Informatique - MPI

Question 1.

□ **1.1.** Les nœuds d'étiquettes -4, 0 et 1 sont les trois minima locaux.

Commentaire – On attend simplement du candidat qu'il propose les minima trouvés sans justification. Une réponse orale suffit. En cas d'erreur, le candidat est invité à expliquer son raisonnement.

□ **1.2.** Un arbre est soit un arbre vide soit un nœud formé d'une étiquette et de deux sous-arbres. La hauteur est la profondeur maximale d'une feuille, c'est-à-dire la longueur maximale d'un chemin de la racine à une feuille. La hauteur de l'arbre (b) est 3.

Commentaire – Dans le cas où le candidat propose une définition inductive des arbres avec une feuille pour cas de base, il est guidé vers une définition dont le cas de base est l'arbre vide de sorte à rendre compte du fait que les arbres considérés ne sont pas binaires stricts.

□ **1.3.** L'arbre possède un nombre fini non vide d'étiquettes et donc une étiquette de valeur minimale, qui est un minimum global et donc local.

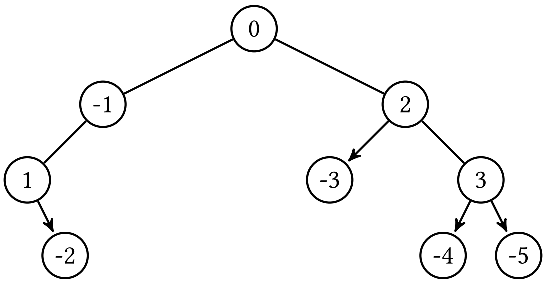
Commentaire – Plusieurs stratégies sont ici acceptées : preuve par induction, existence d'un minimum global qui est local.

□ **1.4.** Si la racine de l'arbre est un minimum local on a trouvé notre minimum local. Sinon, un des deux fils est non vide, avec une étiquette à sa racine plus petite que celle de la racine de l'arbre. Un appel récursif permet d'obtenir un minimum local de ce sous-arbre, qui est également un minimum local de l'arbre (que ce soit la racine du sous-arbre ou un descendant strict). La complexité est linéaire en la hauteur de l'arbre.

Commentaire – Si le candidat propose une solution linéaire en la taille de l'arbre, il est guidé vers une solution linéaire en la hauteur.

Question 2.

□ **2.1.** On propose l'étiquetage à la figure (c) dans lequels les 5 minima locaux sont étiquetés par des entiers strictement négatifs.



(c)

Commentaire – Proposer un étiquetage correct suffit à obtenir tous les points.

□ **2.2.** On propose une approche récursive qui pour un arbre a en entrée calcule $m(a)$ le nombre maximal de nœuds qui peuvent être des minima locaux dans un étiquetage de a, ainsi que, en même temps, la quantité $m\_(a)$ correspondant à cette même quantité mais en supposant de plus que la racine n'est pas un minimum local. Pour un arbre vide, ces deux valeurs valent 0. Pour un arbre a de fils gauche f_g et de fils droit f_d, on peut obtenir par appels récursifs les quantités $m(f_g)$, $m\_(f_g)$, $m(f_d)$ et $m\_(f_d)$. On a alors $m\_(a) = m(f_g) + m(f_d)$ et $m(a) = \max\left\{m\_(a), 1 + m\_(f_g) + m\_(f_d)\right\}$. La complexité est linéaire en la taille de l'arbre, chaque nœud est visité exactement une fois avec un nombre d'opérations constant.

Commentaire – Le jury attend une complexité linéaire. Des indications peuvent être apportées pour orienter le candidat vers une telle solution.

□ **2.3.** Le résultat est vrai pour $n = 0$ et on peut donc supposer que $n \geqslant 1$. Considérons un étiquetage et notons X l'ensemble des nœuds qui sont des minima locaux et Y ceux qui ne le sont pas. On remarque que deux nœuds adjacents ne peuvent pas être tous les deux des minima locaux, puisque toutes les étiquettes sont deux à deux distinctes. Ainsi toute arête de l'arbre est extrémité d'au moins un nœud de Y et l'ensemble Y couvre donc toutes les arêtes. Comme chaque nœud de Y est incident à au plus 3 arêtes et qu'il y a exactement $n-1$ arêtes dans l'arbre, il faut au moins $\frac{n-1}{3}$ nœuds pour couvrir toutes les arêtes, c'est-à-dire $|Y| \geqslant \frac{n-1}{3}$. On a donc $|X| = n - |Y| \leqslant n - \frac{n-1}{3} = \frac{2n+1}{3}$ et donc $|X| \leqslant \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor$.

Commentaire – Très peu de candidats ont pu aborder cette question.