1. Parties de $\mathbb{R}^n$

Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq} \quad xy = 1\}$.

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq} \quad x^2 + xy + y^2 < 1\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad Re(z) \leqslant 1\}$

(d) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + xy + y^2 < 1\}$.

2. On définit un sous ensemble A de $\mathbb{R}^2$en posant

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\right\} \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 < 2\right\}$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A.

3. Addition de parties

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}$.

Montrer que ...

(a) Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

(b) Si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé (prendre $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$).

4. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N).

(a) On suppose $A \subset B$. Établir $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(b)) Comparer $(\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}})$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ d'une part puis $(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}})$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ d'autre part.

(c) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

5. Inégalités sur les normes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \|x + y\| + \|x - y\|.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leqslant 2\max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 peut elle être améliorée ?

(b) On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2}\max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante $\sqrt{2}$ peut elle être améliorée ?

6. Oh les boules !

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

(a) On suppose que $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$. Démontrer que $\|a - b\| \leqslant s - r$.

(b) On suppose que $\bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \varnothing$. Montrer que $\|a - b\| > r + s$.

7. Soit E une espace vectoriel normé.

(a) Soient F une partie fermée de E et $x \in E$. Montrer que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

(b) Soient F et G deux fermés de E disjoints.

Montrer qu'il existe U et V ouverts tels que $F \subset U, G \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

8. E est un espace vectoriel normé, B et C sont deux parties non vides de E.

Montrer que $\delta(B \cup C) \leq \delta(B) + \delta(C) + d(B, C)$. (où $d(B, C) = Inf\{||x - y||/ \ x \in B, \ y \in C\}$)

9. On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

(a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\| \, . \, \|_\infty$?

(b) Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

Montrer que N' est une norme sur E. Montrer qu'elle est équivalente é N.

10. Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Etudier la convergence de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} X^n$$

pour l'une et l'autre norme.

(c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

11. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

Montrer que $\| \, . \, \|$ est une norme matricielle i.e. que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

12. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$||A|| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

(a) Montrer que $||.||$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), ||AB|| \leqslant \ ||A|| \, ||B||$$

13. On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infinie notée $\| \, . \, \|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_0$ des suites réelles convergeant vers 0.

14. On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\| \, . \, \|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites réelles convergentes.

15. Une suite (u_n) de nombre réels est appelée suite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $p, q \geqslant N$, on a

$$|u_p - u_q| < \epsilon.$$

(a) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

(b) On souhaite prouver la réciproque à la question précédente. Soit (u_n) une suite de Cauchy.

i. Montrer que (u_n) est bornée.

ii. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente.

iii. Conclure.

16. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B (pour une norme fixée).
Montrer que B vérifie $B^2 = B$.

17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$) telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B ?

18. Hölder et Minkowski
Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

(a) Montrer que pour $a, b \geq 0$ on a : $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

(b) Etablir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

et en déduire

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

(c) En écrivant

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

justifier :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

(d) Conclure que $\| \,.\, \|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

19. Soit A une partie bornée non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et $\mathcal{L}$ le sous-espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.
On "rappelle" que ,f est lipschitienne ssi

$$(\exists K \in \mathbb{R}_+^*),\ (\forall (x, y) \in E^2),\ N(f(x) - f(y)) \leqslant K\, N(x - y)$$

(a) Montrer que les éléments $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.

(b) Pour $f \in \mathcal{L}$, soit

$$K_f = \left\{k \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y)\right\}$$

Justifier l'existence de $c(f) = \inf K_f$ puis montrer $c(f) \in K_f$.

(c) Soient $a \in A$ et $N_a : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N_a(f) = c(f) + N(f(a))$$

Montrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.

(d) Soient $a, b \in A$. Montrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

♣♢♡♠