Les grands théorèmes de permutation d'intégrales sur un intervalle quelconque

Contenus	Capacités & commentaires

a) Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

b) intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme.
En particulier , l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ sur I équivaut à :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$$

Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

alors $f = \sum f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

c) Continuité d'une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que : -f est continue par rapport à la première variable,
- f continue par morceaux par rapport à la seconde variable.
-On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $|f(x,.)| \leqslant \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

d) Dérivation d'une intégrale à paramètre

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
-pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
-$\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. et il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)| \leqslant \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de J, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation

Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ pour tout x de J si $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.

Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.