1. Etudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 \mathrm{e}^{-nx}}{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$$

2. Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0, 1/n] \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Etudier la limite simple de la suite (f_n).
b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?
c) Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

3. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.
a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
b) Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0, \pi/2]$.

4. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

5. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Étudier la suite de fonction (f_n') sur $\mathbb{R}$.

6. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

7. Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

8. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

9. Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1[$.
Montrer que la suite (f_n) convergence uniformément sur $[0, 1]$.

10. a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
c) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\mathrm{d}x$$

11. On pose, pour $x \geq 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1 + x)^{1+1/p}}$$

Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^\star}$.

12. Etudier la convergence simple, uniforme sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$$

13. * On définit (f_n) suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

(a) Justifier que cette suite est bien définie.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

(d) En utilisant encore ce qui précède, montrer que pour $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

(e) Etablir que (f_n) converge uniformément vers une fonction f non nulle vérifiant

$$f'(x) = f(x - x^2)$$

14. * On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geq 0$.

(a) Pour t fixé, justifier que la suite récurrente $u_n = f_n(t)$ converge.
(on pourra étudier une fonction auxiliaire.)

(b) Déterminer la limite simple, f des fonctions f_n.

(c) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

(d) Démontrer que : $\forall t > 0$, $|f_{n+1}(t) - f(t)| \leq \dfrac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.

(e) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$ (remarquer que $f_n - f$ est bornée pour $n \geq 1$).

15. * $(f(nx),\ f(x/n))$
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

(a) Donner un exemple de fonction f.

(b) Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, chercher $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

16. * On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continues.
On pose $\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$, pour toute $f \in E$.
On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Etudier la suite (f_n).

(b) Soit $f = \lim(f_n)$. Trouvez une équation différentielle dont f est solution.
Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?