1. **Banque CCINP 2024 :** 60 (endomorphisme sur des matrices)
2. **Banque CCINP 2024 :** 64 (classique, noyau et image)
3. **Banque CCINP 2024 :** 71 (projection sur une droite)
4. **[CCINP]** Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.
   (b) Soit un vecteur non nul $x \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, montrer que $(x, f(x))$ est libre.
   (c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) (facultatif) Montrer que $\{g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathrm{f}, \mathrm{f}^2)$.
5. **[CCINP]** Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E et f un endomorphisme de E.
   (a) Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (i) $p \circ f = f \circ p$.
   (ii) $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.
   (b) Si E est de dimension finie, en déduire la dimension du commutant $C(p) = \{f \in \mathcal{M}(E) \mid f \circ p = p \circ f\}$ de p.
6. **[Centrale]** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
   On dit que f vérifie la propriété (A) s'il existe un projecteur p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$.
   (a) Supposons que f vérifie (A), déterminer $p \circ f \circ p$ et en déduire que $f^2 = 0$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $f^2 = 0$, alors f vérifie la propriété (A).
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (les polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $2n - 1$), on définit $f : E \to E$ par : $\forall P \in E,\ f(P) = P^{(n)}$. Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, un supplémentaire de $\ker(f)$ et en déduire un projecteur simple p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$.
7. **[Centrale]** *Endomorphismes et permutations*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.
   (a) Pour $\sigma \in S_n$ on pose $\varphi_\sigma \colon s \in S_n \mapsto s \circ \sigma \in S_n$. Montrer que φ_σ est une permutation de S_n.
   (b) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\sigma \in S_n$, on définit une application linéaire en posant $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $p_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$.
   Montrer que p_n est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.
   (c) Soient H l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ et v un vecteur non nul de H. Montrer que $\{f_\sigma(v),\ \sigma \in S_n\}$ engendre H.
8. **[MINES]**
   Soit $n \geqslant 2$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \geqslant 0$.
9. **[MINES PONTS]**
   Soit $n \geqslant 1$, $E = \mathbb{C}^n$, on s'intéresse aux couples $(u, v) \in \mathcal{M}(E)^2$ tels que $u^2 = v^2 = Id_E$ et $u \circ v = -v \circ u$. Décrire tous les couples solutions (en précisant les matrices dans une base convenablement choisie) ; montrer qu'il en existe une infinité si $n = 4$, mais aucun si $n = 3$.
10. **[Centrale]** *symétries qui anticommutent*
    Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = Id_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.
    (a) Montrer que la dimension de E est paire.
    (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.