TD4 - Stabilité et lemme de l'étoile

Exercice 1

Exercice 2

Soit u un mot de Σ^*. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u \in \min(L) &\iff (u \in L) \wedge (\forall v \in L,\ v \text{ nest pas préfixe propre de } u) \\ &\iff (u \in L) \wedge (\forall v \in L, \neg(\exists w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}, u = vw)) \\ &\iff (u \in L) \wedge \neg(\exists v \in L, \exists w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}, u = vw) \\ &\iff (u \in L) \wedge \neg(\exists u \in L \cdot (\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\})) \\ &\iff u \in L \setminus (L \cdot (\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\})) \end{aligned}$$

Ce qui établit que :

$$\min(L) = L \setminus (L \cdot (\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}))$$

Dès lors, sachant que $\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ est régulier, si L est régulier, par propriété de stabilité, $(L \cdot (\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\})$ est régulier puis $\min(L)$ l'est également.

Exercice 3

Pour chacune des questions, on désigne par $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ un DFA reconnaissant L.

Question 1. Construisons l'automate $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, q_{01}, F_1, \delta_1)$ avec :

- $q_{01} \notin Q$ nouvel état initial ;
- $Q_1 = Q \cup \{q_{01}\}$;
- $F_1 = \{q_0\}$;
- $\delta_1 : Q_1 \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q_1)$ telle que :

$$\delta_1(q, a) = \begin{cases} \{q' \in Q \mid \delta(q', a) = q\} & \text{si } q \neq q_{01} \text{ et } a \in \Sigma \\ F & \text{si } q = q_{01} \text{ et } a = \varepsilon \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par induction sur $w \in \Sigma^*$, on établit que :

$$\forall w \in \Sigma^* \quad \forall q \in Q \quad \delta_1^*(q, w) = \{q' \in Q \mid \delta^*(q', w^R) = q\}$$

Ainsi, pour tout $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) &\iff q_0 \in \delta_1^*(q_{01}, w) \\ &\iff q_0 \in \bigcup_{q \in F} \delta_1^*(q, w) \\ &\iff \exists q \in F, q_0 \in \delta_1^*(q, w) \\ &\iff \exists q \in F, \delta^*(q_0, w^R) = q \\ &\iff \delta^*(q_0, w^R) \in F \\ &\iff w^R \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ &\iff w \in \text{mirror}(L) \end{aligned}$$

Ce qui établit que $\text{mirror}(L)$ est un langage régulier.

Question 2. Pour cette question, l'idée générale est de calculer $\mathcal{A}$ dans les deux sens à la fois. Construisons l'automate $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, q_{02}, F_2, \delta_2)$ avec :

- $q_{02} = (q_0, F)$;
- $Q_2 = Q \times \mathcal{P}(Q)$;
- $F_2 = \{(q, P) \mid P \in \mathcal{P}(Q), q \in P\}$;
- $\delta_2 : Q_2 \times \Sigma \to Q_2$ telle que : $\delta_2((q, P), a) = (\delta(q, a), \{q' \in Q \mid \exists b \in \Sigma, \delta(q', b) \in P\})$.

Par induction sur $w \in \Sigma^*$, on établit que :

$$\forall w \in \Sigma^*, \delta_2^*(q_{02}, w) = (q, P) \iff (\delta^*(q_0, w) = q) \wedge (P = \{q' \in Q \mid \exists w' \in \Sigma^*, |w| = |w'| \wedge \delta^*(q', w') \in F\})$$

Finir la démonstration pour montrer que $w \in \frac{1}{2}L \iff w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ puis que $\frac{1}{2}L$ est régulier.

Exercice 4

Le point 1 peut être démontré en remarquant que puisque L étant un langage régulier, le lemme de l'étoile garantit l'existence de n.

Pour le point 2, supposons qu'il existe un $w \in L$ tel que $n \leqslant |w| \leqslant 2n - 1$. L étant un langage régulier, n étant la constante d'itération du lemme de l'étoile et $|w| \geqslant n$, ce lemme assure l'existence de la décomposition de w sous la forme xyz avec $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leqslant n$ et, pour tout entier naturel k, $xy^k z \in L$. Ce dernier point indique qu'il n'existe pas de borne finie sur la longueur des mots appartenant à L. Ce langage est par conséquent infini.

Supposons à présent qu'il n'existe pas $w \in L$ tel que $n \leqslant |w| \leqslant 2n - 1$ (hypothèse 1). Pour établir que L est fini, montrons que $2n$ est une borne finie sur la longueur des mots de L.
Par l'absurde, supposons qu'il existe des mots de L de longueur supérieure ou égale à $2n$ (hypothèse 2). Soit S l'ensemble de ces mots et w l'un de ses plus petits éléments, en terme de sa taille.
L étant un langage régulier, n étant la constante d'itération et $|w| \geqslant n$, le lemme de l'étoile permet la décomposition $w = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leqslant n$ et $xy^0 z = xz \in L$.
Sachant que $|xy| \leqslant n$ et que $|xyz| \geqslant 2n$, on a $n \leqslant |xz|$. Comme $y \neq \varepsilon$, on a $|xz| < |w|$ et w étant l'un des plus petits éléments de S, on a $|xz| < 2n$.
On déduit alors $n < |xz| < 2n$ avec $xz \in L$, ce qui contredit l'hypothèse 1. En conséquence, l'hypothèse 2 est fausse et L est fini.

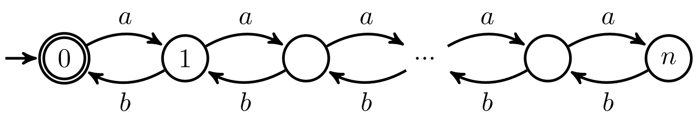
Exercice 5

Question 1. Les langages L et K étant réguliers, il existe un DFA $\mathcal{A}_L = (Q_L, \Sigma, q_{0,L}, F_L, \delta_L)$ qui reconnaît L et un DFA $\mathcal{A}_K = (Q_K, \Sigma, q_{0,K}, F_K, \delta_K)$ qui reconnaît K. On construit alors l'automate dont l'ensemble des états est $Q_L \times Q_K$, l'ensemble singleton de l'état initial est $\{(q_{0,L}, q_{0,K})\}$, l'ensemble des états acceptants est $F_L \times F_K$ et l'ensemble des transitions est :

$$\{(p, p') \xrightarrow{a} (q, p') \mid (p, a, q) \in \delta_L\} \cup \{(p, p') \xrightarrow{a} (p, q') \mid (p', a, q') \in \delta_K\}$$

On vérifie que cet automate accepte $L \sqcup\!\sqcup K$.

Question 2. Soit un mot w de L_n. Il existe des mots $w_1, \ldots, w_n$ de $(ab)^*$ tels que $w \in w_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup w_n$. Tout préfixe u de w appartient à un langage $u_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_n$ où chaque u_i est un préfixe de w_i. Comme chaque u_i vérifie $|u_i|_b \leqslant |u_i|_a \leqslant |u_i|_b + 1$, le mot u vérifie les inégalités requises. Inversement, le langage des mots vérifiant les inégalités est accepté par l'automate déterministe ci-dessous.



Soit w un mot accepté par cet automate. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, soit w_i le mot formé des lettres de w qui étiquettent les transitions entre les états $i - 1$ à i dans le chemin acceptant w. Alors chaque mot w_i appartient à $(ab)^*$ et le mot $w \in w_0 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup w_n$.