

Un corrigé de Mathématiques 1 - Centrale 2017 - filière MP

I Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

- I.A.1)** L'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
 Il s'agit donc d'une symétrie or $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_1(\psi)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{-1}(\psi)$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 De plus soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,
 avec les propriétés de la trace et par caractère symétrique du produit scalaire, on a :

$$\text{tr}(S^\top A) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(-A^\top S) = -\text{tr}(A^\top S) = -\text{tr}(S^\top A)$$

donc $\text{tr}(S^\top A) = 0$ et ainsi $S \perp A$

d'où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux

En notant pour $1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf celui situé à la ligne i et colonne j qui vaut 1.

la famille $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base (libre et génératrice) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ constituée de $\frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2

d'où $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

- I.A.2)** On a $A = A_s + A_a$ où $(A_s, A_a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

donc A_s est le projeté orthogonal de A sur le sous espace de dimension finie $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Par caractérisation métrique du projeté orthogonal sur un sous espace de dimension finie, on a

pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A - A_s\|_2 \leq \|A - S\|_2$, avec égalité si et seulement si $S = A_s$

I.B - Valeurs propres de A_s

- I.B.1)** \Rightarrow (cas positif) On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $(X, Y) \mapsto (X | Y) = X^\top Y$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Selon le théorème spectral, A_s est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses sous espace propres sont deux à deux orthogonaux

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A (éléments de \mathbb{R}^+) et on a $\overset{\perp}{\bigoplus}_{1 \leq i \leq r} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut écrire $X = \sum_{i=1}^r X_i$ où $X_i \in E_{\lambda_i}(A_s)$

On a donc

$$X^\top A_s X = (X | A_s X) = \left(\sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r A_s X_j \right) = \left(\sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r \lambda_j X_j \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_j (X_i | X_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 \geq 0$$

\Rightarrow (cas strictement positif) On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On utilise les notations précédentes pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

Il existe donc $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $X_j \neq 0$ et donc $\lambda_j \|X_j\|^2 > 0$ car $\lambda_j > 0$

ainsi $X^\top A_s X = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$

\Leftarrow (cas positif) On suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A_s X \geq 0$

Soit λ une valeur propre de A_s . On considère X un vecteur colonne propre de A_s associé à λ .

$$\text{On a } X^T A_s X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{ainsi } \lambda \|X\|^2 \geq 0 \text{ or } \|X\|^2 > 0 \text{ car } X \neq 0$$

$$\text{donc } \lambda \geq 0$$

\Leftarrow (cas strictement positif) On suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A_s X > 0$

En reprenant ce qui précède, on obtient $\lambda \|X\|^2 > 0$ où $X \neq 0$

et donc $\lambda > 0$

Conclusion : On a montré

$$A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A_s X \geq 0 \text{ et}$$

$$A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A_s X > 0$$

I.B.2) On note $\min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) = \mu_1 < \dots < \mu_r = \max \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$ les valeurs propres ordonnées de A_s

Soit $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et X un vecteur propre de A associé à λ

On peut écrire $X = \sum_{i=1}^r X_i$ où $X_i \in E_{\mu_i}(A_s)$ selon le théorème spectral

$$\text{D'un coté, on a } X^T A X = \lambda \|X\|^2 \text{ et d'un autre côté } X^T A X = X^T A_s X + X^T A_a X$$

$$\text{de plus } X^T A_a X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \text{ donc } X^T A_a X = (X^T A_a X)^T = X^T A_a^T (X^T)^T = -X^T A_a X \text{ d'où } X^T A_a X = 0$$

$$\text{cela donne : } X^T A X = X^T A_s X = \sum_{i=1}^r \mu_i \|X_i\|^2 \text{ comme à la question précédente}$$

$$\text{d'où } \mu_1 \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2 \leq X^T A X \leq \mu_r \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2 \text{ car } \|X_i\|^2 \geq 0 \text{ pour tout } i$$

$$\text{or selon le théorème de Pythagore : } \|X\|^2 = \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2 \text{ car } \bigoplus_{1 \leq i \leq r}^{\perp} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{d'où } \mu_1 \|X\|^2 \leq \lambda \|X\|^2 \leq \mu_r \|X\|^2$$

$$\text{comme } \|X\|^2 > 0, \text{ on a bien } \boxed{\min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)}.$$

On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $0 < \min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$

ainsi on a $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset]0, +\infty[$

$$\text{donc } \text{Ker } A = E_0(A) = \{0\}$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{si } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ alors } A \text{ est inversible}}$$

I.B.3) a) Existence Je note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_s comptées avec multiplicité

Le théorème spectral, nous fournit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A_s = \Omega^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega$

En prenant $B = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega$

on a $B^T = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^T (\Omega^T)^T = B$ et donc B est symétrique

de plus les valeurs propres de B sont strictement positives donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et

$$B^2 = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega = \Omega^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega = A_s \text{ car } \Omega \Omega^T = I_n$$

Unicité Soit B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$

$$\text{Je note } \lambda_1, \dots, \lambda_r \text{ les valeurs propres de } A_s \text{ distinctes deux à deux et on a } \bigoplus_{1 \leq i \leq r}^{\perp} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

On note respectivement a et b les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A_s et B

On a $b^2 = a$ donc a et b commutent ainsi les sous espaces propres de a sont stables par b

Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note b_i l'endomorphisme induit par b sur $E_{\lambda_i}(A_s)$

b_i est un endomorphisme diagonalisable de $E_{\lambda_i}(A_s)$ car b l'est sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit μ une valeur propre de b_i et $X \in E_{\lambda_i}(A_s)$ un vecteur propre de b_i associé à μ

On a $\mu > 0$ car $\text{sp}(b_i) \subset \text{sp}(b)$

De plus $\lambda_i X = a(X) = b(b(X)) = b(\mu X) = \mu b(X) = \mu^2 X$

donc $\mu^2 = \lambda_i$ car $X \neq 0$ ainsi $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ car $\mu \geq 0$

d'où b_i est diagonalisable sur $E_{\lambda_i}(A_s)$ et $\text{sp}(b_i) \subset \{\sqrt{\lambda_i}\}$

donc la restriction de b à $E_{\lambda_i}(A_s)$ est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$

or $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} (A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'où l'unicité de l'endomorphisme b vérifiant cette condition

Conclusion il existe une unique matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$

b) On écrit alors $A_s = B^2$ où $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi $A = B^2 + A_a$

D'après I.B.2, B est alors inversible et $B^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $(B^{-1})^\top = (B^\top)^{-1} = B^{-1}$

donc $A = B(I_n + B^{-1}A_aB^{-1})B$. Je note alors : $Q = B^{-1}A_aB^{-1}$.

De sorte que $Q^\top = (B^{-1})^\top A_a^\top (B^{-1})^\top = B^{-1}(-A_a)B^{-1} = -Q$ d'où $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

et $\det(A) = \det(B) \det(I_n + B^{-1}A_aB^{-1}) \det(B) = \det(B^2) \det(I_n + Q)$

On a montré l'existence d'une matrice Q de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = \det(A_s) \det(I_n + Q)$

c) Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_s comptées avec multiplicités

On a $\det(A_s) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$.

Il suffit d'établir que $\det(I_n + Q) \geq 1$ (en utilisant la notation précédente)

Soit μ une valeur propre complexe de Q et X un vecteur propre associé.

On a $\bar{X}^\top QX = \mu \bar{X}^\top X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ qui peut donc être identifié à un complexe

ainsi $\mu \bar{X}^\top X = (\bar{X}^\top QX)^\top = -X^\top Q\bar{X} = -\overline{\bar{X}^\top QX} = -\overline{\mu \bar{X}^\top X}$

or $\bar{X}^\top X$ peut être identifié à un réel strictement positif car $X \neq 0$

d'où $\mu = -\bar{\mu}$ donc μ est un imaginaire pur

On note alors χ_{-Q} le polynôme caractéristique de $-Q$ qui est scindé dans $\mathbb{C}[X]$

On peut alors écrire $\chi_{-Q} = X^p \prod_{i=1}^s (X - \mu_i)(X + \mu_i)$ où $n = p + 2s$ les $\mu_i \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$

car $\chi_{-Q} \in \mathbb{R}[X]$ n'admet que des racines imaginaires pures

donc $\det(I_n + Q) = \chi_{-Q}(1) = 1^p \prod_{i=1}^s (1 - \mu_i)(1 + \mu_i) = \prod_{i=1}^s |1 - \mu_i|^2 \geq 1$

On en déduit que $\det(A) \geq \det(A_s)$

I.B.4) On a $A(A^{-1})_s A^\top = \frac{1}{2} A(A^{-1} + (A^{-1})^\top) A^\top = \frac{1}{2} (A^\top + A) = A_s$

donc $\det(A_s) = \det(A(A^{-1})_s A^\top) = \det(A) \det((A^{-1})_s) \det(A^\top)$

ainsi $(\det(A))^2 \det((A^{-1})_s) = \det(A_s)$

I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Je note n_1, n_2 (dans \mathbb{N}) les multiplicités respectives de 1 et -1 dans χ_A

Le théorème de réduction des matrices orthogonales nous fournit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale par blocs de la formes $D = \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, R(\theta_1), \dots, R(\theta_q)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \Omega^\top D \Omega$$

avec $q \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 + n_2 + 2q = n$ et pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, \cos(\theta_1)I_2, \dots, \cos(\theta_q)I_2)\Omega + \Omega^\top \text{diag}(0I_{n_1}, 0I_{n_2}, \sin(\theta_1)J, \dots, \sin(\theta_q)J)\Omega$$

donc A est la somme de la matrice antisymétrique : $\Omega^\top \text{diag}(0I_{n_1}, 0I_{n_2}, \sin(\theta_1)J, \dots, \sin(\theta_q)J)\Omega$
et de la matrice symétrique $\Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, \cos(\theta_1)I_2, \dots, \cos(\theta_q)I_2)\Omega$ qui est une forme diagonalisée de A_s
donc les valeurs propres de A_s comptées avec multiplicité sont : $1, \dots, 1, -1, \dots, -1, \cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_q)$
ainsi les valeurs propres de A_s sont dans $[-1, 1]$

Plus simple : On peut remarquer que $A^\top = A^{-1} \in O(2)$
et pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A_s)$, on a

$$|\lambda| \cdot \|X\|_2 = \|A_s X\|_2 = \frac{1}{2} \|(A + A^\top)X\|_2 \leq \frac{1}{2} \|AX\|_2 + \frac{1}{2} \|A^\top X\|_2 = \|X\|_2$$

I.C.2) Je prends $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $A \in SO_2(\mathbb{R})$, alors $A_s \in \text{Vect}(I_2)$

et pour $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$, alors $A \in S_n(\mathbb{R})$ mais $S \notin O(2)$

donc on a $S \in S_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ mais n'existe pas de matrice $A \in O_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A_s = S$

I.C.3) a) Je note n_1, n_2 (dans \mathbb{N}) les multiplicités respectives de 1 et -1 dans χ_S

Les valeurs propres de S dans $] -1, 1[$ sont alors notés : $c_1, c_1, \dots, c_q, c_q$ où $2q + n_1 + n_2 = n$ (comptées avec multiplicités)

Le théorème spectral nous fournit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, tel que $S = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, c_1 I_2, \dots, c_q I_2)\Omega$

Je note pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\theta_i = \arccos(c_i)$

et je pose $A = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, R(\theta_1), \dots, R(\theta_q))\Omega$

de sorte que $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $A_s = S$

b) Réciproquement on suppose qu'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$,

En reprenant les notations de I.C.1, on a : $S = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, \cos(\theta_1)I_2, \dots, \cos(\theta_q)I_2)\Omega$ où les $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
les valeurs propres de S distinctes de 1 et -1 , comptées avec multiplicités sont donc :

$\cos(\theta_1), \cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_q), \cos(\theta_q)$

alors $\text{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et

pour toute valeur propre λ de S dans $] -1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire

II Matrices F-singulières

II.A - Cas où F est un hyperplan

II.A.1) Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a K est E_n -singulière si et seulement si il existe $X \in E_n$ non nul tel que $\forall Z \in E_n, Z^\top KX = 0$
or

$$\forall Z \in E_n, Z^\top KX = 0 \Leftrightarrow KX \in E_n^\perp \Leftrightarrow KX = 0$$

d'où K est E_n -singulière équivaut $\text{Ker } K \neq 0$ ce qui équivaut à K non inversible

ainsi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est singulière si et seulement si elle est E_n -singulière

II.A.2) $H^\perp = \text{Vect}(N)$ est une droite vectorielle car H est un hyperplan

Pour $X \in H$, on a : $\forall Z \in H, Z^\top AX = 0 \Leftrightarrow AX \in \text{Vect}(N) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, AX = \lambda N$

Ainsi A est H -singulière si et seulement si il existe un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $AX = \lambda N$

II.A.3) \Rightarrow : On suppose que A est H -singulière.

La question précédente nous fournit un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $AX = \lambda N$

On considère $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

On a $A_N Y = (AX - \lambda N \quad N^\top X - 0)$

Comme $N \perp X$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A_N Y = 0$

donc A_N est singulière

\Leftarrow : On suppose que A_N est singulière.

Ceci nous fournit $Y = \begin{pmatrix} Z \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_N Y = 0$ avec $Z \in E_n$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

On a donc $AZ + \mu N = 0$ et $(N \mid Z) = 0$

On a donc $Z \in H$ et $AZ = -\mu N$.

De plus $Z \neq 0$ car par l'absurde, si on avait $Z = 0$,

on aurait $\mu N = -AZ = 0$ ainsi $\mu = 0$ (car $N \neq 0$) et donc on aurait $Y = 0$ ce qui n'est pas

À l'aide de la question précédente, on a A est H -singulière

Conclusion : A est H -singulière si et seulement si la matrice A_N est singulière

II.A.4) On prend $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -A^{-1}N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), 1 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

et on a bien $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1}N \end{pmatrix}$

II.A.5) On utilise la matrice triangulaire par blocs B de la question précédente

Ainsi on a $\det(A_N) \det(B) = \det(A_N B) = \det(I_n) \times (-N^\top A^{-1}N)$

De plus $\det(B) = \det(A^{-1}) \times 1 = \frac{1}{\det(A)}$

On en déduit que $\det(A_N) = -N^\top A^{-1}N \det(A)$

II.A.6) On suppose que $\det((A^{-1})_s) = 0$

Méthode 1 (imprévue) Ceci nous donne $\det(A_s) = 0$ à l'aide de l'égalité de I.B.4

Prenons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_s X = 0$

Je note $N' = AX$

on remarque que $(X \mid N') = (X \mid A_s X) + (X \mid A_a X) = 0 + X^\top A_a X = 0$ (en transposant comme I.B.2)

d'où $N' \perp X$

Si $N' = 0$, je considère H un hyperplan contenant X et N un vecteur unitaire normal à H et on a $AX = 0N$

Si $N' \neq 0$, je considère $N = \frac{1}{\|N'\|_2} N'$ et l'hyperplan $H = \{N\}^\perp$

de sorte que $X \in H$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda N$ (dans les deux cas)

On conclut avec II.A.2

Méthode 2 (sans doute prévue par l'énoncé)

Je prends $N \in \text{Ker}((A^{-1})_s)$ unitaire et l'hyperplan $H = \{N\}^\perp$

On a $-N^\top A^{-1}N = -N^\top ((A^{-1})_s) N - N^\top ((A^{-1})_a) N = 0 + 0 = 0$ (comme en IB2)

donc avec II.A.5, on a $\det(A_N) = 0$ ainsi d'après II.A.3, A est H -singulière

si $\det((A^{-1})_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H -singulière

II.A.7) On suppose $\det(A_s) = 0$ et on a $\det(A) \neq 0$, la matrice A étant supposée inversible
Donc $\det((A^{-1})_s) = 0$ d'après I.B.4, ce qui permet de conclure :

si $\det(A_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H -singulière

II.A.8) Par l'absurde, on suppose qu'il existe un hyperplan H pour lequel A soit H -singulière
donc ceci nous $X \in H$ non nul tel que $AX \in H^\perp$
donc $0 = (X | AX) = X^T AX = X^T A_s X + X^T A_a X = X^T A_s X$
donc $0 > 0$ d'après I.B.1, ce qui n'est pas

Si on suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors A est H -régulière pour tout hyperplan H de E_n

II.B - Exemple

II.B.1) On effectue l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 + C_3 + C_1$ puis

$$\text{Ainsi } \det(A) = \begin{vmatrix} 2-\mu & 1 & \mu \\ -1 & 0 & \mu-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ainsi $A(\mu)$ est inversible pour tout réel μ (faisable à la calculatrice formelle)

II.B.2) On a $A(\mu)_s = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu/2 \\ -1 & 2-\mu & -1+\mu/2 \\ \mu/2 & -1+\mu/2 & 1 \end{pmatrix}$

On effectue les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis linéarité et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\text{ainsi } \det(A(\mu)_s) = (1-\mu) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mu/2 \\ 1 & 2-\mu & -1+\mu/2 \\ -1 & -1+\mu/2 & 1 \end{vmatrix} = (1-\mu) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mu/2 \\ 0 & 3-\mu & -1 \\ 0 & -2+\mu/2 & 1+\mu/2 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \det(A(\mu)_s) = (1-\mu) [(3-\mu)(1+\mu/2) + (-2+\mu/2)] = \frac{1}{2}(1-\mu)(-\mu^2 + 3\mu - 2\mu + 6 - 4 + \mu)$$

$$\text{donc } \det(A(\mu)_s) = \frac{1}{2}(1-\mu)(-\mu^2 + 2\mu + 2)$$

$$\text{On a } 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2 \text{ et } (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

$$\text{donc } \det(A(\mu)_s) = \frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - (1 - \sqrt{3}))(\mu - (1 + \sqrt{3}))$$

Ainsi $\text{pour } \mu = 1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, A(\mu)_s \text{ est singulière}$

II.B.3) On utilise 6, puis 5, pour trouver N puis H

$$\text{On a } A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (calculatrice) donc } (A(1)^{-1})_s = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On prend le vecteur unitaire } N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A(1)^{-1})_s \text{ et } H = \{N\}^\perp \text{ le plan d'équation } x_3 = 0$$

$$\text{Je prends } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ non nul dans } H \text{ et on a } A(1)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)N$$

Donc d'après II.A.2, $\text{l'hyperplan } H \text{ d'équation } x_3 = 0 \text{ est tel que } A(1) \text{ soit } H\text{-singulière}$

II.C - Cas où F est de dimension $n - 2$

II.C.1) A est F-singulière si et seulement si il existe $X \in F$ non nul tel que $\forall Z \in F, Z^T A X = 0$
ce qui équivaut à il existe $X \in F$ non nul tel que $A X \in F^\perp$

Comme $F = \text{Vect}(N_1, N_2)$, on a A est F-singulière

si et seulement s'il existe un élément non nul X de F et deux réels λ_1, λ_2 tels que $A X = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$

II.C.2) \Rightarrow On suppose que A est F-singulière

En utilisant les notations de la question précédente, on pose $Z = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R})$,

on a $Z \neq 0$ et $A_N Z = 0$ par un calcul analogue à II.A.3

\Leftarrow On suppose A_N singulière.

Ceci nous fournit $W = \begin{pmatrix} Y \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R}) \in \text{Ker}(A_N)$ non nul où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

On a alors $Y \in F = \{N_1, N_2\}^\perp$ et $A Y = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$ analogue à II.A.3

de plus Y est non nul car par l'absurde si on avait $Y = 0$, on aurait $A Y = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = 0$

donc $\mu_1 = \mu_2 = 0$ car (N_1, N_2) libre

donc $W = 0$ Absurde

Conclusion A est F-singulière si et seulement si la matrice A_N est singulière

II.C.3) On prend $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ avec $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -A^{-1}N \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}), 0 \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R}), I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

et on a bien $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix}$

II.C.4) Comme en II.A.5, on a $\det(A_N) = \det(N^T A^{-1} N) \det(A)$

II.C.5) Soit $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$. On a $P^T A^{-1} P = (A^{-1} P)^T A^T (A^{-1} P) = \left[(A^{-1} P)^T A (A^{-1} P) \right]^T$

donc $\det(P^T A^{-1} P) = \det\left((A^{-1} P)^T A (A^{-1} P)\right)$

La multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang ;

Pour obtenir l'équivalence on prend $P' = A^{-1} P$ dans un sens et $P = A P'$ pour la réciproque :

il existe $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(P^T A^{-1} P) = 0$ si et seulement s'il existe $P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(P'^T A P') = 0$

II.C.6) On remarque pour $X \in E_n$, on a $X^T A_a X = 0$ et $X^T A_s X = X^T A X$

donc $\det(N'^T A N') = \begin{vmatrix} N_1'^T A_s N_1' & N_1'^T A N_2' \\ N_2'^T A N_1' & N_2'^T A_s N_2' \end{vmatrix}$

or $N_1'^T A N_2' = N_1'^T A_s N_2' + N_1'^T A_a N_2'$ et $N_2'^T A N_1' = N_2'^T A_s N_1' + N_2'^T A_a N_1'$

donc en transposant des scalaires : $N_2'^T A N_1' = N_1'^T A_s N_2' - N_1'^T A_a N_2'$

donc $\det(N'^T A N') = (N_1'^T A_s N_1') (N_2'^T A_s N_2') - (N_1'^T A_s N_2' + N_1'^T A_a N_2') (N_1'^T A_s N_2' - N_1'^T A_a N_2')$

d'où $\det(N'^T A N') = (N_1'^T A_s N_1') (N_2'^T A_s N_2') - (N_1'^T A_s N_2')^2 + (N_1'^T A_a N_2')^2$

II.C.7) On remarque facilement que l'application $(X, Y) \in E_n^2 \mapsto X^T A_s Y \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire ; c'est facilement une forme bilinéaire symétrique et la propriété "définie positive" est établie en I.B.1.

On note $N_1' = A^{-1} N_1$ et $N_2' = A^{-1} N_2$ non colinéaires car (N_1, N_2) libre et A^{-1} inversible

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec cas de non égalité) aux vecteurs N'_1 et N'_2 de E_n non colinéaires, ce qui donne $(N'_1{}^\top A_s N'_1)(N'_2{}^\top A_s N'_2) > (N'_1{}^\top A_s N'_2)^2$

donc $\det(N'^\top A N') > 0$ en utilisant la question précédente.

À l'aide du calcul fait en II.C.5, on a $\det(N^\top A^{-1}N) = \det(N'^\top A N')$

Ainsi si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(N^\top A^{-1}N) > 0$

II.C.8) On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit un sous-espace vectoriel F de dimension $n - 2$ de E_n .

Alors pour tout base (N_1, N_2) de F , on a $\det(N^\top A^{-1}N) \neq 0$ où $N = (N_1 \ N_2) \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$

De plus $\det(A) \neq 0$ car A inversible

d'où $\det(A_N) \neq 0$ en utilisant $\det(A_N) = \det(N^\top A^{-1}N) \det(A)$ voir II.C.4

Ainsi A_N est régulière, donc A n'est pas F -singulière d'après II.C.2

Ainsi si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est F -régulière pour tout sous-espace vectoriel F de dimension $n - 2$ de E_n

II.D - Exemple

II.D.1) D'après II.C.6, pour $N' = (N'_1 \ N'_2)$, on a : $\det(N'^\top A N') = (N'_1{}^\top A_s N'_1)(N'_2{}^\top A_s N'_2) - (N'_1{}^\top A_s N'_2)^2 + (N'_1{}^\top A_a N'_2)^2$

Si on trouve $N'_2 \in \text{Ker}(A_s)$ non nul et $N'_1 \in \{A_a N'_2\}^\perp \setminus \text{Vect}(N'_2)$

On aura $N' = (N'_1 \ N'_2) \in \mathcal{G}_{n,2}$ tel que $\det(N'^\top A N') = 0$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Je choisis alors $N'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $A_a N'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et je peux prendre $N'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En choisissant $N' = (N'_1 \ N'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on aura : $\det(N'^\top A N') = 0$

Je vérifie (car j'ai le temps) : $N'^\top A N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien de déterminant nul.

II.D.2) En utilisant la méthode de II.C.5, on a $\det(N^\top A^{-1}N) = 0$

en ayant posé $(N_1 \ N_2) = N = A N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

Je cherche une base de $F = \text{Vect}(N_1, N_2)^\perp$.

On obtient pour $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $A(1)$ est F -singulière.

On a bien $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot N_1 + (-1) \cdot N_2 \in \text{Vect}(N_1, N_2)$ (II.C.1)

II.E - Cas général

II.E.1) On prend (N_1, \dots, N_p) une base de F^\perp

On définit $N = (N_1 \cdots N_p) \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N' = A^{-1}N \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ car A^{-1} inversible

On pose $A_N \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ comme en II.C.2

On montre que A est F -singulière si et seulement si A_N est singulière

Comme A est inversible alors on pose $N' = A^{-1}N$ on a $\det(A_N) = \det(N'^T A N')$

Ainsi dans ce cas, si $\det(N'^T A N') = 0$ alors A est F -singulière

II.E.2) On a $N'X \in E_n$ et $X^T N'^T A N' X = (N'X)^T A (N'X) = (N'X)^T A_s (N'X)$

Comme $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul

alors $N'X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul car $\text{Ker } N' = \{0\}$ par la formule du rang

si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $X^T N'^T A N' X > 0$ car $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

II.E.3) Je note $A' = N'^T A N'$. On vient de voir que : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A'_s X = X^T A' X > 0$

On déduit que les valeurs propres réelles de $A' = N'^T A N'$ sont strictement positives avec I.B.1 et I.B.2

II.E.4) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ a son polynôme caractéristique χ_M scindé dans $\mathbb{C}[X]$ d'après d'Alembert-Gauss.

Ainsi M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et les valeurs propres complexes non réelles sont conjuguées deux à deux avec même multiplicité.

On peut donc écrire $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i) \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)(X - \bar{\lambda}_i)$ où $p = r + 2s$, les $\mu_i \in \mathbb{R}$ et les $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ainsi $\det(M) = \left(\prod_{i=1}^r \mu_i \right) \left(\prod_{i=1}^s \lambda_i \bar{\lambda}_i \right) = \left(\prod_{i=1}^r \mu_i \right) \left(\prod_{i=1}^s |\lambda_i|^2 \right)$ et $\prod_{i=1}^s |\lambda_i|^2 > 0$

En appliquant ceci à $M = N'^T A N'$, on a $\left(\prod_{i=1}^r \mu_i \right) > 0$ d'après II.E.3 d'où $\det(N'^T A N') > 0$

II.E.5) En utilisant II.E.1 car $\det(N'^T A N') \neq 0$ on a A est F -régulière pour tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$ de E_n

Pour le cas où $F = E_n$, on utilise II.A.1 car A est inversible d'après IB2 car $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

III Matrices positivement stables**III.A - Exemples**

III.A.1) Cas χ_A scindé dans \mathbb{R} : Si A admet deux valeurs propres réelles éventuellement confondues : x_1 et x_2 ,

alors $\text{tr}(A) = x_1 + x_2$ et $\det(A) = x_1 x_2$

On a alors : $\begin{cases} \text{Re}(x_1) > 0 \\ \text{Re}(x_2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \det(A) > 0 \\ \text{tr}(A) > 0 \end{cases}$

Cas χ_A non scindé dans \mathbb{R} : Si A admet deux valeurs propres conjuguées et distinctes : z_1 et z_2 ,

alors $\text{tr}(A) = z_1 + z_2 = 2 \text{Re}(z_1) = 2 \text{Re}(z_2)$ et $\det(A) = z_1 z_2 = |z_1|^2 > 0$

On a alors : $\begin{cases} \text{Re}(z_1) > 0 \\ \text{Re}(z_2) > 0 \end{cases} \iff \text{tr}(A) > 0 \iff \begin{cases} \det(A) > 0 \\ \text{tr}(A) > 0 \end{cases}$

Conclusion : Dans tous les cas, on a :

A est positivement stable si et seulement si $\text{tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

III.A.2) a) Je prends $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A^\top deux matrices positivement stables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais $A + A^\top$ ne l'est pas

En effet $\det(A) = \det(A^\top) = 1 > 0$ et $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^\top) = 2 > 0$ alors que $\det(A + A^\top) = 0$ (voir III.A.1)

La somme de deux matrices positivement stables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement positivement stable.

b) On considère que les matrices A, B et $A + B$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il suffit d'établir que si A et B commutent les valeurs propres de $A + B$ sont sommes d'une valeur propre de A et d'une valeur propre de B .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A + B$. Les matrices $A + B$ et A commutent.

Ainsi $E_\lambda(A + B)$ est stable par a qui désigne l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A .

La restriction de a à $E_\lambda(A + B)$ admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Ceci nous fournit $X \in E_\lambda(A + B) \setminus \{0\}$ tel que $a(X) = \mu X = AX$ et donc $BX = (\lambda - \mu)X$ car $\lambda X = (A + B)X$ d'où λ est somme de μ et $\lambda - \mu$ valeurs propres respectives de A et B

De plus l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ est stable par $+$ ce qui nous permet d'affirmer que

la somme de deux matrices positivement stables qui commutent est positivement stable

III.A.3) a) On suppose que $X \neq 0$.

On a $\bar{X}^\top AX = (Y - iZ)^\top A(Y + iZ) = Y^\top AY + Z^\top AZ + i(Y^\top AZ - Z^\top AY)$

donc $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) = Y^\top AY + Z^\top AZ = Y^\top A_s Y + Z^\top A_s Z$ (comme en I.B.2)

Si $Y = 0$ alors $Z \neq 0$ on a $Y^\top A_s Y = 0$ et $Z A_s Z > 0$ d'après I.B.1

Si $Y \neq 0$ alors on a $Y^\top A_s Y > 0$ et $Z A_s Z \geq 0$

Dans tous les cas, on a $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) > 0$

b) Soit λ une valeur propre de A . Prenons $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$.

On a $\bar{X}^\top AX = \lambda \bar{X}^\top X$ or $\bar{X}^\top X$ peut être identifié à un réel strictement positif

ainsi $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) = \operatorname{Re}(\lambda) \bar{X}^\top X$ et d'après la question précédente : $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) > 0$

d'où $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$

ainsi A est bien positivement stable

III.A.4) Je prends $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice positivement stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après III.A.1

or $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $A_s \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $0 \in \operatorname{sp}(A_s)$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un exemple de matrice A positivement stable telle que A_s ne soit pas définie positive

III.B -

III.B.1) Les solutions sur \mathbb{R}^+ de (EH) : $y' + \lambda y = 0$ équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur \mathbb{R}^+ sont les fonctions de la forme $t \mapsto ke^{-\lambda t}$ avec $k \in \mathbb{C}$

Par la méthode de la variation de la constante ; on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre $y' + \lambda y = v$ sous la forme $g : t \mapsto k(t)e^{-\lambda t}$ avec k de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+

On trouve alors $k'(t)e^{-\lambda t} = v(t)$

on peut prendre k définie sur \mathbb{R}^+ par $k : t \mapsto \int_0^t v(u)e^{\lambda u} du$

donc u est de la forme $t \mapsto \left(k + \int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds\right) e^{-\lambda t}$ avec $k \in \mathbb{C}$

La fonction v étant bornée sur \mathbb{R}^+ , ceci nous fournit $M > 0$ tel $\forall t \geq 0, |v(t)| \leq M$

On écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Soit $t \geq 0$.

On a $|u(t)| = \left| \left(k + \int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds\right) e^{-\lambda t} \right| = \left| k + \int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds \right| e^{-\alpha t}$

donc $|u(t)| \leq |k|e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t |v(s)| e^{\lambda s} du \leq |k| + Me^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ds$

or $\int_0^t e^{\alpha s} ds = \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \leq \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$ d'où $\forall t \geq 0, |u(t)| \leq |k| + \frac{M}{\alpha}$

On a bien montré que $\boxed{u \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

III.B.2) On écrit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et pour $i > j$, $t_{i,j} = 0$ car T est triangulaire supérieure

La fonction U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et on a pour $t \geq 0$:

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ \vdots \\ u'_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } TU(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix} \text{ où pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_i(t) = \sum_{k=i}^n t_{i,k} u_k(t)$$

On va montrer par récurrence descendante et bornée sur $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que la fonction u_j est bornée sur \mathbb{R}^+

Initialisation La fonction u_n vérifie : $u'_n + t_{n,n}u_n = 0$ sur \mathbb{R}^+

donc la fonction u_n est de classe \mathcal{C}^1 est la fonction $u'_n + t_{n,n}u_n$ y est bornée

Comme $\operatorname{Re}(t_{n,n}) > 0$, alors u_n est bornée sur \mathbb{R}^+ d'après la question précédente

Hérédité Soit $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que les fonctions u_j, u_{j+1}, \dots, u_n soit bornées sur \mathbb{R}^+ .

Montrons que u_{j-1} bornées sur \mathbb{R}^+ .

On a $u'_{j-1} + \sum_{k=j-1}^n t_{j-1,k} u_k = 0$ d'après la j ème ligne de $U'(t) + TU(t) = 0$

donc $u'_{j-1} + t_{j-1,j-1}u_{j-1} = -\sum_{k=j}^n t_{j-1,k}u_k$

or $-\sum_{k=j}^n t_{j-1,k}u_k$ est bornée sur \mathbb{R}^+ par combinaison linéaire de fonctions bornées et $\operatorname{Re}(t_{j-1,j-1}) > 0$

En utilisant à nouveau la question précédente, la fonction u_{j-1} bornées sur \mathbb{R}^+ .

Conclusion On a montré par récurrence que $\boxed{\text{les fonctions } u_j, \text{ où } 1 \leq j \leq n, \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^+}$

III.B.3) Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ d'après d'Alembert-Gauss donc A est trigonalisable
Ceci nous fournit $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieur avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme coefficients diagonaux

Ainsi $T = P^{-1}AP - \alpha I_n = P^{-1}(A - \alpha I_n)P$ est triangulaire supérieur semblable à $A - \alpha I_n$ avec $\lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_n - \alpha$ comme coefficients diagonaux

On note $V : t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$ qui est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+

car $t \mapsto e^{\alpha t}$ et $t \mapsto \exp(-tA)$ le sont et par bilinéarité de $(x, M) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto xM$ en dimension finie

et pour $t \geq 0$, on a $V'(t) = \alpha e^{\alpha t} \exp(-tA) - e^{\alpha t} A \exp(-tA) = -PTP^{-1}V(t)$

donc en posant $W(t) = P^{-1}V(t)P$, on a W de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et $W' : t \mapsto P^{-1}V'(t)P$

car l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

donc W vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, W'(t) + TW(t) = 0$

Toutes les colonnes C de W vérifie aussi $\forall t \in \mathbb{R}^+, C'(t) + TC(t) = 0$

comme T vérifie les hypothèses de la question précédente, par construction

alors les fonctions composantes de C et par conséquent celles de W sont bornées sur \mathbb{R}^+

Ainsi la fonction W est bornée sur \mathbb{R}^+

On a $V = \varphi^{-1} \circ W$ or φ^{-1} est linéaire en dimension finie donc continue

ce qui nous fournit $K > 0$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\varphi^{-1}(M)\|_2 \leq K\|M\|_2$

ainsi $\forall t \geq 0, \|V(t)\|_2 \leq K\|W(t)\|_2$

On conclut enfin que $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

III.C.1) On note les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par $\varphi_1(M) = A^\top M$ et $\varphi_2(M) = MA$.
 Je note ψ_1 les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par $\psi_1(M) = A^\top M$ et $\psi_2(M) = MA$.
 Les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant formellement la même base canonique ;
 les endomorphismes φ_1 et ψ_1 ont même matrice dans cette base et ont donc même spectre.
 Soit λ une valeur propre de φ_1 donc de ψ_1 . Prenons alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $A^\top M = \lambda M$.
 On choisit C une colonne non nulle de M et on a $A^\top C = \lambda C$
 Donc $\lambda \in \text{Sp}(A^\top) = \text{Sp}(A)$ et ainsi $\text{Re}(\lambda) > 0$
 d'où φ_1 est positivement stable
 Soit μ une valeur propre φ_2 donc de ψ_2 et N un vecteur propre de ψ_2 associé
 en transposant $\psi_2(N) = NA = \mu N$, on obtient $A^\top N^\top = \varphi_1(N^\top) = \mu N^\top$
 Comme $N^\top \neq 0$, μ est une valeur propre de φ_1 et donc $\text{Re}(\mu) > 0$ d'après ce qui précède
 Ainsi φ_2 est positivement stable comme φ_1
 De plus, on vérifie facilement que φ_1 et φ_2 commutent et que $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$
 D'après III.A.2.b : Φ est positivement stable

III.C.2) a) D'après ce qui précède $0 \notin \text{Sp}(\Phi)$ donc Φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ainsi $\boxed{\text{il existe une unique matrice } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A^\top B + BA = I_n}$

b) Les matrices $A^\top B_s + B_s A$ et $A^\top B_a + B_a A$ sont respectivement symétrique et antisymétrique.
 or $I_n + 0 = (A^\top B_s + B_s A) + (A^\top B_a + B_a A)$ donc $I_n = A^\top B_s + B_s A$ par unicité de la partie symétrique
 d'où $B = B_s$ d'après III.C.2 donc $\boxed{B \text{ est symétrique}}$

On remarque $(BA)^\top = A^\top B$ donc $I_n = A^\top B + BA = 2(BA)_s$

ainsi $2BA = I_n + (BA)_a$

en utilisant ce qui a été fait en I.B.3.b), on obtient $\det(I_n + (BA)_a) \geq 1$

Donc $2^n \det(B) \det(A) \geq 1$

Les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs et des complexes non réels deux à deux conjugués de mêmes multiplicités car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positivement stable.

Ainsi (produit des valeurs propres de A) $\det(A) > 0$ puis $\boxed{\det(B) > 0}$

III.C.3) a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!}\right)^\top = \sum_{k=0}^N \frac{(M^\top)^k}{k!}$

De plus la transposition est continue car il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient $\exp(M^\top) = \exp(M)^\top$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On applique ce qui précède à $M = -tA$ et en posant $C = \exp(-tA)$,

on obtient $V(t) = C^\top C$, de plus $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ en effet : $\exp(-tA) \exp(tA) = I_n$

Ainsi $V(t)^\top = V(t)$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top V(t)X = \|CX\|^2 > 0$

donc $\boxed{\text{pour tout réel } t, V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

On utilisera deux fois la propriété pour f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie et g linéaire défini sur cet espace on a :

$$g\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b g \circ f$$

Soit $t > 0$.

On a $W(t)^\top = \left(\int_0^t V(s) ds \right)^\top = \int_0^t V(s)^\top ds = \int_0^t V(s) ds = W(t)$ (première fois)

Donc $W(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On a $X^\top W(t)X = \int_0^t X^\top V(s)X ds$ (deuxième fois)

Pour $t > 0$, la fonction $s \mapsto X^\top V(s)X$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, t]$ donc $X^\top W(t)X > 0$ d'où $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

b) En posant $\psi_g : t \mapsto A^\top W(t) + W(t)A$ et $\psi_d : t \mapsto I_n - V(t)$

On a $W(0) = 0$ et $V(0) = I_n$ car on a facilement que $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = I_n$

donc pour $t = 0$, on a $\psi_g(0) = A^\top W(0) + W(0)A = I_n - V(0) = \psi_d(0)$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $W'(t) = V(t)$ car V est continue et donc $\psi_g'(t) = A^\top V(t) + V(t)A$

Le produit matriciel étant bilinéaire, on a $V'(t) = -A^\top V(t) + V(t)(-A)$

donc $\psi_d'(t) = A^\top V(t) + V(t)A$

Ainsi $\psi_d' - \psi_g' = (\psi_d - \psi_g)'$ est nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc $\psi_d - \psi_g$ est constante

Vu la valeur en 0, on a $\psi_d = \psi_g$

donc $\boxed{\text{pour tout réel } t, A^\top W(t) + W(t)A = I_n - V(t)}$

c) • $t \mapsto \|V(t)\|_2$ **intégrable sur** $[0, +\infty[$

La fonction $t \mapsto V(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ car $t \mapsto \exp(tM)$ l'est pour toute matrice carrée M ainsi que le produit matriciel qui est bilinéaire en dimension finie

Ainsi $t \mapsto \|V(t)\|_2$ est continue sur $[0, +\infty[$ (*)

Je pose $\alpha > 0$ défini comme en III.B.3

ce qui nous fournit $K > 0$ tel que $\forall t \geq 0, \|e^{\alpha t} \exp(-tA)\|_2 \leq K$ donc

$$\forall t \geq 0, \|\exp(-tA)\|_2 \leq K e^{-\alpha t}$$

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA) = 0$ (matrice nulle).

En utilisant a) et à nouveau la continuité de la transposition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(-tA^\top)\|_2 = \left\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA^\top) \right\|_2 = \left\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA)^\top \right\|_2 = \left\| \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA) \right)^\top \right\|_2 = 0$$

Ceci nous fournit $\Lambda > 0$ tel que $\forall t \geq \Lambda, \|\exp(-tA^\top)\|_2 \leq 1$

et sur le compact $[0, \Lambda]$, la fonction continue $t \mapsto \|\exp(-tA^\top)\|_2$ est bornée

Ce qui nous fournit $C_1 > 0$, tel que $\forall t \geq 0, \|\exp(-tA^\top)\|_2 \leq C_1$

Comme vu en cours il existe $C_2 > 0$ tel que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\|_2 \leq C_2 \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$

On trouve alors $D = C_1 C_2 K > 0$ tel que $\forall t \geq 0, \|V(t)\|_2 \leq D \exp(-t\alpha)$

Or la fonction $t \mapsto \exp(-t\alpha)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\alpha > 0$

par comparaison entre fonctions positives et avec (*), on obtient $t \mapsto \|V(t)\|_2$ intégrable sur $[0, +\infty[$

• **On a :** $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$

Il suffit de remarquer que $\forall t \geq 0, \|V(t)\|_2 \leq D \exp(-t\alpha)$ (point précédent) et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-t\alpha) = 0$

Ainsi selon les gendarmes $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|V(t)\|_2 = 0$

- $t \mapsto W(t)$ admet une limite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en $+\infty$

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $M_{i,j}$ un coefficient en place (i, j) de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ce qui se traduit par : $W(t)_{i,j} = \int_0^t V(s)_{i,j} ds$

On a $|M_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}} (M_{l,k})^2} = \|M\|_2$ d'où $\forall s \geq 0, |V(s)_{i,j}| \leq \|V(s)\|_2$.

De plus $s \mapsto V(s)_{i,j}$ est continue sur \mathbb{R}^+ car c'est une fonction coefficient de V qui est continue

Ce qui nous assure de l'intégrabilité des fonctions $s \mapsto V(s)_{i,j}$ sur $[0, +\infty[$

d'où l'existence des limites quand $t \rightarrow +\infty$, des $W(t)_{i,j} = \int_0^t V(s)_{i,j} ds$ puis de $W(t)$ (par coefficients)

- $B = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$

Notons cette limite $W_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$

Comme Φ est continue (endomorphisme en dimension finie) et que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(W(t)) = I_N - V(t)$ on a donc $A^T W_\infty + W_\infty A = I_n$

En utilisant l'unicité du III.C.2.a), on a donc

en faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, B est alors la limite de $W(t)$ quand t tend vers $+\infty$

- B est définie positive

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\forall t \geq 0, X^T W(t) X \geq 0$ car selon a), $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

en passant à la limite par continuité de $M \mapsto X^T M X$ on obtient : $X^T B X \geq 0$

donc B est positive. Comme B est symétrique (III.C.2.b) réelle, on a $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$

mais comme $\det(B) > 0$, alors $0 \notin \text{Sp}(B)$ d'où $\text{Sp}(B) \subset]0, +\infty[$

On en déduit que la matrice B est définie positive de la question III.C.2. OUF !

