1. Étudier la convergence (simple, uniforme, absolue, normale,...) des séries de fonctions et en déduire éventuellement les propriétés de la fonction somme (lorsqu'elle existe).

(a) $\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sur $]0,+\infty[$, calculer $\mu(1)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mu(x)$,

(b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$, domaine de définition ? continuité ?

(c) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^2}{(n+x)^2}$ sur $[0,2]$, calculer $f(1)$,

$\sum f_n$ avec :

(d) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ si $x = n$, $f_n(x) = 0$ sinon,

(e) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$ sur $[0,+\infty[$,

(f) $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{n}{n^2+x}$ sur $[0,+\infty[$,

(g) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3+x^2}$ sur $[0,+\infty[$,

(h) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$,

(i) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ sur $\mathbb{R}$,

(j) $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n^x}$ sur $\mathbb{R}$,

(k) $f_n(x) = x^n \ln^2 x$ sur $]0,1]$,

(l) $f_n(x) = x^n \ln x$ sur $]0,1]$.

2. On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{Arctan}(nx).$$

(a) Donner son domaine de définition et de continuité.

(b) Étudier ses limites aux bornes du domaine.

(c) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Pour tout entier n et tout réel x de]-1,1[, on pose $u_n(x) = (-1)^n x^n$.

(a) Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(c) Que peut-on dire aux limites de l'intervalle $]-1,1[$?

4. Fonction définie par une série

(a) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.

(b) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

5. Fonction définie par une série

(a) Étudier la convergence de la série $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

(c) Tracer la courbe représentative de f sur $]1, +\infty[$.

6. Fonction définie par une série

(a) Étudier la convergence simple, uniforme, de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Chercher une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

(d) Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7. Fonction définie par une série
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan\sqrt{n+x} - \arctan\sqrt{n}$$

(a) Etudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

(b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

8. Conversion série-intégrale
Montrer, pour $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

9. Conversion série-intégrale
Etablir que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

10. Fonction définie par une série
Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

(a) Montrer que la série $f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Y a-t-il convergence normale ?

11. Fonction définie par une série
Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(a) Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

(b) Tracer la courbe de f.

12. On considère la suite de fonctions $\sum f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4 + n}$$

(a) Etudier la convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle la série est normalement convergente.

(d) Montrer que cette série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}$.

13. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

(a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

(d) Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$

(e) Calculer $\int_0^{\pi/2} f'(x)\mathrm{d}x$.

14. *

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Justifier l'existence.

Trouver un équivalent simple de f à droite en 0.

15. *

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Justifier l'existence.

Trouver un équivalent simple de f en 1^-.

16. *

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

(a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

(b) Calculer $f'(x)$ et en déduire que $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

17. *

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

(a) Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1, +\infty[$.

(b) Continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.

(c) Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

18. **

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est un polynôme.