DM6

Exercice 1

Question 1.
□ **1.1.** Déterminiser puis émonder, si nécessaire, l'automate représenté en bas de page.
□ **1.2.** Quelle expression régulière dénote le langage reconnu par cet automate ?

Question 2. On appelle *mot binaire* un mot sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ et *mot binaire normalisé* un mot binaire qui soit commence par 1, soit est exactement égal à 0.
□ **2.1.** Montrer que le langage $L_n = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, \dots\}$ des mots binaires normalisés est régulier en exhibant directement une expression régulière qui le dénote et montrer qu'il est reconnaissable en exhibant directement un automate fini qui le reconnaît.
□ **2.2.** On définit la valeur numérique d'un mot binaire $x_{n-1} \dots x_0$ comme $\sum_{n=0}^{n-1} x_i 2^i$ où x_i vaut 0 ou 1 et est numéroté à partir de 0 pour le chiffre le plus à droite. La valeur numérique du mot vide ε est 0. Parmi les langages suivants, certains sont réguliers. Dire lesquels et justifier brièvement pourquoi ils le sont. On ne demande pas de justifier pourquoi ceux qui ne sont pas réguliers ne le sont pas.
▷ **2.2.1.** Le langage L_a des mots binaires dont la valeur numérique est paire.
▷ **2.2.2.** Le langage L_b des mots binaires normalisés dont la valeur numérique est paire.
▷ **2.2.3.** Le langage L_c des mots binaires dont la valeur numérique est multiple de 3.
Indication : selon que n est congru à $0, 1$ ou 2 modulo 3, et selon que x vaut 0 ou 1, à quoi $2n + x \mod 3$ est-il congru ?
▷ **2.2.4.** Le langage L_d des mots binaires dont la valeur numérique est un nombre premier.
▷ **2.2.5.** Le langage L_e des mots binaires dont la valeur numérique est une puissance de 2, i.e. de la forme 2^i pour $i \in \mathbb{N}$.

Question 3. Soit $\Sigma = a$. Montrer que le langage $L = \{a^2, a^3, a^5, a^7, a^{11}, a^{13}, \dots\}$ constitué des mots ayant un nombre premier de a n'est pas régulier.

Exercice 2

On considère une matrice à m lignes et n colonnes dont les coefficients sont tous égaux à 0 ou 1. Les lignes et les colonnes sont respectivement numérotées de 0 à $m-1$ et de 0 à $n-1$. On cherche à déterminer la taille maximale k d'un carré de 1 dans A. Par exemple, la matrice A donnée en bas de page présente un carré de 1 de taille 4.

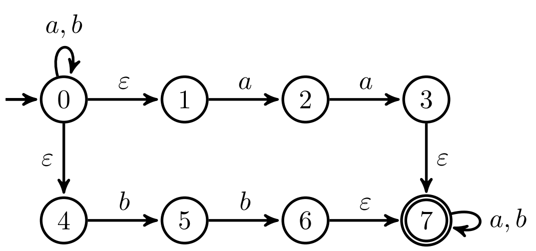
Question 1. Soit $i \in [\![0, m-1]\!]$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. On désigne par $t_{i,j}$ la taille maximale d'un carré de 1 dont le coin inférieur droit est situé à la ligne i et à la colonne j.
□ **1.1.** Si $A_{i,j} = 0$, que vaut $t_{i,j}$?
□ **1.2.** Si $A_{i,j} = 1$, montrer que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, m-1]\!] \times [\![1, n-1]\!] \qquad t_{i,j} = 1 + \min\left(t_{i-1,j}, t_{i,j-1}, t_{i-1,j-1}\right)$$

Question 2.
□ **2.1.** On adopte une *approche récursive simple*. Écrire une fonction récursive `square1` qui reçoit en argument un tableau `a` représentant une matrice et qui calcule la taille maximale d'un carré de `1`.
□ **2.2.** Justifier brièvement l'inefficacité d'une telle solution.

Question 3.
□ **3.1.** On adopte une approche par *mémoïsation*. Écrire une fonction `square2` qui reçoit en argument un tableau `a` représentant une matrice et qui calcule la taille maximale d'un carré de `1`.
□ **3.2.** Quel(s) avantage(s) cette approche présente-t-elle par rapport à la précédente ?

Question 4.
□ **4.1.** On adopte à présent une approche *bottom-up*. Écrire une fonction `square3` qui reçoit en argument un tableau `a` représentant une matrice et qui calcule la taille maximale d'un carré de `1`.
□ **4.2.** Discuter l'efficacité de cette dernière solution.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$