

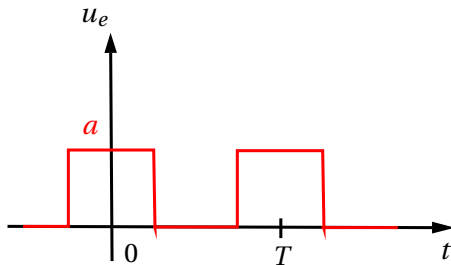
TD n°1 Electrocinétique: Signaux périodiques - effet des filtres

Signaux périodiques - Effet des filtres

EXERCICE N°1: Calibrage d'un filtre passe-bas

On cherche dans cet exercice à réaliser un filtre passe-bas du second ordre de fréquence de coupure $f_0 = 2 \text{ kHz}$ et de facteur de qualité $Q = 10$.

- Proposer un montage passif permettant de réaliser ce filtre. Préciser un jeu de valeurs caractéristiques des composants utilisés compatible avec le cahier des charges du filtre.
- Tracer la réponse en gain de ce filtre $G_{dB} = f(\log_{10} f)$ avec G_{dB} le gain en décibel et f la fréquence en Hz .
- On envoie en entrée un signal créneau de fréquence $f = 2 \text{ kHz}$ (de rapport cyclique $\alpha = \frac{1}{2}$) représenté ci-dessous:



On rappelle la décomposition de Fourier d'un tel signal:

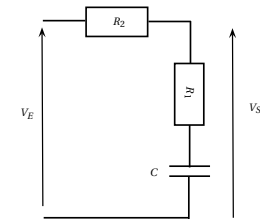
$$u_e(t) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \dots \right)$$

En déduire le signal de sortie du filtre.

EXERCICE N°2:

Analyses spectrale et temporelle de la réponse d'un filtre

On considère le circuit représenté sur la figure ci-contre, composé d'un condensateur de capacité $C = 10 \text{ nF}$ et de deux résistances $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$.



- Déterminer le rapport d'amplitude $\left| \frac{V_S}{V_E} \right|$ à basses fréquence et haute fréquence en raisonnant directement sur le schéma.
- Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{V_S}{V_E}$ sous la forme $H(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$
- Donner le diagramme de Bode asymptotique en amplitude à partir de deux fonctions de transfert du 1^{er} ordre que l'on indiquera.
- Déterminer la pulsation de coupure à -3 dB .
- Donner l'équation différentielle de $V_S(t)$ en fonction de $V_E(t)$.
- On place un signal d'entrée $V_E(t) = A \cdot \cos^2(\omega t)$ avec $A = 1 \text{ V}$ et $\omega = 5.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$. Déterminer le signal de sortie.
- On place maintenant en entrée un échelon de tension unitaire à $t = 0$:

$$V_E(t > 0) = A$$

On précise que toutes les tensions étaient nulles avant $t = 0$, et que le condensateur était déchargé.

Déterminer le signal de sortie. Tracer l'allure de $V_S(t)$.

EXERCICE N°3: Filtrage fréquentiel

On considère un signal triangulaire périodique $e(t)$ de fréquence $f_0 = 50 \text{ Hz}$ (pulsation fondamentale notée ω_0) dont on donne la décomposition en série de Fourier:

$$e(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos[(2p+1)\omega_0 t]$$

Ce signal traverse un filtre linéaire dont la fonction de transfert est:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

- ❶ Quelle est la nature du filtre exploité ici?
- ❷ On ne se préoccupe pas du déphasage introduit par le filtre. On cherche à obtenir une atténuation de moitié de la puissance de l'harmonique de rang 5. Quelle fréquence de coupure ω_C du filtre doit-on choisir? Quelle est alors l'atténuation sur la puissance:

- du fondamental?
- de l'harmonique de rang 3?
- de l'harmonique de rang 7?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique de rang 7 par rapport à celle du fondamental après filtrage?

- ❸ L'atténuation de cet harmonique n'est pas suffisante. On se propose alors de "cascader" 3 filtres identiques ayant la même fréquence de coupure.

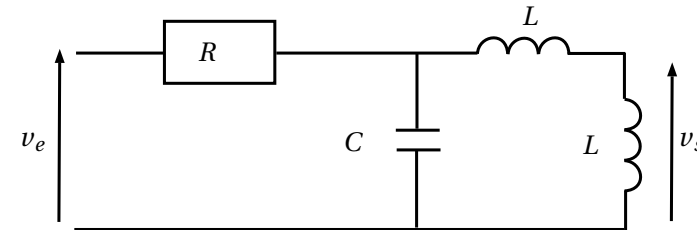
- a. Déterminer la fonction de transfert du filtre résultant de cette association. Quelle hypothèse doit on faire sur les caractéristiques d'entrée du filtre?
- b. Quelle est alors l'atténuation sur la puissance:
 - du fondamental?
 - de l'harmonique de rang 3?

- de l'harmonique de rang 5?
- de l'harmonique de rang 7?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ? Quelle est l'atténuation en dB par décade de ce filtre?

EXERCICE N°4: Réponse d'un filtre à un signal créneau

On considère le montage suivant:

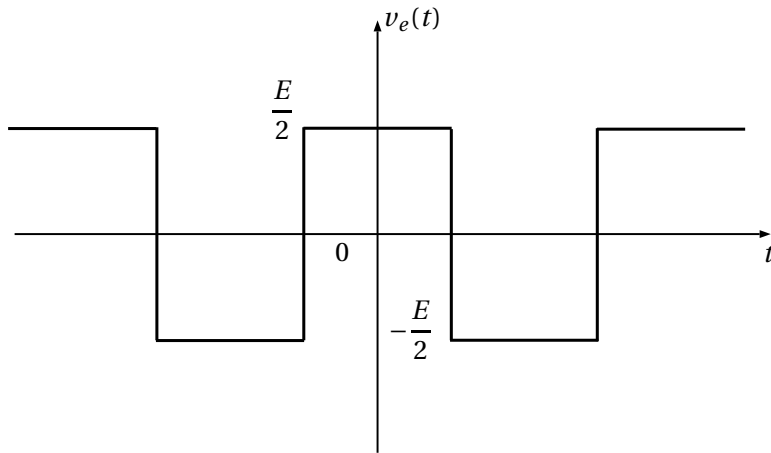


- ❶ Montrer que la fonction de transfert complexe du filtre peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On choisit les composants de façon à avoir $f_0 = 500 \text{ Hz}$ et $Q = 50$. Le montage peut-il se comporter en intégrateur ou en dérivateur? Rappeler la largeur de la bande passante à -3 dB .

- ❷ On envoie à l'entrée un signal créneau de fréquence $f = 500 \text{ Hz}$ représenté ci-dessous:



On donne sa décomposition en série de Fourier:

$$v_e(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \dots \right)$$

Déterminer le signal de sortie $v_s(t)$.

EXERCICE N°5: Détermination des caractéristiques d'un filtre par exploitation d'oscillogrammes

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore, on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension v_e , puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e , de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée. On note v_s la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques H_0 , Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences. On rappelle la décomposition en série de Fourier

$$v_e(t) = V_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega_1 t]}{2k+1} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- Première expérience (oscillogramme de la figure 1):
- voies 1 et 2 en position DC - base de temps à $50\mu s/div$ - sensibilités à $0,5 V/div$ en voie 1 et $2 V/div$ en voie 2
Dans cette expérience: la tension V_s obtenue est quasisinusoïdale et si on augmente ou diminue la fréquence de T par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de V_s diminue.
- Seconde expérience (oscillogramme de la figure 2):
- voies 1 et 2 en position DC - base de temps à $5\mu s/div$ - sensibilités à $2 V/div$ en voie 1 et $0,2 V/div$ en voie 2

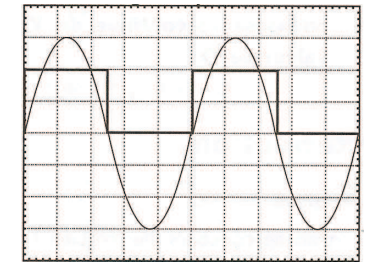


Figure 1

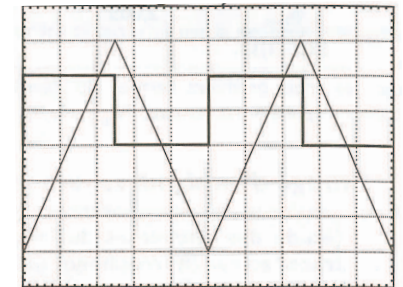


Figure 2

- ❶ Pourquoi dans chaque expérience, la tension V_s de sortie ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée V_e ?
- ❷ Première expérience: pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie V_s quasisinusoïdale alors que la tension v_e est rectangulaire?
- ❸ Dédurre de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne: la pulsation ω_0 et la valeur de H_0 .
- ❹ Dans la deuxième expérience, V_s est triangulaire alors que V_e est rectangulaire. Le filtre a donc un comportement intégrateur.
 - a. Donner l'expression approchée de $H(j\omega)$ dans le domaine de fréquences correspondant à la deuxième expérience.
 - b. En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer en

justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $\frac{H_0\omega_0}{Q}$ (on se souviendra que la composante continue n'est pas intégrée). En déduire la valeur de Q .

EXERCICE N°6: Effet flanger (ou chorus)

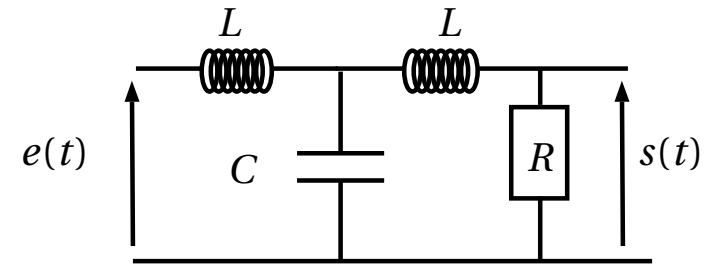
Le flanger ou chorus est un effet audio disponible sur nombre de claviers numériques ou amplificateurs musicaux et dont l'objectif est de retrouver l'effet produit par un chœur de chanteurs ou de plusieurs instruments jouant la même note. Le principe consiste à additionner au signal initial $e(t)$ le même signal mais retardé d'un délai τ . L'opération mathématique réalisée est donc:

$$s(t) = e(t) + e(t - \tau)$$



- ❶ Etablir la fonction de transfert d'un circuit réalisant cette opération.
- ❷ En déduire la courbe de réponse en gain.
- ❸ Un tel circuit peut-il être assemblé à l'aide des trois catégories classiques de composants discrets: résistors, bobines, et condensateurs?
- ❹ L'addition de deux signaux étant facile à réaliser avec un simple A.L.I. (ce qui sera vu en TP cette année), on concentrera nos efforts sur le principe de fabrication d'un circuit réalisant une fonction retard, c'est à dire associant

au signal d'entrée $e(t)$ un signal de sortie $e(t - \tau)$. On propose pour cela le circuit suivant dans lequel on choisit la résistance R telle $R = \sqrt{2\frac{L}{C}}$:



On souhaite réaliser de manière approchée un retard de $\tau = 1 \text{ ms}$ dans le domaine des basses fréquences pour lequel $\omega \ll \frac{1}{\tau}$.

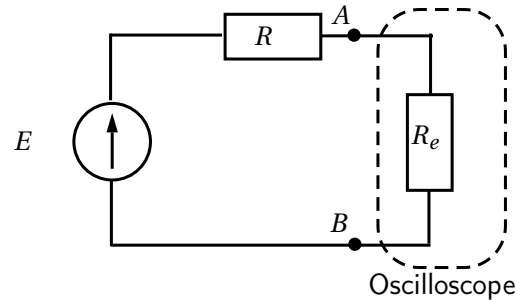
Proposer alors des valeurs pour L et C . Un tel filtre à retard est-il pratiquement exploitable en musique? Justifier.

_____ Exercice(s) à caractère expérimental - application de la méthode de Monte-Carlo _____

EXERCICE N°7: Influence de la résistance d'entrée d'un oscilloscope

Lorsque l'on utilise un oscilloscope pour visualiser une tension entre deux points A et B dans un circuit, on admet dans la majorité des cas que celui-ci ne perturbe pas le régime de fonctionnement du circuit. Cependant, pour s'assurer que les effets de l'oscilloscope sont effectivement négligeable, on doit veiller à ce que la résistance d'entrée R_e de l'oscilloscope soit très supérieure au module de l'impédance équivalente entre les deux points.

On se limite dans cet exercice à la seule présence de dipôle purement résistif entre les points A et B du circuit. On cherche dans un premier temps à mesurer la résistance R_e à l'aide d'une résistance variable R . On réalise le montage suivant où la source idéale de tension délivre une tension constante E :



On branche dans un premier temps l'oscilloscope à la source (sans la résistance R) et l'on mesure alors une tension notée U_1 . Dans un second temps, on ajoute en série la résistance R (cf schéma), et la tension mesurée est notée U_2 .

- ❶ Déterminer les expressions théoriques de U_1 et U_2 en fonction de E , R , et R_e ? Comment déterminer alors la valeur expérimentale $R_{e_{exp}}$ de R_e ?

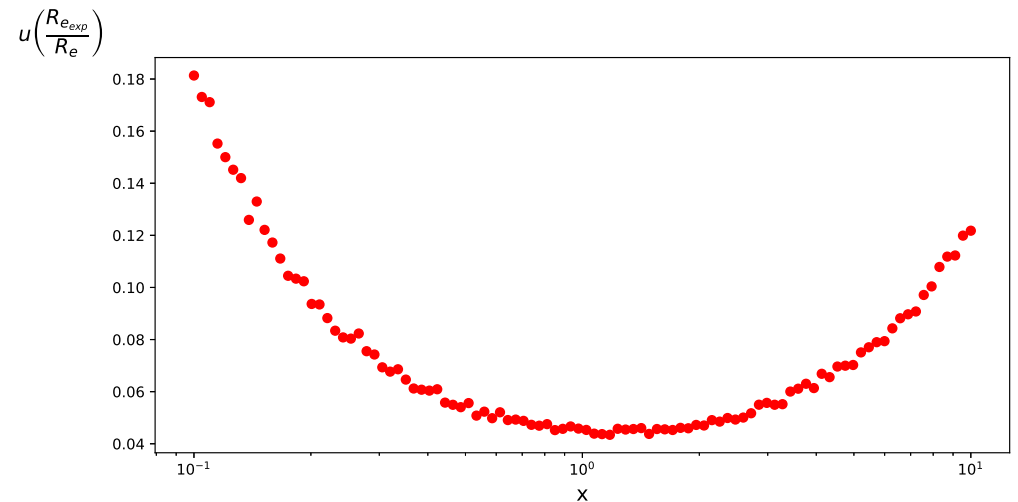
En théorie, la qualité de cette méthode est indépendante de la valeur de la résistance R . En pratique, ce n'est pas le cas car on doit tenir compte des incertitudes. On posera comme hypothèses une incertitude nulle sur R et une distribution gaussienne des valeurs de U_1 et U_2 autour de la valeur théorique avec un écart-type de $\sigma = \alpha \cdot E$.

Notons $R = x \cdot R_e$. On va chercher à savoir quelle(s) valeur(s) de x permet(tent) de minimiser l'incertitude sur la valeur estimée de R_e en utilisant la méthode de Monte-Carlo; on donne ci-dessous le graphe de l'incertitude-type relative (estimateur de l'écart-type divisé par la valeur théorique) de R_e en fonction de x tirée de la simulation Monte-Carlo dont on donne le code incomplet:

Listing 1: Méthode de Monte-Carlo

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 ##### Données numériques #####
5 N=int(1000)
6 E=1.00
7 alpha=0.01
8 n=100
9
10 ##### Construction des tableaux de tirages #####
11 X=np.exp(np.linspace(np.log(0.1), np.log(10), n)) # on constitue le tableau
```

```
12 Tabcarttype=[]
13 for x in ----A COMPLETER----: # on itère sur toutes les valeurs de x
14     tabRe= ----A COMPLETER---- # on réalise le tirage de 1000 valeurs pour x fixé
15     Tabcarttype.append(----A COMPLETER----) # on constitue le tableau des écarts
16     -type
17 ##### Tracé #####
18 plt.figure("Tracé de la résistance d'entrée")
19 plt.plot(X, Tabcarttype, 'o', color="orange")
20 plt.xscale('log')
21 plt.show()
22 plt.xlabel("x", color="r", fontsize=14)
23 plt.ylabel(r"$u\left(\frac{R_{e_{exp}}}{R_e}\right)$", color="r", fontsize=14,
24            rotation=0, loc="top")
```



- ❷ Compléter le code Python précédent, et le lancer afin d'obtenir la courbe $\frac{R_{e_{exp}}}{R_e} = f(x)$.
- ❸ Compte tenu de l'expression de $R_{e_{exp}}$ dégagée en 1., expliquer qualitativement les tendances de la courbe obtenue.
Un protocole répandu de mesure de R_e est la méthode dite "de la tension moitié": on augmente progressivement de R jusqu'à ce que la tension mesurée à l'oscilloscope chute de moitié par rapport à la tension mesurée sans la résistance R .
- ❹ Dans ce cas, que vaut R_e ? Ce choix de la tension moitié vous semble-t-il pertinent compte tenu des résultats de la simulation de Monte-Carlo?

Non linéarité - introduction/suppression d'harmoniques

EXERCICE N°8: Linéarité et non linéarité des filtres

On envoie en entrée de différents filtres le signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté en figure ci-contre.

On note la fréquence réduite $x = \frac{f}{f_0}$ avec $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

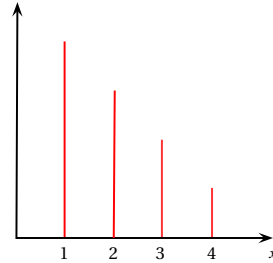


Figure 1: Spectre du signal $e(t)$

On obtient en sortie des filtres (1), (2), et (3) un signal $s(t)$ dont les spectres en amplitude sont donnés en figures ci-dessous.

- ❶ Quel est (ou quels sont) le(s) filtre(s) non linéaire(s)?
- ❷ Caractériser les filtres linéaires et donner un ordre de grandeur de leur fréquence de coupure.

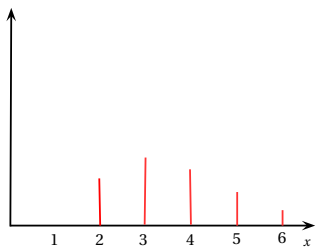


Figure 2: spectre de sortie (1)

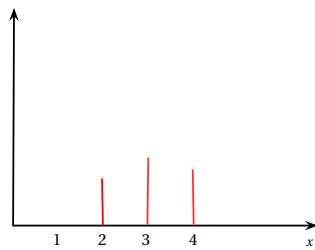


Figure 3: Spectre de sortie (2)

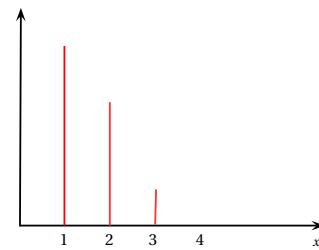


Figure 4: Spectre de sortie (3)

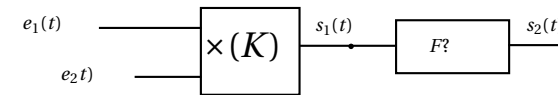
EXERCICE N°9:

Radar de police



Cet exercice propose une étude du principe général de fonctionnement des radars de vitesse analogiques des forces de l'ordre.

Le dispositif se compose d'abord d'un multiplieur, puis d'un filtre linéaire passif F dont nous chercherons à déterminer les caractéristiques.



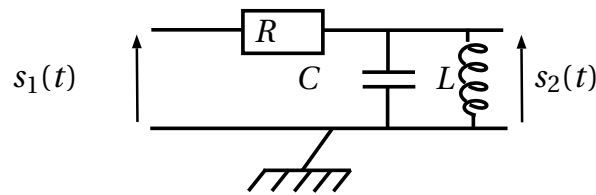
Les entrées du radar reçoivent respectivement $e_1(t) = E_{01} \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$, signal sinusoïdal de même fréquence f_1 que l'onde électromagnétique émise par le radar, et $e_2(t) = E_{02} \cdot \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$ signal sinusoïdal de même fréquence f_2 que l'onde reçue après réflexion par le véhicule contrôlé. Si v est la vitesse du véhicule et c la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, alors l'effet Doppler entraîne un "décalage" de f_2 par rapport à f_1 avec, si le véhicule contrôlé s'éloigne du radar (contrôle par l'arrière):

$$f_2 = f_1 \left(1 - 2 \frac{v}{c}\right) < f_1$$

Ainsi, la mesure de $f_1 - f_2 = 2f_1 \frac{v}{c}$ permet de remonter à la vitesse du véhicule.

- ❶ Représenter l'allure des spectres de $e_1(t)$, $e_2(t)$, et $s(t)$. Quelle peut-être alors la nature du filtre F ? Proposer une fonction de transfert "générique" $H(jf)$ pour ce dernier, faisant apparaître une fréquence caractéristique f_0 ainsi que le facteur de qualité Q du filtre.

- ② Dans le montage ci-dessous, l'inductance L a une valeur fixe, mais le conducteur ohmique et le condensateur ont des valeurs de résistance R et capacité C ajustables:



Ce circuit est-il compatible avec le filtre F que vous avez proposé en 1.? Identifier alors les expressions de Q et f_0 dont on donnera les expressions en fonction de R , L , et C .

- ③ Le radar émet une onde électromagnétique de fréquence $f_1 = 24,150 \text{ GHz}$ (bande K assignée aux radars). La vitesse du véhicule est $v = 90 \text{ km.h}^{-1}$ et $L = 2 \text{ mH}$. Sachant que pour le filtre exploité, la largeur de la bande passante Δf est liée à f_0 et Q par $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$, déterminer numériquement:
- $f_1 - f_2$
 - les valeurs de R et C pour que l'incertitude relative sur la vitesse soit au plus de 5%. **Détailler la démarche.**

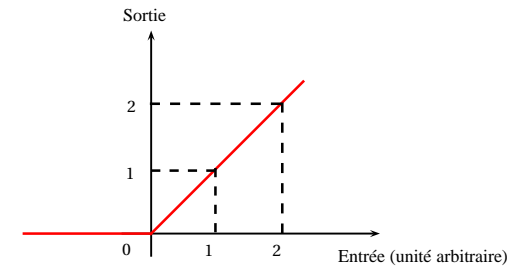
EXERCICE N°10: Détection de signaux micro-ondes (exercice délicat)

Un signal reçu par une antenne dans le domaine hyperfréquence est assimilé à une onde sinusoïdale d'amplitude A et de fréquence f . On désire déterminer son amplitude, qui est supposée contenir l'information utile, en sachant que la phase à l'origine n'est pas stable, ce qui empêche de recourir aux procédés usuels (détection synchrone, cf futur TP)

① Insuffisance d'un simple procédé de filtrage

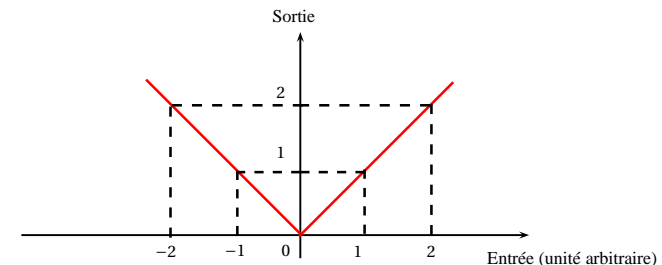
- L'utilisation d'un filtre moyennneur, de type passe-bas, appliqué au signal reçu, suffit-elle?
- Montrer par un examen de l'aspect spectral, qu'il est vain de chercher à effectuer la détection par simple filtrage.

- ② On utilise un composant à base de diode (jonctions semi-conductrices) réalisant un opérateur dont la relation entrée-sortie est donnée en figure ci-dessous:



- Représenter sur un même graphe le signal d'entrée et le signal de sortie, en considérant la phase à l'origine du signal reçu comme une constante, de valeur quelconque (on omet ses fluctuations)
- Justifier le qualitatif de redresseur donné à l'opérateur.
- Déterminer les fréquences des 3 premières raies spectrales du signal sortant de l'opérateur.
- Quel type de filtre permet, à partir du signal de sortie, de récupérer un signal constant D , dont la valeur est proportionnelle à A ? Préciser la constante de proportionnalité $\frac{D}{A}$ caractérisant la sensibilité du détecteur, en considérant que le gain du filtre est égal à l'unité pour la composante utile.

- ③ On préfère généralement utiliser un autre opérateur, appelé redresseur bi-alternance, dont la caractéristique est donnée ci-dessous.



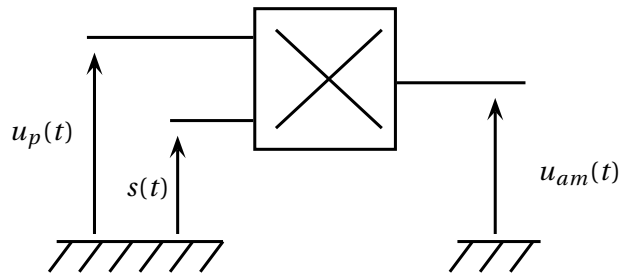
- Les raies spectrales du signal obtenu sont-elles situées aux mêmes fréquences que celles obtenues précédemment?
- On place un filtre de même type que celui proposé ci-dessus, indiquer

quels avantages l'opérateur redresseur bi-alternance procure par rapport au redresseur simple.

- c. Préciser la nouvelle constante de proportionnalité $\frac{D'}{A}$, où D est la valeur du signal sortant du filtre.

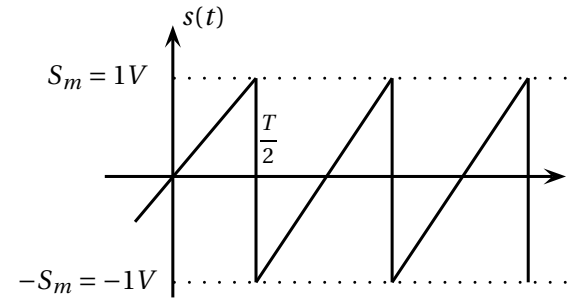
EXERCICE N°11: Analyse spectrale d'une modulation

La transmission hertzienne des signaux, de nature analogique comme numérique, nécessite pour des raisons physiques de transmettre ces derniers en haute fréquence. Pour cela, on a recours au principe de modulation (modulation d'amplitude dans le cas présent (cf TP n°7)), opération réalisée dans cet exercice par un multiplieur (cf schéma ci-dessous).



Le signal BF à transmettre $s(t)$ est un signal de fréquence 1 kHz de type dent de scie, tandis que le signal HF dit de porteuse $u_p(t) = U_p \cos \omega_p t$ est de fréquence $f_p = 100\text{ kHz}$. La valeur maximale de cette tension est de $U_p = 3\text{ V}$. L'opération de multiplication réalisée par l'opérateur est telle que:

$$u_{AM} = [k \cdot s(t) + 1] \times u_p(t) \quad \text{avec } k = 0,67\text{ V}^{-1}$$



- ❶ Représenter l'allure du signal modulé en amplitude $u_{AM}(t)$.

❷ ANALYSE SPECTRALE

- a. Montrer que la série de Fourier du signal $s(t)$ peut s'écrire:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

- b. Montrer que $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2S_m}{n\pi}$
- c. Les bandes passantes des composants qui constituent les circuits de transmission sont limitées. On s'intéresse uniquement aux harmoniques de $s(t)$ dont l'amplitude est supérieure ou égale au cinquième de celle du fondamental. Quel est le nombre d'harmoniques nécessaires pour décrire le signal $s(t)$? Donner alors l'expression approchée de $s(t)$.
- d. Représenter l'allure du spectre du signal.
- e. Quelle est la bande de fréquence, Δf , occupée par le signal modulé en amplitude $u_{AM}(t)$?

❸ CALCUL DE LA PUISSANCE MOYENNE

- a. En l'absence de signal modulant à l'entrée du multiplieur, calculer la puissance moyenne P_0 que dissiperait $u_{AM}(t)$ aux bornes d'une résistance R .
- b. On applique maintenant le signal modulant $s(t)$, calculer la puissance moyenne P que dissiperait $u_{AM}(t)$ toujours aux bornes d'une résistance R . On exploitera la décomposition spectrale effectuée à la question précédente.
- c. En déduire la valeur du rapport $\frac{P_0}{P}$. Conclusion.