I

Rappels : du problème à deux corps en interaction au mouvement à force centrale

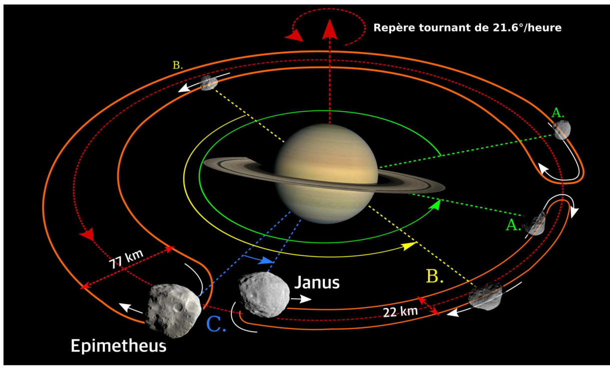

FIGURE *I.1 – La danse de Janus et Epiméthée autour de Saturne*

PLAN DU CHAPITRE

I Le problème à deux corps

I.1 Situation du problème

a - Deux corps en interaction : énergie potentielle d'interaction et lois des actions réciproques ($3^{\text{ième}}$ loi de Newton)

On considère un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen d'origine O et deux particules **seules** $A_1(x_1, y_1, z_1)$ et $A_2(x_2, y_2, z_2)$ de masses respectives m_1 et m_2, repérées par les vecteurs positions respectifs $\overrightarrow{r_1} = r_1 \cdot \overrightarrow{e_{r_1}} = \overrightarrow{OA_1} = x_1\overrightarrow{e_x} + y_1\overrightarrow{e_y} + z_1\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{r_2} = r_2 \cdot \overrightarrow{e_{r_2}} = \overrightarrow{OA_2} = x_2\overrightarrow{e_x} + y_2\overrightarrow{e_y} + z_2\overrightarrow{e_z}$.

3 caractéristiques importantes à retenir :

- Particules considérées ponctuelles $\Rightarrow$ interaction portée par la droite (A_1A_2)
- Le champ de force d'interaction découle d'une énergie potentielle indépendante du temps $\Rightarrow U(r_1, r_2)$ *à priori* fonction des variables r_1 et r_2.
- Interaction uniquement dépendante de la position relative des particules $r = ||\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}|| \Rightarrow$ énergie potentielle du système $U(r)$ ne dépendant finalement que de la variable r.

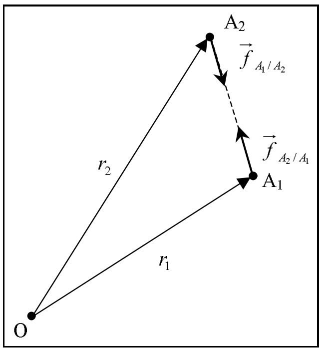

FIGURE I.1 – Loi des actions réciproques

Les forces d'interaction découlent de l'énergie potentielle $U(r)$ ainsi :

$$\overrightarrow{f}(A_2/A_1) = -\overrightarrow{grad}_{A_1} U(r) = -\frac{\partial U}{\partial x_1}\overrightarrow{e_x} - \frac{\partial U}{\partial y_1}\overrightarrow{e_y} - \frac{\partial U}{\partial z_1}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{f}(A_1/A_2) = -\overrightarrow{grad}_{A_2} U(r) = -\frac{\partial U}{\partial x_2}\overrightarrow{e_x} - \frac{\partial U}{\partial y_2}\overrightarrow{e_y} - \frac{\partial U}{\partial z_2}\overrightarrow{e_z}$$

En prenant par exemple les premières composantes de $\overrightarrow{f}_{A_2/A_1}$ et $\overrightarrow{f}_{A_1/A_2}$, il vient :

$$f_{x_1}(A_2/A_1) = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_1} \quad et \quad f_{x_2}(A_1/A_2) = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_2}$$

or avec $r = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ on déduit sans peine que : $\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{(x_2 - x_1)}{r}$ et $\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_1}$ ainsi :

$$\boxed{f_{x_1}(A_2/A_1) = -f_{x_2}(A_1/A_2)}$$

Le calcul pour les composantes $f_{y_1}(A_2/A_1)$ et $f_{z_1}(A_2/A_1)$ est totalement analogue ; on dégage finalement **la troisième loi de Newton** :

Propriété I-1: LOIS DES ACTIONS RÉCIPROQUES

2 particules ponctuelles A_1 et A_2 (sans structure interne) en interaction appliquent l'une sur l'autre les forces respectives $\overrightarrow{f}(A_2/A_1)$ et $\overrightarrow{f}(A_1/A_2)$ telles que :

$$\boxed{\overrightarrow{f}(A_2/A_1) = -\overrightarrow{f}(A_1/A_2)}$$

(loi des actions réciproques)

b - Conséquence : exploitation du référentiel du centre de masse

Considérons toujours les deux particules ponctuelles A_1 et A_2 en interaction. On pose $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ référentiel du laboratoire supposé galiléen et $\mathscr{R}^*(G,\overrightarrow{e_x}^*,\overrightarrow{e_y}^*,\overrightarrow{e_z}^*)$ référentiel barycentrique ou du centre de masse par définition en translation par rapport à $\mathscr{R}$, soit $\overrightarrow{\omega}_{\mathscr{R}^*/\mathscr{R}} = \overrightarrow{0}$

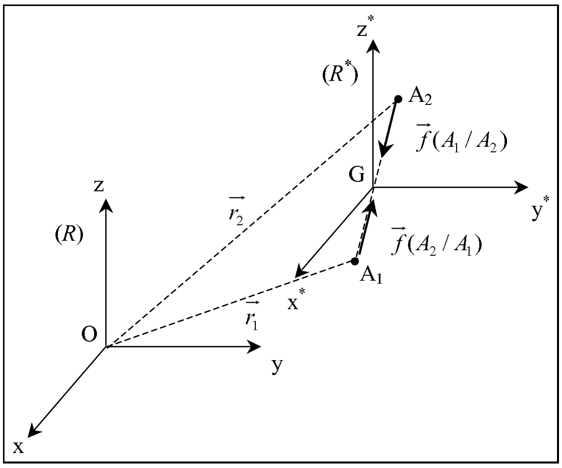

FIGURE I.2 – Système des deux masses en référentiel du centre de masse (RCDM)

En appliquant la RFD dans $\mathscr{R}$ aux deux masses il vient : $\begin{cases} m_1\dfrac{d^2\overrightarrow{r_1}}{dt^2} = \overrightarrow{f}(A_2/A_1) & (1) \\ m_2\dfrac{d^2\overrightarrow{r_2}}{dt^2} = \overrightarrow{f}(A_1/A_2) & (2) \end{cases}$

ainsi les deux "problèmes" sont couplées par les forces $\overrightarrow{f}(A_2/A_1) = -\overrightarrow{f}(A_1/A_2)$
En formant (1) + (2) on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}\right) = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{dt^2}(m_1+m_2)\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{v}(G)_{/\mathscr{R}}\right] = \overrightarrow{0}$$

soit : $\boxed{\overrightarrow{v}(G)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{Cste}}$

ainsi **le référentiel $\mathscr{R}^*$ est galiléen en l'absence d'autre action que l'interaction à distance entre les deux masses ponctuelles.**

CONSÉQUENCE :
On peut réaliser toute l'analyse du problème dans le référentiel du centre de masse $\mathscr{R}^*$.

Posons :

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{GA}}$$

en introduisant **le point A "fictif" repérant une "particule fictive".**

On a alors $\begin{cases} \overrightarrow{r}^*_1 = \overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OA_1} - \dfrac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{A_2A_1} \\ \overrightarrow{r}^*_2 = \overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OA_2} - \dfrac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}}{m_1+m_2} = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{A_2A_1} \end{cases}$ soit :

$$\boxed{\overrightarrow{r}^*_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}} \quad et \quad \boxed{\overrightarrow{r}^*_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}}$$

CONCLUSION : la nouvelle variable $\overrightarrow{r}$ repérant le mobile fictif A permet le retour aux positions de A_1 et A_2 dans $\mathscr{R}^*$ $\Rightarrow$ **on s'attachera dans toute la suite à étudier les propriétés et le mouvement de la particule fictive**.

I.2 La réduction du problème à deux corps : le mobile "fictif"

a - Réduction de la quantité de mouvement dans $\mathscr{R}^*$

Ecrivons la quantité de mouvement du mobile A_1 dans $\mathscr{R}^*$:

$$\overrightarrow{p}^*_1 = m_1\overrightarrow{v}^*_1 = m_1\frac{d}{dt}\overrightarrow{r}^*_1 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{d}{dt}\overrightarrow{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{p}^*_1 = \mu\overrightarrow{v}}$$

en posant $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ masse du mobile fictif appelée **masse réduite**.

En outre la quantité totale de mouvement dans $\mathscr{R}^*$ est nulle, puisque :

$$\overrightarrow{p}^* = \overrightarrow{p}^*_1 + \overrightarrow{p}^*_2 = m_1\frac{d}{dt}\overrightarrow{GA_1} + m_2\frac{d}{dt}\overrightarrow{GA_2} = \frac{d}{dt}\underbrace{(m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2})}_{=\overrightarrow{0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{p}^*_2 = -\overrightarrow{p}^*_1 = -\mu\overrightarrow{v}}$$

b - Réduction du moment cinétique dans $\mathscr{R}^*$

Ecrivons le moment cinétique du système dans $\mathscr{R}^*$ en G :

$$\overrightarrow{L_G}^* = \overrightarrow{GA_1}\wedge\overrightarrow{p}^*_1 + \overrightarrow{GA_2}\wedge\overrightarrow{p}^*_2 = \underbrace{\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{p}^*_1}_{\text{indépendant du point de calcul} \Rightarrow \text{notation sans le point } \overrightarrow{L}^*}$$

ce qui donne avec les résultats précédents :

$$\boxed{\overrightarrow{L}^* = \overrightarrow{r}\wedge\mu\overrightarrow{v}}$$

Ainsi, le moment cinétique du système dans $\mathscr{R}^*$ est égal au moment cinétique de la particule fictive A de masse μ : **le moment cinétique est donc "réduit"**.

c - Réduction de l'énergie cinétique dans $\mathscr{R}^*$

$$E^*_c = \frac{1}{2}m_1v_1^{2*} + \frac{1}{2}m_2v_2^{2*} = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}v^2 + \frac{m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v^2\right]$$

donc :

$$E^*_c = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v^2\right]$$

soit finalement :

$$\boxed{E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2}$$

Ainsi, l'énergie cinétique du système dans $\mathscr{R}^*$ est égale à l'énergie cinétique de la particule fictive A de masse μ : **l'énergie cinétique est donc également "réduite"**.

d - Réduction de la RFD

Appliquons la RFD à chacun des deux mobiles dans $\mathscr{R}$; il vient :

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{f}(A_2/A_1) & \Rightarrow \quad \dfrac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overrightarrow{f}(A_2/A_1)}{m_1} \quad (1) \\ m_2 \dfrac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{f}(A_1/A_2) & \Rightarrow \quad \dfrac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OA_2} = \dfrac{\overrightarrow{f}(A_1/A_2)}{m_2} \quad (2) \end{cases}$$

Formons (1) – (2) :

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{A_2A_1} = \frac{1}{m_1}\overrightarrow{f}(A_2/A_1) - \frac{1}{m_2}\underbrace{\overrightarrow{f}(A_1/A_2)}_{=-\overrightarrow{f}(A_2/A_1)} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{f}(A_2/A_1)$$

donc :

$$\boxed{\mu\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{f}(A_2/A_1)}$$

Cette dernière équation est celle du mouvement du mobile fictif de masse μ repéré par sa position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GA}$ dans $\mathscr{R}^*$. Une fois résolue, le retour aux trajectoires de A_1 et A_2 se fait à l'aide des relations vues plus haut.

e - Bilan et cas limite

On retiendra ceci : l'analyse complète du problème à 2 corps (A_1, A_2) peut être réalisée par l'étude du mouvement et des propriétés de la particule fictive A de masse réduite $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et de position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{A_2A_1}$.

<u>CAS LIMITE INTÉRESSANT</u> : dans de nombreux cas réels, les deux particules ont des masses très différentes (système Terre-soleil, système Astéroïde-Terre etc...), par exemple $m_2 >> m_1$, alors :

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{m_2 m_1}{m_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)} \simeq m_1 \\ \overrightarrow{r_1}^* = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \simeq \overrightarrow{r} \implies A_1 \text{ est} \simeq \text{la particule fictive} \\ \overrightarrow{r_2}^* = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \simeq \overrightarrow{0} \implies A_2 \text{ est confondu avec } G \text{ et donc fixe dans } \mathscr{R}^* \text{ : c'est le centre de force attractif ou répulsif.} \end{cases}$$

II Mouvement à force centrale

II.1 Conservation du moment cinétique - loi de aires

Calculons le moment cinétique du mobile A en O dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ galiléen dans lequel le centre attracteur O est au repos, et dérivons le :

$$\overrightarrow{L}_O(A) = \underbrace{\overrightarrow{OA}}_{/\!/\overrightarrow{e_r}} \wedge m\overrightarrow{v}(A) \Rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_O(A) = \overrightarrow{v}(A)\wedge m\overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{OA}\wedge \underbrace{m\frac{d}{dt}\overrightarrow{v}(A)}_{=\overrightarrow{f}_{O/A}/\!/\overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{0}$$

On considère un point matériel A de masse m soumis à une force centrale $\overrightarrow{f}_{O/A}$ appliquée par un centre attracteur localisé en O. Cette situtation correspond précisément au cas limite $m_2 >> m_1$ du problème à deux corps décrit plus haut.

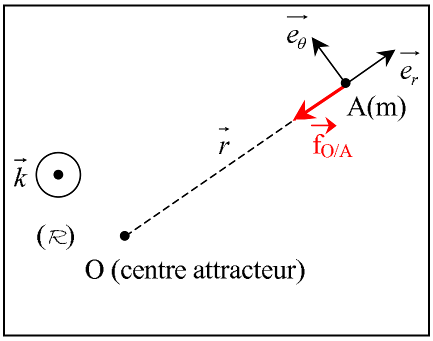

FIGURE I.3 – Mobile A sous l'influence de la force centrale exercée par O (attractive dans cet exemple)

donc $\overrightarrow{L}_O(A) = \overrightarrow{cste} \Rightarrow$ **le mouvement est forcément contenu dans un plan (2D)** $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et les coordonnées polaires (r, θ) sont adaptées à l'analyse du problème.

En outre, le calcul explicite du moment cinétique donne : $\overrightarrow{L}_O(A) = mr\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{Cste}$

On peut ainsi poser que le scalaire $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante. On l'appelle **<u>constante des aires</u>**.

<u>JUSTIFICATION "CONSTANTE DES AIRES" - LOI DES AIRES</u> :

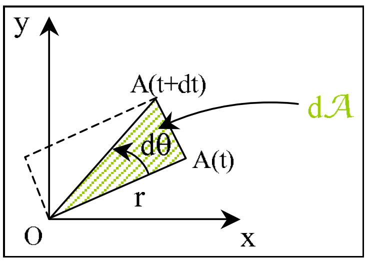

FIGURE I.4 – Calcul au premier ordre de la vitesse aréolaire

Calculons au premier ordre l'aire élémentaire $d\mathscr{A}$ balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OA}$ durant l'intervalle de temps dt :

$$d\mathscr{A} = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

ce qui donne une vitesse de balayage des aires, ou **vitesse aréolaire** constante :

$$\boxed{v_a = \frac{d\mathscr{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C = cste}$$

Remarque II-1: INTÉGRALE PREMIÈRE DU MOUVEMENT : MOMENT CINÉTIQUE

Une constante du mouvement porte le nom d'**intégrale première du mouvement**. C'est le cas du moment cinétique pour le mouvement à force centrale. On peut retrouver ceci en analysant la RFD appliqué au mobile :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f}_{O/A} \Rightarrow m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}\right] = f_{O/A}\overrightarrow{e_r}$$

L'absence de composante de force orthoradiale permet d'écrire :

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

En multipliant cette équation par r et en intégrant par rapport au temps on obtient :

$$r^2\dot{\theta} = C = cste$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}(A) = mC\overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{cste}}$$

II.2 Conservation de l'énergie mécanique - conséquences sur le mouvement

a - Expression

On suppose l'existence d'une énergie potentielle $U(r)$ dont découle la force centrale à laquelle est soumis le corps A de masse m ; il vient en appliquant le théorème de l'énergie cinétique (TEC) lors d'un mouvement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ du mobile :

$$dE_c = \delta W^c = -\overrightarrow{grad}U(r)\cdot\overrightarrow{dr} = -dU(r)$$

donc :

$$d(\underbrace{E_c + U(r)}_{=E_m}) = 0 \Rightarrow \boxed{E_m = cste}$$

Par ailleurs,

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{=E_{c_r}\text{ Energ. cin. radiale}} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

en utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées polaires : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$$\Rightarrow E_m = E_{c_r} + \frac{1}{2mr^2}\underbrace{m^2r^4\dot{\theta}^2}_{=L_O^2(A)} + U(r) = E_{c_r} + \left[\frac{L_O^2(A)}{2mr^2} + U(r)\right]$$

qui donne en posant **l'énergie potentielle effective** ou plus simplement **potentiel effectif** : $U_{eff}(r) = \dfrac{L_O^2(A)}{2mr^2} + U(r)$
Finalement, l'énergie mécanique du mobile peut s'écrire,

$$\boxed{E_m = E_{c_r} + U_{eff}(r)}$$

Dans la mesure où l'énergie cinétique radiale est positive ou nulle, on peut enfin écrire que :

$$\boxed{E_{c_r} = E_m - U_{eff}(r) \geq 0} \qquad \text{(I.1)}$$

b - Analyse qualitative des mouvements en champ newtonien : exploitation de $U_{eff}(r)$

On envisage ici le cas très fréquent d'un champ de force newtonien, i.e. de dépendance radiale en $\frac{1}{r^2}$. Afin de considérer le caractère attractif ou répulsif du centre O, on pose une force d'expression :

$$\overrightarrow{F} = \epsilon \frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r} \quad \begin{cases} \epsilon = +1 \text{ cas répulsif} \\ \epsilon = -1 \text{ cas attractif} \end{cases} \quad \text{avec } K > 0$$

<u>2 CAS À CONSIDÉRER :</u>

- **Cas d'une force attractive :** $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

  Exemples : gravitation $\overrightarrow{F}_{grav} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r} /\!/ -\overrightarrow{e_r}$, force de Coulomb entre charges de signes opposés $\overrightarrow{F}_{Coul} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

  L'énergie potentielle est :

$$dU(r) = +\overrightarrow{grad}U(r)\cdot\overrightarrow{dr} = -\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} \Rightarrow U(r) = -\frac{K}{r} + \underbrace{cste}_{0}$$

  ce qui donne pour le **potentiel effectif** :

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{L_O^2(A)}{2mr^2} - \frac{K}{r}}$$

La figure ci-dessous représente le tracé du potentiel effectif en fonction de r ; compte tenu de la condition I.1, les valeurs de r permises sont celles pour lesquelles la courbe de potentiel effectif est au dessus de la droite (horizontale) d'énergie mécanique.

On peut envisager divers cas pour la valeur de l'énergie mécanique : $E_{m0}, E_{m1}, E_{m2}, E_{m3}$ seront commentés en cours et en TD. Certains conduisent à un état lié de trajectoire fermée, et d'autre à un état libre de diffusion.

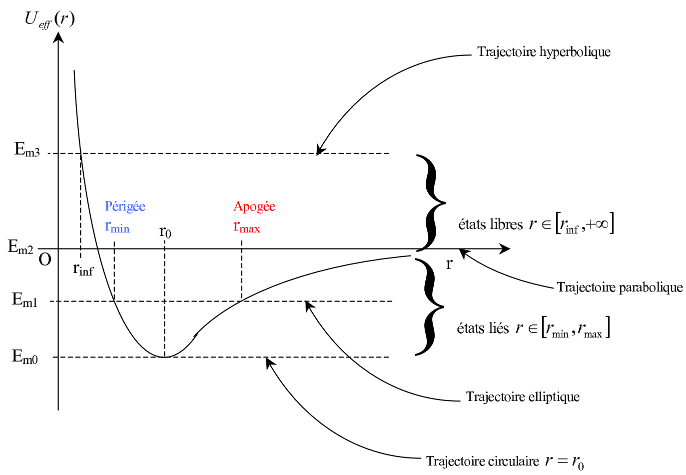

FIGURE I.5 – Potentiel effectif attractif

- **Cas d'une force répulsive :** $\overrightarrow{F} = +\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

  Exemple : force de Coulomb entre charges q_1, q_2 de même signe $\overrightarrow{F}_{Coul} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r} /\!/ \overrightarrow{e_r}$

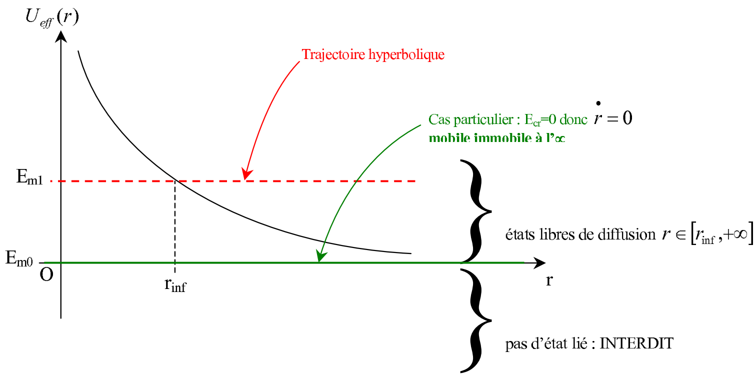

FIGURE I.6 – Potentiel effectif répulsif

Le potentiel effectif s'écrit dans ce cas :

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{L_O^2(A)}{2mr^2} + \frac{K}{r}}$$

La condition I.1 impose ici la seule existence possible d'états libres de diffusion.

II.3 Equations du mouvement et trajectoires $r = f(\theta)$: diverses méthodes d'obtention

On rappelle les formules de Binet (savoir les redémontrer) donnant respectivement le carré de la vitesse ainsi que l'accélération d'un mobile A soumis à une force centrale exercée par O dans le référentiel $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases} v^2 = C^2\left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \\ \\ \overrightarrow{a}_{\mathscr{R}} = -C^2u^2\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\cdot\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

avec $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{OA}$, et C constante des aires dégagée plus haut.

a - Par la RFD

La RFD appliquée au mobile A soumis à un champ newtonien donne :

$$m\overrightarrow{a}_{\mathscr{R}} = \epsilon\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r} \Rightarrow -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\cdot\overrightarrow{e_r} = \epsilon K u^2\overrightarrow{e_r}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\epsilon\frac{K}{mC^2}}$$

RÉSOLUTION :

$$\begin{cases} \text{Solution particulière : } u_p = -\epsilon\dfrac{K}{mC^2} \\ \text{Solution homogène : } u_h = A\cos(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

En posant $p = \dfrac{mC^2}{K}$ et $e = Ap$, la solution devient :

$$u(\theta) = \frac{-\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)}{p}$$

soit l'équation de trajectoire du mouvement en coordonnées polaires :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{p}{-\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

Cette dernière relation définit une trajectoire conique dont le centre attracteur O occupe l'un des foyers, et dont la nature précise dépend de la valeur de ϵ et e (cf. plus bas).

b - Par conservation de l'énergie (intégrale première du mouvement)

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \overset{\text{Binet}}{=} \frac{1}{2}mC^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] + \epsilon K u = cste$$

L'énergie étant une constante temporelle (intégrale première du mouvement), elle est aussi une constante en tout point de trajectoire ; ainsi en dérivant l'expression de E_m par rapport à θ, il vient donc :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\epsilon\frac{K}{mC^2}}$$

équation dont la solution a été évoqué plus haut.

c - Un peu plus "exotique" : par conservation du vecteur de Runge-Lenz (autre intégrale première du mouvement !)

La RFD peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \epsilon\frac{K}{mr^2}\vec{e_r}$$

Par ailleurs, nous savons que $\vec{e_r} = -\dfrac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\dfrac{1}{\dot{\theta}}\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\epsilon\frac{K}{m\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{=C}}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mC}{\epsilon K}\vec{v} + \vec{e_\theta}\right) = \vec{0}$$

Ainsi, le vecteur entre parenthèses est appelée vecteur excentricité $\vec{e}$ et constitue une constante du mouvement (intégrale première du mouvement) :

$$\boxed{\vec{e} = \frac{mC}{\epsilon K}\vec{v} + \vec{e_\theta} = \overrightarrow{cste}} \tag{I.2}$$

<u>**NB :**</u> le vecteur excentricité est sans dimension.

On peut ensuite former, en multipliant le vecteur excentricité scalairement par $\dfrac{\epsilon K}{mC}$ et vectoriellement par $\vec{L}_O(A) = mC\vec{k}$, **le vecteur de Runge-Lenz** $\vec{R}$ qui constitue de fait une autre constante de mouvement (**i.e. une autre intégrale première du mouvement !**) :

$$\vec{R} = \frac{\epsilon K}{mC}\vec{e}\wedge\vec{L}_O(A) = \vec{v}\wedge\vec{L}_O(A) + \frac{\epsilon K}{mC}\vec{e_\theta}\wedge\underbrace{\vec{L}_O(A)}_{mC\vec{k}}$$

soit finalement :

$$\boxed{\vec{R} = \vec{v}\wedge\vec{L}_O(A) + \epsilon K\vec{e_r} = \overrightarrow{cste'}} \tag{I.3}$$

OBTENTION DE L'ÉQUATION DE TRAJECTOIRE :
Multiplions scalairement $\overrightarrow{R}$ par le vecteur position $\overrightarrow{r}$:

$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{r} = Rr\cos(\varphi) = \left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{L}_O(A)\right)\cdot\overrightarrow{r} + \epsilon K r = \underbrace{\left(\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{v}\right)}_{=\frac{\overrightarrow{L}_O(A)}{m}}\cdot\overrightarrow{L}_O(A) + \epsilon K r \quad \text{avec } \varphi = (\overrightarrow{r};\overrightarrow{R})$$

soit :

$$L_O^2(A) = mRr\cos(\varphi) - \epsilon m K r$$

d'où l'on dégage en divisant par $L_O^2(A)r$:

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{mR}{L_O^2(A)}\cos(\varphi) - \frac{\epsilon m K}{L_O^2(A)} = \frac{mK}{L_0^2(A)}\left(-\epsilon + \frac{R}{K}\cos(\varphi)\right)$$

Exercice de cours: **(II.3) - n° 1.** *Montrer graphiquement que $\varphi = \theta - \theta_0$ et que l'on obtient bien l'équation attendue pour la trajectoire i.e. la conique :*

$$\boxed{r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{p}{-\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

d - Allure des trajectoires

Exercice de cours: **(II.3) - n° 2.** *Démontrer la relation suivante entre l'énergie mécanique E_m et l'excentricité e de la trajectoire conique : $e = \left(1 + \dfrac{2pE_m}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$*

On distingue les deux cas de figure attractif (ex : gravitation) et répulsif (ex : interac. coulomb. entre charges de même signe).

- CAS ATTRACTEUR : $\epsilon = -1$
  L'équation polaire de trajectoire est : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$

  4 situations sont à distinguer :
  ◇ $E_m > 0$ **i.e.** $e > 1 \Longrightarrow$ **trajectoire hyperbolique.**

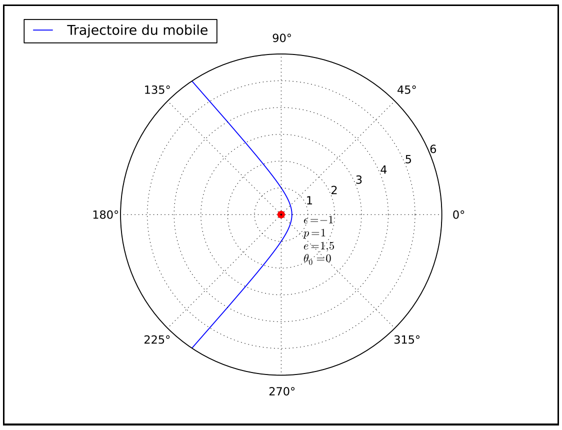

FIGURE I.7 – Trajectoire hyperbolique dans le cas attracteur

◇ $E_m = 0$ **i.e.** $e = 1 \Longrightarrow$ **trajectoire parabolique.**

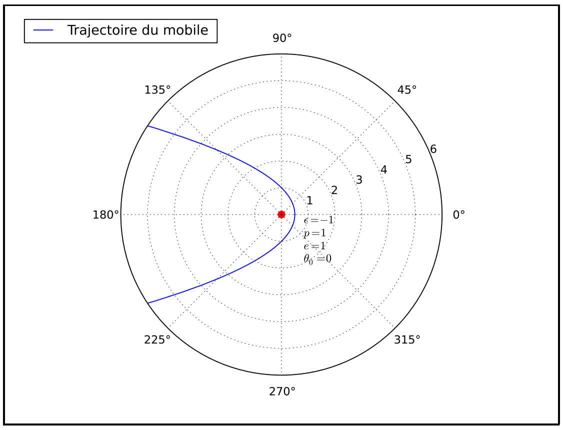

FIGURE I.8 – Trajectoire parabolique dans le cas attracteur

◇ $E_{m0} < E_m < 0$ **i.e.** $0 < e < 1 \Longrightarrow$ **trajectoire elliptique.**

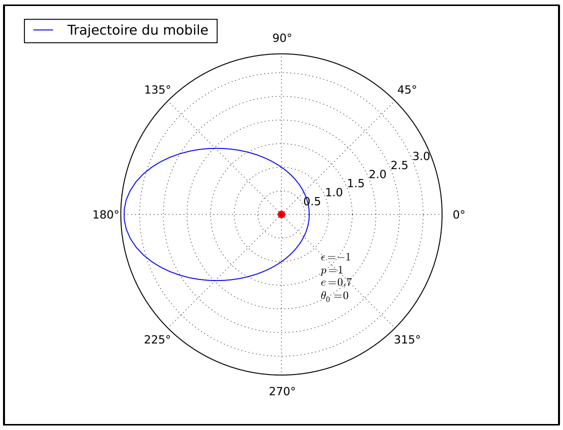

FIGURE I.9 – Trajectoire elliptique dans le cas attracteur

◇ $E_m = E_{m0}$ **i.e.** $e = 0 \Longrightarrow$ **trajectoire circulaire.**

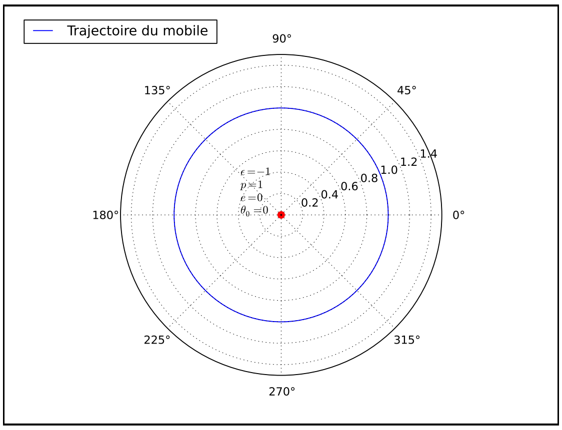

FIGURE I.10 – Trajectoire circulaire dans le cas attracteur

- CAS RÉPULSEUR : $\epsilon = +1$
  L'équation polaire de la trajectoire est : $r(\theta) = \dfrac{p}{-1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$

◇ $E_m > 0$ **i.e.** $e > 1 \Longrightarrow$ **trajectoire hyperbolique.**

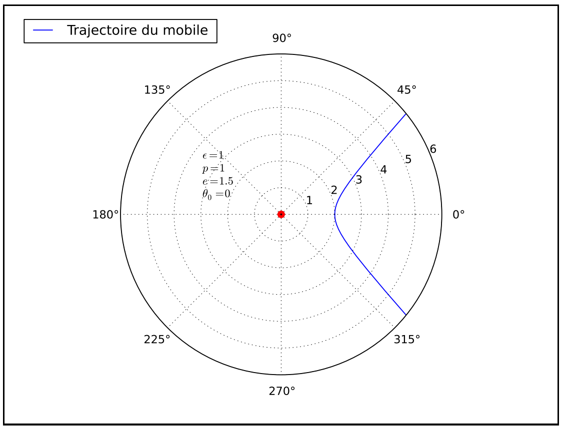

FIGURE I.11 – Trajectoire hyperbolique dans le cas répulseur

◇ $E_m = 0$ **i.e.** $e = 1 \Longrightarrow E_{cr} = 0$ **particule** A **immobile à l'**∞**.**

On donne à titre d'information le code source Python ayant permis le tracé de ces différentes trajectoires après résolution numérique de l'équation différentielle en $u(\theta)$. La valeur du paramètre ϵ (± 1) fixant la nature du foyer attracteur ou répulseur est stockée très logiquement dans la variable *"epsilon"*. En outre, les conditions initiales $\left[u(\theta = 0), \frac{du}{d\theta}(\theta = 0)\right]$ stockées dans la variable (tableau 1D) CI s'interprêtent comme suit :

HYPOTHÈSES : on fixe arbitrairement pour ce code $p = 1$ (dépend de la constante des aires et donc des conditions initiales d'injection sur la trajectoire) ainsi que $\theta_0 = 0$ (dépend là-encore des conditions d'injection sur la trajectoire).

On rappelle la forme attendue de la solution : $u(\theta) = \dfrac{-\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)}{p}$ avec $\boxed{u(\theta) > 0 \ \forall\theta}$

- **<u>Première condition initiale</u>** $u(\theta = 0)$

$$u(\theta) = -\epsilon + e\cos\theta \Longrightarrow \ u(0) = -\epsilon + e$$

◇ Cas attracteur (i.e. paramètre "epsilon" fixé à -1) : $u(\theta = 0) = 1 + e$

$$\begin{cases} u(\theta=0) = 1 \Rightarrow \ e = 0 \text{ soit } E_m = E_{p_{eff}} < 0 \ \textbf{trajectoire circulaire} \\ 1 < u(\theta=0) < 2 \Rightarrow \ 0 < e < 1 \text{ soit } E_m < 0 \ \textbf{trajectoire elliptique} \\ u(\theta=0) = 2 \Rightarrow \ e = 1 \text{ soit } E_m = 0 \ \textbf{trajectoire parabolique} \\ u(\theta=0) > 2 \Rightarrow \ e > 1 \text{ soit } E_m > 0 \ \textbf{trajectoire hyperbolique} \end{cases}$$

◇ Cas répulseur (i.e. paramètre "epsilon" fixé à $+1$) : $u(\theta) = -1 + e$

$$\begin{cases} u(\theta=0) = 0 \Rightarrow \ e = 1 \text{ soit } E_m = 0 \ \textbf{situation de repos à l'infini du centre répulseur} \\ u(\theta=0) > 0 \Rightarrow \ e > 1 \text{ soit } E_m > 0 \ \textbf{trajectoire hyperbolique} \end{cases}$$

- **<u>Seconde condition initiale</u>** $\dfrac{du}{d\theta}(\theta = 0)$

$$\frac{du}{d\theta}(\theta) = -\frac{e}{p}\sin\theta \Longrightarrow \ u'(0) = 0$$

<u>NB :</u> cette seconde CI est indépendante de la valeur de ϵ, et donc du caractère attracteur ou répulseur du centre d'action.

```python
from math import *
import pylab as pyl
import numpy as np
import scipy as sp
import scipy.integrate as integr
import matplotlib as mp
import matplotlib.pyplot as plt
(p,epsilon,N,CI)=(1,-1,100,[1.945,0])
print "Parametre conique=",p,"epsilon=",epsilon,"nombre de points d'evaluation=",N,"Conditions initiales [u'(0),u(0)]=",CI
def conique(u,theta):
    return [u[1],-u[0]-epsilon/p] # Definition equation differentielle conique en u(theta)
theta = np.linspace(0,360, num=N)*pi/180 # Creation du tableau de la variable theta
Usol = integr.odeint(conique, CI, theta) # Resolution equation differentielle conique
r=np.zeros((N,1)) # Creation du tableau de la variable r(theta)
for n in range(0,N): # Balayer tous les rangs des tableaux de 1 a N (donc les indices de 0 inclus a N exclu)
    if Usol[n,0]<0: # si la valeur de Usol est negative (branche opposee "inutile" si cas hyperbole)
        r[n,0]=r[n-1,0] # alors conserver la valeur precedente de r (evite le trace de la branche "inutile")
    else: # sinon
        r[n,0]=1/Usol[n,0] # calculer la nouvelle valeur de r
trace = plt.figure() # Stocke la future figure en variable trace
ax1=trace.add_axes([0.1,0.1,0.8,0.8],polar='true') # Definit le mode polaire et les axes a tracer
ax1.plot(theta,r,linewidth=1, linestyle="-", label="Trajectoire du mobile") # trace trajectoire r(theta)
plt.legend(bbox_to_anchor=(-0.3, 1.02, 0.6, .102), loc=6, ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.) #Place la legende dans une boite
plt.scatter([0,],[0,], 50, color ='red') # Place en O un petit disque symbolisant le centre attracteur/repulseur
plt.text(-0.2,-3,"$\epsilon=1$\n$p=1$\n$e=1.5$\n$\\theta_0=0$")
ax1.set_rmax(20) # Fixe le rayon maximal du diagramme polaire represente
plt.show() # Represente le trace
```

Listing I.1 – Sources_Python/Traces_trajectoires_final.py