Généralités sur les matrices

1. Soit A une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

2. a) Monter qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application vérifiant : $f(O_n) = 0$, $f(I_n) = 1$ et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(A) \neq 0$.

3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que A est inversible ssi $A + B$ est inversible.

Commutation de matrices

4. On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible.

Justifier que A^{-1} et B commutent.

5. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
(indication : utiliser les matrices élémentaires)

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
a) Montrer que

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), AM = MA\} = \{\lambda I_n / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(indication : utiliser les matrices élémentaires)
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A = MN \Rightarrow A = NM$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$

7. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

8. Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

9. Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices antisymétriques.
(distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$.)

Rang d'une matrice

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.
a) Établir l'existence de colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X^tY$.
b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

11. Déterminer le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

12. Déterminer le rang de la matrice $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Calculs par blocs

13. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$
Etablir $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B$

14. Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}C$$

Représentations matricielles

15. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ canoniquement représenté par A.

a) Exprimer $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
b) Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
c) Calculer A^{-1}.

16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Calculer A^n.

17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Calculer A^n.

Matrices semblables

18. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq O_n$ et $A^n = O_n$.

Etablir que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
a) Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
b) En déduire

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}A$$

Trace

21. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \mathrm{tr}(f).f$.
A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

22. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\quad \varphi(M) = MA$
Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.