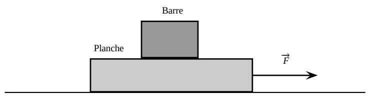
TD n°4 Mécanique du solide: Lois du frottement solide

Exercices de niveau classique

EXERCICE N°1: Frottement entre deux solides

Une barre de masse m_1 est placé sur une planche de masse m_2, et l'ensemble repose sans frottement sur un plan horizontal. Le facteur de frottement statique entre la barre et la planche est μ_s.



On exerce sur la planche une force horizontale $\overrightarrow{F}$ dont l'intensité croît linéairement avec le temps:

$$F(t) = \alpha \cdot t \quad \text{avec } \alpha \text{ constant.}$$

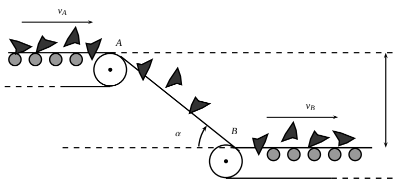
❶ Ecrire les deux équations différentielles décrivant le mouvement de la barre et de la planche, et projeter chacune d'elle sur l'axe du mouvement.

❷ Déterminer l'instant t_0 à partir duquel la planche glisse sous la barre.

❸ Quelles sont les accélérations de la barre et de la planche dans les phases de non-glissement et de glissement?

EXERCICE N°2: Transport de minerai

L'évacuation des blocs de minerai en sortie d'une mine de métal est réalisée à l'aide d'un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_A = 1\ m.s^{-1}$, permettant d'amener ces derniers à l'horizontale jusqu'à un tapis fixe incliné d'un angle $\alpha = 30^0$.



Les blocs glissent ensuite sur le tapis fixe pour arriver sur un second tapis roulant horizontal se déplaçant à la vitesse v_B. On note $h = 2\ m$ la différence de hauteur entre les deux tapis horizontaux.

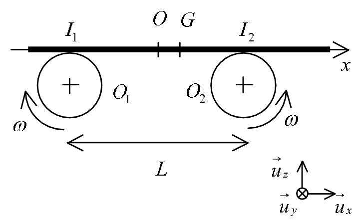
On suppose que l'analyse se fait dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Le fonctionnement normal de l'ensemble est assuré si la vitesse du second tapis est exactement identique à la vitesse des blocs arrivant à sa hauteur.
On pose que le coefficient de frottement dynamique vaut $\mu = 0.5$.

❶ Déterminer par une méthode dynamique la vitesse v_B à donner au second tapis pour assurer un fonctionnement correct du tapis.

❷ Reprendre cette étude par une méthode énergétique.

EXERCICE N°3: Mesure dynamique du coefficient de frottement

Deux cylindres identiques, de rayon a, tournent autour de leurs axes avec une vitesse angulaire constante ω, dans des sens opposés. Les axes des cylindres sont fixes, parallèles et distants de L.



Une planche (P) , d'épaisseur négligeable, homogène, de masse m , est placée sur les cylindres. On désigne par μ le coefficient de frottement solide de la planche sur chacun des deux cylindres.

Le mouvement horizontal de la planche est repéré par rapport à l'axe $[Ox)$ (cf figure) dont l'origine O appartient à la médiatrice du segment O_1O_2. On note respectivement I_1 et I_2 les points de contact de la planche avec les cylindres.

A l'instant initial, la planche est immobile et l'abscisse de son centre d'inertie G à une valeur x_0 comprise entre 0 et $L/2$.

❶ Montrer que le mouvement de la planche débute par une phase de glissement aux deux points de contact.

❷ Faire un bilan des actions mécaniques exercées sur la planche, en déduire le nombre d'inconnues caractérisant son mouvement. Etablir le système d'équations permettant de les déterminer (durant la phase de glissement). Déterminer en particulier, les composantes verticales des réactions des deux cylindres en fonction de l'abscisse x de G.

❸ Donner, en justifiant, le sens des composantes horizontales des réactions des deux cylindres. Etudier le mouvement de la planche et expliquer comment il est possible d'en déduire une mesure du coefficient μ. Détailler une démarche expérimentale possible.

Application numérique: pour une distance $L = 13,6\ cm$, on obtient un mouvement périodique de période $T = 0,63\ s$. En déduire la valeur numérique de μ.

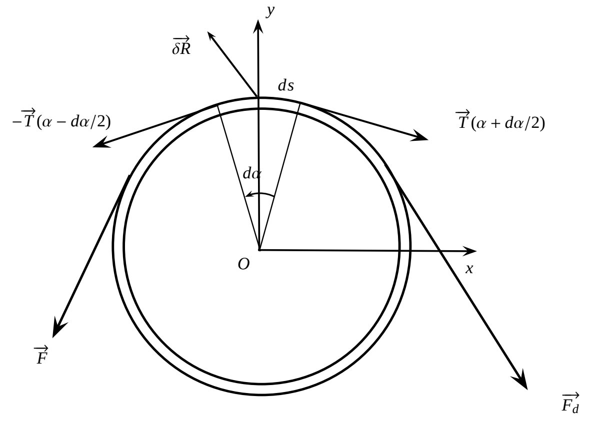
❹ Exprimer les vitesses de glissement et préciser la condition sur ω pour que le glissement soit permanent.

❺ On inverse le sens de rotation de chacun des cylindres. Que devient l'équation du mouvement?

Exercices de niveau avancé

Exercice n°4: Poulie de renvoi d'un bout d'amarrage

Une corde est enroulée autour d'une bite d'amarrage supposée rigoureusement cylindrique. Le coefficient de frottement entre la corde et le cylindre est $f = 0,25$. A une des extrêmités de la corde, un marin tire avec la force $F = 200\ N$ tandis que l'autre extrêmité est reliée à un bateau de fort tonnage. La tempète fait rage et les vagues dans le port menacent d'emporter le bateau! L'objectif de ce problème est de montrer que l'enroulement de la corde autour de la bite d'amarrage peut aider notre marin.



NB: On se placera dans tout l'exercice à la limite du glissement.

❶ En considérant un élément de corde de longueur ds en contact avec le cylindre, et dont la tangente est parallèle à l'axe $[Ox)$, donner l'expression de la réaction du cylindre $\overrightarrow{\delta R}$ sur cet élément de corde.

❷ En appliquant le principe de la statique, dégager les deux équations du problème.

❸ On estime que le bateau sera maintenu correctement à quai si une force cent fois supérieure à celle développée par le marin est appliquée à l'extrêmité reliée au bateau. En déduire le nombre de tours de corde nécessaires autour du cylindre.

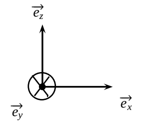
Exercice n°5: Etude du démarrage d'une moto

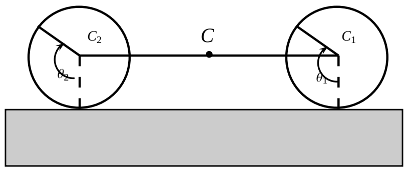
On modélise dans cet exercice le démarrage d'une moto. La roue avant est assimilée à un disque homogène, de masse m, de rayon a et de centre C_1 (abscisse x_1). Sa rotation est repérée par l'angle θ_1, mesuré par rapport à la verticale. La roue arrière, motrice, est identique à la roue avant. L'abscisse de son centre est notée x_2 et son angle de rotation est appelé θ_2. L'ensemble cadre+moteur+conducteur (noté (E)) est modélisé par une tige, de longueur $2l$ et de masse M reliant C_1 à C_2. Son centre de masse C possède l'abscisse x au milieu de C_1C_2.

Le coefficient de frottement entre les roues et le sol est noté μ. L'action de (E) sur la roue avant se réduit à la résultante $F_1 = F_{1_x} \cdot \overrightarrow{e_x} + F_{1_z} \cdot \overrightarrow{e_z}$. L'action de (E) sur la roue arrière se compose d'une résultante $\overrightarrow{F_2}$ et d'un couple moteur $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma \cdot \overrightarrow{e_y}$.

De même, l'action du sol sur la roue avant (arrière) correspond à une force $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{N_1}$ ($\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{N_2}$).

On donne le moment d'inertie des roues $J_{C,y} = \dfrac{1}{2}ma^2$





❶ Enoncer une relation entre $\dot{x}$, $\dot{x}_1$, et $\dot{x}_2$. On suppose que les deux roues roulent sans glisser sur le sol, ce qui signifie que la distance parcourue par le cadre peut aussi être obtenue à partir du nombre de tours effectués par l'une des roues.

En déduire une relation entre $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{x}$.

❷ Appliquer le théorème du centre de masse à l'ensemble de la moto. Quelles sont les forces extérieures la faisant avancer?

❸ Appliquer à la roue avant la relation fondamentale de la dynamique, puis le théorème du moment cinétique dans le référentiel $(C_1, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Obtenir les relations entre les forces, masses, et l'accélération $\ddot{x}$.

❹ Procéder similairement avec la roue arrière, puis l'ensemble (E).

❺ La roue avant peut-elle se soulever? Et la roue arrière?

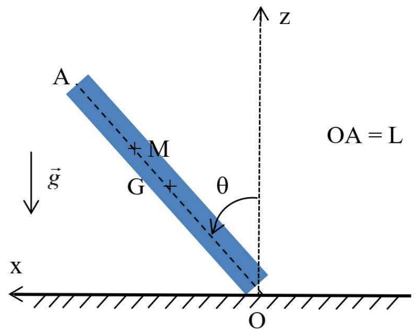
❻ On supposera désormais $m << M$. La roue avant peut-elle glisser? Et la roue arrière?

Exercice n°6: Destruction d'une cheminée d'usine

On s'intéresse ici à la destruction (voulue!) de l'une des 3 cheminées de l'usine Pétroplus de Petit-Couronne à proximité de Rouen le 7 novembre 2020. La chute de celle-ci fut opérée à l'aide d'explosifs disposés au pied de l'édifice. Vers la fin de la chute, l'effet de souffle a provoqué un soulèvement de poussière au sol, empêchant de distinguer si le pied de la cheminée s'était soulevée ou pas du sol en fin de chute.

Données: coefficient de frottement statique du pied de la cheminée sur le sol après l'explosion: $\mu_s = 1,2$; longueur de la cheminée: L. Masse de la cheminée: m; moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe $[O_y)$ passant par O: $J_{\Delta_y} = \dfrac{1}{3}mL^2$.

On va tenter dans cet exercice de répondre théoriquement à cet épineux problème.



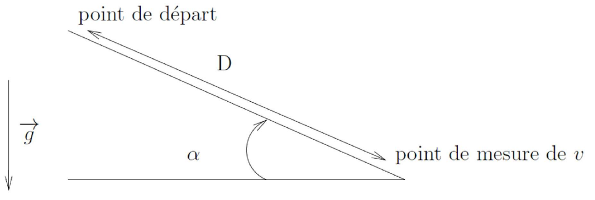
Déterminer si la cheminée dérape, dans quel sens, et ce, avant de décoller du sol.

Exercice n°7: Détermination expérimentale des coefficients de frottement statique et dynamique

On étudie dans cet exercice diverses expériences permettant de déterminer les coefficients de frottement statique et dynamique intervenant dans les lois de Coulomb.

❶ Décrire une expérience simple permettant de déterminer le coefficient de frottement statique μ_s entre un palet en aluminium et un support en bois. On peut modifier (et mesurer) l'angle que fait le support avec la verticale. Quel ordre de grandeur s'attend-on à obtenir ?

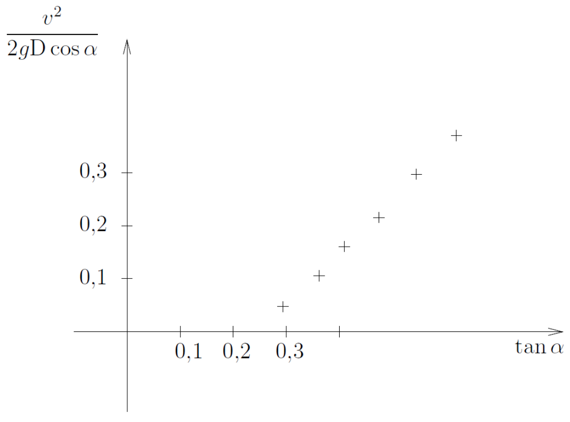
❷ On cherche à déterminer le coefficient de frottement dynamique μ_d entre ces deux matériaux. Pour cela, on réalise une expérience dans laquelle on peut modifier l'angle α du support. On lâche le palet sans vitesse et on mesure sa vitesse v après une distance D parcourue. On fera varier l'angle α au cours de l'expérience:



a· Quelle valeur minimale de α faut-il choisir?

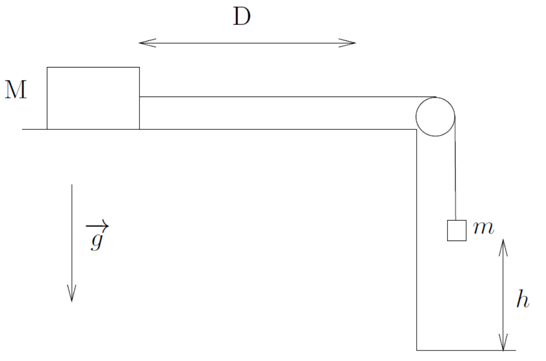
b· Proposer une méthode expérimentale permettant de mesurer v.

c· Pour différentes valeurs de α, on a mesuré v et calculé $\dfrac{v^2}{2gD\cos\alpha}$. On a tracé cette grandeur en fonction de $\tan\alpha$:



Montrer que ces résultats expérimentaux peuvent être interprétés en utilisant les lois de Coulomb. Déterminer la valeur expérimentale de μ_d. Cette valeur est-elle a priori plus petite ou plus grande que μ_s?

❸ On étudie dans cette question l'expérience suivante:



Un pavé en aluminium de masse M glisse sur un support horizontal en bois. Il est entraîné sur une distance $D > h$ par une masse m qui parcourt une hauteur h. On néglige le moment d'inertie de la poulie ainsi que la masse du fil que l'on suppose inextensible.

a· Montrer que le coefficient de frottement dynamique s'écrit:

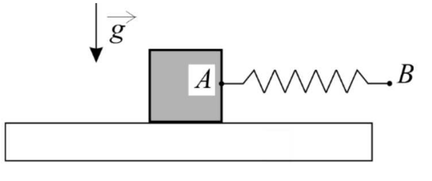
$$\mu_d = \frac{1}{\dfrac{M}{m} + \left(1 + \dfrac{M}{m} \cdot \dfrac{D-h}{h}\right)}$$

b· Proposer un protocole expérimental permettant de déterminer μ_d en utilisant cette expérience.

Exercice n°8: **Mesure de coefficients de frottement**

Un bloc de masse $m = 300g$ est relié au point A à un ressort de constante de raideur $k = 49\ N.m^{?1}$.

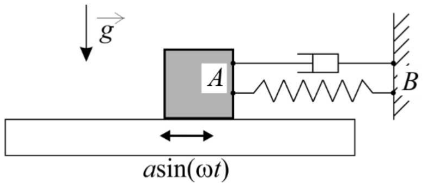
Dans une première expérience le bloc est posé sur un plateau horizontal fixe. On tire très progressivement l'extrémité B (le ressort étant initialement au repos) et on fait les observations suivantes :



- on peut allonger le ressort de $12\ mm$ sans que le bloc soit mis en mouvement.
- si on tire un tout petit peu plus, le bloc avance de $6\ mm$ puis s'immobilise.

1. Déterminer les coefficients de frottement entre le bloc et le plateau, ainsi que la durée pendant laquelle le bloc est en mouvement.

Dans une deuxième expérience, l'extrémité B du ressort est reliée à un support fixe et un amortisseur exerçant une force de norme $\alpha|\overrightarrow{v_A}|$ est accroché entre le bloc et ce support. Le bloc est posé sur le plateau de telle manière que le ressort est au repos.



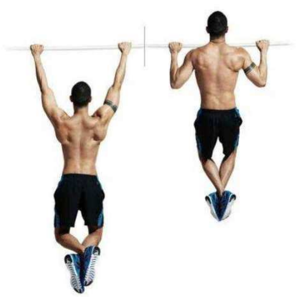
Puis on fait osciller sinusoïdalement le plateau autour de sa position initiale, à différentes fréquences f.

On observe que le bloc peut suivre le mouvement du plateau (sans glisser sur le plateau) pour des amplitudes d'oscillation supérieures à $12\ mm$.

2. Expliquer cette observation.
3. Pour $f = 2\ Hz$, l'amplitude maximale du mouvement sans glissement est $24\ mm$. Calculer α.

Exercice n°9: Principe du «Pull-up»

On appelle barre de «pull-up» un appareil de musculation naturelle permettant de réaliser des tractions («pull-up»). Ce système doit être positionné dans le passage d'une porte, ses deux extrémités prenant appui sur les montants de la porte (cf photo).
Le contact se fait par l'intermédiaire de deux tampons en matière plastique, chacun monté sur une tige en forme de vis, s'enfonçant dans la barre centrale. En tournant celle-ci on peut les écarter et ainsi les appuyer fortement sur les montants.



Les meilleurs spécialistes de la discipline prétendent faire des séries de tractions en continu **au rythme d'une par seconde**.

On part d'une situation dans laquelle les deux tampons sont tout juste au contact des montants de la porte.

❶ De quel angle faut-il tourner la barre centrale pour être sûr qu'elle restera immobile au cours de traction?

❷ Faire l'application numérique en proposant des valeurs numériques plausibles pour les données manquantes.

On admettra la loi d'Young qui donne la force de pression N exercée par les tampons de surface S sur les montants de la porte lorsqu'ils sont comprimés d'une longueur $\Delta\ell$:

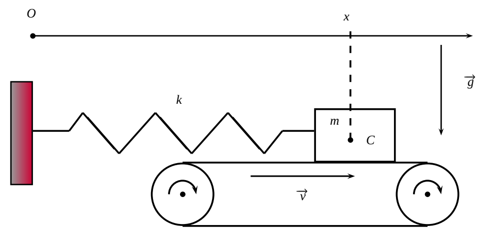
$$N = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \cdot S$$

Données:

- Aire de chaque tampon: $S = 2.10^{-3}\ m^2$
- Module d'Young de la mousse des tampons: $E = 10\ MPa$
- Épaisseur à vide des tampons: $l_0 = 1,0\ cm$
- Coefficient de frottement des tampons sur le bois de la porte: $f = 0,60$
- Pas des vis: p=0,15 cm
- Les parties métalliques seront considérées comme indéformables.

Exercice n°10: Etude du mouvement de stick-slip.

On considère une masse m reposant sur un tapis roulant animé d'une vitesse $\vec{v}_0$ constante par rapport au sol. Elle est reliée à un point fixe du référentiel par un ressort de constante de raideur k. Le coefficient de frottement statique caractérisant le contact masse-tapis est μ_s et le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique) μ_d.



On choisira un axe (Ox) horizontal, le centre d'inertie de la masse m étant repéré par la coordonnée x, et à l'instant $t = 0$, il est en x_0, longueur à vide du ressort.

On donne $\mu_s = 0,8$, $\mu_d = 0.6$, $k = 0.2\ N.m^{-1}$, $m = 200\ g$ et $V_0 = 2,35\ m.s^{-1}$. On prendra $g = 9,8 m.s^{-1}$.

On pourra poser l'abscisse "décalée" $X(t) = x(t) - x_0$ correspondant à l'élongation du ressort à tout instant t.

❶ Dans un premier temps, on considère que la masse est entraînée par le tapis à la vitesse $\overrightarrow{v}_0$: c'est une phase dite de "Stick" (ou collé). Déterminer l'abscisse X_{max} de la masse pour laquelle cesse cette phase.

❷ On considère maintenant que l'on dépose la masse sans vitesse initiale sur la tapis en position x_0 c'est à dire $X(0) = 0$. Montrer que cette phase est nécessairement une phase de glissement; elle est appelée phase de "Slip" (ou glissé). Déterminer l'expression de $X(t)$ lors de cette phase. A quelle condition ne cesse-t-elle jamais?

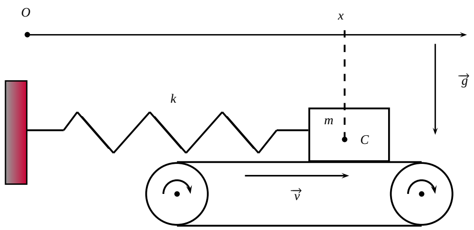
On se place dans la suite dans l'hypothèse où la phase de Slip peut cesser.

❸ Déterminer la première date t_1 à partir de laquelle la masse est collée (Stick). Quelle est alors la valeur de l'élongation X. A quelle date t_2 cette phase cesse-t-elle? Que devient le mouvement de la masse ensuite?

❹ Tracer l'allure de l'évolution temporelle de $X(t)$, ainsi que celle de $\dot{X}(t)$. Donner également l'allure du portrait de phase du mouvement $(X, \dot{X})$.

Exercice n°11: Etude du mouvement de stick-slip "bis" : période d'oscillation d'une corde de violon - interprétation spectrale

On peut modéliser simplement le frottement d'un archet enduit de colophane sur les cordes d'un violon. L'archet est représenté par un tapis roulant alors que la corde sur laquelle il frotte est représenté par une masse m tenue par un ressort (l'important est de modéliser la corde par un dispositif comportant une force de rappel.)



La masse m repose sur un tapis roulant animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ constante par rapport au sol. Elle est reliée à un point fixe par un ressort de constante de raideur k. Le coefficient de frottement statique caractérisant le contact est μ_0 et le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique) μ. On choisira un axe (Ox) horizontal, le centre d'inertie de la masse m étant repéré par la coordonnée x, à l'instant $t = 0$, il est en x_0, longueur à vide du ressort.

❶ La masse est entraînée par le tapis à la vitesse $\overrightarrow{v}$. A quel instant t_0 cette phase cesse-t-elle? Pourquoi cesse-t-elle?

❷ Quel est le mouvement de la masse m après cette phase? On détaillera l'ensemble des calculs.

❸ Tracer l'évolution de x en fonction du temps. Le mouvement est-il purement sinusoïdal?

Déterminer la période globale du mouvement.

❹ On a représenté ci-dessous deux tracés de $x(t)$ obtenus pour deux valeurs distinctes du coefficient de frottement solide statique μ_s, ainsi que les spectres en fréquence et portait de phase correspondants. Commenter ces résultats, en expliquant en particulier pourquoi l'enrichissement spectral est lié semble lié à une augmentation de μ_s.

A la lumière de ces résultats, expliquer le rôle de la colophane, résine obtenue par distillation de la térébenthine et avec laquelle les violonistes enduisent leurs archets. (→ cf simulation numérique "μ_0 fort ou μ_0 faible?")

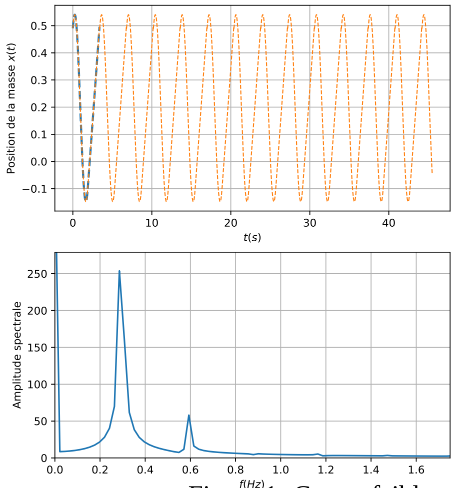


Figure 1: Cas μ_0 faible

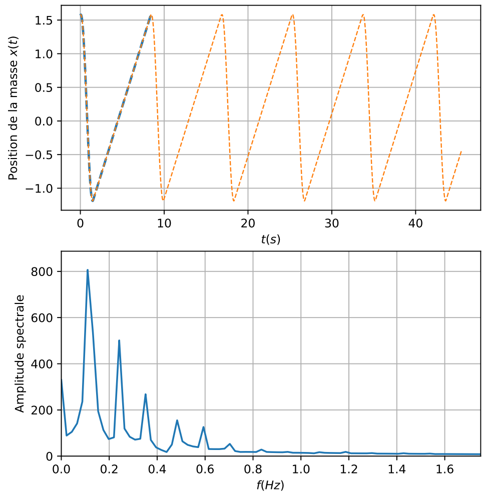


Figure 2: Cas μ_0 fort