TD n°8 Electrostatique: Electrostatique 2: lois locales - analogie avec la gravitation

NB: pour cette série d'exercices, on pourra si nécessaire exploiter le formulaire donnant les expressions des opérateurs vectoriels dans les différents systèmes de coordonnées. Celui-ci est disponible sur le site MPI/MPI* à l'adresse suivante:

http://mp3montaignebdx.legtux.org/formulaires-utiles/

Lois locale de l'électrostatique

EXERCICE N°1: Solution colloïdale

Les colloïdes sont des particules, généralement sphériques (à l'échelle mésoscopique au moins), solides ou liquides, dispersées dans un milieu fluide. Leur taille, de l'ordre du micromètre est intermédiaire entre la taille atomique et les distances macroscopiques. Ces particules sont chargées en surface et généralement, leur répulsion électrostatique assure une stabilité remarquable à leur suspension dans un fluide. Cependant, dans le cas où le solvant est ionisé, des ions de charges opposées s'agglomèrent autour des colloïdes.

Pour déterminer l'expression du potentiel électrostatique au voisinage d'un colloïde, nous utilisons le modèle suivant: nous assimilons le colloïde à une sphère de rayon a portant une charge q positive uniformément répartie. Le solvant est constitué d'une solutions d'ions positifs et d'ions négatifs de même valence z, c'est à dire de charges respectives $+ze$ et $-ze$. La permittivité électrique du solvant est prise égale à celle du vide et le problème présente une symétrie sphérique par rapport au centre du colloïde.

On suppose que l'équilibre thermique est réalisé. Les densités d'ions positifs et négatifs, à une distance $r > a$ du centre du colloïde, où le potentiel électrostatique est $V(r)$ sont données par:

$$\begin{cases} n_+ = n_0 \cdot e^{-\dfrac{zeV(r)}{k_B T}} \\ n_- = n_0 \cdot e^{+\dfrac{zeV(r)}{k_B T}} \end{cases}$$

expressions dans lesquelles n_0 désigne le nombre d'ions positifs par unité de volume dans l'électrolyte loin du colloïde, où l'on suppose le potentiel nul. On rappelle l'expression du laplacien pour une fonction radiale uniquement $f(r)$ en coordonnées sphériques:

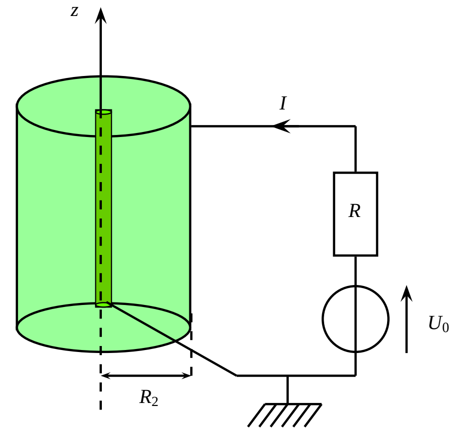
$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf)$$

❶ Etablir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$.

❷ On suppose que le potentiel électrique V_0 à la surface du colloïde est suffisamment faible devant $\frac{k_B T}{e}$. Résoudre alors l'équation différentielle précédente en posant $V(r) = \dfrac{U(r)}{r}$ et $\lambda^2 = \dfrac{\epsilon_0 k_B T}{2 n_0 z^2 e^2}$. On montrera finalement que le potentiel s'écrit:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{e^{-\frac{r-a}{\lambda}}}{r}$$

EXERCICE N°2: Principe d'une diode à vide



Une diode à vide est constituée de deux armatures métalliques cylindriques de même axe (Oz) et de hauteur h. L'armature intérieure est un filament de rayon R_1 négligeable devant le rayon R_2 de la seconde armature. Ce filament chauffé est susceptible d'émettre des électrons (de charge $-e$ et de masse m) avec une vitesse initiale négligeable. Alimentée par un générateur de $f.e.m.$ U_0 ($U_0 > 0$), la diode est traversée par un courant I_0 dont le sens est indiqué sur le schéma ci-contre.

L'armature intérieure est au potentiel nul, et l'on s'intéresse au régime permanent.

Le mouvement des électrons vers l'armature extérieure de la diode crée une charge d'espace $\rho(r)$ à l'intérieur de la diode et une densité volumique de courant définie par le vecteur radial $\overrightarrow{j}(r) = j(r)\cdot\vec{e_r}$, où r désigne la coordonnées radiale cylindrique (on négligera les «effets de bord» liés à la hauteur h finie).

❶ Quelle est l'expression de la densité volumique de courant électrique $j(r)$ en fonction du courant I?

❷ Exprimer la valeur $v(r)$ de la vitesse des électrons en fonction du potentiel $V(r)$.

❸ En déduire l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$ à l'intérieur de la diode.

❹ Montrer qu'une solution de la forme $V(r) = A\cdot r^{\alpha}$ est compatible avec ce problème. Déterminer les constantes A et α. En désignant par $U = V(R_2) - V(R_1) = V(R_2)$ la différence de potentiel entre les armatures, tracer la caractéristique $I = f(U)$ de ce dipôle.

Exercice n°3: Utilisation du théorème de Gauss sous sa forme locale

On considère un cylindre de diélectrique (donc non conducteur) de longueur infinie, de rayon R, chargé avec la densité volumique de charge constante ρ_0. On se propose dans cet exercice de déterminer le champ électrostatique crée en tout point de l'espace par cette distribution à l'aide de la forme locale du théorème de Gauss.

On rappelle l'expression de la divergence du vecteur $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}$ dans le système de coordonnées cylindriques:

$$div\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

❶ Déterminer par des considérations de symétrie, l'orientation ainsi que la, ou les variables du champ.

❷ Montrer à l'aide de la forme locale du théorème de Gauss, que la norme du champ **à l'extérieur du cylindre** s'écrit:

$$E(r > R) = \frac{K}{r} \quad \text{avec } K \text{ constante que l'on déterminera ultérieurement}$$

❸ Montrer de même à l'aide de la forme locale du théroème de Gauss, que la norme du champ **à l'intérieur du cylindre** est:

$$E(r < R) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}r$$

Attention: on résoudra l'équation différentielle en utilisant la technique de variation de la constante car les coefficients n'étant pas constants, il est incorrect de rechercher directement la solution particulière.

❹ Y-a-t-il discontinuité du champ électrique à la traversée de la surface du cylindre. Justifier. Déduire de votre réponse l'expression de la constante K introduite dans la réponse à la question ❸.

Exercice n°4: Boule métallique en rotation

Une boule conductrice tourne à la vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe $[Oz)$ passant par son centre O, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Comme tout conducteur en équilibre, la boule au repos possède une densité de charge nulle.

Les électrons de conduction $(-e, m)$ sont les seules charges mobiles du métal et on admet que ces électrons sont en équilibre relatif par rapport à la boule. On considère en outre que le métal est de permittivité diélectrique ϵ_0.

On désire déterminer dans $\mathcal{R}$, le champ et le potentiel crées par une telle distribution ainsi que les densités volumique ρ et surfacique σ de charges dans et sur la boule.

On pose $\alpha = \dfrac{m\Omega^2}{e}$ et on donne l'opérateur divergence en cordonnées sphériques:

$$div\left(\overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi)\right)$$

❶ Déterminer le champ électrique à l'intérieur de la boule en coordonnées sphériques. On se place dans le cadre non relativiste.

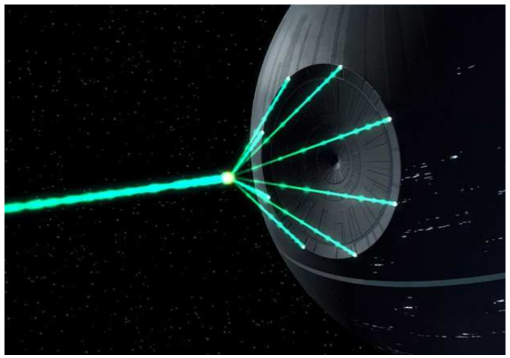
❷ En déduire la densité volumique de charge ρ.

❸ Quelle est la charge totale volumique Q_v et la charge totale surfacique Q_s de la boule? Peut-on en déduire σ simplement? Pourquoi?

Analogie électrostatique ↔ gravitation

Exercice n°5: Destruction d'Alderaan par l'Etoile Noire

Dans cet exercice, on cherche à déterminer l'énergie nécessaire pour désintégrer une planète.



❶ On considère une boule de rayon r. Quel volume faut-il lui apporter pour augmenter son rayon de dr? Quelle masse dm du matériau ce volume représente-t-il?

❷ On considère un système formé de la masse dm à l'infini de la boule r. Exprimez l'énergie potentielle du système en fonction de $E_p(r)$, énergie potentielle d'une boule de rayon r et de masse volumique ρ.

❸ On répartit à présent la masse dm sur la surface de la boule. Déterminer l'expression de $E_p(r+dr)$ en fonction de $E_p(r)$, et de dr. En déduire une équation différentielle vérifiée par $E_p(r)$. En déduire l'énergie potentielle de la boule.

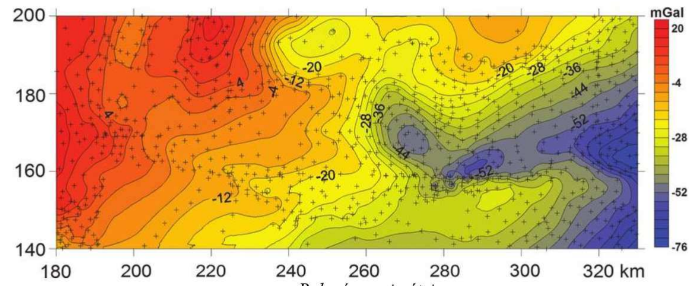
❹ Calculer l'énergie nécessaire pour disloquer une planète semblable à la Terre.

❺ Dans l'épisode IV de Stars Wars (un nouvel espoir), on peut estimer l'énergie libérée par l'Etoile Noire (Death Star I) pour détruire Alderaan (qu'on supposera semblable à la Terre) à environ $10^{37}\ J$. Comment expliquer la différence avec le résultat précédent.

Exercice n°6: Principe de la gravimétrie

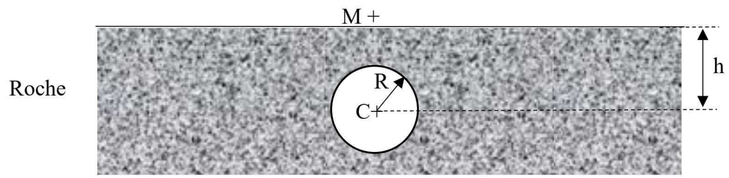
Pour détecter des cavités ou des nappes souterraines, on utilise des techniques gravimétriques: on mesure très précisément en surface le champ magnétique local à l'aide d'un gravimètre afin de détecter l'anomalie gravitationnelle. L'unité de mesure utilisée est le Gal: $1\ Gal = 1\ cm.s^{-2}$. La résolution usuelle est environ $10\ \mu Gal$.

Gravimètre



Relevé gravimétrique.

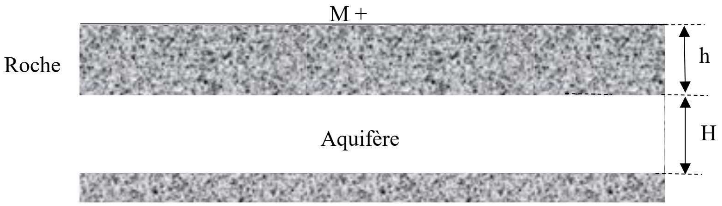
1. On s'intéresse à une anomalie gravitationnelle de type cavité sphérique de rayon R et dont le centre C se trouve à la profondeur h. La mesure gravimétrique se fait à la surface (en M). La masse volumique de la roche est $\rho = 2,6.10^3\ kg.m^{-3}$.



   a· Quel est le rayon minimal R_m détectable d'une cavité située à $10\ m$ de profondeur?

   b· Reprendre cette question dans le cas où la cavité est remplie d'eau.

2. L'anomalie gravitationnelle est une nappe d'eau (*un aquifère*) d'épaisseur H et de grandes dimensions par ailleurs.



Quelle est l'épaisseur minimale H_m détectable d'un aquifère situé à $h = 1\ km$ de profondeur?

Données: Constante de gravitation $G = 6,67.10^{-11}\ m^3.s^{-2}.kg^{-1}$

Exercice n°7: Résolution de Problème - Tom, Popov, et l'astéroide

Dans une période d'austérité budgétaire, les professeurs Tom et Popov ont mis leurs moyens en commun pour explorer un astéroïde inconnu, que l'on croit être celui du Petit Prince, ou la planète des Gibis.

Lorsque leur vaisseau s'est immobilisé sur le sol, Tom ouvre un hublot et découvre un astre parfaitement sphérique fait d'un métal très pur, très dense et parfaitement poli. Il décident de mettre pied à «Terre»; mais la fatalité a voulu que le vaisseau se pose juste au dessus d'un puits parfaitement lisse qui traverse entièrement l'astéroïde et dans lequel Tom se trouve précipité (cf figure 1 et 2).

Popov qui descendait au même instant, veut éviter semblable mésaventure: il se projette violemment sur le côté..., avec une vitesse telle qu'il est satellisé au ras du sol (cf figure 1) dans le même plan équatorial que Tom!

Mais la Providence veillait: Tom et Popov ont chacun gardé sur eux le petit échiquier portatif sur lequel, depuis plusieurs années, il se livrent une impitoyable partie d'échecs.

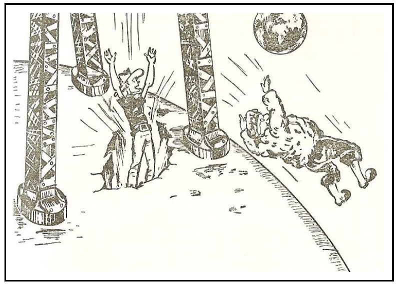


Figure 1: Tom est précipité dans un puits, Popov est satellisé

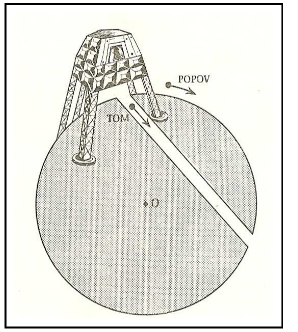


Figure 2: Les trajectoires de Tom et de Popov sont dans le même plan équatorial.

Vont-ils pouvoir terminer cette passionnante partie, et si oui, de quelle durée de réflexion minimale disposent-ils avant chaque coup?

<u>Données numériques</u>: nous n'avons pas pu avoir d'indications précises sur la masse et le rayon de l'astéroïde, mais le métal qui le constitue paraît être du tantale, dont la masse volumique est $\rho = 16,6\ g.cm^{-3}$.La constante de gravitation est $G = 6,67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$