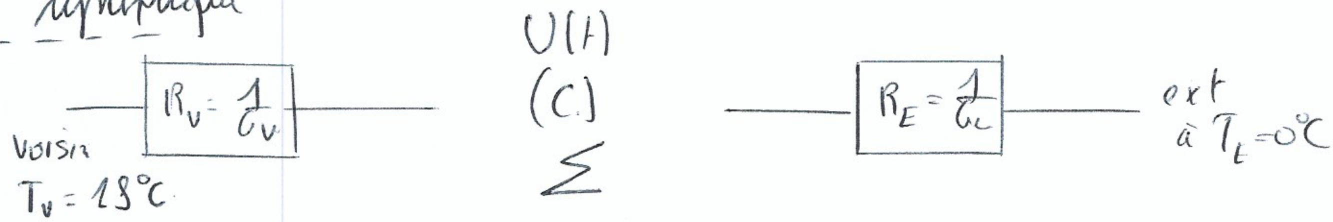
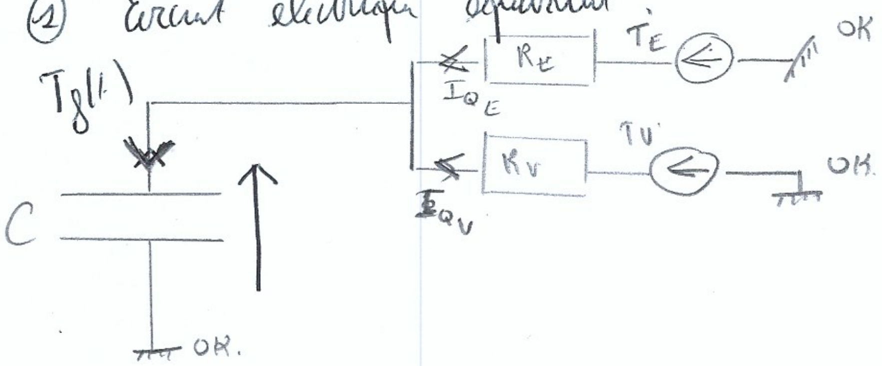
Exercice n°6 : Refroidissement d'un appartement

schéma synoptique



① Circuit électrique équivalent



1er principe $\quad \dfrac{dU(t)}{dt} = I_{Q_E} + I_{Q_V} = G_V\,(Tg(t) - T_V) + \overset{G_E}{\dfrac{1}{R_E}}\,(Tg(t) - T_E)$

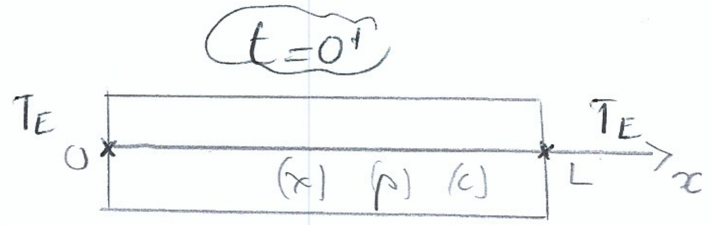
$$+\,C\,\frac{d\,Tg(t)}{dt} = -(G_V + G_E)\ Tg(t) + G_V T_V + G_E T_E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\,Tg}{dt} + \frac{(G_V + G_E)}{C}\ Tg(t) = \frac{G_V T_V + G_E T_E}{C}$$

② cte de temps $\quad \tau = \dfrac{C}{G_V + \dfrac{1}{R_E}} = \dfrac{6 \cdot 10^5}{100 + \dfrac{1}{0{,}05}} \approx 5000\,s$

③ valeur finale : $\quad Tg = \dfrac{G_V T_V + G_E T_E}{G_V + G_E} = 288K \simeq 15°C$

Exercice n° 13 :



idée : estimer le tps de diffusion ds tt le morceau

⚠ par symétrie la distance caractéristique sera $\frac{L}{2}$
(la décongélation s'amorce par les 2 extr.)

$$\rightarrow \tau_c = \frac{L^2}{4D} \qquad \text{A.N.} \quad \tau_c \simeq 80.10^3\,s \approx 23 \text{ heures}$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$

Plus précisément maintenant :

Eq. de Fourier : $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$

Pb de l'espace et du tps $\Rightarrow$ on peut tenter une séparation de variables.

$$T(x,t) = f(x) \times g(t)$$

soit : $f(x) g'(t) = D\, g(t) f''(x) \xrightarrow{fg} \frac{g'(t)}{g(t)} = D \frac{f''(x)}{f(x)} = C$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(t) - C g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = G_0 e^{+Ct} \\ f''(x) + \frac{1}{D\tau} f(x) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ impose $C<0$
on pose $-C = \frac{1}{\tau}$

(2) donne : $f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$ avec $k = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}$

Donc on aurait $T(x,t) = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]\, G_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Vérification des CL et CI

à $t=0$: $T(x,0) = A\cos(kx) + B\sin(kx) = T_0 \ \forall x \Rightarrow$ Pb !

à $\forall t$: $T(0,t) = T(L,t) = T_E = A\, \mathcal{C}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$ Pb !

Idée : on va exploiter la linéarité de l'équation de la chaleur.

Forme proposée : → par superposition de solution

$$T(x,t) = T_E + \sum_{\tau} \left[A_\tau \cos(kx) + B_\tau \sin(kx)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

⚠ vérif CL_1 : $T(0,t) = T_E \Rightarrow A_\tau = 0$

et CL_2 : $T(L,t) = T_E \Rightarrow \underset{\sin(kL)=0}{\wedge} kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$

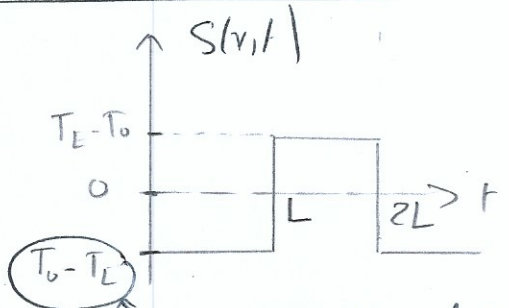
donc $T(x,t) = T_E + \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t}{\tau_n}}$

avec $\tau_n = -\frac{1}{c}$ et $k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L^2}{n^2\pi^2 D}$$

d'où finalement : $T(x,t) = T_E + \overbrace{\sum_{n>0} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}}^{S(x,t)}$

Il reste à trouver les B_n ? → cf électronique (chap I)



en $x=0$ et $x=L$, alternance <0 pour avoir $T(0,0) = T(L,0) = T_E$

$$S(x,0) = \sum_{n \geq 0} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

cf chap I : $\begin{cases} B_{2n} = 0 \quad \text{car} \quad S(x,0) = -S(x+L,0) \quad \underset{\text{période}/2}{} \\ B_{2p+1} = \dfrac{4(T_0 - T_E)}{(2p+1)\pi} \end{cases}$

Idée : les composantes harmoniques décroissent très rapidement $\Rightarrow$ on va garder uniquement le fondamental car $\tau_n \downarrow$ en $\frac{1}{n^2}$

$$T(x,t) \approx T_E + \frac{4(T_0 - T_E)}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t}{L^2}\pi^2 D}$$

Le point le plus froid est nécessairement au centre de la viande donc : en $x = \frac{L}{2}$

on veut le tps pour lequel $T\left(\frac{L}{2} ; t_{min}\right) = T_C$

$$\Rightarrow T_E + \frac{4(T_0 - T_E)}{\pi} e^{-\frac{t_{min}\pi^2 D}{L^2}} = T_C$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{min} = \frac{L^2}{\pi^2 D} \ln \frac{4(T_0 - T_E)}{\pi(T_C - T_E)}}$$

A.N. $t_{min} = 76 \cdot 10^3\ s \simeq 22$ heures

NB : terme $\frac{L^2}{D}$ présent ds la solution

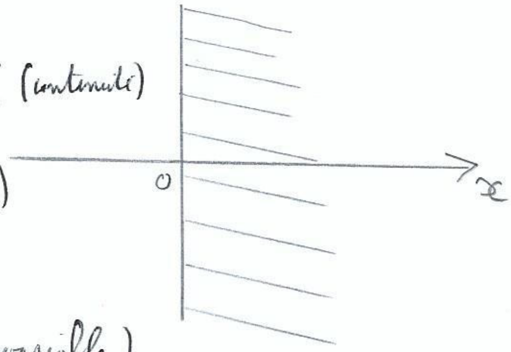
7/

Finalement : $$\boxed{T(r) = \frac{\sigma}{4\lambda}\left(r_e^2 - r^2\right) + \frac{\sigma r_i^2}{2\lambda}\ln\left(\frac{r}{r_e}\right) + T_s}$$

T_{max} en $r_i \Rightarrow \underline{T(r_i) = 1088{,}5\ \mathrm{K}} < T_f \Rightarrow$ fusion évitée.

Exercice n° 8 : Modélisation d'une brûlure de la peau

(1) $$\begin{cases} T(x>0, t=0^+) = T(x>0, t<0) = T_0 \text{ (continuité)} \\ T(x=0, t>0) = T_1 \text{ (T du corps chaud)} \end{cases}$$



(2) $T(x,t) = f(u) \rightarrow$ chgt de fonction (et variable)

Eq. de Fourier 1D : $$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (e)$$

* $$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(u(t,x))\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \times f'(u) \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x}{2\sqrt{D}}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-3/2} = \frac{-x}{4\sqrt{D}}\,\frac{1}{t^{3/2}}$$

$$= \frac{-x}{4\sqrt{D}}\,\frac{1}{t^{3/2}}\,f'(u)$$

* $$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u(t,x))\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\,f'(u) \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\,f'(u)$$

Puis $$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{Dt}}\,f'(u(x,t))\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\,f''(u)$$

$$= \frac{1}{4Dt}\,f''(u)$$

donc (e) $\Rightarrow$ $$-\frac{x}{4\sqrt{D}}\,\frac{1}{t^{\cancel{3/2}\ 1/2}}\,f'(u) = \frac{\cancel{D}}{4\cancel{D}\cancel{t}}\,f''(u)$$

$$\Rightarrow f''(u) + \underbrace{\frac{x}{\sqrt{Dt}}}_{2u}\,f'(u) = 0 \Rightarrow \boxed{f''(u) + 2u\,f'(u) = 0} \ (E)$$

Solution proposée : $f(u) = A + B\int_0^u e^{-y^2}dy$

$$\begin{cases} f'(u) = B e^{-u^2} \\ f''(u) = -2uB e^{-u^2} \end{cases} \Rightarrow -2uB e^{-u^2} + 2uB e^{-u^2} = 0$$

b) CL : $\begin{cases} T(x=0, t>0) = f(0) = A = T_1 \\ T(x>0, t=0) = f(u\to\infty) = A + B\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = T_1 + B\frac{\sqrt{\pi}}{2} = T_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow B = \frac{2(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi}}$$

③ $\vec{J}_Q(x,t) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\vec{e_x} = \frac{-\lambda}{2\sqrt{Dt}} f'(u)\,\vec{e_x} = -\frac{\lambda}{2\sqrt{Dt}}\frac{d}{du}\left(T_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_0 - T_1)\int_0^u e^{-y^2}du\right)$

$$= -\frac{\lambda}{2\sqrt{Dt}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_0 - T_1)e^{-u^2}\vec{e_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}_Q(x,t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{Dt\pi}}(T_0 - T_1)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\vec{e_x}} \quad \text{et} \quad \vec{J}_Q(0,t) = \frac{\lambda}{\sqrt{D\pi t}}(T_1 - T_0)\vec{e_x}$$

© $\|\vec{J}_Q\| \searrow$ lorsque $t \nearrow$
et $\|\vec{J}_Q\| \nearrow \infty$ à $t=0$
$\Rightarrow$ Brûlure

④ $f(u_1) = T_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_0 - T_1)\int_0^{u_1} e^{-y^2}dy$

$$\Rightarrow f(u) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\mathrm{erf}(u) = 0{,}9\,T_1$$

$$\Rightarrow \mathrm{erf}(u_1) = \frac{0{,}1\,T_1}{T_1 - T_0} = 0{,}314 \Rightarrow u \simeq 0{,}3$$

Pour $x_1 = 1$ mm $\Rightarrow \frac{x_1}{2\sqrt{Dt_1}} = u \Rightarrow t_1 = \frac{x_1^2}{4Du^2} = 18{,}5$ s

Pour $x_2 = 1$ cm $\Rightarrow \frac{x_2}{2\sqrt{Dt_2}} = u \Rightarrow t_2 = \frac{x_2^2}{4Du^2} = 1851$ s $\simeq 31'$

(on retirera la main avant !)

<u>Calcul approximé</u> : $e \ll a \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{a-e}\right) = \ln \frac{1}{\left(1-\frac{e}{a}\right)} = -\ln\left(1-\frac{e}{a}\right) \simeq \frac{e}{a}$

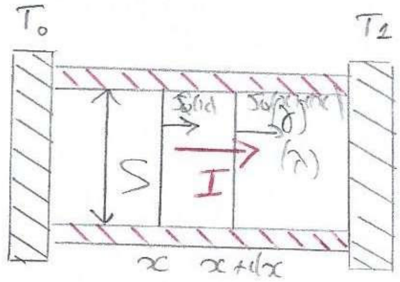
donc $T_{c_{lim}} = T_e + \frac{1}{1+\frac{ha}{\lambda}\frac{e}{a}}\left(T_0 - T_e\right)$

$$\Rightarrow \frac{T_0 - T_e}{T_{c_{lim}} - T_e} - 1 = \frac{ha}{\lambda}\frac{e}{a}.$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{\lambda \cancel{a}}{h \cancel{a}}\left(\frac{T_0 - T_e}{T_{c_{lim}} - T_e} - 1\right)}$$

<u>A.N.</u> : $e \simeq 6{,}66 \cdot 10^{-3}\ m \simeq 6{,}7\ mm.$

<u>Exercice n°4</u> : Diffusion en présence d'un effet Joule



① $\frac{d}{dt}(\delta U) = \rho c_m S dx \overset{0}{\overset{\|}{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}}}$

$$= \left[j_Q(x) - j_Q(x+dx)\right]S + \sigma_{el}\, \underbrace{d\tau}_{S dx}.$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx + \sigma_{el} S dx.$$

$$0 = \lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \sigma_{el} \Rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = -\frac{\sigma_{el}}{\lambda} = -\frac{j_{el}^2}{\gamma\lambda} = -\frac{I^2}{S^2\gamma\lambda}$$

donc : $T(x) = \frac{-I^2}{2S^2\gamma\lambda}x^2 + K_1 x + K_2$

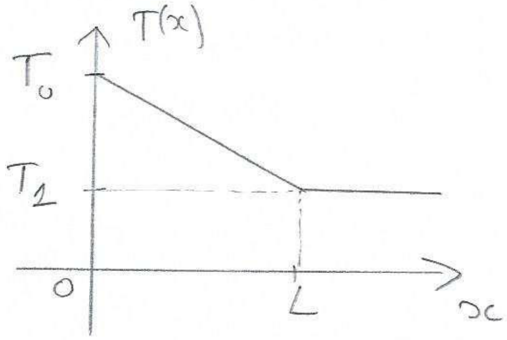
<u>CL</u> : $T(x=0) = T_0 = K_2$

$$T(x=L) = T_1 = T_0 + K_1 L - \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}L^2 \Rightarrow K_1 = \frac{\left(T_1 - T_0 + \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}L^2\right)}{L}$$

$$T(x) = T_0 + \left(\frac{T_1 - T_0}{L} + \frac{I^2 L}{2S^2\gamma\lambda}\right)x - \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}x^2$$

$$\boxed{T(x) = \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}\left(Lx - x^2\right) + \frac{T_1 - T_0}{L}\,x + T_0}$$

② $*\ I = 0 \Rightarrow$ cas du cours $\quad \boxed{T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L}\,x + T_0}$

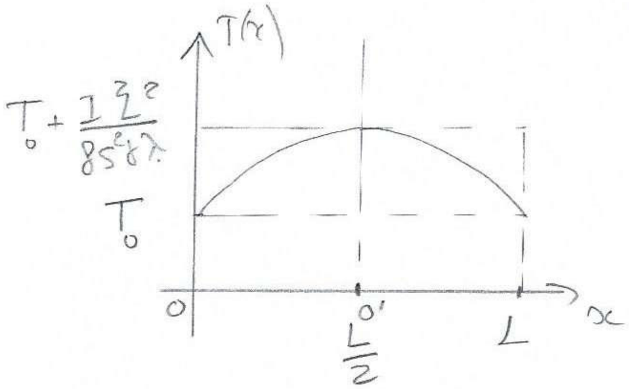


$*\ T_1 = T_0 \Rightarrow \quad \boxed{T(x) = T_0 + \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}\left(Lx - x^2\right)}$

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0 \Rightarrow L - 2x_n \Rightarrow x_n = \frac{L}{2}$$

$$x' = x - \frac{L}{2} \Rightarrow T(x') = T_0 + \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}\left(\cancel{Lx'} + \frac{L^2}{2} - x'^2 - \frac{L^2}{4} - \cancel{Lx'}\right)$$

soit $\quad T(x') = T_0 + \frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}\left(\frac{L^2}{4} - x'^2\right)$



profil parabolique cf plus bas pour explication

③ $I_\varphi = J_\varphi(x) \times S = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx} = +\lambda S\left(\frac{I^2}{2S^2\gamma\lambda}(2x - L) + \frac{T_0 - T_1}{L}\right)$

$$\begin{cases} I_\varphi(x=0) = \dfrac{-\lambda\gamma I^2 L}{2S^2\gamma\lambda} + \lambda S\left(\dfrac{T_0 - T_1}{L}\right) = (T_0 - T_1)\dfrac{\lambda S}{L} - \dfrac{I^2}{2\gamma S^2} SL \\ I_\varphi(x=L) = +\dfrac{\lambda\gamma I^2 L}{2S^2\gamma\lambda} + \lambda S\left(\dfrac{T_0 - T_1}{L}\right) = (T_0 - T_1)\dfrac{\lambda S}{L} + \dfrac{I^2}{2S^2\gamma} SL \end{cases}$$

$\frac{J^2}{\gamma} = P_{vol}$

$\frac{J^2}{\gamma} = P_{vol}$

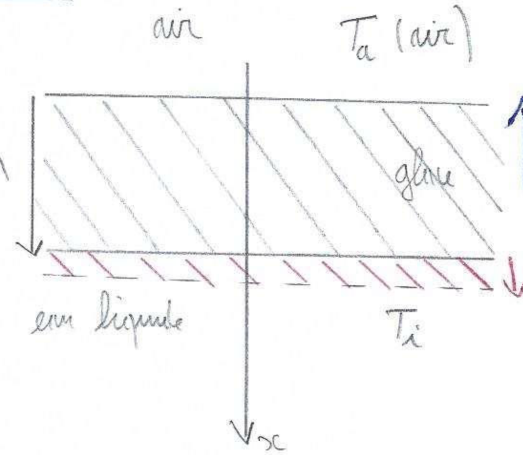
$\Rightarrow \frac{1}{2}$ puissance Joule évacuée à chaque extrémité !

Pour 1 cm : $u_B = \dfrac{10^{-2}}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow \quad t_{1cm} = \left(\frac{10^{-2}}{2\,u_B\sqrt{D}}\right)^2 = 1831\,s \quad \text{n'arrive pas}$$

Exercice n°9 : Gel d'un lac

(1)



$\uparrow T \downarrow$ Equation de la chaleur ds. la glace :

$$\rho\, C_m \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \overset{0}{\pi_v}$$

$C_m \simeq 0$ par (H)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = C_1(t) \Rightarrow T(x,t) = C_1(t)\,x + C_2(t)$$

CL : $\begin{cases} T(x=l(t),t) = T_i = C_1(t)\,l(t) + C_2(t) \\ T(x=0,t) = T_0(t) = C_2(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(t) = \dfrac{T_i - T_0(t)}{l(t)} \\ C_2(t) = T_0(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(x,t) = \frac{T_i - T_0(t)}{l(t)}\,x + T_0(t)}$$

(2) Pendant dt, il se forme une épaisseur $dl(t)$ de glace à partir de $l(t)$

$$|\delta Q_{sol}| = L_f\,\rho\,S\,dl(t) = |\delta Q_{évac}|$$

⚠ cf remarque au dos.

On peut écrire la chaleur évacuée de 2 façons :

$$|\delta Q_{évac}| = \begin{cases} h\,(T_0(t) - T_a)\,S\,dt \\ \left|-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} S\,dt = \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} S\,dt = \lambda \dfrac{(T_i - T_0(t))}{l(t)}\,S\,dt \end{cases}$$