29/1/24 TD : Probabilité - Fonctions génératrices MPI

Partie I	Préliminaires	{Jeu de société}	CCINP 2023 PC (1 exercice sur 3)

Q1) X_n modélise le nombre de cases dont le pion est avancé au rang n

S_n représente la case atteinte au rang n.

Q2) T représente le rang où le pion atteint la case A pour la 1ère fois.

Q3) à Q5) déjà vu en cours.

Q6) X_n suit une loi de Bernoulli (uniforme sur $\{0,1\}$) $P(X_n=0)=P(X_n=1)=\frac{1}{2}$

Par indépendance S_n suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$.

Q7) $T(\Omega) = [\![A,+\infty[\![\cup\{0\}$ A peut être atteint à n'importe quel rang ou pas atteint du tout (il faut attendre A lancers)

Q8) Le pion avance au maximum de 1 case à chaque ~~tour~~

si l'on veut que $T=k$ le pion devait être en $A-1$ au tour précédent et avoir avancé d'une case.

soit $P(T=k)=P((S_{k-1}=A-1)\cap(X_k=1))$ éléments indépendants

ceci n'est valable que si $k\geqslant A$, sinon le pion ne peut pas arriver au rang k.

$$P(T=k)=P(S_{k-1}=A-1)\times P(X_k=1)$$

$$=\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}$$

Q9) T est une variable aléatoire $\sum_{n=0}^{+\infty}P(T=n)=1$

or $P(T=n)=0$ si $1\leqslant n\leqslant A-1$, il reste :

$$P(T=0)=1-\sum_{k\geqslant A}P(T=k)=1-\sum_{k\geqslant A}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}$$

il y a un petit décalage, on pose $n=k-1$ (et $p=A-1$ fixé)

$$P(T=0)=1-\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}=1-\frac{(1/2)^{A-1}}{(1/2)^A}\times\frac{1}{2}=1-1=0$$

" Peu de chance qu'on s'endorme. "

Q10) Plusieurs façons de "faire" : Pour "faire" court "$n=k-1$"

$$G_T(x)=\sum_{k\geq A}P(T=k)\,x^k=\sum_{k\geq A}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}x^k=\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}x^{n+1}$$

$$=\frac{\cancel{x}}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^A}$$ cette formule n'est valable que si $\frac{|x|}{2}<1$

donc $R=2$ (si $|x|>2$ ... divergence grossière)

ou D'Alembert (sic)

$$G_T(x)=\frac{x}{2}\frac{x^{A-1}}{(2-x)^A}\times\frac{1}{2^{A-1}}2^A=\frac{x^A}{(2-x)^A}=\left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

Q11) Pour calculer l'espérance de T, il faut s'assurer que la dérivée de $G_T(x)$ existe : c'est sûr parce que $R=2>1$!

$$G_T'(x)=A\frac{x^{A-1}}{(2-x)^A}+x^A\frac{(-A)}{(2-x)^{A+1}}\times(-1)=\frac{Ax^{A-1}}{(2-x)^A}+\frac{Ax^A}{(2-x)^{A+1}}$$

Il suffit d'évaluer en $x=1$.

$$E(T)=G_T'(1)=\frac{A\times 1}{1}+\frac{A\times 1}{1}=2A$$

Ça paraît tout à fait possible.

Partie III | Étude d'un second cas

Q12) $k\in[\![0,A-1]\!]$ $(S_{n+1}\leq k)=\bigcup_{j=0}^{M-1}(S_{n+1}\leq k)\cap(X_{n+1}=j)$ disjoints

$$P(S_{n+1}\leq k)=\sum_{j=0}^{M-1}P(S_{n+1}\leq k/X_{n+1}=j)\times P(X_{n+1}=j)=\sum_{j=0}^{M-1}\frac{1}{M}P(S_n\leq k-j)$$

On garde $$P(S_{n+1}\leq k)=\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}P(S_n\leq k-j)$$

Q13) Simple calcul.

Q14) $(T>n)$ implique $S_n<A$ (on n'est pas encore arrivé)

et $(S_n<A)$ signifie que l'on a pas encore gagné au rang n, ie $T>n$.

$(T>n)=(S_n<A)$ $\quad E(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(T>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n<A)$ soit

$$E(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1}$$ on pose $m=n+A-1$ $$=\sum_{m=A-1}^{+\infty}\frac{1}{M^m}\binom{m}{A-1}\frac{1}{M^{1-A}}$$

et encore :

$$E(T)=\frac{1}{M^{1-A}}\frac{(1/M)^{A-1}}{(1-1/M)^A}=\frac{1}{(1-1/M)^A}>1$$ ouf !

NB : cette formule reste valable si $M=2$ (alors $A=1$ ou $A=2$).