Proposition : Norme subordonnée ou norme d'opérateur

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors les trois bornes supérieures suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\},\ \|x\|_E \leq 1} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

On note $|||u|||$ ou $\|u\|_{op}$ leur valeur commune.
L'application $u \in \mathcal{L}_c(E, F) \mapsto |||u|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée **norme d'opérateur** ou encore **norme subordonnée** aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Remarque. Par définition, si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$,

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq |||u||| \cdot \|x\|_E$$

On peut montrer par ailleurs montrer que

$$|||u||| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Remarque. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue, alors elle est lipschitzienne de rapport $|||u|||$.

Remarque. Notamment, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et $|||\cdot|||$ désigne la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, alors pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$,

$$|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\},\ \|x\| \leq 1} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E,\ \|x\| = 1} \|u(x)\|$$

Méthode **Déterminer la norme subordonnée d'une application linéaire**

Pour déterminer la norme subordonnée d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut procéder comme suit.

- On détermine une constante C telle que

  $$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

  Ceci prouve que f est continue et que $|||f||| \leq C$.

- On peut alors au choix :
  - déterminer un vecteur $x \in E$ non nul tel que $\|f(x)\|_F = C\|x\|_E$ (ceci est notamment possible lorsque E est de dimension finie car la sphère unité est alors compacte) ;
  - déterminer une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls telle que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} = C$.

  Dans les deux cas, on a prouvé que $|||f||| \geq C$.

- On conclut que $|||f||| = C$.

Exemple

On munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. Soit $u : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(X/2)$. u est clairement un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\|u(P)\| = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t/2)| = \sup_{t\in[-1/2,1/2]} |P(t)| \leq \|P\|$$

Notamment u est continu et $|||u||| \leq 1$.
De plus, en posant $P = 1$, $u(P) = 1$ donc

$$|||u||| \geq \frac{\|u(P)\|}{\|P\|} = 1$$

Ainsi $|||u||| = 1$.

Exemple

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nulles en 1. On munit E de la norme uniforme. Considérons l'application $\varphi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$. Cette application est clairement une forme linéaire. De plus,

$$\forall f \in E,\ |\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty$$

Par conséquent, φ est continue sur E et $|||\varphi||| \leq 1$ (il s'agit de la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $|\cdot|$). Posons $f_n : t \in [0,1] \mapsto 1 - t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $f_n \in E$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. De plus, $\varphi(f_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ainsi

$$|||\varphi||| \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = 1$$

puis $|||\varphi||| = 1$.

Proposition Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés, ainsi que $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$, $|||\cdot|||_3$ les normes respectivement subordonnées à $(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$, $(\|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G)$ et $(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_G)$. Alors pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}_c(E,F) \times \mathcal{L}_c(F,G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et

$$|||v \circ u|||_3 \leq |||v|||_2 \cdot |||u|||_1$$

Remarque. Notamment si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et $|||\cdot|||$ désigne la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, alors pour $(u,v) \in \mathcal{L}_c(E)^2$,

$$|||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||$$

Définition Norme subordonnée ou norme d'opérateur pour les matrices

On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de deux normes N_1 et N_2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la norme subordonnée aux normes N_1 et N_2 de A comme la norme subordonnée de l'application linéaire $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mapsto AX$.

Remarque. Autrement dit

$$|||A||| = \sup_{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}} \frac{N_2(AX)}{N_1(X)} = \sup_{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\},\ N_1(x)\leq 1} \frac{N_2(AX)}{N_1(X)} = \sup_{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ N_1(X)=1} N_2(AX)$$