1. **Banque CCINP 2024 : 96 (cours fonctions génératrices)**
2. **Banque CCINP 2024 : 99 (Cours, Bienaymé-Tchebichev)**
3. **Banque CCINP 2024 : 108 (facile, lois à déterminer)**
4. **Banque CCINP 2024 : 103 (cours sur Poisson)**
5. **[CCINP](égalité de Wald, voir cours)**

   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, T une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1]\!]k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $(X_1, \cdots, X_k)$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Toutes les X_i ont la même loi et sont mutuellement indépendantes entre elles et de T.

   Enfin, on pose la variable aléatoire Y définie par $Y(\emptyset) = \sum\limits_{i=1}^{T(\emptyset)} X_i(\emptyset)$.

   (a) Montrer que si l'espérance des X_i existe, alors celle de Y aussi.

   (b) Exprimer alors $\mathrm{E}(Y)$ en fonction de $\mathrm{E}(T)$ et $\mathrm{E}(X_1)$.
6. **[Mines] (classique et complet)**

   Soit $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

   (a) Donner la loi de Y_n, son espérance, sa variance.

   (b) Pour quels couples (i, j) les variables aléatoires Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

   (c) Calculer $\mathrm{E}(Y_n Y_m)$ et $\mathrm{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right)$.

   (d) Montrer que : $\exists C \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{V}(Z_n) \leqslant Cn$.

   (e) En déduire que : $\forall \epsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p^2\right| \geqslant \epsilon\right) = 0$.
7. **[CCP] (Très complet)**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on prend une urne avec n boules blanches et n boules noires.
   Si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne.
   Si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne et on met une boule noire à la place.
   On note X_p le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du p-ième tirage.

   (a) Quelle est la loi de X_1 ? De X_2 ?

   (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(X_k = n)$.

   (c) Montrer que : $\forall p \geqslant 1,\ \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \dfrac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p = k) + \dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$.

   (d) On note $G_p(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X_p = k)$. Montrer que G_p est polynomiale.

   (e) Montrer que $G_{p+1}(t) = G_p(t) + \dfrac{1-t}{2n} G_p'(t)$. Déterminer $\mathrm{E}(X_{p+1})$ en fonction de $\mathrm{E}(X_p)$, puis l'expression explicite de $\mathrm{E}(X_p)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(X_n)}{n}$.
8. **[Mines] (théorique)**

   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X > n-1) > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \mathbb{P}(X = n | X > n-1)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1[$ et $\mathbb{P}(X > n-1) = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1 - u_k)$.

   (b) Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Réciproquement, soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \in [0;1[$ et telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge.

   (c) Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait la relation $\mathbb{P}(Y > n-1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = n | Y > n-1) = v_n$.