1. **Banque CCINP 2024 : 36,37,38** topologie
2. **Banque CCINP 2024 : 41,56** max et min
3. **Banque CCINP 2024 : 33,52,57** des fonctions C^1 ?
4. **[CCP]** fonction coercive, descente de gradient
   Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ et $f\colon X \in \mathbb{R}^n \to^t XAX - 2^tBX$.
   (a) Calculer $\nabla_X f$, le gradient de f en X.
   (b) Montrer que f possède un minimum global et préciser en quel point il est atteint.
   (c) (trop difficile)
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n - \alpha_n \nabla_{X_n} f$ avec $\alpha_n = \dfrac{\|\nabla_{X_n} f\|}{{}^tX_nAX_n}$.
   Trouver la limite éventuelle de la suite (X_n).
5. **[CCP]**
   (a) Montrer que $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert.
   (b) Résoudre sur U l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.
   indication : penser aux coordonnées polaires.
6. **[Mines Ponts]** *laplacien, fonctions harmoniques*
   Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F\colon (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\} \mapsto f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\Delta F = 0$.
7. **[ENS]** *opérateur d'interpolation de Lagrange*
   Soient $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, E_n l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ de degré $\leqslant n$, $(x_0,\dots,x_n) \in [a,b]^{n+1}$ avec $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Si $f \in E$, on note P_f l'unique élément de E_n tel que $\forall i \in \{0,1,\dots,n\}, P_f(x_i) = f(x_i)$. Soit $\Phi\colon f \in E \mapsto P_f \in E_n$.
   (a) Montrer que Φ est linéaire et que c'est un projecteur.
   (b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E$, $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$.
   (c) Si $f \in E$, montrer qu'il existe $Q \in E_n$ tel que $\|f-Q\|_\infty = d(f,e_n)$, où $d(f,e_n) = \inf\{\|f-P\|_\infty, P \in E_n\}$.
   (d) Si $f \in E$, montrer que $\|f - \Phi(f)\|_\infty \leqslant (C+1)d(f,e_n)$.
8. **[Mines,Centrale]**
   Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible ($A \in S_n(\mathbb{R})$).
   On définit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ par $\Phi(M) = M^TAM$.
   (a) Montrer que Φ, vue comme une application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, est de classe C^1.
   (b) Rappeler la définition de la différentielle.
   (c) soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d_{I_n}\Phi$ la différentielle de Φ en I_n.
   - Montrer que $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = H^TA + AH + H^TAH$.
   - En déduire que $d_{I_n}\Phi(H) = H^TA + AH$.
   - Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\Phi$.

   (d) Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\ker(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires.
   (e) Montrer qu'il existe un ouvert U contenant I_n tel que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.