1. **Banque CCINP 2024 : 25 (convergence dominée)**
2. **Banque CCINP 2024 : 99 (facile, simples révisions)**
3. **[Mines]**

   Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\int\limits_0^{x} tf(t)dt \underset{+\infty}{=} o(x)$.

4. **[Classique]**

   **(a)** Justifier l'existence de $I = \int\limits_0^1 \dfrac{t-1}{\ln(\mathrm{t})}dt$.

   **(b)** Montrer que $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}dx$. Séparez cette intégrale en deux pour calculer la valeur de $I$.

   *( On se placera sur un intervalle du type* $[a, \infty[$ *avec* $a > 0$ *avant de faire le découpage...)*

5. **[Centrale]**

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^3)^n}$.

   **(a)** Déterminer des équivalents de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ en $+\infty$. *(c'est du cours)*

   Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

   **(b)** Montrer que $u_n$ existe pour tout entier $n \geqslant 1$.

   **(c)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre $u_n$ et $u_{n+1}$.

   **(d)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $v_n = \alpha \ln(\mathrm{n}) + \ln(\mathrm{u_n})$ pour $n \geqslant 1$.Déterminer la valeur de $\alpha$ pour que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$. Donner un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

   *(faire un développement limité de* $v_{n+1} - v_n$*.)*

6. **[ Centrale]**

   Soit $\alpha > -1$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ soit intégrable sur $[1; +\infty[$.

   **(a)** Montrer que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ et $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

   **(b)** Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)dt = -(\alpha+1) \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$.

7. **[Mines]**

   Domaine de définition de $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{x+t}dt$.

   Donner un équivalent de $F(x)$ en 0.

   *(Couper l'intégrale en deux puis pour la première moitié faire un découpage astucieux et pour l'autre moitié faire une majoration.)*

8. **[Mines-Telecom]**

   Soit $f$ de classe $C^1$ sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = 0$.

   Montrer que $\int\limits_a^b f^2(x)dx \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2} \int\limits_a^b f'^2(x)dx$.

   *(très court, pensez au inégalités faisant intervenir des carrés.)*