B - Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

— *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
— *introduire la notion de développement d'une fonction en série entière ;*
— *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions , introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ». Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle , complexe. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans l'ensemble $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Intervalle ouvert de convergence.	
Si $a_n = O(b_n)$, et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}?\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence . Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème D'Abel radial : Si $\sum a_n^n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R, R[$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$.	
Développement usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

♣♢♡♠