TD14 - Déduction naturelle (1)

Exercice 1

Trouver un arbre de preuve pour chacun des séquents suivants.

Logique minimale. Cette question se place dans le cadre de la logique minimale : les règles de l'absurdité intuitionniste $\perp_e$, du raisonnement par l'absurde *raa* et du tiers exclu *te* ne sont pas utilisables.

Question 1. $p \vee (p \wedge q) \vdash p$

Question 2. $p \to \neg p \vdash \neg p$

Question 3. $p \to (q \vee r), q \to s, r \to s \vdash p \to s$

Question 4. $p \to q, r \to s \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge s)$

Question 5. $p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$

Question 6. $(p \vee q) \to r \vdash (p \to r) \wedge (q \to r)$

Lois de De Morgan. Établir les trois premiers résultats suivants dans le cadre de la logique minimale. Le quatrième résultat n'est vrai que dans le cadre de la logique classique ; on utilise donc un raisonnement par l'absurde ou le tiers exclus.

Question 7. $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

Question 8. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

Question 9. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Question 10. $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

Logique intuitionniste. On se place dans le cadre de la logique intuitionniste. On peut donc utiliser la règle de l'absurdité intuitionniste $\perp_e$ mais pas celles du raisonnement par l'absurde *raa* et du tiers exclu *te*.

Question 11. $\neg p \vdash p \to p$

Question 12. $p \vee q, \neg q \vdash p$

Question 13. $\neg(p \to q) \vdash q \to p$

Logique classique. Toutes les règles sont désormais autorisées.

Question 14. $p \to (q \vee r) \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$

Question 15. $(p \to r), (\neg q \to \neg p) \vdash p \to r$

Exercice 2

Dans le cadre de la logique classique, montrer les résultats suivants.

Question 1. $(\varphi \vee \psi) \vdash (\psi \vee \varphi)$

Question 2. $(\varphi \to \psi), (\psi \to \omega) \vdash (\varphi \to \omega)$

Question 3. $(\neg\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi \to \psi)$

Question 4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

Question 5. $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Question 6. $\Gamma \vdash \neg\varphi$ si et seulement si $\Gamma \vdash \varphi \to \perp$

Question 7. $\vdash \varphi \to (\psi \to \omega)$

Question 8. $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

Question 9. $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Exercice 3

Sans utiliser le raisonnement par l'absurde, construire des *arbres de dérivation* pour les jugements suivants.

Question 1. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)$

Question 2. $\varphi \to (\psi \to \theta), \psi \to \varphi \vdash \psi \to \theta$

Question 3. $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$

Question 4. $\varphi \to \neg\varphi \vdash \neg\varphi$

Exercice 4

Question 1. Donner une *dérivation* de $\neg\neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi \vdash \varphi$, sans utiliser la règle de raisonnement par l'absurde.

Question 2. Donner une *dérivation* de $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ en utilisant notamment le raisonnement par l'absurde.

Règles de la déduction naturelle

Règles de l'implication

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \qquad \Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_2} \to_e$$

Règles du *et*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} \wedge_e \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} \wedge_e$$

Règle du *ou*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \vee_e$$

Règles de la négation

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$$

Absurdité intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \bot_e$$

Raisonnement par l'absurde

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \mathit{raa}$$

Tiers exclu

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \mathit{te}$$

Règle de $\top$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

Hypothèse

$$\frac{\varphi \in \Gamma}{\Gamma \vdash \varphi} \mathit{hyp}$$

Coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \mathit{cut}$$