Exercice n° 6 : Distribution de courant dans une plaque.

① **Symétrie** : M plan $(M\,\vec{e}_x, \vec{e}_z) = \pi^+ \Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e}_y$

Invariances : translation selon x et $y \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(z;t)$

⚠ $\vec{B}$ antisym / $[0,x,y)$ et $\vec{B} \parallel [Oxy)$

Bilan : $\boxed{\vec{B} = B(z;t)\,\vec{e}_y}$

$\Rightarrow B(z;t) = -B(-z,t)$

$$\vec{rot}\,\vec{B}_1 = \mu_0\left(\vec{j}_0 + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\vec{j}_0 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\vec{j}_0\right) = \mu_0\left(1 + \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\right)\vec{j}_0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} +\cancel{\frac{\partial B_{1z}}{\partial y}} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \\ +\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial B_{1z}}{\partial x}} \\ +\cancel{\frac{\partial B_{1y}}{\partial x}} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \end{pmatrix} = \mu_0\left(1 + j\frac{\omega\varepsilon_0}{\gamma}\right)j_0\,\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B_1(z,t)}{\partial z} = \mu_0\left(1 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)J_0\,\frac{|z|}{a}\,e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_1(z>0) = -\mu_0\left(1 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)J_0\,\frac{z^2}{2a}\,e^{j\omega t}\,\vec{e}_y \\ \vec{B}_1(z<0) = +\mu_0\left(1 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)J_0\,\frac{z^2}{2a}\,e^{j\omega t}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

② $\vec{E}_2 \Rightarrow$ par MF avec $\vec{rot}\,\vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$

⚠ par principe de Curie et $\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_2 = E_2(z;t)\,\vec{e}_x$

$$\begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_{2z}}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_{2y}}{\partial z}} \\ \frac{\partial E_{2x}}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_{2z}}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_{2y}}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_{2x}}{\partial y}} \end{pmatrix} = -\frac{\partial B_1}{\partial t}\,\vec{e}_y \Rightarrow \frac{\partial E_2(z;t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} = -j\omega\underline{B_1}$$

$$\text{donc } \frac{\partial E_2}{\partial z} = \pm j\omega\mu_0\left(1 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)J_0\,\frac{z^2}{2a}\,e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2(z;t) = +j\omega\mu_0\left(1 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)J_0\,\frac{z^3}{6a}\,e^{j\omega t}\,\vec{e}_x} \quad (E_2(z=0,t) = 0)$$

③ $\hat{m}$ principe : $\vec{B}_3 \parallel \vec{e}_y$

MA : $\vec{rot}\,\vec{B}_3 = \mu_0 \left(\vec{J}_2 + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} \right) = \mu_0 (\gamma + j\omega\varepsilon_0) \vec{E}_2$

$\Rightarrow -\dfrac{\partial B_{3y}(z,t)}{\partial z} = \mu_0 (\gamma + j\omega\varepsilon_0)\, j\omega\mu_0 \left(1 + j\omega \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}\right) J_0 \dfrac{z^3}{6a} e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \vec{B}_3 = -\mu_0^2 \gamma \left(1 + \dfrac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\right)^2 j\omega J_0 \dfrac{z^4}{24a} e^{j\omega t} \vec{e}_y + \underset{0}{\underset{\parallel}{cte}}$

Enfin : $\vec{rot}\,\vec{E}_4 = -\dfrac{\partial \vec{B}_3}{\partial t}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\partial E_{4x}}{\partial z} - \cancel{\dfrac{\partial E_{4z}}{\partial x}} \right) = +\mu_0^2 \gamma \left(1 + \dfrac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\right)^2 (j\omega)^2 J_0 \dfrac{z^4}{24a} e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_4 = \mu_0^2 \gamma \left(1 + \dfrac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\right) (j\omega)^2 J_0 \dfrac{z^5}{5!\,a} e^{j\omega t} \vec{e}_x}$

TD n° 11

Exercice n° 12 Inductance mutuelle entre deux circuits

1) Par th d'Ampère : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e_\theta}$

2) $\Phi = N \Phi_{1p} = N^2 \int_0^a dz \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r} = N^2 a \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right) \times I$

3) $L = \frac{N^2 a \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$

4) Par th d'Ampère : $\vec{B}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e_\theta}$

a) $\Phi' = N \times \Phi'_{1sp} = N \times \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right) I'$

b) $M = \frac{N \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$

5) a) $u_{tore} = 0 = Ri - e_t = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + M\frac{dI'(t)}{dt}$ (e)

On pose $\begin{cases} I(t) = I_1 e^{j(\omega t+\varphi)} \\ I'(t) = I_0 e^{j\omega t} \end{cases}$

donc (e) $\iff (R + jL\omega) I_1 e^{j(\omega t+\varphi)} + jM\omega I_0 e^{j\omega t} = 0$

$$I(t) = -\frac{jM\omega}{R+jL\omega} I'(t) = \frac{M\omega}{R+jL\omega} I_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

donc $\begin{cases} I_1 = \frac{M\omega}{\sqrt{R+L^2\omega^2}} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L\omega}{R} \end{cases}$

donc $I(t) = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} I_0 \cos\left(\omega t - \arctan\frac{L\omega}{R} - \frac{\pi}{2}\right)$

soit $I(t) = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} I_0 \sin\left(\omega t - \arctan\frac{L\omega}{R}\right)$

b-) $L\omega \gg R \Rightarrow I(t) = +\frac{M}{L} I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{M}{L} I_0 \cos \omega t$

opposition de phase avec le tore.

Exercice n°9 : Evolution d'une distribution de charge dans un métal

① Par application du th de Gauss on trouve très facilement le champ électrique au sein de la sphère :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon_0}}$$

⚠ chp radial ⇒ les e^- vont être accélérés vers le cœur de la sphère
⇒ charge surfacique.

Pendant le régime transitoire, il existe un courant radial

$$\vec{j}(r) = j(r)\,\vec{e_r}$$

② Par équivalence des distributions de charge, on déduit la charge surfacique : $4\pi R^2 \sigma = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$

soit $\boxed{\sigma = \frac{\rho_0 R}{3}}$

③ 2 méthodes :

→ conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \overset{\vec{j}=\gamma\vec{E}}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div}\vec{E} = 0$

→ "MG" : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

donc $\boxed{\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(r,t) = 0} \Rightarrow \boxed{\rho(r,t) = \overbrace{\rho(r,0)}^{\rho_0}\, e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \left(\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)$

Par analyse des symétries de la distribution de courant, on déduit très facilement que $\vec{B} = \vec{0}$ (courant radial)

donc "MA" : $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \vec{0} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j} = \frac{\partial \vec{E}(r,t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\vec{E}(r,t) = \vec{0}$$

résolution immédiate : $\vec{E}(r,t) = \vec{E}(r,0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

avec $\rho(r,t) = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}(r,t) \Rightarrow \boxed{\rho(r,t) = \underbrace{\rho(r,0)}_{\rho_0}\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$

(4) Nouvelle équation : $\tau \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{j} = \gamma \vec{E}$ (e)

En calculant div (e) :

$$\tau \, \mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right) + \mathrm{div}\, \vec{j} = \gamma \, \mathrm{div}\, \vec{E}$$

$$\Rightarrow \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\, \vec{j}\right) + \mathrm{div}\, \vec{j} = \gamma \, \mathrm{div}\, \vec{E}$$

$$\Rightarrow \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \rho(r;t)}{\partial t}\right) + \left(-\frac{\partial \rho(r;t)}{\partial t}\right) = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(r;t)$$

soit $\boxed{\tau \dfrac{\partial^2 \rho(r;t)}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \rho(r;t)}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(r;t) = 0}$

Résolution : $\Delta = 1 - 4\dfrac{\gamma\tau}{\varepsilon_0}$ $\quad \begin{cases} r_+ = \dfrac{1}{2\tau}\left[-1 + \sqrt{1 - \dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}}\right] \\ r_- = \dfrac{1}{2\tau}\left[-1 - \sqrt{1 - \dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}}\right] \end{cases}$

Signe de Δ ?

$\dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}$? $\quad \dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\gamma}{\varepsilon_0} \times \dfrac{m_e}{n_e e^2}\gamma$ en utilisant $\gamma = \dfrac{n e^2 \tau}{m_e}$

$$= \frac{4\gamma^2 m_e}{n_e \varepsilon_0 e^2}.$$

n_e ? Chaque atome de cuivre libère $2 e^-$ donc $n_e = 2 n_{cu}$

or $n_{cu} = \dfrac{N}{m_{1at}} = \dfrac{N}{\frac{M}{\mathcal{N}}} = \dfrac{N \mathcal{N}}{M} \Rightarrow n_e = \dfrac{2 N \mathcal{N}}{M}.$

donc $\dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\gamma^2 m_e M}{2 N \mathcal{N} \varepsilon_0 e^2} = \dfrac{2\gamma^2 m_e M}{N \mathcal{N} \varepsilon_0 e^2} = 3{,}42.10^5 \gg 1$

donc $r_{+/-} \simeq \dfrac{1}{2\tau}\left[-1 \pm j\sqrt{\dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}}\right] = -\dfrac{1}{2\tau} \pm j\sqrt{\dfrac{\gamma}{\tau\varepsilon_0}}$

Ainsi, la loi d'évolution est de type : $\rho(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t\right)$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma}{\tau \varepsilon_0}} = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m \varepsilon_0}} = \omega_p$

C.I : on peut par exemple poser que $\left| \begin{array}{l} \rho(r;0) = \rho_0 \\ \dfrac{\partial \rho(r;0)}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$ (en raison de l'inertie des charges par exemple.

$\Rightarrow \begin{cases} A = \rho_0 \\ B\omega_p - \dfrac{1}{2\tau} A = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = \rho_0 \\ B = \dfrac{\rho_0}{2\tau\omega_p} \end{cases} \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left(\cos \omega_p t + \dfrac{1}{2\tau\omega_p} \sin \omega_p t \right) \underbrace{e^{-\frac{t}{2\tau}}}_{\text{terme de relaxation}}$

Conclusion : le temps de relaxation de la distribution volumique est 2τ