TD14 - Déduction naturelle (3)

Dans tout le sujet, on se donne $\mathcal{V}$ un ensemble infini dénombrable de variables.

Le cours a présenté un exemple de système de preuve correct et complet pour la logique propositionnelle : la **déduction naturelle**. Le défaut de ce système de preuve est qu'il n'est pas très pratique à utiliser en pratique, et qu'il n'existe pas de stratégie de preuve simple pour chercher un arbre de preuve. Le but de ce devoir est d'étudier un autre système de preuve correct et complet, mais possédant une stratégie de recherche de preuve simple : le **calcul des séquents**.

Dans la déduction naturelle, un séquent est de la forme $\Gamma \vdash \varphi$: on ne peut avoir qu'une seule formule dans la partie droite du séquent. Dans le cadre du calcul des séquents, on se donne une définition plus large de séquent : dans ce devoir, un séquent est un un couple de deux ensembles finis Γ et Δ de formules, noté $\Gamma \vdash \Delta$. Un tel séquent est dit valide (noté $\Gamma \vDash \Delta$) si pour toute valuation ν de $\mathcal{V}$, si ν satisfait toutes les formules de Γ, alors il existe une formule de Δ qui est satisfaite par ν.

Remarque. Si Δ ne contient qu'une seule formule, cette définition de séquent valide coïncide avec celle du cours.

L'intérêt d'autoriser plusieurs formules dans la partie droite du séquent est d'obtenir des règles d'inférences plus *symétriques*. Dans la déduction naturelle, il y a deux types de règles :

- les règles d'**introduction** qui permettent de traiter directement la formule à droite du séquent ;
- les règles d'**élimination** qui permettent en fait de gérer indirectement une formule du contexte Γ.

Le défaut des règles d'élimination (pour pouvoir automatiser la recherche de preuve) est qu'il faut deviner quelle nouvelle formule faire apparaitre dans les prémisses. Plus généralement, il faut deviner à quel moment utiliser quelle règle, car appliquer une règle au “mauvais” moment risque de faire apparaitre une prémisse non prouvable, alors que le séquent initial était prouvable.

Dans le calcul des séquents, les règles (présentées ci-dessous) sont plus simples, et ces deux problèmes n'existent pas. Il n'y a que des règles d'introduction : celles permettant de gérer une formule de Δ, et celles permettant de traiter une formule de Γ.

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}\ (Ax)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ (\bot) \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ (\top)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ (\wedge\vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\ (\vdash\wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\ (\vee\vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\ (\vdash\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\ (\to\vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta}\ (\vdash\to)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ (\neg\vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\ (\vdash\neg)$$

Quelques exemples

On commence par prouver quelques formules à l'aide de ce nouveau système de preuve.

Question 1. Prouver $\vdash p \vee \neg p$ avec le calcul des séquents.

Question 2. Prouver $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$ avec le calcul des séquents.

Question 3. Prouver $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$ avec le calcul des séquents.

Question 4. Prouver $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$ avec le calcul des séquents.

Correction

Le but de cette section est de montrer que le calcul des séquents est un système de preuve **correct** : si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable, alors $\Gamma \vDash \Delta$. On rappelle qu'on dit qu'une règle est **correcte** lorsque : si toutes les prémisses de la règle sont des séquents valides, alors le séquent conclusion de la règle est valide.

Question 5. Pour chaque règle du calcul des séquents, montrer qu'elle est correcte.

Question 6. En déduire que le calcul des séquents est un système de preuve correct.

Complétude

Cette partie montre que le calcul des séquents est un système de preuve **complet** (réciproque du résultat précédent) : si $\Gamma \vDash \Delta$, alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable. Pour cela, on va montrer que toutes les règles du calcul des séquents ont une propriété remarquable (que n'ont pas toutes les règles de la déduction naturelle). Une règle d'inférence est dite **inversible** lorsque : si le séquent conclusion de la règle est valide, alors toutes les prémisses de la règle sont des séquents valides. Cette notion correspond en fait à la réciproque de la définition de la correction d'une règle.

Question 7. Illustrer avec un exemple que les règles $(\vee_i^g)$ et $(\vee_i^d)$ de la déduction naturelle ne sont pas inversibles.

Question 8. Pourquoi toutes les règles d'élimination de la déduction naturelle (sauf $(\neg_e)$) ne sont pas inversibles ?

Question 9. Montrer que toutes les règles du calcul des séquents sont inversibles.
La conséquence de ce résultat est que si un séquent est prouvable, et que plusieurs règles peuvent être appliquées à ce séquent : on peut choisir n'importe quelle règle à appliquer en premier, et les prémisses seront toujours prouvables !

Question 10. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent tel qu'aucune règle du calcul des séquents ne peut être appliquée. Montrer que :
□ **10.1.** Γ ne contient que des variables, et éventuellement $\top$;
□ **10.2.** Δ ne contient que des variables, et éventuellement $\bot$;
□ **10.3.** $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$.
□ **10.4.** En déduire que $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide.

Question 11. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent. Soit $\mathcal{A}$ un arbre de preuve (pas forcément terminé) dont $\Gamma \vdash \Delta$ est le séquent à la racine.
□ **11.1.** Justifier que la hauteur de $\mathcal{A}$ est bornée par une valeur dépendant de Γ et Δ que l'on explicitera.
□ **11.2.** En déduire que le calcul des séquents est un système de preuve valide.

Question 12. Chercher une preuve de $\vdash p \vee p$ en calcul des séquents.
En déduire que ce séquent n'est pas valide.

Question 13. Montrer à l'aide du calcul des séquents que $\vdash ((p \to q) \to p) \to q$ n'est pas valide.
En déduire une valuation ne satisfaisant pas la formule $((p \to q) \to p) \to q$.