Exercice : *Séries de fonctions*

CCP 2010 PC Math 2

PARTIE I

I.1. Soit $x \in \mathcal{D}$. Chaque $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, existe. De plus, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$.Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de RIEMANN convergente, la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } u_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge simplement sur } \mathcal{D}.}$$

I.2. **I.2.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-n\}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-n\}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{-n\}$,

$$u_n^{(p)}(x) = \frac{(-2)\times(-3)\times\ldots\times(-p-1)}{(n+x)^{p+2}} = \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}.$$

I.2.2. Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[$,

$$|u_n^{(p)}(x)| = \frac{(p+1)!}{(n+x)^{p+2}} \leqslant \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}} \text{ (car } n+x \geqslant n+a > 1-1 = 0).$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge car $\frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(p+1)!}{n^{p+2}}$ avec $p+2>1$, on a montré que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[a,b]$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ la série de fonctions de terme général } u_n^{(p)},\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge normalement sur } [a,b].}$$

I.2.3. En résumé, pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$,
- la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction U sur $[a,b]$,
- chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^∞ sur $[a,b]$,
- pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,b]$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction U est de classe C^∞ sur $[a,b]$ pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, on a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } U \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-1,+\infty[.}$$

I.3. **I.3.1.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= U_N(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+N)^2} = U_N(x) + U(x+N). \end{aligned}$$

I.3.2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La fonction U_N est de classe C^∞ sur $]-(N+1),N[$ en tant que somme de fonctions de classe C^∞ sur $]-(N+1),N[$. D'autre part, la fonction $x \mapsto x+N$ est de classe C^∞ sur $]-(N+1),N[$ à valeurs dans $]-1,0[$ et la fonction U est de classe C^∞ sur $]-1,0[$. Donc la fonction $x \mapsto U(x+N)$ est de classe C^∞ sur $]-(N+1),N[$. Mais alors la fonction U est de classe C^∞ sur $]-(N+1),N[$ en tant que somme de deux fonctions de classe C^∞ sur $]-(N+1),N[$.

De plus, les dérivées successives de U_N sur $]-(N+1), N[$ s'obtiennent par dérivation terme à terme car la somme considérée est finie et les dérivées successives de $U(x+N)$ s'obtiennent par dérivation terme à terme car $x+N \in]-1, 0[$. Donc les dérivées successives de U sur $]-(N+1), N[$ s'obtiennent par dérivation terme à terme. On a montré que

$$\boxed{U \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathcal{D} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathcal{D},\ U^{(p)}(x) = (-1)^p (p+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{p+2}}.}$$

I.3.3. On en déduit encore

$$\boxed{\forall p \geqslant 2,\ \forall x \in \mathcal{D},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = (-1)^p \frac{U^{(p-2)}(x)}{(p-1)!}.}$$

I.4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $U_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} \underset{x \to -N}{=} \frac{1}{(x+N)^2} + O(1)$. D'autre part, par continuité de la fonction U en 0, $U(x+N) \underset{x \to -N}{=} O(1)$. Par suite,

$$U(x) \underset{x \to -N}{=} \frac{1}{(x+N)^2} + O(1),$$

et en particulier,

$$\boxed{U(x) \underset{x \to -N}{\sim} \frac{1}{(x+N)^2}.}$$

I.5. **I.5.1.** Chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers U sur $]-1, +\infty[$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } U \text{ est strictement décroissante sur }]-1, +\infty[.}$$

I.5.2. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $0 < n-1+x \leqslant n+x \leqslant n+1+x$ et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, on peut écrire

$$\int_{n+x}^{n+1+x} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \int_{n-1+x}^{n+x} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_{x+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n+x}^{n+1+x} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1+x}^{n+x} \frac{1}{t^2}\, dt = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

Ainsi, pour $x > 0$, $\frac{1}{x+1} = \int_{x+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant U(x) \leqslant \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{x}$ ou encore $\frac{x}{x+1} \leqslant xU(x) \leqslant 1$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \to +\infty} xU(x) = 1$ ou encore que

$$\boxed{U(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

I.6. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{2} \in -\mathbb{N}^* \Leftrightarrow x \in -2\mathbb{N}^* \Rightarrow x \notin \mathcal{D}$ et $\frac{x-1}{2} \in -\mathbb{N}^* \Leftrightarrow x \in 1-2\mathbb{N}^* \Rightarrow x \notin \mathcal{D}$. Par contraposition, si $x \in \mathcal{D}$, alors $\frac{x}{2} \in \mathcal{D}$ et $\frac{x-1}{2} \in \mathcal{D}$. Soit alors $x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+x)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1+x)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(p+\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(p+\frac{x-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ U(x) = \frac{1}{4}\left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right)\right].}$$

Problème : *Matrices semblables*

CCINP 2019 MP Math 2

Partie I - Étude de quelques exemples

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, supposons qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{tr}(B)$ car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Et $\det A = \det(P^{-1}PB) = \det(B)$ car $\det(AB) = \det(BA)$.
$\chi_A = \det(XI_n - PBP^{-1}) = \det P \det(XI_n - B)\det(P^{-1}) = \det(XI_n - B) = \chi_B$ car $\det(AB) = \det(B)\det(A)$.
On sait qu'un automorphisme transforme un sous espace en un autre de même dimension, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

2) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 5$, et $\det(A) = \det(B) = 4 \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3$ et enfin $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$.

Il est simple de vérifier que $E_2(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$ donc diagonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Et $E_2(B) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$ donc non diagonalisable.

Supposons que A et B sont semblables, par transitivité, B et $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ seront semblables, donc B est diagonalisable, ce qui est absurde.
Conséquence A et B ne sont pas semblables.
$\pi_A = (X-1)(X-2)$, car A est diagonalisable.
$\pi_B = (X-1)(X-2)^2$, car B est non diagonalisable.
$\pi_A \neq \pi_B$.

3) Première méthode.
Cherchons une base $\mathcal{B}_1(v_1, v_2, v_3)$ de E telle que $\mathrm{matr}_{\mathcal{B}_1}(u) = B$. On a $\mathrm{matr}_{\mathcal{B}}(u) = A$

Alors $\left\{\begin{array}{rcl} u(v_1) &=& v_2+v_3 \\ u(v_2) &=& v_1+2v_3 \\ u(v_3) &=& v_2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u(e_2) &=& e_1+e_3 \\ u(e_1) &=& e_2+2e_3 \\ u(e_3) &=& e_1 \end{array}\right.$

Il est clair que $(v_1, v_2, v_3) = (e_2, e_1, e_3)$ convient et c'est une base de $\mathbb{R}^3$, donc A et B sont semblables.

Deuxième méthode. Par un calcul simple $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$, qui est simplement scindé dans $\mathbb{R}$, donc ces deux matrices sont diagonalisables et semblables tous à $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$, par transitivité A et B sont semblables.

4) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{rg}(u) = 1$ donc la dimension du noyau de u est $n-1 \geq 1$, soit $(v_1, v_2, ...v_{n-1})$ une base de ce noyau, et soit v_n un vecteur quelconque n'appartenant pas au noyau $\mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathcal{B}_1(v_1, v_2, ..., v_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme demandée.

5) Par la question 11) $u(v_n) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, donc $u^2(v_n) = \sum_{i=1}^n a_i u(v_i) = a_n u(v_n)$, puisque $u^2 \neq 0$ et $\forall i \in [\![1, (n-1)]\!]$; $u^2(v_i) = 0$, alors $u^2(v_n) \neq 0$, donc $a_n \neq 0$.

Or $\chi_U = X^{n-1}(X - a_n)$, donc $\mathrm{Sp}(U) = \{0, a_n\}$ et comme $\dim(E_0(u)) = \dim \mathrm{Ker} u = (n-1)$, alors u est diagonalisable, car l'autre valeur propre est simple.

6) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ qui est symétrique de polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'est pa scindé dans $\mathbb{R}$, donc non diagonalisable.

7) Supposons que C_1, C_2, C_3, C_4 sont les colonnes de A ; on a $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$, le rang de A est inférieur ou égal à 2.

Supposons que (C_1, C_2) est liée, comme $C_2 \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tels que $C_1 = \lambda C_2$, alors $\alpha = \lambda\beta$ donc $\beta = \lambda\alpha$, donc $\alpha(\lambda^2 - 1)$, comme $\alpha \neq 0$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Si $\lambda = 1$, alors $\alpha = \beta$ ce qui est faux, et si $\lambda = -1$, alors $\alpha = -\beta$ ce qui est faux aussi, donc la famille (C_1, C_2) est libre. Alors $\mathrm{rg}(A) = 2$, donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2 \neq 0$, alors 0 est une valeur propre de A.

Il est simple de vérifier que :

$\mathrm{Ker}(A - 2(\alpha + \beta)I_n) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\mathrm{Ker}(A - 2(\alpha - \beta)I_n) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$.

La somme de ces espaces est évidement égal à $\mathbb{C}^4$, car la somme de leurs dimensions est 4, alors $\mathcal{B}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}); \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}); \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}); \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs propres de A.

Remarque La matrice A est symétrique, mais on ne peut pas dire qu'elle est au départ diagonalisable sauf si α et β sont des réels.

Si α et β sont des réels, la base donnée ici est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

8) Si $a = b$, alors $A = B$ donc semblables.

Si $a \neq b$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}(e_1, e_2)$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}_1(v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dont la quelle la matrice de u est B, on alors

$\left\{\begin{array}{lcc} u(e_1) & = & \lambda e_1 \\ u(e_2) & = & a e_1 + \lambda e_2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcc} u(v_1) & = & \lambda v_1 \\ u(v_2) & = & b v_1 + \lambda v_2 \end{array}\right.$

On prend $v_1 = e_1$ et soit $v_2 = x e_1 + y e_2$, alors l'équation $u(v_2) = b v_1 + \lambda v_2$ s'écrit aussi $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $ay = b$, comme $a \neq 0$, alors $y = \frac{b}{a}$ et x est quelconque, alors $v_2 = \frac{b}{a} e_2$, on a bien (v_1, v_2) est une base car $b \neq 0$, donc A et B sont semblables.

Partie II - Démonstration d'un résultat

9) L'égalité $B = P^{-1}AP$ s'écrit aussi, $PB = AP$, alors $(R+iS)B = A(R+iS)$, alors $RB+iSB = AR + iAS$, comme les matrices $RB; SB; AR$ et AS sont réels, alors $RB = AR$ et $SB = AS$.

10) Si on pose $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors :

$\det(R + xS) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (r_{i,j} + x s_{i,j})$, or les quantités $r_{i,j} + x s_{i,j}$ sont des fonctions polynômiales de degré 1, donc $\prod_{i=1}^n (r_{i,j} + x s_{i,j})$ sont des fonctions polynômiales de degré n, alors $\det(R+xS)$ est une fonction polynômiale de degré $\leq n$, or $\det(R+iS) = \det(P) \neq 0$, donc non nul, alors possède un nombre fini de racines réels, donc $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R+x_0S) \neq 0$, alors la matrice $(R+x_0S)$ est inversible.

11) On a $RB = AR$ et $SB = AS$ alors $RB+x_0SB = AR+x_0AS$, donc $(R+x_0S)B = A(R+x_0S)$, or la matrice $(R+x_0S)$ est inversible et réel, donc les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12) $\chi_B = X \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix} = X(X^2+1) = X^3 + X = \chi_A$ qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ de racines $0; i; -i$, donc ces deux matrices sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et tous semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, donc elles sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et comme elles sont des matrices réelles, par application des questions précédentes, les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie III

13) • Si A est diagonalisable, comme $\pi_A = \pi_B$, alors π_B est scindé à racines simples, donc B aussi. $\chi_A = \chi_B$, donc A et B sont semblables à la même diagonale, par conséquent elles sont semblables.

• Si A n'est pas diagonalisable, alors A possède une seule valeur propre notée α qui est aussi la seule valeur propre de B car $\chi_A = \chi_B$, alors $\pi_A = \pi_B = (X-\alpha)^2$.

Ces deux matrices sont trigonalisables car leurs polynômes caractéristiques sont scindés $= (X-\alpha)^2$, donc A est semblables à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, de même B est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Si $a = 0$, alors A sera diagonalisable, absurde, de même $b \neq 0$, par la question $Q15$), A et B sont semblables.

14) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $A \neq 0$; $B \neq 0$; calcul par blocs donne $A^2 = B^2 = 0$, donc $\pi_A = \pi_B = X^2$ et on $\chi_A = \chi_B = X^4$.

• Mais $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(B) = 2$ d'après la question 8, ces deux matrices ne sont pas semblables.

♣♢♡♠