Nature d'une série

1. Préciser la nature des séries réelles suivantes :

a) $u_n = ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **b)** $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

c) $u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$ **h)** $u_n = \sin\left((n+\dfrac{1}{n})\pi\right)$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

2. Préciser la nature des séries complexes ($z \in \mathbb{C}$) de terme général :

a) $u_n(z) = n^n z^{n!}$ **b)** $u_n(z) = e^n z^{n^3}$ **c)** $u_n(z) = \dfrac{(-1)^n}{n+z}$

3. Nature de la série de terme général : $a_n = \sin(\dfrac{1}{n}) - \ln(1+\dfrac{1}{n})$

Etude de séries

4.(a) Déterminer la limite de la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$

(b) Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = nu_n$

(c) Donner la nature de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum (-1)^n u_n$

5. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Étudier la nature de la série $\sum \sqrt{u_{2n}u_n}$.

6. Soient (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Calcul de sommes de séries convergentes

7. Calculer les sommes des séries suivantes, en justifiant leur convergence.

$$\textbf{a)} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$\textbf{c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad \textbf{d)} \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\cos(\frac{a}{2^n}) \qquad 0<a<\frac{\pi}{2}$$

8. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$, montrer que $S_n = \int\limits_0^1 \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = 0$. En déduire l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.

9. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad n \not\equiv 0[3] \\ u_n = -\dfrac{2}{n} & \text{si} \quad n \equiv 0[3] \end{cases}$ Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

(indication : regrouper les termes 3 par 3)

10. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \sin n\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$.

11. Calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2-1}$.

12. Calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

13. Avec des exponentielles

Sachant que $e = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!} \qquad \textbf{b)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \textbf{c)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}.$$

14. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geqslant 2$) est convergente, et calculer sa somme.

15. Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}.$$

Comparaison séries intégrales

16. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$$

17. Série de Bertrand :

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, montrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ définie pour $n > 1$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

18. Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n}$.

(a) Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

(b) Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.

(c) Soit $l = \lim_{n \to \infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - l$.

19. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R})$$

Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Autres

20. Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 \in]2, +\infty[\\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} 2 - u_n$.

21. Soit (u_n) une suite définie par récurrence par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

(a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

(b) En étudiant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$ est équivalent à $2 \ln n$ quand n tend vers l'infini.

22. Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, pour $n \geqslant 0$.

(a) Etudier la convergence de (u_n).

(b) Montrer que u_{n+1}/u_n tend vers 1. Calculer la limite de $\frac{u_n + u_{n+1}}{u_n}$.

(c) Montrer que $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ tend vers $1/6$.

(d) En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers $1/3$.

(e) Montrer que l'on a $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$.

23. Deux séries de même nature.

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de mÃªme nature.