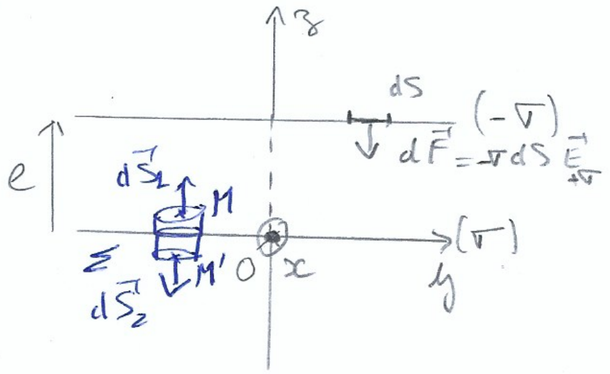
Reprise TD n° 7

Exercice n° 9 : Bilan d'énergie dans un condensateur



① Champ créé par l'armature inférieure (σ) : Symétrie + invariance $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e_z}$

$$\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \iff \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{lat}}_{=0} + \iint_{S_1} \vec{E_1}\cdot d\vec{S_2} + \iint_{S_2} \vec{E_2}\cdot d\vec{S_2} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$d\vec{S_1} = dS\vec{e_z}$, $d\vec{S_2} = -dS\vec{e_z}$, $\vec{E_1} = E(z)\vec{e_z}$, $\vec{E_2} = E(-z)\vec{e_z} = -E(z)\vec{e_z}$

$$\Rightarrow E(z)S + E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

donc $\boxed{\vec{E}_+(z) = \frac{z}{|z|}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z}}$

force : $d\vec{F}_{+/-} = \delta q\, \vec{E}_+ = -\sigma dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\, \vec{e_z}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{+/-} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{e_z}$$

②(e) $\underbrace{\Delta E_c}_{(2)} \simeq 0 \Rightarrow W_{op} + W_{ext} = 0 \iff \int_{e_i}^{e_f} \vec{F}_{op}\cdot d\vec{r} + \left(-\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)\vec{e_z}\cdot(e_f - e_i)\vec{e_z} \simeq 0.$

$= E_{c_f} - E_{c_i}$

$E_{c_i} = 0$ (repos à $t=0$)

Si on suppose $\vec{F}_{op} = \text{cte}$ alors (e) $\iff F_{op}(e_f - e_i) + -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S(e_f - e_i) \simeq 0$

soit $\boxed{F_{op} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}}$

Autre approche : $\left.\dfrac{dE_c}{dt}\right|_{t_i \to t_f} \simeq 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} m \vec{v}^2\right) \simeq 0$

$\Leftrightarrow m\, \vec{v} \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt} \simeq 0$ i.e. $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{F}_{op} + \vec{F}_{Coul} = \vec{0}$

soit $\boxed{\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{Coul} = \dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\, \vec{e}_z}$

③ Armature isolée $\Rightarrow$ $(Q = C^{te})$

2 calculs possibles :

→ à partir de l'expression précédente de $\vec{F}_{op}$

$$W_{op} = \int_{d_1}^{d_2} \vec{F}_{op} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\, \vec{e}_z \cdot \int_{d_1}^{d_2} dz\, \vec{e}_z = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}(d_2 - d_1)$$

or $C_{plan} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} \Rightarrow W_{op} = \dfrac{\sigma^2 S^2}{2\varepsilon_0 S}(d_2 - d_1)$ ($\sigma^2 S^2 = Q^2$)

$$\boxed{W_{op} = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right)}$$

④ Calcul fait en cours : armature $z = 0$ de potentiel V_1 Q_1

armature $z = e$ de potentiel V_2 $Q_2 = -Q_1$

énergie dépensée par opérateur pour charger la capacité :

$$\delta W_{op} = \delta Q_1 V_1 + \delta Q_2 V_2$$

$$= \delta Q_1 \underbrace{(V_1 - V_2)}_{\frac{Q_1}{C}}$$

$$= \frac{Q_1}{C}\, dQ_1$$

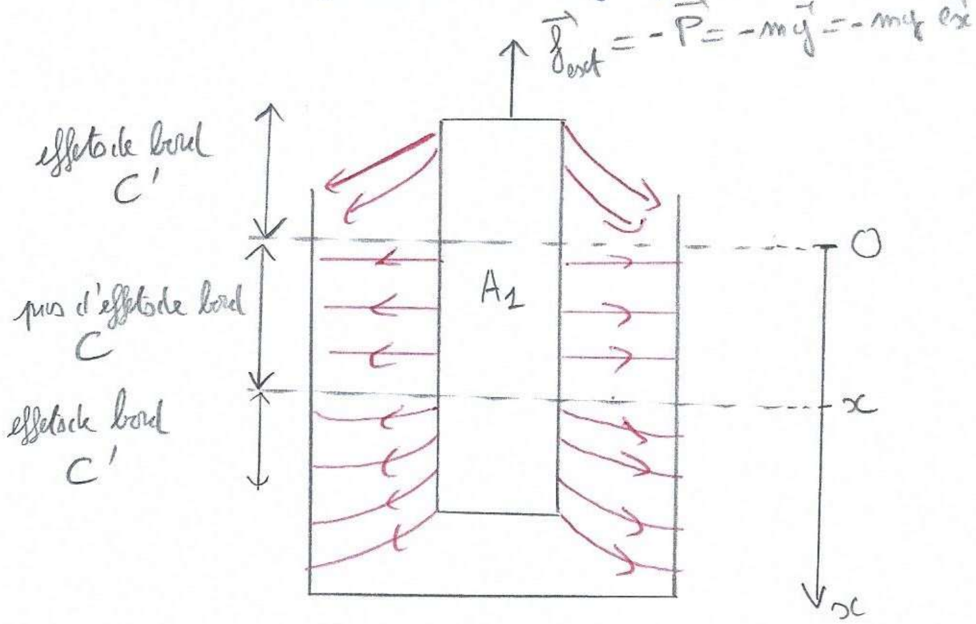
$$\Rightarrow W_{op} = U_{cond} = \frac{1}{C} \int_{Q_1 = 0}^{Q_{1f}} \frac{Q'_1}{C}\, dQ'_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{C}$$

en accord avec $Q_{1f} = C(V_1 - V_2) \Rightarrow \boxed{W_{op} = \dfrac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2}$

Exercice n°10 Balance électrostatique

Stratégie : → analyse mécanique statique ⇒ impossible car allure des LDC inconnue

→ méthode énergétique



Idée : on fait un déplacement élémentaire dx de l'armature A_1

⇒ le condensateur échange un travail $\delta W_{ext} = \vec{f}_{ext} \cdot dx\,\vec{e_x}$
$= -mg\,dx$

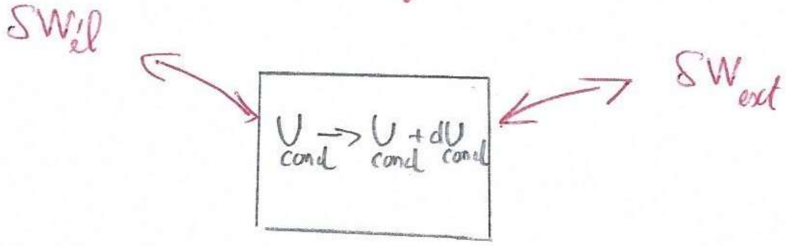
si x varie alors la capacité totale va varier

⇒ le générateur va donc céder ou prendre une charge δQ avec le condensateur

csq : un travail électrique est donc également échangé entre le générateur et le condensateur

$$\delta W_{él} = \delta Q\, V$$

?



Bilan : le condensateur reçoit 2 travaux qui contribuent à la variation de son énergie.

$$U_{cond} = \frac{1}{2} C \underset{\text{cte}}{V}^2 \Rightarrow dU_{cond} = \frac{1}{2} V^2 dC$$

or $dU_{cond} = \delta W_{ext} + \delta W_{el} = -mg\,dx + V\,\delta Q$ (e)

or $Q = CV \Rightarrow \delta Q = V\,dC$

donc (e) : $dU_{cond} = \frac{1}{2} V^2 dC = -mg\,dx + V^2 dC$

$$\Rightarrow V^2 dC = 2mg\,dx \quad (e)$$

<u>Variation de la capacité</u> condensateur équivalent à 3 capacités en //.

$$C = C' + C(x) + C'$$ supposé fixe par (H) d'énoncé

avec $C(x) = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln\frac{R_2}{R_2}}$ pour un condensateur cylindrique de hauteur x et rayon R_2 et R_2 (à faire à titre d'exercice !)

$$\Rightarrow dC = dC(x) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_2}}\,dx$$

donc (e) $\Rightarrow V^2 \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_2}} = 2mg$

donc $\boxed{V = \left(\dfrac{mg\ln(R_2/R_2)}{\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}}$ A.N. <u>$V = 41129\,V$</u>