

1. Banque CCINP 2024 : 98
2. Banque CCINP 2024 : 102
3. Banque CCINP 2024 : 104
4. Banque CCINP 2024 : 105
5. Banque CCINP 2024 : 109
6. [CCP] On s'intéresse à des bactéries dans une éprouvette. On note Y leur nombre et on suppose que Y suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$. Chaque bactérie a (indépendamment des autres) une probabilité $p \in]0; 1[$ d'avoir une certaine propriété \mathcal{P} . On désigne par X le nombre de ces bactéries dans l'éprouvette qui ont cette propriété \mathcal{P} .
 - (a) Donner la loi de X sachant $(Y = j)$.
 - (b) Trouver la loi du couple (X, Y) . Puis la loi de X .
 - (c) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
7. [Mines] Soit un sac de billes de n couleurs différentes réparties équitablement. On tire avec remise de façon indépendante. Le processus s'arrête lorsqu'on tire 2 billes de la même couleur successivement. On note X le premier entier k tel que le tirage k donne la même couleur que le tirage $k - 1$, et $X = +\infty$ si une telle répétition n'intervient jamais.
 - (a) Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$.
 - (b) Le processus s'arrête-t-il presque sûrement ?
 - (c) Calculer l'espérance et la variance de X .
8. [Mines Ponts] *Histoire de dés*
On lance indéfiniment un dé équilibré.
 - (a) Soit A_n l'événement «aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.
 - (b) Soit F_k l'événement «le premier 6 est obtenu au k -ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.
 - (c) Soit K l'événement «6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n . En déduire $P(K)$.
 - (d) Exprimer K en fonction des F_k . Retrouver la valeur de $P(K)$.
 - (e) Soient G l'événement «6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement «6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.
9. [Mines Ponts] QCM
Un QCM comporte 20 questions. Pour chacune des questions, il y a k réponses possibles. On obtient un point par bonne réponse. On répond au hasard, on note X le nombre de points obtenus. On nous rend le QCM dans lequel on peut modifier les réponses fausses ; on obtient un demi-point pour chaque nouvelle réponse juste obtenue (réponse au hasard parmi les $k - 1$ restantes). Soit Y le nombre de points obtenus la deuxième fois.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Déterminer l'espérance de Y . Déterminer k pour que $E(Y) = 10$.
10. [Mines Ponts] Couplage d'une loi binomiale et d'une loi de Poisson.
Un promeneur ramasse un nombre N de champignons où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'un champignon est un bolet avec probabilité p et une morille avec probabilité $1 - p$. On note X la loi du nombre de bolets ramassés, Y la loi du nombre de morilles ramassés.
 - (a) Déterminer la loi conjointe de (N, X) . En déduire la loi de X .
 - (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?