1. **Banque CCINP 2023 :** 18 (classique)
2. **Banque CCINP 2023 :** 19 (cours, Cauchy, dérivées)
3. **Banque CCINP 2023 :** 24 (révisions)
4. **[CCINP]** *formule intégrale de Cauchy, théorème de Liouville*
   Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f.
   (a) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$.
   (b) On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ |a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$.
   En déduire que f est une fonction constante.
   (c) On suppose qu'il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$, et un entier naturel non nul q tels que :
   $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant a|z|^q + b$. Montrer que f est une fonction polynomiale.
   (d) On suppose que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant \exp(Re\, z)$.
   Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{C}$ tel qu $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = K\exp(z)$.
5. **[Centrale]**
   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{2u_n - 1}{n+1}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Trouver trois réels a, b, c tels que $u_n \underset{\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) Déterminer le rayon R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$. Montrer que sa somme $S :]-R; R[\to \mathbb{R}$ vérifie $(E)\ :\ y' = 2y + \frac{x}{(1-x)^2}$.
   (c) Donner un développement asymptotique à deux termes de $S(x)$ quand x tend vers 1^-.
6. **[MINES PONTS]**
   Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\ln n)x^n$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Montrer que la suite de terme général $\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a une limite dans $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la limite de f en 1^-.
   (d) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
7. **Officiel de la Taupe 2019 :** 72 I
   On pose $u_0 = 1$ et , pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n!$
   (b) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!} x^n$ est strictement positif.
   (c) On définit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!} x^n$ quand elle est existe.
   Déterminer une équation différentielle dont f est solution. (on pourra faire apparaitre un produit de Cauchy).
   Exprimer f. En déduire une formule pour u_n.
8. **[X,ENS]**
   On note $N(n, p)$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui ont exactement p points fixes.
   On pose en particulier $D(n) = N(n, 0)$ (sans point fixe, appelé dérangement), puis $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$.
   (a) Relier $N(n, p)$ et $D(n - p)$.
   (b) Justifier que f est bien définie sur $]-1; 1[$.
   (c) Puis calculer f (on pourra utiliser un produit de Cauchy avec la fonction $x \mapsto e^x$).
   En déduire $N(n, p)$.
   (d) Étudier la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n!} N(n, p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.