TD14 (3) (éléments de réponse)

Quelques exemples

Question 1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(Ax)}{\vdash p, \neg p}(\vdash \neg)}{\vdash p \vee \neg p}(\vdash \vee)$$

Question 2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash q, p}(Ax)}{\vdash p \to q, p}(\vdash\to) \qquad \dfrac{}{p \vdash p}(Ax)}{(p \to p) \to q \vdash p}(\to\vdash)}{\vdash ((p \to p) \to q) \to p}(\vdash\to)$$

Question 3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, q}(Ax)}{\vdash p, q, \neg p}(\vdash \neg) \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \vdash p, q}(Ax)}{\vdash p, q, \neg q}(\vdash \neg)}{\vdash p, q, \neg p \wedge \neg q}(\vdash \wedge)}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge \neg q}(\vdash \vee)}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q}(\neg \vdash)$$

Question 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, q}(Ax) \qquad \dfrac{}{q \vdash p, q}(Ax)}{p \vee q \vdash p, q}(\vee \vdash)}{\neg q, p \vee q \vdash p}(\neg \vdash)}{\neg p, \neg q, p \vee q \vdash}(\neg \vdash)}{\neg p, \neg q \vdash \neg(p \vee q)}(\vdash \neg)}{\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)}(\wedge \vdash)$$

Correction

Question 5. Pour chaque règle, on suppose que toutes les prémisses sont des séquents valides, et on montre que le séquent conclusion est valide.

- $\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}(Ax)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules à gauche du séquent. En particulier, $\nu \vDash \varphi$, donc ν satisfait au moins une formule à droite du séquent. Donc le séquent est valide.
- $\overline{\Gamma, \bot \vdash \Delta}(\bot)$: Il n'existe aucune valuation ν satisfaisant toutes les formules de gauche, car il y a $\bot$ parmi ces formules. Donc le séquent est valide.
- $\overline{\Gamma \vdash \top, \Delta}(\top)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules à gauche du séquent. On a $\nu \vDash \top$, donc ν satisfait au moins une formule à droite du séquent. Donc le séquent est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}(\wedge \vdash)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et la formule $\varphi \wedge \psi$. Donc $\nu \vDash \varphi$ et $\nu \vDash \psi$. Donc ν satisfait toutes les formules dans la partie gauche de la prémisse, donc (la prémisse est supposée valide) ν satisfait au moins une formule de Δ. Donc le séquent conclusion est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}(\vee \vdash)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et la formule $\varphi \vee \psi$
  - Si $\nu \vDash \varphi$, alors, par validité de la première prémisse, ν satisfait au moins une formule de Δ ;
  - sinon, $\nu \vDash \psi$ et, par validité de la seconde prémisse, ν satisfait au moins une formule de Δ.

  Donc, dans tous les cas, le séquent conclusion est valide.
- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}(\to\vdash)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et la formule $\varphi \to \psi$.
  - Si $\nu \vDash \varphi$, alors $\nu \vDash \psi$ et, par validité de la seconde prémisse, ν satisfait au moins une formule de Δ
  - sinon, $\nu \nvDash \varphi$ et, par validité de la première prémisse, ν satisfait au moins une formule de sa partie droite (mais pas φ), donc ν satisfait au moins une formule de Δ.

  Donc le séquent conclusion est valide.
- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Delta}(\neg \vdash)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et la formule $\neg\varphi$. Donc $\nu \nvDash \varphi$. Par validité de la prémisse, ν satisfait au moins une des formules à droite de la prémisse (mais pas φ), donc ν satisfait au moins une formule de Δ. Donc le séquent conclusion est valide.
- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}(\vdash \wedge)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
  - Si $\nu \nvDash \varphi$, alors par validité de la première prémisse, ν satisfait au moins une formule de Δ ;
  - sinon, si $\nu \nvDash \psi$, alors par validité de la seconde prémisse, ν satisfait au moins une formule de Δ;
  - sinon, $\nu \vDash \varphi \wedge \psi$.

Dans tous les cas, ν satisfait au moins une formule de la partie droite du séquent conclusion, donc le séquent conclusion est valide.

- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}(\vdash \vee)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ. Par validité de la prémisse, ν satisfait au moins une formule de la partie droite de la prémisse.
  - Si $\nu \models \varphi \vee \psi$, alors $\nu \models \varphi$ ou $\nu \models \psi$;
  - sinon, alors ν satisfait au moins une formule de Δ.

  Dans tous les cas, ν satisfait au moins l'une des formules de la partie droite du séquent conclusion, donc le séquent conclusion est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta}(\vdash \to)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
  - Si $\nu \models \varphi \to \psi$, alors ν satisfait bien au moins une formule de la partie droite du séquent conclusion ;
  - sinon, alors forcément $\nu \models \varphi$ et $\nu \not\models \psi$, et par validité de la prémisse, ν satisfait au moins une formule de la partie droite de la prémisse (mais pas ψ), donc ν satisfait au moins une formule de Δ.

  Dans tous les cas, ν satisfait au moins l'une des formules de la partie droite du séquent conclusion, donc le séquent conclusion est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}(\vdash \neg)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
  - si $\nu \models \varphi$, alors par validité de la prémisse, ν satisfait au moins une formule de Δ ;
  - sinon, $\nu \models \neg\varphi$.

  Dans tous les cas, ν satisfait au moins l'une des formules de la partie droite du séquent conclusion, donc le séquent conclusion est valide.

Question 6. Considérons $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent prouvable, par un arbre de preuve terminé $\mathcal{A}$. Montrons que $\Gamma \models \Delta$ par induction structurelle sur $\mathcal{A}$:

- Si $\mathcal{A}$ n'est constitué que d'un seul nœud fermé par l'une des règles sans prémisses : $(Ax), (\bot)$, ou $(\top)$: par correction de ces règles, on a $\Gamma \vdash \Delta$.
- Si la racine de $\mathcal{A}$ possède un seul fils, c'est qu'une des règles $(\wedge \vdash), (\neg \vdash), (\vdash \vee), (\vdash\to)$, ou $(\vdash \neg)$ est utilisée. Dans tous les cas, le sous-arbre de $\mathcal{A}$ enraciné en la prémisse de la règle constitue une preuve de la prémisse. Par hypothèse d'induction, la prémisse est donc est valide ; et par correction de la règle utilisée, on a donc $\Gamma \models \Delta$.
- Sinon, la racine de $\mathcal{A}$ possède deux fils, et la règle utilisée est $(\vee \vdash), (\to\vdash)$, ou $(\vdash \wedge)$. Dans tous les cas, les deux sous-arbres de $\mathcal{A}$ enracinés en les deux prémisses de la règle constitue des preuves de ces deux prémisses. Par hypothèse d'induction, les deux prémisses sont donc valides ; et par correction de la règle utilisée, on a donc $\Gamma \models \Delta$.

Complétude

Question 7. Le séquent $\vdash p \vee \neg p$ est valide, mais en appliquant la règle $(\vee_i^g)$ (resp. $(\vee_i^d)$), on obtient le séquent $\vdash p$ (resp. $\vdash \neg p$) qui n'est pas valide.

Question 8. Le problème provient du fait qu'avec une règle d'élimination, on peut faire apparaitre n'importe quelle nouvelle formule. Si par exemple cette formule n'est pas valide, on va obtenir une prémisse non valide. Par exemple, dans la dérivation ci-dessous, le séquent conclusion est bien valide, mais la prémisse gauche ne l'est pas :

$$\frac{\vdash \bot \quad \vdash \bot \to (p \vee \neg p)}{\vdash p \vee \neg p}(\to_e)$$

Question 9. Pour chaque règle, on suppose que le séquent conclusion est valide, et on montre que toutes les prémisses sont des séquents valides.

- Les règles $(Ax), (\bot)$ et $(\top)$ n'ayant pas de prémisses, il n'y a rien à montrer.
- $\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}(\wedge \vdash)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et les formules φ et ψ. Donc $\nu \models \varphi \wedge \psi$. Donc ν satisfait toutes les formules dans la partie gauche du séquent conclusion (supposé valide), donc ν satisfait au moins une formule de Δ. Donc la prémisse est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}(\vee \vdash)$
  - Prémisse de gauche : soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et φ. Alors, $\nu \models \varphi \vee \psi$, donc, pas validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une des formules de Δ. Donc la prémisse de gauche est valide.
  - Prémisse de droite : soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et ψ. Alors, $\nu \models \varphi \vee \psi$, donc, pas validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une des formules de Δ. Donc la prémisse de droite est valide.

- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta} (\to\vdash)$
  - Prémisse de gauche : soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
    - Si $\nu \models \varphi$, alors ν satisfait bien au moins une des formules de la partie droite de la prémisse ;
    - sinon, on alors $\nu \models \varphi \to \psi$, donc par validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une des formules de Δ.

    Dans tous les cas, ν satisfait bien au moins une des formules de la partie droite de la prémisse, donc cette prémisse est valide.
  - Prémisse de droite : soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et ψ. Alors, forcément, $\nu \models \varphi \to \psi$, donc par validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une formule de Δ. Donc cette prémisse est valide.
- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta} (\neg \vdash)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
  - Si $\nu \models \varphi$, alors ν satisfait bien au moins une des formules de la partie droite de la prémisse ;
  - sinon, $\nu \models \neg\varphi$, et par validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une des formules de Δ.

  Dans tous les cas, ν satisfait bien au moins une des formules de la partie droite de la prémisse, donc la prémisse est valide.
- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta} (\vdash \wedge)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
  - Si $\nu \models \varphi \wedge \psi$, alors $\nu \models \varphi$ et $\nu \models \psi$, et ν satisfait bien au moins une des formules de la partie droite de chacune des prémisses ;
  - sinon, par validité du séquent conclusion, ν satisfait forcément au moins une formule de Δ, donc ν satisfait bien au moins une des formules de la partie droite de chacune des prémisses.

  Donc les deux prémisses sont valides.
- $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta} (\vdash \vee)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ.
  - Si $\nu \models \varphi$ ou $\nu \models \psi$, alors ν satisfait bien au moins une formule de la partie droite de la prémisse ;
  - sinon, alors $\nu \not\models \varphi \vee \psi$, et par validité du séquent conclusion, ν satisfait forcément au moins une des formules de Δ.

  Dans tous les cas, ν satisfait au moins une formule de la partie droite de la prémisse. Donc la prémisse est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta} (\vdash\to)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et la formule φ. Par validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une formule parmi $\varphi \to \psi$ et les formules de Δ.
  - Si $\nu \models \varphi \to \psi$, comme $\nu \models \varphi$, on a aussi $\nu \models \psi$, et ν satisfait bien au moins l'une des formule de la partie droite de la prémisse ;
  - Sinon, ν satisfait forcément l'une des formules de Δ.

  Dans tous les cas, ν satisfait au moins une formule de la partie droite de la prémisse. Donc la prémisse est valide.
- $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta} (\vdash \neg)$: Soit ν une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ et la formule φ. Par validité du séquent conclusion, ν satisfait au moins une formule de la partie droite du séquent conclusion (et pas $\neg\varphi$), donc ν satisfait au moins une formule de Δ. Donc la prémisse est valide.

Question 10. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent tel qu'aucune règle du calcul des séquents ne peut être appliquée. Montrer que :

□ **10.1.** Concernant Γ :

- Γ ne peut pas contenir la formule $\perp$, car sinon on pourrait appliquer la règle $(\perp)$.
- De même, Γ ne peut contenir une formule faisant intervenir un connecteur logique, car sinon la règle gauche correspondant à ce connecteur pourrait s'appliquer.

Donc Γ ne contient que des variables, et éventuellement T.

□ **10.2.** De même, concernant Δ :

- Δ ne peut pas contenir la formule T, car sinon on pourrait appliquer la règle (T).
- De même, Δ ne peut contenir une formule faisant intervenir un connecteur logique, car sinon la règle droite correspondant à ce connecteur pourrait s'appliquer.

Δ ne contient que des variables, et éventuellement $\perp$;

□ **10.3.** Enfin, $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$, car sinon la règle (Ax) pourrait s'appliquer.

□ **10.4.** Soit ν la valuation sur $\mathcal{V}$ telle que :

$$\nu(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \Gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

- comme Γ ne contient que des variables ou $\top$, ν satisfait bien toutes les formules de Γ ;
- comme $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$, ν ne satisfait aucune variable de Δ ;
- comme Δ ne contient que des variables, ou $\perp$, on a donc que ν ne satisfait aucune formule de Δ.

Donc $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide.

Question 11.
□ **11.1.** Lorqu'on applique une règle ayant des prémisses, une formule du séquent possédant un connecteur logique (noté θ) disparait des formules présentes dans les prémisses, et les seules *nouvelles* formules des prémisses sont des sous-formules de θ. Ainsi, dans $\mathcal{A}$, à chaque fois que l'on passe d'un nœud interne à l'un de ses fils, le nombre total de connecteurs logiques du séquent diminue strictement. Ainsi, la hauteur de $\mathcal{A}$ est bornée par le nombre total de connecteurs logiques apparaissant dans Γ et Δ.
□ **11.2.** On considère la stratégie de preuve simple suivante.

- on parcourt les formules de Γ puis de Δ.
- Dès qu'on trouve une formule ayant un connecteur logique, on applique la règle correspondante pour traiter cette formule.

D'après la question 11a, cette stratégie s'arrête forcément en un nombre fini d'étapes. Notons $\mathcal{A}$ l'arbre de preuve obtenu à ce moment là. Si toutes les branches de $\mathcal{A}$ sont fermées par des règles sans prémisses, alors $\Gamma \vdash \Delta$ est valide (par correction du système de preuve). Montrons que si l'une des branches n'est pas fermée de la sorte, alors $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide.

Soit $\Gamma' \vdash \Delta'$ une telle feuille de l'arbre. Puisque la recherche de preuve s'est arrêtée, c'est qu'aucune règle ne peut être appliquée sur ce séquent. D'après la question 10b, $\Gamma' \vdash \Delta'$ n'est pas valide.

- si ce séquent est en fait la racine $\Gamma \vdash \Delta$ de $\mathcal{A}$, on a montré que $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide.
- Sinon, c'est que $\Gamma' \vdash \Delta'$ est une prémisse d'une règle. Puisque cette règle est inversible (question ⊠), comme une prémisse de la règle n'est pas valide, forcément le séquent conclusion n'est pas valide.

Ainsi, on montre de proche en proche en remontant le long de la branche de $\mathcal{A}$ menant à $\Gamma' \vdash \Delta'$ qu'aucun séquent de cette branche n'est valide. En particulier, on finit par remonté jusqu'à la racine de $\mathcal{A}$, et on obtient alors que $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide.

Remarque. En fait, on peut montrer que la valuation construite à la question [0b qui invalide le séquent au bout de la branche est aussi une valuation qui invalide chacun des séquents de la branche. En particulier, cela nous donne un moyen simple de construire, à l'issue de la recherche de preuve, un contre-modèle de $\Gamma \vdash \Delta$.

Question 12. En suivant la stratégie de preuve présentée à la question 11b, on obtient :

$$\dfrac{\vdash p, p}{\vdash p \vee p}(\vdash \vee)$$

La recherche de preuve a échouée, et on obtient le contre-modèle : $\nu(p) = 0$.

Question 13. En suivant la stratégie de preuve présentée précédemment, on obtient :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \vdash p \to q, q\end{matrix} \quad p \vdash q}{(p \to p) \to q \vdash q}(\to \vdash)}{\vdash ((p \to p) \to q) \to q}(\vdash \to)$$

La recherche de preuve a échouée. Aucune règle ne s'applique sur la prémisse de droite. On obtient le contre-modèle :

$$\nu(p) = 1 \qquad \nu(q) = 0$$