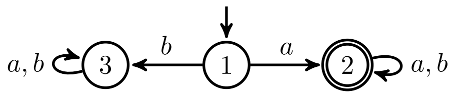
DS2 (éléments de réponses)

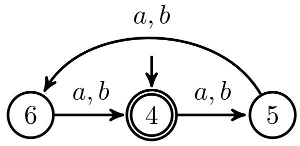
Exercice 1

Question 1.



Automate $\mathcal{A}_{1,ex}$

Question 2.



Automate $\mathcal{A}_{2,ex}$

Question 3.

□ **3.1.** Il s'agit de construire l'automate produit. Son ensemble T de transitions est constitué de la façon suivante : pour toutes transitions $(p_1, x, q_1) \in T_1$ et $(p_2, x, q_2) \in T_2$ étiquetées par la même lettre x, on crée une transition x. Un calcul réussi de l'automate $\mathcal{A}$ se projette sur la première composante en un calcul réussi de $\mathcal{A}_1$ et sur la seconde en un calcul réussi de $\mathcal{A}_2$, puisqu'on a choisi $F = F_1 \times F_2$: c'est-dire que les mots reconnus par $\mathcal{A}$ sont dans l'intersection $L_1 \cap L_2$. Réciproquement, soit $x = x_1 x_2 \dots x_k$ un mot de $L_1 \cap L_2$. Il existe un calcul réussi de $\mathcal{A}_1$ qui s'écrit

$$p_0 \xrightarrow{x_1} p_1 \xrightarrow{x_2} p_2 \dots \xrightarrow{x_k} p_k$$

De même, il existe un calcul réussi de $\mathcal{A}_2$ qui s'écrit :

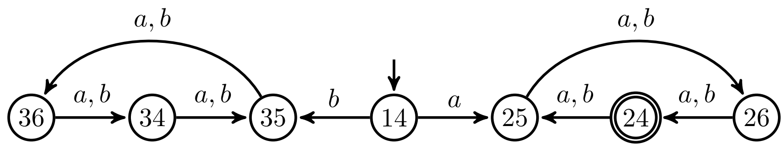
$$p'_0 \xrightarrow{x_1} p'_1 \xrightarrow{x_2} p'_2 \dots \xrightarrow{x_k} p'_k$$

Alors

$$(p_0, p'_0) \xrightarrow{x_1} (p_1, p'_1) \xrightarrow{x_2} (p_2, p'_2) \dots \xrightarrow{x_k} (p_k, p'_k)$$

est un calcul réussi de $\mathcal{A}$, ce qui termine la démonstration.

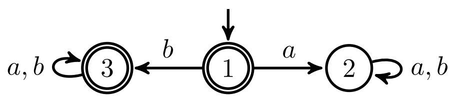
□ **3.2.**



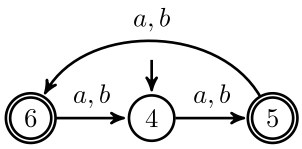
Automate $\mathcal{A}_{3,ex}$

Question 4.

□ **4.1.** On choisit $T' = T$ mais $F' = Q \setminus F$, de sorte que les calculs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$ sont les mêmes mais que quand un calcul est réussi dans un automate, il ne l'est pas dans l'autre. Cette construction est correcte car les automates construits sont complets, sans quoi un mot qui ne serait pas dans L pourrait bloquer l'automate $\mathcal{A}$.

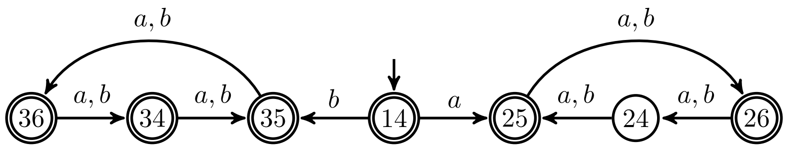


Automate $\mathcal{A}'_{1,ex}$



Automate $\mathcal{A}'_{2,ex}$

□ **4.2.**



Automate $\mathcal{A}_{5,ex}$

□ **4.3.** L'automate $\mathcal{A}_{4,ex}$ reconnaît le langage $L_{4,ex} = \overline{L}_{1,ex} \cup \overline{L}_{2,ex}$. Il en est de même pour $\mathcal{A}_{5,ex}$. Le complémentaire de $L_{4,ex}$ n'est autre que $L_{1,ex} \cup L_{2,ex}$. Pour obtenir l'automate demandé, il suffit donc d'intervertir états acceptants et états non acceptants puisque $\mathcal{A}_{5,ex}$ est déterministe complet. Ce qui redonne $\mathcal{A}_{3,ex}$.

Exercice 2

Question 1. On a $a^{-1}L = \{b, ab\}$.

Question 2. On a trois propriétés à prouver.

- **Réflexivité** : si $u \in \Sigma^*$, on a $u^{-1}L = u^{-1}L$ et donc $u \sim_L u$.
- **Symétrie** : si $u, v \in \Sigma^*$ vérifient $u \sim_L v$, on a $u^{-1}L = v^{-1}L$ et donc $v^{-1}L = u^{-1}L$ i.e. $v \sim_L u$.
- **Transitivité** : soient $u, v, w \in \Sigma^*$ tels que $u \sim_L v$ et $v \sim_L w$. Alors $u^{-1}L = v^{-1}L = w^{-1}L$ et donc $u \sim_L w$.

Ce qui établit que $\sim_L$ est une relation d'équivalence sur Σ^*.

Supposons $u \sim_L v$, c'est à dire $u^{-1}L = v^{-1}L$.

- Soit $x \in (uw)^{-1}L$. On a $uwx \in L$ et donc $wx \in u^{-1}L = v^{-1}L$ et donc $vwx \in L$ ce qui donne $x \in (vw)^{-1}L$.
- De manière symétrique, si $x \in (vw)^{-1}L$ alors $x \in (uw)^{-1}L$.

Ainsi, $(uw)^{-1}L = (vw)^{-1}L$ et $uw \sim_L vw$. $\sim_L$ est compatible avec la concaténation à droite.

Question 3.

- $\varepsilon \in b^{-1}L$ (car $b \in L$) mais $\varepsilon \notin (ab)^{-1}L$ (car $ab \notin L$). Ainsi $b \not\sim_L ab$.
- $a \in (aba)^{-1}L$ (car $abaa \in L$) mais $a \notin (bab)^{-1}L$ (car $baba \notin L$). Ainsi $aba \not\sim_L bab$.
- Si $u \in (abbaba)^{-1}L$ alors $|abbaba \cdot u|_a = 0[3]$ et donc $|u|_a = 0[3]$ et donc $|aaa \cdot u|_a = 0[3]$ et donc $u \in (aaa)^{-1}L$. La réciproque est identique et $abbaba \sim_L aaa$.

Question 4. L étant régulier, il est reconnu par un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$.
Considérons l'application φ définie de Q dans Q_L par :

$$\varphi(q) = q^{-1}L$$

Soit $u \in \Sigma^*$ et $q = \delta^*(q_0, u)$. D'après la propriété admise par l'énoncé, $\varphi(q) = q^{-1}L = u^{-1}L$. L'application φ est donc surjective. Comme l'ensemble de départ est fini, il en est de même de l'ensemble d'arrivée (qui a même un cardinal inférieur ou égal). Ainsi, Q_L est fini.

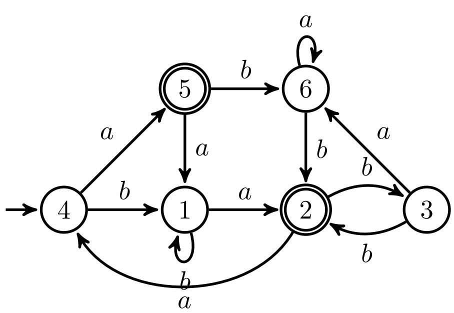
Question 5. Si $p \in F$ et $q \in Q \setminus F$ alors ε distingue p et q. Il faut donc distinguer (p, q). Notons qu'au vu de l'avant dernière ligne de l'algorithme, il semblerait cohérent d'ajouter aussi (q, p) à l'ensemble N_0.

Question 6. Soit $j \geq 1$. Supposons $N_j \neq \varnothing$. Il existe alors $p, q \in Q$ et $u \in \Sigma^*$ de longueur j tels que $\delta^*(p, u) \in F$ et $\delta^*(q, u) \notin F$. Comme $j \geq 1$, u s'écrit $a \cdot v$ avec $v \in \Sigma^*$ de longueur $j - 1$ et $a \in \Sigma$.
Posons $p' = \delta(p, a)$ et $q' = \delta(q, a)$. On a alors $\delta^*(p', v) = \delta^*(q', v)$ et v distingue p' et q'.
Par ailleurs, si $w \in \Sigma^*$ est de longueur $\leq j-2$ alors $a \cdot w$ ne distingue pas p et q (car $(p, q) \in N_j$). Or, $\delta^*(p', w) = \delta^*(p, a \cdot w)$ et $\delta^*(q', w) = \delta^*(q, a \cdot w)$ et donc w ne distigue pas p' et q'.
Ainsi, $(p', q') \in N_{j-1}$ et $N_{j-1} \neq \varnothing$. En contraposant, on a

$$N_{j-1} = \varnothing \Rightarrow N_j = \varnothing$$

ce qui donne le résultat demandé (par récurrence immédiate, si $N_i = \varnothing$ alors $\forall k \geq 0,\ N_{i+k} = \varnothing$).

Question 7.



Question 8.

- Fin de l'initialisation

	1	2	3	4	5	6
1		0			0	
2	0		0	0		0
3		0			0	
4		0			0	
5	0		0	0		0
6		0			0	

- Fin de l'étape 1

	1	2	3	4	5	6
1		0	1		0	1
2	0		0	0		0
3	1	0		1	0	
4		0	1		0	1
5	0		0	0		0
6	1	0		1	0	

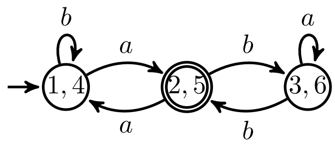
- Fin de l'étape 2

	1	2	3	4	5	6
1		0	1		0	1
2	0		0	0		0
3	1	0		1	0	
4		0	1		0	1
5	0		0	0		0
6	1	0		1	0	

Il n'y a pas eu d'évolution à l'étape 2 et il n'y en aura plus.
Les classes d'équivalences regroupent les sommets qui ne pourront être distingués. Il y en a trois qui sont

$$\{1,4\},\ \{2,5\},\ \{3,6\}$$

Question 9. On obtient un automate a trois états (l'état initial et les états acceptants ne sont pas demandés).



Exercice 3

Question 1.
□ **1.1.** $L(\alpha,\beta)$ est fini si et seulement si $\alpha = 0$.
□ **1.2.** De plus, $L(0,\beta) = \{a^\beta\}$ est de cardinal 1.

Question 2. Le langage reconnu par l'automate proposé est $L(4,2)$.

Question 3. On a cette fois $L_2 = L(3,2) \cup L(2,3)$.

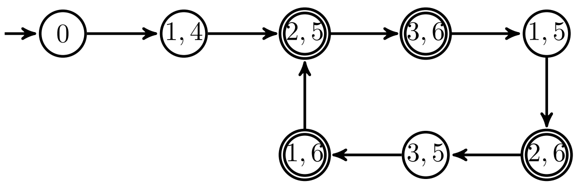
Question 4. La table de transition de $\mathcal{A}_2$ est la suivante :

	0	1	2	3	4	5	6
a	$1,4$	2	3	1	5	6	5

La table du déterminisé est alors (en ne faisant apparaître que les états accessibles) :

	0	$1,4$	$2,5$	$3,6$	$1,5$	$2,6$	$3,5$	$1,6$
a	$1,4$	$2,5$	$3,6$	$1,5$	$2,6$	$3,5$	$1,6$	$2,5$

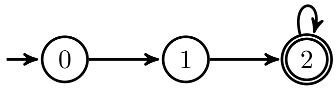
0 est l'état initial et les états acceptants sont ceux contenant 2 ou 6, c'est à dire $(2,5)$, $(3,6)$, $(2,6)$ et $(1,6)$. On vérifie que tous les états son co-accessibles, c'est à dire que l'automate est émondé. L'automate est le suivant.



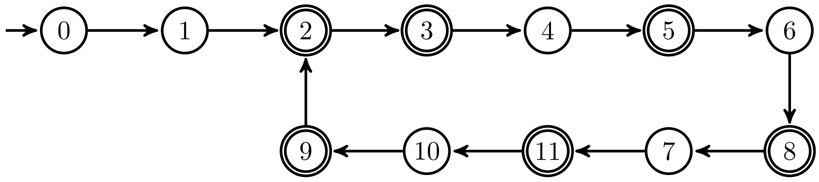
Question 5. Le langage reconnu par $\mathcal{A}_3$ est la réunion des langages des mots menant de l'état initial à chacun des états acceptants.

$$L_3 = L(6,2) \cup L(6,3) \cup L(6,5) \cup L(6,7)$$

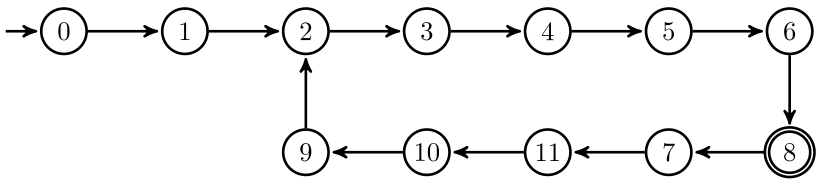
Question 6. L'automate suivant reconnaît $L(1,2)$ et est de la forme F.



Question 7. On peut envisager une construction comme en questions 3 et 4. Par exemple :



Question 8. On change les états acceptants.



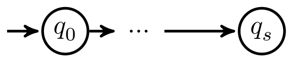
Le langage reconnu par cet automate montre que

$$L(2,3) \cap L(5,2) = L(10,7)$$

Remarque : on pourrait retrouver mathématiquement ce résultat en cherchant les entiers a et b tels que $2a+3=5b+2$, ce qui amène à l'équation diophantienne $5b-2a=1$.

Question 9. Soit A un automate déterministe émondé dont la fonction de transition est notée δ (c'est une application définie d'une partie de $Q \times \{a\}$ dans Q où Q est l'ensemble des états).
Notons q_0 l'état initial de A. Distinguons deux cas.

- Si on peut définir la suite $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $q_{i+1} = \delta(q_i, a)$ (pour chaque état atteint, il existe un successeur), ce qui revient à dire (puisque l'automate est émondé et que tous les états sont donc accessibles) que l'automate est complet. Comme Q est fini, il existe deux q_i égaux. Notons s le premier s tel que $q_{s+1} \in \{q_0, \dots, q_s\}$ (s existe avec l'hypothèse faite).
  Il existe $r \in \{0, \dots, s\}$ tel que $q_{s+1} = q_r$. L'automate est alors de la forme F avec les mêmes notations que celles qui suivent la question 3.
- Sinon, on note s le premier entier tel que q_s n'a pas de successeur. Sans les états acceptants, l'automate est alors le suivant.



Puisque l'automate est émondé, q_s doit être acceptant. Dans ce cas, le langage est fini et son cardinal le nombre de ses états acceptants.

Si le langage reconnu est infini, on est forcément dans le premier cas et l'automate est de la forme F.
On se donne maintenant un automate de la forme F. Adoptons les notations de l'énoncé dans le dessin qui suit la question 5. Si aucun des états $q_r, \dots, q_s$ n'est acceptant alors un mot reconnu est de longueur $\leq r-1$ et le langage reconnu est fini. Sinon, en notant q_i avec $r \leq i \leq s$ un état acceptant, tout mot du type $a^{i+k(s-r+1)}$ est reconnu et le langage est infini. Une CNS pour que le langage soit infini est donc qu'il existe un état acceptant au moins parmi $q_r, \dots, q_s$.

Question 10. On vient de voir que si L est régulier unaire infini, il est le langage reconnu par un automate de la forme F et, avec les notations précédentes, qu'il contient $L(s-r+1, i)$.

Question 11. Supposons, par l'absurde, que L soit régulier. L est infini car pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}-u_n > u_1 - u_0 \geqslant 0$ est donc $u_{n+1} > u_n$. Pour $n \geqslant 1$, les a^{u_n} sont donc deux à deux distincts. La question précédente établit l'existence de $\alpha \geqslant 1$ et $\beta > 0$ tels que $L(\alpha, \beta) \subseteq L$.
Les mots de L (sauf a^{u_0}) classés par longueur strictement croissante sont $a^{u_1}, a^{u_2}, \dots$. Comme $(u_{n+1}-u_n)$ est strictement croissante, on a par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \geqslant n$$

À partir d'un certain rang n, on aura $u_{n+1} - u_n \geqslant \alpha + 1$. Il n'existe donc qu'un nombre fini de couples (m, m') de mots de l tels que $|m| - |m'| = \alpha$. Ceci contredit $L(\alpha, \beta) \subseteq L$.

Question 12. $(n+1)2 - n2 = 2n+1$ est le terme général d'une suite strictement croissante positive. De plus, (n^2) est une suite d'entiers positifs ou nuls. La question précédente indique que $\{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

Exercice 4

Question 1. Le langage $\overline{L_0}$ est le langage des mots qui contiennent deux a, c'est-à-dire $\Sigma^* a \Sigma^* a \Sigma^*$. En effet, tout sur-mot d'un mot de ab^*a doit clairement contenir deux a. Réciproquement, tout mot contenant deux a est un sur-mot de aa qui appartient à L_0. Le langage $\overline{L_1}$ est Σ^*, puisque tout mot est un sur-mot de $\varepsilon \in L_1$.

Question 2. On observe d'abord que la relation $\preccurlyeq$ est transitive. En effet, pour tous mots $w, w', w'' \in \Sigma^*$ tels que $w \preccurlyeq w'$ et $w' \preccurlyeq$, en notant ϕ et ϕ' les fonctions strictement croissantes qui en témoignent, leur composition $\phi' \circ \phi$ est une fonction strictement croissante de $\{1, \dots, |w|\}$ dans $\{1, \dots, |w''|\}$, et pour tout $1 \leq i \leq w$ on a $w''_{\phi'(\phi(i))} = w'_{\phi(i)} = w_i$.

On montre à présent l'égalité demandée. Il est clair que $\overline{L} \subseteq \overline{\overline{L}}$, donc on montre l'inclusion inverse. Soit $u'' \in \overline{\overline{L}}$, il existe un mot $u' \in \overline{L}$ tel que $u' \preccurlyeq u$. Par définition de $\overline{L}$, il existe un mot $u \in L$ tel que $u \preccurlyeq u'$. Par transitivité, on a $u \preccurlyeq u''$. Ainsi, on a bien $u'' \in \overline{L}$, ce qui conclut.

Question 3. Pour tout langage non-vide L, le langage $\overline{L}$ est nécessairement infini : en effet, pour $u \in L$ quelconque, on a $u\Sigma^* \subseteq \overline{L}$. Par ailleurs, on a clairement $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Ainsi, si l'on prend L' fini non-vide, on sait qu'il n'existe aucun langage L tel que $\overline{L} = L'$.

Question 4. Soit A un automate fini non-déterministe qui reconnaisse le langage régulier L. Construisons un automate A' en ajoutant à chaque état de A une boucle pour toutes les lettres de l'alphabet : formellement, on initialise $A' := A$ et pour chaque $a \in \Sigma$ et chaque état q de A, on ajoute à A' une transition de q à q étiquetée par a.

Il est clair que, pour tout mot u accepté par A et pour tout mot u' tel que $u \preccurlyeq u'$, le mot u' est accepté par A' : pour ϕ une fonction strictement croissante qui témoigne du fait que $u \preccurlyeq u'$, il suffit de suivre le chemin pour u dans A' pour les positions de u' appartenant à l'image de ϕ, et de suivre les nouvelles transitions pour les positions de u' qui n'appartiennent pas à l'image de ϕ. Réciproquement, si l'on considère un mot u' accepté par A' et un chemin qui en témoigne, on peut construire un mot u accepté par A tel que $u \preccurlyeq u'$ en considérant la restriction de ce chemin aux transitions de A.

On peut aussi démontrer cette question par induction structurelle sur les expressions régulières à l'aide des identités suivantes.

- $\overline{\varnothing} = \varnothing$
- $\overline{\varepsilon} = \Sigma^*$
- $\overline{a} = \Sigma^* a \Sigma^*$ pour tout $a \in \Sigma$
- $\overline{L_{1L_2}} = \overline{L_1}\,\overline{L_2}$
- $\overline{L_{1 \cup L_2}} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$
- $\overline{L^*} = \Sigma^*$

La dernière égalité est due au fait que L^* contient toujours le mot vide ; en revanche il n'est pas vrai que $\overline{L^*} = \overline{L}^*$, prendre par exemple $L = \{a\}$.

Question 5. Soit L un langage quelconque. Si L est vide, on peut prendre $F = \varnothing$ et conclure. Sinon, posons $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie énumérant les mots du langage L (éventuellement avec des doublons). Une position $i \in \mathbb{N}$ est dite innovante s'il n'existe aucun $j < i$ tel que $w_j \preccurlyeq w_i$. On choisit pour F le sous-ensemble de L formé des mots aux positions innovantes, c'est-à-dire $\{w_i \mid i \text{ est innovante }\}$.

On observe à présent qu'il y a un nombre fini de positions innovantes. En effet, dans le cas contraire, la suite extraite obtenue à partir de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en conservant les lettres aux positions innovantes serait un contre-exemple à la question 4 . Ainsi, F est-il bien fini.

Montrons à présent que $\overline{F} = \overline{L}$. En effet, comme $F \subseteq L$, on a $\overline{F} \subseteq \overline{L}$ par monotonie de la clôture par sur-mots. Pour la réciproque, il suffit de montrer que $L \subseteq \overline{F}$, car cela implique (à nouveau par monotonie de la clôture par sur-mots) que $\overline{L} \subseteq \overline{\overline{F}}$, ce qui implique par la question 1 que $\overline{L} \subseteq \overline{F}$. Montrons par induction sur $i \in \mathbb{N}$ que $w_j \in \overline{F}$ pour tout $j < i$. Le cas de base est tautologique. Pour le cas de récurrence, choisissons $i \in \mathbb{N}$. Soit i est innovante, soit i n'est pas innovante. Dans le premier cas, on a $w_i \in F$ donc $w_i \in \overline{F}$. Dans le second cas, il existe $j < i$ tel que $w_j \preccurlyeq w_i$, et par hypothèse de récurrence on a $w_j \in \overline{F}$, ainsi on a $w_i \in \overline{F}$. Ainsi, dans les deux cas on a $w_i \in \overline{F}$. On a donc établi notre résultat par récurrence, et on a donc bien l'inclusion réciproque $L \subseteq \overline{F}$.

Question 6. Soit L un langage clos par sur-mots. On sait par la question 5 qu'il existe un langage fini $F \subseteq L$ tel que $\overline{F} = \overline{L}$. Or on a $\overline{L} = L$. En effet, il est clair que $L \subseteq \overline{L}$, et réciproquement, pour tout $v \in \overline{L}$, il existe par définition de $\overline{L}$ un mot $u \in L$ tel que $u \preccurlyeq v$, et ainsi $v \in L$ car L est clos par sur-mots. On sait donc que $L = \overline{F}$, et on sait que F est régulier (car fini), donc $\overline{F}$ est régulier par la question 3, ainsi L est-il régulier.