Calcul différentiel

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les objectifs de cette section sont les suivants :
- généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$;
- donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.
Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un R-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.
Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \ldots, x_n)$ est autorisée.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Relation $\mathrm{d}f(a) \cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a) \cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{d}f$.
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ la matrice jacobienne de ff en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \ldots, f_p)$ où M est multilinéaire et $_1, \ldots, f_p$ sont des applications différentiables. Règle de la chaîne : Différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	calcul des dérivées partielles de $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_m))$. (Règle de la chaine bis ?)