Topologie des espaces vectoriels normés

Ce chapitre prolonge les notions de limites de suites et de fonctions étudiées en première année, et introduit la topologie des espaces vectoriels normés. Son objectif est triple :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *introduire la notion de compacité dans un espace vectoriel normé ;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).*

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures.
Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.
Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\Vert\ \Vert_1$, $\Vert\ \Vert_2$, $\Vert\ \Vert_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie.	Une boule ouverte est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Point intérieur, point adhérent.	
Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. [Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A.]	

e) Étude locale d'une application

Contenus	Capacités & Commentaires
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.	

e) Étude locale d'une application, continuité

Contenus	Capacités & Commentaires
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.
Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est cette année **AU PROGRAMME** .