Théorème *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons de plus que u est continue. Posons :*

- $N_1 := \sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \left(\dfrac{\|u(x)\|}{N(x)} \right)$.
- $N_2 := \sup\limits_{x \in \mathcal{S}} (\|u(x)\|)$.
- $N_3 := \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} (\|u(x)\|)$.
- $N_4 := \inf\{k \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq kN(x)\}$.

Alors, on a : $N_1 = N_2 = N_3 = N_4$.

Démonstration. On procéde en établissant des inégalités :

- $N_2 \leq N_1$: par définition du suprémum, pour tout $x \neq 0_E$, on a : $\dfrac{\|u(x)\|}{N(x)} \leq N_1$. Donc, si $x \in \mathcal{S}$, on en déduit immédiatement que $\|u(x)\| \leq N_1$ donc $N_2 \leq N_1$.
- $N_1 \leq N_2$: en effet, $\dfrac{x}{N(x)} \in \mathcal{S}$ donc $\left\{ \dfrac{\|u(x)\|}{N(x)}, x \in E \backslash 0_E \right\} \subset \{\|u(x)\|, x \in \mathcal{S}\}$. Un passage au sup fournit l'inégalité souhaitée.
- $N_2 \leq N_3$: en effet, cela vient du fait que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.
- $N_3 \leq N_4$: Si $x \in \mathcal{S}$, alors $\|u(x)\| \leq N_4$ d'où l'inégalité.
- $N_2 \leq N_4$: on utilise le même raisonnement que ci-dessus.
- $N_4 \leq N_2$: $\forall x \in E \backslash \{0_E\}$, on a : $\left\| u\left(\dfrac{x}{N(x)} \right) \right\| \leq N_2$. On en déduit que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq N_2 N(x)$. On en déduit que $N_4 \leq N_2$.

$\square$

Ce théorème étant établi, il est possible de norme l'espace $\mathcal{L}(E,F)$. C'est l'objet de la définition qui suit.

Définition *Si u est une application linéaire continue de E dans F, on pose :*

$$|||u||| := N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$

$|||.|||$ s'appelle la ***triple norme*** *ou norme subordonnée à la norme de E et F. On a en particulier :*

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq |||u|||\ .\|x\|.$$

La conséquence directe de cette définition est énoncée dans le théorème qui suit :

Théorème

(i) $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

(ii) L'application $\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & |||u||| \end{array}$ *est une norme sur $L(E,F)$.*

Démonstration. (i) et (ii) vont être démontrés simultanément. $L(E,F) \neq \emptyset$ car l'application identiquement nulle est continue. De plus, il est bien évident que si λ est un scalaire et u un élément de $L(E,F)$, alors $\lambda.u$ est encore un élément de $L(E,F)$. Il nous reste donc à démontrer que si $u \in L(E,F)$ et $v \in L(E,F)$, alors $u + v \in L(E,F)$. Soit $x \in \mathcal{B}$, la boule unité fermée de E. Alors, $\|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|$. Or, $\|u(x)\| \leq |||u|||$ et $\|v(x)\| \leq |||v|||$. On en déduit donc que $\|u(x)+v(x)\| \leq |||u||| + |||v|||$, ce qui montre que $v+v \in L(E,F)$ (propriété énoncée précédemment). Un passage à la borne supérieure, pour $x \in \mathcal{B}$ démontre donc que :

$$|||u+v||| \leq |||u||| + |||v||| .$$

Les autres propriétés sur cette norme étant aisées à vérifier, je laisse ce soin au lecteur. □

Théorème : *Soient E, F et G, trois espaces vectoriels normés, $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors, $v \circ u \in L(E,G)$ et $|||v \circ u||| \leq |||v||| \,.\, |||u|||$.*

Démonstration. Il est clair que $v \circ u$ est linéaire (si cela n'est pas totalement clair pour vous, n'hésitez pas à le redémontrer rapidement...). De plus, soit $x \in E$. Alors, $\|v \circ u(x)\| = \|v[u(x)]\| \leq |||v||| \, \|u(x)\| \leq |||v||| \,.\, |||u||| \,.\|x\|$. Une division par $\|x\|$, puis un passage au suprémum prouvent que $v \circ u$ est bien continue et que $|||v \circ u||| \leq |||v||| \,.\, |||u|||$. □

Quelques exemples :

- **Exemple 1 :** on considère $\mathcal{C}([0,\pi])$, l'espace des fonctions f continues sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles . Si $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$, il est tout à fait clair que les intégrales $\int_0^\pi |f(x)|dx$ et $\int_0^\pi [f(x)]^2 dx$ existent et sont finies. On peut normer $\mathcal{C}([0,\pi])$ par la norme $\|.\|_1$ définie pour $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$ par : $\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(x)|dx < +\infty$, ou encore par la norme $\|.\|_2$ définie pour $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$ par : $\|f\|_2 = \left(\int_0^\pi [f(x)]^2 dx\right)^2$. Je vous laisse le soin de que ces applications définissent des normes.
  Soit a_0, une fonction continue sur $[0,\pi]$. Considérons alors l'application φ définie par :

  $$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathcal{C}([0,\pi]), \|.\|_2) & \longrightarrow & (\mathcal{C}([0,\pi]), \|.\|_1) \\ & f & \longmapsto & a_0 f \end{array}$$

  Alors, φ est linéaire et continue. Il est évident que φ est une appllication linéaire. En effet, si λ est un réel et f et g, deux fonctions de $\mathcal{C}([0,\pi])$, on vérifie très facilement que l'on a : $\varphi(f+\lambda.g) = \varphi(f) + \lambda.\varphi(g)$. Reste à prouver que φ est continue. On va le démontrer, puis tenter de calculer $|||\varphi|||$. Mais au préalable, il faut montrer que l'application φ est bien définie, autrement dit, que si l'on choisit $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$, alors, $\varphi(f) \in \mathcal{C}([0,\pi])$. C'est immédiat, car un produit de fonctions continues est continu.
  Prouvons à présent que l'application φ est continue. Soit $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$. Posons $g := \varphi(f)$. On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

  $$\|\varphi(f)\|_1 := \int_0^\pi |g(x)|dx = \int_0^\pi |a_0(x)f(x)|dx \leq \left(\int_0^\pi a_0^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\pi f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|a_0\|_2.\|f\|_2.$$

  Cela prouve donc que φ est continue en $0_{\mathcal{C}([0,\pi])}$ donc sur $\mathcal{C}([0,\pi])$ tout entier.
  De plus, on obtient également l'information suivante : $|||\varphi||| \leq \|a_0\|_2$. On va démontrer qu'en fait, cette inégalité est une égalité. En effet, il suffit de supposer que f est la fonction a_0 (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Alors, $\|\varphi(f)\|_1 = \|a_0\|_2^2$ et on en déduit (par définition de la borne supérieure) que $|||\varphi||| \geq \|a_0\|_2$. Finalement, on a donc : $|||\varphi||| = \|a_0\|_2$.

- **Exemple 2 :** on appelle $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On munit cet espace de la norme $\|.\|$ définie pour $P \in \mathbb{R}[X]$, s'écrivant sous la forme $P = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n X^n$, par : $\|P\| := \sup_{n\in\{0,\dots,\deg P\}} |a_n|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < 1$. On appelle u l'application (linéaire, mais à vous de le vérifier) définie par :

$$u = \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}[X], \|.\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |.|) \\ P & \longmapsto & P(x_0) \end{array}.$$

On va démontrer que u est continue et calculer sa norme subordonnée. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, s'écrivant sous la forme $P = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n X^n$. On sait que $u(P) = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n x_0^n$. On peut donc écrire que :

$$|P(x_0)| \leq \|P\|. \sum_{n=0}^{\deg P} |x_0|^n = \|P\|. \frac{1 - |x_0|^{\deg P + 1}}{1 - |x_0|} \leq \frac{\|P\|}{1 - |x_0|}.$$

Cette inégalité nous prouve en particulier que u est continue. Nous allons à présent construire une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ de norme 1, que nous allons tenter de faire converger vers $|||u|||$. (caractérisation de la borne supérieure à l'aide de suites) Choisissons pour tout entier n, $Q_n := \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k X^k$, où ε_k désigne le signe de x_0^k. Il est clair que pour tout entier n, $\|Q_n\| = 1$. On a :

$$u(Q_n) = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k = \frac{1 - |x_0|^{n+1}}{1 - |x_0|}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{|u(Q_n)|}{\|Q_n\|} \leq |||u||| \leq \dfrac{1}{1 - |x_0|}$. Un passage à la limite démontre donc que : $|||u||| = \dfrac{1}{1 - |x_0|}$.