$. La série converge donc et $\sum_{k=0}^{n} e^{-3k} = \frac{1-e^{-3(n+1)}}{1-e^{-3}}$. On a donc $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k} = \frac{1}{1-e^{-3}}$.

2) La série $\sum \frac{1}{k^2-1}$ est à termes positifs et $\frac{1}{k^2-1} \sim \frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série considérée est donc convergente par comparaison de SATPs. On a de plus, en décomposant en éléments simples :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}\right).$$

On reconnait alors une somme télescopique. On a donc pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

3) On va faire apparaitre une somme télescopique. Fixonx $n > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k(k+3)+2}{k(k+3)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)+\ln(k+2)-\ln(k+3) \\
&= \ln(n+1)-\ln(1)+\ln(3)-\ln(n+3) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)+\ln(3).
\end{aligned}$$

Ceci entraine que la série $\sum \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$ est convergente et, par passage à la limite (on utilise la continuité du logarithme) que $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln(3)$.

4) On va ici aussi faire apparaitre une somme télescopique. Pour la calculer, on va factoriser le numérateur. On a $X^3+5X^2+6X = X(X+3)(X+2)$. On a donc, pour $n > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+3)(k+2)}{(k+3)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1-1)}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!} \\
&= 1-\frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite, on trouve donc que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+5k^2+6k}{(k+3)!} = 1$.

Exercice 2.

1) On a une série à termes positifs. On a $\dfrac{n^3+n^2}{n^5+n+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série est convergente.

2) On multiplie par la quantité conjuguée afin de déterminer un équivalent. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2}\\ &= \frac{1}{n\left(1+\sqrt{1+1/n}\right)^2}.\end{aligned}$$

Ceci entraine que $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{4n}$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs (la série étudiée est bien à termes positifs car $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > 0$ par stricte croissance de la fonction racine), on en déduit que la série est divergente.

3) La série est bien à termes positifs (car ln est croissante donc $\ln(1+1/n) \geq 0$). On a $\ln(1+1/n) \sim 1/n$. Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série est divergente.

4) On a $n^3 \arctan(e^{-n}) \sim n^3 e^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (par croissance comparée). Par comparaison des séries à termes positifs (car arctan est positive sur $\mathbb{R}_+$), la série est convergente.

5) On a $\dfrac{3^n+n^5}{\ln(n)+5^n} \sim \dfrac{3^n}{5^n}$. Par comparaison des séries à termes positifs, le terme général est équivalent au terme général d'une série géométrique de raison $0 < \dfrac{3}{5} < 1$. On en déduit que la série est convergente.

6) On effectue un développement limité (plutôt un développement asymptotique même) du terme général pour obtenir un équivalent. On a :

$$\begin{aligned}n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) &= n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{6n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\\ &= n^2\left(-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Le terme général est donc équivalent à $-\dfrac{1}{2n^2}$. Ceci nous assure qu'à partir d'un certain rang, le terme général est négatif. Par théorème de comparaison des séries à termes négatifs, on en déduit que la série est convergente.