1. **Banque CCINP 2023 : 31**
2. **Banque CCINP 2023 : 32**
3. **Banque CCINP 2023 : 42 (oui)**
4. **[Centrale] - Équation du premier ordre**
   (a) Résoudre sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ l'équation $(*)$: $(x\ln x)y'(x) + y(x) = x$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique solution de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. **[TPE] - Équation différentielle linéaire de Newton à coefficient intégrable**
   Soit l'équation différentielle (E): $y'' + f(x)y = 0$, où f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions de (E) alors $y_1'y_2 - y_2'y_1$ est constante.
   (b) Montrer que si y est une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}$ alors $y'(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, puis montrer que cette limite est nulle.
   (c) Montrer que (E) admet une solution non bornée.
6. **[CCINP] - Équation du second ordre**
   On cherche à résoudre (E): $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ ty''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$.
   (a) Trouver les réels a tels que la fonction $h_a\colon t \mapsto t^a$ soit solution de (E).
   (b) Justifier que la fonction $g\colon t \mapsto e^{-t}/t^2$ admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Dresser le tableau de variations de $G : x \mapsto \int_1^x g(t)\mathrm{d}tt$. Donner la limite de G en 0^+ et justifier que G admet une limite **finie** en $+\infty$.
   (d) Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $s\colon t \mapsto tf(t)$ et (E'): $z'(t) + (1 + \frac{2}{t})z(t) = 0$. Montrer que s est solution de (E) si et seulement sif' est solution de (E').
   (e) Résoudre (E).
7. **[Mines] (avec un tout petit peu de géométrie)**
   Soit le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.
   (a) Montrer que $||X(t)||$ ne dépend pas de t.
   (b) Montrer, pour $Y \in \ker(A)$, que $(X(t)|Y)$ ne dépend pas de t.
   (c) Montrer que $X(t)$ est sur un cercle de $\mathbb{R}^3$.
8. **[Mines]**
   On cherche une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(E)\ :\ -2y'' + xy' + y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.
   En cas de convergence, on pose $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$.
   On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
   (a) Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ?
   (b) Donner une expression explicite de y vérifiant les conditions ci-dessus (On pourra utiliser des séries entières).
   (c) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. Conclure.