1. **Banque CCINP 2024 : 62**
2. **Banque CCINP 2024 : 80**
3. **Banque CCINP 2024 : 88**
4. **Banque CCINP 2024 : 93**
5. **[CCP]** On considère l'application $f : M \mapsto M + \text{Tr}(M) I_n$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
   (b) Déterminer un polynôme annulateur de f de degré 2.
   (c) f est-elle diagonalisable ? f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.
6. **[CCP]**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} > 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de A.
   Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à l.
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$ l'un des indices tel que $|x_k| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
   (b) Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|$.
   (c) (facultatif) On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer que $l = 1$.
7. **[Centrale]** On pose E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Montrer que $\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} P(t) e^t dt$ converge.
   (b) On définit L l'application sur E telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ L(P)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} P(t) e^t dt$.
   Montrer que L est un endomorphisme de E. Est-il diagonalisable ?
8. **[tout concours]**
   On donne $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ où A et B sont deux matrices complexes, carrées de taille n, qui commutent.
   (a) Montrer que si U est semblable à V, pour tout polynôme R, $R(U)$ est semblable à $R(V)$.
   (b) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
   (c) Montrer que si A est diagonalisable et B nulle, alors M est diagonalisable.
   (d) Démontrer la réciproque.
9. **[Mines-Ponts]** *diagonalisabilité d'une matrice par blocs*
   Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.
10. **[Centrale]** *Supplèmentaires orthogonaux ?*
    On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire qui à $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$ associe $\langle P, Q \rangle = \sum_{k \geqslant 0} a_k b_k$.
    (a) Soit F le sous-espace engendré par $1 + X$. Trouver une base de $F^{\perp}$. A-t-on $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}[X]$?
    (b) Soit $G = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 0\}$. Déterminer $G^{\perp}$.
11. **[CCP]**
    (a) Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$, on suppose M^2 diagonalisable, montrer que M est diagonalisable.
    (b) Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, montrer que N est inversible et calculer N^{-1}. Calculer N^2.
    Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$. Si N est diagonalisable, montrer que AB est diagonalisable. Réciproque ?