DM18 (type X-ENS)

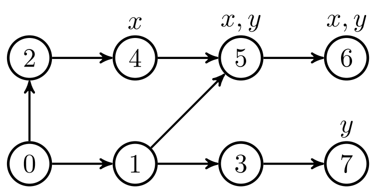
On note $\mathcal{V} = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble de n *variables propositionnelles* sur les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$. L'ensemble des *formules propositionnelles* est noté $\mathcal{F}$. On note $\neg\varphi$ la formule propositionnelle $\varphi \rightarrow \bot$.

Un *modèle de Kripke* est un triplet $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ où (S, A) est un graphe orienté acyclique et $\Vdash$ est une relation binaire, appelée *réalise*, entre les éléments de S et de $\mathcal{V}$. En notant $a \leqslant_{\mathcal{K}} b$ l'existence d'un chemin entre $a \in S$ et $b \in S$, de longueur éventuellement nulle, pour tous sommets a et b de S, pour toute variable propositionnelle x de $\mathcal{V}$, si $a \leqslant_{\mathcal{K}} b$ et $a \Vdash x$ alors $b \Vdash x$. La relation $\Vdash$ est étendue à une relation binaire entre les éléments de S et de $\mathcal{F}$ par :

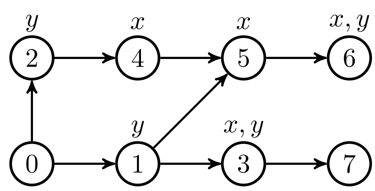
- pour $a \in S$, $a \Vdash \top$ et $a \nVdash \bot$;
- pour $a \in S$ et $\varphi, \psi \in F_2$:
  - $a \Vdash \varphi \wedge \psi$ si et seulement si $a \Vdash \psi$;
  - $a \Vdash \varphi \vee \psi$ si et seulement si $a \Vdash \psi$;
  - $a \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ si et seulement si pour tout $b \in S$, si $a \leqslant_{\mathcal{K}} b$ et $b \Vdash \varphi$, alors $b \Vdash \psi$.

  Pour $\varphi \in \mathcal{F}$ et $\Gamma \subseteq F$, on note :
- $a \Vdash \Gamma$ si pour tout $\psi \in \Gamma$, $a \Vdash \psi$;
- $K \Vdash \varphi$ (resp. $K \Vdash \Gamma$) si pour tout $a \in S$, $a \Vdash \varphi$ (resp. $a \Vdash \Gamma$) ;
- $\Gamma \Vdash \varphi$ si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ et $a \in S$, si $a \Vdash \Gamma$, alors $a \Vdash \varphi$;
- $\Vdash \varphi$ si $\varnothing \Vdash \varphi$ ou si pour tout $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \Vdash \varphi$. On dit alors que φest *toujours réalisée.*

Question 1. Si $\mathcal{V} = \{x, y\}$, parmi les deux représentations suivantes, déterminer laquelle correspond à un modèle de Kripke et préciser quels sommets réalisent la formule $y \vee \neg x$. Justifier votre réponse.



$\mathcal{K}_1$



$\mathcal{K}_2$

L'annexe rappelle les règles d'inférence des logiques minimale, intuitionniste et classique. On note $\Gamma \vdash_m \varphi$, $\Gamma \vdash_i \varphi$ et $\Gamma \vdash_c \varphi$ pour indiquer qu'un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable en logique minimale, intuitionniste et classique respectivement.

Question 2. Montrer que $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ est prouvable en logique minimale. Est-ce une formule toujours réalisée ?

Question 3. Montrer que pour $x \in \mathcal{V}$, $x \vee \neg x$ n'est pas une formule toujours réalisée.

Question 4. Soit $\varphi \in F$, $\mathcal{K} = (S, A, \Vdash)$ un modèle de Kripke et $(a, b) \in S^2$. Montrer que si $a \Vdash \varphi$ et $a \leqslant_{\mathcal{K}} b$, alors $b \Vdash \varphi$.

Question 5. Montrer que la logique intuitionniste est correcte pour la sémantique de Kripke, c'est-à-dire que si $\Gamma \vdash_i \varphi$, alors $\Gamma \Vdash \varphi$. Que peut-on en déduire sur la logique intuitionniste dans la sémantique booléenne usuelle ?

Question 6. Montrer que $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ est prouvable en logique intuitionniste. Qu'en est-il de la formule réciproque $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$?

Question 7. On appelle modèle de Kripke minimal un modèle de Kripke où on a remplacé la condition $a \nVdash \bot$ pour $a \in S$ par : si $a \Vdash \bot$ et $a \leqslant_{\mathcal{K}} b$, alors $b \Vdash \bot$. On note $\Vdash_m$ la relation de réalisation dans un modèle de Kripke minimal. Sans reprendre toute la preuve, justifier que si $\Gamma \vdash_m \varphi$, alors $\Gamma \Vdash_m \varphi$.

Question 8. Montrer que les formules de la question 6 ne sont pas prouvables en logique minimale.

Annexe - Règles de la déduction naturelle (logique propositionnelle)

Logique minimale

- **Règles de →**

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \qquad \Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_2} \to_e$$

- **Règles de ∧**

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} \wedge_e \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} \wedge_e$$

- **Règle de ∨**

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \vee_e$$

- **Axiomes**

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \mathit{ax} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

Logique intuitionniste

Règles de la logique minimale auxquelles est ajoutée la **règle de l'élimination de ⊥**.

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \bot_e$$

Logique classique

Règles de la logique intuitionniste auxquelles est ajoutée la **règle du tiers-exclu**.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \mathit{te}$$