1. Etudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{c)} \int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. Nature de

$$\text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_1^{+\infty} x^{-x}\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}\mathrm{d}x$$

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramétres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b} \qquad \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t \qquad \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

4. Existence et calcul de

$$\text{a)} \int_0^1 -\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \qquad \text{b)} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t \qquad \text{c)} \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

indication : pour c), utiliser une intégration par parties sur un segment.

5. Nature et calcul de

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}x}\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}\mathrm{d}x$$

indication : pour d), c'est une fraction rationnelle en $\cos x$.

6. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe. Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$$

(on pourra s'intéresser à $[0,+\infty[$ "simple" puis à $]-\infty,0]$ "à détailler")

7. Existence et valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$$

8. a) Justifier l'existence puis établir $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$ b) En déduire la valeur de I.

9. a) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$ b) Établir $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$

c) En factorisant $1+t^4$ déterminer la valeur de I.

10. Existence et calcul pour $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$

11. Changements de variables

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$.

(b) Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$.

12. Intégrales de Bertrand

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

(a) On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.

(b) On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.

(c) On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

13. Logarithme à la puissance n

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

14. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n \,\mathrm{d}x$

15. Une intégrale comme somme d'une série

Le but de l'exercice est de prouver la relation suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

(a) Prouver la convergence de l'intégrale.

(b) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln t dt$ converge, puis calculer I_k.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} dt.$

(d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2 \ln t}{t^2-1}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. En déduire qu'il existe une constante $M > 0$, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que, pour tout $t \in]0,1[$, $\left|\dfrac{t^2\ln t}{t^2-1}\right| \leq M$.

(e) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} dt = 0$, puis la relation demandée.

16. Etude de $\left(\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Soit $f : [0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

17. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

18. [X MP]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.
a) Montrer que f' est de carré intégrable.
b) Montrer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

19. Soit f une fonction C^2 sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $ff'' \geq 0$ et que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Démontrer que f'^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.
(indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

20. [Mines-Ponts MP]
Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ intégrable et non bornée.