# **Exercice :** *Séries de fonctions* **(environ 1h)**

## D'après un problème Centrale PC 2009 math 1

**III.A.1)** On a (dénominateur non nul) :

$$\begin{aligned}
\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} &= n.\frac{1}{x+n}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \\
&= \left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= 1+\frac{x(x-1)}{2}.\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne (les quantités sont positives donc les ln existent)

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) = \frac{x(x-1)}{2}.\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $2>1$ $\boxed{\text{la série } \sum \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \text{ converge absolument.}}$

**III.A.2)** la série converge. On peut donc noter $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$ . On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(w_n(x))-\ln(w_{n-1}(x))\right] = S(x).$$

et donc

$$\lim_{n->+\infty}(\ln(w_n(x)) = S(x)+\ln(w_0(x)) \quad \text{ie} \quad \lim_{n->+\infty}(w_n(x)) = \exp\left(S(x)\right)$$

$l(x)=\exp\left(S(x)\right)$ est bien un réel strictement positif.

**III.B)** la question précédente nous donne tout de suite un équivalent :

$$|a_n u_n(x)| \sim l(x)\,|a_n v_n(x)|$$

La série $\sum a_n u_n(x)$ converge absolument si et seulement si la série $\sum l(x)a_n v_n(x)$ converge absolument, ce qui équivaut car $l(x)\neq 0$ à la convergence absolue de la série $\sum a_n v_n(x)$ .

$$\boxed{\sum a_n u_n(x) \text{ converge absolument si et seulement si } \sum a_n v_n(x) \text{ converge absolument}}$$

**III.C.1)** Chaque fonction $a_n u_n$ est continue décroissante positive sur $]0,+\infty[$ . De plus la série $\sum a_n u_n(x)$ converge normalement sur tout segment $[\alpha,\beta]\subset]0,+\infty[$ car

$$|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n|\,u_n(x) \leqslant |a_n|\,u_n(\alpha)$$

et comme $\alpha>0$ , $\sum |a_n u_n(\alpha)|$ converge par définition de $\mathcal{A}$ .

$f_a$ est donc une somme de série de fonctions continues qui converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$

$$\boxed{f_a \text{ est continue sur } ]0,+\infty[}$$

**III.C.2)** La majoration $|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n|\,u_n(\alpha)$ est aussi valable sur $[\alpha,+\infty[$ , et donc on a aussi convergence normale sur $[\alpha,+\infty[$ . Chaque fonction $u_n$ tend vers 0 si $x$ tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x->+\infty}\left(f_a(x)\right)=0}$$

**III.D.1)** Si on prend : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $a_n = \frac{1}{n!}$ on a $n^2 \frac{v_n(x)}{n!} \sim \frac{n^{2-x}}{n!} -> 0$ et donc $\sum \frac{v_n(x)}{n!}$ converge absolument. Donc d'après **III.B.** $\boxed{\left(\frac{1}{n!}\right) \in \mathcal{A}}$

**III.D.2)** Si on prend : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $a_n = 1$ la série $\sum v_n(x)$ est une série de Riemann qui converge seulement pour $x > 1$ $\boxed{(1) \notin \mathcal{A}}$

**III.E.1)** $u_n$ est l'inverse d'un polynôme n'ayant pas de racine sur $]0, +\infty[$ donc y est de classe $C^1$. Tous les facteurs de $u_n$ sont positifs on peut donc développer $\ln(u_n)$ et dériver l'expression :

$$\ln(u_n(x)) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

et donc :

$$\frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$$

le sujet suggère de montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

C'est une comparaison série-intégrale . comme $t -> 1/t$ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$ ( idées du **I.B)** avec $q = 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \int_x^{x+n} \frac{dt}{t} = \ln(x+n) - \ln(x)$$

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ |u_n'(x)| \leqslant u_n(x) \left(\tfrac{1}{x} + \ln(\left(1 + \tfrac{n}{x}\right)\right)}$$

**III.E.2)** On sait déjà que pour tout $n$ , la fonction $x -> a_n u_n(x)$ est $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\sum a_n u_n(x)$ converge simplement sur ce domaine.
Pour pouvoir dire que la somme est $C^1$ et pouvoir dériver termes à termes il reste à prouver la convergence normale sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$ de $\sum a_n u_n'(x)$ .
Or

$$\left|a_n u'_n(x)\right| \leqslant |a_n|\, u_n(x) \left(\frac{1}{x} + \ln(\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right) \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} + \ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right)$$

Or $\sum |a_n|\, u_n(\alpha)$ converge .Il suffit de prouver la convergence de $\sum |a_n|\, u_n(\alpha) \ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$
Comme

$$\ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) = \ln(n) + \ln(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha}) = \ln(n) + O(1) \sim \ln(n)$$

on se ramène à l'étude de $\sum |a_n|\, u_n(\alpha)\ln(n)$ .On prend $\alpha' \in ]0, \alpha[$ . Comme $\alpha' > 0$ , $\sum |a_n|\, u_n(\alpha')$ converge.
Mais

$$|a_n|\, u_n(\alpha)\ln(n) = \left(|a_n|\, u_n(\alpha')\right) \frac{u_n(\alpha)\ln(n)}{u_n(\alpha')} \sim \left(|a_n|\, u_n(\alpha')\right) \frac{l(\alpha')}{l(\alpha)} \frac{(n+1)^{\alpha'}\ln(n)}{(n+1)^{\alpha}}$$

et comme

$$\lim \left(\frac{\ln(n)}{(n+1)^{\alpha - \alpha'}}\right) = 0$$

on a :

$$|a_n|\, u_n(\alpha)\ln(n) << |a_n|\, u_n(\alpha')$$

ce qui assure la convergence absolue de la série $\sum |a_n|\, u_n(\alpha)\ln(n)$

$$\boxed{f_a \text{ est } C^1 \text{ sur } ]0, +\infty[}$$

---

♣◇♡♠

# Problème : *Endomorphismes échangeurs* (environ 3h)

# Concours Mines-Ponts PSI Math 2

## A. Quelques considérations en dimension 2

1. La trace est linéaire et donc pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Tr}(-u) = -\mathrm{Tr}(u)$. Si $u$ vérifie **(C3)** alors $u = -u$ et donc $\mathrm{Tr}(u) = -\mathrm{Tr}(u)$ et la trace est donc nulle.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ vérifie } \textbf{(C3)} \text{ alors } \mathrm{Tr}(u) = 0}$$

2. $E$ étant de dimension 2, $\chi_u = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X + \det(u) = X^2 - \delta^2$. Ce polynôme annulant $u$ (Cayley-Hamilton) on en déduit que $u^2 = \delta^2 \mathrm{Id}_E$.
   Le spectre est l'ensemble des racines de $\chi_u$ et vaut ici $\{\delta, -\delta\}$. On a deux valeurs propres en dimension 2 et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, il ne peuvent qu'être de dimension 1.

$$\boxed{u^2 = \delta^2 \mathrm{Id}_E,\ \mathrm{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\},\ \dim(E_\delta(u)) = \dim(E_{-\delta}(u)) = 1}$$

3. Notons $e_+$ un vecteur propre pour $\delta$ et $e_-$ un vecteur propre pour $-\delta$. Ces vecteurs sont indépendants et on a

$$u(e_+ + e_-) = \delta(e_+ - e_-)$$

   $D = \mathrm{Vect}(e_+ + e_-)$ est une droite (car $e_+ + e_- \neq 0$) et elle n'est pas stable par $u$ (car $\delta \neq 0$ et $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$ est libre car $(e_+, e_-)$ l'est). On a donc $u(D) \not\subset D$.
   Posons $F = D$ et $G = u(D)$. Ce sont des droites (car $u$ est inversible et conserve la dimension) non égales et donc en somme directe (intersection réduite à $\{0\}$). Par dimension, ce sont des supplémentaires de $E$. Par définition, $u(F) = G$. De plus $u(G) = u^2(F) = \delta^2 F = F$. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

## B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

4. Un cacul par blocs montre que

$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

   On montre de même que

$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \text{ est somme de deux matrices de carré nul}}$$

5. On vérifie par un calcul par blocs, par exemple, que

$$D^2 = I_n$$

$D$ est donc inversible et est son propre inverse. Le calcul par blocs donne aussi

$$DMD^{-1} = DMD = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} = -M$$

Par définition de la similitude,

$$\boxed{M \text{ et } -M \text{ sont semblables}}$$

6. $u(F) \subset G$ indique qu'il y a un bloc de 0 en haut à gauche.
   $u(G) \subset F$ indique qu'il y a un bloc de 0 en bas à droite.
   Finalement

$$\boxed{\exists A, B/\ Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}}$$

7. Si $F$ et $G$ sont non nuls, la question 4 montre que $u$ vérifie $(C_2)$ en utilisant l'isomorphisme entre endomorphisme et matrice associée dans la base $B$. La question 5 montre de même que $u$ et $-u$ sont semblables.
   Si $F$ est nul, alors $G = E$ et $\text{Im}(u) = u(G) \subset F = \{0\}$. $u$ est l'endomrophisme nul qui vérifie immédiatement **(C2)** et **(C3)**. C'est la même chose si $G = \{0\}$ (travailler alors avec $F = E$).

$$\boxed{u \text{ vérifie } \textbf{(C2)} \text{ et } \textbf{(C3)}}$$

# C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

8. Si $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y$ tel que $x = f(y)$ et donc $f(x) = f^2(y) = 0$. Ainsi $x \in \ker(f)$. Par théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \leqslant 2\dim(\ker(f))$$

   On a donc

$$\boxed{\text{Im}(f) \subset \ker(f) \text{ et } \dim(\ker(f)) \geqslant \frac{\dim(E)}{2}}$$

9. Soit $x \in \ker(a) \cap \ker(b)$. On a $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et comme $u$ est injective $x = 0$. Ceci montre que $\ker(a) \oplus \ker(b)$.
   Soit $x \in E$ ; on a $x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \ker(a) + \ker(b)$ car $a^2 = b^2 = 0$. Ainsi

$$\boxed{E = \ker(a) \oplus \ker(b)}$$

   De plus $\text{Im}(a) \subset \ker(a)$ (car $a^2 = 0$) et $\text{Im}(b) \subset \ker(b)$ (car $b^2 = 0$). $\ker(a) \oplus \ker(b)$ entraîne ainsi $\text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$.
   Mais on a aussi $\forall x \in E,\ x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Im}(a) + \text{Im}(b)$ et donc $E = \text{Im}(a) + \text{Im}(b)$ et finalement $E = \text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$.
   Si l'une des inclusions $\text{Im}(a) \subset \ker(a)$ ou $\text{Im}(b) \subset \ker(b)$ était stricte, on aurait $\dim(E) = \dim(\text{Im}(a)) + \dim(\text{Im}(b)) < \dim(\ker(a)) + \dim(\ker(b)) = \dim(E)$ ce qui est une contradiction. Les inclusions sont donc des égalités.

$$\boxed{\text{Im}(a) = \ker(a) \text{ et } \text{Im}(b) = \ker(b)}$$

10. On a $u(\ker(a)) \subset a(\ker(a)) + b(\ker(a)) = b(\ker(a)) \subset \text{Im}(b) = \ker(b)$ et de même $u(\ker(b)) \subset \ker(a)$. Comme $\ker(a)$ et $\ker(b)$ sont supplémentaires,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

## D. Intermède : un principe de décomposition

11. Soit $k \in N$. Si $x \in \ker(v^k)$ alors $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0) = 0$ et donc $x \in \ker(v^{k+1})$. Ainsi $\ker(v^k) \subset \ker(v^{k+1})$ et

$$\boxed{(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ croît pour l'inclusion}}$$

12. La suite de terme général $d_k = \dim(\ker(v^k))$ est donc aussi croissante. Or, elle est majorée (par $\dim(E)$). Elle est donc convergente.
Comme elle est constituée d'entiers, elle finit par stationner (puisque pour des indices grands, deux termes consécutifs de la suite sont des entiers distants de moins de $1/2$). En notant $p$ le rang à partir duquel la suite stationne, on peut conclure que

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{N}/\ \forall k \geqslant p,\ \ker(v^k) = \ker(v^p)}$$

Comme les noyaux sont emboîtés, on a $\bigcup_{k\leqslant p} \ker(v^k) = \ker(v^p)$. L'intersection avec les noyaux suivants ne change alors rien puisque ceux-ci sont égaux à $\ker(v^p)$.

$$\boxed{\ker(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k)}$$

Si $p$ convient, tout entier plus grand que $p$ convient aussi et on peut supposer $p$ pair quitte à le changer en $p+1$.

13. Les noyaux étant emboîtés, $E^c_\lambda(f) = \ker(v^p) \subset \ker(v^{2p})$. Mais $\ker(v^{2p})$ est aussi inclus dans l'intersection des $\ker(v^k)$ pour $k \geqslant p$ et donc a fortiori dans $\ker(v^p)$. Ainsi,

$$E^c_\lambda(f) = \ker(v^{2p})$$

Soit $x \in E^c_\lambda(f) \cap \mathrm{Im}(v^p)$. Il existe $y$ tel que $x = v^p(y)$ et $v^{2p}(y) = v^p(x) = 0$ montre que $y \in \ker(v^{2p}) = \ker(v^p)$ et donc que $x = v^p(y) = 0$. On a donc $E^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$.
Par théorème du rang, les sommes des dimensions de $E^c_\lambda(f) = \ker(v^p)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ vaut $\dim(E)$. La somme précédente est donc égale à $E$ et nos espaces sont supplémentaires dans $E$.
Si $x \in \mathrm{Im}(v^p)$, $x$ s'écrit $x = v^p(y)$ et $v(x) = v^p(v(y)) \in \mathrm{Im}(v^p)$.
Si $x \in \ker(v^p)$ alors $v^p(v(x)) = v(v^p(x)) = v(0) = 0$ et donc $v(x) \in \ker(v^p)$.

$$\boxed{E^c_\lambda(f) \text{ et } \mathrm{Im}(v^p) \text{ sont des supplémentaires de } E \text{ stables par } f.}$$

14. Supposons, par l'absurde, que $\lambda$ soit valeur propre de $f|_{\mathrm{Im}(v^p)}$. Il existe alors $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire tel que $x \in \ker(v) \subset E^c_\lambda$. Comme $E^c_\lambda(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont en somme directe, $x = 0$ et ceci est contradictoire.
$(X-\lambda)^p$ annule $f|_{E^c_\lambda(f)}$ (par définition de $E^c_\lambda(f)$). La seule valeur propre possible pour $f|_{E^c_\lambda(f)}$ est donc $\lambda$.

$$\boxed{\lambda \notin \mathrm{Sp}(f|_{\mathrm{Im}(v^p)}) \text{ et } \mathrm{Sp}(f|_{E^c_\lambda(f)}) \subset \{\lambda\}}$$

Si $E^c_\lambda(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (ce qui revient à dire que $\lambda$ est valeur propre de $f$), l'inclusion est une égalité (par exemple car dans un $\mathbb{C}$ espace de dimension $\geqslant 1$ tout endomorphisme a au moins une valeur propre).

15. Les seules valeurs propres possibles de $f$ sont $\lambda$ et $\mu$. Comme on est dans un $\mathbb{C}$-espace, il existe des entiers $q$ et $r$ tels que

$$\chi_f = (X-\lambda)^q (X-\mu)^r$$

$q$ et $r$ peuvent être nuls si $\lambda$ ou $\mu$ n'est pas valeur propre mais $q + r = \dim(E)$.
Notons $g = f|_{\mathrm{Im}(v^p)}$. Un polynôme annulant $f$ annule $g$ et le théorème de Cayley-Hamilton indique que

$$(g - \lambda Id)^p \circ (g - \mu Id)^r = 0$$

La question précédente indique que $(g - \lambda Id)^p$ est inversible (car $\lambda$ n'est pas valeur propre de $g$) et en composant par l'inverse, on a donc

$$(g - \mu Id)^r = 0$$

En particulier, $\forall x \in \mathrm{Im}(v^p)$, $x \in \ker((g - \mu Id)^r) \subset \ker((f - \mu Id)^r) \subset E_\mu^c(f)$.
Avec le résultat de la question 13, on a donc

$$E \subset E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$$

Par ailleurs, dans une base adaptée à la décomposition $E = E_\lambda^c(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$, la matrice de $f$ est bloc-diagonale d'après la question 13. De plus, la question 14 indique qu'un bloc n'admet que $\lambda$ comme valeur propre et l'autre n'admet que $\mu$ comme valeur propre. Le polynôme caractéristique du premier bloc est $(X - \lambda)^{\dim(E_\lambda^c(f))}$ et celui du second est $(X - \mu)^{\dim(\mathrm{Im}(v^p))}$. Comme le produit de ces polynômes donne $\chi_f$, on a $\dim(E_\lambda^c(f)) = q$. De même, on a $\dim(E_\mu^c(f)) = r$.
Ainsi, $E = E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$ et les dimensions sont les bonnes (la dimension de $E$ est la somme des dimensions des deux autres espaces). On conclut que

$$\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)}$$

# E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

16. $u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$. Ainsi

$$a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = u^2 \circ a$$

On procède de même avec $u^2 \circ b$.

$$\boxed{a \circ u^2 = u^2 \circ a \text{ et } b \circ u^2 = u^2 \circ b}$$

17. Comme $a$ commute avec $u^2$, il commute avec toutes les itérées de $u^2$ et donc avec $u^p$ puisque $p$ est pair. Ainsi, si $x \in \mathrm{Im}(u^p)$, il existe $y$ tel que $x = u^p(y)$ et $a(x) = a \circ u^p(y) = u^p \circ a(y) \in \mathrm{Im}(u^p)$.
$\mathrm{Im}(u^p)$ est donc stable par $a$ et de même il est stable par $b$.
$a_G$ et $b_G$ sont ainsi des endomorphismes de $G$ et $a_G^2 = (a^2)_G = 0$ (idem pour $b$).

$$\boxed{a_G^2 = b_G^2 = 0}$$

18. Notons $F = E_0^c(u)$. $F$ et $G$ sont stable par $u$, et la restriction $u_F$ de $u$ à $F$ est nilpotente (0 est la seule valeur propre avec la question 14) et la restriction $u_G$ de $u$ à $F$ est inversible (0 n'est pas seule valeur propre avec la question 14).
D'après le résultat admis, il existe une décomposition $F = F_1 \oplus F_2$ telle que $u(F_1) \subset F_2$ et $u(F_2) \subset F_1$.
Avec la question précédente, $u_G$ vérifie **(C2)** et comme c'est un automorphisme, la partie C s'applique. Il existe une décomposition $G = G_1 \oplus G_2$ telle que $u(G_1) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset G_1$.
En posant $H_1 = F_1 \oplus G_1$ et $H_2 = F_2 \oplus G_2$ (le caractère direct des somme découle de $F \oplus G$), on a alors $E = H_1 \oplus H_2$ (on décompose sur $F$ et $G$ et on décompose chaque composante) et $u(H_1) \subset H_2$, $u(H_2) \subset H_1$. Ainsi

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

# F. La condition (C3) implique (C1)

19. Composons l'identité $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ à droite par $\varphi^{-1}$ et à gauche par $\varphi$. On obtient

$$u = -\varphi \circ u \circ \varphi^{-1} = \varphi^2 \circ u \circ \varphi^{-2}$$

On en déduit en composant à droite par $\varphi^2$ que

$$\boxed{\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2}$$

20. Comme on est dans un $\mathbb{C}$-espace, $\varphi^2$ possède une valeur propre $\lambda$. La question 13 donne $E = E^c_\lambda(\varphi^2) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$ (où $v = \varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E$ et pour un bon entier $p$). $F = E^c_\lambda(\varphi^2)$ et $G = \mathrm{Im}(v^p)$ sont des supplémentaires de $E$ stables par $\varphi^2$.
Soit $x \in F$ ; on a $\varphi^{2p}(x) = 0$ et comme $u$ commute avec $\varphi^2$, $\varphi^{2p}(u(x)) = u(\varphi^{2p}(x)) = 0$. Ainsi, $F$ est stable par $u$.
Soit $x \in G$ ; on a l'existence de $y$ tel que $v^p(y) = x$. Comme $u$ et $v = \varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E$ commutent, on a $u(x) = v^p(u(y)) \in G$ et $G$ est stable par $u$.
On a vu que $\varphi^2 \circ u \circ \varphi^{-2} = u$ et comme $F$ et $G$ sont stables par tous les endomorphismes mis en jeu, cette relation reste vraie pour les endomorphismes induit sur $F$ et $G$. L'indécomposabilité de $u$ indique que $F$ ou $G$ est nul et comme $F$ ne 'est pas, c'est que $G$ l'est et que $F = E$. Ainsi, $\varphi^2$ est annulé par $(X - \lambda)^p$ et ne possède que $\lambda$ comme valeur propre.
Si $\mu$ est valeur propre de $\varphi$ et $x$ vecteur propre associé alors $\varphi(x) = \alpha x$ et donc $\varphi^2(x) = \alpha^2 = x$ et donc $\alpha^2 = \lambda$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\} \text{ avec } \alpha^2 = \lambda \text{ unique valeur propre de } \varphi^2}$$

21. $\varphi$ admettant au plus deux valeurs propres, on peut lui appliquer la question 15 et obtenir

$$E = E^c_\alpha(\varphi) \oplus E^c_{-\alpha}(\varphi)$$

Notons que l'hypothèse **(C3)** donne $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$ et donc

$$\forall x,\ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)(u(x)) = -(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)(u(x))$$

puis par récurrence assez simple (en particulier car $\varphi - \alpha \mathrm{I}_E$ et $\varphi + \alpha \mathrm{I}_E$ commutent)

$$\forall x,\ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^k(u(x)) = (-1)^k (\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^k(u(x))$$

Soit $x \in E^c_\alpha(\varphi)$, c'est à dire que $(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^p(x) = 0$. On a alors $(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^p(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in E^c_{-\alpha}(\varphi)$. Ainsi $u(E^c_\alpha(\varphi)) \subset E^c_{-\alpha}(\varphi)$ et de même $u(E^c_{-\alpha}(\varphi)) \subset E^c_\alpha(\varphi)$. En conclusion,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

22. On procède par récurrence sur la dimension de l'espace.
   - Initialisation : on suppose que $u$ est un endomorphisme d'un espace de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme l'espace est de dimension 1, $u$ est indécomposable et la question précédente montre qu'il est échangeur.
   - Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n$. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace $E$ de dimension $n + 1$ et qui vérifie **(C3)**.
     Si $u$ est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.
     Sinon, il existe une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F$ et $G$ non nuls stables par $u$ et tels que $u_F$ et $u_G$ vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à $u_F$ et $u_G$ et permet de décomposer $F$ et $G$. Comme en question 18, on en déduit une décomposition de $E$ qui montre que $u$ est échangeur.

$$\boxed{\textbf{(C3)} \text{ implique } \textbf{(C1)}}$$