# 19. Fractions rationnelles

**Exercice 1.** (c) Trouver une relation de Bezout (dans $\mathbb{R}[X]$) entre les polynômes $X^3+1$ et $X^4+1$ puis tous les polynômes $U$ et $V$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X^3+1)U+(X^4+1)V=1$.

**Exercice 2.** (m) Calculer le pgcd de $P(X)=X^n-1$ et $Q(X)=X^p-1$ où $n$ et $p$ sont deux entiers de pgcd $d$.

**Exercice 3.** (c) Déterminer les $P\in\mathbb{C}[X]$ divisibles par $X^2-1$ et $X^3+1$.

**Exercice 4.** (m) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1) $F_1=\dfrac{3}{X^3-1}$.

2) $F_2=\dfrac{X^3-1}{(X-2)^2}$.

3) $F_3=\dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$.

4) $F_4=\dfrac{X^2-2}{(X-1)^2(X^2+1)}$.

**Exercice 5.** (m) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1) $F_1=\dfrac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

2) $F_2=\dfrac{X^3+X^2+X-1}{X(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$.

3) $F_3=\dfrac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$.

4) $F_4=\dfrac{1}{X^4(1-2X)}$.

**Exercice 6.** (m) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1) $F_1=\dfrac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}$.

2) $F_2=\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$.

3) $F_3=\dfrac{X^5}{X^4+1}$.

4) $F_4=\dfrac{X}{(X-2)^2(X+1)(X^2+1)}$.

5) $F_5=\dfrac{X^3+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$.

**Exercice 7.** (m) Calculer les dérivées $n$-ièmes de $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ (où $a \neq b$ sont des réels) et de $g(x) = \arctan(x)$.

**Exercice 8.** (m) Simplifier les sommes suivantes et déterminer leurs limites quand $n$ tend vers l'infini :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \text{ et } S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

**Exercice 9.** (i) Déterminer les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(X+1) = F(X)$.

**Exercice 10.** (m) En comparant au préalable $f(z)$, $f(jz)$ et $f(j^2 z)$, décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction :

$$f(z) = \frac{1}{(z^3-1)^2}.$$

**Exercice 11.** (i) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant que des racines simples non nulles $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

**Exercice 12.** (i) Soit $P$ un polynôme scindé à racines simples non nulles. On note $a_1, \ldots, a_n$ ses racines. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = -\frac{P'(0)}{P(0)} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} = \frac{P'(0)^2 - P(0)P''(0)}{P(0)^2}.$$

**Exercice 13.** (∗) On pose $P = (X - z_1)\ldots(X - z_n)$ où $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des complexes deux à deux distincts. On pose $F = \dfrac{1}{P^2}$. Décomposer $F$ en éléments simples.

*On exprimera les coefficients en fonction des $P'(z_i)$ et de $P''(z_i)$.*

**Exercice 14.** (∗) Soit $P$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

**Exercice 15.** (∗) **Théorème de Gauss-Lucas.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines (pas forcément distinctes) de $P$.

En considérant le développement en éléments simples de $P'/P$, montrer que les racines de $P'$ sont dans l'enveloppe convexe des racines de $P$, c'est à dire qu'elles peuvent s'exprimer comme des barycentres à poids positifs des racines de $P$.

*Autrement dit, toutes les racines $\alpha_j$ de $P'$ peuvent s'écrire sous la forme $\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$ avec les $\lambda_k$ réels positifs et vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.*