1. Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique, montrer que A est diagonalisable, calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ et évaluer $\exp(A)$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A, déterminer son polynôme caractéristique, calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(b) Justifier que A admet une seule vp et que A n'est pas diagonalisable.

(c) Donner une famille libre de deux Vp de A. En complétant cette famille par un vecteur de sorte que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, montrer que A est semblable à une matrice triangulaire.
On dit que l'on a trigonalisé la matrice A.(nb : on peut donner la matrice de passage)

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(b) Justifier que A admet 2 vp distinctes et que A n'est pas diagonalisable.

(c) Donner une famille libre de deux Vp de A. En complétant cette famille par un vecteur de sorte que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, montrer que A est semblable à une matrice triangulaire.
On dit que l'on a trigonalisé la matrice A.(nb : on peut donner la matrice de passage)

6. Valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

7. Déterminer les vp et les Vp de la matrice de taille n :
$A = \begin{pmatrix} J & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}$ avec $J \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les termes valent 1.
A est-elle diagonalisable ?

8. Soit $\Phi \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1-X^2)P' + nXP \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ. (On note Φ_n l'endomorphisme induit.)

(b) Déterminer les vp et les Vp de Φ_n.

(c) Φ_n est-il diagonalisable ? et Φ ?

9. On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et on définit l'application T de E dans E par :

$$\forall f \in E \begin{cases} T(f)(0) = f(0) \\ \forall x \in]0,1] \quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

(a) Justifier que T est un endomorphisme de E.

(b) Étudier les vp et les Vp de T.

10. **AB et BA ont même polynôme caractéristique**
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

(b) Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

(c) Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ $(M, N, P \in M_{2n}(\mathbb{K}))$.
Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

11. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose que f possède une unique valeur propre λ.

(a) A quelle condition l'endomorphisme est-il diagonalisable ?

(b) Calculer le polynôme caractéristique de f.

(c) Justifier que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}$ est nilpotent.

12. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ soit une famille génératrice de E.

(a) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(b) Préciser la forme de la matrice de f dans cette base. Calculer alors son polynôme caractéristique.

13. Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

14. Soient $n \geq 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

(a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par la matrice A.
Montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n$, en déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

(b) Calculer $\mathrm{tr} B$ et $\mathrm{tr} B^2$.
En déduire les valeurs propres de B puis celles de A.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

15. * Soit f et g deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation (on dit que f et g sont simultanément diagonalisable.)

16. * Diagonaliser la matrice de taille n : $A = (a_{ij})$ avec $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$