1. Calcul de l'intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) A l'aide d'une intégration par parties sur des segments justifier l'existence de l'intégrale puis, montrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(indication : $t \mapsto 1 - \cos t$ est une primitive de $t \mapsto \sin t$)

(b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est comprise entre :

$A_n = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \mathrm{cotan}^2 t \sin^2 nt\,\mathrm{d}t$.

(c) Démontrer que $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0$ et $A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4}$.

En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.

(d) Montrer que $\dfrac{I_n}{n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} J = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et donner la valeur de cette derniére intégrale.

En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Calcul de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que pour $0 \leq x \leq \sqrt{n}$ on a : $\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$ et pour x quelconque : $e^{-x^2} \leq \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

(b) Calculer les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ en fonction des intégrales : $K_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p t\,\mathrm{d}t$.

(c) On admet que $K_p \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$ quand $p \to \infty$. (cf compo 1)

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

♣♢♡♠