

Topologie des espaces vectoriels normés (en entier)

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Normes et espaces vectoriels normés

b) Suites

c) Comparaison des normes

d) topologie d'un espace normé

e) Étude locale d'une application, continuité

f) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Une partie compacte est fermée et bornée.

Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Produit d'une famille finie de compacts.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

g) Applications continues sur une partie compacte

Image d'une partie compacte par une application continue.

Théorème de Heine.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Chemin continu joignant deux points.

Parties connexes par arcs.

Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Image continue d'une partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie A de E . Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.

Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

i) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration non exigible.

Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Exemple : déterminant.



Suites de fonctions

A - Suites de fonctions

L'objectif de ce chapitre est :

— définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

a) Convergence simple, convergence uniforme

Convergence simple sur A .

Convergence uniforme sur A . La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme. convergence uniforme sur les compacts, les segments.

