1. **Banque CCINP 2023 : 48**
2. **Banque CCINP 2023 : 49**
3. **Banque CCINP 2023 : 50**
4. **échauffement**

   Pour tout $\alpha > 0$, établir que $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

5. **[CC-INP]**

   Soit $f\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$.

   (a) Déterminer le domaine de définition de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f.

   (b) Trouver une équation différentielle dont f est solution.

   (c) Étudier la limite de f en $+\infty$ et en 0. Donner un équivalent de f en 0.

6. **[CC-INP]** *noyau de Poisson*

   Pour $x \in]-1,1[$, soit $f_x : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

   (a) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$.

   (b) Montrer que f_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f_x'(\theta) = \dfrac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.
   En déduire la valeur de $f_x(\theta)$ pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   (c) Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$.

   (d) En déduire, pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$.

7. **[CC-INP]**

   Pour $x > 0$, soient $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x}$.

   (a) Justifier l'existence de f et de I.

   (b) On admet que $I(x) = \ln(1+\frac{1}{x})$ et que $I(x) \leqslant f(x) \leqslant I(x) + \dfrac{1}{1+x}$.
   Préciser $\lim_{0+} f$ et $\lim_{+\infty} f$. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

   (c) Étudier la monotonie de f.

   (d) Montrer que f est dérivable et retrouver la question précédente.

   (e) Montrer les points admis en (b).

   (f) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(\dfrac{1}{p})$ est rationnel.

8. **[Centrale]**

   Soit $g\colon t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$.

   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   Étudier les variations de g et préciser le plus grand intervalle sur lequel g est de classe $\mathcal{C}^1$.

   (b) Déterminer la limite, puis un équivalent de g en $+\infty$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant g(t) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. En déduire la limite, puis un équivalent de g en 0^+ .