TD11 - Théorie des jeux

Dans cette feuille, les programmes sont écrits dans le langage de votre choix.

Exercice 1

Cet exercice reprend les notations du cours, notamment J_1 et J_2 qui désignent les deux joueurs ; (G, V_1, V_2) qui désigne une arène ; $\mathcal{A}_{J_1}$ les attracteurs associés à F_1, ensemble des conditions de victoire de J_1.

Question 1. Dans le cours, un théorème affirme que : J_1 *possède une stratégie gagnante pour tout sommet de* $\mathcal{A}_{J_1}$ *et uniquement ceux-ci*. Prouver ce théorème.

Question 2. On reprend l'algorithme de calculs des attracteurs de J_1 présenté dans le cours.
- □ **2.1.** Établir la terminaison de cet algorithme.
- □ **2.2.** Prouver sa correction.
- □ **2.3.** Quelle est sa complexité ?
- □ **2.4.** Comment l'adapter pour calculer une stratégie gagnante pour J_1 ?
- □ **2.5.** Comment calculer une stratégie non perdant pour J_2 sur un sommet $v \in V_2$ n'appartenant pas à $\mathcal{A}_{J_1}$?

Exercice 2

On considère un jeu de Nim à 7 allumettes où 1 ou 2 allumettes peuvent être enlevées à chaque tour de jeu.

Question 1. Proposer un codage du jeu.

Question 2. Écire une fonction `attracteur` qui renvoie l'attracteur d'un joueur.

Question 3. Écrire une fonction `minmax` qui calcule le score de chaque nœud.

Deux articles sur le site Interstices (`https://interstices.info/`).

- Jeux de Nim
  `https://interstices.info/jeux-de-nim/`
- Stratégies magiques au pays de Nim
  `https://interstices.info/strategies-magiques-au-pays-de-nim/`

Exercice 3

Écrire une fonction `alphabeta` qui permet de jouer à Othello. Tester différentes heuristiques.

- Informations sur les règles du jeu
  `https://www.ffothello.org/othello/regles-du-jeu/`
- Une présentation des principaux algorithmes du cours appliqués à Othello
  `https://www.ffothello.org/informatique/algorithmes/`

Exercice 4

On considère le jeu de Nim à un seul tas paramétré par deux entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

- Initialement, le jeu comporte $n \in \mathbb{N}^*$ allumettes.
- À son tour, chaque joueur doit prendre entre 1 et k allumettes.
- Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.

Les deux joueurs sont désignés par A et B. Le joueur A commence la partie. $(\mathcal{A}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des attracteurs de A et $(\mathcal{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ celle des attracteurs de B. On note :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_p \qquad \mathcal{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_p$$

Un *état du jeu* est représenté par un couple de $\{A, B\} \times [\![0, n]\!]$, qui donne le joueur dont c'est le tour de jouer et le nombre d'allumettes restantes.

Question 1. Montrer que le jeu de Nim n'admet ni partie nulle ni partie infinie.

Question 2. Montrer que les attracteurs peuvent être décrits de la façon suivante.

$$\mathcal{A} = \{(A, i) | i \in [\![0, n]\!], i \neq 1 \bmod (k+1)\} \cup \{(B, i) | i \in [\![0, n]\!], i = 1 \bmod (k+1)\}$$
$$\mathcal{B} = \{(B, i) | i \in [\![0, n]\!], i \neq 1 \bmod (k+1)\} \cup \{(A, i) | i \in [\![0, n]\!], i = 1 \bmod (k+1)\}$$

Question 3. En déduire que l'un des joueurs admet une stratégie gagnante selon la valeur de n. Donner cette stratégie.

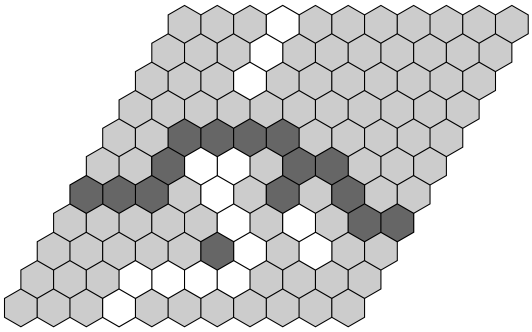
Exercice 5

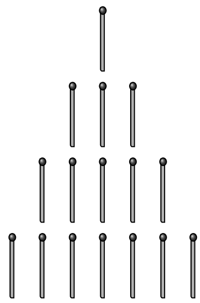
Le jeu de Hex se joue sur un plateau $n \times n$ à cases hexagonales. Tour à tour, chaque joueur marque une case de sa couleur (blanc ou noir). Le premier joueur qui arrive à faire un chemin de cases contiguës reliant ses deux bords (gauche/droite pour le noir, haut/bas pour le blanc) gagne la partie. On suppose que c'est le joueur noir qui commence à jouer. La figure de gauche, ci-dessous, illustre une partie de Hex sur un plateau 11×11 gagnée par le joueur noir.

Question 1. Montrer qu'il n'est pas possible que la grille soit remplie avec les deux joueurs gagnants.

Question 2. Montrer qu'il n'est pas possible que la grille soit remplie avec aucun joueur gagnant.

Question 3. En déduire qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur noir.





Exercice 6

Dans sa version générale, le jeu de Nim est un jeu à deux joueurs où chaque protagoniste retire, à tour de rôle, une ou plusieurs allumettes parmi plusieurs tas d'allumettes. On distingue deux variantes de jeu :

- la variante classique où celui qui retire la dernière allumette est le gagnant ;
- la variante misère où celui qui retire la dernière allumette est le perdant.

Dans sa version la plus simple, il n'y a qu'un tas d'allumettes : n allumettes placées côte à côte. Tour à tour, chaque joueur retire une ou plusieurs allumettes. On note $*n$ un jeu de Nim avec un tas de n allumettes.

Question 1. Montrer que quelle que soit la variante, l'un des joueurs possède toujours une stratégie gagnante au jeu $*n$.

Question 2. On suppose $n \geqslant 2$. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante dans le jeu $*n$, selon la variante choisie.

Lorsqu'on considère un jeu de Nim à plusieurs tas, on note de manière additive le jeu considéré. Par exemple, la figure de droite, plus haut, représente le jeu de Nim $*1 + *3 + *5 + *7$. À chaque tour de jeu, un joueur doit prendre une ou plusieurs allumettes sur une même ligne.

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante facile à appliquer pour le joueur 2 dans la variante classique du jeu $*n + *n$.

Question 4. Soit $1 \leqslant m < n$ deux entiers. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 dans la variante classique du jeu $*m + *n$.

Question 5. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante dans la variante misère pour $*1 + *n$, $n \geqslant 1$, $*2 + *2$ et $*2 + *n$, $n \geqslant 3$.

Question 6. Que dire des questions 3 et 4 dans la variante misère ?

Exercice 7

Étant donnés deux entiers naturels a et b, leurs décompositions binaires sont :

$$a = \sum_{i=0}^{p} a_i \times 2^i \qquad b = \sum_{i=0}^{q} b_i \times 2^i$$

où p et q sont des entiers naturels. Le *ou exclusif bit à bit* de a et b, noté $a \oplus b$ est l'entier c défini par :

$$c = \sum_{i=0}^{\max(p,q)} c_i \times 2^i$$

avec $c_i = (a_i + b_i) \bmod 2$, $a_i = 0$ si $i > p$, $b_i = 0$ so $i > q$.

On considère un jeu de Nim en variante classique, de la forme $*x_1 + *x_2 + \cdots + *x_n$ où les $x_i \in \mathbb{N}$. On veut montrer le *théorème de Sprague-Grundy.*

Il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur si et seulement si $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \neq 0$.

On note $*x_1 + *x_2 + \cdots + *x_n$ l'état du jeu avant le coup du premier joueur et $*y_1 + *y_2 + \cdots + *y_n$ l'état du jeu après le coup du premier joueur. On pose :

$$x = \bigoplus_{i=0}^{n} x_i \qquad y = \bigoplus_{i=0}^{n} y_i$$

Question 1. Montrer que si le joueur 1 a enlevé des allumettes dans le tas d'indice k, alors $y = x \oplus x_k \oplus y_k$.

Question 2. Montrer que si $x = 0$, alors $y \neq 0$ quel que soit le coup choisi.

Question 3. Montrer que si $x \neq 0$, alors il existe un coup tel que $y = 0$.

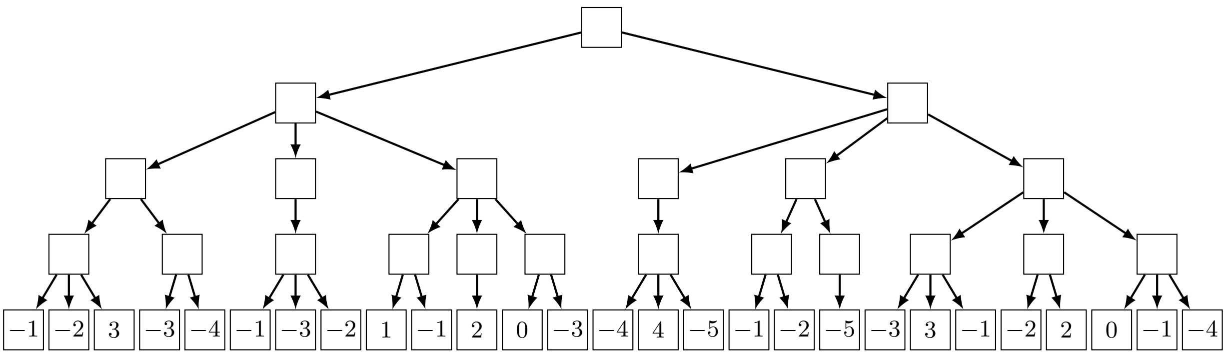
Question 4. Montrer le théorème de Sprague-Grundy.

Question 5. Pour chacun des jeux suivants, déterminer s'il est gagnant pour le premier joueur et décrire un premier coup gagnant le cas échéant.
□ **5.1.** $*1 + *3 + *5 + *7$
□ **5.2.** $*1 + *3 + *5 + *7 + *9$
□ **5.3.** $*1 + *2 + *4 + \cdots + *2^n$
□ **5.4.** $*1 + *3 + *7 + \cdots + *(2^n - 1)$

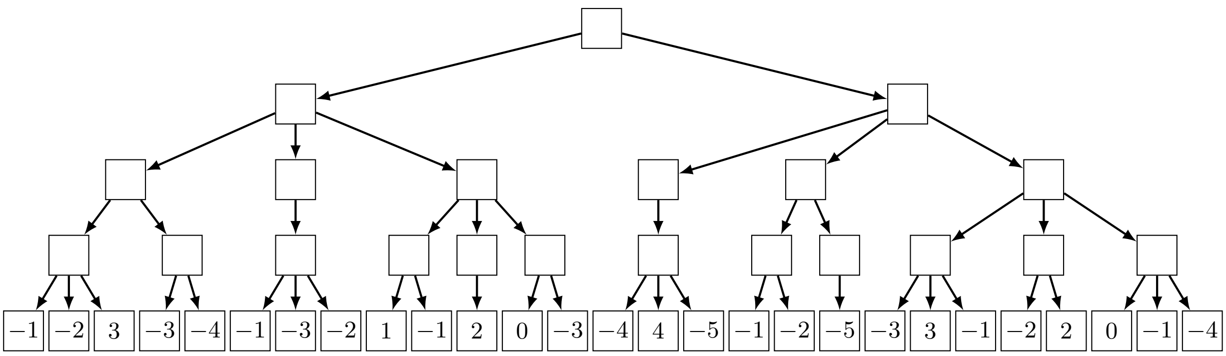
Exercice 8

Étant données les valeurs de l'heuristique aux feuilles de l'arbre représenté ci-dessous, déterminer le score de la racine dans les deux cas suivants.

Question 1. La racine est un état du joueur 1.



Question 2. La racine est un état du joueur 2.



On appliquera l'élagage $\alpha - \beta$ dans les deux cas.