1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

a) Etudier la limite simple de (f_n).

b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

2. On pose $f_n(x) = x^n \ln x$ avec $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.
Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

3. On pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$.
Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

4. On pose $f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx}$ pour $x > 0$ et $f_n(0) = 0$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a,a]$ avec $a > 0$.

5. Etudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$$

6. On considère la suite de fonctions réelles définies par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + arctan(x), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-telle ..

(a) Simplement convergente sur $[0,1]$?

(b) Uniformément convergente sur $)0,1]$?

(c) Uniformément convergente sur $[a,1]$ avec $0 < a < 1$?

(d) Uniformément convergente sur $[1,+\infty[$?

7. On définit la suite de fonctions si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n}).$$

(a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$ et si oui, vers quelle fonction ?

(b) La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-t-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

(c) La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-t-elle uniforme sur $[-1,1]$?

8. Soit k un entier positif ou nul et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^k}{x^2+n}$.

(a) Pour quelles valeur de k cette suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

(b) Pour quelles valeur de k cette suite converge-t-elle uniformément pour tout partie bornée de $\mathbb{R}$?

9. Soit $\alpha > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^\alpha x \exp(-nx)$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite de fonction converge uniformément sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

10. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = nx\ \sin(x)\exp(-nx).$$

(a) Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

(b) Montrer que la fonction $\varphi : t \to t\exp(-t)$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

(c) Montrer que la convergence de cette suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2},+\infty[$.

(d) [plus difficile] Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
(étudier les variations de la fonction f_n.)