

# XIII

## Le champ magnétique et ses symétries - formulation locale et intégrale de la magnétostatique



ANDRE-MARIE AMPÈRE (1775 - 1836)

### PLAN DU CHAPITRE

<b>I</b>	<b>Le courant : source du champ magnétique : modélisations . . . . .</b>	<b>3</b>
I.1	Distribution volumique . . . . .	3
I.2	Distribution linéique -équivalence 3D $\leftrightarrow$ 1D . . . . .	4
I.3	Distribution surfacique . . . . .	5
<b>II</b>	<b>Symétries et invariances des distributions de courant - impact sur le champ magnétique . . . . .</b>	<b>6</b>

II.1	Stratégie de démonstration - exploitation du principe de Curie . . . . .	6
II.2	Eléments de symétrie des distributions de courant . . . . .	7
II.3	Invariances des distributions de courant . . . . .	10
<b>III</b>	<b>Le flux du champ magnétostatique . . . . .</b>	<b>12</b>
III.1	Conservation du flux magnétique (propriété fondamentale) - traduction intégrale . .	12
III.2	Traduction locale : l'équation de Maxwell-Thomson ou Maxwell-"flux" . . . . .	13
<b>IV</b>	<b>La circulation du champ magnétique : le théorème d'Ampère . . . . .</b>	<b>13</b>
IV.1	Démonstration élémentaire - Enoncé généralisé . . . . .	13
IV.2	Stratégie de mise en oeuvre (à connaître!!!) . . . . .	15
IV.3	Exemples classiques d'application (à connaître!!!) . . . . .	16
IV.4	Traduction locale : Equation de Maxwell-Ampère statique . . . . .	19
<b>V</b>	<b>Analyse topographique du champ magnétique . . . . .</b>	<b>21</b>
V.1	Lignes et tubes de champ . . . . .	21
V.2	Interprétation des positions relatives des lignes de champs - resserrement ou évasement	22
V.3	Quelques cartes de champs magnétiques . . . . .	24

---

## I Le courant : source du champ magnétique : modélisations

### I.1 Distribution volumique

Considérons un conducteur parcouru par un courant  $I$ . Si l'on appelle  $n$  la densité volumique de porteurs de charge mobiles<sup>1</sup>,  $q$  la charge d'un porteur, et  $\langle \vec{v} \rangle$  le vecteur vitesse moyen de ces porteurs.

On isole un "tube" de courant  $I$ , c'est à dire un flux de particule telles que  $\langle \vec{v} \rangle \parallel \vec{n}$  :

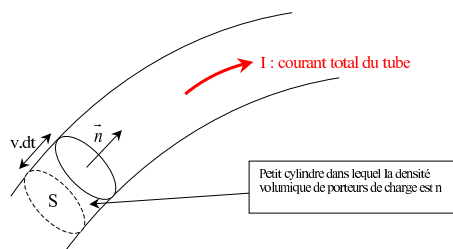


FIGURE XIII.1 – Distribution volumique de courant

Dans ce tube, la charge totale traversant la section pendant  $dt$  est :

$$\delta Q = I(M, t) \cdot dt$$

or cette charge est également celle contenue dans la portion élémentaire de tube en  $M$  de volume  $d\tau(M) = \langle \vec{v}(M, t) \rangle \cdot \vec{n} S \cdot dt$  **en supposant que les porteurs de charge possèdent la même vitesse moyenne sur toute la section** :

$$\delta Q(M, t) = \rho(M, t) \cdot d\tau = \rho(M, t) \langle \vec{v}(M, t) \rangle \cdot \vec{n} S \cdot dt = n(M, t) q \cdot S \langle v(M, t) \rangle \cdot dt$$

En rapprochant ces deux expressions de  $\delta Q$ , on en déduit l'expression du courant :

$$I(M, t) = nqS \langle v(M, t) \rangle$$

or le courant moyen circulant par unité de surface est :

$$J = \frac{I}{S} \quad \text{en supposant sa valeur constante sur toute la section}$$

On définit alors le vecteur densité volumique (**local**) de courant :

**Définition I-1:** DÉFINITION "PRATIQUE" DU VECTEUR DENSITÉ VOLUMIQUE DE COURANT

$$\vec{J}(M, t) = n(M, t)q \langle \vec{v}(M, t) \rangle \times \vec{n} = n(M, t)q \langle \vec{v}(M, t) \rangle = \rho(M, t) \langle \vec{v}(M, t) \rangle \quad (\text{XIII.1})$$

Si les porteurs de charges sont de plusieurs "types" (protons, ions mono- di- trivalents, etc...) alors pour  $N$  types, on a :

1. nombre de porteurs de charge mobiles par unité de volume

$$\vec{J}(M, t) = \sum_{i=1}^N n_i(M) q_i < \vec{v}_i(M, t) >$$

**Définition I-2:** DÉFINITION "VÉRITABLE" DE  $\vec{J}(M, t)$  : PAR SON FLUX

La définition véritable du vecteur densité volumique de courant  $\vec{J}$  est en fait donnée à partir du flux du vecteur densité volumique de courant à travers une surface donnée qui correspond au courant traversant cette même surface.

Le courant élémentaire traversant la surface  $dS$  s'écrit :

$$dI = J \cdot d\Sigma = J \cdot dS \cos \theta = \vec{J} \cdot \vec{dS} = \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

donc :

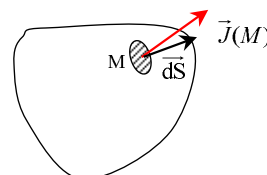
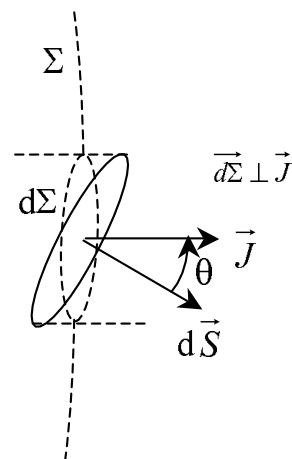
$$I = \underbrace{\iint_{\Sigma(\text{fictive})} dI(M)}_{\substack{\text{courant} \\ \text{traverse} \\ \Sigma \perp \vec{J}}} = \iint_{\Sigma} J(M) \cdot d\Sigma(M)$$

$$= \iint_S J(M) \cdot dS(M) \cos \theta = \iint_S \vec{J}(M) \cdot \vec{dS}(M) = \Phi_S(\vec{J}) \quad (\text{XIII.2})$$

Si la surface est fermée, on compte positifs les courants entrants et négatifs les courants sortants :

$$I = - \oint_S \underbrace{\vec{J}(M) \cdot \vec{dS}(M)}_{\substack{> 0 \text{ si courant sortant} \\ < 0 \text{ si courant entrant}}} \quad (\text{XIII.3})$$

NB :  $[J] = A.L^{-2}$



## I.2 Distribution linéique -équivalence 3D ↔ 1D

Nombreux sont les cas pratiques pour lesquels les dimensions transversales du tube de courant sont très limitées par rapport aux dimensions longitudinales ; on parle alors de circuit filiforme, et on assimile dans ces conditions le "tube" à un fil :

Nous verrons de manière assez récurrente dans le cours de magnétostatique, qu'il apparaît la grandeur vectorielle  $\vec{J} \cdot d\tau$  (avec  $d\tau$  élément de volume). Essayons de voir comment se transforme cette grandeur dans le cas d'un

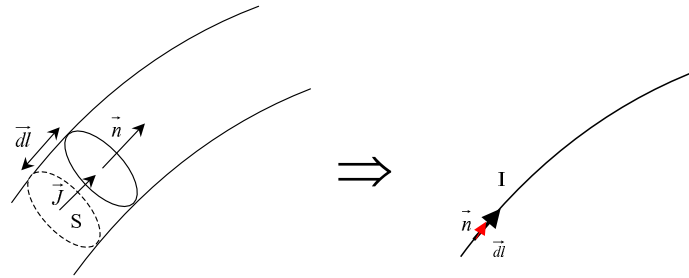


FIGURE XIII.2 – Modélisation de la distribution linéique

circuit filiforme :

$$\vec{J} d\tau = J \vec{n} S dl = JS dl \times \vec{n}$$

or  $J \cdot S$  est l'intensité traversant le tube de section  $S$  en considérant  $\vec{J}$  constant sur toute la section.

d'où  $\vec{J} d\tau = I dl \vec{n}$

ainsi la grandeur  $\vec{J} \cdot d\tau$  devient dans ce modèle filiforme de courant :

$$\boxed{\vec{J} \times d\tau = I \times \vec{dl}} \quad (\text{XIII.4})$$

### I.3 Distribution surfacique

Considérons une plaque conductrice, d'épaisseur  $\Delta z = a$  très faible devant ses autres dimensions ; on appelle  $\vec{J}(M)$  le vecteur densité de courant volumique un point M de cette plaque.

Le courant élémentaire s'écoulant à travers la section  $d\vec{S}$  est :

$$d^2 I(M) = \vec{J}(M) \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{=dz \cdot dl \vec{n}} = \vec{J}(M) \cdot \vec{n} dl \cdot dz$$

que l'on intègre sur l'épaisseur  $a$  :

$$\Rightarrow dI_{dl} = \int_{z=-a}^{z=0} d^2 I = \int_{-a}^0 \vec{J}(x, y, z) dz \cdot \vec{n} \cdot dl =$$

$$\boxed{\vec{J}_s \cdot \vec{n} dl}$$

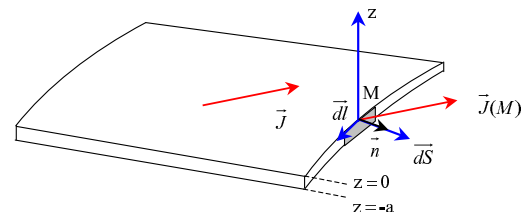


FIGURE XIII.3 – Modélisation de la distribution surfacique de courant

en définissant le vecteur densité surfacique de courant :

$$\vec{J}_S = \int_{-a}^0 \vec{J}(x, y, z) \cdot dz \quad \text{cas limite } a \rightarrow 0 \quad \boxed{\vec{J}_S = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^0 \vec{J}(x, y, z) \cdot dz = a \cdot \vec{J}(x, y, 0)}$$

**Définition I-3:** DENSITÉ SURFACIQUE DE COURANT

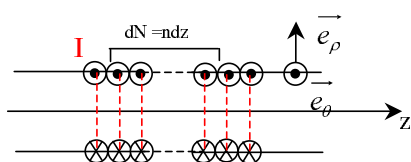
On peut définir, pour un matériau de très faible épaisseur  $a$  par rapport à ses autres dimensions latérales, et parcouru par un courant de densité volumique  $\vec{J}$ , le vecteur densité surfacique de courant  $\vec{J}_s$  tel que :

$$\vec{J}_s(M) = a \vec{J}(M)$$

**NB :** on peut voir  $\vec{J}_s$  comme "le courant par unité de largeur de passage" !

**Unité MKSA :**  $J_s$  s'exprime en  $A.m^{-1}$

EXEMPLE CLASSIQUE : nappe de courant d'un solénoïde



$$dI_{dz} = dN \cdot I = nI \cdot dz \stackrel{\text{astuce}}{=} nI \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \cdot dz = \vec{J}_S \cdot \vec{e}_\theta \cdot dz \quad \text{en posant } \boxed{\vec{J}_S = nI \cdot \vec{e}_\theta}$$

## II Symétries et invariances des distributions de courant - impact sur le champ magnétique

### II.1 Stratégie de démonstration - exploitation du principe de Curie

RAPPELS : notre démarche de démonstration des propriétés de symétrie du **champ électrique** s'appuyait sur l'expression fondamentale du champ i.e. la loi de Coulomb).

PROBLÈME : l'expression fondamentale liant le champ magnétique à ses sources (courant) appelée loi de Biot et Savart est hors programme :

L'élément de courant en  $P$   $\vec{J}(P) \cdot d\tau$  engendre en  $M$  un champ élémentaire  $d\vec{B}_P(M)$  qui a pour expression :

$$\boxed{d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \cdot d\tau} \quad (\text{loi de Biot et Savart})$$

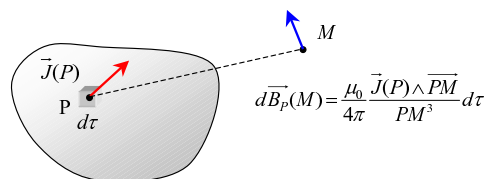


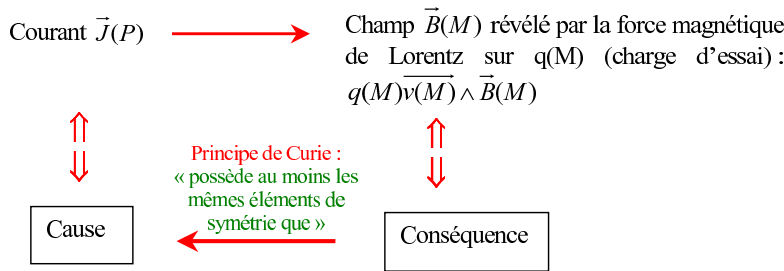
FIGURE XIII.4 – Expression fondamentale du champ magnétique à partir de ses sources (les courants !!)

IDÉE : s'appuyer sur le principe de Curie !

On considère une distribution de courant de densité  $\vec{J}(P)$  à l'origine d'un champ magnétique  $\vec{B}(M)$  dans l'espace. Une charge  $q$  en  $M$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  plongée dans ce champ  $\vec{B}$  subit par conséquent la force magnétique de Lorentz d'expression :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$$

Le principe de Curie permet de construire le schéma synoptique suivant :



Ainsi :

**La force magnétique de Lorentz  $q\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$  possède la symétrie de sa cause qui est la distribution de courant de densité  $\vec{J}(P)$  à l'origine du champ magnétique  $\vec{B}$ .**

## II.2 Éléments de symétrie des distributions de courant

### a - Cas d'un plan de symétrie - conséquence sur le champ

Supposons une distribution de courant présentant un plan de symétrie  $\Pi^+$  et engendrant une force magnétique de Lorentz sur une charge  $q$  en  $M$  animée d'une vitesse  $\vec{v}_q(M)$  également symétrique. On pose :

$$\left[ \begin{array}{l} M' = \text{sym}_{\Pi^+}[M] \\ P' = \text{sym}_{\Pi^+}[P] \\ q(M') = q(M) \\ \vec{v}(M') = \text{sym}_{\Pi^+}[\vec{v}(M)] \end{array} \right] \Rightarrow q(M')\vec{v}(M') = \text{sym}_{\Pi^+}[q(M)\vec{v}(M)]$$

Par principe de Curie, la force de Lorentz possède au moins les éléments de symétrie de ses causes, elle est donc symétrique par rapport au plan de symétrie  $\Pi^+$  de la distribution de courant, on a donc :

$$\vec{J}(P') = \text{sym}_{\Pi^+}[\vec{J}(P)] \xrightarrow{\text{Ppe Curie}} \vec{F}[q(M')] = \text{sym}_{\Pi^+}[\vec{F}[q(M)]]$$

$$\Leftrightarrow q(M')\vec{v}_q(M') \wedge \vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi^+} \left[ \underbrace{q\vec{v}_q(M)}_{\text{symétrique}} \wedge \underbrace{\vec{B}(M)}_{\text{antisym.}} \right]$$

CONCLUSION :

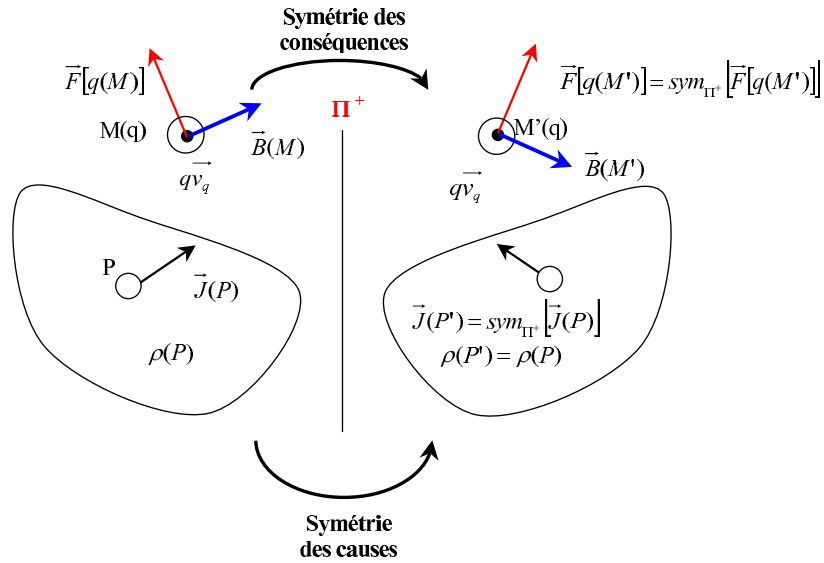


FIGURE XIII.5 – Principe de Curie appliqué à la force de Lorentz pour une distribution avec plan de symétrie

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi^+} [\vec{B}(M)] \implies \begin{cases} \vec{B}_{\parallel}(M') = -\vec{B}_{\parallel}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

CONSÉQUENCES :

si  $M \in \Pi^+ \Rightarrow M \equiv M' \Rightarrow \vec{B}_{\parallel}(M) = -\vec{B}_{\parallel}(M) \Rightarrow \vec{B}_{\parallel}(M) = \vec{0}$  alors :  $\vec{B}(M \in \Pi^+) \perp \Pi^+$

Le champ magnétique en un point  $M$  appartenant à un  $\Pi^+$  de la distribution de charge source est perpendiculaire à ce  $\Pi^+$ .

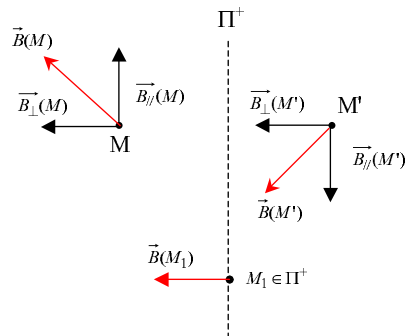


FIGURE XIII.6 – le champ magnétique est antisymétrique par rapport à tout plan de symétrie

### b - Cas d'un plan d'antisymétrie - conséquence sur le champ

Reprenons la situation précédente de la charge en mouvement, la distribution de courant présentant cette fois un plan d'antisymétrie  $\Pi^-$  :



$$\left[ \begin{array}{l} M' = \text{sym}_{\Pi^-}[M] \\ P' = \text{sym}_{\Pi^-}[P] \\ q(M') = -q(M) \\ \vec{v}(M') = -\text{sym}_{\Pi^-}[\vec{v}(M)] \end{array} \right] \Rightarrow q(M')\vec{v}(M') = \text{sym}_{\Pi^-}[q(M)\vec{v}(M)]$$

En raison du principe de Curie, la force de Lorentz possède donc au moins les mêmes éléments de symétrie que sa cause i.e. la distribution de courant, elle est donc antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^-$ , on a donc :

$$\vec{J}(P') = -\text{sym}_{\Pi^-}[\vec{J}(P)] \xrightarrow{\text{Ppe Curie}} \vec{F}[q(M')] = -\text{sym}_{\Pi^-}[\vec{F}[q(M)]]$$

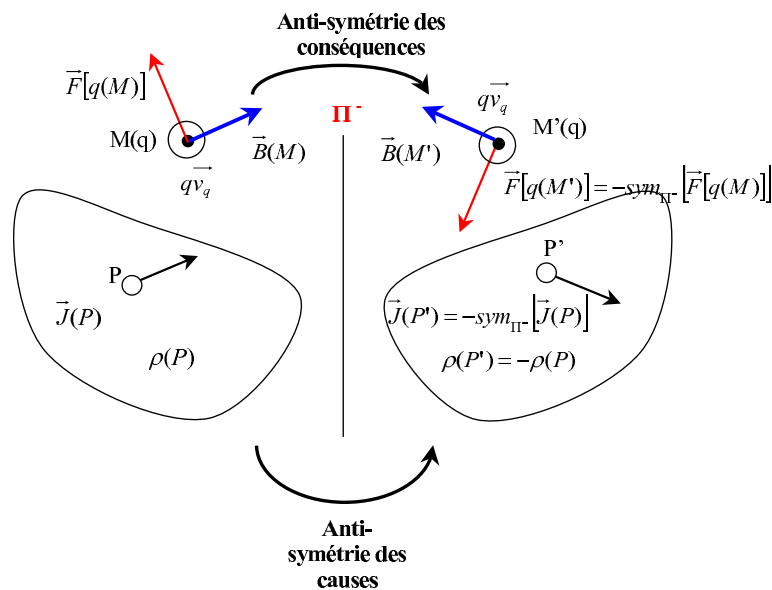


FIGURE XIII.7 – Principe de Curie appliqué à la force de Lorentz pour une distribution avec plan de symétrie

$$\Leftrightarrow q(M')\vec{v}_q(M') \wedge \vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi^-} \left[ \underbrace{q\vec{v}_q(M)}_{\text{symétrique}} \wedge \underbrace{\vec{B}(M)}_{\text{antisym.}} \right]$$

CONCLUSION :

$$\vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi^-}[\vec{B}(M)] \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_{\parallel}(M') = \vec{B}_{\parallel}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

CONSÉQUENCES :

si  $M \in \Pi^- \Rightarrow M \equiv M' \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = -\vec{B}_{\perp}(M) \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$  alors :  $\vec{B}(M \in \Pi^-) \in \Pi^-$

Le champ magnétique en un point  $M$  appartenant à un  $\Pi^-$  de la distribution de charge source est contenu dans ce  $\Pi^-$ .

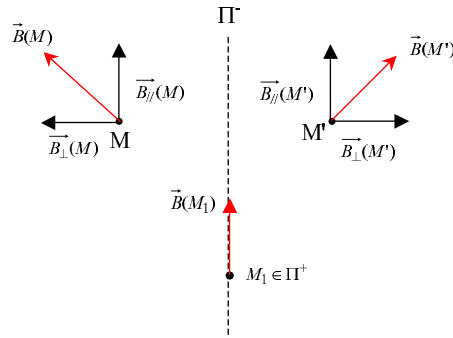


FIGURE XIII.8 – le champ magnétique est symétrique par rapport à tout plan d'antisymétrie

### II.3 Invariances des distributions de courant

#### a - Cas de la translation - conséquences sur le champ

On suppose une distribution de courant telle qu'une translation  $\mathcal{T}$ , par exemple  $\vec{T} = a \cdot \vec{e}_z (\forall a)$ , laisse cette dernière invariante. On parle alors d'**invariance par translation** (recouvrement).

NB : une telle distribution de sources n'existe pas dans la mesure où un courant naît forcément dans un circuit fermé qui interdit ce type d'invariances.

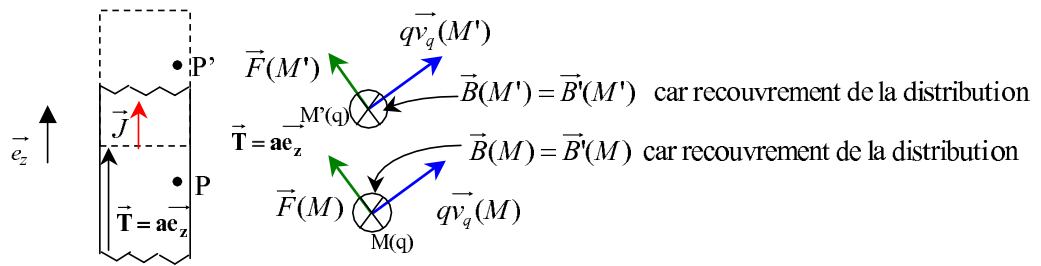


FIGURE XIII.9 – Invariance par translation

Du fait du recouvrement on a :  $\vec{F}'(M') = \vec{F}(M')$  (1)  
et d'après le principe de Curie comme  $\vec{J}(P) = \mathcal{T} [\vec{J}(P)] = \vec{J}'(P')$   $\xrightarrow{\text{Ppe Curie}} \vec{F}(M) = \vec{F}'(M')$  (2)  
ainsi avec (1) et (2) on a :

$$\vec{F}(M) = \vec{F}(M') \Leftrightarrow q \vec{v}_q(M) \wedge \vec{B}(M) = q \vec{v}_q(M') \wedge \vec{B}(M')$$

d'où l'on tire finalement :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(M')$$

Dans notre cas de la translation  $\vec{T} = a \cdot \vec{e}_z$  selon  $\vec{e}_z$ , cette égalité devient :

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y, z') = \vec{B}(x, y, \forall z) = \vec{B}(x, y)$$

A RETENIR :

**Propriété II-1: INVARIANCE PAR TRANSLATION**

Si on a invariance par translation d'une distribution de courant alors le champ magnétique engendré ne dépend pas de la variable spatiale attachée à cette translation.

**b - Cas de la rotation - conséquences sur le champ**

Par une démarche totalement analogue : dans le cas d'une invariance par rotation  $\mathcal{R}_\theta$  d'axe  $\vec{e}_z$ , la norme du champ magnétique est conservée :

$$|\vec{B}(\rho, \theta(M), z)| = |\vec{B}(\rho, \theta(M) + \theta_0, z)| \stackrel{\forall \theta_0}{=} |\vec{B}(\rho, \forall \theta, z)| = |\vec{B}(\rho, z)|$$

**Propriété II-2: INVARIANCE PAR ROTATION**

Si on a invariance par rotation d'une distribution de charge alors la norme du champ magnétique ne dépend pas de la variable angulaire attachée à cette rotation.

**c - Exemple "pédagogique" : le fil infini**

Considérons un fil conducteur infini parcouru par un courant  $I^2$  disposé selon l'axe  $[Oz)$ .

► ANALYSE DES SYMÉTRIES : tout plan contenant l'axe du fil  $[Oz)$  est un plan de symétrie donc le champ est perpendiculaire à ce plan  $\Rightarrow \vec{B} = B(M) \cdot \vec{e}_\theta$ .

► ANALYSE DES INVARIANCES :

- la distribution est invariante par translation selon  $[Oz)$   
 $\Rightarrow B(M) = B(\rho, \theta, z)$
- la distribution est invariante par rotation d'angle quelconque autour de l'axe  $[Oz)$   $\Rightarrow B(M) = B(\rho, \theta, z)$

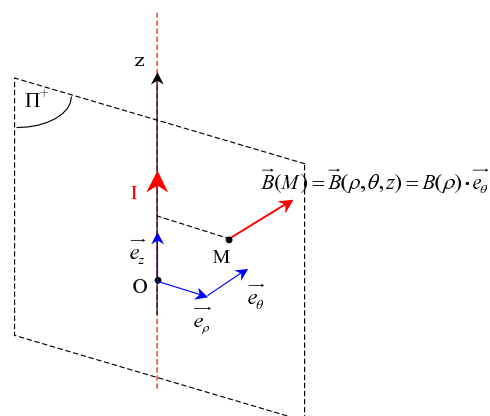


FIGURE XIII.10 – Fil conducteur infini parcouru par un courant  $I$

CONCLUSION :

$$\vec{B}_{fil \infty} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\theta$$

**d - Autres exemples : en live !**

- Le tube de courant
- Le solénoïde infini

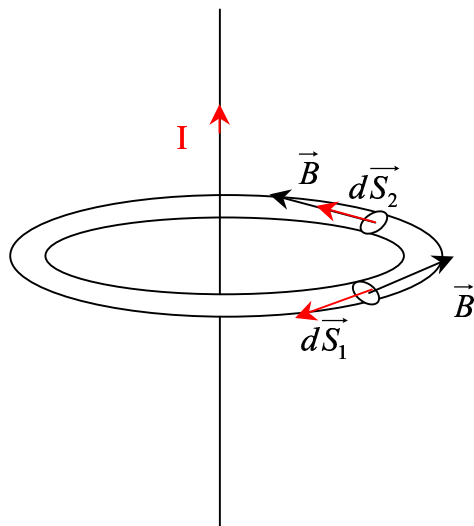
2. distribution sans réalité physique !

### III Le flux du champ magnétostatique

#### III.1 Conservation du flux magnétique (propriété fondamentale) - traduction intégrale

Pour simplifier l'approche, prenons le cas du fil infini créant un champ orthoradial  $\Rightarrow$  les tubes de champ sont donc des tores d'axe de révolution le fil.

Rappel : pour le fil rectiligne infini on a  $\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\theta$



On considère une surface fermée  $S$  constituée d'une portion de tore de révolution autour du fil comprise entre  $dS_1$  et  $dS_2$ . Le flux total à travers cette surface fermée  $S$  est, compte tenu de la topographie orthoradiale du champ, simplement le flux du champ à travers les surfaces extrémités de la portion de tore donc :

$$d\phi_{S_{\text{ferm}}} = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_{\text{lat}}} \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} = B_2 dS_2 - B_1 dS_1$$

or  $B_1(\rho) = B_2(\rho)$  donc :  $d\phi_{S_{\text{ferm}}} = 0$

Sachant que toute surface fermée peut être décomposée en une série de tubes de champ, le flux sera toujours nul, donc dans le cas du fil rectiligne infini, on a :

$$\phi_{S \text{ fermée}} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

#### GÉNÉRALISATION :

Dans le cas d'un conducteur de forme quelconque, un élément  $dl$  crée également un champ orthoradial et l'on retrouve ce même résultat en sommant les flux élémentaires  $d\phi$  créés par  $d\vec{B}$ .

On peut donc donner la propriété générale suivante :

#### **Propriété III-1: CONSERVATION DU FLUX MAGNÉTIQUE**

Le flux du champ magnétique créé par une distribution quelconque est toujours nul à travers une **surface fermée** :

$$\phi_{S \text{ fermée}} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{valable } \forall \text{ surface fermée, } \forall \text{ circuit}) \quad (\text{XIII.5})$$

$\vec{B}$  est dit à **flux conservatif**.

INTERPRÉTATION SUR LES LIGNES DE CHAMP : On peut décomposer le flux total  $\phi_{S \text{ fermée}}$  en flux des lignes de champ entrantes et flux des lignes de champ sortantes :

$$\phi_{S \text{ fermée}} = \phi_{entr} + \phi_{sort} = 0 \implies \phi_{entr} = -\phi_{sort}$$

Conséquences :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{les LDC entrantes ressortent forcément} \\ \text{les LDC sortantes sont forcément entrées} \end{array} \right.$

### III.2 Traduction locale : l'équation de Maxwell-Thomson ou Maxwell-"flux"

On sait que

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

or d'après le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V/S} \text{div} [\vec{B}] \times d\tau = 0 \quad \forall S \text{ fermée}$$

d'où la propriété suivante :

#### Propriété III-2: EQUATION DE MAXWELL THOMSON

La conservation du flux magnétique se traduit localement par l'équation suivante (appelée équation de Maxwell-Thomson ou "Maxwell-Flux")

$$\text{div} [\vec{B}] = 0 \quad (\text{interprétation plus tard !}) \quad (\text{XIII.6})$$

## IV La circulation du champ magnétique : le théorème d'Ampère

### IV.1 Démonstration élémentaire - Enoncé généralisé

Considérons à nouveau le cas du fil infini. On montre à partir de la loi de Biot et Savart que le champ magnétique produit par une telle distribution de courant est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \times \vec{e}_\theta$$

Dans le système de coordonnées cylindriques, l'élément de longueur  $d\vec{OM} = d\vec{l}$  s'écrit :

$$d\vec{l} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \cdot \vec{e}_z$$

Calculons la circulation de  $\vec{B}$  sur un contour fermé  $\Gamma$  arbitraire :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_\Gamma d\theta$$

#### DISCUSSION EN FONCTION DU CHOIX DE $\Gamma$ : 2 CAS

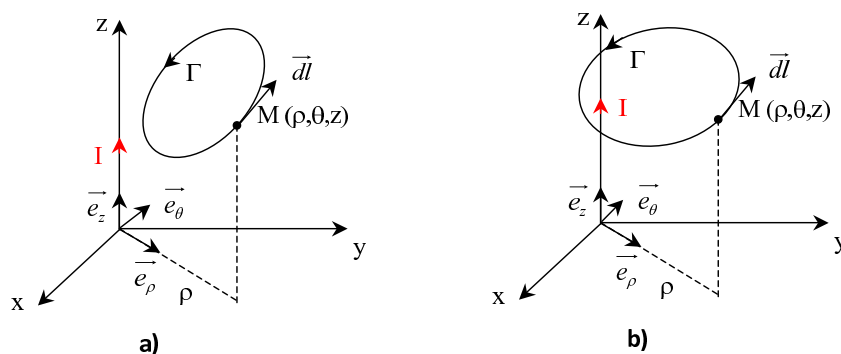


FIGURE XIII.11 – Circulation du champ magnétique

- si le contour  $\Gamma$  enlace le fil, alors  $\theta$  varie de  $2\pi$  lors de l'intégration d'où :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \mu_0 I$$

- si le contour  $\Gamma$  n'enlace pas le fil, alors  $\theta$  reprend sa valeur initiale en fin d'intégration ("rebroussement"), l'intégrale est donc nulle :

$$\mathcal{C}_\Gamma = 0$$

#### Remarque IV-1:

Si le contour  $\Gamma$  enlace  $N$  fois le même courant alors  $\mathcal{C}_\Gamma = N\mu_0 I$   
Le calcul de  $\mathcal{C}_\Gamma$  est indépendant du contour choisi.

Enfin, ce résultat peut être généralisé à toute distribution de courant source d'un champ magnétique, et porte le nom de **théorème d'Ampère** :

#### Propriété IV-1: THÉORÈME D'AMPÈRE

La circulation du champ magnétique  $\vec{B}$  sur une courbe fermée est égale au produit de  $\mu_0$  par l'intensité enlacée par  $\Gamma$ , c'est à dire l'intensité algébrique totale qui traverse toute surface  $S$  s'appuyant sur  $\Gamma$  :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad \text{avec} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \quad \text{perméabilité magnétique du vide} \quad (\text{XIII.7})$$

PRINCIPE D'ÉVALUATION DE  $I_{\text{enlace}}$  : 3 cas de figure peuvent se présenter

- SI LA DISTRIBUTION DE COURANT EST FILIFORME :  
alors le courant enlacé correspond à la somme des courants filiformes enlacés par le contour  $\Gamma$  comptés algébriquement  $\Rightarrow$  d'où la **nécessité d'une orientation des courants** (cf schéma ci-dessous)

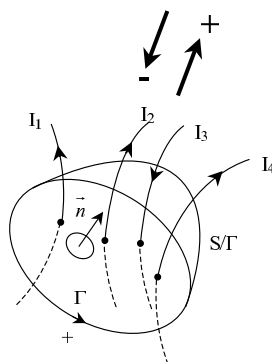


FIGURE XIII.12 – Théorème d'ampère pour une distribution linéique de courant

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_n I_n = \mu_0 \left( \underbrace{I_1}_{>0} + \underbrace{I_2}_{>0} + \underbrace{I_3}_{<0} + \underbrace{I_4}_{>0} \right)$$

- SI LA DISTRIBUTION DE COURANT EST VOLUMIQUE :  
alors le courant enlacé par le contour  $\Gamma$  est évalué en intégrant la densité volumique de courant sur une surface s'appuyant sur le contour  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S/\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{XIII.8})$$

$\Rightarrow$  cf exemple du tube de courant un peu plus bas.

- ENFIN, SI LA DISTRIBUTION DE COURANT EST SURFACIQUE :  
le courant enlacé est calculé par intégration de la densité surfacique de courant sur une nappe enlacé par  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{L \text{ à définir}} \vec{J}_s \cdot \vec{n} dl \quad (\text{XIII.9})$$

$\Rightarrow$  cf exemple de la nappe de courant un peu plus bas.

## IV.2 Stratégie de mise en oeuvre (à connaître!!!)

A RETENIR : Tout comme le théorème de Gauss en électrostatique, son équivalent magnétique le **théorème d'Ampère** est un puissant outil de détermination du champ magnétique en tout point de l'espace dans les cas où les distributions de courants sources présentent un haut degré de symétrie et d'invariances (fil, cylindre, plan infinis etc.)!!!

L'application du théorème d'Ampère passe par 3 étapes essentielles :

- Identification des plans de symétrie et antisymétrie des sources  $\implies$  **direction du champ connue en tout point de l'espace.**
- Identification des invariances de la distribution source  $\implies$  **variables "vraies" du champ connues.**
- On pose le théorème d'Ampère  $\implies$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlace}$$

et on choisit le contour d'Ampère fermé  $\Gamma \stackrel{\text{éventuellement}}{=} \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_i \cup \dots \cup \Gamma_n$  tel que sur chaque élément de contour on ait :

- ◇  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  soit  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$  ou bien  $\vec{B} \parallel d\vec{l}$  soit  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm ||\vec{B}|| \times dl$
- ◇  $||\vec{B}|| = cste \neq 0$  sur les  $m \leq n$  portions de contour d'Ampère pour lesquelles  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm ||\vec{B}|| \times dl$

Ainsi le théorème d'Ampère devient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlace} \implies B \sum_i^{m \leq n} \pm \int_{\Gamma_i} dl_i = \mu_0 I_{enlace} \implies \boxed{B = \frac{\mu_0 I_{enlace}}{\sum_i^{m \leq n} \pm \int_{\Gamma_i} dl_i}}$$

Le champ  $\vec{B}$  est alors déterminé.

### IV.3 Exemples classiques d'application (à connaître!!!)

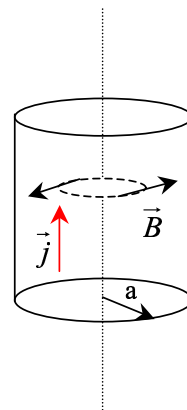
#### a - Le fil infini

En live !

#### b - Le tube de courant



On considère un conducteur cylindrique infini de section circulaire de rayon  $a$  et d'axe  $[Oz]$ . On suppose une densité de courant uniforme sur toute la section  $\vec{J} = J_0 \cdot \vec{e}_z$ .



- ❶ Déterminer la topographie du champ magnétique<sup>3</sup>.
- ❷ Exploiter les invariances afin de déterminer les variables d'intérêt<sup>4</sup>.
- ❸ Appliquer le théorème d'Ampère afin de déterminer la norme du champ magnétique, et conclure<sup>5</sup>.

FIGURE XIII.13 – Application du théorème d'Ampère sur le tube de courant

### c - Le solénoïde infini

On considère un solénoïde d'axe  $[Oz]$ , de longueur infinie dont les spires sont parcourues par un courant  $I = cste$  et comportant  $n$  spires par unité de longueur.

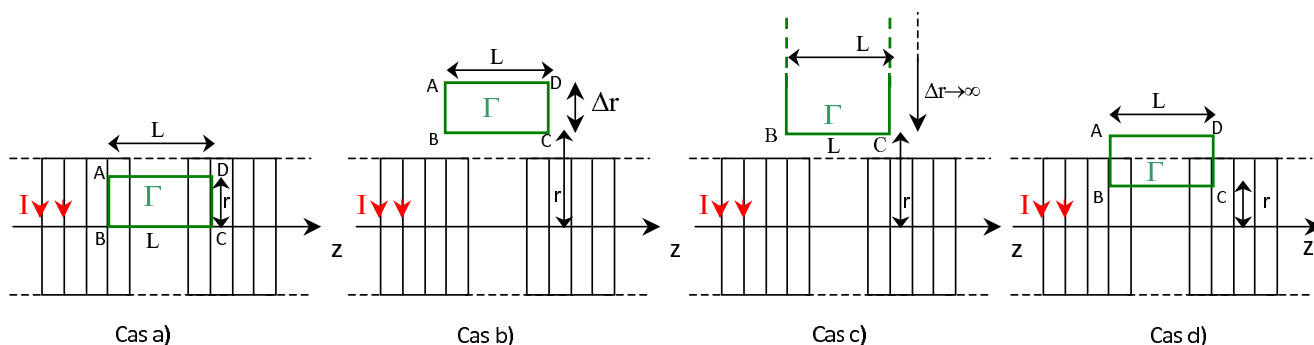


FIGURE XIII.14 – Théorème d'Ampère appliqué au cas du solénoïde infini

- ANALYSE DES SYMÉTRIES

$$\text{Tout plan } \perp [Oz] \equiv \Pi^+ \implies \vec{B} \parallel \vec{e}_z$$

- ANALYSE DES INVARIANCES

$$\begin{cases} \text{Par rotation autour de l'axe } [Oz] \implies \vec{B} = \vec{B}(\rho, \theta, z) \\ \text{Par translation selon l'axe } [Oz] \implies \vec{B} = \vec{B}(\rho, \theta, z) \end{cases}$$

donc :  $\boxed{\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_z}$

- APPLICATION DU THÉORÈME D'AMPÈRE

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Compte tenu de la topographie du champ, on choisit un contour  $\Gamma = ABCD$  dont la surface (plane) est orienté selon  $\vec{e}_\theta$ , rectangulaire dont les côtés sont soit  $\parallel [Oz)$ , soit  $\perp [Oz)$ .

L'analyse complète du problème nécessite l'application du théorème d'Ampère à 4 reprises :

◇ CAS A) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(0)L - B(\forall \rho < a)L = 0 \implies B(0) = B(\forall \rho < a) \implies \boxed{\vec{B} \text{ homogène dans le solénoïde}}$$

◇ CAS B) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(\forall \rho > a)L - B(\rho + \Delta \rho)L = 0 \implies B(\rho + \Delta \rho) = B(\forall \rho > a) \implies \boxed{\vec{B} \text{ homogène à l'extérieur du solénoïde}}$$

◇ CAS C) :

On pose la C.L.  $\lim_{r \rightarrow \infty} B(\rho) = 0$  (absence de sources à l'infini), ainsi en reprenant le cas précédent avec  $\Delta \rho \rightarrow \infty$  :

$$B(\rho + \Delta \rho \rightarrow \infty) = B(\forall \rho > a) \implies \boxed{\vec{B} = \vec{0} \text{ à l'extérieur du solénoïde}}$$

◇ CAS D) :

On choisit enfin de placer  $\Gamma$  à cheval sur l'intérieur et l'extérieur du solénoïde :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I L = B(\forall \rho < a)L - \underbrace{B(\forall \rho > a)L}_{=0} \implies \boxed{B(\forall \rho < a) = \mu_0 n I}$$

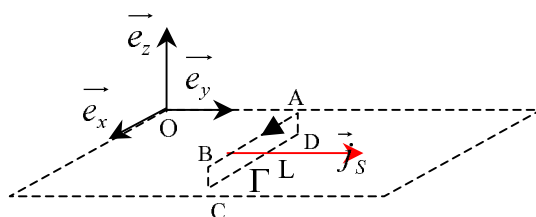
**Bilan :**

$$\boxed{\vec{B}_{\text{solénoïde}} = \mu_0 n I \cdot \vec{e}_z}$$

#### d - La nappe de courant (hors programme $\rightarrow$ optionnel)

On considère un plan supposé infini parcouru par un courant de densité surfacique homogène :

$$\vec{J}_s = J_s \times \vec{e}_y$$



**Q ?** : Déterminer toutes les caractéristiques du champ magnétique au dessus et en dessous du plan de courant. Que constate-t-on ?

**RÉPONSE :**

- SYMÉTRIES :  $(yOz) = \Pi^+ \implies \vec{B}(M) \perp (yOz)$  soit  $\boxed{\vec{B}(M) \parallel \vec{e}_x \quad \forall M}$
- INVARIANCES : translation /x et /y  $\implies \boxed{\vec{B} = B(z)\vec{e}_x}$
- ANTISYMMÉTRIE DE  $\vec{B}$  : du fait de son caractère antisymétrique par rapport à tout plan de symétrie de la distribution de courant on a pour le champ  $\vec{B}$  (on dit alors que ce dernier est un pseudo-vecteur) :

$(xOy) \equiv \Pi^+$  donc  $\vec{B}_{\parallel}(z) = -\vec{B}_{\parallel}(-z)$  or dans le cas de notre plan de courant, seule existe la composante parallèle avec  $\vec{B}_{\parallel} = B(z)\vec{e}_x = \vec{B}$   
donc :

$$\boxed{\vec{B}(z) = -\vec{B}(-z)}$$

- APPLICATION DU THÉORÈME D'AMPÈRE :  
Compte tenu de la topographie du champ, on choisit un contour  $\Gamma$  rectangulaire ABCD "à cheval" sur la nappe de courant (cf schéma). On applique alors le théorème d'Ampère "2D" :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_L \vec{J}_S \cdot \underbrace{\vec{n}}_{=\vec{e}_y} dl = \mu_0 \int_L J_S dl = \mu_0 J_S L$$

$$\text{donc : } \int_A^B \vec{B}(z > 0) \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\rightarrow 0} + \int_C^D \underbrace{\vec{B}(-z < 0)}_{=-\vec{B}(z > 0)} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\rightarrow 0} = \mu_0 J_S L$$

$$\text{soit : } B(z > 0)\vec{e}_x \cdot L\vec{e}_x - B(z > 0)\vec{e}_x \cdot (-L\vec{e}_x) = 2B(z > 0)L = \mu_0 J_S L$$

$$\text{et enfin : } \boxed{B(z > 0) = \mu_0 \frac{J_S}{2}}$$

#### Bilan :

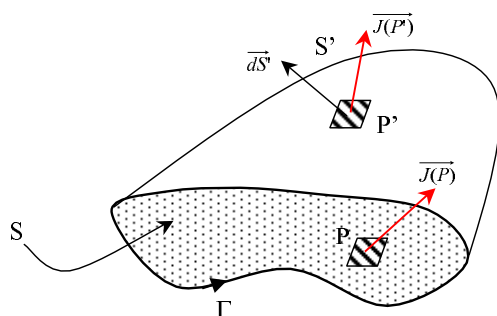
$$\begin{cases} \vec{B}(z > 0) = \mu_0 \frac{J_S}{2} \vec{e}_x \\ \vec{B}(z < 0) = -\mu_0 \frac{J_S}{2} \vec{e}_x \end{cases}$$

On constate par ailleurs une discontinuité du champ magnétique à la traversée de la nappe de courant. Ceci constitue une propriété essentielle que nous détaillerons plus tard dans le cours sur les équations de Maxwell.

#### IV.4 Traduction locale : Equation de Maxwell-Ampère statique

Reprenons l'expression du théorème d'Ampère dans le cas d'une distribution volumique; en utilisant la relation de Stokes-Ampère on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S/\Gamma} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \underbrace{\iint_{S/\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}}_{=I_{\text{enlacé}}}$$



on en tire la relation générale :

$$\iint_{S/\Gamma} [\vec{rot} B - \mu_0 \vec{J}] \cdot d\vec{S}$$

qui, valable  $\forall$   $\underbrace{S/\Gamma}_{\text{surface } S \text{ s'appuyant sur } \Gamma}$ , permet de dégager la propriété suivante :

#### Propriété IV-2: FORME LOCALE DU THÉORÈME D'AMPÈRE

**En régime permanent**, le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  est lié à ses sources  $\vec{J}(M)$  par la relation locale (forme locale du théorème d'Ampère) suivante :

$$\vec{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \quad (\text{XIII.10})$$

#### Remarque IV-2:

Cette relation, à caractère fondamental<sup>a</sup> contient le vecteur densité volumique de courant  $\vec{J}$  et n'a donc de sens que dans le cas des distributions volumiques de courant, les cas filiformes et surfaciques n'étant que des modèles limites.

<sup>a</sup>. nous verrons dans le prochain chapitre qu'elle est l'une des 4 équations fondamentales de l'électromagnétisme (écrite ici en régime statique)

**EXEMPLE D'EXPLOITATION** : détermination par analyse locale du champ magnétique produit par un tube infini de courant.

On rappelle que  $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{e}_\theta$  i.e.  $\begin{cases} B_r = 0 \\ B_z = 0 \end{cases}$

- Pour  $r < a$  :

$$\vec{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho B_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} = \mu_0 J_0 \vec{e}_z$$

soit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\theta)}{\partial \rho} = \mu_0 J_0$$

qui intégré donne :

$$B_\theta = B(\rho) = \mu_0 J_0 \cdot \frac{\rho}{2} + \frac{K_1}{r}$$

En outre, le champ étant nul sur l'axe (le champ est perpendiculaire à deux plans passant par l'axe donc nécessairement nul !), on a  $K_1 = 0$

donc :

$$\boxed{\vec{B}(\rho < a) = \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2} \cdot \vec{e}_\theta}$$

- Pour  $\rho > a$  :

$$\vec{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\theta)}{\partial \rho} = 0$$

soit après intégration :

$$B_\theta = B(\rho) = \frac{K_2}{\rho}$$

**NB** : on admet pour une distribution volumique la continuité du champ en  $\rho = a$  :  $B(\rho = a^-) = B(\rho = a^+) \Rightarrow K_2 = \frac{\mu_0 J_0}{2} \cdot a^2$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(\rho > a) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2 \rho} \cdot \vec{e}_\theta}$$

## V Analyse topographique du champ magnétique

### V.1 Lignes et tubes de champ

#### a - Définitions

Les deux définitions qui suivent sont totalement identiques à celles formulées pour le champ électrostatique.

Considérons un champ magnétostatique  $\vec{B}$ . On appelle **ligne de champ**, la courbe tangente en tout point au vecteur champ magnétostatique.

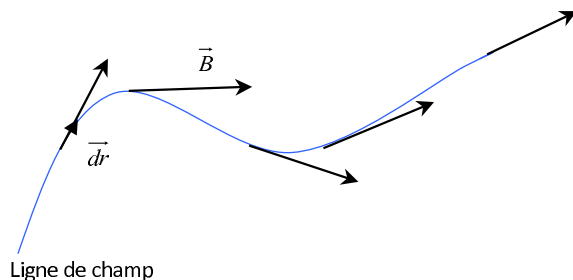


FIGURE XIII.15 – Ligne de champ magnétostatique

On appelle tube de champ un faisceau de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé. Les lignes de champ sont tangentes à la surface d'un tube de champ, et donc perpendiculaires au vecteur de la surface latérale :

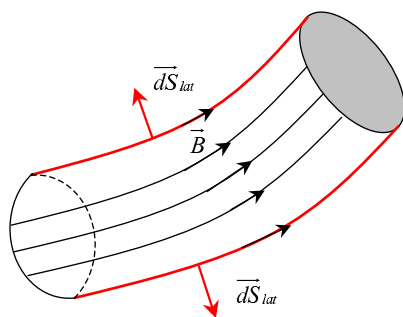


FIGURE XIII.16 – Tube de champ magnétostatique

### b - Orientation des lignes de champ magnétique

On rappelle que le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  est forcément sensible au choix d'orientation du trièdre (cf définition de la force magnétique de Lorentz qui contient un produit vectoriel) qui sera naturellement pris direct.

À RETENIR :

**Règle : le champ magnétostatique «tourne autour des courants sources» en sens trigonométrique.**

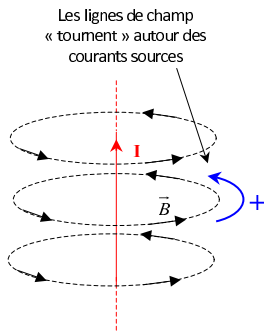
QUELQUES SITUATIONS SIMPLES :

## V.2 Interprétation des positions relatives des lignes de champs - resserrement ou évasement

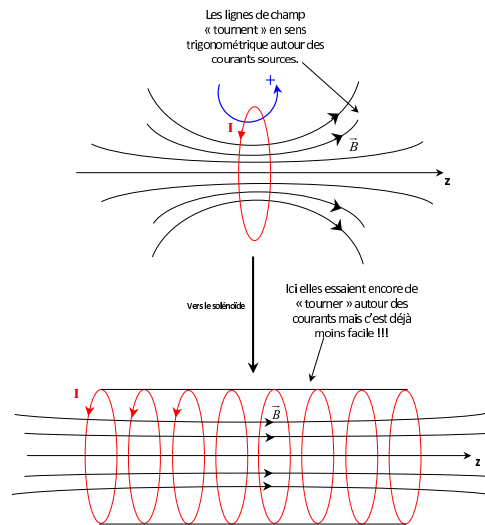
Envisageons maintenant un tube de champ dont les lignes de champ se resserrent :

Appelons  $\Sigma$  la surface fermée du tube de champ telle que  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$ .

• Fil rectiligne infini



• Spire circulaire → solénoïde



• Plan infini

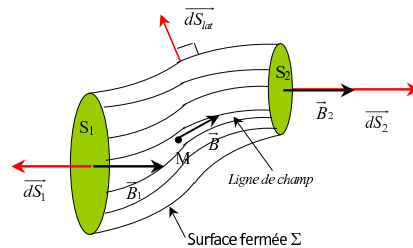
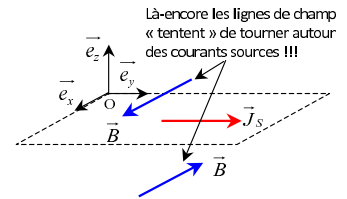


FIGURE XIII.17 – Tube de champ resserré : les lignes de champ se resserrent

Le flux du champ magnétique étant nul à travers toute surface fermée :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{-\iint_{S_1} B_1 \times dS_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{\iint_{S_2} B_2 \times dS_2} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{lat}}_{=0} = 0$$

qui donne en supposant le champ constant sur chaque base du tube :  $B_2 = B_1 \times \frac{S_1}{S_2} \implies \boxed{B_2 > B_1}$

A RETENIR :

**Propriété V-1:** POSITION RELATIVE DES LIGNES DE CHAMP

- Un resserrement des lignes de champ correspond à une augmentation de l'intensité du champ électrostatique.
- Un évasement des lignes de champ correspond à une diminution de l'intensité du champ électrostatique.

### V.3 Quelques cartes de champs magnétiques

QUELQUES EXEMPLES DE LIGNES DE CHAMP MAGNÉTIQUE (2D) DE DISTRIBUTIONS DE COURANT CLASSIQUES :

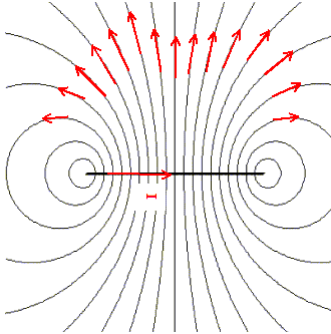


FIGURE XIII.18 – Topographie des lignes de champ magnétique d'une spire

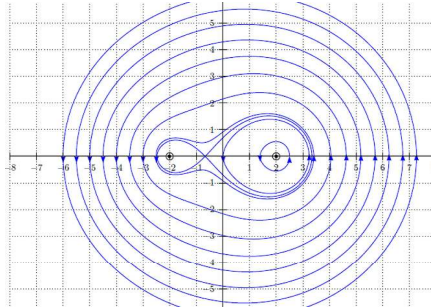


FIGURE XIII.19 – Topographie des lignes de champ magnétique de deux fils ( $I_1 \neq I_2$ )

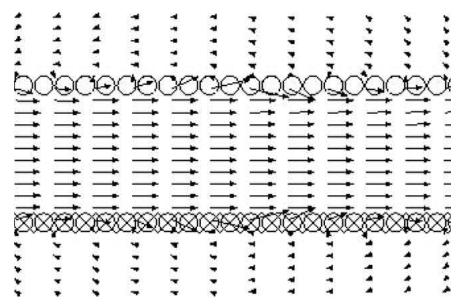


FIGURE XIII.20 – Topographie des lignes de champ magnétique d'un solénoïde

QUELQUES INTERPRÉTATIONS : en live !