1. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

(a) Est-il vrai que $F \cap (G+H) = (F \cap G) + (F \cap H)$?

(b) Est-il vrai que $F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$?

2. Soit (F_n) une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que, si E est de dimension finie, alors $(\bigcap_{n\geq 0} F_n) + G = \bigcap_{n\geq 0} (F_n + G)$ et donner un contre-exemple en dimension infinie.

3. Soit $f : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) \mapsto (x-y+z+t,\ x+2z-t,\ x+y+3z-3t) \end{array} \right)$

Déterminer une base de son noyau et une base de son image.

4. Soit $f : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y-z,\ 2x+y-3z,\ 3x+2y-4z) \end{array} \right)$

Déterminer une base de son noyau et une base de son image.

5. Pour $a \in \mathbb{R}^+$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_a(t) = \cos(at)$

Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}^+}$ est une famille libre d'éléments de l'espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

6. Pour $a \in \mathbb{C}$, on note e_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $e_a(t) = \exp(at)$.

Montrer que la famille $(e_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

7. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$

(a) Etablir $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.

(b) Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

8. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, on suppose $n = \dim E > 1$.

(a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$: $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f) - \dim(Kerf \cap Imf)$

(b) En déduire $\dim Ker(f^2) \leq 2 \dim Kerf$.

9. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + 2f$.

On pose $F_1 = Kerf$, $F_2 = Ker(f + Id_E)$ et $F_3 = Ker(f - 2Id_E)$.

(a) Prouver que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$

(b) On note p_1, p_2, p_3 les projecteurs associés à cette somme directe. Exprimer f en fonction de p_1, p_2, p_3. En déduire l'existence de 3 suites $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : $(\forall n \in \mathbb{N}) f^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3$.

(c) Justifier l'existence de suites $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que : $(\forall n \in \mathbb{N}) f^n = \alpha_n Id + \beta_n f + \gamma_n f^2$.

10. On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour $0 \leq k \leq 2$ on pose $F_k = \{f \in E / (\forall z \in \mathbb{C}) f(jz) = j^k f(z)\}$.

Montrer que $E = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$.

11. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$.

Montrer

$$\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) = E$$

12. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose

$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g = E$$

Montrer que ces sommes sont directes.

13. Soit φ l'application de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ qui à un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ associe le polynôme définie par $\varphi(P) = P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son noyau et son image.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $E = \mathbb{K}_n[X]$, et soit P_0 un polynôme fixé avec $d^0 P_0 = n$.

Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $n+1$ scalaires distincts.

Montrer que la famille définie par $(Q_k = P(X + a_k))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $E = \mathbb{K}_n[X]$.

15. Soit (F_n) une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que, si E est de dimension finie, alors $(\bigcap_{n\geq 0} F_n) + G = \bigcap_{n\geq 0} (F_n + G)$ et donner un contre-exemple en dimension infinie.