28. Dénombrement, corrigé

Exercice 2. Attention erreur d'énoncé ici. Le jeu n'a que 52 cartes ! (pas de joker !) On a donc 4 couleurs et 13 cartes différentes dans chaque couleur ($A-2-3-4-5-6-7-8-9-10-V-D-R$).

1) Pour avoir un carré, il faut d'abord choisir la carte qui constitue le carré. On a donc 13 possibilités pour cette carte. Il faut ensuite choisir la dernière carte. On a ici 48 cartes restantes donc 48 possibilités. On a donc en tout 624 possibilités.

Pour un full, il faut d'abord choisir la carte que l'on aura 3 fois. On a donc 13 possibilités pour la valeur de cette carte puis pour chacune de ces possibilités, 4 façons différentes de les avoir (selon la couleur qui nous manque pour avoir un carré). Il faut ensuite choisir les 2 cartes restantes. Elles peuvent valoir une des 12 valeurs possibles pour les cartes et on a ensuite une fois la valeur choisie $\binom{4}{2} = 6$ façons différentes selon les couleurs (il faut choisir 2 couleurs différentes parmi 4). On a donc finalement $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$ possibilités.

2) Pour avoir une couleur, il faut choisir 5 cartes parmi 13 d'une même couleur et faire ceci pour les 4 couleurs. On a donc $\binom{13}{5} \times 4 = 5148$ mains avec une couleur.

Pour la suite, on peut compter en fonction de la carte de départ. Etant donné la carte la plus basse fixée (par exemple un As), on a 4 possibilités pour la couleur de cette carte, puis 4 possibilités pour la couleur du 2, puis ..., puis 4 possibilités pour la couleur du 5. On a donc $4^5 = 1024$ suites qui commencent par un As. Le raisonnement est identique selon si la suite commence par 2 , 3 , 4 , etc. La plus grande suite est celle commençant par 10, ce qui nous donne 10 possibilités pour commencer. On a donc $1024 * 10 = 10240$ mains constituées d'une suite.

A noter que l'on compte dans les deux cas les couleurs et les suites qui sont en fait des quintes flush !

3) Le nombre de main contenant 3 cartes identiques mais pas 4 est $13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2}$ (13 possibilités pour la valeur et 4 possibilités ensuite (puisqu'il faut choisir 3 couleurs parmi 4) et il faut ensuite choisir 2 cartes parmi 48 (car on ne peut pas prendre une des 3 cartes utilisées ni la 4ieme de même valeur pour ne pas faire un carré, ce qui laisse donc $52 - 4 = 48$ cartes parmi lesquelles choisir)). Parmi les combinaisons que l'on a comptées, il y a cependant les fulls qu'il faut enlever. On a donc $13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} - 3744 = 54912$ mains avec un brelan et pas mieux qu'un brelan.

Pour avoir une double paire (et pas mieux qu'une double paire), il faut déjà choisir 2 valeurs parmi 13 qui seront les valeurs de nos 2 paires ($\binom{13}{2}$ possibilités) puis ensuite faire toutes les combinaisons de couleurs possibles (donc $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$ puisque l'on choisit les couleurs des deux paires de manières indépendantes. Il reste encore à fixer la carte suivante que l'on prend différente donc parmi 11 valeurs et 4 couleurs (donc 44 choix). On a donc au total $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 44 = 123552$ nombres de main avec une double paire et pas mieux qu'une double paire.

On remarque que l'ordre des mains au poker est donc cohérent avec la fréquence d'apparation des mains !

Exercice 3. On a $2p+1$ entiers relatifs inférieurs ou égaux à p en valeur absolue. En effet, l'ensemble des nombres vérifiants cette propriété est l'ensemble $\{-p,-p+1,\ldots,p-1,p\}$. Pour trouver le nombre de n-uplets $(a_1,\ldots,a_n)\in Z^n$ tels que $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|\leq p$, il faut et il suffit que chacun des termes du n-uplet soit en valeur absolue inférieur ou égal à p. On a donc $2p+1$ possibilités pour le premier élément, $2p+1$ pour le second, ..., $2p+1$ pour le n-ième. On a donc $(2p+1)^n$ n-uplets vérifiant cette propriété.

Pour $p=0$, on a exactement un n-uplet qui convient : $(0,0,\ldots,0)$.

Pour $p\geq 1$, on a, par le même calcul qu'au début de l'exercice, $(2p-1)^n$ n-uplets $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$ tels que $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|\leq p-1$. On en déduit que le nombre de n-uplets tels que $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|=p$ est égal au nombre de n-uplets dont le maximum est inférieur ou égal à p auquel on retire le nombre de n-uplets dont le maximum est inférieur ou égal à $p-1$ (il ne reste donc que les n-uplets dont le maximum est exactement égal à p). On en déduit que le nombre de n-uplets tels que $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|=p$ est égal à $(2p+1)^n-(2p-1)^n$.

On retrouve pour $n=1$ qu'il y a exactement 2 solutions : p et $-p$.

Exercice 4. Soit E un ensemble fini à np éléments. Pour construire une partition de E en n parties de p éléments, il faut commencer par choisir p éléments parmi n pour construire notre « premier » sous-ensemble. On a donc $\binom{np}{p}$ possibilités. Il faut ensuite choisir p éléments parmi les $n(p-1)$ restants afin de construire le « second » sous-ensemble. On a donc $\binom{n(p-1)}{p}$ possibilités. On continue ainsi de suite jusqu'à avoir n parties formant une partition de l'ensemble E. Le nombre de partitions de E, avec ordre, est donc égal à :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\binom{p(n-k)}{p}.$$

On a cependant compté plusieurs fois des partitions identiques. En effet, on a ici compté nos ensembles ordonnés. Or, les partitions $\{A_1,A_2,\ldots,A_p\}$ et $\{A_2,A_1,\ldots,A_p\}$ par exemple sont les mêmes (elles sont constituées des mêmes ensembles). On a donc compté autant que de permutations possibles de n éléments fois trop de termes. Il faut donc diviser notre total par $n!$. Au final, le nombre de partitions de E en n parties de p éléments chacune est égal à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\binom{p(n-k)}{p} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(p(n-k))!}{p!(p(n-k-1))!}\\ &= \frac{(np)!}{n!(p!)^n}\quad\text{(on reconnaît un produit télescopique).}\end{aligned}$$

On teste pour les petites valeurs. Pour $n=1$ et p quelconque, on trouve 1 ce qui est normal. Pour $p=1$ et n quelconque, on trouve 1 ce qui est normal. Pour $n=2$ et $p=2$ quelconque, on trouve 3 ce qui est normal, etc.

Pour appareiller nos joueurs au premier tour, on cherche le nombre de partitions à n parties de 2 éléments. On a donc d'après la formule précédente $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ façons différentes de les appareiller.

Dans le tournoi, il y a en tout $2n-1$ joueurs éliminés avant de pouvoir déterminer le vainqueur. Il y a donc exactement $2n-1$ matchs.

Exercice 5. On remarque tout d'abord que l'inégalité est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$. L'idée pour obtenir cette majoration est de grouper les entiers qui apparaissent dans le produit $n!=\prod\limits_{k=1}^{n}k$ deux par deux, les « premiers » termes avec les « derniers ».

Supposons n pair, $n = 2p$. On a donc :

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{k=1}^{2p} k \\ &= \prod_{j=1}^{p} j(2p+1-j). \end{aligned}$$

On a regroupé ici dans le produit les termes deux par deux. Étudions à présent la fonction $x \mapsto x(2p+1-x)$ sur l'intervalle (réel) $[0, 2p+1]$. Cette fonction est croissante puis décroissante et atteint son maximum en $x = \dfrac{2p+1}{2}$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0, 2p+1],\ x(2p+1-x) \leq \left(\frac{2p+1}{2}\right)^2.$$

On en déduit que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ j(2p+1-j) \leq \left(\frac{2p+1}{2}\right)^2.$$

On peut alors conclure. On a donc :

$$\begin{aligned} n! &\leq \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{2p+1}{2}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2p+1}{2}\right)^{2p} \\ &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

On peut reprendre la même preuve si n est impair, $n = 2p+1$. Il faut cependant cette fois sortir le terme « du milieu ». On a alors :

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{k=1}^{2p+1} k \\ &= (p+1)\prod_{j=1}^{p} j(2p+2-j) \\ &\leq (p+1)\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{2p+2}{2}\right)^2 \\ &\leq (p+1)^{2p+1} \\ &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

L'inégalité est donc également vraie pour n impair.

Exercice 7. Notons u_n le nombre de façons de monter un escalier à n marches avec des pas d'une ou deux marches. On a clairement $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$ (on ne peut faire que soit un pas de 2 marches, soit 2 pas d'une marche). Supposons que l'on désire monter un escalier de $n+2$ marches. Alors, au premier pas, soit on monte 1 marche et il reste un escalier de $n+1$ marches à monter, soit on monte 2 marches et il reste un escalier de n marches à monter. On a donc que pour $n \geq 1$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

En effet, les possibilités sont bien disjointes (on ne fait pas le même premier pas) et on compte bien tout car au premier pas, on fait forcément un pas d'une marche ou de deux marches. Remarquons que l'on peut étendre cette propriété en $n=0$ en posant $u_0=1$ (pour bien avoir $u_2=u_1+u_0$). L'équation caractéristique associée à cette équation est $X^2-X-1=0$ dont les racines sont $x_0=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit qu'il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda x_0^n+\mu x_1^n.$$

En $n=0$, on trouve $1=\lambda+\mu$ et en $n=1$, on trouve que $1=\lambda x_0+\mu x_1$. On en déduit que $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ et $\mu=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, ce qui donne l'expression de u_n.

Exercice 9. On va commencer par compter de combien de façons différentes on peut placer les 2 tours blanches. Un échiquier fait 8 cases sur 8 cases. On a exactement $\dbinom{64}{2}$ possibilités pour placer les deux tours blanches. On veut à présent placer les deux tours noires. Le problème est que selon si les deux tours blanches sont alignées ou pas, on n'a pas autant de cases libres pour les deux tours noires.

On a $64\times(64-15)/2$ configurations où les deux tours blanches ne sont pas alignées : une fois la première placée (64 possibilités), on doit retirer 15 cases (il ne faut pas oublier de retirer la case sur laquelle on a placé la tour). On divise ensuite par deux car on a compté chaque configuration deux fois.

Dans ce cas, pour placer les deux tours noires, il reste $64-28$ cases possibles ce qui nous donne $\dbinom{36}{2}$ possibilités.

On a $64*14/2$ configurations où les deux tours blanches sont alignées : une fois la première placée (64 possibilités), on place la seconde sur une des 14 cases où elle est alignée avec la première. On divise ensuite par deux car on a compté chaque configuration deux fois.

Dans ce cas, pour placer les deux tours noires, il reste $64-22$ cases possibles ce qui nous donne $\dbinom{42}{2}$ possibilités.

Au final, on trouve $\dfrac{64\times 49}{2}\cdot\dbinom{36}{2}+\dfrac{64\times 14}{2}\cdot\dbinom{42}{2}=1373568$ possibilités.

Exercice 10. Soit $n\le p$ des entiers. On pose $E=[\![1,n]\!]$ et $F=[\![1,p]\!]$. Pour déterminer une application strictement croissante de E vers F, il suffit de déterminer les n points à l'arrivée (car on aura alors 1 qui s'enverra sur le point le plus petit, 2 sur le second, etc., n sur le dernier). On en déduit qu'il y a $\dbinom{p}{n}$ applications strictement croissantes de E vers F.

Exercice 11.

1) On va calculer de manière générale $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-p}\varepsilon^k$ avec $\varepsilon=\pm 1$ pour avoir les deux réponses d'un coup. On a :

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-p}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!}=\frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}.$$

En multipliant par $p!$ au numérateur et au dénominateur, on obtient que :

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-p}=\binom{n}{p}\binom{p}{k}.$$

On a alors en utilisant le binome de Newton :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-p}\varepsilon^k=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}\varepsilon^k=\binom{n}{p}(1+\varepsilon)^p.$$

On trouve donc les deux résultats annoncés.

2) Commençons par compter le nombre d'ensembles B de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. On a exactement $\binom{n}{p}$ possibilités. Chacun de ces ensembles contient alors 2^p ensembles. On a donc $2^p\binom{n}{p}$ couples (A,B) de $\mathcal{P}(E)^2$ avec B de cardinal p.

On pourrait aussi commencer par choisir un ensemble A de cardinal k avec k variant entre 0 et p. On a $\binom{n}{k}$ possibilités. Une fois A choisi, pour construire un ensemble B de cardinal p qui le contient, il reste $p-k$ éléments à choisir parmi $n-k$. On a donc en tout $\binom{n}{k}\binom{p-k}{n-k}$ couples qui conviennent avec A de cardinal k. Il reste à sommer ces possibilités pour k variant entre 0 et p pour compter toutes les possibilités.

Exercice 12. Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\leq\min(n,p)$. Calculons de deux manières différentes de combien de façons l'on peut choisir k éléments parmi $\{1,\dots,n+p\}$.

La première manière est simple. Il s'agit de $\binom{n+p}{k}$.

La seconde manière va faire intervenir une somme. Notons $A=\{1,\dots,n\}$ et $B=\{n+1,\dots,n+p\}$. Choisir k éléments dans $A\cup B$ revient à en choisir i dans A et $k-i$ dans B, ceci pour i variant entre 0 et k. En effet, il n'y a pas de « recouvrement » d'ensembles puisque $k\leq\min(n,p)$. On en déduit donc, puisque le choix des éléments dans A et ceux dans B se fait indépendemment, que ce nombre est égal à :

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{p}{k-i}.$$

Puisque ces deux nombres représentent la même chose, on a bien :

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{p}{k-i}=\binom{n+p}{k}.$$

On utilise ce résultat en $p=n=k$. On a donc :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\binom{2n}{n}.$$

En utilisant le fait que pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$, $\binom{n}{n-i}=\binom{n}{i}$, on trouve que :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2.$$

Exercice 13. Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1) On veut déterminer le nombre de couples $(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2$ tels que $X\subset Y$. Pour cela, on commence par compter de comben de manières différentes on peut choisir $Y\in\mathcal{P}(E)$. Puisque E

est de cardinal n, on a 2^n possibilités. Il y a exactement $\binom{n}{k}$ façons de choisir un Y de cardinal k. Ensuite, le nombre d'ensembles X inclus dans Y dépend uniquement de son cardinal. Si Y est de cardinal k, il y a 2^k possibilités pour choisir $X \subset Y$. Au total, le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$ vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

2) Déterminons le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \emptyset$. Commençons par choisir X par exemple. On a 2^n sous-ensembles de E, donc 2^n manières de choisir X. Encore une fois, il y a $\binom{n}{k}$ ensembles X de cardinal k. Or, une fois X choisi de cardinal k, Y ne peut contenir plus que $n-k$ éléments au maximum car on veut X et Y disjoints. On a donc 2^{n-k} ensembles qui conviennent pour Y. Au final, le nombre de couples qui conviennent vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n.$$

3) Le raisonnement est exactement le même qu'à la première question. On a $\binom{n}{k}$ choix si l'on veut Z de cardinal k. On a ensuite $\binom{k}{j}$ choix pour choisir Y inclus dans Z de cardinal j. On a enfin 2^j possibilités pour choisir $X \subset Y$. Le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$ est donc égal à :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \\ &= 4^n. \end{aligned}$$

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On veut colorier un carré en utilisant k couleurs. On a ici k côtés à colorier. On va également supposé que le carré est « fixe » (autrement dit qu'un carré colorié en rouge-vert-rouge-vert est différent d'un carré colorié en vert-rouge-vert-rouge, on ne considère pas les coloriages invariants par rotation).

Pour $k = 1$, il n'y a aucune façon de colorier le carré. Pour $k = 2$, il y en a deux (les deux données précédemment). Pour $k = 3$, il faut compter les coloriages utilisant 2 couleurs :

- il y a 3 couples de couleurs possibles si nos couleurs sont Rouge, Vert, Bleu, on peut prendre les couples $R - V$, $R - B$ et $V - B$) et pour chacun de ces couples, 2 coloriages possibles d'après l'étude précédente.
- si on prend exactement trois couleurs, il faut choisir une couleur que l'on utilise deux fois (3 choix possibles, rouge, vert ou bleu). Il faut ensuite choisir si on colorie les côtés haut/bas ou gauche/droite avec cette couleur (2 possibilités). Il faut ensuite choisir si on colorie les deux côtés restants en Bleu-Vert ou en Vert-Bleu (2 possibilités).
- Finalement, on a $3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2$ coloriages possibles, soit 18.

Pour $k = 4$, on peut reprendre l'étude précédente :

- il y a $\binom{4}{2}$ manières de choisir 2 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 2 coloriages possibles (cf première étude).
- il y a $\binom{4}{3}$ manières de choisir 3 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 12 coloriages possibles (cf deuxième étude)
- si on utilise exactement les 4 couleurs, on a alors $4! = 24$ possibilités pour colorier notre carré (il faut choisir une couleur pour la face du haut (4 possibilités), puis une couleur pour la droite

(3 possibilités restantes), puis une couleur pour le bas (2 possibilités restantes) et la dernière est fixée donc en tout 4! coloriages.

- Il y a donc finalement $\binom{4}{2} \times 2 + \binom{4}{3} \times 12 + 4! = 12 + 48 + 24 = 84$ possibilités pour le coloriage avec 4 couleurs.

Pour le cas général ($k \geq 4$), en reprenant l'étude précédente :

- il y a $\binom{k}{2}$ manières de choisir 2 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 2 coloriages possibles (cf première étude).
- il y a $\binom{k}{3}$ manières de choisir 3 couleurs parmi 4 et ensuite pour chacun de ces couples, 12 coloriages possibles (cf deuxième étude)
- si on utilise exactement 4 couleurs, il y a $\binom{k}{4}$ manières de les choisir et ensuite 24 coloriages avec chacun de ces choix.
- Il y a donc finalement $2\binom{k}{2} + 12\binom{k}{3} \times 12 + 24\binom{k}{4}$ possibilités pour le coloriage avec k couleurs.

Exercice 15. Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. Posons $E = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \{1, \ldots, p\}$.

1) Pour construire une application telles que $f(A) = A$, il faut que f restreinte à A soit une permutation (on a donc $p!$ possibilités) et on peut envoyer de manière indépendante les éléments restants où l'on veut (ce qui nous donne $(n-p)^n$ possibilités). Le nombre d'applications $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$ est donc $(n-p)^n p!$.

2) Pour avoir des fonctions injectives, on doit toujours avoir que f restreinte à A soit une permutation (toujours $p!$ possibilités). Par contre, il faut également que f restreinte à $\overline{A}$ soit une permutation. On a donc $(n-p)!$ possibilités. Le nombre d'applications injectives $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$ est donc $p!(n-p)!$.

C'est également le nombres de bijections telle que $f(A) = A$. Quand on considère une fonction f de E dans E avec E fini, f est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective.

3) D'après la remarque précédente, ce nombre est égal au nombre précédent. Il est donc aussi égal à $p!(n-p)!$.

4) Puisque l'on manipule des ensembles finis, si f est bijective, on a $f^{-1}(A) = A$ si et seulement si $f(A) = A$. On est donc ramené à compter le nombre de fonctions bijectives de E dans E telles que $f(A) = A$. D'après les questions précédentes, ce nombre vaut $p!(n-p)!$.

5) Si on ne suppose plus f bijective, la situation change. Pour que $f^{-1}(A) = A$, il faut que seulement les éléments de A s'envoient sur A et que tout A soit atteint. f restreinte à A doit donc être bijective de A dans A, ce qui nous fait $p!$ possibilités. Il faut ensuite que sur $\overline{A}$, f n'envoie aucun élément dans A. Ceci nous fait $(n-p)^{n-p}$ possibilités. Le nombre d'applications $f : E \to E$ telles que $f^{-1}(A) = A$ est donc $(n-p)^{n-p} p!$.

Exercice 16. On pose $E = \{1, \ldots, n\}$.

1) Pour construire une application de $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$, on remarque déjà que f est bijective (elle est son propre inverse). On cherche donc une permutation de E. Si on considère un élément x de E, soit il est fixe par f ($f(x) = x$), soit il est envoyé sur y qui vérifie alors $f(y) = x$ (car $f \circ f = \mathrm{Id}$). On en déduit que pour définir f, il faut choisir un certain nombre de points fixes et ensuite pour les points restants, de voir de combien de façons différentes on peut les coupler 2 à 2. On remarque que le nombre de points qui bougent est donc forcément pair.

Pour construire une permutation telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$, il faut donc choisir un certain nombre de points qui se déplacent ($\binom{n}{2k}$ possibilités si on veut $2k$ points qui se déplacent) et une fois ces k points choisis, il faut voir de combien de façons différentes on peut les appareiller 2 par 2. Ceci est exactement ce qui a été fait dans l'exercice 4 (tournoi de tennis). On a un ensemble à $2k$ éléments et on veut le nombre de partitions en k parties de 2 éléments chacune. On a donc alors $\frac{(2k)!}{2^k k!}$ possibilités. On en déduit que le nombre d'applications qui convient est :

$$\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

En effet, on ne compte rien en double (le nombre de points fixes n'est pas le même) et on peut faire bouger au plus $E(n/2)$ points.

2) On cherche le nombre d'applications $f : E \to E$ telles que $f \circ f = f$. Pour cela, on remarque que sur les points de l'image de f, f est égale à l'identité. En effet, si $y \in f(E)$, alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $f(f(x)) = f(y)$, ce qui entraine $f(x) = y$, soit $y = f(y)$.

On doit donc pour construire f, choisir les points qui sont atteints par f (ce qui nous fait $\binom{n}{k}$ choix si on suppose que f atteint k points. Pour les autres points, on doit les envoyer sur ces k points là (puisque ce sont les seuls points atteints par f, attention ici f n'est à priori pas bijective !). On a donc $n-k$ points à placer sur k points distincts donc k possibilités pour le premier, k pour le second, etc. k possibilités pour le $n-k$-ième point. On en déduit que le nombre de fonctions vérifiant $f \circ f = f$ est :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Exercice 17. Notons A l'ensemble des élèves de la classe. On peut alors écrire $A = B \cup C$ où B est l'ensemble des élèves ayant serrés un nombre pair de mains et C l'ensemble des élèves ayant serré un nombre impair de mains. Ces ensembles sont tous finis et B et C sont disjoints.

Pour chaque élève $x \in A$, on note $m(x)$ le nombre de mains qu'il a serrées. On a donc pour tout $x \in B$, $m(x) = 2k_x$ avec $k_x \in \mathbb{N}$ (puisque les élèves de B ont serré un nombre pair de mains) et pour tout $x \in C$, $m(x) = 2j_x + 1$ (puisque les élèves de C ont serré un nombre impair de mains). Étudions alors le nombre de mains serrées au total, que l'on notera M.

Remarquons tout d'abord que M est pair. En effet, à chaque poignée de mains, le compteur du nombre de mains serrées augmente de 2 (un pour chaque main utilisée). De plus, on a :

$$\begin{aligned} M &= \sum_{x\in A} m(x) \\ &= \sum_{x\in B} m(x) + \sum_{x\in C} m(x) \quad \text{(car } B \text{ et } C \text{ sont disjoints)} \\ &= \sum_{x\in B} 2k_x + \sum_{x\in C} (2j_x + 1) \\ &= 2\left(\sum_{x\in B} k_x + \sum_{x\in C} j_x\right) + \mathrm{Card}(C). \end{aligned}$$

Puisque M est pair, on en déduit que $\mathrm{Card}(C)$ est impair, autrement dit que le nombre d'élèves qui ont serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 18. Il est très fortement conseillé de faire un dessin et de s'aider des premières valeurs. Pour $n = 1$, on a un seul carré qui convient. Pour $n = 2$, on en trouve 6. Pour $n = 3$, on en trouve $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ (on en a 14 « droits » et 6 « tordus »). Considérons à présent $n \in \mathbb{N}^*$.

On va tout d'abord créer un carré de base et on va ensuite compter combien de copies de ce carré sont incluses dans $[\![0,n]\!]^2$ en utilisant des translations. Supposons donc que notre carré ait deux sommets consécutifs. L'un en position $(i,0)$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et un sommet en position $(0,j)$ avec $j \in [\![0,n]\!]$. On obtient alors les carrés « droits » quand $j = 0$ et on obtient les carrés « tordus » quand $j \geq 1$. À chaque couple (i,j) correspond une forme de carré unique.

Puisque l'on connait un côté du carré, on connait parfaitement ces autres sommets. Ils sont situés en $(j, i+j)$ et $(i+j, i)$. On en déduit que tous les sommets du carré sont dans $[\![0,n]\!]$ si et seulement si $i + j \leq n$.

On doit à présent compter combien de translations de ce carré sont encore incluses dans le carré $[\![0,n]\!]^2$. Pour cela, on doit compter à i et j fixés de combien on peut faire bouger les sommets. On voit que le sommet $(i+j,i)$ peut bouger d'au plus $n+1-i-j$ « à droite » et le sommet $(j,i+j)$ peut bouger d'au plus $n+1-i-j$ « en haut ». Ceci nous fait donc $(n+1-i-j)^2$ translations à (i,j) fixés pour générer de nouveaux carrés.

On en déduit que le nombre de carrés possibles est alors égal à :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{n-j}(n+1-i-j)^2 &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{n-j}(n+1-j)^2 - 2i(n+1-j) + i^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n}(n-j)(n+1-j)^2 - 2(n+1-j)\frac{(n-j)(n-j+1)}{2} \\
&\quad + \frac{(n-j)(n-j+1)(2(n-j)+1)}{6} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{(n-j)(n-j+1)(2(n-j)+1)}{6} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{3}(n-j)^3 + \frac{(n-j)^2}{2} + \frac{n-j}{6} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \qquad \text{en posant } k = n-j \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(n(n+1) + (2n+1) + 1\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}(n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2).
\end{aligned}$$