TD5 - Autour des automates

Questions diverses

Question 1. Soit $\mathcal{A}$ un NFA. Comment déterminer une expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate ?

Question 2. Montrer que tout langage fini est régulier.

Question 3. Étant donnés deux langages A et B, on définit :

$$\text{avoid}(A, B) = \{w \in A \mid w \text{ ne contient aucune sous-chaîne dans } B\}$$

Si A et B sont réguliers, prouver que avoid(A, B) est également régulier.

Question 4. Étant donnés deux langages A and B sur un alphabet Σ, on définit :

$$A/B = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in B \text{ tel que } wx \in A\}$$

Si A et B sont réguliers, prouver que A/B est également régulier.

Question 5. Soit L un langage sur un alphabet Σ. On définit :

$$\text{half}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ tel que } wy \in L, |w| = |y|\}$$

Si L est régulier, prouver que half(L) est également régulier.

Question 6. Si L est un langage, combien de DFA admet-il ?

Question 7. Soit l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ et le langage :

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est une représentation ternaire d'un entier multiple de } 5\}$$

Construire un DFA qui reconnaît L.

Question 8. Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, on considère l'expression régulière $a^*b^*c^*$. Construire *directement* un DFA complet qui reconnaît le langage dénoté par cette expression régulière. Par *directement*, on entend *sans passer* par l'intermédiaire d'un NFA ou d'un ε-NFA et d'une déterminisation.

Question 9. Soit l'alphabet $\Sigma = \{0\}$. Combien de langages réguliers définis sur cet alphabet unaire, associés à des DFA n'ayant que trois états, est-il possible de construire ?

Question 10. Soit $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) un DFA ayant n_1 états et f_1 états acceptants (resp. n_2 états et f_2 états acceptants). Soit $\mathcal{A}$ l'automate tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ où $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ désigne le langage accepté par l'automate $\mathcal{A}$. Combien d'états acceptants $\mathcal{A}$ admet-il ?

Question 11. Sur un alphabet Σ, on considère un langage *régulier* R et un langage *non nécessairement régulier* L. Montrer que R/L est régulier sachant :

$$R/L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L \text{ tel que } wx \in R\}$$

Question 12. Soit Σ un alphabet et $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ un morphisme tel que pour tous mots $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de Σ^* :

$$h(w_1 w_2 \ldots w_n) = h(w_1)h(w_2) \ldots h(w_n)$$

Si L est un langage, on note $h(L) = \{h(w), w \in L\}$. Si L est régulier, prouver que $h(L)$ est également régulier.

Question 13. Soit Σ et Δ deux alphabets et h un morphisme de Σ^* dans Δ^* défini par $h(\varepsilon) = \varepsilon$ et pour tous mots u et v de Σ^*, $h(uv) = h(u)h(v)$. Soit L un langage sur Δ. On définit l'homomorphisme inverse h^{-1} de L par :

$$h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L\}$$

Prouver que les langages réguliers sont clos par homomorphisme inverse.

Question 14. Si $L \cap R$ est non régulier et R est régulier, que dire de L ? Justifier votre réponse.

Question 15. Si L est non régulier, que dire de son complémentaire ? Justifier votre réponse.

Question 16. Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, on considère le langage : $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i < j\}$. Montrer que L n'est pas régulier.

Question 17. Soit L_1 le langage défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ par : $L_1 = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i < j\}$.
Soit L_2 le langage défini sur l'alphabet $\Delta = \{c, d, e\}$ par : $L_2 = \{c^n d^k e^{n+1} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$.
En considérant le morphisme $h : \Delta^* \to \Sigma^*$ tel que $h(c) = a$, $h(d) = b$, $h(e) = b$, montrer que L_2 n'est pas régulier.
Cette démonstration est dite par réduction du langage L_2 au langage L_1.

Vrai ou faux ?

Pour chaque question, justifier votre réponse.

Question 18. L'intersection de deux langages non réguliers est *toujours* un langage non régulier. □ V - □ F

Question 19. Le complémentaire d'un langage non régulier est *toujours* un langage non régulier. □ V - □ F

Question 20. L'union de deux langages réguliers est *toujours* un langage régulier. □ V - □ F

Question 21. L'intersection de deux langages réguliers est *toujours* un langage régulier. □ V - □ F

Question 22. La classe des langages non réguliers est close par complémentation. □ V - □ F

Question 23. Si le complémentaire de L est non régulier alors L est *forcément* non régulier. □ V - □ F

Question 24. La classe des langages non réguliers est close par union et intersection. □ V - □ F

Question 25. La classe des langages réguliers est closes par union, intersection et complémentation. □ V - □ F

Question 26. Si R est régulier et L non régulier alors $R \cap L$ *peut donner* un langage régulier. □ V - □ F

Question 27. Si R est régulier et L non régulier alors $R \cap L$ *peut donner* un langage non régulier. □ V - □ F

Question 28. Si R est régulier et L non régulier alors $R \cup L$ est *toujours* un langage régulier. □ V - □ F

Question 29. Si R est régulier et si $R \cap L$ est non régulier alors L est *forcément* non régulier. □ V - □ F

Question 30. Si R est régulier et si $\overline{R \cap L}$ est non régulier alors L est *forcément* non régulier. □ V - □ F