1. *Équations d'Euler*

   Une équation d'Euler est une équation linéaire du deuxième ordre de la forme :

   $$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = c(t)$$

   où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes.

   Une méthode pour résoudre ce type d'équation sur $]0, +\infty[$ consiste à :
   — trouver des fonctions solutions de l'équation homogène associée de la forme $t \to t^r$ ;
   — appliquer la méthode de variation de la constante (ou des constantes) pour résoudre l'équation avec second membre.

   Résoudre les équations différentielles :

   **(a)** $t^2y'' + 4ty' + 2y = 2\ln^2 t + 12t$.

   **(b)** $t^3y'' + 3t^2y' + ty = 6\ln t$.

   **(c)** $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^4 \cos t - 1$.

2. *Changement de fonctions inconnues*

   Pour résoudre des équations linéaires du second ordre, on peut, si l'on a trouvé une solution de l'équation homogène, effectuer un changement de fonction inconnue en posant $x = yu_0$ où $y$ est la nouvelle fonction inconnue et $u_o$ une solution de l'équation homogène.

   Traiter les divers exemples en tenant compte de l'indication :

   **(a)** $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \to e^{\alpha x}$.

   **(b)** Résoudre : $xy'' + 2y' + xy = 0$ et $xy'' + 2y' + xy = f$ où $f$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pourra poser $z = xy$ et déterminer la fonction inconnue $z$.

3. *Changement de variables*

   Parfois, on peut aussi simplifier les équations différentielles en effectuant un changement de variable. Voyons cela sur des exemples...

   **(a)** Soit l'équation différentielle
   $(H)\ :\ (1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$.
   On pose $x = \tan t$ et on cherche une équation satisfaite par la fonction $z$ définie par : "$z(t) = y(x)$" (ie $z(t) = y(\tan t)$ ou encore $z(\text{Arctan}x) = y(x)$).
   Montrer que $z$ est solution d'une EDLH du second ordre à coefficients constants.

   **(b)** même démarche avec
   $(1 + x^2)y'' + xy' + k^2y = 0$ avec $k > 0$. En posant $x = \text{sh}t$ (ie $z(t) = y(x)$).

4. *Changement de variables*

   On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

   $$x^2y" - 3xy' + 4y = 0. \quad (E)$$

   **(a)** Analyse : Soit $y$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.

   **i.** Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.

   **ii.** En déduire que $z$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans $(E)$).

   **iii.** Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

   **iv.** En déduire le portrait robot de $y$.

   **(b)** Synthèse : Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

**5.** *Variation de constantes*

Résoudre les équations différentielles :

**(a)** $y'' + y = \tan t$ **(b)** $y'' + y = \tan^2 t$

**6.** *Coefficient constants*

On considère l'équation différentielle : $y" - 4y' + 3y = te^t$ $(E)$

**(a)** L'écrire sous forme matricielle $X' = AX + B(t)$.

**(b)** résoudre le système homogène : $X' = AX$.
En déduire les solution de l'équation homogène $(E_0)$ associée à $(E)$.

**(c)** On note $z$ la solution de $(E_0)$ qui vaut $e$ en 1, on pose $y = kz$, où $k$ est une fonction réelle de classe $C^2$. Montrer que $y$ est solution de $(E)$ ssi $k$ est solution de $k' - 2k = te^t$.
Finir la résolution.

**7.** *Recollement de solutions*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**(a)** $E : (t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$

**(b)** $(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$
en commençant par rechercher les solutions polynomiales

**8.** *Recherche de solutions DSE*

On peut parfois tenter de trouver des solutions DSE d'une équation différentielle. On cherche à priori une solution sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On reporte dans l'équation et l'on obtient une relation de récurrence entre les $(a_n)$. On vérifie alors que une telle fonction admet un rayon strictement positif et l'on reconnaît éventuellement le DSE d'une fonction...

**(a)** Résoudre $y" + xy' + y = 0$.

**(b)** Résoudre $xy'' + 2y' - xy = 0$

**(c)** Résoudre $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

**(d)** Résoudre $(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y'(t) = 0$.

**(e)** Résoudre l'équation différentielle $tx'' + 2x' - tx = 0$.
Trouver une solution DSE puis utiliser la variation de la constante.

**(f)** Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 3x \cos x^{3/2}$.

**(g)** Donner la solution sur $\mathbb{R}$ DSE de l'équation d'Airy : $y'' + xy = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

**9.** *Équations de Bernoulli et Riccatti*

**(a)** Équation de Bernoulli

**i.** Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se raméne à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

**ii.** Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

**(b)** Équation de Riccati

**i.** Montrer que si $y_0$ est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

**ii.** Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

**(c)** Autre exemple

Résoudre l'équation dite « de Bernoulli » $xy' + y = (1 - x^2)y^2$ à l'aide du changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ (on cherche seulement des solutions ne s'annulant pas).

**10.** Résoudre l'équation $(E)$ : $4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que $(E)$ admet deux solutions $y$ et $z$ telles que $yz \equiv 1$.

**11.** Soit $\lambda > 0$ et $y$ une solution de l'équation différentielle $y'' + (1 + \frac{\lambda}{t^2})y = 0$.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $y$ s'annule en un point de l'intervalle $]a, a + \pi[$.

Indication : Etudier le wronskien de $y$ et $\varphi$ où $\varphi$ est définie par : $\varphi(t) = \sin(t - a)$.

**12.** *Solution qui s'annule*

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. On se propose de démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $f$ est une solution ne s'annulant pas.

**(a)** Justifier que $f$ est de signe constant. Dans la suite, quitte à changer $f$ en $-f$, on supposera $f > 0$.

**(b)** Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Justifier que la courbe représentative de $f$ est en-dessous de sa tangente en $(a, f(a))$.

**(c)** En déduire que $f'(a) = 0$.

**(d)** Conclure.

**13.** Solutions bornées

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation $y'' + f(t)y = 0$.

(a) Soit $y$ une solution bornée de l'équation. Montrer que $y'$ tend vers 0 en $+\infty$.

(b) Soit $y_1$, $y_2$ deux solutions. Montrer que leur déterminant wronskien $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ est constant.

(c) En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

**14.** Nombre fini de zéros

On considère l'équation différentielle $y''(t) + b(t)y(t) = 0$ où $b$ désigne une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $y$ une solution non identiquement nulle de cette équation et on souhaite démontrer que, pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, le nombre de zéros de $y$ dans $[\alpha, \beta]$ est fini. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution $y$ qui possède un nombre infini de zéros dans $[\alpha, \beta]$.

(a) Démontrer qu'il existe dans $[\alpha, \beta]$ une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de $y$ deux à deux distincts convergeant vers un réel $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

(b) Démontrer que $y(\gamma) = 0$.

(c) Démontrer que, à partir d'un certain rang, le quotient $T_n = \dfrac{y(z_n) - y(\gamma)}{z_n - \gamma}$ est bien défini et que $y'(\gamma) = 0$.

(d) En déduire que la solution $y$ est nécessairement identiquement nulle et conclure.