

# XVII

## Ondes électromagnétiques dans le vide

*Physicien allemand (oncle de Gustav Hertz, lauréat du prix Nobel de physique en 1925) né à Hambourg et mort à Bonn, Heinrich Rudolph Hertz, après des études d'ingénieur, abandonne cette branche pour la physique, qu'il étudie à Berlin sous la direction de Hermann von Helmholtz. Nommé privatdozent à Kiel (1883), Hertz y commence l'étude de la théorie de Maxwell et, devenu professeur à l'École polytechnique de Karlsruhe, il démontre alors expérimentalement l'existence des ondes électromagnétiques.*  
HEINRICH RUDOLPH HERTZ  
(1857-1894)

### PLAN DU CHAPITRE

<b>I</b>	<b>Equation de D'Alembert 1D (EDA 1D)</b>	<b>3</b>
I.1	Une vieille connaissance de MPII : l'onde transverse sur une corde vibrante	3
	a - Modélisation et équation dynamique	3
	b - La clé de la propagation : le couplage!	5
I.2	Ondes transverse et longitudinale dans un câble coaxial	6
	a - Modèle à constantes réparties - équations couplées	6
	b - Equation de propagation.	8
I.3	Solution de l'EDA 1D	8
	a - Rappel : groupement de variables spatio-temporel 1D	8
	b - Solution générale de l'EDA 1D : superposition d'ondes progressives	9
<b>II</b>	<b>Equation de d'Alembert 3D des ondes électromagnétiques dans le vide</b>	<b>10</b>
II.1	Rappels	10

II.2	Solutions en ondes planes progressives . . . . .	10
	a - Définition de l'onde plane . . . . .	10
	b - Ecriture de l'EDA pour une onde plane d'axe de propagation connu -solutions	11
II.3	Solution en ondes planes progressives harmoniques (OPPH) - intérêt . . . . .	12
	a - Définition et caractéristiques . . . . .	12
	b - Caractère non réaliste de l'OPPH - intérêt du modèle . . . . .	13
	c - Spectre électromagnétique . . . . .	14
<b>III</b>	<b>Etude détaillée des OPPH . . . . .</b>	<b>14</b>
III.1	Vitesse de phase . . . . .	14
III.2	Caractère non "dispersif" du vide . . . . .	15
III.3	Structure des OPPH . . . . .	16
	a - Préliminaire : opérateurs différentiels en notation complexe . . . . .	16
	b - Transversalité - relations de structure . . . . .	17
III.4	Polarisation des OPPH . . . . .	17
	a - Définition . . . . .	18
	b - Etude générale . . . . .	18
	c - Intérêt des polarisations rectiligne et circulaire . . . . .	20
<b>IV</b>	<b>Energétique des ondes électromagnétiques . . . . .</b>	<b>20</b>
IV.1	Vecteur de Poynting d'une OPPH . . . . .	20
IV.2	Densité volumique d'énergie d'une OPPH . . . . .	21
IV.3	Vitesse de transport de l'énergie d'une OEM . . . . .	22
IV.4	Retour sur la notation complexe : calcul des valeurs moyennes de grandeurs énergétiques	22
IV.5	Retour sur la polarisation : polarisation par dichroïsme (Polaroïd) et loi de Malus (utile pour TP) . . . . .	23

---

## I Equation de D'Alembert 1D (EDA 1D)

### I.1 Une vieille connaissance de MP11 : l'onde transverse sur une corde vibrante

#### a - Modélisation et équation dynamique

On propose ici d'aborder les phénomènes propagatifs de manière très progressive et simple d'accès par l'exemple d'une corde sur laquelle se déplace une déformation.

En agitant l'une des extrémités d'une corde libre, on constate la propagation d'une « vague » le long de celle-ci. Il s'agit de la propagation d'une onde et non d'un déplacement de matière dans la direction de cette propagation.

IDÉE : la corde est un milieu continu  $\rightarrow$  on procède par une analyse locale, i.e. par étude du mouvement d'un petit tronçon de corde de longueur  $\delta l$ .

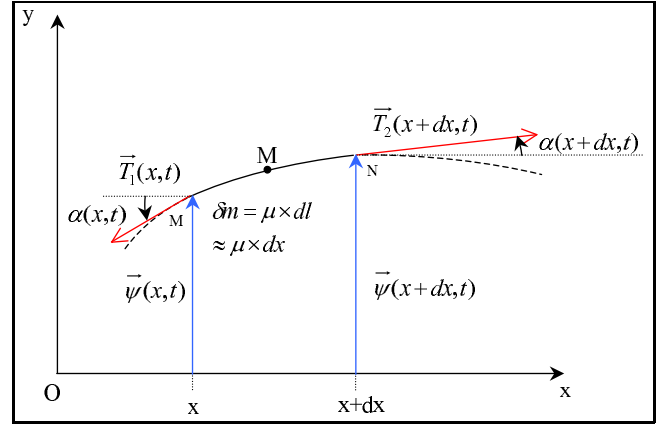


FIGURE XVII.1 – Propagation sur une corde vibrante

Considérons une déformation sur une corde de section très faible face à sa longueur, de masse volumique  $\rho_s$  ; on peut alors définir sa masse linéique  $\mu$  à partir de la masse du tronçon  $\delta m = \rho_s \cdot s \cdot \delta l = \mu \cdot \delta l$ . Le vecteur déplacement du tronçon  $\delta l$  de corde en  $x$  à  $t$  s'écrit à priori :

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \psi_x(x, t) \cdot \vec{e}_x + \psi_y(x, t) \cdot \vec{e}_y$$

#### HYPOTHÈSES D'UN MODÈLE SIMPLIFIÉ :

- La pesanteur est négligée.
- On suppose l'absence d'amortissement.
- La corde est supposée sans raideur i.e. inextensible, ce qui permet de négliger tout déplacement longitudinal :

$$\boxed{\vec{\psi}(x, t) = \psi(x, t) \cdot \vec{e}_y} \quad \text{avec } \psi_x(x, t) = 0$$

On appelle :  $\begin{cases} \vec{T}(x, t) & \text{tension exercée en } x \text{ par la partie droite de la corde sur la partie gauche} \\ T(x, t) & \text{la norme de celle-ci} \end{cases}$ .

donc les actions extérieures exercées sur la portion de corde de masse  $\delta m$  sont :  $\vec{T}(x+dx, t)$  (action de la partie à droite du tronçon) et  $-\vec{T}(x, t)$  (action de la partie à gauche du tronçon).

Appliquons enfin le principe fondamental de la dynamique à la portion de longueur  $\delta l$  :

$$\mu \delta l \times \vec{a} = \sum_i \vec{F}_{iext}(\delta m)$$

soit :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \cdot \vec{e}_y = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

Projetons cette relation sur  $[Ox]$  et  $[Oy]$  :

$$\text{EQUATION 1 : } \cdot \vec{e}_x : 0 = T_x(x+dx, t) - T_x(x, t) = T(x+dx, t) \times \cos[\alpha(x+dx, t)] - T(x, t) \times \cos[\alpha(x, t)] \quad (\text{XVII.1})$$

$$\text{EQUATION 2 : } \cdot \vec{e}_y : \mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = T_y(x+dx, t) - T_y(x, t) = T(x+dx, t) \times \sin[\alpha(x+dx, t)] - T(x, t) \times \sin[\alpha(x, t)] \quad (\text{XVII.2})$$

• CAS DE L'ÉQUATION 1 :

Dans la mesure où la corde est inextensible, son inflexion maximale est faible ; ainsi les angles étant très petits, on retiendra qu'à l'ordre 1 :

$$\cos[\alpha(x+dx, t)] \simeq \cos[\alpha(x, t)] \simeq 1$$

L'équation 1 conduit donc à :

$$T(x, t) \simeq T(x+dx, t) = T(t) = \underbrace{T_0}_{\text{au repos}} + T_c(t) \simeq T_0 \quad \text{avec } T_c(t) \text{ la faible correction engendrée par le passage de l'onde} \quad (\text{XVII.3})$$

On retiendra donc dans ce modèle, limité à une analyse au premier ordre, que la norme de la tension appliquée en chaque point est quasi constante le long de la corde à toute date  $t$ .

• CAS DE L'ÉQUATION 2 : Compte tenu de ce qui précède, la projection de la tension en tout point  $x$  sur l'axe  $[Oy]$  s'écrit :

$$T_y(x, t) = +T(t) \sin[\alpha(x, t)] \simeq T_0 \alpha(x, t)$$

et l'équation 2 conduit donc au premier ordre à :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = T_y(x+dx, t) - T_y(x, t) = T_0 \alpha(x+dx, t) - T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dx \quad (\text{XVII.4})$$

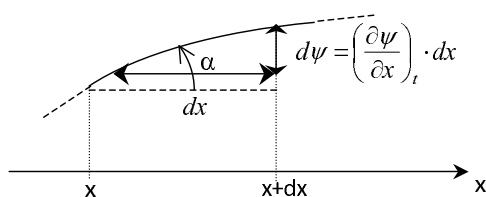


FIGURE XVII.2 – Déformation de la corde

En assimilant l'angle  $\alpha$  à sa tangente (développement au premier ordre car  $\alpha$  faible), il vient :

$$\tan(\alpha) = \left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right)_t \stackrel{\alpha \approx 0}{\simeq} \alpha = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}$$

L'équation 5 prend alors la forme suivante :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) \cdot dx \quad (\text{XVII.5})$$

En outre :

$$\delta l = \sqrt{dx^2 + d\psi^2} = \sqrt{dx^2 + \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t dx \right)^2} = dx \sqrt{1 + \underbrace{\left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t \right)^2}_{=\alpha^2 \Rightarrow \text{ordre 2}}} \simeq dx$$

Après simplification on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0} \quad (\text{XVII.6})$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE :  $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$  en  $m.s^{-2}$  et  $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$  en  $m^{-1}$  ainsi :  $\frac{T_0}{\mu}$  est homogène à une vitesse au carré  $m^2.s^{-2}$ .

**Posons alors la grandeur  $c$  homogène à une vitesse telle que :  $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$**

Cette équation appelée **équation de d'Alembert (EDA) 1D** sera donc notée plus généralement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0} \quad (\text{XVII.7})$$

NB : on montrera plus bas que la constante  $c$  correspond à la vitesse de déplacement de l'onde sur la corde.

### b - La clé de la propagation : le couplage !

L'équation de d'Alembert, qui décrit typiquement les phénomènes de propagation sans dissipation ni atténuation, se construit généralement à l'aide de deux équations aux dérivées partielles couplées. Dans le cas de la corde vibrante, les équations couplées utilisées étaient :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx$$

soit avec  $\delta l \simeq dx$  :

$$(e) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x}} \quad \text{1}^{\text{ère}} \text{ équation couplée } (T_y \text{ et } \psi)$$

et également

$$(e') \Leftrightarrow \boxed{T_y = T_0 \alpha = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad \text{2}^{\text{ème}} \text{ équation couplée } (T_y \text{ et } \psi)$$

En dérivant l'équation  $(e')$  par rapport à la variable  $x$ , il vient

$$\frac{\partial(e')}{\partial x} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

et en injectant ce résultats dans (e) :

$$(e) \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

**A RETENIR :** le couplage des deux équations précédentes qui permet de former l'EDA, équation de la propagation :

#### Remarque I-1: ALLURE DES ÉQUATIONS COUPLÉES

Bien que couplées, ces deux équations sont de nature assez différentes : l'une est du second ordre par rapport au temps et premier par rapport à l'espace, et la seconde ne présente qu'une dérivée par rapport à l'espace.

On peut "symétriser" ces équations couplées en introduisant la vitesse de déplacement  $v_y$  (nécessairement selon l'axe  $[Oy]$ ) avec  $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ . Ces dernières équations s'écriront alors

$$\begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} & (1) \\ \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

En combinant  $\frac{\partial(1)}{\partial t}$  et  $\frac{\partial(2)}{\partial x}$  on obtient l'EDA régissant également l'évolution de l'onde de vitesse  $v_y$  :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

De même une combinaison avec  $\frac{\partial(2)}{\partial t}$  et  $\frac{\partial(1)}{\partial x}$  permet de dégager l'EDA régissant  $T_y$  :

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} = 0$$

## I.2 Ondes transverse et longitudinale dans un câble coaxial

### a - Modèle à constantes réparties - équations couplées

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs, l'un central appelé coeur et l'autre périphérique appelé gaine. L'espace entre les deux conducteurs est rempli d'un diélectrique (c'est à dire un isolant) dont la permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  est généralement supérieure à 1 ( $\epsilon_r = 2,25$  dans le cas du câble coaxial que vous exploiterez en TP). On modélise une longueur élémentaire de câble  $dx$  par un circuit comportant une capacité élémentaire  $dC = \Gamma dx$  en parallèle entre le coeur et la gaine, ainsi qu'une inductance élémentaire  $dL = \Lambda dx$  en série.  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont respectivement la capacité et l'inductance linéique (constantes réparties). Cette modélisation donne donc le circuit équivalent suivant :

**NB :** on montre expérimentalement que l'espace interarmature est le siège de propagation d'une onde électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ).

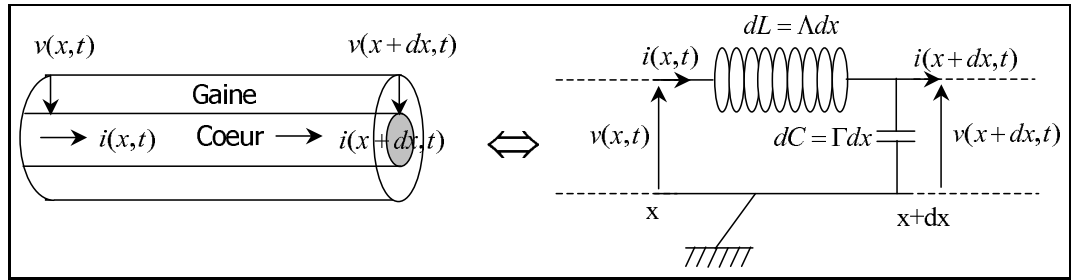


FIGURE XVII.3 – Modélisation d'un câble coaxial

Par ailleurs, on analyse ici un phénomène de propagation, c'est à dire **dans un contexte par définition hors ARQS**. En revanche, en prenant un petit tronçon de câble de longueur  $dx$ , ce dernier peut-être traité en ARQS à la condition que :

$$\frac{D}{c} \ll T \implies D \ll cT = \lambda \quad \text{soit} \quad dx \ll \lambda$$

IDÉE : on se place dans cette hypothèse  $\implies$  alors les lois de Kirschoff (lois des mailles et des noeuds) y seront applicables !

- LOI DES NOEUDS :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + dC \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t)$$

qui donne après développement au premier ordre en  $x$  :

$$i(x, t) = i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx + \Gamma dx \left[ \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x, t) dx \right] + \mathcal{O}(dx^2)$$

qui devient en ne retenant que le premier ordre :

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \simeq -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)} \quad (\text{XVII.8})$$

- LOIS DES MAILLES :

$$v(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) + v(x + dx, t)$$

Par développement au premier ordre, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)} \quad (\text{XVII.9})$$

#### Remarque I-2: ALLURE DES ÉQUATIONS COUPLÉES

Contrairement au cas de la corde vibrante, l'analyse par les lois fondamentales (lois des mailles et des noeuds) fournit directement des équations couplées "symétriques".

**b - Equation de propagation.**

Combinons ensuite les deux équations de couplage [XVII.8](#) et [XVII.9](#) :

$$\frac{\partial \text{XVII.8}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial \text{XVII.9}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

permet d'obtenir :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0} \quad \text{EDA!!! pour l'onde **longitudinale** de courant en posant } c^2 = \frac{1}{\Gamma \Lambda}$$

De même :

$$\frac{\partial \text{XVII.8}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \text{XVII.9}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

permet d'obtenir :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0} \quad \text{EDA!!! pour l'onde **transverse** de tension en posant } c^2 = \frac{1}{\Gamma \Lambda}$$

**I.3 Solution de l'EDA 1D****a - Rappel : groupement de variables spatio-temporel 1D**

On rappelle que lors de la propagation d'une onde 1D à la célérité  $c$ , les grandeurs  $u = t - \frac{x}{c}$  pour une onde progressive se déplaçant vers  $x$  croissant et  $v = t + \frac{x}{c}$  pour une onde progressive se déplaçant vers  $x$  décroissant sont **invariantes**.

On appelle  $u$  et  $v$  les **groupements de variables spatio-temporels**.

$$\Delta(u) = \Delta \left[ t - \frac{x}{c} \right] = 0 \quad \text{pour une onde se déplaçant vers les } x \text{ croissant}$$

$$\Delta(v) = \Delta \left[ t + \frac{x}{c} \right] = 0 \quad \text{pour une onde se déplaçant vers les } x \text{ décroissant}$$

A RETENIR :

**Propriété I-1: GROUPEMENTS DE VARIABLES : BONNES VARIABLES DU PROBLÈME !**

Nous adopterons les groupements de variables  $u = t - \frac{x}{c}$  et  $v = t + \frac{x}{c}$  comme «nouvelles variables pertinentes» pour l'analyse des phénomènes propagatifs 1D (selon l'axe  $[Ox]$ ).



### b - Solution générale de l'EDA 1D : superposition d'ondes progressives

Appelons  $\psi(x, t)$  la grandeur caractéristique se propageant selon  $x$  (cas 1D). L'équation de d'Alembert peut être facilement réécrite à l'aide d'un produit d'opérateurs différentiels du premier ordre :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi = \underbrace{\square}_{\text{opérateur d'Alembertien}} \psi = 0$$

IDÉE : tentons de reformuler l'équation de D'Alembert à l'aide des groupements de variables  $(u, v)$  ?

Ecrivons la différentielle de la fonction d'onde  $\psi = \psi(x, t) = \psi(u, v)$  :

$$d\psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t dx + \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x dt = \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)_v du + \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)_u dv$$

soit en divisant par  $\partial x$  (à  $t$  constant) et  $\partial t$  (à  $x$  constant) cette différentielle :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)_v \times \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_t + \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)_u \times \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_t = \frac{1}{c} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)_v \times \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_x + \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)_u \times \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_x = \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

soit en ne retenant que les opérateurs, on peut écrire dans une formulation symbolique très synthétique les transpositions suivantes (passage du jeu de variables  $(x, t)$  au jeu  $(u, v)$ ) :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_t = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_x = \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{cases}$$

La notation opératorielle de l'équation de d'Alembert devient avec les variables  $u$  et  $v$ , en injectant les expressions ci-dessus des dérivées partielles selon  $x$  et  $t$  :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi = -\frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \right] \times \left[ \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right] \psi$$

ainsi :

$$\boxed{\square \psi = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0} \quad (\text{XVII.10})$$

En intégrant par rapport à  $u$ , on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = G(v)$$

et une seconde intégration, par rapport à  $v$ , conduit finalement à :

$$\psi(u, v) = \underbrace{\int G(v) \cdot dv}_{=g(v)} + f(u) = f(u) + g(v)$$

**Propriété I-2: SOLUTION DE L'EDA**

La solution générale de l'EDA 1D

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

est donc une superposition de deux phénomènes ondulatoires progressifs à la célérité  $c$ , l'un se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants  $f(u = t - x/c)$  et l'autre dans le sens des  $x$  décroissants  $g(v = t + x/c)$  :

$$\psi(u, v) = \underbrace{f(u)}_{\text{onde } x \uparrow} + \underbrace{g(v)}_{\text{onde } x \downarrow}$$

**Exercice de cours: (I.3) - n° 1.** Montrer qu'une onde progressive seule  $f(u = t - x/c)$  se déplaçant vers  $x \nearrow$  est solution de l'EDA, et de même pour une onde  $g(u = t + x/c)$  se déplaçant vers  $x \searrow$ .

## II Equation de d'Alembert 3D des ondes électromagnétiques dans le vide

### II.1 Rappels

Nous avons dégagé à la fin du chapitre sur les équations de Maxwell l'équation différentielle régissant l'évolution des champs électrique et magnétique dans une région d'espace vide de courant et de charge :

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = \vec{0} \end{cases}$$

A RETENIR :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \vec{\Delta} \vec{B}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \text{Equation de d'Alembert à 3D}$$

A titre d'exemple, l'équation du champ  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  une fois développée en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

### II.2 Solutions en ondes planes progressives

#### a - Définition de l'onde plane

Parmi toutes les solutions possible de l'EDA, le cas particulier de l'**onde plane** présente une grande utilité (déjà rencontrée lors de l'étude de la corde vibrante ou du câble coaxial); on la définit techniquement ainsi :

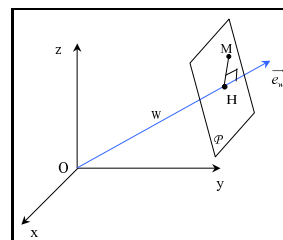


FIGURE XVII.4 – Mise en évidence du plan d'onde

- soit  $\vec{e}_w = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$  un vecteur unitaire pointant dans une direction fixe  $[O; w)$  de l'espace par rapport au référentiel d'étude.
- soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ .

La projection  $H$  du point  $M(x, y, z)$  sur l'axe  $[Ow)$  défini par le vecteur unitaire  $\vec{e}_w$  a donc pour abscisse  $w$  sur cet axe :

$$OH = \vec{r} \cdot \vec{e}_w = \alpha x + \beta y + \gamma z = w$$

On remarque sur la figure ci-contre que tous les points du plan  $\mathcal{P}$  perpendiculaire à la direction  $[Ow)$  ont la même abscisse  $w$  sur cet axe.

### Définition II-1: ONDE PLANE

Lorsqu'une onde ne dépend spatialement que d'une seule coordonnée attachée à un axe, ici  $w$ , ceci signifie que sa grandeur, par exemple le champ  $\vec{E}$  pour une OEM, possède la même valeur en tout point du plan  $\mathcal{P}$  perpendiculaire à la direction  $\vec{e}_w$  :

$$\vec{E}(w, t) \quad \text{ou} \quad \vec{B}(w, t)$$

L'onde est alors appelée *onde plane* et le plan  $\mathcal{P}$  est appelé *plan d'onde*.

### b - Ecriture de l'EDA pour une onde plane d'axe de propagation connu -solutions

PRÉLIMINAIRE : Modification de l'opérateur Laplacien

On cherche à réécrire l'opérateur  $\nabla$  puis  $\Delta$  en fonction de la seule variable d'espace  $w$  attaché à l'axe de propagation.

Considérons une fonction scalaire  $f(w, t)$  (ne dépendant spatialement que de la variable  $w$ ).

Le vecteur unitaire de l'axe  $[Ow)$  est  $\vec{e}_w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ , et l'on considère un point  $M(x, y, z)$  du plan d'onde d'abscisse  $w = \alpha x + \beta y + \gamma z$ . On a :

$$\vec{\nabla} f(w, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

soit :

$$\vec{\nabla} f(w, t) = \frac{\partial f}{\partial w} \left[ \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{=\alpha} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{=\beta} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{=\gamma} \cdot \vec{e}_z \right] = \frac{\partial f}{\partial w} [\alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y + \gamma \cdot \vec{e}_z] = \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

L'opérateur  $\vec{\nabla}$  devient donc pour les problèmes à variable d'espace  $w$  unique :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

et ainsi l'opérateur  $\Delta$  reformulé avec cette même variable :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

CONSÉQUENCE : pour une onde plane électromagnétique  $\vec{E}(w, t)$  se propageant selon l'axe  $[Ow]$ , l'EDA s'écrit :

$$\vec{\Delta} \vec{E}(w, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \implies \boxed{\frac{\partial^2}{\partial w^2} \vec{E}(w, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(w, t) = \vec{0}} \quad (\text{XVII.11})$$

dont la solution générale est la superposition d'un champ électrique se propageant vers les  $w$  croissants  $\vec{E}_+$  et d'une autre se propageant dans le sens des  $w$  décroissants  $\vec{E}_-$  à la célérité  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  :

$$\boxed{\vec{E}(w, t) = \vec{E}_+ \left( t - \frac{w}{c} \right) + \vec{E}_- \left( t + \frac{w}{c} \right)} \quad (\text{XVII.12})$$

### II.3 Solution en ondes planes progressives harmoniques (OPPH) - intérêt

#### a - Définition et caractéristiques

La suite propose de concentrer nos efforts sur la classe particulière des Ondes Planes Progressives Harmoniques ou O.P.P.H, la théorie de Fourier montrant qu'elles servent d'éléments de base pour la composition de toutes les ondes électromagnétiques (ou d'autre nature d'ailleurs !), qu'elles soient périodiques ou non.).

#### Définition II-2: CHAMP ÉLECTRIQUE D'UNE OPPH -PÉRIODICITÉS

Posons  $\omega$  la pulsation de l'OPPH,  $\varphi$  sa phase à l'origine,  $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_w = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{e}_w$  son vecteur d'onde.

Le champ électrique d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant, par exemple, dans la direction des  $w$  croissants, s'écrit en  $w$  à la date  $t$  :

- FORME RÉELLE :

$$\vec{E}(w, t) = \vec{E}_0 \times \cos \left[ \omega \left( t - \frac{w}{c} \right) + \varphi \right] = \vec{E}_0 \times \cos [\omega t - kw + \varphi] \stackrel{k \cdot w = \vec{k} \cdot \vec{r}}{\equiv} \vec{E}_0 \times \cos [\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi] \quad (\text{XVII.13})$$

- FORME COMPLEXE : en posant :  $\vec{E}(w, t) = \mathcal{R}_e \left[ \underline{\vec{E}}(w, t) \right]$  et  $\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 \cdot e^{j\varphi}$  :

$$\underline{\vec{E}}(w, t) = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j[\omega(t - \frac{w}{c})]} = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j(\omega t - kw)} = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (\text{XVII.14})$$

L'OPPH présente une double périodicité :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{spatiale : } \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \\ \text{temporelle : } T = \frac{2\pi}{\omega} \end{array} \right.$$

## b - Caractère non réaliste de l'OPPH - intérêt du modèle

A RETENIR :

Du fait de son caractère périodique, une OPPH ne peut pas décrire un phénomène de propagation physique qui possède nécessairement un début et une fin, à la fois temporellement et spatialement. On parle de caractère «non réaliste» ou «non physique» de l'OPPH.

QUESTION : comment peut-on exploiter ce modèle pour décrire des phénomènes propagatifs réels ?

RÉPONSE : par transformation de Fourier inverse (extension de la synthèse de Fourier au cas des ondes à spectre continu).

Les résultats d'électrocinétique sur la synthèse de Fourier (cf chap.I) peuvent être totalement étendus aux cas de la description des phénomènes propagatifs.

Supposons une onde  $\psi(x, t)$  se propageant selon l'axe  $[Ox)$  vers  $x$  croissant. Si celle-ci n'est pas périodique (possède un "début" et une "fin"), la transformée de Fourier inverse permet d'écrire  $\psi(x, t)$  en une "somme continue" d'harmoniques, soit l'intégrale :

$$TF^{-1} \text{ "en cosinus" : } \psi(t - x/c) = \int_0^{+\infty} \underbrace{g(\omega) \cdot \cos[\omega(t - x/c) + \varphi(\omega)]}_{\text{onde harmonique de pulsation } \omega \equiv \text{élément de base}} \cdot d\omega$$

$$TF^{-1} \text{ "classique" : } \psi(t - x/c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(\omega) \cdot e^{j[\omega(t - x/c)]}}_{\text{onde harmonique de pulsation } \omega \equiv \text{élément de base}} \cdot d\omega$$

$\underline{g}(\omega) = |g(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$  est la densité spectrale complexe de l'onde i.e. sa transformée de Fourier (au facteur  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ )

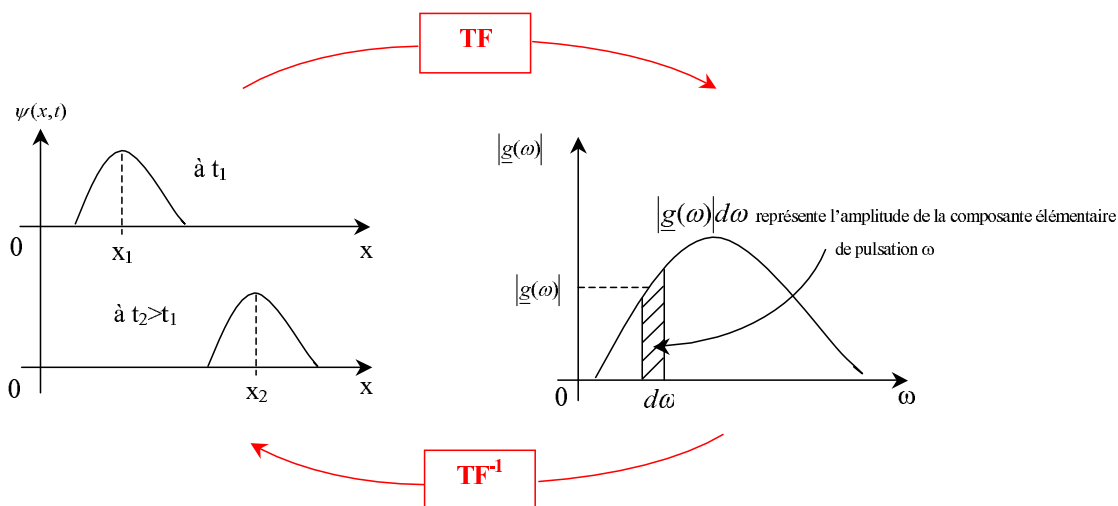


FIGURE XVII.5 – Signal propagatif non périodique (extension spatiale et temporelle finies) et son spectre

**Conclusion :** l'étude de l'onde harmonique est fondamentale en raison de son caractère d'élément de base de toute décomposition d'onde. Ainsi toute onde peut être décrite comme une superposition d'ondes harmoniques.

### c - Spectre électromagnétique

Les ondes électromagnétiques sont exploitées dans de très nombreux domaines ; sciences fondamentales (spectroscopie IR, RMN, Raman), technologies d'exploration (radiotélescope)), technologies de communication (ondes hertziennes), médecine (IRM),

A RETENIR : (dans les grandes lignes, à savoir les ordres de grandeurs)

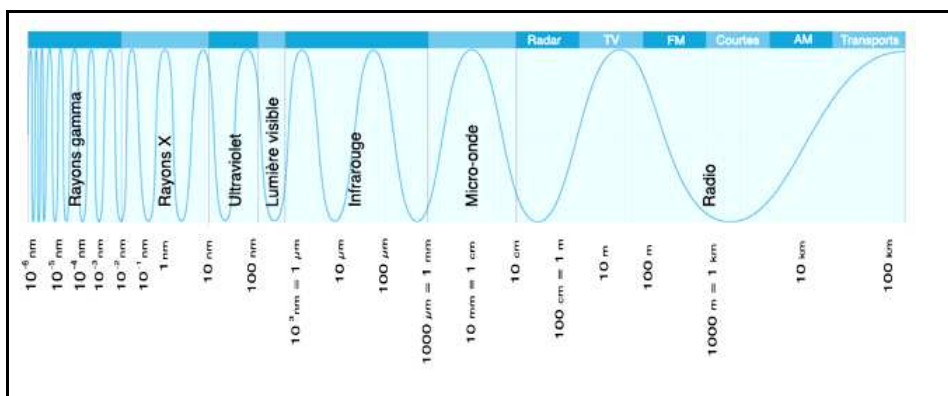


FIGURE XVII.6 – Spectre électromagnétique en longueur d'onde

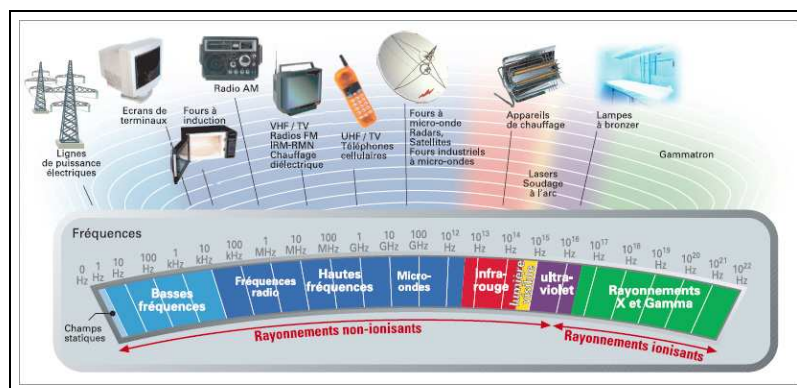


FIGURE XVII.7 – Spectre électromagnétique en longueur d'onde

## III Etude détaillée des OPPH

### III.1 Vitesse de phase

Lors de la propagation d'une OPPH, la zone "équiphasse" est par définition un plan (plan d'onde).

QUESTION : vitesse de déplacement du plan de phase ?

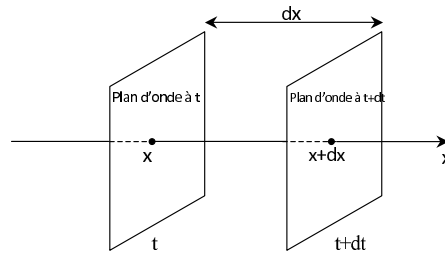


FIGURE XVII.8 – Déplacement du plan de phase

Si l'on prend une OPPH se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants :

$$\vec{E} = \underline{\vec{E}_0} \cdot e^{j(\omega t - kx)}$$

alors la phase s'écrit :

$$\Phi(x, t) = \omega t - k \cdot x + \varphi \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Si pendant l'intervalle de temps élémentaire  $dt$  le plan de phase s'est déplacé d'une distance  $dx$ , alors la conservation de la valeur de l'onde et donc de sa phase pour ce plan impose :

$$\Phi(x + dx, t + dt) - \Phi(x, t) = d\Phi = \omega dt - k dx = 0$$

On définit alors la vitesse de déplacement du plan de phase ou vitesse de phase par :

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \quad (\text{XVII.15})$$

**Conclusion :** On constate donc que pour une onde monochromatique ( $\omega$  unique), le plan de phase se déplace dans le vide à la vitesse  $c$  indépendante de la fréquence. On dit que le milieu est **non dispersif**.

### III.2 Caractère non "dispersif" du vide

**Exercice de cours:** (III.2) - n° 2. Premier contact avec une relation de dispersion.

A partir de l'équation de d'Alembert, retrouver la relation liant la norme du vecteur d'onde  $k$  à la pulsation  $\omega$  d'une OPPH. Conclusion quand à la vitesse des ondes en fonction de leur pulsation.

RÉPONSE :

On prend une OPPH de forme simple :  $\vec{E} = \underline{\vec{E}_0} \cos(\omega t - kx + \varphi)$  se propageant dans le vide.

Après injection dans l'EDA, on a  $-k^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$

d'où :

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \neq f(\omega)$$

le milieu est alors dit non dispersif car la vitesse de phase est indépendante de la pulsation : intérêt plus tard dans l'analyse des paquets d'ondes constitués d'une superposition d'OPPH.

**A retenir :** La vitesse de déplacement d'une OPPH dans le vide est indépendante de la pulsation de celle-ci. On dit que le vide est **non dispersif**.

### III.3 Structure des OPPH

#### a - Préliminaire : opérateurs différentiels en notation complexe

Prenons le cas le plus général d'une OPPH se déplaçant dans la direction du vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_w = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ . Le champ électrique de cette dernière s'écrit dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \times \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \times \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \times \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{Re} \left[ \underbrace{\overbrace{(E_{0x} \times e^{j\varphi_x} \cdot \vec{e}_x + E_{0y} \times e^{j\varphi_y} \cdot \vec{e}_y + E_{0z} \times e^{j\varphi_z} \cdot \vec{e}_z)}^{\vec{E}_0}}_{\vec{E}(\vec{r}, t)} \times e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right]$$

soit donc :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

L'action des opérateurs vectoriels prend une forme simple et très commode lorsque l'on utilise la notation complexe ;

- OPÉRATEUR DE DÉRIVATION TEMPORELLE :

$$\text{on a : } \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = j\omega \vec{E}(\vec{r}, t)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = +j\omega \times}$$

- OPÉRATEUR DE DÉRIVATION SPATIALE :

De même pour une fonction scalaire quelconque de type  $f(\vec{r}, t) = f_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = f_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$  on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -jk_x \cdot f \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -jk_y \cdot f \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -jk_z \cdot f \quad \text{soit : } \boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = -j \vec{k}}$$

Ainsi, on montre facilement que les opérateurs habituels appliqués au champ complexe  $\vec{E}$  prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -j \vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = -k^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \end{cases}$$



**Remarque III-1:** UNE AUTRE CONVENTION

On peut également utiliser une autre convention pour la notation complexe des ondes planes :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

qui conduit alors modifier les opérateurs en conséquence : 
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -j\omega \times \\ \vec{\nabla} = +j\vec{k} \end{cases}$$

**b - Transversalité - relations de structure**

Reprenons chacune des équations de Maxwell et traduisons les en formalisme complexe :

- "MG" :  $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \Rightarrow -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$  donc :

$$\underline{\vec{E}} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \text{le champ électrique est transverse}$$

- "MT"  $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \Rightarrow -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$  donc :

$$\underline{\vec{B}} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \text{le champ magnétique est transverse}$$

- "MF"  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \Rightarrow -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$   
soit :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \Leftrightarrow \text{relation de structure de l'OPPH}$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$  cette relation devient :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{e}_w \wedge \underline{\vec{E}}}{c} \Leftrightarrow \text{relation générale de structure de l'onde plane}$$

(se démontre aussi à l'aide des équations de Maxwell pour des ondes non nécessairement harmoniques)

$$\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}, \vec{k} \text{ forment un trièdre direct}$$

- "MA"  $\Rightarrow$  même conclusion !! (à faire à titre d'exercice)

**III.4 Polarisation des OPPH**

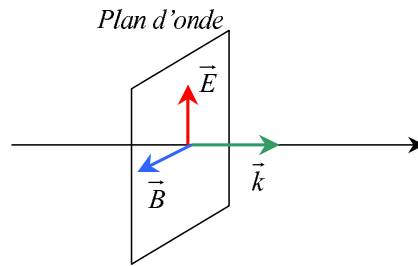


FIGURE XVII.9 – Structure d'une OPPH

## a - Définition

**Définition III-1:** POLARISATION D'UNE ONDE

L'étude de la polarisation d'une OPPH consiste à décrire l'évolution spatio-temporelle de la "pointe" du vecteur champ électrique/magnétique, lorsque ce dernier se déplace vers l'observateur (choix conventionnel).

## b - Etude générale

Considérons une OPPH se dirigeant vers les  $x$  croissants (donc selon l'axe  $[Ox]$ ) d'expression :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

En se plaçant dans le plan d'équation  $x = 0$  le champ devient :

$$\vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t + \varphi_z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Afin de faciliter l'étude, on procède au changement d'origine des phases suivant :

On pose  $t'$  tel que  $\omega t' = \omega t + \varphi_y$  et on pose  $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$  donc :

$$\vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t') \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t' + \varphi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Définition paramétrique d'une ellipse (cf. simulation)}$$

**NB :** on rebaptise  $t'$  en  $t$  pour la suite.

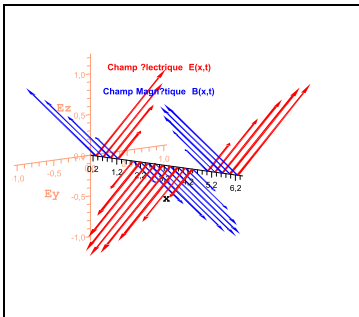
soit toujours en  $x = 0$  :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

- Cas  $\varphi = 0 \Rightarrow \frac{E_z}{E_{0z}} = \frac{E_y}{E_{0y}}$   
soit

$$E_z = \frac{E_{0z}}{E_{0y}} \times E_y$$

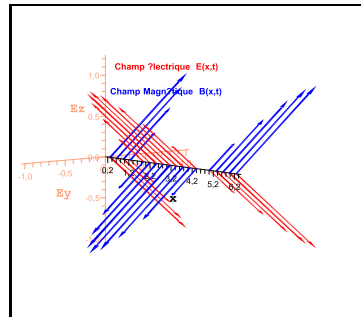
La "pointe" du vecteur champ électrique décrit ici une droite. On parle de **polarisation rectiligne**.



- Cas  $\varphi = \pi \Rightarrow \frac{E_z}{E_{0z}} = -\frac{E_y}{E_{0y}}$   
On obtient cette fois :

$$E_z = -\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \times E_y$$

La pointe du vecteur champ électrique décrit encore une fois une droite de pente opposée au cas précédent. La **polarisation est là-encore rectiligne**.

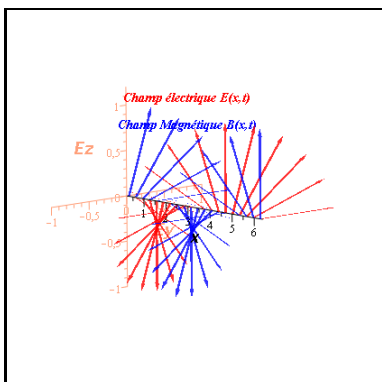


- Cas  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et en posant  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$   
 $\Rightarrow \vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \times \cos(\omega t) \\ E_z = -E_0 \times \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

Ces coordonnées paramétriques décrivent un champ tournant de norme constante, soit une **polarisation circulaire**.

SENS : On détermine le sens de parcours du vecteur  $\vec{E}$  dans cette polarisation en déterminant le sens et la direction du vecteur dérivé à  $(x, t)$  connus, par exemple  $(x = 0, t = 0)$  :

$$\left. \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|_{x=0, t=0} = -\omega E_0 \vec{e}_z \text{ la pointe du vecteur champ électrique décrit un cercle en rotation gauche : la polarisation est dite circulaire droite.}$$

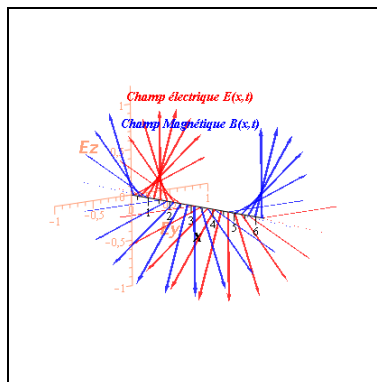


- Cas  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  et en posant  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$   
 $\Rightarrow \vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \times \cos(\omega t) \\ E_z = E_0 \times \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

Ces coordonnées paramétriques décrivent un champ tournant de norme constante, soit une **polarisation circulaire**.

SENS : On détermine facilement le sens de parcours du vecteur  $\vec{E}$  dans cette polarisation en déterminant le sens et la direction du vecteur dérivé à  $(x, t)$  connus, par exemple

$$(x = 0, t = 0) : \left. \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|_{x=0, t=0} = +\omega E_0 \vec{e}_z \text{ la pointe du vecteur champ électrique décrit un cercle en rotation gauche : la polarisation est dite circulaire gauche.}$$



## c - Intérêt des polarisations rectiligne et circulaire

## • POLARISATION RECTILIGNE

Reprenons l'expression générale d'une OPPH se propageant selon  $+\vec{e}_x$  :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

Cette OPPH de polarisation quelconque (dépendant du couple  $(\varphi_y, \varphi_z)$ ) correspond à la **superposition** de deux OPPH polarisées rectilignement :

$$\vec{E}(x, t) = \underbrace{E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \cdot \vec{e}_y}_{\text{OPPH polarisée rectilign.}} + \underbrace{E_{0z} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \cdot \vec{e}_z}_{\text{OPPH polarisée rectilign.}}$$

**A retenir : une OPPH de polarisation quelconque peut être décomposée en une somme de deux OPPH polarisées rectilignement.**

→ CF. TP POLARISATION.

## • POLARISATION CIRCULAIRE

De même, toute OPPH polarisée rectilignement peut par exemple être décomposée en deux OPPH de polarisation circulaire droite et gauche. Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_{0y}}{2} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = \frac{E_{0y}}{2} \times \sin(\omega t - kx + \varphi_y) \end{pmatrix}}_{= \text{OPPH PCG}} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_{0y}}{2} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = -\frac{E_{0y}}{2} \times \sin(\omega t - kx + \varphi_y) \end{pmatrix}}_{= \text{OPPH PCD}} \end{aligned}$$

→ CF. TD N°12, EXERCICE SUR LE POUVOIR ROTATOIRE DES ÉNANTIOMÈRES.

## IV Energétique des ondes électromagnétiques

## IV.1 Vecteur de Poynting d'une OPPH

**ATTENTION :** le caractère non linéaire du calcul du vecteur de Poynting (produit de deux champs) interdit l'usage de la notation complexe en dehors du calcul des valeurs moyennes (cf IV.4) ⇒ calculs énergétiques en formalisme réel uniquement

Considérons une OPPH se déplaçant dans le sens des  $x$  croissant, polarisée selon  $\vec{e}_y$  :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_y$$

Le champ magnétique de cette onde est obtenu par relation de structure :  $\vec{B}(x, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_z$

Le vecteur de Poynting est donc :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

VALEUR MOYENNE :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \cdot \vec{e}_x = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \vec{e}_x$$

A RETENIR : l'énergie se déplace dans la direction et le sens de la propagation.

**Définition IV-1:** INTENSITÉ (LUMINEUSE)

On définit l'intensité  $I$  (dite lumineuse pour les radiations du spectre visible) par le flux moyen surfacique de puissance (déjà vu en chapitre XIV) soit :

$$I = \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{n} = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \vec{e}_x \cdot \vec{n}$$

## IV.2 Densité volumique d'énergie d'une OPPH

L'établissement de l'identité de Poynting avait permis de dégager l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique, soit :

$$u_{em} = \underbrace{\frac{\epsilon_0 E^2}{2}}_{=u_e} + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{=u_m}$$

En reprenant l'OPPH précédente :  $\begin{cases} \vec{E}(x, t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_y \\ \vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_z \end{cases}$ , il vient  $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = u_e$

A RETENIR : pour une OPPH :

$$u_{em}(OPPH) = \underbrace{2u_e = 2u_m}_{\text{énergie équirépartie entre contrib. élec. et magn.}} = \epsilon_0 E^2$$

Soit une valeur moyenne :

$$\langle u_{em}(OPPH) \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

### IV.3 Vitesse de transport de l'énergie d'une OEM

On sait que le vecteur de Poynting indique la direction de transport de l'énergie. Notons  $\vec{v}_e$  la vitesse de propagation de l'énergie en un point  $M$  à l'instant  $t$ ; l'énergie traversant un élément de surface  $d\vec{S}$  en  $M$  pendant la durée élémentaire  $dt$  est celle contenue dans le cylindre de base  $d\vec{S}$  et de longueur  $v_e \cdot dt$ .

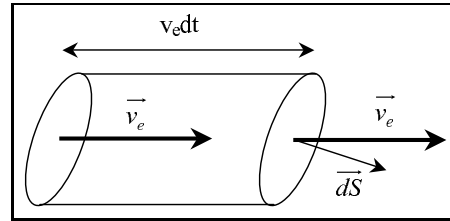


FIGURE XVII.10 – Transport de l'énergie électromagnétique

Evaluons de deux manières l'énergie contenue dans ce cylindre :

- EN INTÉGRANT LA DENSITÉ D'ÉNERGIE :

Le volume de ce cylindre est  $d\tau = (\vec{v}_e dt) \cdot d\vec{S}$ , et il contient l'énergie élémentaire :

$$d^2\epsilon_{em} = u_{em}(\vec{v}_e dt) \cdot d\vec{S} \quad (\text{XVII.16})$$

- EN UTILISANT LE THÉORÈME DE POYNTING :

On peut également exprimer l'énergie élémentaire traversant la surface  $d\vec{S}$  pendant  $dt$  à l'aide du vecteur de Poynting. En effet la puissance élémentaire traversant  $dS$  s'écrit :

$$dP_R(d\vec{S}) = \vec{R} \cdot d\vec{S} = \frac{d^2\epsilon_{em}}{dt}$$

d'où :

$$d^2\epsilon_{em} = \vec{R} \cdot d\vec{S} \cdot dt \quad (\text{XVII.17})$$

En rapprochant les expressions XVII.16 et XVII.17, il vient :

$$u_{em} \cdot \vec{v}_e = \vec{R}$$

soit la vitesse de propagation de l'énergie :  $\vec{v}_e = \frac{\vec{R}}{u_{em}}$

On a donc pour une OPP dans le vide se déplaçant selon l'axe  $x$  vers  $x$  croissant :

$$\vec{v}_e = \frac{\epsilon_0 c E^2 \vec{e}_x}{\epsilon_0 E^2} = c \vec{e}_x$$

### IV.4 Retour sur la notation complexe : calcul des valeurs moyennes de grandeurs énergétiques

La notation complexe, dont l'usage est proscrit dans le calcul de grandeurs énergétiques instantanées, peut en revanche être mis à profit pour calculer des grandeurs énergétiques moyennes.

On propose une approche préliminaire dans le cadre de l'électrocinétique ; elle sera étendue très facilement au cas de l'électromagnétisme.

Supposons deux fonctions harmoniques et leurs associées complexes :

$$\begin{cases} f(t) = f_m \cos(\omega t) \longrightarrow \underline{f}(t) = f_m \cdot e^{j\omega t} \\ g(t) = g_m \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{g}(t) = g_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

La moyenne temporelle de la fonction produit  $f \cdot g$  donne :

$$\langle f \cdot g \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \frac{f_m \cdot g_m}{2} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \cdot dt = \frac{1}{2} f_m g_m \cdot \cos \varphi$$

En outre, on remarque que :  $\frac{1}{2} \mathcal{R}_e [f \cdot g^*] = \frac{1}{2} f_m g_m \cdot \cos \varphi$

Ainsi :

$$\boxed{\langle f g \rangle_t = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e [\underline{f} \cdot \underline{g}^*]}$$

On généralise ensuite ce résultat à tous les calculs de valeur moyenne des grandeurs électromagnétiques se présentant sous la forme de produits (à retenir !) :

$$\begin{cases} \langle \vec{R} \rangle_t = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e \left[ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right] \\ \langle \vec{u}_e \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4} \mathcal{R}_e [\vec{E} \cdot \vec{E}^*] \\ \langle \vec{u}_m \rangle_t = \frac{1}{4\mu_0} \mathcal{R}_e [\vec{B} \cdot \vec{B}^*] \\ \langle \mathcal{P}_v \rangle_t = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e [\vec{J} \cdot \vec{E}^*] \end{cases}$$

#### IV.5 Retour sur la polarisation : polarisation par dichroïsme (Polaroid) et loi de Malus (utile pour TP)

Une onde lumineuse plane **non polarisée**, par exemple se déplaçant selon la direction des  $x$  croissants, peut être décrite comme la somme de deux vibrations de polarisations rectilignes selon  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ , et dont le déphasage  $\varphi(t)$  est une fonction aléatoire du temps changeant de valeur tous les  $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$  (temps caractéristique très court) :

$$\underline{\vec{E}}_i(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cdot e^{j(\omega t - kx)} \\ E_{0z} \cdot e^{j(\omega t - kx + \varphi(t))} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

cette formulation assurant une direction aléatoire du vecteur champ électrique.

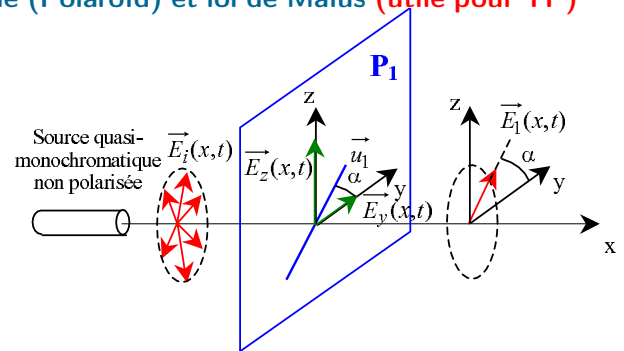


FIGURE XVII.11 – Polarisation par dichroïsme : usage d'un polaroid

En pratique, la production de lumière polarisée rectilignement est possible à l'aide de dispositifs simples appelés Polaroid (principe de fonctionnement détaillé en live !!!); pour cela, on fait incider la lumière non polarisée sur le

Polaroïd  $P_1$  duquel sortira une vibration correspondant à la **projection de cette lumière incidente sur la direction de polarisation  $\vec{u}_1$  du Polaroid**. La vibration de la lumière transmise s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(x, t) = \left[ E_{0y} \cdot \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{u}_1}_{=\cos \alpha} + E_{0z} e^{j\varphi(t)} \cdot \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{u}_1}_{=\sin \alpha} \right] \cdot e^{j(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_1 = \left[ E_{0y} \cdot \cos \alpha + E_{0z} e^{j\varphi(t)} \cdot \sin \alpha \right] \cdot e^{j(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_1$$

LOI DE MALUS :

En plaçant un second polariseur  $P_2$  de direction de polarisation  $\vec{u}_2$  après  $P_1$ , on obtient la vibration émergente suivante :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(x, t) &= \left[ \vec{E}_1(x, t) \cdot \vec{u}_2 \right] \cdot \vec{u}_2 \\ &= \left[ E_{0y} \cdot \cos \alpha \cdot \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}_{=\cos \beta} + E_{0z} e^{j\varphi(t)} \cdot \sin \alpha \cdot \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}_{=\cos \beta} \right] \cdot e^{j(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_2 \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{E}_2(x, t) = \left[ E_{0y} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot e^{j(\omega t - kx)} + E_{0z} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot e^{j(\omega t - kx + \varphi(t))} \right] \cdot \vec{u}_2$$

soit en notation réelle :

$$\vec{E}_2(x, t) = [E_{0y} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\omega t - kx) + E_{0z} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi(t))] \cdot \vec{u}_2$$

L'intensité mesurable de la vibration émergente est alors :

$$\begin{aligned} I &= K \langle E_2^2(x, t) \rangle = K E_{0y}^2 \cdot \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cdot \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \\ &\quad + K E_{0z}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \cdot \langle \cos^2(\omega t - kx + \varphi(t)) \rangle \\ &\quad + 2K E_{0y} E_{0z} \cos \alpha \sin \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \underbrace{\langle \cos(\omega t - kx) \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi(t)) \rangle}_{=0 \text{ car } \varphi(t) \text{ aléatoire}} \end{aligned}$$

soit :

$$I = \frac{K}{2} [E_{0y}^2 \cdot \cos^2 \alpha + E_{0z}^2 \cdot \sin^2 \alpha] \cdot \cos^2 \beta = I_0 \cdot \cos^2 \beta$$

#### Propriété IV-1: LOI DE MALUS

L'intensité lumineuse en sortie du second polariseur dépend de l'angle  $\beta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  et est donnée par la loi de Malus :

$$I(\beta) = I_0 \cos^2 \beta$$

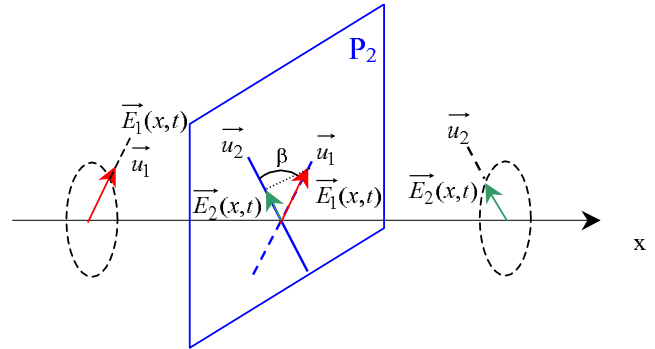


FIGURE XVII.12 – Loi de Malus