Le but de ce problème est de calculer de deux façons la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

On notera $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Partie I : Convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la majoration : $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ et donner un majorant de la somme $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. On considère la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$, définie par

$$\forall n \geqslant 1 \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la limite commune notée S de ces deux suites.

3. Montrer par une autre méthode (en utilisant une comparaison avec une intégrale) la convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

4. Sachant maintenant que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, montrer l'existence des sommes et prouver :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Partie II : Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *en utilisant les racines complexes de l'unité*

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x) \quad \text{et} \quad \text{cotan}^2(x) < \frac{1}{x^2} < 1 + \text{cotan}^2(x).$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Montrer que :

$$T_n < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + T_n.$$

3. Nous allons montrer en utilisant les racines du polynôme $P_n(z) = (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1}$, que :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(a) Vérifier que P_n est un polynôme pair de degré $2n$.

(b) Montrer que les $2n$ racines complexes du polynôme P_n sont les :

$$z_k = i\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \ \text{et} \ -z_k, \ \text{pour} \ 1 \leqslant k \leqslant n$$

(c) Si on note $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^{2k}$, on définit le polynôme Q_n par $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Préciser le degré et les racines de Q_n à partir de celle de P_n.

On note $\lambda_1, \lambda_2, ., ., \lambda_n$ les racines de Q_n, on peut écrire $Q_n = a_n \prod\limits_{k=1}^{n} (z - \lambda_k)$.

Déterminer une relation liant $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$, a_n et a_{n-1}.

(d) Montrer que :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(e) Conclure.

(f) En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(Remarque : En utilisant les idées qui précédent, on peut aussi démontrer que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.)

Partie III : Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ preuve due à MATSUOKA (American Mathematical Monthly, 1961).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

1.(a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $n \geqslant 1$.

(a) Montrer que :

$$I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

(b) En déduire que :

$$\frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n.$$

où on a noté $K_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$, puis que :

$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_n$$

3. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$.

(a) Démontrer que pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x \leqslant \frac{\pi}{2} \sin x$.

(b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}, \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

(c) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

♣♢♡♠