1. **Banque CCINP 2024 : 85** Formule de Taylor-polynômes
2. **Banque CCINP 2024 : 86** Petit théorème de Fermat
3. **Banque CCINP 2024 : 94** congruences, jadis un problème de pirates...
4. **[Classique, culture Math]**
   On note φ l'indicatrice d'Euler : Pour tout $n \geq 2$, $\varphi[n] = \text{card}\,\{k \in [\![1, n]\!]/k \wedge n = 1\} = \text{card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$.
   Soit $n \geq 2$. Pour tout diviseur d de n, On pose $E_d = \{k \in [\![1, n]\!]/k \wedge n = d\}$.
   (a) Déterminer le cardinal de E_d
   (indication : On montrera que $\text{card}(E_d) = \varphi(\frac{n}{d})$*).*
   (b) En déduire que $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$.
   (indication On pourra dénombrer les différents diviseurs de n en les regroupant par paquets.)
5. **[Centrale, CCINP]**
   Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ et $a \in \mathbb{C}$ une racine de P.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^{2^n} est racine de P.
   (b) En déduire que a est nul ou de module 1.
   (c) Montrer que l'on a aussi $a = -1$ ou $|a + 1| = 1$.
   (d) Déterminer alors tous les polynômes vérifiant cette relation.
6. **[CCINP, Centrale]**
   (a) Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dans $GL_2(\mathbb{Z})$ (ie à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et inversible) si et seulement si son déterminant vaut 1 ou -1.
   (b) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer l'ordre de A, l'ordre de B, l'ordre de AB.
   (c) Soit $[G, .)$ un groupe commutatif , x un élément d'ordre fini $p \in \mathbb{N}^*$ et y un autre élément d'ordre fini $q \in \mathbb{N}^*$.
   Que peut-on dire de l'ordre de xy ?
7. **[CCINP]**
   Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe G'.
   Montrer que si x est d'ordre fini n dans G, alors $f(x)$ est d'ordre fini (dans G') divisant n.
   Trouver tout les morphismes du groupe $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.
   Puis ceux de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
8. **[Mines Ponts]** *nombre de diviseurs d'un entier*
   Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre des diviseurs de n. On pose $D_n = d_1 + \cdots + d_n$.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ou $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon. Exprimer $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ en fonction de n, de i et de la partie entière.
   (b) Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$.
   (c) Montrer que $D_n \sim n \ln n$.
9. **[Centrale, Mines]** (utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.)
   (a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'il existe Q et R dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $P(X) = XQ(X^2) + R(X^2)$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Si $\sqrt{2}$ est racine de P de multiplicité m, montrer que $-\sqrt{2}$ est racine de P de multiplicité m.