1. **Banque CCINP 2024 :** 8 (facile, classique, cours)
2. **Banque CCINP 2024 :** 9 ou 11 (cours, non convergence uniforme)
3. **Banque CCINP 2024 :** 16
4. **Officiel de la Taupe 2019 :** 207 I (CCP)
   On pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.
   Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.
   Montrer que (f'_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.
5. **[CCP PSI 2019]** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.
   (a) Pour quelles valeurs de x la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle ?
   (b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?
   (c) Déterminer le domaine de définition D de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Y a-t-il convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ pour $x \in D$?
   (d) Y a-t-il convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur D ?
   (e) Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $I_a = \mathbb{R} \setminus [-a; a]$.
6. **Officiel de la Taupe 2019 :** 85 II (Mines)
   Montrer que la fonction définie par $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Étudier F, en donner un équivalent en 0 (on pourra utiliser $F(x+1) - F(x)$), et un équivalent en $+\infty$.
7. **[Mines Ponts]** *fonction ψ, dérivée logarithmique de Γ.*
   On pose, pour $x > -1$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\Big)$.
   (a) Montrer que S est définie et continue sur $]-1; +\infty[$. Étudier sa monotonie.
   (b) Pour $x > -1$, calculer $S(x+1) - S(x)$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers -1^+.
   (c) Montrer que S est C^1 sur $]-1; +\infty[$ et calculer sa valeur en 1.
8. **[Centrale]** On pose $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+n^2x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de S.
   (b) Justifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.
   (d) Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.
   (e) Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.
9. **[Centrale]** *fonctions quasi additives*
   (a) Déterminer les $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x+y) = h(x) + h(y)$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\exists M > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant M$.
   On pose $g_n : x \mapsto f(2^n x)/2^n$. Étudier la convergence de la série de terme général $g_{n+1} - g_n$. En déduire que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application linéaire h. Que peut-on en déduire pour f ?
10. **[tout concours]**.
    Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi : I = [-a; a] \to \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant c|x|$.
    On cherche les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues telles que (P) : $f(0) = 0$ et $\forall x \in I,\ f(x) - f\Big(\frac{x}{2}\Big) = \varphi(x)$.
    (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$ est continue sur I.
    (b) Montrer que S est solution de (P).
    (c) Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.
    (d) En déduire l'ensemble des solutions de (P).
    (e) Si on suppose φ de classe C^1 sur I, montrer que S est aussi de classe C^1 sur I.