32. Intégration, méthodologie

I. Intégration de fonctions en escaliers

I.1. Subdivision

Définition. Soit $[a, b]$ un segment. On dit que $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

I.2. Fonctions en escalier

Définition. Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$. On dit que f est en escalier sur $[a, b]$ (ou constante par morceaux) si il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est constante. Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Proposition. On note $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$. C'est un espace vectoriel qui est en plus stable par produit et passage à la valeur absolue.

I.3. Intégrale

Définition. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision adaptée à f. Alors, on note $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (x_{k+1} - x_k)$ où $f|_{]x_k, x_{k+1}[} = \alpha_k$. Cette somme ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie et ne dépend que de f.

I.4. Propriétés de l'intégrale

Toutes les propriétés de l'intégrale énoncées dans le chapitre 7 (Primitives) s'appliquent au cas où les fonctions sont en escalier (la relation de Chasles, la linéarité, la positivité et la croissance de l'intégrale et le fait que si les bornes sont dans le bon sens, la valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue).

II. Uniforme continuité

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x, y \in I,\ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :

f est lipschiztienne sur $I \Rightarrow f$ est uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ est continue sur I.

Exercice d'application 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lipschitzienne de rapport K avec $K \in]0,1[$.

1) Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$, c'est à dire que f admet un point fixe sur $[0,1]$.

2) On fixe $u_0 \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - x_0| \leq K|u_n - x_0|$. *On rappelle que* $f(x_0) = x_0$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - x_0| \leq K^n|u_0 - x_0|$.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$.

3) On suppose qu'il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = x_1$. Montrer que $x_1 = x_0$.

Théorème. De Heine. Soit f continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, f est uniformément continue sur ce segment.

III. Intégrale des fonctions continues par morceaux

III.1. Fonctions continues par morceaux

Définition. Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si il existe $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que :

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f|_{]x_k,x_{k+1}[}$ est continue.
- $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lim\limits_{x\to x_k^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_{k+1}^-} f(x)$ existent et sont finies.

Proposition. On note $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. C'est un espace vectoriel qui est en plus stable par produit et passage à la valeur absolue.

III.2. Norme infinie

Définition. Pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, on pose $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Proposition. $||\cdot||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. $||f||_\infty$ *se lit « norme infinie de* f *».* Elle vérifie donc les propriétés suivantes :
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}),\ ||\lambda f||_\infty = |\lambda| \times ||f||_\infty$.
- $\forall f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}),\ ||f||_\infty \geq 0$.
- $\forall f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}),\ ||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
- $\forall f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}),\ ||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$.

Définition. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et f continue par morceaux sur $[a,b]$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers f sur $[a,b]$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f-f_n||_\infty = 0$.

III.3. Approximation de fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. Alors, il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||h_n - f||_\infty = 0$. *Autrement dit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.*

Remarque : L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense pour la norme $||\cdot||_\infty$ dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

III.4. Construction de l'intégrale

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b h_n$ existe et est finie. Cette limite ne dépend pas de la suite de fonctions en escalier choisie, et on pose $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b h_n$.

m Le résultat important à retenir (pour l'an prochain) est que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers f, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \int_a^b f$. *Autrement dit, la convergence uniforme permet d'intervertir les limites et les intégrales. Cette propriété est en général fausse sans la convergence uniforme.*

IV. Propriétés de l'intégrale

IV.1. Pour les fonctions continues par morceaux

Toutes les propriétés de l'intégrale énoncées dans le chapitre 7 (Primitives) s'appliquent au cas où les fonctions sont continues par morceaux (la relation de Chasles, la linéarité, la positivité et la croissance de l'intégrale et le fait que si les bornes sont dans le bon sens, la valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue).

IV.2. Cas particulier des fonctions continues

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ positive sur $[a,b]$. Alors, $\int_a^b f \geq 0$ et

$$\int_a^b f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0.$$

Exercice d'application 2. Montrer que $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Est-ce un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{pm}([0,1],\mathbb{R})$?

V. Sommes de Riemann

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f$.

Remarque : Ce résultat est encore vraie si la somme commence à 1, ou termine à n, ou les deux (en effet, chacun des termes pris de manière séparée tend vers 0).

m Ce résultat est principalement utilisé quand $a=0$ et $b=1$ (on peut de toute manière s'y ramener avec un changement de variable), c'est à dire que pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([0,1],\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Il est très souvent utilisé pour calculer des limites de somme faisant intervenir les paramètres k et n en même temps et l'idée est de faire apparaitre des termes en $\frac{k}{n}$ afin de faire apparaitre la fonction f voulue.

Exercice d'application 3. Déterminer les limites suivantes à l'aide d'une somme de Riemann :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

VI. Primitives et intégrales

VI.1. Intégrale en fonction de sa borne supérieure

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On pose $F_a : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}\right.$.

Alors, F_a est bien définie et continue sur I.

De plus, si f est continue sur I, alors F_a est dérivable et $(F_a)' = f$.

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f admet des primitives sur I, qui sont égales à une constante près et l'unique primitive de f qui s'annule en $a \in I$ est F_a.

Théorème. Réciproquement, si $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que F est une primitive de f sur I, alors pour $a,b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$.

(m) Calculer l'intégrale permet de trouver des primitives d'une fonction. Connaitre des primitives d'une fonction permet de calculer l'intégrale de cette fonction. La boucle est bouclée ! En général, on utilise des primitives usuelles (connues) pour calculer des intégrales plutôt que l'inverse.

VI.2. Techniques de calcul

Tous les résultats du chapitre 7 (primitives) s'appliquent, les plus importants étant l'intégration par parties et le changement de variable.

(m) La nouveauté à présent est que l'on peut utiliser la continuité de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour utiliser les techniques de calcul sur un segment où les hypothèses des théorèmes sont vérifiées et passer à la limite pour se ramener au calcul initial. Ainsi, si par exemple f a un « problème » en 0 et que l'on désire calculer $\int_0^1 f(t)dt$, on pourra calculer pour $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^1 f(t)dt$ et utiliser le fait que par continuité des intégrales fonction de leur borne supérieure, $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(t)dt$.

Exercice d'application 4. Pour $t \in]0,1]$, on pose $f(t) = \sqrt{t}\ln(t)$.

1) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et justifier l'existence de $\int_0^1 f(t)dt$.

2) Déterminer la valeur de cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

VII. Correction des exercices

Exercice d'application 1.

1) f est bien continue sur $[0,1]$ car elle est lipschitzienne. Si on pose $g : x \mapsto f(x) - x$, elle est donc continue comme différence de fonctions continues. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ (car f est à valeurs dans $[0,1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car f est à valeurs dans $[0,1]$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est à dire tel que $f(x_0) = x_0$.

2)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors puisque f est K-lipschitzienne :

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1} - x_0| & = & |f(u_n) - f(x_0)| \\ & \leq & K|u_n - x_0|. \end{array}$$

b) On montre ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n - x_0| \leq K^n |u_0 - x_0|$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1} - x_0| & \leq & K|u_n - x_0| \\ & \leq & K^{n+1}|u_0 - x_0|. \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie d'après l'hypothèse de récurrence et parce que l'on fait des produits de termes positifs (ce qui permet de ne pas changer le sens des inégalités). La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Puisqu'elle est initialisée et héréditaire, elle est vraie à tout rang.

c) Puisque $K \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n = 0$. Or, d'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-K^n|u_0 - x_0| \leq u_n - x_0 \leq K^n|u_0 - x_0|.$$

D'après le théorème des gendarmes, puisque les suites à gauche et à droite de l'inégalité tendent vers 0, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - x_0) = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

3) On peut faire deux preuves différentes de ce résultat. Tout d'abord une preuve directe. Si il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = x_1$. On a alors puisque f est K-lipschitzienne :

$$\begin{array}{rcl} |x_1 - x_0| & = & |f(x_1) - f(x_0)| \\ & \leq & K|x_1 - x_0|. \end{array}$$

Si $x_1 \neq x_0$, on a alors $|x_1 - x_0| > 0$. En divisant l'inégalité précédente par $|x_1 - x_0|$, on a alors $1 \leq K$: absurde ! On en déduit que $x_0 = x_1$.

On peut faire une autre preuve en utilisant ce qui a été fait avant. Si il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $f(x_1) = x_1$, alors on peut reprendre la question 2 et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_1$ (la seule hypothèse sur x_0 utilisée dans la question 2 était que x_0 était un point fixe de f, ce qui est aussi le cas de x_1). Par unicité de la limite, on en déduit que $x_1 = x_0$.

Exercice d'application 2. Remarquons que l'intégrale existe toujours car un produit de fonctions continues est continue. La symétrie étant directe, on montre la linéarité à gauche pour prouver la bilinéarité. Pour $f, g, h \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{array}{rcl} \langle \lambda f + \mu g, h \rangle & = & \displaystyle\int_0^1 (\lambda f(t) + \mu g(t)) h(t) dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 (\lambda f(t) h(t) + \mu g(t) h(t)) dt \\ & = & \lambda \displaystyle\int_0^1 f(t)h(t)dt + \mu \displaystyle\int_0^1 g(t)h(t)dt \\ & = & \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle. \end{array}$$

Pour terminer la preuve, il ne manque plus que la positivité et la définition. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a :

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 (f(t))^2 dt.$$

Puisque $f^2 \geq 0$ et que $0 \leq 1$ (bornes dans le bon sens), on en déduit que $\langle f, f\rangle \geq 0$. De plus, puisque f^2 est continue (car f l'est) et positive, on a que son intégrale est nulle si et seulement si la fonction f^2 est nulle sur $[0,1]$. Puisque f^2 est nulle si et seulement si f est nulle, on a bien montré le caractère défini de $\langle .,. \rangle$. On a donc bien prouvé que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Sur $\mathcal{C}^0_{pm}([0,1],\mathbb{R})$, ce n'est pas un produit scalaire car il ne vérifie pas le caractère défini. En effet, si on considère la fonction f égale à 1 en 0 et égale à 0 sur $]0,1]$, on a $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^1 0dt = 0$ et pourtant f n'est pas la fonction nulle.

Exercice d'application 3.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1}$. Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est continue sur $[0,1]$, on en déduit par théorème des sommes de Riemann que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1))_0^1 = \ln(2).$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$, on en déduit par théorème des sommes de Riemann que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx \\
&= [\arctan(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln(2).
\end{aligned}$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Puisque la fonction $x \mapsto (1+x)\sin(\pi x)$ est continue sur $[0,1]$ (comme produit de fonctions continues), on en déduit par théorème des sommes de Riemann que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \int_0^1 (1+x)\sin(\pi x)dx \\
&= \left[(1+x)\times\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}dx \qquad \text{(par intégration par parties)} \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{\pi}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 4.

1) f est bien définie et continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues. En 0, on a d'après les croissances comparées que $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

f étant prolongeable en fonction continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Les fonctions étudiées étant $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$, on peut utiliser une intégration par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \sqrt{t}\ln(t)dt &= \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{2}{3}t^{1/2}dt \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\ln(\varepsilon) - \frac{4}{9}(1-\varepsilon^{3/2}).\end{aligned}$$

La fonction $\varepsilon \mapsto \displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)dt$ étant continue sur $[0,1]$ comme primitive d'une fonction continue, on en déduit par passage à la limite quand ε tend vers 0 (en utilisant encore une fois les croissances comparées) que :

$$\int_0^1 f(t)dt = -\frac{4}{9}.$$