Problème

Concours commun MINES-PONTS 1998

MATH 2 (option PSI)

1ère partie :

1.*a)* Si X est un vecteur propre associé à λ, $AX = \lambda X$, d'où $\|AX\| = |\lambda|\|X\| \leq \|A\|_d \|X\|$ et comme X n'est pas nul, $|\lambda| \leq \|A\|_d$.

1.*b)* Donc, si $\lambda > \|A\|_d$, λ n'est pas valeur propre et $\lambda I_d - A$ est inversible. Et comme $\lambda \neq 0$, $\left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)\lambda(\lambda I_d - A)^{-1} = I_d$ ce qui prouve l'inversibilité de la matrice $I_d - \frac{1}{\lambda}A$.

1.*c)* Si $\lambda \to +\infty$, $I_d - \frac{1}{\lambda}A \to I_d$ d'après **P.2**. Le déterminant d'une matrice étant une fonction polynomiale donc continue des coefficients, la matrice des cofacteurs de $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ a pour limite la matrice des cofacteurs de I_d et le déterminant de $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ tend vers $\det(I_d) = 1$. Donc $\left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} \underset{\lambda\to+\infty}{\to} I_d$.

1.*d)* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda I_d - A)^{-1} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = 0$.

2. $B_\lambda - I_d = \lambda(\lambda I_d - A)^{-1} - (\lambda I_d - A)^{-1}(\lambda I_d - A) = (\lambda I_d - A)^{-1}\big(\lambda I_d - (\lambda I_d - A)\big) = A \underset{\lambda\to+\infty}{\to} 0$.

$C_\lambda - A = \lambda(B_\lambda - I_d) - A = \lambda(\lambda I_d - A)^{-1}A - A = (\lambda I_d - A)^{-1}\big(\lambda I_d - (\lambda I_d - A)\big)A = (\lambda I_d - A)^{-1}A^2 \underset{\lambda\to+\infty}{\to} 0$

2ème partie :

1.*a)* Si A est positive, le j-ème vecteur colonne, image du j-ème vecteur de la base canonique de IR^d par a doit être positif pour tout j. Donc $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$. La réciproque est immédiate.

Si $a_{ijn} \underset{n\to+\infty}{\to} a_{ij}$ et si $a_{ijn} \geq 0$ pour tout n, alors $a_{ij} \geq 0$; donc la limite d'une suite de matrices positives est positive.

1.*b)* Supposons A positive. Alors $\left|\sum_{j=1}^{d} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{d} a_{ij}|x_j| \quad \forall i = 1,\ldots,d$, c'est à dire $|a(x)| \leq a(|x|)$.

Inversement, appliquons la relation $|a(x)| \leq a(|x|)$ au j-ème vecteur de la base canonique de IR^d : on obtient $|a_{ij}| \leq a_{ij} \quad \forall i = 1,\ldots,d$ ce qui prouve que $a_{ij} \geq 0$ pour tout couple (i,j), et donc que A est positive.

1.*c)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas positive. $(\lambda I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

Pour que cette matrice soit positive, il faut et il suffit que $\begin{cases} \lambda - 1 \geq 0 \\ \lambda - 2 \geq 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 1 \geq 0 \end{cases}$, c'est à dire $\lambda \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. ${}^tXC_\lambda X = \lambda^2\,{}^tX(\lambda I_d - A)^{-1}X - \lambda\,{}^tXX$. Si $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive, l'inégalité triangulaire donne ${}^tX(\lambda I_d - A)^{-1}X \leq {}^t|X|(\lambda I_d - A)^{-1}|X|$. Par ailleurs, $\lambda\,{}^tXX = \lambda\,{}^t|X||X|$. Donc ${}^tXC_\lambda X \leq {}^t|X|C_\lambda|X|$.

Lorsque $\lambda \to +\infty$, on obtient alors ${}^tXAX \leq {}^t|X|A|X|$.

3ème partie :

1.*a)* $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 - y^2 + 4xy$ est positif pour $x = y = 1$; donc B n'est pas dissipative. B admet une valeur propre double égale à -1.

$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$; donc C est dissipative. Son polynôme caractéristique est det($\lambda I_3 - C) = \lambda^3 + 3\lambda$ et Sp(C) = $\left\{0\,,\pm i\sqrt{3}\right\}$.

1.*b)* Si X est un vecteur propre associé à une valeur propre λ , ${}^t XAX = \lambda\, {}^t XX \leq 0$, d'où $\lambda \leq 0$.

1.*c)* Si A est symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles et si elle est dissipative, elles sont dans $IR\_$. Réciproquement, si A est symétrique et à valeurs propres négatives ou nulles, on peut écrire $A = ODO^{-1}$ où D est une matrice diagonale à éléments diagonaux négatifs ou nuls et O une matrice orthogonale. D'où ${}^t XAX = {}^t XODO^{-1} X = {}^t YDY = \sum_{i=1}^{d} d_{ii} y_i^2 \leq 0$, avec $Y = O^{-1}X$.

Or ${}^t XAX = {}^t X\, {}^t AX = {}^t X \dfrac{A + {}^t A}{2} X$. Donc A est dissipative ssi les valeurs propres de $A + {}^t A$ sont dans $IR\_$.

1.*d)* ${}^t XBX = {}^t XAX - \|A\|_d\, {}^t XX \leq \|X\|\,\|A\|_d\,\|X\| - \|A\|_d\,\|X\|^2 = 0$ (on majore le premier terme en utilisant **P.1** et l'inégalité de Schwarz). Donc B est dissipative.

2.*a)* Soit X un vecteur propre pour la valeur propre 0. Alors ${}^t XAX = 0$. Or, d'après **II.2.** , ${}^t XAX \leq {}^t |X| A |X|$ et si A est dissipative, ${}^t |X| A |X| \leq 0$. Le vecteur $Y = |X|$ est donc bien un vecteur positif non nul tel que ${}^t YAY = 0$.

2.*b)* Appliquons ce qui précède à la matrice symétrique $A' = A - s(A) I_d$ dont toutes les valeurs propres sont négatives ou nulles (et qui est donc dissipative d'après **1.*c)***), qui admet la valeur propre 0 et qui est telle que $\left(\lambda I_d - A'\right)^{-1}$ soit positive pour λ assez grand (le seuil est celui relatif à A décalé de $s(A)$). Si X' est un vecteur propre de A pour la valeur propre $s(A)$, alors ${}^t Y'A'Y' = 0$ avec $Y' = |X'|$ et si Y' est propre pour A', ce ne peut être que pour la valeur propre 0 d'où il résulte que Y' est bien positif et propre pour A relativement à la valeur propre $s(A)$.

2.*c)* B admet 1 comme valeur propre évidente. les deux autres sont opposées (car Tr(B) = 0), de produit égal à det(B) = -2 . D'où Sp(B)= $\left\{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right\}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$ est propre pour $\sqrt{2}$.

$$\left(\lambda I_3 - B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda + 1}{\lambda^2 - 2} & 0 & \dfrac{1}{\lambda^2 - 2} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda - 1} & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda^2 - 2} & 0 & \dfrac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 2} \end{pmatrix} \text{ est positive ssi } \begin{cases} \lambda - 1 \geq 0 \\ \lambda + 1 \geq 0 \\ \lambda^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \text{ donc ssi } \lambda \geq \sqrt{2}\,.$$

4ème partie :

1. $\|x(t)\|^2 = {}^t X(t) X(t)$. D'où $\dfrac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = {}^t X'(t) X(t) + {}^t X(t) X'(t) = 2\ {}^t X(t) AX(t)$. A étant dissipative, cette quantité est négative ou nulle. Donc $\|x(t)\| \leq \|x_0\| \quad \forall t \geq 0$.

2.*a)* Le système $\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ a pour solution $X(t) = \exp(At).\, X_0$. D'où

$$M(t) = \exp(At) = P \exp(Dt) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2.*b)* $\left(I_d-\frac{t}{n}A\right)^{-n}=\left(I_d-\frac{t}{n}PDP^{-1}\right)^{-n}=P\left(I_d-\frac{t}{n}D\right)^{-n}P^{-1}$. Or on sait que $\left(1-\frac{t}{n}\lambda\right)^{-n}\underset{n\to+\infty}{\to}e^{\lambda t}$. Donc $M(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(I_d-\frac{t}{n}A\right)^{-n}$. Alors si $(\lambda I_d-A)^{-1}$ est positive pour λ assez grand, $\left(\frac{n}{t}I_d-A\right)^{-1}$ est positive pour n assez grand, donc aussi $\left(I_d-\frac{t}{n}A\right)^{-1}=\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}I_d-A\right)^{-1}$ ainsi que $\left(I_d-\frac{t}{n}A\right)^{-n}$. Par passage à la limite (**II.1.*a)***), $M(t)$ est donc une matrice positive.

2.*c)* Sachant que pour $\lambda>\|A\|_d$, λI_d-A est inversible, on peut écrire $\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)dt=\int_0^x\exp\left((-\lambda I_d+A)t\right)dt=-(\lambda I_d-A)^{-1}\left[\exp\left((-\lambda I_d+A)t\right)\right]_0^x=(\lambda I_d-A)^{-1}\left(I_d-e^{-\lambda x}M(x)\right)$.

2.*d)* $\|M(t)\|_d=\left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\right\|_d\le\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\|A\|_d^k t^k}{k!}=e^{t\|A\|_d}$. Donc, pour $\lambda>\|A\|_d$, $\left\|M(x)e^{-\lambda x}\right\|_d\le e^{x(\|A\|_d-\lambda)}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda I_d-A)^{-1}\left(I_d-e^{-\lambda x}M(x)\right)=(\lambda I_d-A)^{-1}$.

2.*e)* Si $M(t)$ est positive pour tout $t>0$, il en est de même de $e^{-\lambda t}M(t)$, donc aussi de $\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)dt$ puisque les coefficients de cette matrice sont des intégrales sur le segment $[0,x]$ de fonctions positives. Par passage à la limite, $(\lambda I_d-A)^{-1}$ est positive pour tout $\lambda>\|A\|_d$.