Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	Démonstration non exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.	Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_{\backslash}(\mathbb{K})$. Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$. Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a.x, \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Méthode de variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	