Continuité

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^y$ pour $x > 0$ et $f(0,y) = 0$.
a) Montrer que f est une fonction continue.
b) Est-il possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$?

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

3. Calcul de limites détaillé

(a) Montrer que si x et y sont des réels, on a :

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

(b) Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :

$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$

où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

4. Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\{x \in E / \|u(x)\| = 1\}$ est fermée.

5. E un evn ; soit $f : E \to E$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 + ||x||}$.
Montrer que f induit un homéomorphisme de E sur la boule unité ouverte.
Prouver que f est lipschitzienne et déterminer le meilleur rapport possible.

6. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) f est continue,
(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$,
(iii) $\forall B \in \mathcal{P}(F), \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$,
(iv) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.

7. Soient A et B deux fermés non vides d'un evn E, prouver que :

$$A \cap B = \emptyset \iff (\forall x \in E)\,(d(x,A) + d(x,B) \neq 0)$$

Soient A et B deux fermés non vides et disjoints de E.
Construire une application continue de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f/_A \equiv 0$ et $f/_B \equiv 1$.
En déduire l'existence de deux ouverts U et V tels que $A \subset U,\ B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

8. Ouverts et non ouverts

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose : $\begin{cases} N_1(P) = \sup\{|P(t)| \text{ tq } 0 \leq t \leq 1\} \\ N_2(P) = \sup\{|P(t)| \text{ tq } 1 \leq t \leq 2\} \\ \varphi(P) = P(0). \end{cases}$

(a) Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.

(b) Montrer que φ est continue pour N_1.

(c) Montrer que φ est discontinue pour N_2. (Considérer $P_n(t) = (1 - t/2)^n$)

(d) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

(e) Soit $\mathcal{O} = \{P \in E \text{ tq } P(0) \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{O}$ est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2.

9. Soient E un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ définie par

$$T(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \leq 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que T est au moins 2-lipschitzienne.

Applications linéaires continues

10. On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme N_∞. Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $T(u)$ et $\Delta(u)$ les suites définies par

$$T(u)_n = u_{n+1} \text{ et } \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

(a) Montrer que les applications T et Δ sont des endomorphismes continus de ℓ^∞.

(b) Calculer leur "meilleure" constante de Lipschitz possible.

11. Pour $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle a, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

a) Justifier l'existence de $\langle a, u \rangle$.
b) Montrer que l'application linéaire $\varphi_u : a \mapsto \langle a, u \rangle$ est continue et calculer sa "meilleure" constante de Lipschitz possible.
c) Même question avec $\psi_a : u \mapsto \langle a, u \rangle$.

12. Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E qui envoie $f \in E$ sur $x \mapsto f(x) - f(0)$.

(a) Montrer que pour E muni de $\|\,.\,\|_\infty$ l'endomorphisme u est continu et calculer sa "meilleure" constante de Lipschitz possible.

(b) Montrer que pour E muni de $\|\,.\,\|_1$ l'endomorphisme u n'est pas continu.

13. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ pour } f \in E \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \text{ pour } f \in F$$

On ne demande pas de justifier que N_1 et N_2 sont bien des normes.
On définit $T : E \to F$ par : pour tout $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est une application linéaire continue de (E, N_1) dans (F, N_2).

14. $||f(x|| = 1$
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evn et $f\mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que f est continue si et seulement si $\{x \in E \quad tq\, ||f(x|| = 1\}$ est fermé.

15. La dérivation peut-elle être continue ?
On note $E = C^\infty([0, +\infty], \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E de dérivation : $D(f) = f'$.

(a) Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu (considérer $x \to e^{\alpha x}$).

(b) Soit F le sous-ev de E constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ est continu.

16. Déterminer $s = \text{Sup}\left\{\dfrac{||AB||}{||A||.||B||},\, (A, B) \in (\mathcal{M}_n[\mathbb{C})\backslash\{0\})^2\right\}$ quand $||.||$ est $||.||_1$ (resp $||.||_2$ resp $||.||_\infty$).
A-t-on des normes d'algèbres ?