DM 6, pour le mardi 03/01/2023

Je vous rappelle les consignes en devoir à la maison :

- Vous pouvez chercher les exercices à plusieurs, me poser des questions dessus mais la rédaction doit être personnelle.
- Écrire lisiblement sur des feuilles grandes et doubles, au stylo ou à l'encre bleu foncé ou noir et **souligner ou encadrer ses résultats**.
- Vous avez le droit de sauter des questions et d'admettre les résultats correspondants pour traiter les questions suivantes.
- Les différents problèmes sont indépendants.

Exercice. Ne rédigez pas la question 1 mais cherchez la pour vous entrainer sur les équivalents usuels.

1) *Du calcul.* Déterminer un équivalent simple des suites suivantes et donner leur limite :

a) $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln(n) - 4n^2}$.

b) $v_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$.

c) $w_n = \left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)^n$.

d) $x_n = \dfrac{n! + e^n}{\pi^n + 2^n + n^2\ln(n)}$.

2) *Logarithme d'équivalent.* Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que $x_n \sim_{+\infty} y_n$.

a) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Quelle est la limite de (x_n) ? Justifier qu'à partir d'un certain rang, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement plus grandes que 1.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) - \ln(y_n) = 0$ puis montrer que $\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$.

c) On suppose à présent $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Que vaut la limite de (x_n) ? Justifier qu'à partir d'un certain rang, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement plus petites que 1 puis en procédant comme à la question précédente, montrer que $\ln(x_n) \sim_{+\infty} \ln(y_n)$.

3) *Équivalent de suite implicite.*

a) Montrer que $f : x \mapsto x + e^x$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.

b) En déduire que $\forall n \geq 1,\ \exists! x_n \in \mathbb{R}_+ \ /\ x_n + e^{x_n} = n$.

c) Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

d) Montrer que $e^{x_n} \sim_{+\infty} n$ et en déduire un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini. *On pourra utiliser le résultat de la question 2.*

PROBLÈME

Sous groupes de $\mathbb{R}$ et densité de $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$

Partie I. Étude des sous groupes de $\mathbb{R}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\alpha\mathbb{Z} = \{n\alpha,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Le but de cette partie est de montrer que soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$, soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

1) *Exemples.*

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \alpha\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$.

b) Donner un exemple de sous-groupe de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on considère G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbb{Z}$. On supposera donc dans la suite que $G \neq \{0\}$.

2) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide et admet une borne inférieure que l'on notera α et justifier que $0 \leq \alpha$.

3) On suppose dans cette question que $0 < \alpha$ et on suppose par l'absurde que $\alpha \notin G$.

a) Justifier que $\forall g \in G \cap \mathbb{R}_+^*,\ \alpha < g$.

b) En utilisant la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure, montrer qu'il existe $g_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < g_1 < 2\alpha$.

c) Montrer de la même manière qu'il existe $g_2 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < g_2 < g_1$.

d) Justifier que $g_1 - g_2 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et obtenir alors une absurdité.

On a donc $\alpha \in G$.

e) Montrer que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

f) Réciproquement, on fixe $g \in G$.

i) Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leq g < (n+1)\alpha$.

ii) Justifier que $g - n\alpha \in G$ et en déduire que $g = n\alpha$.

iii) En déduire que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

4) On suppose dans cette question que $\alpha = 0$ et on fixe pour la suite de la question $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

b) Montrer de la même manière qu'à la question 3.f.i qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ng \leq x < (n+1)g$ et en déduire que $|x - ng| \leq \varepsilon$.

c) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie II. Densité de $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$

On pose $G = \{p + 2\pi q,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$.

5) Montrer que G est un sous groupe de $\mathbb{R}$.

6) Justifier que $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\} = \cos(G)$.

7) Vérifier que $1 \in G$ et $2\pi \in G$. En utilisant le fait que $\pi \notin \mathbb{Q}$, montrer qu'il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

8) En déduire de ce qui précède que $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

On pourra utiliser la continuité de la fonction cos *en admettant le fait que si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = \cos(l)$.