Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \dots .$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2. Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction S_1*

a) Etudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions S_α* ($\alpha > 0$)

a) Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2\, e^{-x\,n^\alpha}$.
En déduire la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]\,0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

c) A l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que $\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1$.

d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0?

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall\, x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \dots .$$

4°) *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0*

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^2}\, \mathrm{d}t \leq e^{-x n^2}.$$

b) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

c) Retrouver alors $\lim_{x \to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5°) *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$*

a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n}.$$

b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

6°) *Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$ pour $x > 0$*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-x t^2}\, \mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

d) Préciser une valeur approchée de $S_2(1)$ à 10^{-7} près.

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{\alpha-1}\, \mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

a) Pour quelles valeurs de α les intégrales $\int_0^1 e^{-u}\, u^{\alpha-1}\, \mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}\, u^{\alpha-1}\, \mathrm{d}u$ convergent-elles?
En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha + 1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = x\,t^{\alpha}$.

Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?

8°) *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$)*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leq S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \leq 1.$$

b) Retrouver $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

9°) *Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$)*

a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,dt = \frac{1}{\alpha\,x^{1/\alpha}}\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du.$$

b) Etablir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du = e^{-x}\,x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}\,x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,dt$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

10°) *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)*

a) Etablir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^{\alpha}} \leq \int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,dt.$$

b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

♣◇♡♠