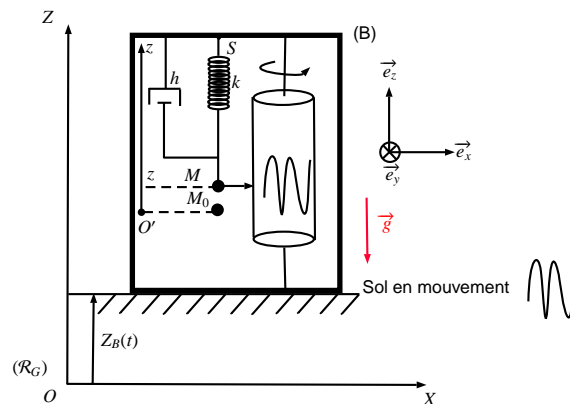


# TD n°3 Mécanique du point: Référentiels non galiléens

## Exercices techniques de dynamique

### EXERCICE N°1: Principe d'un sismographe

Le sismographe est un instrument équipé d'un dispositif appelé sismomètre, chargé de mesurer les mouvements vibratoires du sol, et d'enregistrer ces derniers sur un support visuel (généralement un papier gradué). Son principe est représenté sur la figure ci-dessous. Il est constitué d'un ressort (de masse négligeable, de constante de raideur  $k$  et longueur  $l_0$  au repos), dont l'extrémité supérieure  $S$  est fixée au boîtier rigide ( $B$ ) de l'instrument qui repose sur le sol, et dont l'extrémité inférieure est accrochée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . La position de  $M$  est repérée par sa cote  $z(t)$  sur l'axe ( $O'z$ ) fixe par rapport au boîtier. L'origine  $O'$  de cet axe correspond à la position d'équilibre du point matériel en l'absence d'onde sismique. Le mouvement de  $M$  est aussi amorti par une force de frottement fluide  $-h\dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$  où  $h > 0$ . Lorsque le sol est localement mis en mouvement sous l'effet de secousses sismiques, le référentiel du boîtier est animé, par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen, d'un mouvement vertical représenté par la fonction  $Z_B(t)$ . La réponse du sismographe est caractérisée par la fonction  $z(t)$  que l'on enregistre à l'aide d'un marqueur.



1. Montrer qu'en présence de l'onde sismique, l'équation du mouvement de  $M$  s'écrit:

$$\ddot{z}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = -\ddot{Z}(t)$$

Quel est la dimension de la constante  $\frac{Q}{\omega_0}$ ? En déduire son sens physique.

2. La secousse sismique est un signal constitué d'une multitude de composantes spectrales. Déterminer la réponse du sismographe en régime sinusoïdal forcé. Commenter.
3. Comment doit-on choisir les paramètres de l'appareil pour enregistrer fidèlement les secousses sismiques? On attend des valeurs numériques.

### EXERCICE N°2: Oscillation d'un objet suspendu

On considère un véhicule en translation accélérée uniforme selon un axe  $x$ . Un objet de masse  $m$  est suspendu au rétroviseur par une ficelle de longueur  $l$ .

Définir un poids apparent pour l'objet, ainsi que sa position angulaire d'équilibre  $\theta_e$ . On perturbe légèrement sa position d'équilibre, et il se met à osciller. Déterminer la période des petites oscillations autour de cette position  $\theta_e$ .

### EXERCICE N°3: Pesanteur apparente

La planète Jupiter tourne autour de son axe en  $9h 51 min$ , a un rayon d'environ  $7.10^4 km$  et l'accélération de la pesanteur sur sa surface est:  $26,5 m.s^{-2}$ . Quelle est la déviation maximale du fil à plomb avec la verticale planétaire à la surface de Jupiter?

### EXERCICE N°4: Mobile en champ Newtonien (révisions MPII)- analyse en référentiel tournant

On considère une masse ponctuelle  $m$  plongée dans un champ newtonien, c'est à dire proportionnel à  $\frac{1}{r^2}$ , dérivant d'une énergie potentielle  $E_p = \frac{k}{r}$ .

- ❶ Quelles grandeurs mécaniques sont conservées au cours de ce mouvement? En déduire l'équation liant  $\dot{r}$  et  $r$  et introduire la notion d'énergie potentielle effective.
- ❷ On cherche maintenant à donner un sens physique concret au terme supplémentaire apparaissant dans l'énergie potentielle effective. Pour cela, nous nous plaçons dorénavant dans le référentiel tournant, tel que le seul mouvement de la particule qui y subsiste soit purement radial. Reprendre l'étude précédente et interpréter.

### EXERCICE N°5:

#### Sens de rotation des cyclones

Les systèmes dépressionnaires correspondent à des zones atmosphériques de très faible pression vers lesquelles se dirigent des vents issus naturellement des zones de plus haute pression.

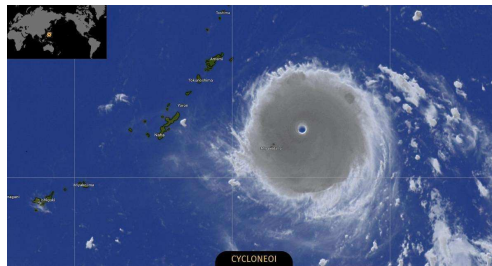


Figure 1: Le super typhon Hinnamnor (plus puissant cyclone enregistré en 2022)

- ❶ En supposant une zone dépressionnaire située en hémisphère nord, et en vous aidant d'un schéma représentant sens et direction des vents convergeant vers celle-ci, donner le sens de rotation de ces derniers autour du centre de la dépression.
- ❷ Même question si le cyclone est situé en hémisphère sud.

### EXERCICE N°6:

#### Mise en évidence de la force de Coriolis: déviation vers l'est mais aussi vers le sud (cette dernière est moins connue!!)

On étudie le mouvement d'une particule de masse  $m$ , qui tombe librement, à partir du point A (de latitude  $\lambda$ ) situé à une hauteur  $h$  au dessus du sol. On choisira le référentiel  $[Axyz]$  ( $[Ax]$  tangent au parallèle, dirigé vers l'est;  $[Ay]$  tangent au méridien dirigé vers le nord, et  $[Az]$  verticale dirigée vers le haut) pour repérer la position de la particule.

On désigne par  $\omega$  la vitesse de rotation de la Terre (la période  $T$  de rotation de la Terre sur elle-même est 1 jour autour de la ligne des pôles).

- ❶ Montrer que dans l'hémisphère Nord, au second ordre près en  $\omega$  (sachant qu' $\omega$  possède une valeur très faible) la particule est déviée par rapport à la verticale d'une quantité  $y_1$  vers le Sud, et d'une quantité  $x_1$  vers l'est.
- ❷ Exprimer les déviations  $x_1$  et  $y_1$ , à l'arrivée au sol, en fonction de  $\omega$ ,  $h$ ,  $\lambda$ , et  $g$ .
- ❸ *Application numérique:* Calculer les deux composantes  $x_1$  et  $y_1$  de la déviation pour  $h = 200 \text{ m}$  en un lieu où la latitude est  $\lambda = 45^\circ$ .

## Problèmes contextualisés

### EXERCICE N°7:

#### Accélération «franche»!



Un automobiliste démarre sa voiture avec les deux portières entrouvertes chacune d'un angle de  $30^\circ$ , et se demande comment procéder pour que les portières se referment toutes seules lors de l'accélération. Pour cela, il chronomètre le temps  $\tau$  mis pour passer de la vitesse nulle à la vitesse de  $100 \text{ km.h}^{-1}$ . Proposer une modélisation très simplifiée du problème dans le but de déterminer la condition sur  $\tau$  pour que les portières se ferment lorsque la voiture atteint  $100 \text{ km.h}^{-1}$ . On déterminera la valeur de  $\tau$  de deux manières : dans l'approximation des petits angles et hors de cette approximation. Quel écart relatif existe entre ces deux valeurs ?

**Données :** Les portières ne se ferment correctement que lorsque la vitesse de leur extrémité (où se situe le système de verrouillage) par rapport à la voiture est au minimum de  $0,8 \text{ m.s}^{-1}$ . Les portières de la voiture sont approximativement de forme rectangulaire, de largeur  $L = 1 \text{ m}$ , de masse  $20 \text{ kg}$  et de moment d'inertie  $J_\Delta = 6 \text{ kg.m}^2$  par rapport à leur axe de rotation.

### EXERCICE N°8:

#### Un salarié vraiment pointilleux

Un liftier, bien décidé à mener la vie dure à ses employeurs d'un grand hôtel parisien, enregistre très précisément ses horaires de travail à l'aide d'une horloge disposée à l'intérieur même de l'ascenseur. Cette horloge «d'époque» fonctionne avec un simple balancier (donc type pendule ).

Que l'ascenseur monte ou descende, on considèrera ses accélérations et décélérations  $a_e$  parfaitement uniformes et constantes de même valeur absolue<sup>1</sup>.

Si le liftier est payé à l'heure, mesurée par cette bonne vieille horloge comtoise, est-il sous-payé ou sur-payé?

### EXERCICE N°9: Comète SHOEMAKER-LEVY 9

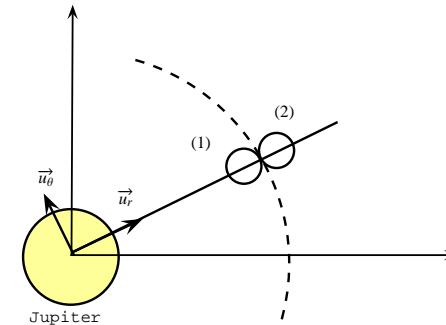
La comète de SHOEMAKER-LEVY 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter et éclater en morceaux à cause des forces de marée de Jupiter. Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994 et cette collision a été suivie en détail et en direct par les astronomes du monde entier. Le but de cet exercice est de comprendre, à l'aide d'un modèle simple, l'origine de la fragmentation.

On supposera que le référentiel Jupiterocentrique  $\mathcal{R}_J$  est galiléen et on négligera dans tout le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposée sphérique et homogène. Données numériques : rayon de Jupiter :  $R_J = 71400 \text{ km}$ , masse de Jupiter :  $M_J = 1,91 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ , constante de gravitation :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ , masse volumique de la glace :  $\mu_c = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle un corps (ici la comète) s'approchant de Jupiter se séparerait en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les deux hypothèses suivantes :

- La comète de masse volumique  $\mu_c$  est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour de Jupiter.
- La comète est constituée de deux sphères identiques de masse  $m$  et de rayon  $d$ , homogènes et disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. Les deux sphères (1) et (2) ne sont liées entre-elles que par leur attraction gravitationnelle mutuelle. On suppose que la disposition des sphères reste inchangée au cours de la rotation de la comète, leurs centres étant toujours alignés avec le centre de Jupiter.

<sup>1</sup>  $a_e < g$



On définit enfin le référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation avec la comète autour de Jupiter ainsi que la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  liée à ce référentiel.

- 1 En appliquant le théorème du centre de masse à la comète en mouvement dans le référentiel Jupiterocentrique, exprimer la vitesse  $\omega$  de rotation de la comète autour de Jupiter. En utilisant le fait que  $d \ll r$ , en déduire la relation:

$$\omega^2 \simeq \frac{GM_J}{r^3}$$

- 2 Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est-il galiléen? Justifier.
- 3 Faire le bilan complet des forces exercées sur la partie (1) de la comète dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  dans le cas où le contact entre les deux sphères est maintenu, en distinguant les forces intérieures et les forces extérieures.
- 4 En traduisant l'équilibre de la sphère (1) dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , montrer que l'action de contact  $N_1$  exercée par la sphère (2) s'écrit de manière approchée:

$$N_1 = \frac{GM_J m}{r^2} \left( \frac{m}{4M_J} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} - 3\epsilon \right) \quad \text{où } \epsilon = \frac{d}{r} \ll 1$$

- 5 En déduire que le contact entre les deux sphères est rompu lorsque la distance  $r$  devient inférieure à  $r_{lim}$  ( $r_{lim}$  est nommée limite de Roche). Exprimer  $\frac{r_{lim}}{R_J}$  en fonction de  $\mu_c$  et  $\mu_c$ . Faire l'application numérique.
- 6 En réalité, les observations ont montré que la fragmentation de la comète s'est produite lorsque celle-ci est arrivée à une distance  $r_0 = 1,5 \cdot R_J$  de Jupiter. Proposer une explication.

### EXERCICE N°10: La limite de Roche et les anneaux de Saturne

«Les anneaux de Saturne sont la conséquence directe de l'existence des forces de marée.»



### 1 LA LIMITE DE ROCHE

Une planète supposée sphérique, de centre  $O$ , de rayon  $R_P$ , et de masse  $M_P$  est supposée fixe dans un référentiel galiléen  $(\mathcal{R}_0)$ . Un satellite sphérique également, de centre  $S$ , de rayon  $R_S$ , et de masse  $M_S$  décrit une orbite circulaire de rayon  $R_0$  autour de  $O$ . Le satellite est supposé en rotation uniforme autour de la planète à la vitesse angulaire  $\omega_0$ . On prendra comme hypothèse forte que la direction  $OS$  reste fixe par rapport au satellite. La planète et le satellite sont supposés tous deux homogènes de masses volumiques respectives  $\mu_P$  et  $\mu_S$ .

On considère un point  $P$  de masse  $m$  du satellite situé à une distance  $r$  de son centre  $S$ , et tel que  $O, P, S$  alignés. On supposera  $R_S \ll R_0$ .

- Montrer que la vitesse angulaire de rotation du satellite autour de la planète est:  $\omega = \sqrt{\frac{GM_P}{R_0^3}}$
- Montrer que la résultante des forces subies par le point  $P$  peut s'écrire:

$$\vec{R} = Gm \left[ \mu_S \frac{4}{3}\pi - \frac{3M_P}{R_0^3} \right] r \cdot \vec{u} \quad (1)$$

**Important:** la masse du satellite à prendre en compte dans le calcul de la force de gravitation exercée par ce dernier sur le point  $P$  est uniquement celle contenue dans la sphère de rayon  $r$  (masse "active").

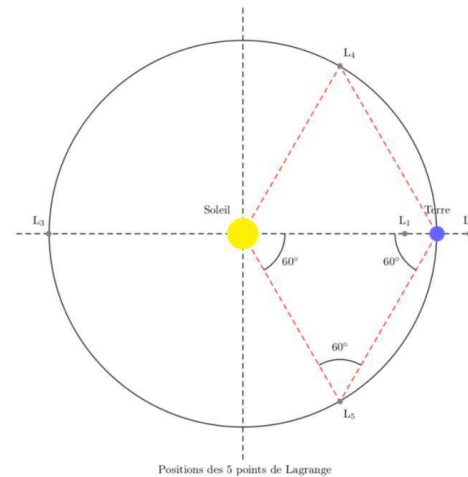
### 2 LES ANNEAUX DE SATURNE.

- Maintenant muni de ce résultat, pouvez-vous justifier l'assertion donnée en introduction de cet exercice?
- Estimer l'ordre de grandeur des anneaux de Saturne. Ce modèle vous semble-t-il cohérent?

On donne:  $\begin{cases} \text{masse de Saturne: } M_P = 568,3 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ \text{masse volumique de la glace à } \approx -273^\circ\text{C: } \mu_s = 895 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \text{rayon de la planète Saturne: } 58232 \text{ km} \end{cases}$

### EXERCICE N°11: Stabilité d'un point de Lagrange

Le James Webb Space Telescope est un télescope spatial servant d'observatoire fonctionnant principalement dans l'infrarouge. Son lancement a lieu le 25 décembre 2021 et la première image de qualité scientifique produite par le télescope est publiée en juillet 2022.



Il existe au voisinage de l'orbite de la Terre autour du Soleil des points particuliers où un objet (de faible masse), par exemple une sonde, situé en ces points n'est soumis à aucune force (dans le référentiel de la Terre). Ce télescope est en orbite autour du Soleil sur un de ces points. Dans ce qui suit on ne s'intéresse qu'aux points  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ .

- En utilisant la figure ci-dessous, justifier que le télescope soit en orbite et non sur la Terre. Lequel des points proposeriez-vous?

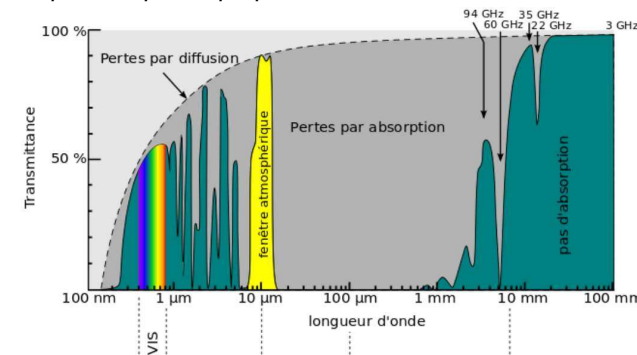


Figure 2: Transmittance des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère terrestre.

- ② Déterminer la distance  $d$  du point de Lagrange d'intérêt au centre de la Terre. Commenter ce qui se passerait si le télescope était placé sur ce point. Peut-on le lâcher sur cette orbite sans dispositif de correction orbitale ?
- ③ Déterminez la vitesse minimale que doit posséder le satellite lors de sa mise en orbite.

On donne:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Constante universelle de la gravitation: } \mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \\ \text{Masse de la Terre: } M_T = 6.10^{24} \text{ kg} \\ \text{Masse du Soleil: } M_S = 1,98.10^{30} \text{ kg} \\ \text{Demi-grand axe de la trajectoire de la Terre: } a_T = 150.10^6 \text{ km} \end{array} \right.$

### EXERCICE N°12: Les enfants qui chahutent en voiture!

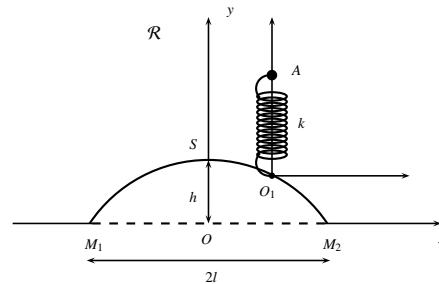
On considère un véhicule en mouvement de translation uniforme de vitesse  $\vec{v}$  sur une route curviligne d'équation cartésienne  $y = f(x)$ .

$\mathcal{R}(O, x, y, z)$  est le référentiel terrestre supposé galiléen.

On associe à un des essieux de ce véhicule le référentiel  $\mathcal{R}'(O', x, y, z)$ .

L'habitacle du véhicule est suspendu par un dispositif d'amortissement. Nous schématiserons cet habitacle par un point matériel  $A$  de masse  $m$  lié à l'origine  $O_1$  par un ressort de raideur  $k$ , de longueur naturelle  $l_0$  forcé à évoluer selon l'axe  $[O_1y)$ .

OBJECTIF: on cherche à étudier les effets de la forme de la route sur les «sensations» des passagers du véhicule.



- ① Dégager que la composante suivant la verticale ascendante  $[Oy)$  de l'accélération du point  $O'$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit:

<sup>2</sup>Compte tenu du potentiel «raisonnable» de destruction (16 missiles terrestres et 32 missiles envoyés depuis 2 sous-marins), cette stratégie porta le nom de "réponse du faible au fort".

<sup>3</sup>Les silos de tirs étaient en fait implantés sur le Plateau d'Albion que nous considérerons à la même latitude que Paris et Moscou.

$$a_y = \frac{v^2 f''}{(f'^2 + 1)^2} \quad \text{avec: } \begin{cases} f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \\ f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \end{cases}$$

- ② Quelle est l'équation régissant le mouvement de l'habitacle de la voiture.
- ③ Le système d'amortissement couplé au ressort de rappel (combiné d'amortissement) applique une force de frottement fluide. Déterminer l'expression la tension  $\vec{T}$  du ressort dans le cas où la force supplémentaire de frottement permet à  $A$  de revenir très rapidement à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$ . Comparer  $\vec{T}$  au poids en commentant le résultat en fonction du profil de la route; expliquer par exemple la sensation de "soulèvement d'estomac".
- ④ Une famille se déplace dans ce véhicule sur la route des vacances plutôt mal entretenue, et donc jalonnée de bosses et creux. Les enfants, installés sur la banquette arrière et toujours avides de sensations, réclament au papa alors au volant de la voiture de faire bondir celle-ci sur une bosse de profil parabolique donné ci-dessus, afin qu'ils se sentent "[...] les plus légers possibles au sommet de la bosse!" Comment ce bon père de famille, attentif au bonheur de ses enfants, doit-il s'y prendre?

### EXERCICE N°13: La guerre froide

La guerre froide fut une période de course à l'armement nucléaire sans précédent entre les deux grandes puissances soviétique et américaine et leurs alliés respectifs du pacte de Varsovie et de l'OTAN. Dans les différents scénarios de guerre totale thermonucléaire imaginés par les stratèges militaires, l'occident devait pouvoir toucher Moscou par des tirs de missiles balistiques initiés depuis ses bases militaires occidentales. La France, bien qu'absente du commandement intégré de l'OTAN depuis 1966 n'échappa pas à cette logique, et lança un vaste programme de développement de missiles balistiques moyenne et longue portée, et développa ainsi le concept de dissuasion nucléaire<sup>2</sup>

Ainsi, des missiles balistiques tirés depuis Paris<sup>3</sup> devaient pouvoir toucher le cœur de la ville de Moscou distante de 2500 kms.

On supposera que Paris et Moscou sont sur le même parallèle de latitude  $\lambda = 45^\circ$  nord, et que l'on tire le missile "plein Est" avec une inclinaison de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale,



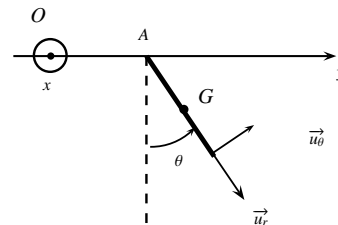
- Calculer, en considérant dans un premier temps la Terre comme un référentiel galiléen, la vitesse initiale à donner au projectile ainsi que son temps de vol.
- Si maintenant on considère le caractère non galiléen de la Terre, l'état major français est-il certain de pouvoir toucher Moscou avec de tels paramètres de vol? Préciser le temps de vol du missile et la position d'impact.

#### EXERCICE N°14: Excitation d'un pendule - résonance

**Prérequis MP2I pour cet exercice:** notion de moment d'inertie d'un solide et théorème du moment cinétique.

Une tige métallique homogène de masse  $m$  et de longueur  $l$  est reliée en  $A$  à un axe  $[Ax]$  par une liaison pivot parfaite. On repère l'orientation de la tige par l'angle  $\theta(t)$  avec la verticale. Un opérateur agit l'axe  $[Ax]$  horizontalement par rapport au référentiel galiléen d'une quantité  $\vec{OA} = y_A(t) \cdot \vec{u}_y$  ( $O$  est fixe dans le référentiel terrestre considéré galiléen).

On donne  $J_{Ax} = \frac{1}{3}ml^2$ .



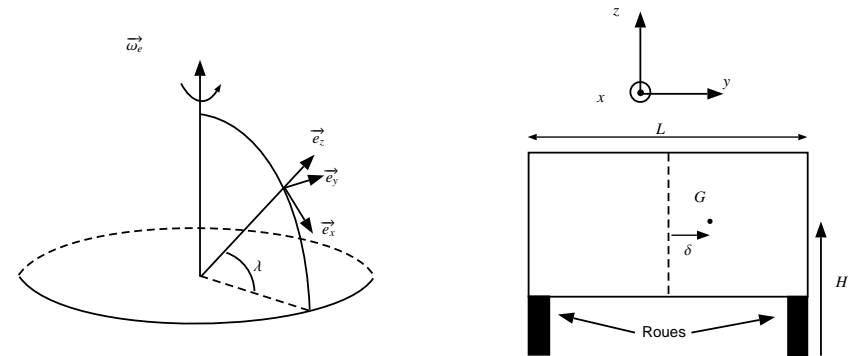
On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  défini  $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

- Quel est le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport au référentiel terrestre? Quel est celui de la barre dans  $\mathcal{R}$ ?
- Faire le bilan des forces exercées sur la tige.
- Calculer les moments de ces forces en projection sur  $[Ax]$ .
- En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire, donner une équation satisfaisante par  $\theta(t)$ .
- Le déplacement  $y_A(t)$  est désormais sinusoïdal, d'amplitude  $Y$  et de pulsation  $\omega$ . En régime sinusoïdal forcé, donner l'amplitude  $\theta_0$  de la variable  $\theta(t)$  dans le cadre des petites oscillations.
- Pour quelle pulsation  $\omega_0$  cette amplitude est-elle maximale?

#### EXERCICE N°15: Souci pour la SNCF?

Un ingénieur prétend qu'il serait bon, pour la longévité des rails du TGV atlantique qui circule depuis 2017 à la vitesse  $v = 320 \text{ km.h}^{-1}$ , de prévoir un dispositif permettant de décaler ensemble à droite ou à gauche les centres de masse de chacun des éléments du train (motrice ou wagon). On propose ici d'étudier cette question en considérant un wagon dont on a décalé d'une distance  $\delta$  le centre de masse (cf schéma).

On supposera que la ligne Paris-Bordeaux est rigoureusement sur un axe nord-sud et que le train se dirige vers Bordeaux.



On donne:  $\left[ \begin{array}{l} \text{latitude moyenne } \lambda = 46^\circ \text{ nord} \\ g = 10 \text{ m.s}^{-2} \\ \text{vitesse de rotation de la Terre sur son axe } \omega_e = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \\ H=1 \text{ m} \end{array} \right.$

- Quelle force, à l'origine de la proposition de cet ingénieur, est effectivement susceptible de créer une usure dissymétrique des rails? Faire le schéma d'un wagon sur lequel on fera figurer l'ensemble des actions extérieures.
- On appellera  $L$  la largeur d'un wagon et  $H$  la hauteur de son centre de masse par rapport au point de contact roue-rail. Déterminer la valeur de  $\delta$  qui assure une correction de l'usure dissymétrique des rails. Faire l'application numérique. Commenter l'intérêt de cette solution technique.