Partie n°1: *points fixes dans $\mathbb{R}$*

1. **Point fixe d'une application continue.**
   On définit l'application g par $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [a, b]$. Ainsi $g(a) = f(a) - a \leqslant 0$ alors que $g(b) = f(b) - b \geqslant 0$, une simple application du théorème des valeurs intermédiaires à l'application continue g permet de conclure. il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ ie $f(c) = c$.
   Il n'y a pas unicité en général (prendre par exemple $f(x) = x$).
2. **Point fixe d'une application croissante.**
   Soit f une application croissante de $[0, 1]$ dans lui-même.
   On pose $A = \{x \in [0,1] / f(x) \geqslant x\}$.
   (a) $A = \{x \in [0,1] / f(x) \geqslant x\}$ est non vide ($0 \in A$) et majoré (par 1).
   D'où l'existence de $a = \sup A \in [0, 1]$
   (b) Si a=0 c'est fini, sinon on prend une suite x_n strictement croissante dans A et qui converge vers a (c'est possible par définition de a).
   On a alors $f(x_n) \geqslant x_n$ et comme $a \geqslant x_n$, $f(a) \geqslant f(x_n)$, on garde $f(a) \geqslant x_n$. On peut alors faire un passage à la limite $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$, on obtient $f(a) \geqslant a$.
   (c) D'aprés $f(a) \geqslant a$ et la croissance de f, on obtient $f(f(a)) \geqslant f(a)$. Donc $f(a) \in A$ et par définition de a, on a forcement $f(a) \leqslant a$.
   Tout est fait $f(a) = a$.
   (d) Non. Même exemple que 1) (et Id est même strictement croissante).

Partie n°2: *Théorèmes de points fixes avec différentes hypothèses*

1. **Théorème de point fixe de Banach-Picard**

   (a) Avec les notations classiques, on pose $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
   Dire que $\sum u_n$ est absolument convergente signifie que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Comme $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leq |u_n|$, ces deux séries sont aussi convergentes et par sommes la série de terme général u_n est aussi convergente. Coordonnées par coordonnées, ce résultat s'étend au cas des séries à valeurs dans un espace de dimension **finie**.
   NB : Ce qui suit sera valable dans tout espace où l'absolue convergence des séries entraine la convergence (même en dimension quelconque).
   (b) $\|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \cdots \leqslant k^n\|x_1 - x_0\|$ de proche en proche (ou par une récurrence évidente).
   Ainsi la série $\sum x_{n+1} - x_n$ converge absolument par principe de comparaison des séries à termes positifs (ici la série géométrique). Cela entraine la convergence de la série elle-même.
   (c) Par comparaison suite-série, on en conclue que la suite u_n converge vers $\ell \in F$.
   (d) Passant à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$ on trouve (par continuité de f lipschitzienne), $\ell = f(\ell)$ ce qui contraint ℓ à être fixe par f.
   (e) S'il y avait un autre point fixe λ, on aurait :
   $$||\ell - \lambda|| = ||f(\ell) - f(\lambda)|| \leqslant k||\ell - \lambda||$$
   ce qui est absurde si $\lambda \neq \ell$. Ainsi, il y a unicité du point fixe. Le théorème est prouvé.
   (f) $a - l = a - f(a) + f(a) - f(l)$ car $l = f(l)$.
   Par l'inégalité triangulaire , on obtient $||a - l|| \leqslant ||a - f(a)|| + k||a - l||$.
   On regroupe : $||a - l|| \leqslant \dfrac{1}{1-k}||a - f(a)||$.
   Par récurrence en utilisant le fait que $||x_{n+1} - l|| = ||f(x_n) - f(l)|| \leqslant k||x_n - l||$, on obtient le résultat annoncé.

On vient de démontrer le théorème de point fixe sur un fermé en dimension finie (Picard) :
Dans $(E, ||.||)$ *un espace de dimension finie, si* F *est une partie fermée non vide de* E *et* $f : F \to F$ *une application contractante alors* f *admet un unique point fixe dans* F *et pour tout* $a \in F$*, la suite des itérés* $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers ce point fixe*

2. Application directe

Soit $(E, ||.||)$ un espace de dimension finie, F est une partie fermée non vide de E et $f : F \to F$.
f^p soit une application contractante (rapport $k \in [0, 1[$), donc admet un unique point fixe ℓ.
Donc $f^p(\ell) = \ell$, en composant par f, $f^p(f(\ell)) = f(\ell)$, et par unicité du point fixe $f(\ell) = \ell$.
Il y a bien sûr unicité de ce point fixe pour f (puisque f^p admet un seul point fixe).

3. Théorème de point fixe sur un compact

(a) Déjà g est continue sur le compact K, puis g est minorée par 0 donc elle atteint sa borne inférieure. Si $\alpha = \min g \neq 0$, il existerait $x \in K$ tel que $g(x) = \alpha$, mézalors $g(f(x)) = ||f(f(x)) - f(x)|| < ||f(x) - x|| = g(x) = \alpha$, c'est absurde.
Donc $\min g = 0$, ainsi il existe $\ell \in K$ tel que $g(\ell) = 0$ soit $f(\ell) = \ell$
Il y a unicité du point fixe en raison de l'inégalité stricte : $||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$ si $x \neq y$.

(b) L'application de K^2 dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $||x - y||$ est continue.
K_ϵ est l'image réciproque du fermé $[\epsilon, +\infty[$ par cette application continue, c'est donc un fermé du compact K, ainsi K_ϵ est un compact. Remarque : si $(x, y) \in K_\epsilon$ on a $x \neq y$.
L'application bien définie sur K_ϵ par $(x, y) \to \frac{||f(x)-f(y)||}{||x-y||}$ est continue sur un compact et majorée par 1. Elle atteint sa borne supérieur notée $k \geqslant 0$. Ainsi il existe (x, y) dans K_ϵ avec $k = \frac{||f(x)-f(y)||}{||x-y||} < 1$, soit $k \in [0, 1[$ et pour tout $(x, y) \in K_\epsilon \quad ||f(x) - f(y)|| < k||x - y||$

(c) Si on avait $(\forall N \in \mathbb{N}) \quad (x_N, \ell) \in K_\epsilon$, alors on aurait $||l - x_{N+1}|| = ||f(l) - f(x_N)|| \leqslant k||l - x_N||$ d'où $||l - x_N|| \leqslant k^N ||l - x_0||$, la suite $||l - x_N||$ converge vers 0, ce qui est absurde si $(x_N, \ell) \in K_\epsilon$.
Comme la suite $(||l - x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et d'après ce que l'on vient de prouver :

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad ||l - x_N|| < \epsilon$$

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geqslant N) \quad ||l - x_n|| < \epsilon$$

C'est exactement la définition d'une suite convergente vers ℓ.

On vient de démontrer le théorème de point fixe sur un compact :
Dans $(E, ||.||)$ *un espace vectoriel normé, si* K *est un compact non vide de* E *et* $f : K \to K$ *une contraction stricte alors* f *admet un unique point fixe dans* K *et pour tout* $a \in K$*, la suite des itérés* $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers ce point fixe*

4. Application directe

(a) Comme C est convexe si $a \in C$ et $x \in C$, on a déjà $f(x) \in C$ et $f_n(x)$ qui est un barycentre de $f(x)$ et a, est aussi dans C. De plus si $y \in C$, $f_n(x) - f_n(y) = (1 - \frac{1}{n})(f(x) - f(y))$.
Ainsi, $||f_n(x) - f_n(y)|| \leqslant (1 - \frac{1}{n})||x - y||$, c'est le résultat voulu.

(b) Les hypothèses du théorème de point fixe sur un compact sont vérifiées pour f_n (puisque $||f_n(x) - f_n(y)|| \leqslant (1 - \frac{1}{n})||x - y|| < ||x - y||$ si $x \neq y$), donc f_n admet un point fixe unique notée x_n dans C.

(c) Comme C est compact, il existe une suite extraite convergente de la suite (x_n). On note $x \in C$ tel que $x_{\varphi(n)}$ converge vers x. On a $x_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = (1 - \dfrac{1}{\varphi(n)})f(x_{\varphi(n)}) + \dfrac{1}{\varphi(n)} a$. On peut passer à la limite lorsque $n \to +\infty$ car f est continue donc $f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x)$ et $\varphi(n) \to +\infty$. Il reste : $x = f(x)$, ce point fixe n'est pas forcement unique ($f = Id$).

Partie n°3: *Exemples et contre-exemples autour des théorèmes de points fixes*

1. Sur la nécessité d'avoir une contraction

(a) $g'(t) = 1 + \dfrac{1}{1+t^2} \in]0,1[$ pour tout réel t.

Si x et y sont deux réels quelconques, l'égalité des accroissements finis numériques (applicable car g est bien continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$) prouve l'existence d'un réel c compris entre x et y tel que $g(y) - g(x) = g'(c)(y-x)$ d'où l'inégalité demandée.

(b) s'il existait un point fixe l pour g, on aurait $\arctan l = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui est impossible.

Donc g n'est pas une contraction, sinon le point théorème de point fixe de Picard s'appliquerait ($\mathbb{R}$ est complet). Par contre, g est une contraction stricte (mais $\mathbb{R}$ n'est pas compact).

2. un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$

On s'intéresse dans cette question au système :

$$(S)\begin{cases} 4x = \sin(x+y) \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y) \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||.||_1$ définie par $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

(a) Inégalités immédiates par l'inégalité des accroissements finis.

(b) Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$. Il vient :

$$\begin{aligned}
||\psi(x_2,y_2) - \psi(x_1,y_1)|| &= \frac{1}{4}\left|\sin(x_2+y_2) - \sin(x_1+y_1)\right| \\
&\quad + \frac{2}{3}\left|\arctan(x_2-y_2) - \arctan(x_1-y_1)\right| \\
&\leq \frac{1}{4}\left|(x_2+y_2) - (x_1+y_1)\right| + \frac{2}{3}\left|(x_2-y_2) - (x_1-y_1)\right| \\
&\leq \frac{1}{4}\left(|x_2-x_1| - |y_2-y_1|\right) + \frac{2}{3}\left(|x_2-x_1| - |y_2-y_1|\right) \\
&= \frac{11}{12}||(x_2,y_2) - (x_1,y_1)||_1
\end{aligned}$$

Donc ψ est une contraction sur $(\mathbb{R}^2, ||\,||_1)$ de rapport $\dfrac{11}{12}$.

(c) Ainsi, compte tenu du théorème du point fixe de Picard, le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

(d) Ici $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $||.||_\infty$ définie par $||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|)$ qui en fait toujours un espace de dimension finie (=2).

$\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (0, 1 + \dfrac{\pi}{6})$ et $\psi(0,0) = (0,1)$ donc $||\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \psi(0,0)||_\infty = \dfrac{\pi}{6}$

alors que $||(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - (0,0)||_\infty = \dfrac{1}{2}$.

Or $\dfrac{\pi/6}{1/2} = \dfrac{\pi}{3} > 1$ ce qui prouve que ψ n'est pas une contraction pour la norme $||.||_\infty$.

Ainsi la condition de contraction n'est pas superflue comme le prouve 1) mais n'est pas non plus nécessaire.

Remarque : cet exemple prouve aussi qu'une application peut être une contraction pour une norme et ne pas être une contraction pour une norme équivalente.

Partie n°4: *Application des théorèmes de points fixes à des homéomorphismes*

1. $U = I + T$ est continue comme somme de fonctions continues (T est lipschitzienne).
$||U(x) - U(y)|| \leqslant ||x - y|| + ||T(x) - T(y)|| \leqslant (1 + k)||x - y||$

2. Si $U(x) = U(y)$ alors $x - y = T(y) - T(x)$ or $||T(x) - T(y)|| \leqslant k||x - y||$, ceci n'est possible que si $x = y$.

3. Soit $y \in E$. Si x vérifie $U(x) = y$ cela signifie $x = y - T(x)$, soit $S(x) = x$.
On est ramené à chercher les points fixes de S.
Or S définie par $S(x) = y - T(x)$ est contractante car

$$\|S(x) - S(z)\| = \|T(x) - T(z)\| \leqslant k \|x - z\|$$

donc d'après le théorème de Banach-Picard (E est de dimension finie.), S possède un point fixe unique donc U est surjective et même bijective.

4. On pose $U^{-1}(x) = a$ et $U^{-1}(y) = b$ donc $a + T(a) = x$ et $b + T(b) = y$.
$x - y = a - b - (T(b) - T(a))$ donc $\|x - y\| = \|a - b - (T(b) - T(a))\| \geqslant |\|a - b\| - \|T(a) - T(b)\||$
Or $\|T(a) - T(b)\| \leqslant k \|a - b\|$ comme $k \in [0, 1[$
$\|x - y\| \geqslant \|a - b\| - \|T(a) - T(b)\| \geqslant (1 - k) \|a - b\|$
Donc $\left\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\right\| \leqslant \dfrac{1}{1 - k} \|x - y\|$

Partie n°5: *Application des théorèmes de points fixes à des projecteurs*

préliminaires] *Norme sur $\mathcal{L}_C(E)$:*

1. Si $u \in \mathcal{L}_C(E)$, alors u est lipschitzienne (de rapport M par exemple). Ainsi tout $x \in E$ vérifie $||u(x)|| \leqslant M||x||$. l'ensemble est donc majoré par M.

2. Comme il est non vide il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}^+$ que l'on note $|||u|||$.

3. On vient de voir que $(\forall x \in E)$, $||u(x)|| \leq |||u|||.||x||$.
En fait cela définie une norme sur $\mathcal{L}_C(E)$. Par exemple si $|||u||| = 0$, on récupère de suite $u \equiv 0$.
Les autres propriétés se prouvent de la même manière.
On admet que c'est aussi une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_C(E)$.Ainsi

$$(\forall u \in \mathcal{L}_C(E)),\ (\forall v \in \mathcal{L}_C(E)), \quad |||u \circ v||| \leq |||u|||.|||v|||$$

A]

1. On a, par définition de v : $X \in \ker(v) \Longleftrightarrow u(X) = X$.
Donc $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \ker(v), p_m(X) = \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} X = X.}$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ (id_E - u) = u^k - u^{k+1} = (id_E - u) \circ u^k$, par sommation p_m et v commutent . Donc $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, p_m \circ v = v \circ p_m.}$
D'où : $p_m \circ v = v \circ p_m = p_m - u \circ p_m$. Or $u \circ p_m = \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1} = \dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} u^k$.
Par téléscopage, on obtient : $\boxed{p_m \circ v = \dfrac{1}{m}(id_E - u^m).}$

3.(a) On a : $X \in \mathrm{Im}(v)$ donc il existe $Y \in E$ tel que $X = v(Y)$.
Alors $p_m(X) = (p_m \circ v)(Y) = \dfrac{1}{m}(Y - u^m(Y))$.
D'où : $\| p_m(X) \| \leqslant \dfrac{1}{m}(\| Y \| + \| u^m(Y) \|) \leqslant \dfrac{1}{m}(\| Y \| + C \| Y \|)$.
En posant $K = \| Y \|$ (constante qui dépend de X), on obtient
$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \| p_m(X) \| \leqslant \dfrac{K}{m}(1 + C).}$

(b) $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{K}{m}(1 + C) = 0$. on en déduit que : $\boxed{\text{la suite } (p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0_E}$.

4. Soit $X \in \ker(v) \cap \mathrm{Im}(v)$;
D'après la question **1.**, en utilisant le fait que $X \in \ker(v)$, on se rappelle que $\forall m \in \mathbb{N}^*, p_m(X) = X$.
D'autre part, par passage à la limite quand m tend vers l'infini, comme $X \in \mathrm{Im}(v)$, d'après la question **3.b**, $\lim\limits_{m \to +\infty} p_m(X) = 0_E = X$.
Donc $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0_E\}$ et $\boxed{\text{la somme est directe}}$.

5. Mais, d'après le théorème du rang, on a : $\dim E = \dim(\ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim H$. Donc $\boxed{H = E}$.

6. On a, d'après ce qui précède, $E = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$ donc :
$\forall X \in E, \exists!(X_1, X_2) \in \ker(v) \times \mathrm{Im}(v), X = X_1 + X_2$.
On a alors : $p_m(X) = X_1 + p_m(X_2)$. D'après la question **3.2**, $\lim\limits_{m \to +\infty} p_m(X_2) = 0_E$ donc
$\lim\limits_{m \to +\infty} p_m(X) = X_1 = p(X)$. $\boxed{\text{La suite } (p_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ converge donc simplement sur } E \text{ vers } p}$.

B]

1. Si $X \in E$, $Y = u(X)$ est une sous-suite de X donc reste bornée. Donc $Y \in E$. La linéarité est évidente. Donc $\boxed{u \text{ est bien un endomorphisme de } E}$.

2. Soient $X \in E$ et $Y = u(X)$. On a : $\| Y \| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mid x_{n+1} \mid = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mid x_n \mid \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \mid = \| X \|$.
D'où : $\forall X \in E, \| u(X) \| \leqslant \| X \|$. Donc u est continu et $||| \, u \, ||| \leqslant 1$. Mais, si l'on considère la suite constante X égale à 1, on a : $u(X) = X$. Donc $\boxed{||| \, u \, ||| = 1}$.

3. On a : $X \in \ker(v)$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x_{n+1}$ ssi X est constante.
Donc $\boxed{\ker(v) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$.

4. Soit $X \in \mathrm{Im}(v)$; il existe $Y \in E$ tel que $X = v(Y)$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n - y_{n+1}$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (y_k - y_{k+1}) = y_0 - y_n$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mid s_n \mid \leqslant \mid y_0 \mid + \mid y_n \mid \leqslant 2 \| Y \|$ car Y est bornée. Donc S est bornée.
Réciproquement, soit $X = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite S définie par le texte soit bornée.
Alors il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mid s_n \mid \leqslant M$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \mid x_n \mid = \mid s_{n+1} - s_n \mid \leqslant \mid s_{n+1} \mid + \mid s_n \mid \leqslant 2M$. Donc X est bornée.
En posant : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = -s_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n - y_{n+1} = -s_n + s_{n+1} = x_n$. Donc $v(Y) = X$ et $X \in \mathrm{Im}(v)$.
D'où l'équivalence : $\boxed{X \in \mathrm{Im}(v) \text{ ssi } S \text{ définie par } s_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k \text{ est bornée}}$.

5. On construit la suite $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \big[\, m(m+1), (m+1)^2 - 1 \,\big], x_k = 1$ et $\forall k \in \big[\, (m+1)^2, (m+1)(m+2) - 1 \,\big], x_k = 0$. Donc $X = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose : $p_m(X) = (y_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}^*}$. La suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est divergente car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. En effet, on a : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(m)} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=n}^{n+m-1} x_k$.
Par construction de la suite X, on a : $\forall m \in \mathbb{N}^*, y_{m(m-1)}^{(m)} = 1$ et $y_{m(m-1)}^{(2m)} = \dfrac{1}{2}$.
D'où : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \| p_m(X) - p_{2m}(X) \| \geqslant \mid y_{m(m-1)}^{(m)} - y_{m(m-1)}^{(2m)} \mid = \dfrac{1}{2}$.
$\boxed{\text{Il existe donc une suite } X \in E \text{ telle que la suite } (p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ diverge}}$.

Partie n°6: *Une application géométrique*

1. Les droites (MP_M) et $(M'P_{M'})$ sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès, appliqué dans le triangle (MP_MC), on a
$$\frac{P_MP_{M'}}{MM'} = \frac{P_MC}{MC} = |\cos c|$$

2. si $M \neq M'$, alors $P_M \neq P_{M'}$ et $Q_M \neq Q_{M'}$, en considérant les triangles (AP_MQ_M) et (BQ_MR_m), on aura aussi :
$$\frac{Q_MQ_{M'}}{P_MP_{M'}} = |\cos a| \quad \text{et} \quad \frac{R_MR_{M'}}{Q_MQ_{M'}} = |\cos b|$$
donc $R_MR_{M'} = |\cos a||\cos b||\cos c|MM' \leq kMM'$ avec une constante $k = |\cos a||\cos b||\cos c| \in [0, 1[$ (car $a, b, c \in]0, \pi[$). Cette inégalité se traduit à l'aide de φ par une autre inégalité :
$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq k|x - x'|.$$
Autrement dit, la fonction φ est une contraction (ou application contractante), donc elle admet un unique point fixe $x \in \mathbb{R}$.
Cela revient à dire qu'il existe un unique point géométrique $M \in (BC)$ tel que $R_M = M$
(M revient à sa place).
On ne peut pas terminer sans un dessin...à vous

♣♢♡♠