

TP n°18 Electromagnétisme: Etude d'un câble coaxial

OBJECTIFS: L'utilisation des câbles coaxiaux permet le transport d'un signal d'information en limitant au maximum les phénomènes de dispersion et d'atténuation. En outre, le blindage électromagnétique naturel que constitue la gaine du câble assure une protection du signal transmis vis à vis des sources d'interférences extérieures.

Les caractéristiques physiques des câbles comme la nature de l'isolant séparant gaine et coeur, le diamètre de ces derniers, l'atténuation, ainsi que l'impédance caractéristique sont généralement adaptés à la gamme de fréquence des signaux à véhiculer.

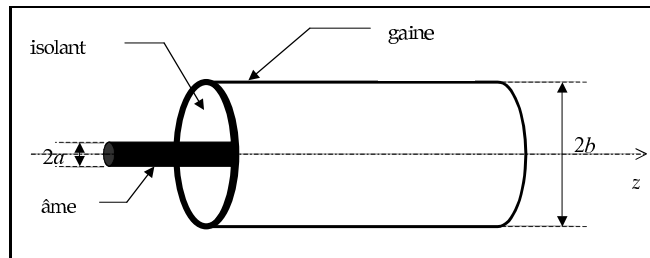
Ce TP propose l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique produite par un générateur d'impulsions (Keysight) à l'intérieur (i.e. espace gaine-coeur) d'un câble coaxial de longueur 100 m. On observera en particulier le comportement du câble en fonction de la charge terminale placée à l'une de ses extrémités.

1 Description du milieu de propagation

1.1 Structure du câble

Le câble étudié ici est constitué d'un conducteur central cylindrique de rayon a ("l'âme" ou "le coeur"), d'un conducteur périphérique coaxial ("la gaine"), de rayon b , l'espace entre les deux conducteurs étant rempli d'un isolant (en général un polymère aux propriétés calibrées) de constante diélectrique relative $\epsilon_r = 2,25$ (le vide serait caractérisé par $\epsilon_r = 1$).

On donne sa structure sur le schéma ci-contre:



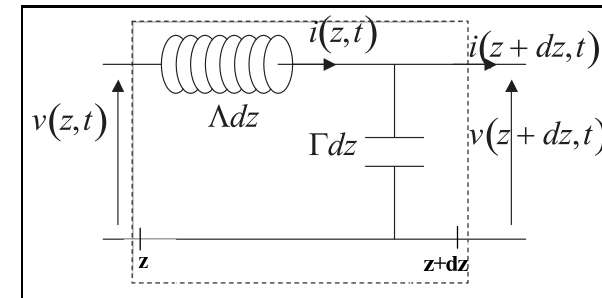
1.2 Eléments de théorie: modélisation

Le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ est supposé ici à la fois transverse électrique (\vec{E} est radial) et transverse magnétique (\vec{B} est orthoradial), et se propage dans le diélectrique le long du câble (pour une onde progressive) à la célérité $c = \frac{c_0}{\epsilon_r^{1/2}}$ (avec ϵ_r constante diélectrique relative du câble) que l'on peut supposer indépendante de la fréquence : il n'y a donc pas dispersion (et cette hypothèse est excellente).

¹TEM: transverse électromagnétique

²Au delà du GHz, apparaissent des modes de propagation non transverses pour \vec{E} et \vec{B} , très dispersifs, interdisant de définir sans ambiguïté une tension entre coeur et gaine et un courant les parcourant en sens inverses

Aux fréquences auxquelles nous travaillerons (moins de 20 MHz), on peut montrer que ce mode de propagation dit "TEM¹" est **la seule solution des équations de Maxwell dans le câble²**. Sous ces conditions, on peut modéliser le câble en lui attribuant des grandeurs électrocinétiques par unité de longueur (modèle à constantes réparties vu en cours). Le schéma électrocinétique équivalent pour une tranche de câble comprise entre les abscisses z et $z + dz$ est donné sur le schéma ci-contre.



On montre que les grandeurs capacité linéique et inductance linéique du câble s'écrivent respectivement:

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} \\ \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{cases}$$

En supposant le tronçon de câble de longueur dz en ARQS, ce qui revient à poser que $dz \ll \lambda$, on rappelle que les lois électrocinétiques classiques (lois des mailles et des nœuds)

conduisent à l'équation de propagation de d'Alembert, soit par exemple pour le signal de tension³ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ avec c_0 vitesse de propagation des OEM dans le vide.

En outre, le câble peut être caractérisé par son impédance caractéristique (défini pour une Onde Plane Progressive se déplaçant dans le sens des z croissants):

$$Z_c = \frac{V_{OPP}(z, t)}{i_{OPP}(z, t)}$$

encore appelé impédance itérative du câble. Cette valeur normalisée est de 50Ω pour le câble utilisé.

Enfin, on montre que le coefficient de réflexion ρ pour l'onde de tension à l'extrémité du câble en $x = L$, si celui-ci est refermé sur une impédance de charge Z_L , s'écrit:

$$\rho = \frac{V_{refl}(L, t)}{V_{inc}(L, t)} = \frac{R_L - Z_{OPP}}{R_L + Z_{OPP}}$$

2 Protocole et mesures

2.1 Propagation d'une impulsion de tension le long du câble

2.1.1 Câble en sortie ouverte

MANIPULATION:

- Connecter l'entrée et la sortie de la bobine de câble de longueur $L = 100 \text{ m}$ respectivement aux connecteurs E et S du boîtier.
- Connecter ensuite le générateur d'impulsion⁴ au boîtier selon le brochage indiquée.
- Choisir une fréquence des impulsions de l'ordre de 200 kHz , et ajuster la durée des impulsions de sorte qu'elles apparaissent bien séparées. On observe à l'oscilloscope le signal à l'entrée du câble.
- A l'aide de l'interrupteur à droite du boîtier, placer le câble en extrémité ouverte (impédance de charge Z_L infinie.)

³cf cours OEM dans le vide

⁴partie gauche du générateur HAMEG

- Observer à l'oscilloscope les signaux émis et réfléchi. Commenter la forme et le signe du signal réfléchi en liaison avec l'expression du coefficient de réflexion. Mesurer la vitesse de propagation des OEM dans l'espace interarmature, et en déduire la valeur numérique de la constante diélectrique relative ϵ_r .

- Malgré la qualité du câble, des pertes entre la gaine et le coeur existent ce qui entraîne un phénomène d'atténuation de facteur $e^{-2L/\delta}$ pour un aller-retour dans le câble. Evaluer la distance caractéristique δ . Commenter.

2.1.2 Câble en sortie court-circuitée

MANIPULATION:

- A l'aide de l'interrupteur de droite sur le boîtier, court-circuiter la sortie du câble, et reprendre la manipulation du a..

2.1.3 Câble fermé sur une charge

MANIPULATION:

- Brancher maintenant à l'extrémité du câble une boîte de résistances de résistance totale R .
- Faire varier R . Mettre en évidence une valeur particulière de R , dénommée "résistance caractéristique" du câble (ou encore "impédance itérative"), R_C , qui permet d'éliminer l'onde réfléchie. Comparer à la valeur donnée par le constructeur (50Ω). Interpréter.

2.2 Ondes stationnaires sinusoïdales

On paramètre désormais le générateur Keysight pour qu'il délivre un signal sinusoïdal. En faisant varier la fréquence entre 200 kHz et 20 MHz , on propose d'observer en tête de câble (côté GBF, c'est à dire en $z = 0$) des ventres et des nœuds de tension, que l'on va quantifier et interpréter dans les deux cas: circuit ouvert ou en court-circuit.

2.2.1 Câble en sortie ouverte

QUESTIONS:

- ❶ En supposant que le signal délivré par le GBF se propage dans le câble sous forme d'une onde progressive harmonique d'expression complexe:

$$V_{inc} = a \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

montrer que l'onde de tension à la forme suivante dans le câble:

$$V(z, t) = 2V_0 \cos[k(z - L)] \cdot \cos(\omega t - kL)$$

(en négligeant tout phénomène d'absorption).

- ❷ Montrer que l'on observe des ventres de tension en $z = 0$ pour les fréquences particulières:

$$f_n = n \frac{c}{2L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Quelle est alors la relation entre les longueurs d'onde correspondante λ_n et la longueur L du câble.

MANIPULATION:

- Alimenter le câble par le GBF délivrant un signal sinusoïdal.
- Placer le câble en sortie ouverte.
- Faire varier la fréquence d'excitation entre 200 kHz et 20 MHz et relever les fréquences f_n (on fera un tableau de mesures), ainsi que leur incertitude associée $u(f_n)$. Combien de résonances le GBF permet-il d'observer dans cette tranche de fréquences? Quelles sont les longueurs d'ondes λ_n correspondantes?

2.2.2 Câble en court-circuit

QUESTIONS:

- ❶ Montrer que dans le cas de la sortie en court-circuit, l'onde de tension est de la forme:

$$V(z, t) = 2V_0 \sin[k(z - L)] \cdot \sin(\omega t - kL)$$

- ❷ Déterminer à nouveau les fréquences d'obtention des ventres de tension en $z = 0$, et montrer qu'elle s'écrivent:

$$f_{n'} = \left(n' + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} \quad \text{avec } n' \in \mathbb{N}$$

MANIPULATION:

- Alimenter le câble par le GBF délivrant un signal sinusoïdal.
- Placer le câble en sortie court-circuitée.
- Reprendre la manipulation précédente en relevant les fréquences $f_{n'}$, ainsi que leur incertitude associée $u(f_{n'})$.

2.2.3 Synthèse et exploitation

En portant sur un graphe toutes les fréquences f_n et $f_{n'}$ mesurées ci-dessus en fonction de $x = \frac{f}{f_0}$ (grandeur entière ou demi-entière), déduire des deux séries de mesures: une mesure plus précise de f_0 et une nouvelle mesure de la célérité c . On fera une régression linéaire à l'aide du code Python fourni et on donnera l'incertitude correspondante.

Listing 1: Régression linéaire et incertitudes

```
1 import numpy as np
2 from numpy import random as rd
3
4 x=np.arange(0, ..., ...) #à compléter
5 f=np.array([..., ...]) #à compléter
6 uf=np.array([..., ...]) #à compléter
7 N=len(f)
8
9 nbsim=int(1e5)
10 tab_a=np.zeros((nbsim), dtype=float)
11 tab_b=np.zeros((nbsim), dtype=float)
12
13 ##### Lancement des nbsim simulations #####
14 for i in range(nbsim):
15     mf=rd.normal(f, uf)
16     a,b=np.polyfit(x, mf, 1)
17     tab_a[i], tab_b[i]=a, b
18
19 a_sim, b_sim=np.mean(tab_a), np.mean(tab_b)
20 u_a, u_b=np.std(tab_a, ddof=1), np.std(tab_b, ddof=1)
21 print("Valeur de la pente simulée: a_sim={0}F".format(a_sim))
22 print(r"L'incertitude type sur la pente vaut: u(a)={0}Hz".format(u_a))
23 print("Valeur de l'ordonnée à l'origine simulée: b_sim={0}Hz".format(b_sim))
24 print(r"L'incertitude type sur l'ordonnée à l'origine vaut: u(b)={0}s".format(u_b))
```