PROBLÈME 2

Notations et définitions

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
— Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée.*

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}\left(|X| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(|X|\right)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$.

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q36. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Q37. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{ch}t.$$

Q38. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \left\{\omega \in \Omega \; ; \; |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

Q43. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \; ; \; \exists n \in \mathbb{N}^*, \; \forall m \geqslant n, \; |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \, ; \; \lim_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.

$\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$

EXERCICE 1