1. **Banque CCINP 2024 : 63 Adjoints**
2. **Banque CCINP 2024 : 66 "racines carrées", classique**
3. **Banque CCINP 2024 : 76 Cauchy Schwarz, minimisation**
4. **Banque CCINP 2024 : 77 Orthogonalité, cours**
5. **Banque CCINP 2024 : 78 Cours isométries** *
6. **[CCP]** Sur l'adjoint d'un projecteur

   Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
   (a) Démontrer que f^* est un projecteur.
   (b) Montrer que $f^* = f$ si et seulement si f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) On suppose que f et f^* commutent.
      i. Démontrer que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.
      ii. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
      iii. En déduire que $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) = \mathrm{Ker}(f)$ et que $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}(f)$.
   (d) En déduire que f et f^* commutent si et seulement si $f = f^*$.
7. **[CCP]** On définit les conditions : $M^2 + 4I_n = 0$ et $M^T M = M M^T$ $(*)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) On suppose que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respecte $(*)$. Trouver un polynôme annulateur de $S = MM^T$. En déduire que $M/2$ est orthogonale.
   (b) Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui respectent $(*)$?
   (c) Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui respectent $(*)$?
8. **[Centrale]** Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(.|.)$ et $u \in \mathcal{M}(E)$.
   (a) Supposons qu'il existe deux valeurs propres réelles λ et μ de u de signes opposés. Montrer qu'il existe un vecteur non nul z de E tel que $(u(z)|z) = 0$.
   (b) Supposons u symétrique et $\mathrm{Tr(u)} = 0$, montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0_E$ de E tel que $(u(z)|z) = 0$.
   (c) Supposons $\mathrm{Tr(u)} = 0$, montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0_E$ de E tel que $(u(z)|z) = 0$.
   (d) Supposons $\mathrm{Tr(u)} = 0$, montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{u})$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.(indication :récurrence sur la dimension).
9. **[Centrale]**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et B_n l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - a_{k,k})$.
   (a) Montrer que $B_n \neq \emptyset$.
   (b) L'ensemble B_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
   (c) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} m_\lambda(A) \lambda^2$.
   (d) Déterminer $B_n \cap S_n$ (S_n est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
   (e) Trouver $B_n \cap A_n$ (A_n est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
10. **[Mines]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U et V deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On munit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
   On suppose que $\forall X \in E,\ (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$.
   On se propose de montrer l'inégalité (I) : $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.
   (a) Montrer (I) si U et V ne sont inversibles ni l'une ni l'autre.
   (b) Montrer (I) si U inversible. Indication : on pourra commencer par le cas $U = I_n$. Conclure.
   (c) Étudier le cas d'égalité dans (I).