1. On pose $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ et $v_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$ pour $n \geq n$. Vérifier que ces deux suites sont adjacentes et encadrent le réel e.

2. On pose $\begin{cases} u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} \\ v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}} \end{cases}$

(a) Donner des valeurs approchées des cinq premiers termes de chaque suite.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 3}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

(c) Montrer que pour $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}} - \sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}{2}$$

(d) En déduire que les suites u et v sont convergentes.

3. On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $u_{n+1} < u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
En déduire que la suite (u_n) converge.
Étudier la suite (u_n^2) ; en déduire la limite de (u_n).

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2+2} e^{-u_n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et dérivable sur I. On suppose aussi que $f(I) \subset I$ et que $\exists M \in [0, +\infty[,\ \forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$ et que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution l sur I.
Soit u_n la suite définie par $u_o \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - l| \leq M|u_n - l|$$

(b) En déduire que

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - l| \leq aM^n$$

(c) On suppose que $M \in]0,1[$. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.

6. Algorithme de Héron
Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

(a) Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.

(c) En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n

(d) On prend $a = u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que les suites extraites $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{5n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Peut-on affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

8. Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

9. Etude de suites récurrentes
(précisez la convergence et la limite éventuelle en fonction de la valeur de u_0 choisie.)

(a) $u_0 \neq -5$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$

(b) Soit (u_n) définie, à partir de $u_0 > 0$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

(c) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin\, u_n$.

(d) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos\, u_n$.

(e) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

10. On définit les 2 suite u et v . pour tout $n \geqslant$ on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dots \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

(a) Montrer que ces suites sont adjacentes. Que peut on en déduire ?

(b) On note l leur limite commune. Montrer que l est irrationnel. (on pourra raisonner par l'absurde). En fait $l = e$ (voir plus tard dans l'année...)

11. On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{v_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}}} - 2\sqrt{\mathrm{n+1}}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

12.(a) Montrer que la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge vers une limite notée $l \in \mathbb{R}$.
(on pourra étudier les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).)

(b) Donner une valeur approchée de l à 10^{-1} près.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(\mathbf{E_n})$: $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que l'équation $(\mathbf{E_n})$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note x_n.

(b) Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

(c) Donner un équivalent simple de x_n.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(\mathbf{E_n})$: $xe^x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que l'équation $(\mathbf{E_n})$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.

(b) Déterminer la limite de (x_n).

(c) Donner un équivalent simple de x_n.

15. Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in\in]-\pi/2; \pi/2[$.

(a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

(b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

16. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$

(a) Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge.
(utiliser des relations trigonométriques)

(b) En déduire que les 2 suites sont divergentes.(idem)

17. Soit une suite (u_n) bornée vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$$

On définit une suite (v_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite (v_n) converge et calculer sa limite.
indication : Étudier la monotonie de la suite v. Puis montrer par l'absurde que cette suite converge vers 0.

18. On considère une suite (u_n) vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente, déterminer sa limite.
indication : Utiliser la partie entière de $\sqrt{n}$.

19. Soit $a > 0$. Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$$

indication : Se ramener à une suite définie par récurrence.

20. Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

21. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

En étudiant la suite $(\dfrac{1}{u_n})$, montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

♣♢♡♠