

# TP n°20 Electrodynamique: Etude expérimentale d'une ligne diffusive "RC"

**OBJECTIFS DU TP:** Etudier la réponse d'un ensemble de  $n = 22$  cellules "RC" à des signaux de forme diverse (continu, échelon de tension, sinusoïdal..).

## MATÉRIEL À DISPOSITION:

- Une plaquette constituée de 22 cellules RC.
- Une alimentation stabilisée
- Un GBF
- Un oscilloscope numérique
- Deux multimètres numériques
- Un ordinateur muni d'un tableur (Regressi, Excel?)

**INTRODUCTION:** L'objet de ce TP est d'étudier la réponse d'une ligne RC composée de 22 cellules, à différentes excitations (régimes continu, sinusoïdal forcé et réponse à un échelon). On étudiera d'abord ce système en tenant compte de la nature discrète des composants, puis on fera une modélisation continue du dispositif.

Les questions *en gras italique* sont des questions théoriques **à traiter à la maison** lors de la préparation du TP.

Le montage, réalisé sur plaquette, est constitué de 22 cellules RC régulièrement espacées avec  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 100 \text{ nF}$ , numérotées de  $n = 1$  à  $n = 22$ . On note  $a$  la taille d'une cellule (voir schéma).

Il est possible d'appliquer une tension  $u_0$  en entrée de la ligne, et de mesurer  $u_1$  aux bornes de la capacité de la première cellule, puis toutes les deux cellules les tensions  $u_3, u_5, \dots, u_{21}$  aux bornes des capacités des cellules  $n = 3, n = 5$ , etc....

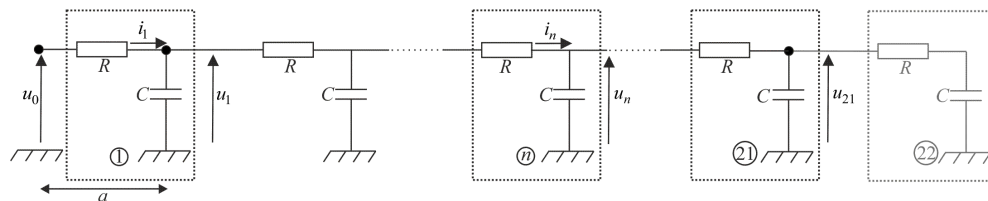


Figure 1: Schéma électrique du dispositif expérimental

1. Montrer que les tensions  $u_n, u_{n+1}$  et  $u_{n-1}$  sont couplées par l'équation différentielle:

$$\frac{du_n}{dt} = \omega_0 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

et exprimer la grandeur  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $C$ .

## 1 Etude en régime stationnaire

Dans cette étude en régime stationnaire, on court-circuite l'extrémité (en  $n = 21$ ) du montage électrique.

2. Appliquer une tension continue  $u_0$  de l'ordre de 10 V ou 15 V (mais mesurée précisément) à l'entrée.
  - a. Mesurer les tensions  $u_n$  puis tracer la courbe  $u_n = f(n)$ .
  - b. *Etablir l'expression théorique de  $u_n$  en fonction de  $u_0$  et  $n$  dans ce cas.*
  - c. Commenter.

3. Mesurer le courant débité par l'alimentation et en déduire la valeur de  $R$ . Comparer avec la valeur attendue.

## 2 Etude en régime stationnaire

On reprend l'étude du montage sans court-circuit à l'extrémité.

On applique en entrée une tension sinusoïdale:

$$u_0(t) = u_{0m} \cos(2\pi ft)$$

avec  $f = 100 \text{ Hz}$  et  $u_{0m}$  de l'ordre de quelques volts.

On cherche une solution en onde progressive harmonique amortie de la forme :

$$u_n(t) = A \cdot e^{-n\alpha} \cdot e^{j\omega(t-n\tau)}$$

où  $\alpha$  est le facteur d'amortissement et  $\tau$  le retard introduits par une cellule.

4. *En réinjectant cette solution dans l'équation de couplage et en identifiant parties réelle et imaginaire, montrer que la solution proposée convient si et seulement si les coefficients  $\alpha$ ,  $\omega$ , et  $\tau$  vérifient les relations:*

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 2 \sinh(\alpha) \cdot \sin(\omega\tau) \\ \cosh(\alpha) \cdot \cos(\omega\tau) = 1 \end{cases}$$

On peut réécrire ces relations sous deux autres formes équivalentes:

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 2 \frac{(\sinh(\alpha))^2}{\cosh(\alpha)} \\ \omega\tau = \arccos\left(\frac{1}{\cosh(\alpha)}\right) \end{cases}$$

si l'on mesure l'atténuation, ou bien

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 2 \frac{(\sin(\omega\tau))^2}{\cos(\omega\tau)} \\ \alpha = \operatorname{argcosh}\left(\frac{1}{\cos(\omega\tau)}\right) \end{cases}$$

si l'on mesure le déphasage.

5. Mesurer le coefficient d'atténuation  $\alpha$  pour des fréquences variant entre  $100 \text{ Hz}$  et  $55 \text{ kHz}$  (on prendra garde à opérer sur des signaux d'amplitude suffisante ; pour cette raison, il est recommandé d'effectuer les mesures sur  $u_1(t)$  et  $u_0(t)$ ).

Proposer, en lien avec les résultats théoriques obtenus à la question précédente, une exploitation graphique des mesures effectuées permettant vérifier la validité du modèle.

6. Reprendre la question précédente en mesurant cette fois-ci le temps de retard  $\tau$  introduit par une cellule en fonction de la fréquence et en raisonnant sur le déphasage  $\omega\tau$ . Proposer de même une représentation graphique adaptée.

7. *Pour la solution  $u_n(t) = A \cdot e^{-n\alpha} \cdot e^{j\omega(t-n\tau)}$ , justifier que l'on puisse définir deux longueurs caractéristiques d'atténuation  $L_{att}$  et de propagation  $L_{prop}$  s'exprimant  $L_{att} = a/\alpha$  et  $L_{prop} = a/(f\tau)$ . Dans quel domaine de fréquence a-t-on  $L_{prop} \gg a$ ,  $L_{att} \gg a$ ?*

### 3 Approximation continue

L'approximation continue consiste à ne considérer que des variations spatiales des tensions  $u_n$  ne se font que sur de "grandes" distances. On suppose ainsi que la distance caractéristique sur laquelle varie  $u_n(t)$  est très supérieure à la taille  $a$  d'une cellule (ce qui impose un domaine de fréquences). On peut alors introduire la fonction continue des deux variables continues  $x$  et  $t$ , définie par:

$$u(x = na, t) \stackrel{\text{def}}{=} u_n(t)$$

et écrire:

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) \simeq n_n(t) + a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{na} \\ u_{n-1}(t) \simeq n_n(t) - a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{na} \end{cases}$$

ainsi que:

$$\frac{du_n(t)}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{na}$$

8. *Dans le cadre de cette approximation dite continue, montrer que la fonction  $u(x, t)$  est régie par l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*où l'on exprimera le coefficient  $D$  en fonction de  $\omega_0$  et  $a$ . Quelle est la dimension de  $D$  ? Quel phénomène physique ce montage électronique permet-il de simuler (dans l'approximation continue) ?*

On se place dorénavant et jusqu'à nouvel ordre dans cette approximation continue, et on étudie à nouveau les régimes étudiés précédemment.

## 4 Etude en régime stationnaire

9. En régime stationnaire,  $u(x, t) = u(x)$ . Quelle est l'équation vérifiée alors par  $u(x)$ . Quelles sont les conditions limites imposées ? En déduire l'expression de  $u(x)$ , puis de  $u_n$  dans ce cas.

Quelle est la situation physique simulée dans ce cas ?

## 5 Etude en régime sinusoïdal forcé

10. Pour le régime sinusoïdal forcé, on cherche les solutions sous la forme complexe :

$$\underline{u}(x, t) = A \cdot e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

Déterminer l'expression de  $\underline{k}$  en fonction de  $\omega$  et  $D$  et, en déduire que, moyennant une approximation supplémentaire, on peut écrire  $u_n(t)$  sous la forme :

$$u_n(t) = U_0 \cdot e^{-n \sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}} \cdot \cos\left(2\pi f t - n \sqrt{\frac{\pi f}{\omega_0}}\right)$$

Quelle est la situation physique simulée dans ce cas ?

11. Déterminer les expressions que prennent alors les coefficients  $\alpha$  et  $\tau$  précédemment obtenus. Retrouver ces résultats en utilisant les expressions obtenues dans le modèle discret et en prenant un cas limite approprié.
12. Pour visualiser la limite de validité de l'approximation continue, on peut tracer par exemple  $\frac{\omega}{\omega_0}$  en fonction de  $\alpha^2$ . Réaliser le tracé pour l'ensemble des valeurs mesurées en début de TP et identifier sur la courbe le domaine de fréquences qui correspond à l'approximation continue.

## 6 Pour aller plus loin : réponse à un échelon

13. Appliquer maintenant une tension  $u_0(t)$  de forme créneau positif variant de 0 V à +10 V, et de très basse fréquence (proche de 1 Hz). L'extrémité  $n = 21$  n'est pas court-circuitée.

Visualiser successivement les tensions  $u_1(t)$  à  $u_7(t)$ , en même temps que la tension  $u_0(t)$ . Quelle est la situation physique simulée dans ce cas ?

14. On se propose de résoudre l'équation de diffusion en effectuant le changement de variable suivant :  $\xi = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ . On cherche alors  $u(x, t)$  sous la forme  $u(x, t) = f(\xi)$ .

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $f(\xi)$ .

Montrer que la fonction  $f(\xi)$  s'écrit :

$$f(\xi) = A \cdot \operatorname{erf}(\xi) + B$$

où  $\operatorname{erf}(\xi)$  désigne la fonction "erreur" définie par :

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-X^2} \cdot dX$$

Compte tenu des conditions initiale et aux limites, montrer que :

$$u_n(t) = E_0 \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{\omega_0 t}}\right) \right)$$

**Donnée:**  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(\xi) = 1$

Sachant que  $\operatorname{erf}(0,47694) = \frac{1}{2}$ , proposer une méthode fondée sur l'acquisition des tensions  $u_n(t)$  permettant de mesurer la constante de temps RC. Quel est le rang maximal  $n_{\max}$  au-delà duquel la méthode ne fonctionne plus, et pourquoi ? Comparer la mesure de RC avec les données du constructeur.