TP n°20 : Eléments de correction du TP *Etude expérimentale d'une ligne RC diffusive*

Ce document rassemble les réponses aux questions théoriques posées dans l'énoncé du TP sur la *Ligne RC diffusive*. Ce TP a pour but d'illustrer très généralement tous les phénomènes diffusifs régis par l'équation de Fourier.

1. En écrivant la loi des noeuds en sortie de la cellule n, il vient: $i_n = i_{n+1} + i_c$ avec: $\left[\begin{array}{l} i_n = \dfrac{u_{n-1} - u_n}{R} \\ i_{n+1} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{R} \\ i_c = C\dfrac{du_n}{dt} \end{array}\right.$. On en tire sans peine l'équation différentielle attendue:

$$\boxed{(e) \Leftrightarrow \frac{du_n}{dt} = \omega_0 \left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right) \qquad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

ETUDE EN RÉGIME STATIONNAIRE

2. La ligne RC est alimentée par une tension continue u_0.

   a· Question pratique.

   b· En régime stationnaire, les condensateurs de la ligne se comportent comme des interrupteurs ouverts; Attention de ne pas oublier de court-circuiter à la masse la borne de sortie de la **dernière cellule accessible de la ligne** (la 21$^{\text{ième}}$; ainsi , la ligne est donc réduite à 21 résistances R en série. En utilisant la relation du diviseur de tension, il vient donc:

$$u_{20} = \frac{R}{21R}u_0 \quad \text{puis} \quad u_{19} = \frac{2R}{21R}u_0$$

   soit en généralisant: $\boxed{u_n = \dfrac{21-n}{21}u_0}$

   c· Question pratique: on attend une comparaison entre vos mesures des différentes tension u_n, et les valeurs calculées à partir de la la relation ci-dessus. Le mieux est de reporter celles-ci sur un graphe $u_n = f(n)$.

3. On peut mesurer ce courant en intercalant un ampèremètre (donc en série!!!) soit entre le générateur et l'entrée de la première cellule, soit entre la sortie de la cellule 21 et la masse. La valeur de la résistance s'obtient simplement à l'aide de la loi d'Ohm:

$$\boxed{R = \frac{u_0}{21 \cdot i}}$$

ETUDE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

4. Comme proposé, on injecte simplement la solution proposée dans l'équation dégagée (e) en 1):

$$(e) \Leftrightarrow j\omega u_n = \omega_0 \left[e^{-\alpha} \cdot e^{-j\omega\tau} - 2 + e^{\alpha} \cdot e^{j\omega\tau}\right] \cdot u_n$$

$$j\frac{\omega}{\omega_0} = e^{-\alpha} \cdot e^{-j\omega\tau} - 2 + e^{\alpha} \cdot e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau)(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + j\sin(\omega\tau)(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) - 2$$

soit:

$$j\frac{\omega}{\omega_0} = 2\cosh(\alpha) \cdot \cos(\omega\tau) + 2j\sinh(\alpha) \cdot \sin(\omega\tau)$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire des deux membres de cette équation, il vient:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \dfrac{\omega}{\omega_0} = 2\sinh(\alpha) \cdot \sin(\omega\tau) \\ 1 = \cosh(\alpha) \cdot \cos(\omega\tau) \end{array}\right.}$$

5. Question pratique.

NB: la mesure du coefficient d'atténuation α (qui correspond à l'atténuation de l'amplitude du signal $u_n(t)$ lors du passage d'une cellule à la suivante), se fait par simple mesure à l'oscilloscope des amplitudes de $u_0(t)$ et $u_1(t)$ pour différentes fréquences du signal entre $\nu = 100\ Hz$ et $\nu = 55\ kHz$:

$$\frac{u_0(max)}{u_1(max)} = e^{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \ln\left(\frac{u_0(max)}{u_1(max)}\right)}$$

Le sujet demande ensuite de proposer une exploitation graphique permettant de valider le modèle de l'onde progressive harmonique amortie. On peut par exemple utiliser la relation donnée en énoncé:

$$\frac{2\pi\nu}{\omega_0} = 2\frac{\sinh^2\alpha}{\cosh\alpha}$$

en traçant la fonction:

$$2\frac{\sinh^2\alpha}{\cosh\alpha} = f\left(\frac{2\pi\nu}{\omega_0}\right)$$

qui doit donc correspondre, dans notre modèle à la première bissectrice du repère. Une bonne concordance validera donc le modèle.

6. On reprend ici la méthode précédente en mesurant le retard τ du signal $u_1(t)$ par rapport au signal $u_2(t)$ (à l'oscilloscope numérique) pour les mêmes fréquences. La vérification de la validité du modèle se fera en traçant la fonction:

$$2\frac{\sin^2\omega\tau}{\cos\omega\tau} = f\left(\frac{2\pi\nu}{\omega_0}\right)$$

qui doit là encore correspondre à la première bissectrice du repère.

7. En posant, comme le suggère l'énoncé, les distances caractéristiques d'atténuation et de propagation (a étant la distance entre deux cellules)

$$\left[\begin{array}{l} L_{att} = \dfrac{a}{\alpha} \\ L_{prop} = \dfrac{a}{f\tau} \end{array}\right.$$

, le signal sur la cellule n s'écrit:

$$u_n(t) = A\cdot e^{-n\frac{a}{L_{att}}}\cdot e^{j\omega\left(t-n\frac{a}{L_{prop}f}\right)}$$

Enfin, sachant que $a \sim 1\ cm$, on assure $L_{prop} >> a$ pour $f\tau << 1$ soit $f << \dfrac{1}{\tau}$. De même, on assure $L_{att} >> a$ lorsque $\alpha << 1$.

<u>Approximation continue</u>

8. En injectant les développements de $u_{n+1}(t) = u(x=(n+1)a, t)$ et $u_{n-1}(t) = u(x=(n-1)a, t)$ dans l'équation (e), il vient sans peine l'équation en approximation continue (e'):

$$(e') \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)_x = D\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)_t$$

avec le coefficient de diffusion $D = \omega_0 a^2$
NB: $[D] = L^2\cdot T^{-1}$

On constate que dans ce modèle de l'approximation continue, l'équation régissant l'évolution spatio-temporelle du signal électrique $u(x,t)$ est l'équation de diffusion de Fourier. On peut ainsi illustrer par cette analogie la propagation de la chaleur.

<u>Etude en régime stationnaire</u>

9. En régime stationnaire, pour lequel $u(x,t) = u(x)$, l'équation de la diffusion s'écrit $\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$ dont l'intégration conduit à:

$$u(x) = A\cdot x + B$$

Les conditions aux limites sont: $\left[\begin{array}{l} u(x=0) = u_0 \\ u(x=21a) = 0 \text{ (la sortie de la } 21^{\text{ième}} \text{ cellule est court-circuitée)} \end{array}\right.$

Elles conduisent à $\left[\begin{array}{l} A = -\dfrac{u_0}{21a} \\ B = u_0 \end{array}\right.$

On en tire ainsi: $\boxed{u(x) = u_0\left(1-\dfrac{x}{21a}\right)}$

<u>Etude en régime sinusoïdal forcé</u>

10. La détermination du nombre d'onde complexe $\underline{k}$ consiste simplement à rechercher la relation de dispersion, exactement comme dans l'étude de la propagation des OEM dans les milieux; on injecte pour cela dans l'équation de diffusion, la solution complexe proposée; cela donne:

$$(e') \Leftrightarrow j\omega\cdot u(x,t) = -\underline{k}^2 D\cdot u(x,t)$$

soit: $\underline{k}^2 = -j\dfrac{\omega}{D} = \dfrac{\omega}{D}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

qui donne donc: $\underline{k} = \sqrt{\dfrac{\omega}{D}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}(\pi)} = \pm\sqrt{\dfrac{\pi f}{a^2\omega_0}}(1-j)$

En retenant la solution précédée d'un signe "-" (l'autre solution conduit à une augmentation de l'amplitude d'onde au fur et à mesure de la diffusion ce qui serait incohérent), le signal dans le modèle continu peut s'écrire:

$$\underline{u}(x,t) = A\cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}\frac{x}{a}} e^{j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}\frac{x}{a}\right)}$$

soit encore avec $\underline{u}(x=na,t) = \underline{u}_n(t)$:

$$\underline{u}_n(t) = U_0\cdot e^{-n\sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}}\cdot e^{j\left(2\pi f t - n\sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}\right)}$$

si l'on pose que la forme complexe de la tension d'alimentation s'écrit: $\underline{u}_0(t) = \underline{u}(0,t) = U_0\cdot e^{j2\pi f t}$ qui donne bien la forme réelle attendue:

$$u_n(t) = U_0\cdot e^{-n\sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}}\cdot\cos\left(2\pi f t - n\sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}\right)$$

La situation simulée ici est correspond à la diffusion d'une onde thermique dans un milieu (ce calcul est abordé dans le cours sur la diffusion thermique, plus précisément dans l'exercice consacré à l'étude de la profondeur d'enfouissement d'une cave).

11. En identifiant avec la forme discrète proposée avant la question 4, on tire très facilement que:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\dfrac{\pi f}{\omega_0}} \\[2ex] \tau = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\pi\omega_0 f}} \end{array}\right.$$

On retrouve très facilement ces résultats en exploitant deux des quatre relations données dans la question 4 de l'énoncé, en se plaçant dans l'hypothèse des basses fréquences $\omega << \omega_0$:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 2\frac{\sinh^2(\alpha)}{\cosh(\alpha)} \overset{\omega<<\omega_0}{\Longrightarrow} \frac{\omega}{\omega_0} = 2\alpha^2 \implies \alpha = \sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}$$

Puis:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 2\frac{\sin^2(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} \overset{\omega<<\omega_0}{\Longrightarrow} \frac{\omega}{\omega_0} = 2(\omega\tau)^2 \implies \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi\omega_0 f}}$$

12. Question pratique (on constatera expérimentalement que l'approximation continue est valable à basse fréquence, c'est à dire pour les grande longueur d'onde par rapport à la distance entre deux cellules (sans suprise).

Pour aller plus loin: réponse à un échelon

13. Question pratique. La situation simulée correspond cette fois à la diffusion de la chaleur dans un barreau 1D après la mise en contact d'une de ses extrémités avec un thermostat (choc thermique).

14. On procède au changement de variable (très classique) $\xi = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$, et l'on pose $u(x,t) = f(\xi)$.

Il s'agit ici de transformer l'équation de la diffusion afin de l'écrire en fonction de la variable ξ. Cela passe par une réécriture des opérateurs de dérivation partielle:

- $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial f(\xi(x,t))}{\partial t} = \dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial t}\cdot f'(\xi) = -\dfrac{x}{4\sqrt{D}}\dfrac{1}{t^{3/2}}\cdot f'(\xi)$
- $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(\xi(x,t))}{\partial x} = \dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}\cdot f'(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{Dt}}\cdot f'(u)$
- $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2\sqrt{Dt}}\cdot f'(u)\right] = \ldots = \dfrac{1}{4Dt}f''(\xi)$

Ainsi, l'équation (e) devient en variable ξ: $-\dfrac{x}{4\sqrt{D}}\dfrac{1}{t^{3/2}}\cdot f'(\xi) = \dfrac{D}{4Dt}\cdot f''(\xi)$

soit: $f''(\xi) + \dfrac{x}{\sqrt{Dt}}f'(\xi) = 0$

et finalement:

$$\boxed{f''(\xi) + 2\xi\cdot f'(\xi)}$$

On intègre ensuite cette équation en séparant les variables: $(e) \Leftrightarrow \dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = -2\xi$

soit: $\ln\left(\dfrac{f'(\xi)}{K}\right) = -\xi^2 \Leftrightarrow f'(\xi) = K\cdot e^{-\xi^2}$

et enfin:

$$\boxed{f(\xi) = K \cdot \int_0^{\xi} e^{-X^2} \cdot dX + B = A \cdot erf(\xi) + B}$$

Les conditions initiales et aux limites à exploiter sont:

$$\left[\begin{array}{l} u(x > 0, t = 0^+) = 0 \text{ tension aux bornes de chaque cellule nulle à l'instant initial} \\ u(x = 0, t > 0) = E_0 \text{ valeur de la tension en x=0 pour toute date (valeur de l'échelon)} \end{array}\right.$$

Leurs expressions avec la fonction $f(\xi)$ deviennent:

$$\left[\begin{array}{l} f(\xi \to \infty) = 0 \;\Leftrightarrow\; A \cdot erf(\xi \to \infty) + B = 0 \;\Leftrightarrow\; A + B = 0 \\ f(\xi = 0) = E_0 = A \cdot \underbrace{erf(\xi = 0)}_{=0} + B = E_0 \;\Leftrightarrow\; B = E_0 \end{array}\right.$$

soit finalement: $\left[\begin{array}{l} A = -E_0 \\ B = E_0 \end{array}\right.$

On en tire sans peine la solution finale: $f(\xi) = E_0\,(1 - erf(\xi))$

soit $u(x,t) = E_0 \left[1 - erf\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] = E_0 \left[1 - erf\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{\omega_0 t}}\right)\right]$

On en déduit la tension sur la cellule n à l'abscisse $x = na$:

$$u_n(t) = E_0 \left[1 - erf\left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_0 t}}\right)\right]$$

La dernière question de l'énoncé est expérimentale; on indique ici la démarche attendue.

On réalise l'acquisition de la tension $u_n(t)$ en choisissant arbitrairement la cellule n. Sur l'enregistrement, on repère la date $t_{1/2}$ pour laquelle la tension vaut $E_0/2$. On a alors:

$$erf\left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_0 t_{1/2}}}\right) = \frac{1}{2}$$

soit: $\dfrac{n}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\omega_0 t_{1/2}}} = 0,47694$

Sachant que $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, on tire ainsi la valeur numérique de RC à comparer avec la valeur constructeur $RC = 10^3 \times 10^{-7} = 10^{-4}\ s$