# TD8 - Classes de complexités (Éléments de réponse)

## Exercice 1

**Question 1.** L'information $P_1 \leqslant_p P_2$ indique que $P_1$ est plus facile que $P_2$. Mais on ne sait de la classe de $P_2$. La réponse est **non**.

**Question 2.** Puisque $P_1$ est plus facile que $P_2$, si ce dernier est dans la classe $P$, $P_1$ y est aussi. La réponse est **oui**.

**Question 3.** La réduction ne dit rien sur la classe de complexité de $P_2$. La réponse est **non**.

**Question 4.** Là encore, la réponse est **non**.

**Question 5.** La réponse est encore **non**.

**Question 6.** À présent, on connaît les classes de complexité de $P_1$ et de $P_2$ : NP-complet. Ce sont donc à la fois des problèmes NP-difficiles et des problèmes qui appartiennent à la classe NP. Donc tout problème NP peut s'y réduire polynomialement. La réponse est **oui**.

**Question 7.** On ne sait sur la classe de complexité de $P_2$. La réponse est **non**.

## Exercice 6

**Question 1.** Remarquons d'abord que 3SAT appartient bien à la classe NP, pour les mêmes raisons que SAT lui-même. On montre maintenant que 3SAT est NP-difficile, en construisant une réduction polynomiale de SAT vers 3SAT.

**Question 2.** Un raisonnement par récurrence structurelle assure immédiatement que la formule $\varphi'$ produite est en forme 3SAT, avec au maximum $3|\varphi|$ clauses.

**Question 3.** La démonstration est encore par récurrence structurelle sur la formule $\varphi$, et on prend comme cible l'énoncé suivant : « une valuation $v$ pour les variables de $\varphi$ satisfait $\varphi$ si et seulement si elle peut être étendue en une valuation $v'$ satisfiant $x \wedge \varphi'$ ».

- Cas d'une variable $z$. On a $f(z) = (z, \mathsf{V})$, et $z \wedge \mathsf{V}$ est satisfaite par les mêmes valuations que $z$.
- Cas de la constante V. On a $f(\mathsf{V}) = (x, x)$, pour une certaine nouvelle variable $x$. La formule V est satisfaite par la valuation vide. La formule $x \wedge x$ est également satisfiable, satisfaite par la valuation qui à $x$ associe V.
- Cas de la constante F. On a $f(\mathsf{F}) = (x, \neg x)$, pour une certaine nouvelle variable $x$. La formule F n'est pas satisfiable. La formule $x \wedge \neg x$ ne l'est pas non plus.
- Cas d'une conjonction $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. On suppose que $f(\varphi_1) = (y_1, \varphi_1')$ et $f(\varphi_2) = (y_2, \varphi_2')$, et que ces sous-formules vérifient notre hypothèse de récurrence. Par définition de $f$ on a $f(\varphi_1 \wedge \varphi_1) = (x, \varphi')$, avec $x$ une nouvelle variable et $\varphi' = (\neg x \vee y_1) \wedge (\neg x \vee y_2) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee x) \wedge \varphi_1' \wedge \varphi_2'$.

  **Question 4.** Montrons l'*équisatisfiabilité*.

  - Supposons qu'il existe une valuation $v$ satisfiant $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. En particulier, $v$ satisfait $\varphi_1$, et $v$ satisfait également $\varphi_2$. Par hypothèses de récurrence, il existe une extension $v_1'$ de $v$ satisfaisant $y_1 \wedge \varphi_1$ et une extension $v_2'$ de $v$ satisfaisant $y_2 \wedge \varphi_2$. Du fait que chaque variable introduite par la transformation de Tseitin est neuve, les deux valuations $v_1'$ et $v_2'$ n'ont comme domaine commun que les variables déjà définies dans $v$. Sur ces variables, par hypothèse, $v_1'$ et $v_2'$ conservent les valeurs de $v$. Ainsi, l'union des deux extensions $v_1'$ et $v_2'$ de $v$ est bien définie. Définissons une valuation $v'$ par :

  $$\begin{cases} v'(x) &= & \mathsf{V} & \\ v'(z) &= & v(z) & \text{si } z \in \mathrm{dom}(v) \\ v'(z) &= & v_1'(z) & \text{si } z \in \mathrm{dom}(v_1') \\ v'(z) &= & v_2'(z) & \text{si } z \in \mathrm{dom}(v_2') \end{cases}$$

  Comme on a $v'(x) = v_1'(y_1) = v_2' = (y_2) = \mathsf{V}$, cette valuation $v'$ satisfait les trois clauses $\neg x \vee y_1$, $\neg x \vee y_2$ et $\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee x$, et donc finalement satisfait bien $x \wedge \varphi'$.
  - Supposons qu'il existe une valuation $v'$ satisfiant $x \wedge \varphi'$. En particulier, $v'$ satisfait les quatre clauses $x$, $\neg x \vee y_1$, $\neg x \vee y_2$ et $\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee x$. On en déduit que, nécessairement, $v'(x) = v'(y_1) = v'(y_2) = \mathsf{V}$. Ainsi, $v'$ satisfait à la fois $y_1$ et $\varphi_1'$, et satisfait donc $y_1 \wedge \varphi_1'$. Donc, par hypothèse de récurrence, $v'$ satisfait $\varphi_1$. De même, on déduit que $v'$ satisfait $\varphi_2$. Finalement, $v'$ satisfait bien $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

**Question 5.** Ainsi, partant d'une formule propositionnelle $\varphi$ quelconque utilisant les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$, on peut construire une formule 3SAT $x \wedge \varphi'$ de taille proportionnelle à $|\varphi|$, qui est satisfiable si et seulement si $\varphi$ l'est. Ainsi SAT $\leqslant_{\mathrm{P}}$ 3SAT, le problème SAT se réduit polynomialement au problème 3SAT, et ce dernier est donc NP-difficile.