Corrigé du problème

1. (a) – On utilise la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1$$

– Remarquons que le resultat demandé est évident si $n = 0$.
On utilise la relation, vraie si $n \geq k \geq 1$:

$$k\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= nx\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} x^{k}(1-x)^{n-1-k} = nx(x+(1-x))^{n-1} = nx.\end{aligned}$$

– Remarquons que le resultat demandé est évident si $n = 0$ ou $n = 1$.
On utilise la relation, vraie si $n \geq k \geq 2$:
$k(k-1)\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)R_{n,k}(x) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} x^{k-2}(1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{C}_{n-2}^{k} x^{k}(1-x)^{n-2-k} \\ &= n(n-1)x^2(x+(1-x))^{n-2} = n(n-1)x^2.\end{aligned}$$

[Q]

(b) On constate l'égalité $(k-nx)^2 = k(k-1) + (1-2nx)k + n^2x^2$.
On peut alors utiliser les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2R_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+(1-2nx)k+n^2x^2)R_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)R_{n,k}(x) + (1-2nx)\sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) \\ &= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 = -nx^2 + nx = nx(1-x).\end{aligned}$$

[Q]

2. On suppose, par l'absurde, que la propriété évoquée par l'énoncé n'est pas vraie.

Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ on puisse trouver x et y dans $[a, b]$ tels que $|y - x| \leq \alpha$ mais tels que $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2, \begin{cases} |y_n - x_n| \leq \frac{1}{n} \\ |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \end{cases}$

De la suite de terme général $z_n = (x_n, y_n)$ du compact $[a, b]^2$ de $\mathbb{R}^2$ on peut extraire une suite convergente $z'_n = (x'_n, y'_n)$.

Avec ces notations, il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $x'_n = x_{\varphi(n)}$ et $y'_n = y_{\varphi(n)}$.

Les inégalités $|y'_n - x'_n| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$ et le fait que $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = +\infty$ impliquent que les suites convergentes (x'_n) et (y'_n) ont la même limite ℓ.

La continuité de f permet alors d'écrire $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y'_n) = f(\ell)$, ce qui est absurde car par hypothèse $|f(y'_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ pour tout entier n. [Q]

3. (a) On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) = 1$. Le résultat est alors évident :

$$f(x) - B_n(f)(x) = f(x) \sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x)$$

[Q]

(b) i. Pour tout élément x de A, on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha$ donc $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$.

On en déduit : $\displaystyle\sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k \in A} R_{n,k}(x)$.

Cette expression est majorée par $\varepsilon \displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}(x)$ c'est-à-dire par ε. [Q]

ii. Pour tout x de B, on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \geq \alpha^2 \sum_{k \in B} R_{n,k}(x)$. D'autre part :

$$\sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k \in B} (nx - k)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} (nx - k)^2 R_{n,k}(x)$$

Autrement dit : $\displaystyle\sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} nx(1 - x)$.

Enfin, pour tout x de $[0, 1]$, on a $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$. [Q]

iii. On majore $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ par $2\,\|f\|_\infty$.

D'après la question précédente on a : $\alpha^2 \sum_{k\in B} R_{n,k}(x) \le \frac{1}{4n}$.

On en déduit : $\sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \le 2\,\|f\|_\infty \sum_{k\in B} R_{n,k}(x) \le \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [Q]

iv. Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)R_{n,k}(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x)\\ &\le \sum_{k\in A}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \le \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.\end{aligned}$$

Puisque c'est vrai sur $[0,1]$, on peut écrire : $\|f - B_n(f)\|_\infty \le \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [Q]

(c) On commence par se donner $\varepsilon > 0$ et on en déduit l'existence d'un réel $\alpha > 0$ pour lequel l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $n \ge 1$.

Il suffit alors de choisir un entier n_0 tel que que $n \ge n_0 \Rightarrow \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \le \varepsilon$.

On a alors, pour tout $n \ge n_0$: $\|f - B_n(f)\|_\infty \le 2\varepsilon$.

On en déduit $\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$.

Autrement dit, la suite $(B_n(f))_{n\ge 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. [Q]

4. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue.

On utilise le changement de variable $t = a + x(b-a)$.

Quand x parcourt $[0,1]$, t parcourt $[a,b]$.

Le changement de variable inverse est donné par $x = \frac{t-a}{b-a}$.

Pour tout x de $[0,1]$, on pose $f(x) = g(a + x(b-a))$.

L'application f est continue sur $[0,1]$: il existe donc une suite de polynômes $x \to P_n(x)$ (par exemple les polynômes de Bernstein de f) uniformément convergente vers f sur $[0,1]$.

On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[a,b]$: $Q_n(t) = P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$.

Les Q_n sont des applications polynômiales et : $\sup_{t\in[a,b]} |g(t) - Q_n(t)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)|$.

Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion : la suite des polynômes Q_n est uniformément convergente vers g sur $[a,b]$, ce qui achève la démonstration du théorème de Weierstrass. [Q]

♣◇♡♠