TD14 (éléments de réponse)

Exercice 1

En classe.

Exercice 2

Question 1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}}{\varphi \vdash \psi \lor \varphi}\,\lor_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}}{\psi \vdash \psi \lor \varphi}\,\lor_i}{\varphi \lor \psi \vdash \psi \lor \varphi}\,\lor_e$$

Question 2. Posons $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \psi \to \omega\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \psi \to \omega} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\,\to_e}{\Gamma, \varphi \vdash \omega}\,\to_e}{\Gamma \vdash \varphi \to \omega}\,\to_i$$

Question 3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi} \qquad \dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\varphi}}{\neg\varphi, \varphi \vdash \psi}\,\neg_e \qquad \dfrac{}{\psi, \varphi \vdash \psi}}{\neg\varphi \lor \psi, \varphi \vdash \psi}\,\lor_e}{\neg\varphi \lor \psi \vdash \varphi \to \psi}\,\to_i$$

Question 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi} \qquad \dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}}{\varphi, \neg\varphi \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi \vdash \neg\neg\varphi}\,\neg_i$$

Question 5. Posons $\Gamma = \{\neg(\varphi \lor \psi)\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi \lor \psi}\,\lor_i \qquad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \neg(\varphi \lor \psi)}}{\Gamma, \varphi \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,\neg_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}}{\Gamma, \psi \vdash \varphi \lor \psi}\,\lor_i \qquad \dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \neg(\varphi \lor \psi)}}{\Gamma, \psi \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma \vdash \neg\psi}\,\neg_i}{\Gamma \vdash \neg\varphi \land \neg\psi}\,\land_i$$

De la même façon, on prouve $\neg(\varphi \lor \psi) \vdash \neg\psi$. Par la règle $(\land_i)$, on déduit le résultat.

Question 6.

Supposons $\Gamma \vdash \neg\varphi$. On a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\varphi}}{\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}}{\Gamma, \varphi \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma \vdash \varphi \to \bot}\,\to_i$$

Supposons à présent $\Gamma \vdash \varphi \to \bot$. On a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \to \bot}}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \bot} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}}{\Gamma, \varphi \vdash \bot}\,\to_e}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,\neg_i$$

Exercice 3

Question 1. Posons $\Gamma = \{(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi_1} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi_2}}{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge_i}{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi} \to_e}{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2 \to \psi} \to_i}{\Gamma \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)} \to_i$$

Question 2. On note Γ l'ensemble d'hypothèses $\{\varphi \to (\psi \to \theta), \psi \to \varphi\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \varphi \to (\psi \to \theta)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi \to \varphi} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} \to_e}{\Gamma, \psi \vdash \psi \to \theta} \to_e \qquad \dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}}{\Gamma, \psi \vdash \theta} \to_e}{\Gamma \vdash \psi \to \theta} \to_i$$

Question 3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi} \qquad \dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi}}{\varphi, \neg\varphi \vdash \bot} \neg_e}{\varphi, \neg\varphi \vdash \psi} \bot_e \qquad \dfrac{}{\psi \vdash \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \vdash \psi} \vee_e}{\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi} \to_i$$

Question 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \varphi \to \neg\varphi} \qquad \dfrac{}{\varphi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\varphi} \to_e \qquad \dfrac{}{\varphi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \neg\varphi, \varphi \vdash \bot} \neg_e}{\varphi \to \neg\varphi \vdash \neg\varphi} \neg_i$$

Exercice 4

Question 1. On combine un raisonnement pas cas sur l'hypothèse $\varphi \vee \neg\varphi$ avec le principe d'explosion pour éliminer le cas $\neg\varphi$, qui contredit l'hypothèse $\neg\neg\varphi$. La paire de parenthèses superflue dans la feuille en haut à droite de l'arbre met en évidence la manière dont la règle d'élimination de la négation est appliquée.

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg(\neg\varphi)} \qquad \dfrac{}{\neg\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi}}{\neg\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \bot} \neg_e}{\neg\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \varphi} \bot_e}{\neg\neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi \vdash \varphi} \vee_e$$

Question 2. Cette preuve nécessite le raisonnement par l'absurde (ou d'autres lemmes qui en sont déduits).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi} \qquad \dfrac{}{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}}{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \bot} \neg_e}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi} \textit{raa}$$