TD4 - Stabilité et lemme de l'étoile

Exercice 1

Question 1. Montrer que $L = \{y^2, y \in \{0,1\}^*\}$ n'est pas régulier.

Question 2. Montrer que $L = \{w \in \{0,1\}^*, w$ a autant de 0 que de $1\}$ n'est pas régulier.

Question 3. Montrer que $L = \{w \in \{0,1\}^*, w$ a moins de 0 que de $1\}$ n'est pas régulier.

Question 4. Montrer que $L = \{a^{2n}b^n, n \geqslant 0\}$ n'est pas régulier.

Question 5. Montrer que $L = \{a^p b^q, p \neq q\}$ n'est pas régulier.

Question 6. Montrer que $L = \{a^2, a^3, a^5, a^7, a^{11}, a^{13}, \dots\}$, langage des mots ayant un nombre premier de a, n'est pas régulier.

Exercice 2

Soit Σ un alphabet. Soit $u \in \Sigma^*$. On dit que v est un *préfixe propre* de u si et seulement s'il existe $w \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ tel que $u = v \cdot w$. Soit L un langage régulier. Montrer que $\min(L) = \{u \in L \mid u$ ne possède pas de préfixe propre dans $L\}$ est un langage régulier en exprimant $\min(L)$ en fonction de L et d'autres langages réguliers, et en utilisant les propriétés de stabilité des langages réguliers.

Exercice 3

Soit L un langage régulier sur un alphabet Σ. À partir d'un DFA $\mathcal{A}$ reconnaissant L, montrer que les langages suivants sont réguliers en construisant un DFA, NFA ou ε-NFA défini en fonction de $\mathcal{A}$.

Question 1. $\mathrm{mirror}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid w^R \in L\}$

Question 2. $\frac{1}{2}L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, (|u| = |v|) \wedge (u \cdot v \in L)\}$

Exercice 4

Un langage L est fini si et seulement s'il existe une borne finie sur la longueur de ses mots. L'algorithme suivant décide la finitude d'un langage régulier L sur un alphabet Σ en acceptant L si et seulement si ce dernier est fini.

1. Trouver un nombre n satisfaisant la condition du lemme de l'étoile.
2. Si pour tout $w \in \Sigma^*$ tel que $n \leqslant |w| \leqslant 2n-1$, on a $w \notin L$, alors L est accepté sinon L est rejeté.

Démontrer la validité de cet algorithme. Pour cela, on peut :

- démontrer que pour tout langage régulier L, le point 1 peut être satisfait ;
- démontrer la proposition suivante qui est implicitement contenue dans le point 2 de l'algorithme.
  Soit L un langage régulier et n un nombre satisfaisant la condition du lemme de l'étoile. Alors :

$$\exists w \in L : n \leqslant |w| \leqslant 2n-1 \Rightarrow L \textit{ infini} \quad (1)$$
$$\neg\exists w \in L : n \leqslant |w| \leqslant 2n-1 \Rightarrow L \textit{ fini} \quad (2)$$

Exercice 5

Dans cet exercice, Σ désigne l'alphabet $\{a, b\}$.
Si K et L deux langages sur un alphabet, leur *mélange*, noté $K \sqcup\!\sqcup L$, est le langage défini par :

$$\{u_0 v_0 u_1 v_1 \dots u_n v_n \mid u_0 \dots u_n \in K, v_0 \dots v_n \in L\}$$

Question 1. Montrer que si L et K sont réguliers alors $L \sqcup\!\sqcup K$ l'est aussi.

Question 2. Soient les langages définis par récurrence par $L_0 = \{\varepsilon\}$ et pour tout entier naturel n, $L_{n+1} = L_n \sqcup\!\sqcup (ab)^*$. Montrer que L_n est l'ensemble des mots w qui vérifients $|w|_a = |w|_b$ et pour tout préfixe u de w, $|u|_b \leqslant |u|_a \leqslant |u|_b + n$.