1. **EXERCICE COURS N^{0}1** :

   On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E[\sqrt{n}]$$

   Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

2. **EXERCICE COURS N^{0}2** :

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour tout $n \geq 0$.

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (b) Montrer que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

3. **EXERCICE COURS N^{0}3** :

   On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence :
   $u_0 = 4$
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$.
   Cette suite converge-t-elle ? Si oui quelle est sa limite ? Que se passe-t-il si $u_o = \pi$?

4. **EXERCICE COURS N^{0}4** :

   Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n(an+b) \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{C} \quad \text{et } n \geq 1$$

   Justifier que (u_n) est bien définie, puis montrer que u_n est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

5. **EXERCICE COURS N^{0}5** :

   On définit deux suites u et v par :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{v_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{n+k}}$$

   Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. (on ne demande pas la valeur de cette limite.)

6. **EXERCICE COURS N^{0}6** :

   Étudier les suites (définition, convergence ?, limite ?...) définies par :

   (a) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

   (b) $v_n = 3\ln(2n^2+n) - 2\ln(3n^3+n)$

   (c) $w_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$

   (d) $z_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

7. EXERCICE COURS N^{0}7 :

On définit la suite u_n par récurrence $u_0 \in]0,1]$ et

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

(a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Étudier la monotonie de la suite.

(d) Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

8. EXERCICE COURS N^{0}8 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n + 4}$.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

(c) Étudier le sens de variation de (u_n).

(d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(e) On note l la limite de (u_n). Déterminer une équation dont l est solution et en déduire la valeur de l.

9. EXERCICE COURS N^{0}9 : Avec des racines carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
En déduire que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

♣♢♡♠