Espaces préhilbertiens réels.

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait. Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire Espace préhilbertien, espace euclidien .	Notation $< x, y >, (x\|y), x.y$.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.	Expression $X^\top Y$, $Tr(A^\top B)$.
Produit scalaire $< f, g >= \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Identité remarquable $\|\|x+y\|\|^2 = \|\|x\|\|^2+\|\|y\|\|^2+2 < x, y >$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $Vect(u)^\perp$; distance de x à $Vect(u)^\perp$.