1. Le midi, un élève peut manger à la cantine ou à l'extérieur du lycée . Si au jour n il mange à la cantine, la probabilité qu'au jour n+1 il mange à l'extérieur est de $\frac{1}{2}$. Par contre, si au jour n, il mange à l'extérieur, alors au jour n+1, il mange à la cantine. On suppose que le 1^{ier} jour, il mange à la cantine.

(a) Calculer la probabilité , notée γ_n , qu'au jour n , il mange à la cantine .
(chercher une relation entre γ_{n+1} et γ_n)

(b) Reprendre la question en supposant que le 1^{er} jour il mange à l'extérieur.

2. On dispose d'une pièce A qui donne "face" avec la probabilité de $\frac{1}{2}$ et d'une pièce B , qui donne "pile" avec la probabilité de $\frac{1}{3}$. On choisit au hasard une pièce et on la lance . Si on obtient "pile" on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une série de lancers.

(a) On pose $A_k =$ " on utilise la pièce A au k^{ieme} lancer "
Exprimer $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$

(b) A l'aide de $P(A_n)$, Calculer la probabilité de $F_n =$ "obtenir face au n^{ieme} lancer "

3. On lance une pièce $2n$ fois. (avec $n \geq 5$)

(a) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile"

(b) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement trois fois "pile" sur les lancers de rangs pairs

(c) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois "pile" sur les lancers de rangs pairs et exactement deux fois "face" sur les lancers de rangs impairs

(d) Déterminer la probabilité de l'événement A = " obtenir autant de "piles" sur les lancers de rangs pairs que de "faces" sur les lancers de rangs impairs "
(On pourra introduire $E_k =$ " obtenir k fois "piles" sur les lancers de rangs pairs et k fois "faces" sur les lancers de rangs impairs" et exprimer A à l'aide des $(E_k)_k$)

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}$ avec $2 \leq p \leq n$.
Une urne contient n boules numérotées. On tire successivement avec remise p boules.

(a) Déterminer la probabilité d'obtenir p numéros différents

(b) Déterminer la probabilité d'obtenir p-1 numéros différents

(c) Déterminer la probabilité de A =" le numéro de la première boule obtenue est strictement inférieur à celui de la dernière boule obtenue "
(Introduire $D_k =$ " la dernière boule obtenue porte le numéro k ")

(d) Déterminer la probabilité de B =" les numéros obtenus forment une suite strictement croissante"

(e) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la probabilité de $C_k =$ " le plus grand numéro obtenu vaut k "
(Introduire $E_i =$ " tous les numéros obtenus sont $\leq i$" puis exprimer C_k à l'aide des E_i)

5. Une urne contient 2 boules blanches et 1 boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne en remettant à chaque fois la boule tirée. On s'arrête lorsqu'on obtient la boule rouge.

(a) Soit l'événement $A_k =$ " obtenir la première rouge au kiéme tirage ".
Calculer $P(A_k)$.

(b) Soit l'événement $R =$" le jeu s'arrête ".
Calculer $P(R)$.

6. Urne et indépendance
Une urne contient 12 boules numérotés de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements :

$$A = \{\text{tirage d'un nombre pair}\}, \quad B = \{\text{ tirage d'un multiple de 3}\}.$$

A et B sont ils indépendants ?
On rajoute maintenant dans l'urne une boule numérotée treize et on recommence l'expérience.
A et B sont ils indépendants ?

7. On lance une infinité de fois une pièce qui amène "pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et $p \neq \frac{1}{2}$
On pose $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $U_k =$" face est obtenu pour la première fois au lancer numéro k "
et $U_0 =$ " face n'apparaît jamais (dans aucun) tirage ". Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

(a) **i.** Soit $A_n =$" Au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile "
Calculer $P(A_n \cap U_0)$, $P(A_n \cap U_1)$ et $P(A_n \cap U_k)$ $\forall\, k \in [\![2, n]\!]$.
(On pourra introduire $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $F_k =$ " obtenir face au k-ième lancer")

ii. Calculer $P(A_n)$ $\forall\, n \geq 2$.

(b) Soit $A =$" au cours de l'expérience, face n'est jamais suivi de pile ".
Calculer $P(A)$.

8. Un sac contient un jeton blanc et un jeton noir. On tire successivement avec remise n jetons.
Soient A = " on obtient au moins 2 jetons blancs" et B = " on obtient des jetons des deux couleurs " .
A et B sont-ils indépendants ?

9. On effectue un sondage auprès des familles ayant deux enfants. On suppose que dans chaque famille il y a un cadet et un aîné et que les naissances des garçons et des filles sont équiprobables. On considère les événements suivants :
A = " la famille contient un garçon et une fille " ; B = " l'aînée de la famille est une fille"
et C = " un des enfants est une fille ".
A et B sont-ils indépendants ? A et C sont-ils indépendants ?

10. Tests de dépistage

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0, 1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

11. La forêt

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

12. Trois joueurs A, B, C jouent à pile ou face selon la règle suivante :
A et B jouent une première partie. C remplace le perdant et le match se poursuit ainsi, le gagnant d'une partie jouant contre le perdant de la partie précédente, jusqu'à ce que l'un des trois gagne consécutivement contre les deux autres.

Montrer que la probabilité que le match s'éternise est nulle et déterminer la probabilité de gaagner le match pour chacun des trois joueurs.

13. Tribu engendrée par une partition

Soit E un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de E. Pour toute partie J de $\mathbb{N}$, on pose $B_J = \bigcup_{j\in J} A_j$.

(a) Démontrer que $\mathcal{T} = \{B_J;\ J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ est une tribu sur E et que c'est la plus petite tribu contenant tous les A_n.

(b) Trouver une partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n n'est pas fini.

(c) Trouver une tribu incluse dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, de cardinal infini, dont tous les éléments, sauf l'ensemble vide, sont de cardinal infini.

14. Limites supérieures et inférieures d'ensembles

Soit Ω un ensemble. On appelle *limite supérieure* des A_n, et on note $\limsup_n A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n. On appelle *limite inférieure* des A_n, et on note $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

(a) Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :

$$[i] A_n =]-\infty, n]; \qquad [ii] A_n =]-\infty, -n];$$
$$[iii] A_{2n} = A,\ A_{2n+1} = B; \qquad [iv] A_n =]-\infty, (-1)^n].$$

(b) Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.

15. Premier lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements. On note $A = \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$. On suppose que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$;

(b) En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$. Interpréter ce résultat.

16. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge.

Que dire de l'événement $\bigcap_{N=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \right)$?

17. Une suite de jeux

Des joueurs $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1}. Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

(a) Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?

(b) En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

(c) Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

18. La rumeur

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

(a) Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

(b) En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

(c) En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

19. Tirage d'entiers

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $1/2^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement "n est un multiple de k".

(a) Vérifier que ceci définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

(b) Calculer la probabilité de A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.

(d) Montrer que pour $p, q \geq 2$, alors A_p et A_q ne sont pas indépendants.

20. Vieil énoncé qui traine dans les feuilles d'exercices depuis très longtemps...

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?