TD n°6 Optique ondulatoire 2: Interférences à deux ondes par division d'amplitude

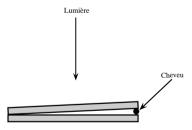
Exercice n°1:

Mesure du diamètre d'un cheveu entre deux lames de verre

Un cheveu est "emprisonné" entre deux lames de verre identiques de longueurs l=10~cm. Ce dernier est disposé à l'extrémité droite du dispositif, tandis que les deux lames sont jointives à l'extrémité gauche. Un large faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde $\lambda=546~nm$ éclaire le système sous incidence normale à la lame inférieure.

On admettra qu'une onde lumineuse se réfléchissant sur un milieu plus réfringeant que son milieu de provenance subit une variation de phase de π (i.e. une différence de marche supplémentaire de $\lambda/2$).

On négligera le phénomène de réfraction dans ce problème.



On constate la présence de N = 73 franges brillantes

Déterminer le diamètre d du cheveu. Vérifier à postériori s'il est pertinent de négliger la réfraction.

EXERCICE N°2: Champ d'interférences visible d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

Soit un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur $e=100~\mu m$. La source lumineuse employée est monochromatique de longueur d'onde $\lambda=550~nm$ et éclaire l'appareil avec un angle d'ouverture $\theta=10^{0}$.

- **Exprimer le nombre** N d'anneaux visibles à l'infini en fonction de e, λ_0 et θ_{max} .
- **2** Calculer la valeur numérique de *N* ainsi que la valeur des ordres d'interférences correspondant à chaque anneau visible.

Exercice n°3:

Couleur d'une lame mince - spectre cannelé

Un faisceau de lumière blanche issue d'une source ponctuelle au foyer objet d'un collimateur L_0 tombe sous incidence $i=30^\circ$ sur une lame de mica à faces rigoureusement parallèles, d'indice n=1,5 (supposé constant) et d'épaisseur $e=0,215~\mu m$. Une lentille L forme l'image de la lame de mica sur un écran E.

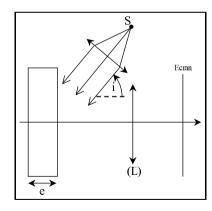


Figure 1: Couleur d'une lame mince

On se place dans le cadre d'interférences à seulement deux ondes. Comment justifier une telle hypothèse? Calculer la différence de marche entre deux rayons qui interfèrent sur la lame de mica, et montrer que celle-ci s'écrit:

$$\delta_{2-1} = 2ne \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2} + \frac{\lambda}{2}}$$

Quel est l'aspect de l'image obtenue sur l'écran?

Qu'observerait-on si la lumière réfléchie était recueillie dans un spectroscope? Préciser alors la couleur obtenue sur l'écran.

Exercice n°4:

Changement de couleur des ailes de papillon: structures go-

niochrome et hydrochrome

Les ailes de nombreux papillons sont irridescentes, c'est à dire que leur couleur change en fonction de l'angle d'éclairage de ces dernières. On appelle cela une structure goniochrome. Par exemple, les ailes du *Papilio Ulysses* passent du bleu-violet au vert suivant qu'il est éclairé en incidences respectivement rasante ou bien normale.



Pour tenter d'expliquer ceci, on modèlise les ailes de papillon par une couche de milieu transparent d'indice n et d'épaisseur e.

Faire apparaître sur un schéma le trajet d'un rayon lumineux arrivant sous incidence θ sur une aile modélisée de papillon. On mettra en évidence la division d'amplitude que provoque cette couche (e,n). Montrer que la différence de marche entre deux rayons issus d'une source à l'infini et interférant en M à l'infini est:

 $\delta = 2ne \cdot \cos \theta_r$ θ_r désignant l'angle de réfraction dans le milieu d'indice n

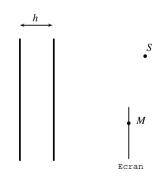
- (on ne tiendra pas compte des éventuelles différences de marche de $\frac{\lambda}{2}$ liées aux réflexions sur le milieu d'indice n).
- Expliquer comment les interférences entre ces deux ondes peuvent engendrer une couleur irridescente. Vérifier que ce modèle est compatible avec le changement de couleur observé pour le papilio Ulysses.
- Un autre papillon, le *Notasacanta dorsalis* du groupe des cassides, possède naturellement des ailes de couleur verte lorsqu'il est éclairé en incidence normale. Lorsque ce dernier est effrayé, ses ailes peuvent devenir rouges par augmentation quasi-instantanée de leur hydratation: une solution physiologique que nous assimilerons à de l'eau pénètre dans la couche modélisant les ailes, augmentant alors l'épaisseur optique des ailes. Cette structure physiologique est dite hydrochrome.

Vérifier que notre modèle permet d'expliquer qualitativement ce mécanisme biologique.

Exercice n°5:

Lames d'air et de verre

On considère une source ponctuelle monochromatique S de longueur d'onde dans le vide λ qui éclaire un système de deux lames de verre à faces parallèles, parallèles entre elles, distantes de h et d'épaisseur négligeable devant h.



- On considère un point M à distance finie des lames situé du même côté de la première lame que la source S
 - a· Donner la position des sources secondaires S_1 et S_2 pour des rayons réfléchis sur la première lame et des rayons transmis par la première lame et réfléchis par la deuxième. Que vaut la distance $d = S_1 S_2$?

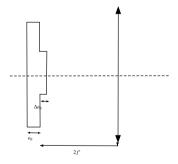
- **b**· A quelle condition y a-t-il interférence constructive en *M*? Observe-t-on des structures interférentielles en disposant un écran comme sur le schéma? Si non, pourquoi? Si oui, lesquelles?
- On considère maintenant un point *M* à l'infini situé du même côté de la première lame que *S* dans une direction qui fait l'angle *θ* avec la normale au plan des lames. A quelle condition y-a-t-il interférence constructive en *M*? En déduire les directions émergentes correspondant à des maximas d'intensité. Ce résultat dépend-t-il de la position du point source *S*?

Exercice n°6:

Mesure du défaut d'épaisseur d'une lame

Une lame en verre (indice n), parfaitement transparente d'épaisseur e_0 , possède une irrégularité $\Delta e_0 << e_0$

- Cette lame est éclairée en incidence normale par un faisceau de lumière parallèle issue d'une source monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide. On forme à l'aide d'une lentille convergente de distance focale f', l'image de la lame sur un écran, de telle manière que la distance lame-lentille vaille 2f'. L'épaisseur e_0 est supposée très faible afin de pouvoir assimiler la lame à un objet plan situé dans un plan perpendiculaire à l'axe optique. Où se situe l'écran? Quel est le grandissement du montage?
- 2 Peut-on mettre en évidence le défaut d'épaisseur sur l'image?
- On considère un interféromètre de Michelson réglé au contact optique. Il est éclairé par le faisceau parallèle utilisé précédemment. On place la lame contre l'un des miroirs, et on fait l'image des miroirs sur l'écran grâce à une lentille. Qu'observe-t-on sur l'écran?
- 4 A quelle condition le défaut d'épaisseur n'est-il pas visible? Comment remédier à cette situtation?

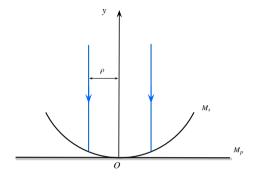


Exercice N°7:

Interféromètre de Newton

On considère le dispositif de Newton constitué d'un miroir sphérique M_s partiellement réfléchissant d'épaisseur négligeable, de rayon R, de centre C, reposant sur un miroir plan M_p . Le point de contact est O.

On éclaire le système par un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ , parallèle à l'axe de révolution [Oy).

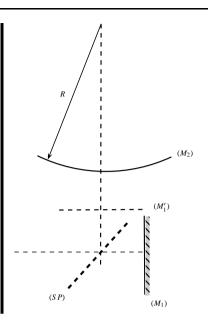


- Expliquer le fonctionnment de cet interféromètre. Où visualise-t-on les franges?
- Donner l'expression de l'intensité lumineuse obtenue à cet endroit. (On supposera que les deux rayons qui interfèrent ont la même intensité et on s'intéressera à des points situés à une distance ρ de l'axe telle que $\rho << R$). On démontrera que $\rho^2 \simeq 2eR$ avec e l'épaisseur du coin d'air ainsi formé.
- Décrire le système d'interférences observé (allure, écartement des franges brillantes...). **Application numérique:** $\lambda = 632, 8 \text{ } nm \text{ } et R = 5 \text{ } m$

Exercice n°8:

Interféromètre de Michelson à miroir sphérique

Le miroir (M_2) d'un interféromètre de Michelson est sphérique de rayon algébrique R tel que |R| >> e, en désignant par e l'épaisseur de lame en tout point du coin d'air formé par les deux miroirs. On éclaire avec une source étendue monochromatique $\lambda = 632, 8 \ nm$ en incidence quasi-normale et on observe (M'1). La lame séparatrice introduit un déphasage de π (du à un traitement spécifique d'une des faces). On observe des anneaux de rayons r_n pour le $n^{\text{ième}}$ anneau noir en partant du centre de la figure d'interférences.



Montrer que la différence de marche vaut:

$$\delta = 2e_0 + \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

avec r désignant le rayon de l'anneau visible mesuré par rapport à l'axe optique.

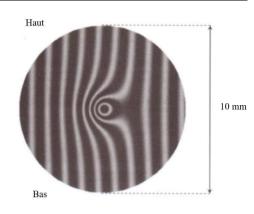
Nommer les deux types de miroir (M_2) possibles. En diminuant e_0 , les anneaux rentrent. On mesure $r_1=5,7$ mm et $r_{112}=6$ cm. En déduire la nature de (M_2) et la valeur de R. Conclure sur la capacité d'un tel dispositif à détecter d'éventuels défauts de planéité d'un miroir.

Exercice n°9:

Miroir déformé

Lors d'un TP d'optique ondulatoire, un étudiant distrait de MPI a malencontreusement, en dépit des mises en garde de son professeur, éclairé un des miroirs d'un interféromètre de Michelson avec un LASER de puissance "inadaptée" avec pour conséquence la déformation de la surface du miroir.

Pour évaluer les dégâts, on règle le Michelson en configuration coin d'air avec une lampe à vapeur de sodium ($\lambda = 589 \ nm$) suivie d'un condenseur.



La figure ci-contre est observée sur un écran au moyen d'une lentille convergente de focale $f' = 25 \ cm$ placée à $35 \ cm$ du miroir mobile.

- Préciser à l'aide d'un schéma les conditions expérimentales nécessaires à l'observation : position du condenseur, réglages en «coin d'air», position de l'écran, valeur α de l'angle au sommet du coin d'air.
- 2 a Déterminer les dimensions de la zone déformée (largeur, hauteur)
 - b. Comment peut-on procéder pour savoir si le défaut est un creux ou une bosse?

Exercice n°10:

Contrôle de qualité de surface par interférmométrie

Un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air est éclairé par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 issue d'une source étendue. Ce faisceau est quasi-parallèle et assez large pour couvrir la surface des miroirs sur lesquels il arrive en incidence normale. A la sortie de l'appareil, la lumière est collectée par une lentille mince convergente



de distance focale f, formant l'image des miroirs sur un écran placé à distance D de la lentille.

- Préciser le rôle de la lentille. On veut obtenir sur l'écran situé à distance D = 2 m une image agrandie 10 fois. Quelle valeur de f doit on prendre?
- On suppose ici que les deux miroirs sont parfaitement plans (ceux d'un interféromètre de TP le sont à $\lambda/20$ près, c'est à dire que la variation de relief sur toute la surface est garantie à moins d'un vingtième de longueur d'onde, soit environ $25 \ nm!$) et que l'interféromètre est réglé au contact optique. Définir cette expression et décrire l'éclairement sur l'écran.
- Même question si l'angle du coin d'air α est non nul, mais très petit, avec une arête verticale. Sur quel réglage de l'appareil faut-il agir (et comment) pour annuler l'angle α ?
- On remplace l'un des deux miroirs par un miroir dont on souhaite contrôler la planéité. On règle son orientation de façon à obtenirle moins de franges possibles sur l'écran. L'image ci-contre montre le réseau de franges obtenu. Commenter: que peut-on dire (qualitativement et quantitativement) à propos du relief de ce miroir? (la longueur d'onde est $\lambda_0 = 500 \ nm$)
- Quelle est la hauteur du plus petit relief détectable avec cette technique?

Exercice n°11:

Interféromètre de Michelson en lumière blanche: structure

d'un spectre cannelé

On considère un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source de lumière blanche.

- **1** La source comporte donc toutes les longueurs d'onde du visible. Estimer sa largeur en fréquence Δv en fonction de v_0 , fréquence centrale du domaine visible.
- **Q** Que peut-on en déduire sur le nombre de franges visibles?
- **9** Décrire la frange centrale $\delta = 0$. Comment sont colorés ses bords?
- **9** Pour la frange correspondant à une différence de marche $\delta = \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, calculer les longueurs d'onde "éteintes", c'est à dire interférant destructivement. Quelle est la couleur de cette frange? On prend $\lambda = 600 \ nm$.
- Pour la frange correspondant à une différence de marche de $\delta = 10\lambda_0$, calculer les longueurs d'onde éteintes c'est à dire interférant destructivement. Quelle est la couleur de cette frange? Pourquoi parle-t-on de blanc d'ordre supérieur?
- On perce un trou dans l'écran à ce niveau et on décompose la lumière passant à travers le trou à l'aide d'un prisme. Expliquer ce qu'on observe.

Exercice n°12:

Variante de l'interféromètre de Michelson en lumière

blanche (spectre cannelé là-encore)

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source émettant de manière uniforme dans l'intervalle de fréquence $[\nu_1, \nu_2]$.

L'intensité lumineuse émise dans la bande élémentaire de fréquence dv appartenant à cet intervalle est:

$$dI_0(v) = I_{0,v} \cdot dv$$

• Montrer que l'intensité totale récupérée en sortie de l'appareil peut s'écrire:

$$I(\delta) = K(1 + f(\delta))$$

avec $f(\delta)$ que l'on explicitera (δ étant la différence de marche), ainsi que K.

- La source utilisée est une source de lumière blanche modélisée par une bande spectrale très large d'intensité homogène. En retenant que les radiations extrêmes significatives de ce spectre sont de longueurs d'onde $\lambda_1=400~nm$ et $\lambda_2=650~nm$, tracer l'intensité lumineuse "réduite" I/I_0 en fonction de la différence de marche δ variant entre $-0.2\mu m$ et $+0.2\mu m$. En déduire une méthode de réglage de l'interféromètre au contact optique.
- On place un écran à la place du détecteur et on appelle F' le foyer image de la lentille L_2 . On fixe la différence de marche δ à une valeur supérieure à $2\mu m$. Qu'observe-t-on en F'?

On place à la sortie de l'interféromètre un spectroscope dont on superpose la fente d'entrée avec le foyer F'. Montrer que l'on obtient un spectre comportant des bandes sombres ou cannelures. Cette structure porte le nom de spectre cannelé. Evaluer le nombre N de cannelures dans le domaine visible en fonction de δ . Proposer alors une méthode de réglage au contact optique du Michelson.

Exercice n°13:

Détection des ondes gravitationnelles par interférométrie

Prévues en 1916 par Einstein, les ondes gravitationnelles ont été détectées par les chercheurs du projet LIGO. Ces ondes gravitationnelles, se propageant à la vitesse de la lumière, ont été produites par la réunion de deux trous noirs situés à 1,3 milliard d'années-lumière. Le détecteur franco-italien VIRGO est un interféromètre de type Michelson, réglé en lame à faces parallèles, dont les deux bras ont une longueur d'environ 3 km notés $L_1 = OA$ et $L_2 = OB$. La source est un puissant laser ($P_0 = 10 \ W$)

Mathématiques spéciales MPI/MPI* Semaine n°11

de grande pureté spectrale (longueur d'onde $\lambda=1~\mu m$ dans le vide). On suppose constante la section S du laser sur tout l'interféromètre. On donne la valeur de la constante de Planck : $h=6,63.10^{-34}~J.s.$

B M₂

Source LASER

O

A

A



Un des effets des ondes gravitationnelles est de modifier l'indice de réfraction en tout point de l?espace. Ainsi, une onde gravitationnelle se propageant selon \overrightarrow{u}_z modifie l'indice optique de facon anisotrope :

$$n_x(\vec{r},t) = 1 - \frac{h_1(\vec{r},t)}{2}$$
 $n_y(\vec{r},t) = 1 + \frac{h_1(\vec{r},t)}{2}$ $n_z = 1$

où $h_1(\vec{r},t) = h_1 \cos \left[2\pi f_{OG} \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$ caractérise l'amplitude de l'onde gravitationnelle, de fréquence $f_{OG} = 1 \ kHz$, $h_1 = 10^{-21}$.

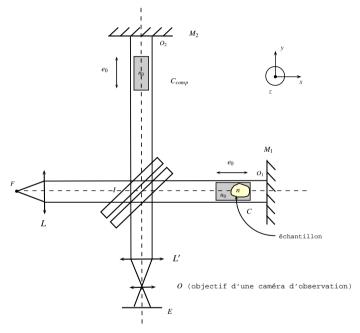
- Evaluer la variation maximale de l'ordre d'interférence due au passage de l'onde gravitationnelle. On suppose ici que l?on a : $L_1 = L_2$.
- Montrer que l'onde gravitationnelle possède une amplitude sensiblement uniforme sur tout l'interféromètre. On la prendra égale à h_1 dans la suite.
- Comment doit-on régler l'interféromètre pour que l'influence de l'onde gravitationnelle soit la plus grand? On se placera dans cette configuration par la suite.
 - **b**· On considère que le nombre de photons en sortie admet des fluctuations caractérisées par un écart type : $\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle}$ où N est le nombre de photons qui traversent une section droite du faisceau pendant la durée $T = 10^{-4} \ s$.

Peut-on détecter la perturbation due au passage de l'onde gravitationnelle?

Exercice n°14:

Réfractométrie interférométrique

On souhaite déterminer l'indice de réfraction n d'un échantillon solide, transparent et immergé dans une cuve (C) remplie d'un milieu liquide d'indice n_0 . Cet ensemble est introduit dans le bras du miroir M_1 d'un interféromètre de Michelson de manière à ce que la cuve soit éclairée entièrement et uniformément:



On introduit dans le bras du miroir M_2 une cuve (C_{comp}) identique à la cuve (C), de même épaisseur e_0 contenant le même milieu liquide d'indice n_0 . On considère que les parois de chaque cuve sont parallèles entre elles et d'épaisseurs nulles. Les faisceaux incidents sont normaux aux parois des cuves.

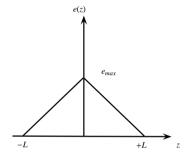
Dans tout ce qui suit, les longueurs IO_1 et IO_2 des deux bras sont supposées égales. L'interféromètre est éclairé par une source monochromatique, légèrement étendue, centrée sur F, foyer objet de la lentille collimatrice (L). La séparatrice est supposée parfaitement compensée et est inclinée ainsi que la compensatrice à 45^0 sur la direction IO_1 . L'interféromètre est préalablement réglé en coin d'air par rotation du miroir M_1

autour de l'axe O_{1Z} . On note ϵ l'angle positif que fait M_1 avec l'image M_2' de M_2 par la séparatrice. La lentille (L'), stigmatique, parallèle au miroir M_2 , forme l'image des franges d'interférences dans le plan (E) avec un grandissement égal à -1.

- Etudier, sans calcul lourd, l'effet de la présence de la cuve (C_{comp}) sur le contraste.
- 2 Déterminer la valeur de la différence de marche en un point du plan (E).

On suppose que l'échantillon est un biprisme de largeur 2L, d'arête parallèle à O_1y ; l'épaisseur traversée e ne dépend ici que de la coordonnée z et vérifie:

$$\frac{e}{e_{max}} + \frac{|z|}{L} = 1 \quad \text{avec } L = 1 \ m$$



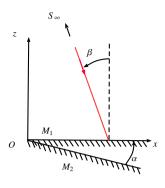
- Quelle est l'image du biprisme par la séparatrice?
- Représenter dans ce cas l'allure des franges, et montrer qu'elles ne peuvent redevenir véritablement rectilignes que si n et n_0 sont égaux.
- Quelle valeur de la différence entre les indices du liquide et de l'échantillon peut-on déceler si un détecteur d'image placé en (E) est capable de détecter un déplacement de frange de l'ordre de 0,1 mm? On donne: $e_{max}=5$ mm, $\epsilon=5.10^{-4}$ rad et $\lambda_0=628$ nm. On suppose $n-n_0$ de l'ordre de 10^{-3} .

Exercice n°15:

Sensibilité de la configuration coin d'air de l'interféromètre $% \left(1\right) =\left(1\right) \left(1$

de Michelson à la cohérence spatiale de source.

On considère l'interféromètre de Michelson configuré en coin d'air d'angle $\alpha=3.10^{-3}~rad$. L'éclairage est assuré par une source monochromatique S située à l'infini, de longueur d'onde $\lambda=683~nm$. La source est dans un premier temps ponctuelle et l'onde incidente arrive sous un angle β sur le miroir M_1 (cf schéma ci-dessous).



- Comment fabriquer en pratique au laboratoire une telle source S?
- **Q** Déterminer les directions des ondes réfléchies par les lames L_1 et L_2 et en déduire les vecteurs d'ondes $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ correspondants.
- **3** L'origine des phases et de l'espace étant prise au point O de l'arête du coin d'air, exprimer l'ordre d'interférences p en un point M en fonction de λ , x, z, α , et β .
- **Φ** La source est étendue, elle constitue une source large caractérisée (puisqu'elle est à l'infini) par son diamètre angulaire $2\beta_m$. Quel est maintenant le domaine de variation de l'angle β ?
- Evaluer la variation de l'ordre d'interférences en fonction de β en un point M du miroir M_1 à la distance d=1 cm de O, pour $\beta_m=10^{-2}$ rad, et ensuite pour $\beta_m=1$ rad. Commenter.
- **6** Déterminer le lieu géométrique des points M(x, y) pour lesquels $\frac{dp}{d\beta} = 0$ pour $\beta = 0$. Commenter ce calcul, ainsi que son résultat.

Exercice n°16:

Spectrométrie interférentielle (principe de la spectrométrie

par TF)

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. On place à la sortie de l'appareil une lentille mince convergente, suivie d'un photorécepteur de petite dimension placé au point focal image de la lentille. On suppose que ce photorécepteur est linéaire: il délivre un signal électrique I proportionnel à l'éclairement reçu. Un système d'acquisition permet de numériser le signal I au cours du temps t, pendant qu'un moteur translate l'un des deux miroirs à vitesse V=cste. On obtient ainsi sur ordinateur une courbe I(t), appelée interférogramme, dont on veut déduire des informations qualitatives et quantitatives sur le spectre de la lumière envoyée dans l'interféromètre. L'expérience est réalisée dans l'air, dont on considère l'indice égal à 1.

- On part du contact optique à t = 0. On appelle δ la différence de marche entre les ondes interférant au niveau du photorécepteur. Relier δ et t.
- 2 L'interféromètre est d'abord éclairé par un laser He-Ne, dont on supposera l'émission parfaitement monochromatique de longueur d'onde $\lambda=632,8~nm$ (cette valeur est supposée connue: ce laser sert à étalonner l'appareil). Montrer que l'interférogramme est de la forme:

$$I(t) = I_0 \left[1 + \cos \frac{4\pi Vt}{\lambda_0} \right]$$

où I_0 est une constante qu'on ne cherchera pas à exprimer (dépendant de la puissance du laser et de la sensibilité du photorécepteur). Tracer cette courbe.

On enregistre 100 franges pendant une durée de 57,5 s. En déduire la valeur de la vitesse V du miroir mobile ainsi que son incertitude de mesure. Préciser les conditions sur les paramètres d'acquisition (fréquence d'échantillonnage, nombre de points) permettant d'acquérir cet interférogramme.

- L'interféromètre est maintenant éclairé par une lampe à vapeur de mercure basse-pression, associée à un filtre permettant d'isoler sa raie verte ($\lambda_1=546,1~nm$). A cause de l'agitation thermique, les différents atomes de mercure contenus dans l'ampoule n'ont pas tous la même vitesse. La lumière émise par l'ensemble de la vapeur atomique n'est donc pas parfaitement monochromatique. Son spectre présente un profil gaussien en raison de l'effet Doppler, de largeur spectrale $\delta\lambda \simeq 1~pm$.
 - **a** Que pouvez-vous dire de la courbe I(t) obtenue avec cette lampe, par rapport à celle donnée par le Laser?
 - **b**· Définir puis calculer la valeur de la longueur de cohérence temporelle L_c associée à cet élargissement spectral. Commenter, sachant que les interféromètres courants utilisés en TP permettent d'obtenir des différences de marche maximales de quelques cm.