1. **Banque CCINP 2024 : 67**
2. **Banque CCINP 2024 : 69**
3. **Banque CCINP 2024 : 70**
4. **Banque CCINP 2024 : 71**
5. **[CCINP] (pratique et calculs)**
   Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2-a & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.
6. **[Centrale]** On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la colonne j est composée de nombres tous égaux à j, sauf le coefficient sur la diagonale valant 0.
   (a) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\lambda + k} = 1$.
   (b) En déduire que la matrice A est diagonalisable et déterminer un équivalent de la plus grande valeur propre λ_n de A lorsque n tend vers $+\infty$.
7. **[tous]** Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$, $(u, v) \in \mathcal{M}(E)$, u avec n valeurs propres distinctes et $v \circ u = u \circ v$.
   (a) Montrer que v est diagonalisable.
   (b) Montrer que $v \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id_E}, \mathrm{u}, \cdots, \mathrm{u^{n-1}})$.
   (c) En déduire $\dim(C_u)$ où C_u est le commutant de u : $C_u = \{f \in \mathcal{M}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$.
8. **[Mines]** Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et son polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M),\ |\lambda| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$.
9. **[Mines]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.
   (a) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
   (b) Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.
10. **[tous]**
    Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ m_{i,j} = a^{i-j}$.
    (a) La matrice M est-elle diagonalisable ?
    (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
11. **[CCINP]** *diagonalisabilité d'une matrice compagne, diagonalisabilité d'une matrice de Frobenius*
    Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$ et C_P la matrice compagnon :
    $$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
    (a) Montrer que C_P est de rang n si $a_0 \neq 0$ et de rang $n-1$ si $a_0 = 0$.
    (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{rg}(C_P - \lambda I_n) \geqslant n - 1$. En déduire la dimension des sous-espaces propres de C_P.
    (c) Montrer que $\chi_{C_P} = P$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.
    (d) On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$. Si $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k^q)^{m_k}$ est dans $\mathbb{Z}[X]$.