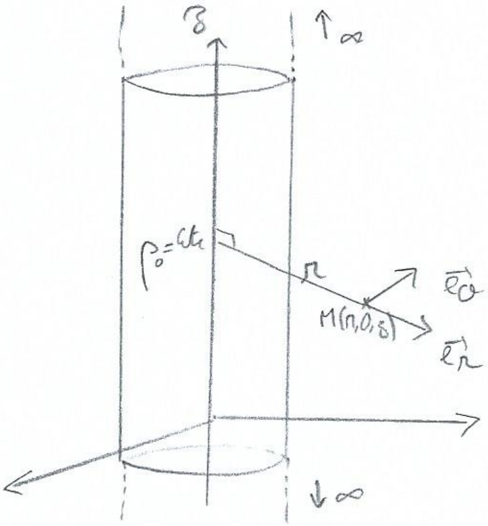
Exercice n°3 : Utilisation du théorème de Gauss sous sa forme locale

①



☑ Symétries : $[M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}] = \pi_2^+$
$[M, \vec{e_r}, \vec{e_z}] = \pi_2^+$
$\Rightarrow \vec{E}(M) \in (\pi_2^+ \cap \pi_2^+) \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\vec{e_r}$

☑ Invariances : par translation selon z $\vec{E}(r,\theta,\cancel{z})$
— rotation selon θ $\vec{E}(r,\cancel{\theta})$

Bilan : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$

② $\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_r) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ (forme locale du th. de Gauss)

or pour $r > R$, $\rho(M) = 0$ donc $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_r) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(r E_r) = 0$

$\Rightarrow \boxed{E_r = \frac{K}{r}}$

③ Pour $r < R$: $\rho(M) = \rho_0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_r) = \rho_0$

soit $E_r = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} + \frac{K'}{r}$

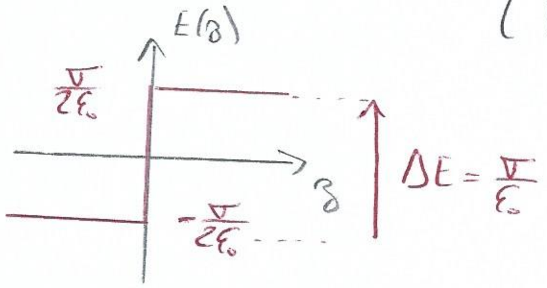
CL : $E_r(r=0)$? → En prenant 2 plans contenant l'axe $[Oz)$
qui sont des plans de symétrie π_2^+ et π_2^+
on en déduit que le chp pour un pt de l'axe
est selon $\vec{e_z}$.
Un troisième plan de symétrie est $[M\, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$
$\Rightarrow$ le chp doit être $\perp \vec{e_z}$
conclusion : le chp ne pouvant être à la fois $\perp$ à $\vec{e_z}$ et $\parallel \vec{e_z}$
il est nul en tt pt de l'axe
$\Rightarrow E_r(r=0) = 0 \Rightarrow K' = 0$

Autre approche : le chp ne peut diverger en $r=0 \Rightarrow K' = 0$

Bilan : $E_r(r<R) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}$

④ Non. Le chp est nécessairement continu car la charge est ici volumique.
Seule une distribution de charge surfacique engendre une discontinuité du chp $\vec{E}$ (vu en cours sur le cas de la plaque infinie chargée σ :

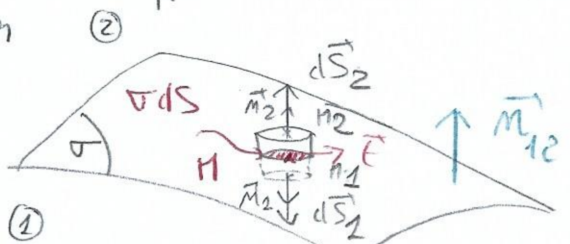
$$\begin{cases} \vec{E}(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ \vec{E}(z<0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$$



$$\Rightarrow \underbrace{\vec{E}(z>0) - \vec{E}(z<0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z}_{\text{discontinuité du chp électrique}}$$

Démonstration générale de la discontinuité de la composante normale du chp $\vec{E}$ à la traversée d'une surface chargée σ. (et continuité de la composante parallèle). (HP)

(H) On suppose une nappe chargée en surface de densité surfacique σ séparant les domaines ① et ②



Isolons une petite surface fermée, type boîte de camembert enfermant une petite charge σdS de la nappe, et appliquons lui le th de Gauss :

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} dS$$

Faisons $M_1 \to M \leftarrow M_2$; il vient alors $\iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} \to 0$

$$\text{donc } d\Phi(\vec{E}) = \vec{E}_1 \cdot \underbrace{\vec{n}_1}_{=-\vec{n}_{12}} dS + \vec{E}_2 \cdot \underbrace{\vec{n}_2}_{=\vec{n}_{12}} dS = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} dS$$

$$\text{d'où } (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Ou encore } (\vec{E}_2 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_{12} \xrightarrow{\text{identif}} \boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}} \quad (e)$$

Cette relation traduit la discontinuité de la composante normale du chp $\vec{E}$ à la traversée de la nappe et la conservation de la composante tangentielle

En effet : $(e) \cdot \vec{n}_{12} \Rightarrow E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et $(e) \cdot \vec{E} \Rightarrow E_{2t} - E_{1t} = 0$

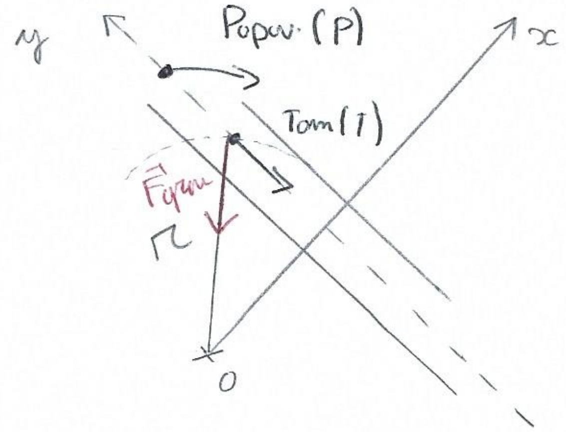
Bilan : comme ici on a $\sigma = 0$ (la charge est répartie en volume avec $\rho \neq 0$ $\Rightarrow$ elle ne peut donc pas être répartie en surface)

$\Rightarrow$ pas de discontinuité du champ en $r = R$

Condition de continuité en $r = R$: $\dfrac{K}{R} = \dfrac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0} \Rightarrow K = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$

d'où $$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}(r > R) = \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_r} \\ \vec{E}(r < R) = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\,\vec{e_r} \end{array}}$$

Exercice n°7



Idée : Pour pouvoir poursuivre leur partie, Tom et Popov doivent tous deux posséder un mvt périodique de même période.

☒ Cas de Popov : mvt orbital circulaire

PFD : $m_P \vec a_P = -\frac{GMm_P}{R^2}\vec e_r$ or $\vec a_P = -R\Omega_P^2 \vec e_r$
(accélération centripète mvt circulaire)

$\Rightarrow +\cancel{m_P} R\Omega_P^2 = +\frac{GM\cancel{m_P}}{R^2}$

$\Rightarrow \Omega_P = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}$ soit $\boxed{T_P = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R^3}{GM}\right)}}$

☒ Cas de Tom : mvt oscillant dans le puits ?

(e) $m_T \vec a_T = \vec F_{contact} + \vec F_{grav}$ avec $\vec F_{contact} = F_{cont}\,\vec e_x$ car (H) pas de frottement

$\vec F_{grav}$? $\vec F_{grav} = m_T \vec G(T)$

↳ par th de Gauss $\iint_{Sph(r)} \vec G(T)\cdot d\vec S = -GM_{int}4\pi$

soit $G(r) = -\frac{GM_{int}\cancel{4\pi}}{4\pi r^2} = -\frac{G\frac{4}{3}\pi r^{\cancel{3}}\rho_0}{\cancel{r^2}} = \frac{-G\rho_0 4\pi r}{3}$

$$G(r) = -\frac{GM\,4\pi}{3 \times \frac{4}{3}\pi R^3}\, r = \frac{GM}{R^3}\, r.$$

donc $\vec{F}_{grav} = -m_T \frac{GM}{R^3} \underbrace{r\,\vec{e_r}}_{=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = -m_T \frac{GM}{R^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

donc (e) : $m_T \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -m_T \frac{GM}{R^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

soit $\boxed{\ddot{y} + \overbrace{\frac{GM}{R^3}}^{\Omega_T^2} y = 0}$

mvt oscillatoire de période $\boxed{T_T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$

Bilan : Tom et Popov possèdent tous les deux un mvt périodique de m̂ période ⇒ la partie peut être poursuivie en jouant les coups d'échecs au moment de leur rencontre au pt d'injection initial.

Conclusion : $T_T = T_P = 2917{,}55\,s \approx 48$ min.