DM4 (éléments de réponses)

Question 1.

□ **1.1.** Soit v un mot non vide. $\beta(v)$ est le plus long bord de v. C'est en particulier à la fois un préfixe propre et un suffixe propre. Par conséquent : $|\beta(v)| \leqslant |v| - 1$. De la même façon, on établit : $|\beta^2(v)| \leqslant |\beta(v)| - 1$ de sorte que $|\beta^2(v)| \leqslant |v| - 2$. En itérant ce processus, il existe un rang k à partir duquel la suite $\left(\beta^k(v)\right)_{i\geqslant 1}$ stationne en ε. En outre, puisque $\beta^{i+1}(v)$ est à la fois préfixe et suffixe de $\beta^i(v)$, les mots de l'ensemble $\{\beta(v), \beta^2(v), \dots, \beta^k(v)\}$ sont des bords de v.

Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Soit w un bord de v. Alors, il existe un entier p tel que :

$$|\beta^p(v)| \leqslant |v| \leqslant |\beta^{p-1}(v)| - 1$$

Alors, w est un bord de $\beta^{p-1}(v)$ de sorte que :

$$|w| \leqslant |\beta\left(\beta^{p-1}(v)\right)| = |\beta^p(v)|$$

Ce qui prouve que $w = \beta^p(v)$.

□ **1.2.** Un bord de va est soit le mot vide ε, soit un mot de la forme wa où $w \in A^*$ est un bord de v. La question précédente montre que w peut s'écrire $\beta^p(v)a$, où $1 \leqslant p \leqslant k$. Par conséquent, un bord de va est un élément de $\{\varepsilon, \beta(v)a, \beta^2(v)a, \dots, \beta^k(v)a\}$.

Tous les éléments de cet ensemble sont des suffixes de va. En revanche, tous ne sont pas des préfixes de va. Parmi ceux qui le sont, le plus long d'entre eux est le bord maximal $\beta(va)$ de va.

□ **1.3.** On remarque que $j_1 \leqslant k - 1$ et $j_{i+1} \leqslant j_i - 1$. D'où : $j_i \leqslant k - i$. Puis $j_{k+1} \leqslant -1$. Or, par construction b est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{-1\}$. Donc $j_{k+1} = -1$.

Soit $v = u_0 \cdots u_{k-1}$ et $a = u_k$. Par définition de b, on a $|\beta(v)| = b(k) = j_1$. $\beta(v)$ peut donc s'écrire $u_0 \cdots u_{j_1 - 1}$. En continuant ainsi, on a : $\beta^2(v) = u_0 \cdots u_{j_2 - 1}$, …, $\beta^i(v) = u_0 \cdots u_{j_i - 1}$. Par conséquent, $\beta^i(v)a$ est préfixe de va si et seulement si $u_{j_i} = u_k$.

Par définition, α est le plus petit entier tel que soit $u_{j_\alpha} = u_k$, soit $j_\alpha = -1$.

- Si $u_{j_\alpha} = u_k$, α est le plus entier pour lequel $\beta^\alpha(v)a$ est préfixe de va. D'après la question précédente, α est donc aussi le plus petit entier pour lequel $\beta(va) = \beta^\alpha(v)a$. Ce qui prouve que $b(k+1) = j_\alpha + 1$.
- $j_\alpha = -1$, c'est que $\beta^\alpha(v) = \varepsilon$. Alors $\beta(va) = \varepsilon$ et $b(k+1) = 0 = j_\alpha + 1$.

Question 2.

```
let bord u =
  let n = String.length u in
  let b = Array.make (n+1) (-1) in
  let rec aux k = function
    | j when j = -1 || u.[j] = u.[k] -> j+1
    | j -> aux k b.(j)
  in
  for k = 0 to n - 1 do b.(k+1) <- aux k b.(k) done;
  b
```

Question 3.

□ **3.1.** m est un facteur de mxs si et seulement si m est un bord d'un des préfixes de mxs. x n'étant présent ni dans m, ni dans s, ce bord est maximal. Par conséquent, m est un facteur de s si et seulement si $|m|$ est présent dans le tableau b.

□ **3.2.** Dans le code suivant, le caractère `@` est la lettre qui n'appartient ni à `m`, ni à `s`.

```
let kmp m s =
  let n_m = String.length m in
  let b = bord (m ^ "@" ^ s) in
  let n_b = Array.length b in
  let rec aux k =
    k < n_b && (b.(k) = n_m || aux (k+1))
  in aux 0
```

□ **3.3.** Le coût de cette fonction, tant temporel que spatial, est $O(|m| + |s|)$.

Question 4. u et v sont conjugués si et seulement si $|u| = |v|$ et si u est facteur de vv. Ce qui permet d'écrire la fonction `conjugue` suivante.

```
let conjugue u v =
  (String.length u = String.length v) && kmp u (v ^ v)
```

Question 5. Si u s'écrit $v_1 w w v_2$ alors w est un bord de $w v_2 v_1 w$. Or ce dernier mot est un conjugué de u. Donc u possède un facteur carré si et seulement si u possède un conjugué à bord non vide.

```
let carre u =
  let n = String.length u in
  let rec aux k =
    let b = bord ((String.sub u k (n-k)) ^ (String.sub u 0 k))
    in (b.(n) <> 0) || ((k < n) && aux (k+1))
  in aux 1
```

Question 6.
□ **6.1.** Soit $u = vw$ avec $v \neq \varepsilon$. Supposons que v soit période de u. Alors il existe $n \geqslant 1$ tel que u soit préfixe de v^n. Par conséquent, w est préfixe de v^{n-1} et wv est préfixe de v^n. Puisque $|wv| = |u|$, on en déduit que $u = wv$. Donc le mot w est un bord de u.
Réciproquement, si w est un bord de u, il existe v' tel que $u = vw$ et $u = wv'$. Soit n un entier tel que $|v^n| \geqslant |u|$. On a $v^n w = v^{n-1} w v' = \cdots = v w v'^{n-1} = u v'^{n-1}$. Par choix de n, il résulte que u est préfixe de v^n et donc que v est période de u.
□ **6.2.**

```
let periode u =
  let n = String.length u in
  let b = bord u in
  String.sub u 0 (n - b.(n))
```

Question 7. Soit $x \in \Sigma$ une lettre non présente dans un mot u. Soit le mot $m = ux\overline{u}$ où $\overline{u}$ est l'image miroir de u. Si v est préfixe de u, alors $u = vw$ et $m = vwx\overline{w}\overline{v}$. Donc v est un palindrome si et seulement si v est un bord de m.
La fonction `bord` permet de calculer le bord maximal $\beta(m)$ de m et donc de déterminer le plus grand des préfixes de u qui soit un palindrome. Les autres préfixes sont les autres bords de m ; à savoir $\beta^2(m), \beta^3(m), \cdots$ que l'on détermine à l'aide du tableau des bords.

```
let miroir u =
  let n = String.length u in
  let v = create_string n in
  for k = 0 to n-1 do v.[k] <- u.[n-1-k] done ;
  v

let rec prefixe_palindrome u =
  let n = String.length u in
  let b = bord (u ^ "@" ^ (miroir u)) in
  let rec aux k = match b.(k) with
    | 0 -> []
    | j -> (String.sub u 0 j)::(aux j)
  in aux (2*n+1)
```