TD n°11 Electromagnétisme: Equations de Maxwell et énergie du champ électromagnétique - Révisions sur l'induction: calcul de self et de mutuelles inductances (MPII)

Equations de Maxwell en régime stationnaire

Exercice n°1: Etude d'un supraconducteur: modèle classique de l'effet Meißner

Lorsqu'un matériau supraconducteur est placé dans un champ magnétique, des boucles de courant apparaissent dans une très fine épaisseur à proximité de sa surface; celles ci engendrent un champ magnétique exactement opposé au champ magnétique de laboratoire. Cela conduit donc à une éviction complète du champ magnétique du supraconducteur. Ce phénomène constaté en 1933 par Walther Meißner porte le nom d'`effet Meißner`, et permet notamment d'expliquer la lévitation magnétique:

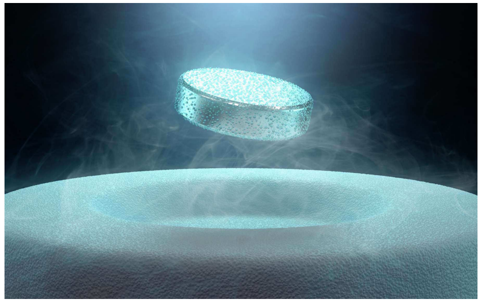


Figure 1: Lévitation d'un supraconducteur (crédit: Laboratoire de Physique du solide CNRS - Université Paris Sud)

Un modèle microscopique de la conduction électrique dans un matériau supraconducteur conduit à poser l'équation de London (1935) liant le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ au vecteur densité de courant volumique $\overrightarrow{j}$:

$$\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{j}\right] = -\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0 \lambda^2} \quad \text{avec } \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}} \text{ constante de London}$$

n étant le nombre de charge de charge q, de masse m par unité de volume.

❶ Quelle est la dimension de λ? Calculer sa valeur numérique pour $n = 10^{29}\ m^{-3}$, $q = 1{,}6.10^{-19}\ C$, $m = 9{,}1.10^{-31}\ kg$, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

❷ Une plaque supraconductrice est plongée dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_0 = B_0 \cdot \overrightarrow{e_x}$. Cette plaque occupe la zone $-d \leq z \leq +d$. Le champ magnétique à l'extérieur de la plaque n'est pas modifié par la présence de celle-ci.

- **a·** Etablir l'équation régissant les variations du champ magnétique au sein du matériau supraconducteur.
- **b·** En déduire la répartition du champ magnétique lorsque la plaque est présente, et représenter les variations de son amplitude en fonction de l'abscisse z pour $d = \lambda$ et $d = 10\lambda$.
- **c·** Quelle est la densité volumique de courant électrique $\overrightarrow{j}$ dans le matériau? Représenter les variations de son amplitude en fonction de z pour $d = \lambda$ et pour $d = 10\lambda$. Commenter.

On donne l'identité vectorielle suivante:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}] = \overrightarrow{grad}[div] - \overrightarrow{\Delta}$$

EXERCICE N°2: **Plasma et potentiel écranté**

Un plasma est constitué d'ions (charge $+q$) et d'électrons (charge $-q$). En un point M à la distance r d'un ion O, pris comme origine, le potentiel qui règne est $V(r)$, et les densités volumiques de charges positives et négatives sont respectivement :

$$\begin{cases} \rho_+ = \rho_0 e^{-aV(r)} \\ \rho_- = -\rho_0 e^{+aV(r)} \end{cases}$$

où ρ_0 et a désignent des constantes à une température donnée.

❶ A haute température, correspondant à une fusion thermonucléaire contrôlée, on a :

$$a \cdot V(r) << 1$$

- **a·** Montrer, en réalisant le changement de variable $u = r \cdot V(r)$, que l'on a :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\lambda \cdot r}$$

potentiel de Yukawa où λ est une fonction de ρ_0 et a (on utilisera l'équation de Poisson[1]) et on veillera à développer à l'ordre 1 des densités volumiques de particules.

- **b·** En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ en M.

❷ En déduire :

- **a·** Le champ électrique au point M.
- **b·** La charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r ; cas asymptotiques ? Conclusion ?
- **c·** La charge diffuse (électronique) répartie dans la sphère de centre O et de rayon r.

❸ Calculer la densité radiale $\dfrac{dQ}{dr}$ de charge. Montrer qu'il y a un maximum de charge négatives à la distance $\frac{1}{\lambda}$ de l'ion O.

❹ Que vous inspire cette approche classique de la structure de l'atome? Commenter en particulier le résultat de la question précédente.

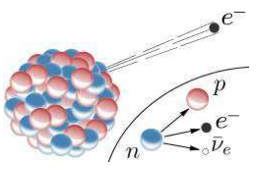
[1] On donne l'expression de l'opérateur Laplacien scalaire en coordonnées sphériques pour des fonctions de r uniquement:

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 (r \cdot V(r))}{dr^2}$$

EQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME QUELCONQUE
ENERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

EXERCICE N°3: **Etude électromagnétique de l'émission β^-**

La radioactivité β^- correspond à l'émission d'un électron lors d'une désintégration nucléaire. Cette réaction se produit couramment dans la nature par exemple pour la matière organique qui contient un certaine proportion de carbone 14:



$$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + \beta^-$$

On considère une sphère de carbone 14 de centre O et de rayon a émettant α e^- (particules β^-) par unité de temps de manière isotrope à partir de l'instant $t = 0$. ces électrons quittent la matière avec une vitesse v_0. On néglige dans la suite les interactions électromagnétiques entre les particules chargées, si bien que les e- sont considérés comme isolés du point de vue mécanique.

❶ Calculer la charge dq entre la sphère de rayon r et celle de rayon $r + dr$. En déduire que la charge volumique est:

$$\rho(r > v_0 t, t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho(r < v_0 t, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0}$$

et que la densité de courant électrique est:

$$\vec{j}(r > v_0 t, t) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{j}(r < v_0 t, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2} \cdot \vec{e_r}$$

❷ Montrer alors le champ électrique dans tout l'espace est:

$$\overrightarrow{E}(r > v_0 t) = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{E}(r < v_0 t) = \frac{\alpha e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(t - \frac{r}{v_0}\right)\cdot\overrightarrow{e_r}$$

Commenter sa forme. Montrer qu'il dérive d'un potentiel.

❸ Montrer qu'un champ magnétique nul associé au champ électrique ci-dessus satisfait aux équations de Maxwell.

❹ En déduire le vecteur de Poynting et la puissance transmise par le champ électromagnétique à travers une sphère de rayon r.

❺ Calculer la densité d'énergie électromagnétique u_{em}.

❻ Calculer la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.

❼ Mettre en relation les deux grandeurs énergétiques précédentes. Commenter.

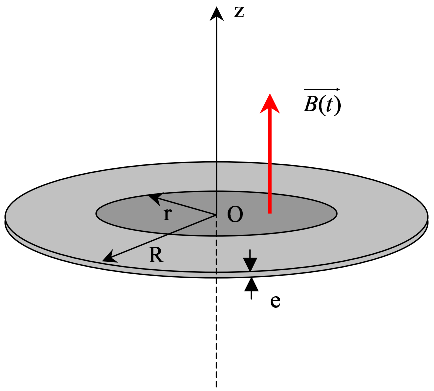
EXERCICE N°4: **Courants de Foucault dans un disque: principe des plaques à induction en ARQS**

On considère le fond d'une casserole en cuivre de centre O de rayon R et d'épaisseur e, posée sur un dispositif de chauffage à induction imposant un champ uniforme mais variable d'expression:

$$\overrightarrow{B}(t) = B_0 \times cos(\omega\ t)\cdot\overrightarrow{e_z}$$

Ce champ s'exercice uniquement sur une partie du fond de la casserole de rayon r, avec donc $r < R$.

On négligera dans l'exercice le champ magnétique induit engendré par les courants induits.



❶ Par des considérations géométriques simples, déterminer la forme des lignes de champ induit, et donc les lignes des courants de Foucault. En déduire la direction, et les variables du vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$

❷ En vous appuyant sur la **loi d'Ohm locale** montrer que les courants de déplacement sont négligeables par rapport aux courants de conduction dans la mesure où la fréquence reste "raisonnable" (domaine ARQS). A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday déterminer complètement l'expression du vecteur densité volumique de courant.

❸ En vous appuyant sur l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule, soit:

$$\mathscr{P}_{vol_J} = -\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E_m}$$

déterminer la puissance instantanée P dissipée par effet Joule dans le disque, puis sa valeur moyenne $< P >$.

❹ Calculer numériquement cette puissance en prenant les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} B_0 = 0,1\ T \\ \gamma = 6.10^7\ S.m^{-1} \\ e = 2\ mm \\ r = 10\ cm \\ R = 20\ cm \\ \omega = 2\pi \times 50\ rad.s^{-1} \end{cases}$$

EXERCICE N°5: **Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique**

Un système électrique cylindrique, de hauteur h, est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Initialement, le cylindre intérieur reçoit une charge Q et le cylindre extérieur une charge nulle. Le milieu qui les sépare possède une permittivité diélectrique et une perméabilité magnétique assimilables à celles du vide (ϵ_0 et μ_0), mais il est légèrement conducteur. On le supposera ohmique et de conductivité γ.

Dans tout l'exercice, les effets de bords sont négligés: tout se passe comme si les cylindres, de hauteur h étaient infinis dans cette direction.

❶ Vers quel état final le système évolue-t-il? Déterminer le champ électrique à l'instant initial et à l'instant final. Que vaut le champ magnétique à tout instant?

❷ En déduire la variation d'énergie électromagnétique associée à cette transformation.

❸ Quelle est la valeur du vecteur de Poynting au cours de cette transformation?

Que peut-on en conclure quant à la variation de l'énergie électromagnétique calculée à la question précédente?

❹ Déterminer le vecteur densité volumique de courant électrique à tout instant.

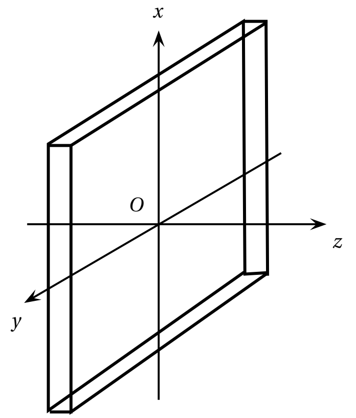
❺ En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans le système. Vérifier les conclusions établies au 3.) en exploitant les résultats obtenus en 1.) et 4.) .

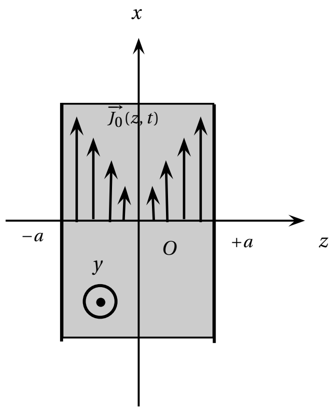
EXERCICE N°6: **Distribution de courant dans une plaque**

NB: on rappelle l'expression de l'opérateur dérivée temporelle en notation complexe $\dfrac{\partial}{\partial t} = j\omega \times$.

On considère une plaque métallique d'épaisseur $2a$ et de très grande dimension suivant les axes $[Ox)$ et $[Oy)$. On fera donc l'approximation d'une plaque infinie suivant ces deux directions. L'origine des axes est choisie au milieu de la plaque. Nous considérons une situation fictive où existe en tout point de la plaque une distribution volumique initiale donnée par la loi:

$$\overrightarrow{J_0}(z,t) = J_0 \frac{|z|}{a} \cos \omega t \cdot \overrightarrow{e_x}$$





On notera γ la conductivité électrique du matériau et on admettra que la loi d'Ohm locale est satisfaite. Cette distribution de courant est à l'origine d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}_1$ qui induit un champ électrique $\overrightarrow{E_2}$, lequel induit à son tour un champ magnétique $\overrightarrow{B_3}$, ... Tous les champs demandés seront calculés au sein de la plaque.

❶ Faire l'analyse des symétries et en déduire l'expression complexe $\underline{B}_1$ du champ magnétique engendré par la distribution de courant «initiale».

❷ Le champ magnétique $\overrightarrow{B}_1$ variable est à l'origine d'un champ électrique $\overrightarrow{E_2}$. Déterminer l'expression complexe de $\underline{\overrightarrow{E_2}}$ de ce champ.

❸ Le champ $\overrightarrow{E}_2$ est à son tour responsable d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}_3$ qui engendre à son tour un champ électrique $\overrightarrow{E}_4$, ... Déterminer les grandeurs $\underline{\overrightarrow{B_3}}$ et $\underline{\overrightarrow{E_4}}$.

EXERCICE N°7: **Impulsion du champ électromagnétique**

Le champ électrique d'une onde plane sinusoïdale qui se propage dans le vide dans la direction de l'axe $[Oz)$ a la forme suivante:

$$\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - kz) \cdot \overrightarrow{e_x} \quad \text{(polarisation selon l'axe } \overrightarrow{e_x}\text{)}$$

❶ Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ oscillant associé, dans cette onde, au champ élecrique précédent. Il interviendra une constante d'intégration que l'on prendra nulle par convention (i.e. pas de champ magnétique statique dans ce problème)

Montrer que la compatibilité du champ de l'onde avec les équations de Maxwell dans le vide impose une relation entre k et ω (on prendra $k > 0$, pour une propagation vers les z croissants).

❷ Quelle est la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie de cette onde?

❸ La grandeur:

$$\overrightarrow{g} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$$

est appelée impulsion volumique du champ (ou quantité de mouvement par unité de volume).

L'unité de cette grandeur est-elle en accord avec cette définition?

❹ Dans un modèle corpusculaire, on associe à cette onde un faisceau de photons se déplaçant à la vitesse c de l'onde.

On rappelle qu'un photon est une particule (relativiste) de masse nulle, d'énergie $\mathscr{E} = h\nu$ (où ν désigne la fréquence de l'onde), et d'impulsion, ou quantité de mouvement (cf cours MPSI):

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Quelle densité particulaire n de photons peut-être associée à cette onde?

En déduire l'expression de l'impulsion volumique associée à l'onde et vérifier qu'elle s'identifie bien à la valeur moyenne temporelle de la grandeur $\overrightarrow{g}$ définie plus haut.

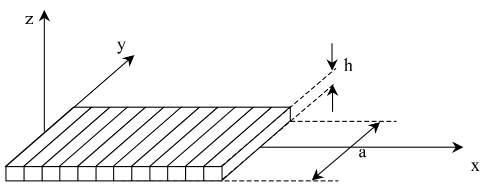
EXERCICE N°8: Chauffage inductif en géométrie cartésienne

Sur un parallélépipède de largeur a, d'épaisseur $h << a$ et de grande longueur, est enroulé du fil parcouru par un courant d'intensité: $I = I_m \cos(\omega t)$

, à raison de n tours par unité de longueur. Ce solénoïde, très aplati, est rempli par un métal non magnétique de conductivité γ.

Loin des bords, on suppose que le champ électrique est de la forme:

$$\overrightarrow{E} = E(z) \cdot \overrightarrow{e_y}$$



❶ Vérifier que cette hypothèse est compatible avec les lois de l'électromagnétisme et la géométrie du système. Étudier la parité de la fonction $E(z)$.

❷ Calculer le vecteur densité de courant $\overrightarrow{J}$ et la puissance moyenne $\mathscr{P}$ dissipée par une longueur l mesurée selon $[0x)$, en négligeant le champ $\overrightarrow{B}$ créé par les courants induits.

❸ À quelle condition cette dernière hypothèse est-elle justifiée ?

EXERCICE N°9: Evolution d'une distribution de charges dans un métal

Une sphère métallique de rayon R présente à l'instant $t = 0$ une distribution volumique uniforme de charges électriques de densité ρ_0. Ce phénomène peut être observé lorsque l'on procède à une irradiation violente d'un métal par des rayons X/γ. La conductivité de ce métal est γ.

❶ Montrer que cette distribution de charges ne peut rester dans cet état. Préciser les caractéristiques du vecteur densité volumique de courant électrique $\overrightarrow{j}$.

❷ Vers quel état final va évoluer le système? Caractériser quantitativement la distribution finale de charges.

❸ On se propose de déterminer la loi d'évolution temporelle de $\rho(t)$. Pour cela, on suppose dans un premier temps que la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$ est valable à tout instant. Montrer en utilisant une des équations de Maxwell associée à la conservation de la charge électrique que $\rho(t)$ varie exponentiellement dans le cadre de ce modèle. On précisera le temps caractéristique τ_0 de cette évolution.

❹ En fait, la relation précédente n'est valable qu'en régime permanent. En régime transitoire il faut écrire:

$$\tau \frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} + \overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$$

Le modèle de Drüde donne l'expression de la conductivité $\gamma = \dfrac{n_e e^2 \tau}{m}$ où e représente la valeur absolue de la charge de l'électron, et n_e la densité particulaire électronique. Le cuivre, de conductivité $\gamma = 6.10^7\ S.m^{-1}$ de masse molaire $M = 63.5\ g.mol^{-1}$ et de masse volumique $\mu = 8900\ kg.m^{-3}$ libère deux électrons par atome.

En déduire une estimation du temps de relaxation τ. Etablir dans ce modèle l'évolution de la densité volumique de charge en fonction du temps. On introduira la pulsation plasma:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\epsilon_0}}$$

Données: $\begin{cases} e = 1,6.10^{-19}\ C \\ m = 9,1.10^{-31}\ kg \\ \mathcal{N}_a = 6,02.10^{23}\ mol^{-1} \end{cases}$

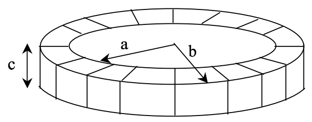
Rappels de MPII sur l'induction: self inductance, mutuelle, loi de Lenz-Faraday

Exercice n°10: Exemple de self-inductances

❶ Déterminer la self L d'un solénoïde de longueur l et de rayon a comportant N spires par unité de longueur. On pourra négliger tout effet de bord et considérer que le solénoïde est infini.

❷ En déduire l'énergie potentielle magnétique accumulée dans ce solénoïde s'il est parcouru d'un courant permanent I.

❸ Déterminer la self d'une bobine torique de section rectangulaire dont les dimensions sont indiquées sur le schéma ci-dessous:

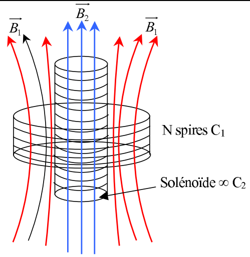


N spires bobinées en tore de section rectangulaire

En déduire là-encore l'énergie magnétique accumulée dans cette bobine traversée en régime permanent par le courant $I = cste$.

Exercice n°11: Exemple de mutuelle inductances

On considère un solénoïde de rayon a supposé infini nommé circuit C_2 comportant n spires par unité de longueur, plongé dans une bobine comportant N spires nommée circuit C_1. On recherche le coefficient de mutuelle induction $M_{12} = M_{21} = M$.

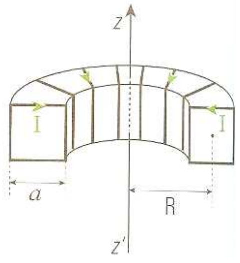


Déterminer la mutuelle inductance M entre ces deux circuits.

Application aux circuits

Exercice n°12: Inductance mutuelle entre deux circuits

Un solénoïde a la forme d'un tore de rayon R. Il est constitué de N spires carrées, jointives et de côté et un fil rectiligne infini de courant est confondu avec son axe zz'.



❶ Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par le solénoïde lorsque ses spires sont parcourues par un courant d'intensité $I(t)$ (voir la vue transversale ci-dessus).

❷ Calculer le flux propre Φ de ce champ à travers le solénoïde.

❸ En déduire l'inductance propre L du solénoïde.

❹ On place sur l'axe (z'z) un fil infiniment long parcouru par un courant I' (le circuit se referme à grande distance du tore). I' est orienté dans le sens de l'axe (zz').

- **a·** Déterminer le flux Φ' du champ magnétique $\overrightarrow{B'}$ créé par le fil à travers le solénoïde.
- **b·** En déduire l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

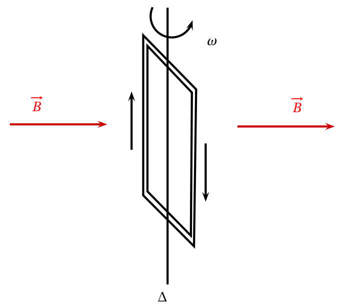
❺ On suppose que $I'(t) = I_0\cos(\omega t)$, et on mesure l'intensité $i(t)$ du courant induit dans le tore que l'on ferme sur un ampèremètre, la résistance totale du circuit torique valant R'.

- **a·** Déterminer la valeur $i(t)$ de l'intensité du courant qui traverse le circuit torique en régime sinusoïdal établi.
- **b·** Que se passe-t-il pour $L\omega$ très grand devant R' ? Commenter.

Exercice n°13: **Alternateur rudimentaire**

Une bobine plate de $N = 200$ spires, d'aire $S = 20\ cm^2$, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 10\ rad.s^{-1}$ entre les pôles d'un aimant en "U" qui produit un champ $B = 0,2\ T$ supposé uniforme et normal à l'axe de rotation.

La bobine dont les bornes sont reliées, possède une résistance $R = 1\ \Omega$. Le champ qu'elle crée est négligeable devant celui de l'aimant.



❶ Calculer la f.e.m. induite par le mouvement de la bobine.

❷ Déterminer le moment Γ par rapport à l'axe qu'il faut exercer pour entretenir la rotation.