E.P.I.T.A. 2019

Corrigé de l'épreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction S_1*

a) Pour tout réel $x > 0$, la série définissant $S_1(x)$ est géométrique de raison e^{-x} : elle converge donc si et seulement si $e^{-x} < 1$, soit $x > 0$, et on a donc :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

b) Lorsque x tend vers 0, $S_1(x)$ tend vers $+\infty$.

Et comme on a $e^{-x} = 1 - x + o(x)$, d'où $1 - e^{-x} \sim x$ en 0, on a donc $S_1(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0.

c) Lorsque x tend vers $+\infty$, $S_1(x)$ tend vers 1, et on a $S_1(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sim e^{-x}$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) Pour $x = 0$, on a $e^{-x\,n^\alpha} = 1$ et la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Pour $x < 0$, le terme général $e^{-x\,n^\alpha}$ tend vers $+\infty$, et la série diverge par le même argument.

b) Pour tout réel $x > 0$, posons : $u_n(x) = n^2\, e^{-x\,n^\alpha}$, soit en posant $t = x\,n^\alpha$:

$$u_n(x) = n^2\, e^{-x\,n^\alpha} = \frac{1}{x^{2/\alpha}}\, t^{2/\alpha}\, e^{-t}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $t = x\,n^\alpha$ tend vers $+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} t^{2/\alpha}\, e^{-t} = 0$ d'après les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielle. Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Par conséquent, on a $e^{-x\,n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Ceci assure la convergence de la série à termes positifs $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) La série définissant $S_\alpha(x)$ converge si et seulement si $x > 0$ et S_α est définie sur $]\,0, +\infty[$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) On remarque que : $\forall\, x \geq \varepsilon,\ 0 \leq e^{-x\,n^\alpha} \leq e^{-\varepsilon\,n^\alpha}$.

Et comme $\varepsilon > 0$, la série $\sum e^{-\varepsilon\,n^\alpha}$ converge d'après la question précédente.

Donc la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ converge normalement, donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Par théorème, on sait que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue. D'après ce qui précède, et d'après la continuité des fonctions $x \longrightarrow e^{-x\,n^\alpha}$, on obtient la continuité de S_α sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$. Comme tout réel $x > 0$ appartient à un tel intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, on en déduit que S_α est continue en tout réel $x > 0$, donc sur $]\,0, +\infty[$.

b) Si $0 < x \leq y$, on a $0 < x\,n^\alpha \leq y\,n^\alpha$, donc $e^{-x\,n^\alpha} \geq e^{-y\,n^\alpha}$, puis par sommation : $S_\alpha(x) \geq S_\alpha(y)$. Ainsi, la fonction S_α est décroissante sur son intervalle de définition $]\,0, +\infty[$.
On sait par théorème qu'une fonction monotone admet des limites, finies ou infinies, aux bornes de son intervalle de définition. Donc S_α admet des limites finies ou infinies en 0 et $+\infty$.

c) Pour $n = 0$, on a : $\forall\, x > 0$, $e^{-x\,n^\alpha} = 1$. Et pour $n \geq 1$, on a $\lim_{x \to +\infty} e^{-x\,n^\alpha} = 0$.
De plus, on a vu que la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ converge normalement, donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Le théorème de double limite s'applique donc au voisinage de $+\infty$ et permet d'affirmer :

$$\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} e^{-x\,n^\alpha} = 1.$$

d) La série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ étant à termes positifs, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$:

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^\alpha}.$$

Puisque S_α admet une limite finie ou infinie en 0, on peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente, ce qui implique, pour tout $N \in \mathbb{N}$, que $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.
Cette inégalité étant vérifiée pour tout entier naturel N, on a nécessairement $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

4°) *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0*

a) Pour $x > 0$ et pour $n \leq t \leq n + 1$, on a $e^{-x\,(n+1)^2} \leq e^{-x\,t^2} \leq e^{-x\,n^2}$, d'où par intégration :

$$e^{-x\,(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \leq e^{-x\,n^2}.$$

b) En sommant pour tout entier naturel n avec $x > 0$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^2}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$S_2(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \leq S_2(x).$$

Enfin, en posant $u = t\sqrt{x}$ dans cette dernière intégrale, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.
D'après l'inégalité précédente et selon la valeur rappelée de cette intégrale, il vient enfin :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

Soit encore, en transformant cette inégalité :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1.$$

c) D'après cette inégalité, on obtient $\lim_{x \to 0} S_2(x) = +\infty$.

Et on a $S_2(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ en 0 car leur quotient tend vers 1 d'après l'encadrement suivant :

$$1 \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S_2(x) \leq 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

5°) *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$*

a) Pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x\,n \leq x\,n^2$, donc $e^{-x n^2} \leq e^{-x n}$, d'où :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n}.$$

b) En calculant la somme de cette série géométrique, on obtient plus précisément en $+\infty$:

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} e^{-x} = o(e^{-x}).$$

On a donc $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$, ce qui implique $S_2(x) - 1 \sim e^{-x}$ en $+\infty$.

6°) *Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$*

a) D'après l'inégalité 4.a) appliquée avec $x > 0$, on obtient pour tout entier naturel N :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-n^2 x} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} e^{-x t^2}\,dt = \int_{N}^{+\infty} e^{-x t^2}\,dt.$$

b) A l'aide du changement de variables $u = x\,t^2$ dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} \leq \int_{N}^{+\infty} e^{-x t^2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{N\sqrt{x}}$ pour $u \geq x\,N^2$, on en déduit pour tout $N \geq 1$ que :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du \leq \frac{1}{2 N x} \int_{x N^2}^{+\infty} e^{-u}\,du = \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

c) Ce qui précède montre qu'on a pour $N \geq 1$: $\sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} \leq S_2(x) \leq \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} + \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'algorithme suivant donne donc un encadrement de $S_2(x)$ à ε près :

$N := 1$; $S := 1 + e^{-x}$; Erreur $:= \frac{e^{-x}}{2x}$;

Tant que Erreur $> \varepsilon$ faire :

$N := N + 1$; $S := S + e^{-x N^2}$; Erreur $:= \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}$;

Ecrire N et S ;

d) Avec $x = 1$ et $\varepsilon = 10^{-7}$, on obtient $N = 4$ et $S = 1,38\,631\,860\ldots$, d'où l'encadrement suivant :

$$1,3\,863\,186 \leq S_2(1) \leq 1,3\,863\,187.$$

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

a) Considérons pour $\alpha > 0$ et $u > 0$ la fonction $u \mapsto e^{-u}\, u^{\alpha-1}$.
Cette fonction est positive et continue sur $]\,0, +\infty[$ et elle est :
- équivalente en 0 à $u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}$, dont l'intégrale converge sur $]\,0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{u^2}$ (car $\lim_{+\infty} e^{-u}\, u^{\alpha+1} = 0$) dont l'intégrale converge sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

b) Une intégration par parties donne pour $0 < a < b$:

$$\int_a^b e^{-u}\, u^{\alpha}\, \mathrm{d}u \;=\; [-e^{-u}\, u^{\alpha}]_a^b \;+\; \alpha \int_a^b e^{-u}\, u^{\alpha-1}\, \mathrm{d}u.$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, il vient donc : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$.
Et comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1$, on en déduit $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 6$, ...
Et par récurrence immédiate, $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!$.
Ainsi, la fonction Γ réalise une extrapolation de la fonction factorielle à $\mathbb{R}_+^*$.

c) La fonction $t \mapsto u = x\,t^{\alpha}$, dont la réciproque est $t \mapsto \frac{u^{1/\alpha}}{x^{1/\alpha}}$, réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de sorte qu'en effectuant ce changement de variables dans l'intégrale $\Gamma(\alpha)$, on ne modifie ni la convergence, ni la valeur de cette intégrale. Comme $\mathrm{d}u = \alpha\, x\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t$, il vient donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}} (x\,t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \alpha\, x\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \;=\; \alpha\, x^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t.$$

Ainsi donc, l'intégrale $I(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$, et on a la relation :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \;=\; \alpha\, x^{\frac{1}{\alpha}}\, I(\alpha).$$

8°) *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$)*

a) Pour $x > 0$ et pour $n \le t \le n+1$, on a $e^{-x\,(n+1)^{\alpha}} \le e^{-x\,t^{\alpha}} \le e^{-x\,n^{\alpha}}$, d'où par intégration :

$$e^{-x\,(n+1)^{\alpha}} \;\le\; \int_n^{n+1} e^{-x\,t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t \;\le\; e^{-x\,n^{\alpha}}.$$

En sommant pour tout entier naturel n avec $x > 0$, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,(n+1)^{\alpha}} \;\le\; \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t \;\le\; \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^{2}}.$$

Soit encore $S_\alpha(x) - 1 \le I(\alpha) \le S_\alpha(x)$, d'où l'on tire compte tenu de la question précédente :

$$0 \;\le\; S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \;\le\; 1.$$

b) Comme $\frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \le S_\alpha(x) \le \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} + 1$, on obtient $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

Et on a $S_\alpha(x) \sim \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}}$ en 0 car leur quotient tend vers 1 d'après l'encadrement suivant :

$$1 \le \frac{\alpha\, x^{1/\alpha}}{\Gamma\!\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\, S_\alpha(x) \le 1 + \frac{\alpha\, x^{1/\alpha}}{\Gamma\!\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

9°) *Majoration d'une intégrale auxiliaire*

a) En reprenant le changement de variables fait à la question 7.c), on a pour tous $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u = \alpha\, x^{1/\alpha} \int_1^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

b) En intégrant par parties, on a pour tous $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u = e^{-x}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-2}\, \mathrm{d}u.$$

Pour $u \ge x$, on a $\frac{1}{u} \le \frac{1}{x}$, ce qui permet de majorer comme suit cette dernière intégrale :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-2}\, \mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{1}{u}\left(e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)\mathrm{d}u \le \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u.$$

Il en résulte qu'on a lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-2}\, \mathrm{d}u = o\!\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u\right).$$

En reportant dans l'intégration par parties ci-dessus, on obtient donc lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u = e^{-x}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1} + o\!\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u\right).$$

On en déduit l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u \sim e^{-x}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) Il résulte des sous-questions a) et b) qu'on a donc lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha\, x^{1/\alpha}}\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathrm{d}u \sim \frac{e^{-x}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha\, x^{1/\alpha}} = \frac{e^{-x}}{\alpha\, x} = o(e^{-x}).$$

10°) *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)*

a) En reprenant l'inégalité de la question 4.a), on obtient pour $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} \le \sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} e^{-x\,t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

b) Comme $\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\, \mathrm{d}t = o(e^{-x})$ d'après la question 9.c), on en déduit que :

$$S_\alpha(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x}).$$

Il en résulte que $S_\alpha(x) - 1 \sim e^{-x}$ quand x tend vers $+\infty$.

♣◇♡♠