TD n°15 Electromagnétisme: Rayonnement dipolaire - antennes rayonnantes

Applications du cours - Exercices à caractère qualitatif

Exercice n°1: La modulation: un traitement nécessaire pour la transmission hertzienne

❶ Donner l'intervalle approximatif des fréquences audible pour l'homme (spectre audiofréquence).

❷ On se propose de transformer la voix humaine en signal électrique à l'aide d'un microphone. Nous pourrions fabriquer le plus simple des émetteurs en amplifiant ensuite ces signaux électriques et en les reliant à une simple tige métallique en guise d'antenne. Calculer la longueur d'onde des ondes électromagnétiques qui seraient alors émises par un tel système.

Une telle façon de faire n'est pas envisageable. Expliquer pourquoi en présentant au moins deux raisons.

❸ Expliquer comment on remedie au problème.

Exercice n°2: Antennes magnétiques

Les appareils GPS, téléphones portables modernes et montres récepteurs radio sont équipés de multiples antennes sensibles au champ magnétique plutôt qu'au champ électrique.

❶ Décrire de telles antennes.

❷ Expliquer précisément pourquoi elles sont largement préférées à leurs homologues sensibles au champ électrique (qui sont de simples tiges métalliques).

Exercices à caractère technique

Exercice n°3: Durée de vie "classique" de l'atome d'hydrogène

On considère le modèle classique de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron de charge $-e$ de masse m décrit une orbite circulaire autour du proton que l'on supposera fixe dans le référentiel d'étude. On se propose dans ce modèle de déterminer la puissance rayonnée par l'atome et de faire une estimation de sa durée de vie.

❶ Le rayon classique r_c de l'électron est défini comme la distance proton-électron où l'énergie potentielle d'interaction électrostatique est égale à l'énergie de masse mc^2 de l'électron. Déterminer r_c et exprimer la vitesse angulaire ω de rotation l'électron autour du proton en fonction de r_c, du rayon r de l'orbite et de la célérité c de la lumière. Rappeler l'expression de l'énergie totale de l'atome.

❷ Exprimer la puissance $\mathscr{P}_r$ rayonnée par l'atome en fonction des variables r, r_c, e, et c. On s'appuyera sur une relation du cours.

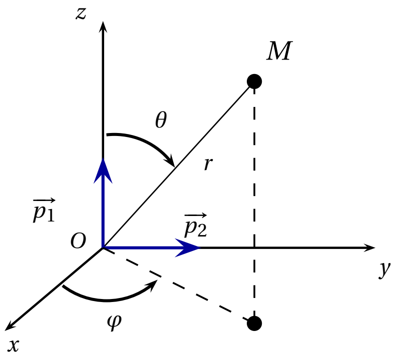
❸ La puissance rayonnée est faible de sorte que la trajectoire de l'électron est sensiblement circulaire à chaque tour. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la distance r entre l'électron et le proton. En déduire une estimation de la durée de vie τ de l'atome d'hydrogène en prenant pour rayon initial le rayon de la première orbite de Bohr $r_b = 0,529.10^{-10}\ m$. Application numérique.

❹ Pour quelle distance électron-proton peut-on dans cette théorie estimer que l'électron est non relativiste? Déterminer la variation relative dr/r du rayon de l'atome d'hydrogène sur un tour. En déduire une condition sur r pour que la trajectoire soit effectivement quasi-circulaire à chaque tour.

❺ Ce modèle vous semble-t-il cohérent? Le critiquer.

On donne pour l'exercice: $\begin{cases} e = 1,602.10^{-19}\ C & m = 9,1.10^{-31}\ kg \\ c = 3.10^8\ m.s^{-1} & \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ S.I. \end{cases}$

EXERCICE N°4: **Antenne en "T": émission à polarisation circulaire**



On étudie dans cet exercice le modèle d'une antenne en "T". Ses deux conducteurs rectilignes et perpendiculaires sont parallèles respectivement aux axes $[Oy)$ et $[Oz)$ du repère dont l'origine O est placée sur l'antenne.

Le champ électromagnétique qu'elle émet est semblable à celui de deux dipôles oscillants placés en O et de moments dipolaires:

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} = p_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{p_2} = p_0 \sin(\omega t)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

On rappelle que le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_1};\overrightarrow{B_1})$, crée par le dipôle $\overrightarrow{p}_1$ dans sa zone de rayonnement s'écrit, en un point M de coordonnées sphériques r, θ, et φ, et en utilisant les vecteurs unitaires de la base sphériques:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_1} = -\dfrac{\mu_0\omega^2}{4\pi r_2} p_0 \sin\theta \cos\left(\omega(t - r/c)\right)\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{B_1} = -\dfrac{\mu_0\omega^2}{4\pi r c} p_0 \sin\theta \cos\left(\omega(t - r/c)\right)\overrightarrow{e_\varphi} \end{cases}$$

❶ Donner les conditions que doit satisfaire une antenne réceptrice pour que l'on puisse dire qu'elle se trouve dans la zone de rayonnement de l'antenne émettrice. On désignera par a la taille de chaque antenne.

❷ L'antenne réceptrice se trouve au point M tel que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{e_x}$, avec $x > 0$.

a· Faire un schéma et donner les valeurs des coordonnées sphériques (r, θ, φ) de M.

b· Représenter le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{B_1})$ au point M, donner l'expression des champs en cordonnées cartésiennes, c'est à dire en fonction notamment de x et des vecteurs de base du repère cartésien.

❸ Etablir l'expression du champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_2})$, créé par le dipôle rayonnant $\overrightarrow{p_2}$ au point M en coordonnées cartésiennes.

❹ En déduire le champ électromgnétique résultant $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ en M. Déterminer son état de polarisation. Lors de la réception de cette onde par une antenne, quel intérêt **pratique** présente ce type de polarisation par rapport à une traditionnelle polarisation rectiligne; on justifiera la réponse.

❺ Calculer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$ au point M, ainsi que sa moyenne temporelle $< \overrightarrow{R} >$. Commenter.

❻ L'antenne réceptrice est parabolique et on la modélise par un disque de rayon a dans le plan Myz. On supposera que $a << x$. Calculer la puissance électromagnétique moyenne $< \mathscr{P} >$ reçue par cette antenne.

EXERCICE N°5: **Rayonnement d'une antenne demi-onde**

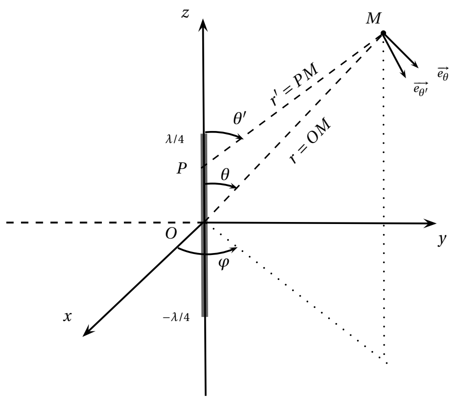
Une antenne rayonnante est en général un simple conducteur considéré comme unidimensionnel (aligné par exemple selon l'axe $[Oz)$) alimenté en son centre par un générateur de courant $I_0 \cdot \cos(\omega t)$. Lorsque l'antenne mesure une demi-longueur d'onde $\dfrac{\lambda}{2}$, il s'établit le long du conducteur une onde stationnaire de courant d'expression:

$$I(z,t) = I_0 \cdot \cos(kz) \cdot \cos(\omega t) \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Un élément de longueur dz parcouru par le courant $I(z,t)$ peut être assimilé à un dipôle élémentaire de moment $\delta\overrightarrow{p}$ tel que:

$$\frac{d\left(\delta\overrightarrow{p}\right)}{dt} = I(z,t)dz\cdot\overrightarrow{e_z}$$

En considérant que la puissance moyenne rayonnée par l'antenne est équivalente à la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans un résistor, on peut définir la résistance dite "de rayonnement" R_r.



❶ Déterminer le champ électrique rayonné à grande distance par l'antenne demi-onde.

❷ En déduire la puissance moyenne rayonnée à grande distance et la résistance de rayonnement de l'antenne.

On rappelle l'expression du champ électrique rayonné à grande distance par un dipôle de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$:

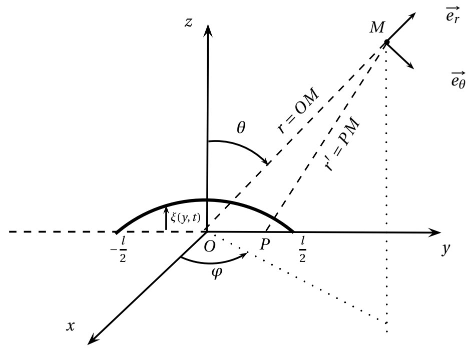
$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-r/c)\sin\theta}{r}\cdot\overrightarrow{e_\theta}$$

On donne le résultat d'intégrale suivant:

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cdot d\theta = 1{,}218$$

EXERCICE N°6: Une antenne originale: la corde rayonnante

On considère une corde chargée tendue entre ses extrêmités et effectuant des oscillations transversales à la pulsation ω. On note λ_c la densité linéique de charge et $\xi(y,t) = \xi_0\cos\left(\frac{\pi y}{l}\right)\cos(\omega t)$ l'élongation de la corde à l'abscisse x et au temps t.



❶ Déterminer le champ électrique crée à grande distance de la corde. On s'appuyera sur le schéma ci-dessous.

❷ Calculer la puissance moyenne rayonnée par la corde.

On rappelle l'expression du champ électrique crée par un moment dipolaire variable $\overrightarrow{p} = p\cdot\overrightarrow{e_z}$ placé en O à grande distance de cette origine:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-r/c)\sin\theta}{r}\cdot\overrightarrow{e_\theta}$$