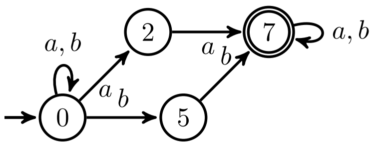
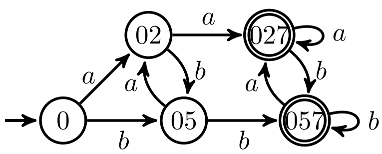
DM6 (éléments de réponses)

Exercice 1

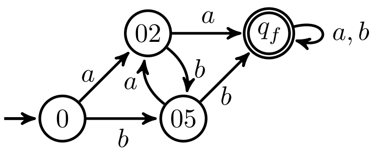
Question 1.
□ **1.1.** On pourrait construire un DFA associé à l'ε-NFA de l'énoncé en procédant par construction de sous-ensembles à partir d'ε-fermetures. On peut également procéder par étapes en commençant par supprimer les transitions spontanées, ce qui élimine les états 1, 3, 4, 6. On obtient alors l'automate non déterministe représenté à gauche ci-dessous. On le déterminise alors par construction de sous-ensembles, ce qui donne la fonction de transition au centre ci-dessous, puis l'automate représenté à droite ci-dessous.



δ_D	a	b
0	02	05
02	027	05
05	02	057
027	027	057
057	027	057

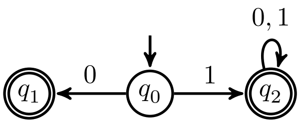


Enfin, on peut fusionner les deux états acceptants 027 et 057 en un état q_f.



□ **1.2.** Les automates non déterministes avec ou sans transitions spontanées permettent la construction immédiate de l'expression régulière qui dénote le langage reconnu par ces automates : $(a|b)^*(a^2|b^2)(a|b)^*$.

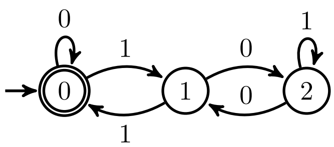
Question 2.
□ **2.1.** Le langage L_n est le langage dénoté par l'expression régulière $0|1(0|1)^*$. Ce langage est reconnu l'automate fini déterministe suivant.



□ **2.2.**
▻ **2.2.1.** L_a est régulier car il s'agit du langage des mots binaires qui soit sont le mot vide soit finissent par 0 : il est dénoté par l'expression régulière $\varepsilon|(0|1)^*0$.
▻ **2.2.2.** On a $L_b = L_a \cap L_n$. Or L_a et L_n sont réguliers. Donc L_b l'est aussi. On peut même exhiber une expression régulière qui le dénote : $0|1(0|1)^*0$.
▻ **2.2.3.** Ajouter un 0 ou un 1 à la fin d'un mot binaire de valeur numérique n le transforme en un mot de valeur numérique $2n + x$ où x est le chiffre affixé. Considérons les six combinaisons entre les trois cas possibles de la valeur numérique n modulo 3 et les deux cas possibles de la valeur de x.

$n \pmod 3$	x	$2n + x$	$2n + x$ [3]
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	2	2
1	1	3	0
2	0	4	1
2	1	5	2

Ceci permet de définir un DFA dont les trois états correspondent aux trois valeurs possibles de n modulo 3, la transition $n \to n'$ étiquetée par x correspond au passage de n à $2n + x$ modulo 3, c'est-à-dire :



On a marqué l'état 0 comme initial car le mot vide a une valeur numérique congrue à 0 modulo 3 et seul 0 comme final car on veut reconnaître les multiples de 3. Ainsi, un automate reconnaît les multiples de 3. Donc L_c est régulier.
▻ **2.2.4.** Le langage L_d n'est pas régulier.
▻ **2.2.5.** Le langage L_e est régulier car il s'agit du langage dénoté par l'expression régulière 0^*10^*.

Question 3. Raisonnons par l'absurde en supposant que L soit régulier. D'après le lemme de l'étoile, il existe un facteur itérant $k \in \mathbb{N}$ tel que tout mot de L de longueur supérieure à k se factorise sous la forme xyz avec $|y| \geqslant 1$, $|xy| \leqslant k$ et $xy^*z \in L$.
Soit p un nombre premier supérieur ou égal à k. Un tel nombre existe puisque l'ensemble des nombres premiers est infini. Le mot a^p appartient alors à L et se factorise comme indiqué précédemment. Posons $|x| = m$, $|y| = n$ de sorte que $|z| = p - m - n$. Alors $n \geqslant 1$ et pour tout entier naturel i, $|xy^iz| = p + (i-1)n$ est premier. En particulier, pour $i = p + 1$, on obtient que $(n+1)p$ est premier. Ce qui est absurde. L n'est donc par régulier.