Exercice n°7 : Détermination expérimentale des coefficients de frottement statique et dynamique

① cf TP ⟹ mesure de l'angle limite de glissement

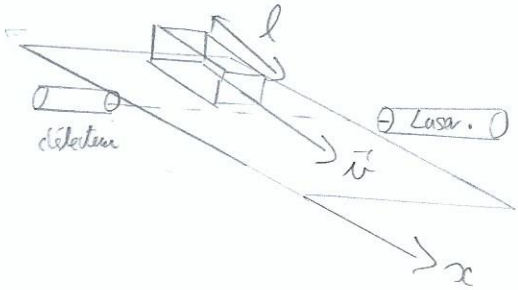
cond non glis. $\dfrac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} \leqslant \mu_s$

$$\text{PFD} \Longrightarrow \begin{cases} T = -mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = \operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu_s$$

cas limite $\operatorname{tg}\alpha_l = \mu_s$

② a) $\alpha > \operatorname{arctg}\mu_s$

b) ⟹ cf TP tracker



détecteur non éclairé pendant Δt

$$\Rightarrow v = \frac{l}{\Delta T}$$

c) $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = mg\sin\alpha\,(1 - \mu_d \operatorname{cotg}\alpha)$

Plutôt par TEC :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

$$W(\vec{P}) = mgh = mgD\sin\alpha$$
$$W(\vec{T}) = -\mu_d mg\cos\alpha\, D$$

d'où $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gD\sin\alpha\,(1 - \mu_d\operatorname{cotg}\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gD\sin\alpha - \mu_d gD\cos\alpha.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{2gD\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \mu_d}$$

$\Rightarrow$ droite de pente 1 et ordonnée à l'origine $-\mu_d$.

Pour l'abscisse à l'origine : $\mu_d = \tan\alpha \Big|_{\frac{v^2}{2g D \cos\alpha} = 0} = 0{,}25$

A priori $\mu_d < \mu_s$

③ 2 phases :

$\rightarrow$ déplacement sur h de l'ensemble $(M+m)$: $\Delta E_c = W(\vec{P}_m) + W(\vec{T}_M)$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(M+m)v_h^2 = mgh - \mu_d Mgh$$

donc : $$\frac{1}{2}v_h^2 = gh\left(\frac{m}{m+M} - \mu_d \frac{M}{m+M}\right)$$

$\rightarrow$ glissement du palet M seul sur $D-h$.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}M\underset{\overset{\parallel}{0}}{v_D^2} - \frac{1}{2}Mv_h^2 = W(\vec{T}_M)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\cancel{2}}M\,\cancel{2}gh\left(\frac{m}{m+M} - \mu_d\frac{M}{m+M}\right) = -\mu_d Mg(D-h)$$

$$\Rightarrow \cancel{M}h\left(\frac{m}{m+M} - \mu_d\frac{M}{m+M}\right) = +\mu_d \cancel{M}(D-h)$$

$$\Rightarrow \mu_d\left(\frac{D-h}{h} + \frac{M}{m+M}\right) = \frac{m}{m+M}$$

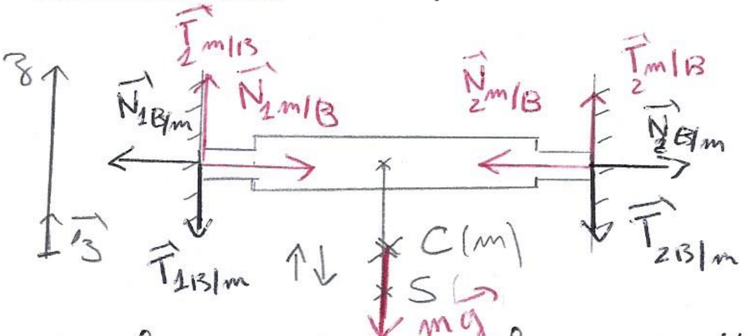
$$\Rightarrow \mu_d = \frac{m}{(m+M)\left(\frac{D-h}{h} + \frac{M}{m+M}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_d = \frac{1}{\left(1+\frac{M}{m}\right)\left(\frac{D-h}{h}\right) + \frac{M}{m}}}$$

d) On évalue D pour plusieurs valeurs de h

$\Longrightarrow$ on obtient x valeurs de N_{cl} $\longrightarrow$ valeur moyenne.

Exercice n°9 : Principe du « Pull-up »



on désignera :
→ la barre par B
→ chaque montant par m
→ le sportif par S

La barre restera en place si $\|\vec T_{m/B}\| \leq \mu_s \|\vec N_{m/B}\|$
et pour le cas limite : $\|\vec T_{m/B}\| = \mu_s \|\vec N_{m/B}\|$

Idée : En tournant la barre, les tampons appuient fortement sur les montants ce qui impose une force de contact tangentielle plus importante pour engendrer un glissement

En choisissant comme Σ le sportif et la barre, et en supposant que le centre de masse de l'ensemble exécute grossièrement un mouvement de translation sinusoïdal et vertical, l'écriture du théorème du centre de masse permet d'accéder à l'action du mur sur les tampons de la barre.

Mise en équation :

TCM sur Σ (sportif + barre) : $m\vec a(S+B) = m\vec g + 2\vec T_{m/B} + \vec N_{1m/B} + \vec N_{2m/B}$

$\cdot \vec e_z$: $m\ddot z = -mg + 2T_{m/B}$

or mouvement vertical sinusoïdal donc $z(t) = Z_0\cos(\omega_0 t) \rightarrow \ddot z = -\omega_0^2 Z_0 \cos(\omega_0 t)$

soit $T_{m/B} = \frac{m}{2}(g - \omega_0^2 Z_0 \cos \omega_0 t)$

La valeur maximale de cette force est donc $T_{m/B} = \frac{m}{2}(g + \omega_0^2 Z_0)$

En situation limite de glissement, on a donc :

$$T_{m/B} = \frac{m}{2}(g+\omega_0^2 Z_0) = \mu_s |N_{m/B}|$$

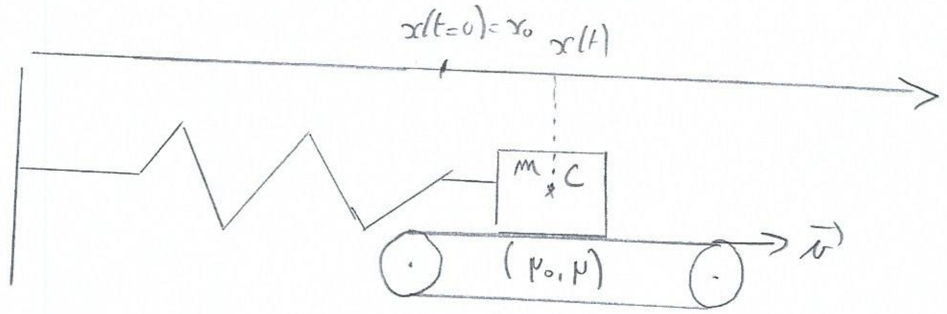
$$\Rightarrow \frac{m}{2}(g+\omega_0^2 Z_0) = \mu_s \frac{E\Delta l S}{l_0}$$ or $\Delta l = p\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ par définition du pas de vis

donc : $$\frac{m}{2}(g+\omega_0^2 Z_0) = \frac{\mu_s E p \Delta\theta S}{2\pi l_0}$$

donc : $$\boxed{\Delta\theta = \frac{m(g+\omega_0^2 Z_0)\pi l_0}{\mu_s E p S}}$$

A.N en prenant $m = 80$ kg
$E = 10$ MPa
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \overset{T=1s}{=} 2\pi$ rad
$Z_0 \simeq 0{,}5$ m
$\Rightarrow \Delta\theta \simeq 4{,}12$ rad $\simeq 0{,}6$ tours

Exercice n°11 Modélisation d'une corde de violon - interprétation spectrale



① **Phase 1** : "Stick" jusqu'à t_0

On applique le TRC à la masse : $m\vec{a} = \vec{R_T} + \vec{R_N} + m\vec{g} - k(x-x_0)\vec{u_x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_N - mg = 0 \\ m\ddot{x} = \underbrace{0}_{\text{car } v=\dot{x}=\text{cte}} = R_T - k[x(t) - x_0] \end{cases} \Rightarrow R_T = k(x(t) - x_0)$$

or $x(t) = x_0 + vt$

donc : $R_T = kvt$

La phase 1 se termine à la limite du glissement, soit lorsque $\|\vec{R_T}\| = \mu_0 \|R_N\| = \mu_0 mg$.

$$\Rightarrow kvt_0 = \mu_0 mg \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{\mu_0 mg}{kv}}$$

NB : $t = t_0^+ \Rightarrow$ glissement

② **Phase 2** : "Slip" (jusqu'à t_1)

On applique le TRC à la masse :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{R_T} - k(x-x_0) \Rightarrow \begin{cases} R_N = mg \\ m\ddot{x} = \mu mg - k(x-x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = \mu g} \quad \text{en posant } X = x - x_0$$

<u>Résolution :</u> $X(t) = \underbrace{A\cos\left[\omega(t-t_0)+\varphi\right]}_{X_h(t)} + X_p(t)$

avec $X_p(t) = \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} = \dfrac{\mu g m}{k}$

$$X(t) = A\cos\left[\omega_0(t-t_0)+\varphi\right] + \frac{\mu m g}{k}$$

<u>C.I.</u> $t = t_0$: $\begin{cases} \dot{X}(t_0) = \dot{x}(t_0) = -A\omega_0\sin\varphi = v \\ X(t_0) = x(t_0) - x_0 = vt_0 = \dfrac{\mu_0 m g}{k} = A\cos\varphi + \dfrac{\mu m g}{k} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sin\varphi = -\dfrac{v}{\omega_0} \\ A\cos\varphi = (\mu_0-\mu)\dfrac{mg}{k} = (\mu_0-\mu)\dfrac{g}{\omega_0^2} \end{cases}$$

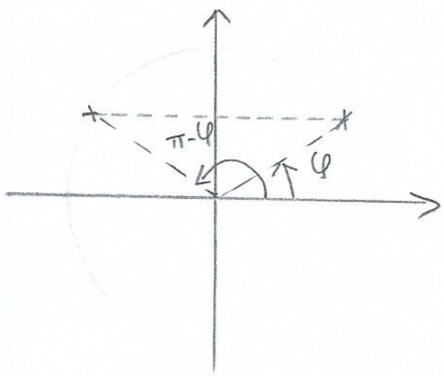
donc $\begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{-v\omega_0}{(\mu_0-\mu)g} \\ A^2 = \dfrac{v^2}{\omega_0^2} + \dfrac{(\mu_0-\mu)^2 g^2}{\omega_0^4} = \dfrac{1}{\omega_0^2}\left[v^2 + \dfrac{(\mu_0-\mu)^2 g^2}{\omega_0^2}\right] \end{cases}$

La phase 2 se termine lorsque : $v_{g\, m/t_{apis}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\dot{x}(t_1) = v}$

$$-A\omega_0\sin\left[\omega_0(t_1-t_0)+\varphi\right] = v$$

$$\Rightarrow \sin\left[\omega_0(t_1-t_0)+\varphi\right] = \frac{-v}{A\omega_0} = \sin\varphi$$

$\sin\varphi$



soit $\omega_0(t_1-t_0)+\varphi = \pi-\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi-2\varphi}{\omega_0} + t_0}$$

Allongement du ressort à t_1 :

$$x(t_1) = X(t_1) + x_0 = A\cos\left[\omega_0\left(\frac{\pi-2\varphi}{\omega_0}\right)+\varphi\right] + \frac{\mu m g}{k} + x_0$$

$$\Rightarrow x(t_1) = A\cos(\pi-\varphi) + \frac{\mu m g}{k} + x_0$$

$$\Rightarrow x(t_1) = -A\cos\varphi + \frac{\mu m g}{k} + x_0$$

$$\Rightarrow x(t_1) = (\mu-\mu_0)\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{\mu g}{\omega_0^2} + x_0$$

donc $\boxed{x(t_1) = (2\mu-\mu_0)\frac{g}{\omega_0^2} + x_0}$

Phase 3 : "Stick" jusqu'à t_2

$$v(t_2-t_1) = x(t_2) - x(t_1)$$

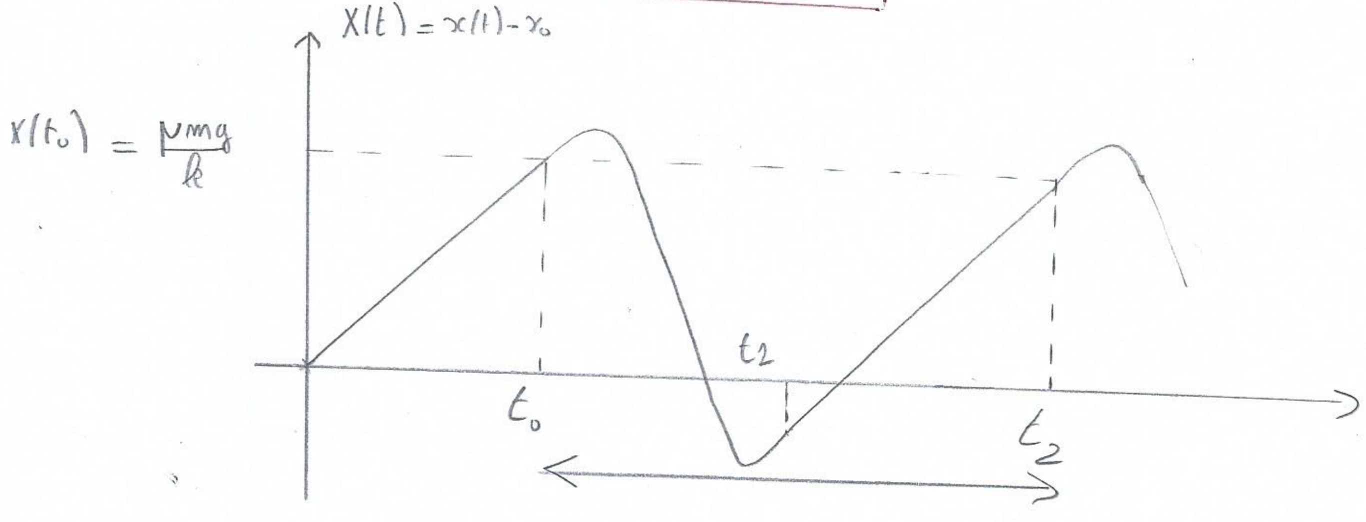
← Simple mais important : pt. de départ

"$x(t_0) = vt_0 + x_0$"

$$\Rightarrow t_2 = \frac{x(t_2)}{v} - \frac{x(t_1)}{v} + t_1$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\cancel{v}t_0}{\cancel{v}} + \cancel{\frac{x_0}{v}} - (2\mu-\mu_0)\frac{g}{\omega_0^2 v} - \cancel{\frac{x_0}{v}} + t_1$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = t_0 + t_1 + (\mu_0 - 2\mu)\frac{g}{\omega_0^2 v}}$$



Période du mvt : $\boxed{T = t_2 - t_0 = t_1 + (\mu_0 - 2\mu)\frac{g}{\omega_0^2 v}}$

Pour introduire des harmoniques : on augmente μ_0 afin d'accroître la durée de la phase de Stick : non sinusoïdale

$\Rightarrow$ des composantes harmonique de $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ apparaissent $\Rightarrow$ le son émis par le violon est "enrichi" !