DM18 (éléments de réponse)

Question 1. La première représentation $\mathcal{K}_1$ correspond à un modèle de Kripke. Les sommets qui réalisent $y \vee \neg x$ sont $3, 5, 6$ et 7 : pour qu'un sommet réalise cette formule, il faut soit qu'il réalise y, soit qu'aucun sommet accessible ne réalise x. Dans la deuxième représentation, on peut remarquer que $2 \Vdash y$ et $2 \leqslant 4$, mais pas $4 \Vdash y$.

Question 2. On propose la preuve suivante.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\varphi\wedge\neg\varphi)\vdash(\varphi\wedge\neg\varphi)}\,ax}{(\varphi\wedge\neg\varphi)\vdash\varphi}\,\wedge_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\varphi\wedge\neg\varphi)\vdash(\varphi\wedge\neg\varphi)}\,ax}{(\varphi\wedge\neg\varphi)\vdash\neg\varphi}\,\wedge_e}{(\varphi\wedge\neg\varphi)\vdash\bot}\,\neg_e}{\Gamma\vdash\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)}\,\neg_i$$

On a introduit les notations (usuelles) de $\neg_e$ et $\neg_i$ qui s'obtiennent juste en remplaçant $\neg\varphi$ par $\varphi \to \bot$ et en utilisant les règles d'élimination et d'introduction de $\to$.

$$\dfrac{\Gamma\vdash\neg\varphi \qquad \Gamma\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\bot}\,\neg_e \qquad \dfrac{\Gamma,\varphi\vdash\bot}{\Gamma\vdash\neg\varphi}\,\neg_i$$

La formule est vraie : on peut l'écrire $\psi = (\varphi \wedge (\varphi \to \bot)) \to \bot$. Supposons qu'il existe un modèle de Kripke $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ et un sommet $a \in S$ tel que $a \Vdash \psi$. Alors il existe $b \geqslant a$ tel que $b \Vdash (\varphi \wedge (\varphi \to \bot))$. On a donc $b \Vdash \varphi$ et $b \Vdash \varphi \to \bot$. Or $b \geqslant b$, donc $b \Vdash \bot$. C'est absurde. On en déduit que ψ est vraie.

Question 3. On considère le modèle de Kripke suivant (ou les autres variables de $\mathcal{V}$ peuvent être ou non réalisées par les sommets) :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overset{x}{1} \end{tikzcd}$$

Alors $0 \not\Vdash x \vee \neg x$. En effet, $0 \not\Vdash x$ par définition. De plus, $0 \not\Vdash \neg x$, car $0 \leqslant 1$ et $1 \Vdash x$.

Question 4. On procède par induction sur $\mathcal{F}$. On suppose $a \Vdash \varphi$ et $a \leqslant b$.

- Si $\varphi = x \in \mathcal{V}$, alors le résultat est établi par définition de $\Vdash$;
- Si $\varphi = \top$, alors $b \Vdash \top$;
- φ ne peut pas être égal à $\bot$;
- supposons le résultat établi pour φ_1 et φ_2 :
  - si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, alors $a \Vdash \varphi_1$ et $a \Vdash \varphi_2$, donc $b \Vdash \varphi_1$ et $b \Vdash \varphi_2$ par hypothèse d'induction, donc $b \Vdash \varphi$;
  - de même si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$;
  - si $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, soit $c \geqslant b$. Si $c \Vdash \varphi_1$, alors $c \Vdash \varphi_2$, car $a \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ et $c \geqslant a$. On en déduit que $b \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$.

  Dans tous les cas, on a montré $b \Vdash \varphi$.

On conclut par induction.

Question 5. On prouve le résultat par induction sur les arbres de preuve. Il s'agit de montrer, pour chaque règle d'inférence, que si les prémisses sont réalisées, alors la conclusion est réalisée. On considère $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ un modèle de Kripke. On fait le travail sur certaines règles, les autres se traitent de manière similaire (et sont plus simples) :

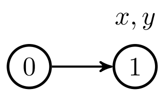
- pour l'axiome (T_i), le résultat est direct car $\top$ est toujours réalisé ;
- pour l'axiome (ax), si $a \in S$ et $a \Vdash \Gamma \cup \{\varphi\}$, alors en particulier, $a \Vdash \varphi$. On en déduit que $\Gamma, \varphi \Vdash \varphi$;
- pour $(\vee_e)$, supposons $\Gamma \Vdash \varphi \vee \psi, \Gamma, \varphi \Vdash \sigma$ et $\Gamma, \psi \Vdash \sigma$. Soit $a \in S$ tel que $a \Vdash \Gamma$. Alors $a \Vdash \varphi \vee \psi$, donc $a \Vdash \varphi$ ou $a \Vdash \psi$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \Vdash \Gamma, \varphi$, donc $a \Vdash \sigma$. Le deuxième cas est similaire. On en déduit que $\Gamma \Vdash \sigma$;
- pour $(\to_i)$, supposons $\Gamma, \varphi \Vdash \psi$. Soit $a \in S$ tel que $a \Vdash \Gamma$ et $b \geqslant a$. Par la question précédente, $b \Vdash \Gamma$. Si $b \Vdash \varphi$, alors $b \Vdash \Gamma, \varphi$, donc $b \Vdash \psi$. On en déduit bien que $a \Vdash \varphi \to \psi$, donc $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$;
- pour $(\to_e)$, supposons $\Gamma \Vdash \varphi$ et $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$. Soit $a \in S$ tel que $a \Vdash \Gamma$. Alors $a \Vdash \varphi \to \psi, a \Vdash \varphi$ et $a \geqslant a$. On en déduit que $a \Vdash \psi$, donc $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$;
- pour $(\bot_e)$, supposons $\Gamma \Vdash \bot$; alors pour tout $a \in S$, $a \not\Vdash \Gamma$ (car sinon $a \Vdash \bot$). On en déduit que pour tout $a \in S$ tel que $a \Vdash \Gamma, a \Vdash \varphi$ (les éléments de l'ensemble vide vérifient toutes les propriétés), soit $\Gamma \Vdash \varphi$.

On conclut par induction.

Question 6. On obtient :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\neg\varphi \vee \psi), \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi}\,ax \qquad \dfrac{}{(\neg\varphi \vee \psi), \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,ax}{(\neg\varphi \vee \psi), \varphi, \neg\varphi \vdash \bot}\,\neg_e}{(\neg\varphi \vee \psi), \varphi, \neg\varphi \vdash \psi}\,\bot_e}{(\neg\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash (\varphi \to \psi)}\,\to_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\neg\varphi \vee \psi), \varphi, \psi \vdash \psi}\,ax}{(\neg\varphi \vee \psi), \psi \vdash (\varphi \to \psi)}\,\to_i \qquad \dfrac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi \vee \psi)}\,ax}{\dfrac{(\neg\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,\to_i}\,\vee_e
$$

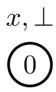
La réciproque n'est pas prouvable, par la question précédente. En effet, si on considère le modèle de Kripke suivant :



Alors $0 \Vdash x \to y$, mais $0 \Vdash \neg x \vee y$, donc $0 \Vdash (x \to y) \to (\neg x \vee y)$.

Question 7. On remarque que l'hypothèse que $a \Vdash \bot$ n'a été utilisée que pour la règle $\bot_e$. Le reste de la preuve de la question 5 est identique. Le résultat de la question 4 utilisé pour $(\to_e)$ reste vrai, car la nouvelle règle remplace le cas de base de $\bot$.

Question 8. Montrons que la formule $\varphi = (\neg x \vee y) \to (x \to y)$ n'est pas prouvable en logique minimale. Pour ce faire, montrons qu'il existe un modèle de Kripke minimal qui ne la réalise pas. Considérons simplement le modèle suivant.



Alors $0 \Vdash_m \neg x = x \to \bot$. En effet, 0 est le seul sommet $\geqslant 0$, et $0 \Vdash_m x$ et $0 \Vdash_m \bot$. On en déduit que $0 \Vdash_m \neg x \vee y$. De plus, $0 \nVdash_m x \to y$. En effet, $0 \geqslant 0$ et $0 \Vdash_m x$, mais $0 \nVdash_m y$. On en déduit que $0 \nVdash_m \varphi$, qui n'est donc pas prouvable en logique minimale, par la question précédente.