1. Résoudre le système différentiel réel :

$$a)\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} x' = y + t \\ y' = x - t^2 \end{array}\right.$$

2. Résoudre le système différentiel réel $X' = AX$ où la matrice A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire $\exp(tA)$.

3. Résoudre le système différentiel réel $X' = AX$ où la matrice A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En déduire $\exp(tA)$.

4. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

6. *Varions la constante...*
Résoudre les équations différentielles suivantes :
(a) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
(b) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
(c) $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
(d) $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
(e) $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

7. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(a) $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
(b) $y' = \cos x + y$,
(c) $y' + 2y = (x-2)^2$

8. *Avec une condition initiale*
Résoudre les équations différentielles suivantes :
(a) $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
(b) $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1$ sur $]-1, +\infty[$ (on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).

9. Soit l'équation différentielle
(E) $\qquad y' + 2xy = x.$
Résoudre l'équation homogène asociée. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

10. *Raccordement détaillé*

(a) Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

i. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.

ii. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

(b) On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

(c) Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

11. *Un double raccordement détaillé...*

On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0.$$

(a) Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

(b) Sur quel(s) intervalle(s) connait-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène ? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).

(c) Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.

(d) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

12. *Recollement de solutions*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $y' \sin x - y\cos x + 1 = 0$

(b) $(\sin x)^3\, y' = 2(\cos x)y$

13. *Raccordement des solutions-tous les cas possibles*

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

(a) $ty' - 2y = t^3$;

(b) $t^2y' - y = 0$;

(c) $(1-t)y' - y = t$.

14. *Recherche de courbes*

Trouver les courbes d'équation $y = f(x)$, avec f de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante : si M est un point quelconque de la courbe, T l'intersection de la tangente à la courbe en M avec l'axe (Ox), et P le projeté orthogonal de M sur (Ox), alors O est le milieu de $[PT]$.

15. *Le vecteur sous-tangent*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f' ne s'annule pas. Soit M un point de la courbe représentative C_f de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note T le point d'intersection de la tangente à C_f avec l'axe $(O, \vec{i})$ et P le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \vec{i})$. On appelle vecteur sous-tangent à C_f en M le vecteur $\overrightarrow{TP}$.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dérivables, et dont la dérivée ne s'annule pas) dont les vecteurs sous-tangents en tout point de C_f sont égaux à un vecteur constant.

16. *Comportement à l'infini d'une solution*

Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2} y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

17. *Solutions impaires*

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

18. Zéros isolés

Soient $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés.

19. Solutions périodiques

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. A quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques. Les déterminer.

20. Toutes les solutions sont de norme constante

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Démontrer l'équivalence de

(a) A est antisymétrique ;

(b) toutes les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.

21. Où est l'équation différentielle ?

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

22. Lemme de Gronwall

Soit φ et y deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que ces fonctions vérifient :

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

C'est une inéquation différentielle. Montrer qu'alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \varphi(s)\mathrm{d}s\right)$$

Indication : Sur $[a, b]$, on pourra poser $F(t) = \int_a^t \varphi(s)y(s)\mathrm{d}s$, vérifier qu'elle est C^1 et calculer sa dérivée pour obtenir un renseignement.

Ensuite, on introduira la fonction définie par $G(t) = F(t)\exp\left(-\int_a^t \varphi(s)\mathrm{d}s\right)$ et procéder de même.

Enfin il faut tout recoller.