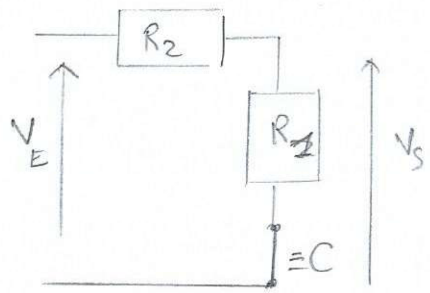
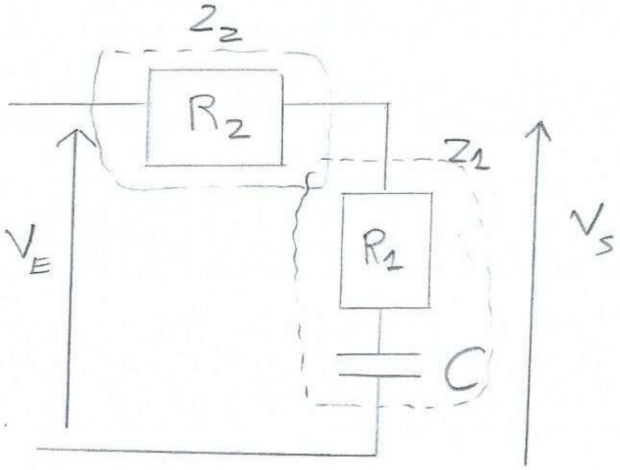
TD n° 1

Electrocinétique 1

Exercice n° 2 :

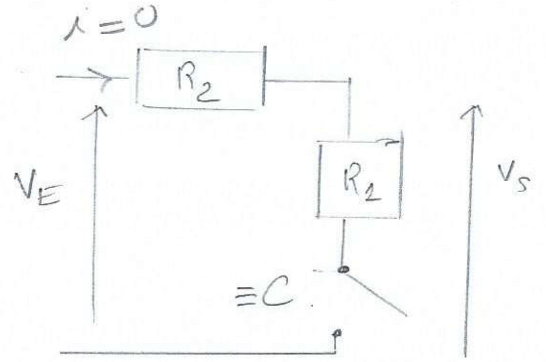
① **HF** :





$$\Rightarrow \underline{V_S}_{(HF)} \simeq \frac{R_1}{R_1+R_2}\underline{V_E} \quad \text{donc} \quad \left|\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}\right| = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

BF :



$$\underline{V_S}_{BF} = \underline{V_E} \Rightarrow \left|\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}\right| = 1$$

$$\underline{Z_1} = \frac{jR_1C\omega + 1}{jC\omega}$$

② $$H(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = \left(\frac{1+jR_1C\omega}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R_2 + \frac{1+jR_1C\omega}{jC\omega}}\right)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1+jR_1C\omega}{jR_2C\omega + 1 + jR_1C\omega} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1+j\omega\tau_1}{1+j\omega\tau_2}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = R_1C \\ \tau_2 = (R_1+R_2)C \end{cases}$$

③ Diagramme de Bode asymptotique :

$$H(j\omega) = (1 + j\omega\tau_1) \times \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} = \frac{H_2(j\omega)}{H'_1(j\omega)}$$

$H_1 = \frac{1}{H'_1}$

avec $H'_1 = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1}$

PBas 1er ordre

H_2 : PBas 1er ordre

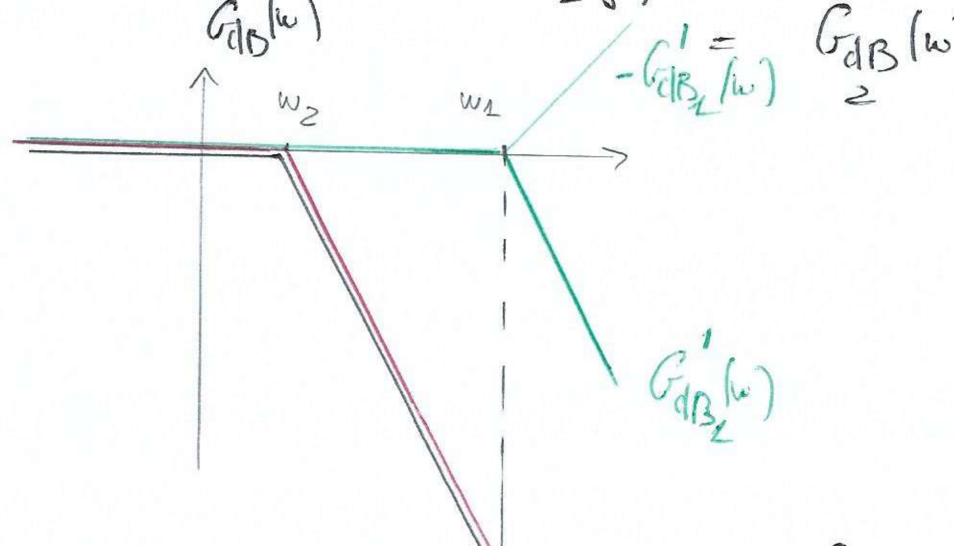
④ Il faut envisager que τ_1 et τ_2 soit assez $\neq$ pour tracer facilement le diagramme de Bode :

A.N. $\begin{cases} \tau_1 = R_1 C = 10^4 \times 10^{-8} = 10^{-4}\,s \\ \tau_2 = (R_1 + R_2) C = 10^5 \times 10^{-8} = 10^{-3}\,s \end{cases} \Rightarrow \tau_1 \ll \tau_2$

donc $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} \ll \omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{H_2(j\omega)}{H'_1(j\omega)} \right| = 20 \log G_2(\omega) - 20 \log G'_1(\omega)$$

$$= G_{dB_2}(\omega) - G'_{dB_1}(\omega)$$



④ $G = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2\left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2\right) = 1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2$

$\Rightarrow 2 + \frac{2\omega_c^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_2^2} \Rightarrow \omega_c^2\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{2}{\omega_1^2}\right) = 1$

$$\omega_c^2 = \frac{\omega_1^2 \times \omega_2^2}{\omega_1^2 - 2\omega_2^2} \Rightarrow \boxed{\omega_c = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 - 2\omega_2^2}}}$$

Ou encore $\omega_c = \sqrt{\frac{1}{\tau_1^2}\frac{1}{\tau_2^2} \times \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^2} - 2\frac{1}{\tau_2^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\tau_2^2 - 2\tau_1^2}}$

A.N. $\omega_c = 1010{,}1 \text{ rad.s}^{-1}$
($f_c \approx 160 \text{ Hz}$)

⑤ $\tau_2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \tau_1 \frac{de(t)}{dt} + e(t)$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2} s(t) = \frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2} e(t)}$$

⑥ $V_E(t) = \frac{A}{2}(1 + \cos 2\omega t)$ linéarisation pour traiter le signal composante / composante.

$$= \underbrace{\frac{A}{2}}_{CC = a_{0e}} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{d_{2e}}\cos(2\omega t)$$

$\rightarrow$ CC : $a_{0s} = G(0)\, a_{0e} = a_{0e} = \frac{A}{2} = 0{,}5\,V$

$\rightarrow$ harmonique rang $n = 2$:

$$\begin{cases} d_{2s} = G(2\omega)\, d_{2e} = \dfrac{\sqrt{1 + 4\omega^2\tau_1^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2\tau_2^2}} \times d_{2e} \\ \varphi_{2s} = \underbrace{\varphi_{2e}}_{=0} + \arg H(2j\omega) = \arg(1 + 2j\tau_1\omega) - \arg(1 + 2j\tau_2\omega) \\ \qquad = \arctan(2\tau_1\omega) - \arctan(2\tau_2\omega) \end{cases}$$

A.N. $d_{2s} = 0{,}1\,\frac{A}{2} = 0{,}05\,V$

$\varphi_{2s} = -0{,}089 \text{ rad} \simeq -0{,}09 \text{ rad}$.

⑦ Réponse indicielle : (échelon unitaire à $t = 0$)

$\Rightarrow$ par l'ed. ! $\left(\frac{de(t)}{dt}\Big|_{t>0} = 0\right)$

pour $t > 0$: $\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2} s(t) = \frac{1}{\tau_2} E$

Exercice n° 6 : Effet Flanguer (ou chorus)

$$s(t) = e(t) + e(t-\tau)$$

① Fonction de transfert

$$e(t) \rightarrow \underline{e}(t) = E\, e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$e(t-\tau) \rightarrow \underline{e}(t-\tau) = E\, e^{j(\omega(t-\tau) + \varphi)}$$

$$H(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{e^{j(\omega t + \varphi)}} \left(1 + e^{-j\omega\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = 2\, e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

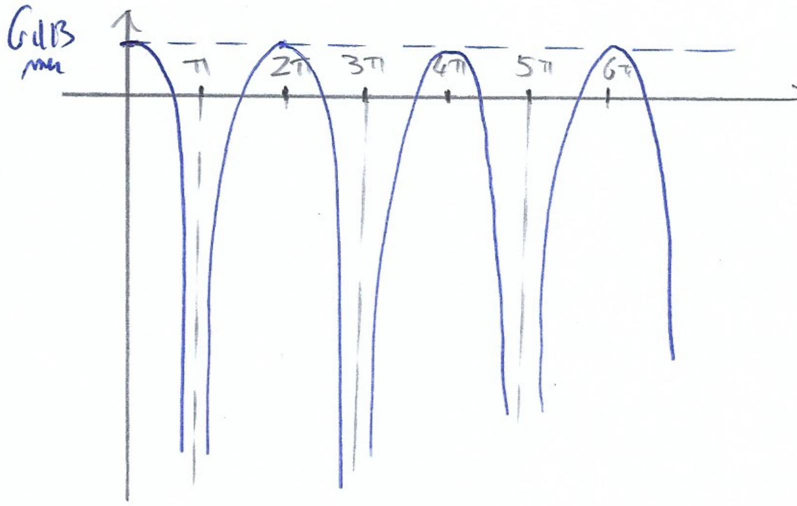
② Courbe de réponse en gain :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = 2\left|\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

$$G_{dB} = 20 \log 2\left|\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

⚠ la courbe de gain présente une infinité d'asymptotes disposées aux pulsations telles que $\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = (2k+1)\pi/2$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_k = (2k+1)\frac{\pi}{\tau}}$$



↳ choix judicieux ici (adimensionné)

NB: $G_{dB}(max) = 20 \log 2$ pour $\left|\cos \frac{\omega\tau}{2}\right| = 1$

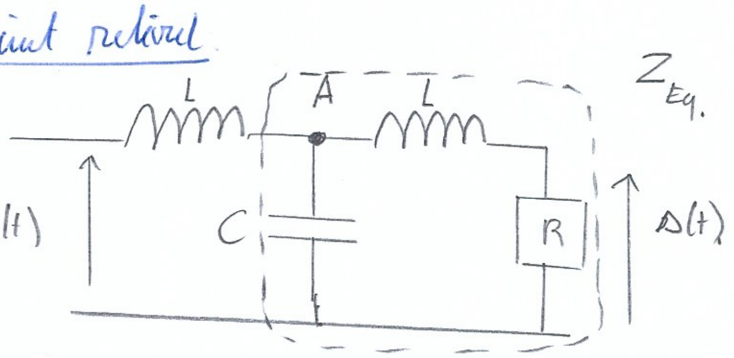
i.e. $\frac{\omega\tau}{2} = k\pi$

$\Rightarrow \omega\tau = 2k\pi$.

(3) La FTSO n'est pas un rapport de 2 polynômes en $j\omega$ type $H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ dont les coefficients seraient fct de R, L, C $\Rightarrow$ impossible d'obtenir H avec des composants linéaires.

$\longrightarrow$ circuit a priori non linéaire.

(4) Circuit retenu



1ère étape: fct de transfert

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \underbrace{\left(\frac{s}{V_A}\right)}_{H_2} \times \underbrace{\left(\frac{V_A}{e(t)}\right)}_{H_2}$$

$$H_1 = \frac{R}{R+jL\omega} \quad \text{et} \quad H_2 = \frac{Z_{eq.}}{Z_L + Z_{eq.}}$$

avec $$Z_{eq} = \left(jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega} \right)^{-1} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega}}$$

donc: $$H_2 = \frac{1}{\left(jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega}\right)} \times \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega}}}$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{1}{1 + (j\omega)^2 LC + \frac{jL\omega}{R+jL\omega}}$$

Donc:

$$H = \frac{R}{R+jL\omega} \times \frac{1}{(1+(j\omega)^2 LC) + \frac{jL\omega}{R+jL\omega}} = \frac{R}{jL\omega + (R+jL\omega)(1+(j\omega)^2 LC)}$$

$$\Rightarrow H = \frac{R}{jL\omega + R + (j\omega)^2 LCR + jL\omega + (j\omega)^3 L^2 C}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{1 + \frac{2jL\omega}{R} + (j\omega)^2 LC + (j\omega)^3 \frac{L^2 C}{R}}}$$

<u>2^{nde} étape :</u> Evaluer la FTSO en BF et s'assurer qu'elle peut assurer une fct retard.

$$H_{BF} \overset{DL1}{\approx} \frac{1}{1 + \frac{2jL\omega}{R}} \approx 1 - \frac{2jL\omega}{R}.$$

Rappel : $$H_{retar} = \frac{e(t-\tau)}{e(t)} = e^{-j\omega\tau} \underset{\omega\tau \ll 1}{\overset{BF}{\approx}} 1 - j\omega\tau.$$

Par identification :

$$\omega\tau = \frac{2L\omega}{R} \Rightarrow \tau = \frac{2L}{R} \quad \text{or} \quad R = \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2L}{\sqrt{\frac{2L}{C}}} = \sqrt{2}\sqrt{LC} \Rightarrow \boxed{\tau = \sqrt{2LC}}$$

A.N. On veut $\tau = 1$ ms.

par exemple $\left| \begin{array}{l} L = 1 \text{ mH} \Rightarrow C = 0{,}5 \text{ mF} \\ L = 10 \text{ mH} \Rightarrow C = 50 \text{ µF} \end{array} \right.$

Domaine de fréquence exploitable.

$\omega\tau \ll 1$ par exemple $(\omega\tau)_{max} \sim 0{,}1$

$$f_{max} \sim \frac{0{,}1}{2\pi\tau} = 15{,}9 \text{ Hz} \simeq 16 \text{ Hz}.$$

⊖ Totalement inexploitable

Correction Exercice n°7: Influence de la résistance d'entrée d'un oscilloscope

❶ De manière évidente $U_1 = E$ puisque la voie de l'oscilloscope utilisée est branchée directement aux bornes de la source. Pour le second cas, la relation du diviseur de tension:

$$U_2 = \frac{R_e}{R_e + R} \cdot E$$

A partir des deux relations précédentes, on déduit sans peine l'expression de R_e:

$$\boxed{R_{e_{exp}} = R\frac{U_2}{U_1 - U_2}}$$

En mesurant les valeurs expérimentales de U_1 et U_2 on accède donc à la résistance d'entrée de l'oscilloscope.

❷ Code python complété:

Listing 1: Ex.7: influence de la résistance d'entrée d'un oscilloscope

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
from matplotlib import pyplot as plt
###### Données numériques ######
N=int(1000)
E=1.00
alpha=0.01
n=100

###### Construction des tableaux de tirages ######
X=np.exp(np.linspace(np.log(0.1),np.log(10),n))

Tabecarttype=[]

for x in X:
    tabRe=x / ( (1+rd.normal(0,alpha,1000))/(1/(1+x)+rd.normal(0,alpha,1000))-1)
    Tabecarttype.append(np.std(tabRe,ddof=1))

###### Tracé ######
plt.figure("Tracé de la résistance d'entrée")
plt.plot(X,Tabecarttype,'o',color="red")
plt.xscale('log')
#plt.xticks([0.1,10], fontweight='bold',fontsize=13)
#plt.yticks( [0.04,0.18],fontweight='bold',fontsize=18)
plt.show()
plt.xlabel("x",color="black",fontsize=14)
plt.ylabel(r"$u\left(\dfrac{R_{e_{exp}}}{R_e}\right)$",color="black",fontsize=14,
    rotation=0,loc="top")
```

❸ **Commentaires en lien avec la courbe**:

La courbe de l'incertitude type relative montre une valeur optimale pour x; au contraire l'incertitude relative augmente fortement pour les faibles et fortes valeurs de x. On peut facilement interpréter cette tendance en reformulant avec x les expressions des numérateur et dénominateur de l'expression de $R_{e_{exp}} = R\frac{U_2}{U_1 - U_2}$:

on a $U_2 = \frac{1}{1+x} \cdot E$ ce qui donne immédiatement $U_1 - U_2 = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) E = \frac{x}{1+x} E$

Ainsi:

- si $x >> 1$ alors $U_2 << E$: la mesure de U_2, qui est très faible, va posséder une forte incertitude relative, ce qui sera également le cas de $R_{e_{exp}}$.
- si $x << 1$ alors $U_1 - U_2 << E$: c'est la quantité $U_1 - U_2$ qui va, cette fois, être faible, posséder une forte incertitude relative, et entrainer une forte incertitude relative sur $R_{e_{exp}}$.

❹ Cette méthode de mesure est très classique (et vous l'avez probablement expérimentée en MP2I!):

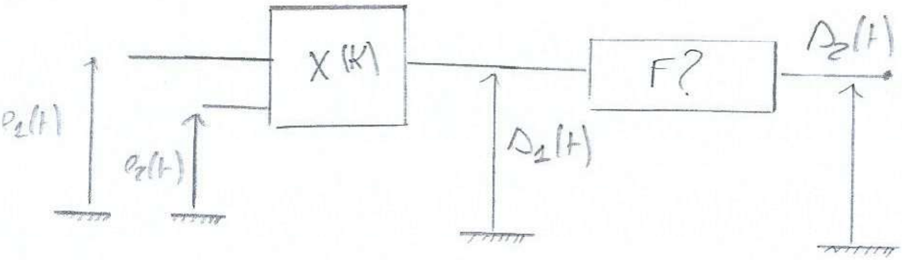
L'égalité $U_2 = \dfrac{U_1}{2}$ est vérifiée lorsque le rapport du diviseur de tension vu en ❶ est:

$$\frac{R_e}{R + R_e} = \frac{1}{2}$$

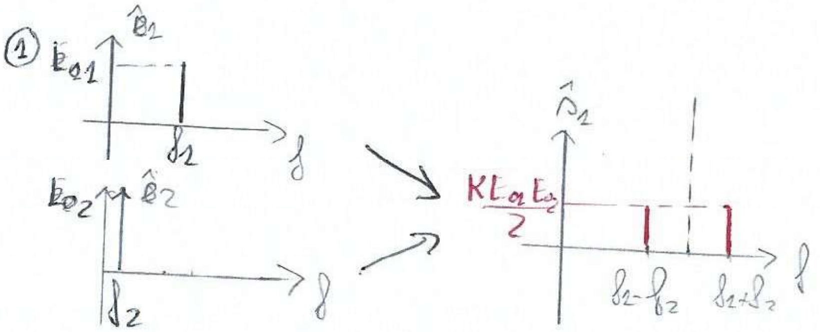
c'est à dire lorsque $R = R_e$, donc pour $\boxed{x = 1}$

La courbe tracée montre pour sa part une valeur optimale comprise entre $x = 1$ et $x = 2$ (attention l'échelle de l'axe des abscisses est logarithmique), et est plutôt difficile à évaluer précisément. La méthode de la tension moitié, si elle n'est pas optimale, est donc assez satisfaisante.

Exercice n° 9 : Radar de Police



(1)



NB (1) $f_1 > f_2$

sinon $f_1 - f_2 \to |f_1 - f_2|$

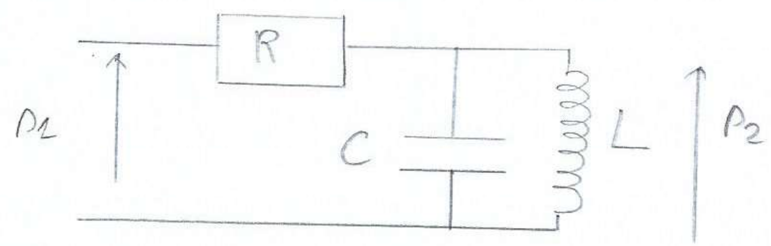
$$s_1(t) = K E_{01} E_{02} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos\left(2\pi f_1\left(1 - \frac{2v}{c}\right) + \varphi_2\right)$$

$$= \frac{K E_0 E_{02}}{2}\left[\cos\left(2\pi\, 2f_1\left(1 - \frac{v}{c}\right)t + \varphi_1 + \varphi_2\right) + \cos\left(2\pi\, 2f_1 \frac{v}{c} + (\varphi_1 - \varphi_2)\right)\right]$$

Filtre F : passe bas ou passe-bande (choix)

$$H(jf) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

(2)



$$H(j\omega) = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} \quad \text{avec} \quad Z_{eq} = \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1 + (j\omega)^2 LC}{jL\omega}\right)^{-1}$$

$$= \frac{jL\omega}{1 - (j\omega)^2 LC}$$

$$= \frac{jL\omega}{1 + (j\omega)^2 LC} \times \frac{1}{\frac{jL\omega}{1 - (j\omega)^2 LC} + R}$$

$$H(j\omega) = \frac{jL\omega}{jL\omega + R + (j\omega)^2 RLC} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\left(\omega RC - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

Forme passe-bande ⟹ OK ?

ident avec $H(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q\omega_0 = \frac{R}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ \omega_0 = \frac{R}{LQ} = \frac{R}{LR}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad \text{et } H_0 = 1$$

(3) • A.N. $f_1 - f_2 = 2 f_1 \frac{v}{c} = 2 \times 24{,}150.10^9 \times \frac{9013{,}6}{3.10^8} = 4{,}025 \text{ kHz}$.

• $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \dfrac{1}{4\pi^2 L f_0^2} = \underline{0{,}78 \text{ nF}}$

$v = \dfrac{f_0}{2 f_1} c \Rightarrow \dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{\Delta f_0}{f_0}$ Δf_0 : incertitude sur la valeur de fréquence centrale du filtre

$\Rightarrow \dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{1}{Q} = 5.10^{-2}$ maxi $\Rightarrow$ $Q \geq 20$

$Q_f = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \Rightarrow R = Q_f\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 1013\ \Omega \simeq 1\ \text{k}\Omega$

Exercice n 10 Détection de signaux μ-ondes

① a) PB $\Rightarrow$ ne garde que la CC or ici $\langle s(t)\rangle = 0 \Rightarrow$ insuffisant

b) On peut écrire le signal de phase à l'origine instable :

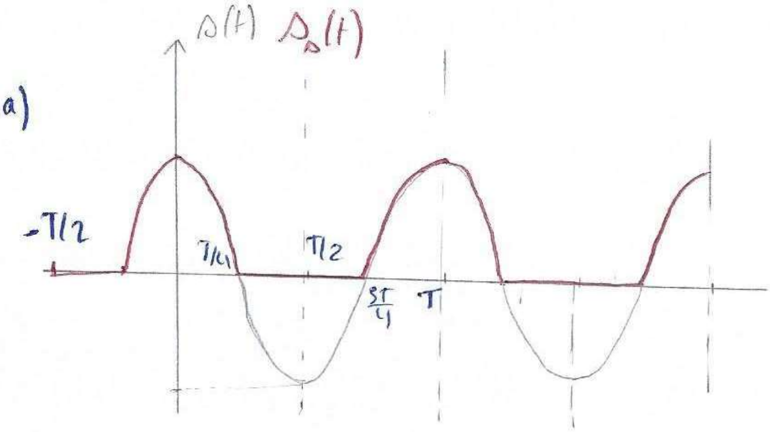
$$s(t) = A\cos(\underbrace{2\pi f t + \varphi_0(t)}_{\theta(t)})$$

la fréquence de ce signal est par définition $f_s = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$

$$f_s = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi f + \frac{d\varphi_0(t)}{dt}\right) \Rightarrow f_s = f + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_0(t)}{dt}$$

$\Rightarrow$ fréquence non stable $\Rightarrow$ non filtrable $= f(t)$ à priori non linéaire

② a)



ici $\varphi_0 = 0$

b) Alternances négatives coupées.

c) partie hors programme mais pas inintéressante !

a_0 valeur moyenne : $a_0 = \frac{1}{T}\int_T \underbrace{s_s(t)}_{\text{pair}}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} s_s(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} A\cos(\omega t)\,dt$

$$= \frac{2}{T}\frac{A}{\frac{2\pi}{T}}\left[+\sin\omega t\right]_0^{T/4} = \frac{2A}{2\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T s_s(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} A\cos(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$= \frac{4A}{T}\int_0^{T/4}\cos\omega t\cos n\omega t\,dt = \frac{4A}{2T}\left\{\int_0^{T/4}\cos(n-1)\omega t\,dt + \int_0^{T/4}\cos(n+1)\omega t\,dt\right\}$$

$$\left(\begin{aligned} &= \frac{2A}{T}\frac{\sin(n-1)\pi/2}{(n-1)\omega} + \frac{2A}{T}\frac{\sin(n+1)\pi/2}{(n+1)\omega} \\ &= \frac{A}{\pi}\frac{\sin(n-1)\pi/2}{(n-1)} + \frac{A}{\pi}\frac{\sin(n+1)\pi/2}{(n+1)} \end{aligned}\right)$$

*** ⚠ 1ère intégrale non calculable pour $n=1$:

$\Rightarrow$ on calcule séparément les cas $n=1$ et $n>1$

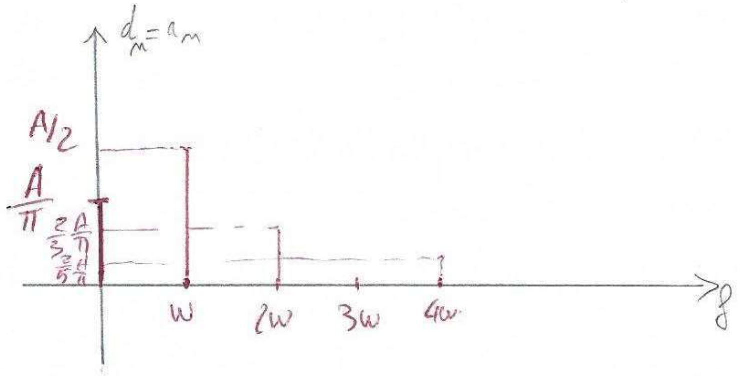
$$\rightarrow a_1 = \frac{2A}{T}\left\{\int_0^{T/4} dt + \int_0^{T/4}\cos 2\omega t\,dt\right\} = \frac{2A}{T}\left\{\frac{T}{4} + \frac{\sin\pi}{2\omega}\right\} = \frac{A}{2}$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{2A}{T}\left\{\int_0^{T/4}\cos(\omega t)\,dt + \int_0^{T/4}\cos(3\omega t)\,dt\right\} = \frac{2A}{T}\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin\left(\frac{6\pi}{T}\frac{T}{4}\right)}{\frac{3\pi}{T}}\right\}$$

$$= \frac{A}{\pi} - \frac{2A}{\cancel{T}}\times\frac{1}{\frac{6\pi}{\cancel{T}}} = \frac{A}{\pi} - \frac{A}{3\pi} = \frac{2}{3}\frac{A}{\pi}$$

$$\rightarrow a_3 = \frac{2A}{T}\left\{\int_0^{T/4}\cos 2\omega t\,dt + \int_0^{T/4}\cos(4\omega t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{2A}{T}\left\{\frac{\sin\pi}{2\omega} + \frac{\sin 2\pi}{4\omega}\right\} = 0$$

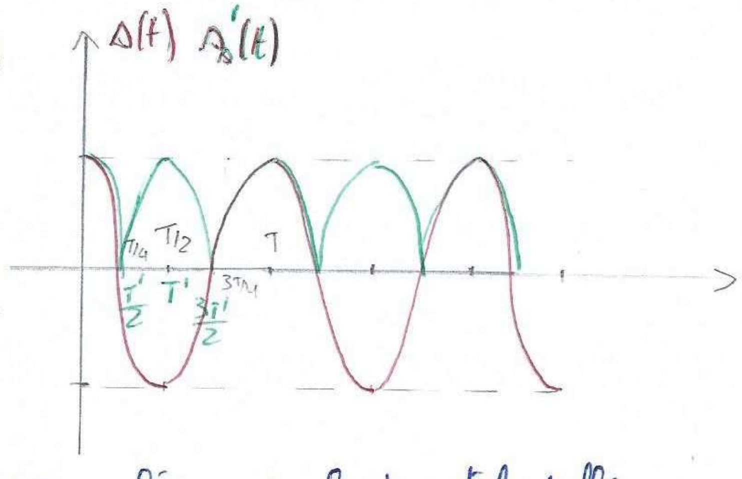


d) ⇒ filtre passe-bas passif avec $w_c \ll w$ ⇒ $D = \frac{A}{\pi}$ ⇒ $\boxed{\frac{D}{A} = \frac{1}{\pi}}$
ne récupère que la CC du signal avec $H(jx) = \frac{1}{1+jx}$

NB : si filtre actif : $H(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$

$$D = \frac{H_0 A}{\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{D}{A} = \frac{H_0}{\pi}}$$

③ Allure du signal :

a) 

NB : fréquence du fondamental doublée pour $s'(t)$ par rapport à $s(t)$
→ calcul identique des a_1, a_2, a_3 pour $\begin{cases} w \to 2w \\ T \to \frac{T}{2} \end{cases}$
⇒ m̂ spectre à facteur multiplicatif près.

b) Avantage : "plus de tps passé" en alternance > 0
⇒ valeur moyenne augmentée

Calcul : $\langle s'(t) \rangle = a_0' = \frac{1}{T'} \int_{(T)} s'(t).dt = \frac{1}{T'} \int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega t).dt = \frac{2}{T'} \int_0^{T/2} A\cos\omega t.dt$

$$a'_0 = \frac{2A}{T'} \frac{\left[\sin \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}\right]}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{A}{\frac{T}{2}\frac{\pi}{T}} = \frac{2A}{\pi} \Rightarrow D' = \frac{2A}{\pi}$$ en sortie du PB2

donc $\frac{D'}{A} = \frac{2}{\pi}$ l'amplitude est doublée en sortie du PB

$\Rightarrow$ meilleur détection μ-ondes
(plus "sensible")