

## PLAN DU CHAPITRE

<b>I</b>	<b>Présentation des différents modes de transferts thermiques</b>	<b>3</b>
I.1	Convection	3
I.2	Rayonnement	3
I.3	Diffusion ou conduction thermique dans les solides	3
<b>II</b>	<b>Loi de Fourier</b>	<b>4</b>
II.1	Flux thermique - flux thermique surfacique	4
II.2	Vecteur densité volumique de flux thermique	5
II.3	Champ de température - équilibre thermodynamique local (ETL)	6
II.4	Loi de Fourier (phénoménologique)	7
	a - Enoncé	7
	b - Propriétés essentielles	7
<b>III</b>	<b>Les équations de la chaleur</b>	<b>8</b>
III.1	Système thermique élémentaire - capacité thermique	8
III.2	Ecriture du Premier Principe	9
	a - Enoncé général	9
	b - Enoncé "détaillé" : avec sources et puits (apport énergétique volumique)	9
III.3	Bilans locaux d'énergie et établissement de l'équation de diffusion thermique à 1D	10
	a - Géométrie cartésienne 1D	10
	b - Géométrie cylindrique	12
	c - Géométrie sphérique	13
	d - Cas général 3D	13
	e - Propriétés de l'équation de diffusion thermique	14

f - Conditions initiales et aux limites en 1D - conditions aux limites classiques	15
g - Echelles de temps et de longueur de la diffusion thermique : temps caractéristique $\tau_c$	15
III.4 Résolution de l'équation de la chaleur	16
a - Exemple 1 : température d'un barreau en régime permanent (résolution 1D)	16
b - Exemple 2 : température d'une cave (ondes thermiques - effet de peau thermique)	17
<b>IV Résistance et conductance thermiques en RP/ARQS thermique</b>	<b>18</b>
IV.1 ARQS thermique	18
IV.2 Expressions	18
a - Système de géométrie cartésienne	18
b - Système de géométrie cylindrique	18
c - Système de géométrie sphérique	19
IV.3 Lois d'association	20
IV.4 Analogie importante : conduction thermique et électrique	22
<b>V Conducto-convection</b>	<b>22</b>
V.1 Flux convectif et coefficient conducto-convectif $h$	22
a - Loi de Newton	22
b - Résistance conducto-convective	23
V.2 Exemple : expérience d'Ingenhousz	24
<b>VI Rayonnement thermique</b>	<b>24</b>
VI.1 Les différents flux surfaciques - corps opaque	24
VI.2 Rayonnement d'un corps opaque : flux surfaciques émis, partant, et radiatif	25
VI.3 Equilibre radiatif du corps opaque	26
VI.4 Rayonnement d'équilibre thermique	27
a - Définition	27
b - Spectre du rayonnement d'équilibre : loi de Planck	27
c - Loi de déplacement de Wien	29
d - Loi de Stephan	30
VI.5 Le corps noir	30
a - Modèle	31
b - Exemple simple : linéarisation du flux radiatif du corps noir	31
c - Exemples d'applications	31

## I Présentation des différents modes de transferts thermiques

### I.1 Convection

La convection est un mode de transfert thermique impliquant un déplacement macroscopique de matière, en général des fluides liquides ou gazeux.

L'exemple le plus courant est le cas du chauffage par convection dont le principe est basé sur la différence de densité de masses d'air portées à des températures différentes. Ainsi, les masses d'air les moins denses ont tendance à s'élever au dessus des masses d'air les plus froides qui sont plus denses. Ce phénomène porte le nom de **convection naturelle**.

EXEMPLE : **Convecteur électrique** (faire schéma)

Par ailleurs, il est également possible d'imposer un mouvement à des masses de fluide afin d'accélérer d'éventuels échanges thermiques par contact avec une paroi solide par exemple. On parle alors de **convection forcée**. Le mouvement de fluide entraîne ainsi, outre de la matière, un certain débit d'énergie thermique (puissance).

EXEMPLE : **Ventilation mécanique forcée (VMC)** : un hélice force le déplacement de masse d'air chaud (faire schéma)

### I.2 Rayonnement

A la fin du XIX<sup>ième</sup> siècle plusieurs physiciens comme Stephan, Wien et Boltzman se sont intéressés au transfert d'énergie par **rayonnement**. Leurs multiples découvertes sont notamment à l'origine des théories quantiques sur l'interaction matière-rayonnement.

Ce mode de transfert d'énergie se fait entre deux zones sans contact matériel (par exemple le rayonnement solaire nous parvient à travers le vide spatial)

EXEMPLES :

- ▶ Rayonnement solaire sur Terre.
- ▶ Rayonnement de la couche de  $CO_2$  (effet de serre).
- ▶ Rayonnement braises dans un foyer de cheminée (on néglige absence de convection et conduction).

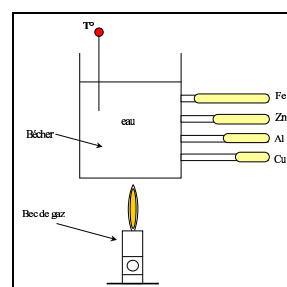
très simplement :

les corps chauds émettent un rayonnement électromagnétique de densité d'énergie :

$$u_{em} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_b T}} - 1}$$

### I.3 Diffusion ou conduction thermique dans les solides

L'énergie thermique peut également se transmettre dans la matière par phénomène de **diffusion**. C'est Jean-Baptiste Fourier au début du XIX<sup>ième</sup> qui fut à l'origine de cette découverte, il énonça en particulier une loi phénoménologique décrivant ce phénomène. L'étude détaillée de ce mode de transfert est précisément l'objet des paragraphes



qui suivent.

L'expérience d'Ingen Ousz, décrite en 1879, montre que la diffusion est un phénomène étroitement lié à la nature du matériau.

**Principe de l'expérience :** Des tiges géométriquement identiques de matériaux thermiquement conducteurs sont enduites de cire ; l'une des extrémités des tiges est mise en contact avec un thermostat. On constate à tout instant que la longueur de cire fondue n'est pas identique pour toutes les tiges, mais dépend du matériau constitutif.

### Conclusion :

- Le transfert thermique se fait des **zones chaudes vers les zone froides**.
- la **nature du matériau** est déterminante dans la vitesse du transfert thermique.

## II Loi de Fourier

### II.1 Flux thermique - flux thermique surfacique

Exactement comme l'analyse des transferts de charges qui permet de définir le courant électrique comme un flux, on définit le flux thermique (ou courant thermique) comme l'énergie thermique traversant une surface  $S$  par unité de temps soit :

$$I_Q = \mathcal{P}_Q = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

avec  $[I_Q] \equiv W$

Par ailleurs, autour du point  $P$  de surface  $dS$ , le flux élémentaire  $dI_Q$  traversant la surface élémentaire  $dS$  permet de définir le flux surfacique  $\varphi(P)$  :

$$dI_Q = \varphi(P) \cdot dS$$

ce qui permet de définir la **densité de flux thermique surfacique** :

$$\varphi(P) = \frac{dI_Q}{dS} \quad \text{avec} \quad [\varphi] \equiv W.m^{-2}$$

NB : le flux thermique à travers une surface  $S$  peut donc s'écrire :

$$I_Q = \iint_S \varphi(P) \cdot dS$$

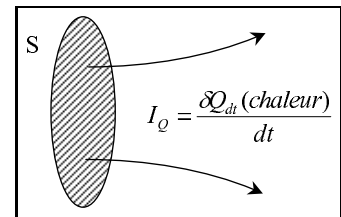


FIGURE XXI.2 – Flux thermique à travers une surface

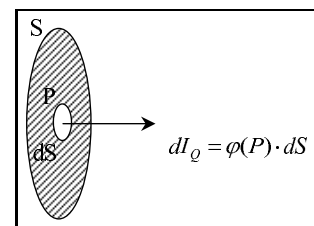


FIGURE XXI.3 – Flux surfacique

**Remarque II-1:** CONTINUITÉ DE  $\varphi(P)$ 

Définissons un système élémentaire d'épaisseur finitèsimale  $dz$  de face  $dS$  autour d'une face qui peut être non physique, le tout dans un matériau où règne un transfert thermique par

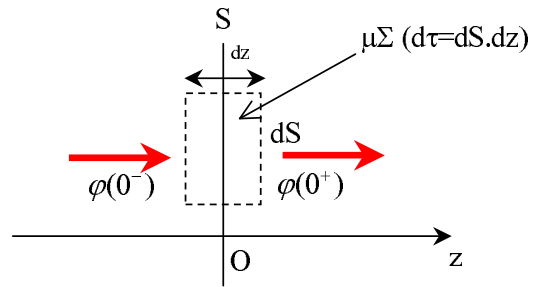


FIGURE XXI.4 – Continuité du flux thermique surfacique

L'énergie interne de ce système s'écrit :

$$\delta U = \rho \cdot u \cdot d\tau = \rho \cdot u \cdot dS \cdot dz$$

Le premier principe appliqué à ce système élémentaire d'énergie interne  $\delta U$  donne :

$$d(\delta U) = \delta Q^2$$

soit :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \frac{\delta Q^2}{dt} = dI_{Q_{total}} = dI_Q(0^-) - dI_Q(0^+) = (\varphi(0^-) - \varphi(0^+)) \cdot dS$$

soit si  $dz \rightarrow 0$  alors  $\delta U = 0 \Rightarrow d(\delta U) \rightarrow 0$

$$\boxed{\varphi(0^-) = \varphi(0^+)}$$

CONCLUSION : le flux surfacique est continu.

## II.2 Vecteur densité volumique de flux thermique

Par analogie avec le courant électrique caractérisé par le vecteur densité volumique de courant, on peut définir un vecteur densité volumique de flux thermique  $\vec{J}_Q$  tel que :

$$\boxed{\varphi(P) = \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P)}$$

Ainsi,

► Le flux thermique élémentaire s'écrit :

$$\boxed{dI_Q(P) = \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS}$$

► Le flux thermique à travers la totalité de la surface :

$$\boxed{I_Q = \iint_S \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS} \quad \text{ou} \quad \boxed{I_Q = - \iint_S \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS}$$

**Remarque II-2:**

- La continuité de  $\varphi$  impose également la continuité de  $\vec{J}_Q$  car  $\vec{n}(P^-) = \vec{n}(P^+)$ .
- Lorsque la surface  $S$  est fermée, on doit compter positivement l'énergie thermique entrant dans la surface, la normale étant orientée vers l'extérieur, la seconde expression de  $I_Q$  (sur l'intégrale fermée) **comporte un signe -**.

**II.3 Champ de température - équilibre thermodynamique local (ETL)**DÉFINITION HABITUELLE DE LA TEMPÉRATURE<sup>1</sup> :

$T$  est une variable intensive de tout système thermodynamique ; comme toute variable intensive, elle est définie uniquement **en situation d'équilibre** par :

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \quad \text{valable à l'équilibre uniquement}$$

donc :  $\boxed{\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V}$

$\Rightarrow$  nécessité d'une homogénéité de  $T$  dans le système  $T \neq f(x, y, z)$  (équilibre thermique).

DÉFINITION DE LA TEMPÉRATURE EN CONDUCTION THERMIQUE : ("entorse au règlement!!!")

inhomogénéité de température d'un "locus" avec son voisin, mais homogénéité à l'échelle de ce méso-système  $\Rightarrow$  on définit la température comme paramètre local de champ en appliquant l'hypothèse de l'**équilibre thermodynamique local ou ETL** :

$\boxed{T = T(P, t)} \Rightarrow$  la température devient une grandeur locale  $T(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, t)$ , c'est l'ETL !

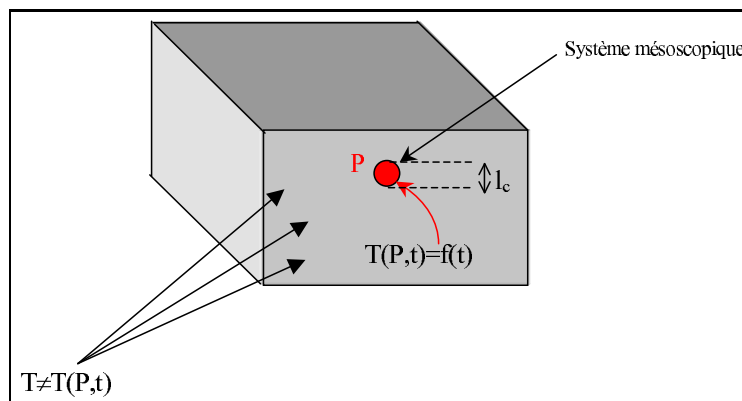


FIGURE XXI.5 – Equilibre thermodynamique local (ETL)

**Critère de validité ETL :** si  $l_c$  est la dimension de longueur caractéristique du méso-système et  $L_c$  la dimension caractéristique de la conduction de la chaleur alors ETL vérifié pour le méso-système si :

$$l_c \ll L_c$$

**NB :** la longueur  $L_c$  dépend des caractéristiques du système ( gradient de température et conductivité) et doit être évaluée en situation.

## II.4 Loi de Fourier (phénoménologique)

### a - Enoncé

RAPPEL : Loi d'Ohm locale

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

⇒ L'inhomogénéité de potentiel provoque l'apparition d'un courant des potentiels forts vers les potentiels faibles.

IDÉE : comme l'inhomogénéité de  $T$  est responsable du transfert thermique, on construit une loi analogue :

$$\vec{J}_Q(P, t) = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T(P, t) \quad (\text{XXI.1})$$

le coefficient  $\lambda$  étant la **conductivité thermique du matériau**.

**NB :**  $[\lambda] = P.L^{-1}K^{-1} \equiv W.m^{-1}.K^{-1}$

On donne ci-dessous et à titre d'exemple quelques valeurs de ce coefficient pour divers matériaux :

Matériau	$\lambda (W.m^{-1}.K^{-1})$
Argent	418
Acier	16
Verre	1, 2
laine de verre	$40.10^{-3}$
air	$24.10^{-3}$

### b - Propriétés essentielles

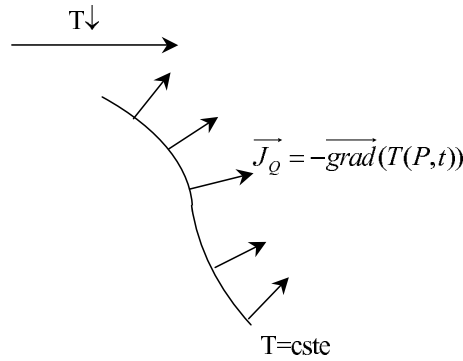
- $\vec{J}_Q$  est dirigé vers les zones de décroissance de la température locale.
- $\vec{J}_Q$  est normal aux surfaces isothermes.

Multiplions scalairement la loi de Fourier par l'élément de longueur vectoriel  $\vec{dl}$  d'un trajet curviligne quelconque :

$$\vec{J}_Q \cdot \vec{dl} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{dl} = -\lambda dT$$

Si  $\vec{dl}$  est un élément de trajet isotherme ( $dT = 0$ ), alors :

$$\vec{J}_Q \cdot \vec{dl} = 0$$



- La loi de Fourier est valide uniquement dans l'hypothèse d'un faible gradient de température ; typiquement  $\Delta T \sim 100 \text{ K max}$  sur  $1m$ .
- La loi de Fourier est linéaire si l'on suppose  $\lambda \neq f(T)$
- Dans un cas unidimensionnel (fréquent), la loi de Fourier prend la forme simple :

$$J_{Q,x}(x,t) = -\lambda \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (\text{XXI.2})$$

### III Les équations de la chaleur

#### III.1 Système thermique élémentaire - capacité thermique

On considère un système de faible dimension dit *système élémentaire* "découpé" dans un milieu **condensé** homogène de caractéristiques connues. On définit les caractéristiques suivantes du système :

- volume élémentaire :  $d\tau$
- masse élémentaire :  $dm$
- masse volumique :  $\rho = \frac{dm}{d\tau}$
- énergie interne élémentaire :  $\delta U$

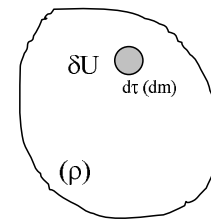


FIGURE XXI.6 – Système thermique élémentaire

On définit la capacité thermique élémentaire du système par :

$$dC = \frac{d}{dT} (\delta U)$$

La capacité thermique volumique s'écrit par ailleurs :

$$c_{vol} = \frac{dC}{d\tau} = \underbrace{\frac{dC}{dm}}_{=c_m} \times \underbrace{\frac{dm}{d\tau}}_{=\rho}$$

d'où :



$$dC = c_{vol} \cdot d\tau = \rho c_m \cdot d\tau$$

**Remarque III-1:**

Pour un milieu condensé, on a :

$$c_{m,P} = c_{m,V} = c_m$$

**III.2 Ecriture du Premier Principe****a - Enoncé général**

Si le système élémentaire de volume  $d\tau$  subit une transformation élémentaire de durée  $dt$  par échange de travail et chaleur avec l'extérieur, le premier principe s'écrit pour l'intervalle de temps  $dt$  :

$$d(\delta U)_{dt} = \delta^2 Q + \delta^2 W$$

$$\text{avec } \delta^2 W = \delta^2 W_{pression} + \delta^2 W_{autre}$$

Ramené à l'unité de temps, ce bilan de puissance élémentaire devient à volume constant qui constitue le cas le plus fréquent dans notre étude :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \underbrace{\frac{\delta^2 Q}{dt}}_{=dI_Q} + \frac{\delta^2 W}{dt} \stackrel{V=cste}{=} dI_Q + \frac{\delta^2 W_{autre}}{dt} = dI_Q + d\mathcal{P}_{autre}$$

En outre, d'après la définition de la capacité thermique  $dC$  on peut écrire :

$$d(\delta U) = dC \cdot dT = \rho c_m \cdot d\tau \cdot dT \quad \text{soit} \quad \frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot d\tau \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

En égalisant les deux derniers résultats, on dégage l'expression générale du premier principe :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot d\tau \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = dI_Q + d\mathcal{P}_{autre} \quad (\text{XXI.3})$$

**b - Enoncé "détaillé" : avec sources et puits (apport énergétique volumique)**

HYPOTHÈSE (CLASSIQUE POUR CE CHAPITRE) : système solide indéformable  $\Rightarrow$  les sources de travail ont une origine autre que les efforts de pression.

QUESTION : origine et expression de  $\frac{\delta^2 W_{autre}}{dt}$  ???

**On recense 2 causes classiques :**

- Puissance volumique Joule cédée (source) par un courant électrique interne au système :

$$+d\mathcal{P}_{\text{autre}} = \frac{\delta^2 W_{\text{autre}}}{dt} = d\mathcal{P}_{el} = \vec{J}_{el} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{J_{el}^2}{\gamma} d\tau$$

d'où la puissance volumique :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}_{el}}{d\tau} = \sigma_{el} = \frac{J_{el}^2}{\gamma}}$$

- Puissance volumique cédée (source) ou consommée (puits) par une réaction chimique ou nucléaire :

$$+d\mathcal{P}_{\text{autre}} = \frac{\delta^2 W_{\text{autre}}}{dt} = d\mathcal{P}_r = \sigma_r \cdot d\tau$$

avec la puissance volumique :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}_r}{d\tau} = \sigma_r}$$

Finalement, dans l'un ou l'autre des deux cas, on retiendra simplement :  $\frac{\delta^2 W_{\text{autre}}}{dt} = d\mathcal{P} = \sigma \cdot d\tau$   
avec  $\sigma$  puissance volumique cédée au système.

Conséquence : le bilan d'énergie (1<sup>er</sup> principe pour les solides  $V = \text{cste}$ ) s'écrit :

$$\boxed{\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot d\tau \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = dI_Q + \sigma \cdot d\tau} \quad (\text{XXI.4})$$

### III.3 Bilans locaux d'énergie et établissement de l'équation de diffusion thermique à 1D

#### a - Géométrie cartésienne 1D

EQUATION LOCALE DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE :

Considérons le cas d'un système indéformable d'axe  $[Ox]$ , de surface de base  $S$ , siège d'un courant thermique de densité  $\vec{J}_Q(x, t)$ . On considère le problème ne dépendant spatialement que de la variable  $x$ , mais non nécessairement stationnaire (mais à constante de temps élevée) :

$$\boxed{\text{système 1D} \Leftrightarrow \vec{J}_Q = \vec{J}_Q(x, t)}$$

On néglige les flux thermiques latéraux.

Soit le système thermique élémentaire de longueur  $dx$  et de base  $S$  (tranche élémentaire).

Les échanges thermiques se produisant sur les deux faces uniquement, évaluons les flux thermiques échangées sur chaque face ; on a :

- en  $x$  :

$$I_Q(x, t) = \iint_{S(x)} \vec{J}_Q(x, t) \cdot d\vec{S} = \vec{J}_Q(x, t) \cdot \vec{e}_x S = J_Q(x, t) \cdot S$$

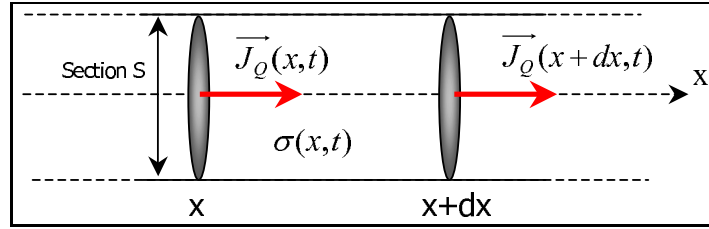


FIGURE XXI.7 – Diffusion thermique unidimensionnelle axiale

► en  $x + dx$  :

$$I_Q(x + dx, t) = \iint_{S(x+dx)} \vec{J}_Q(x + dx, t) \cdot d\vec{S} = \vec{J}_Q(x + dx, t) \cdot \vec{e}_x S = J_Q(x + dx, t) \cdot S$$

Le bilan algébrique de flux thermique donne ensuite :

$$dI_Q = I_Q(x, t) - I_Q(x + dx, t) = [J_Q(x, t) - J_Q(x + dx, t)] S$$

soit après DL1 :

$$dI_Q = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} d\tau$$

Le premier principe s'écrit alors pour ce système (1D), en considérant une éventuelle source de puissance volumique  $\sigma$  :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m d\tau \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} d\tau + \sigma \cdot d\tau$$

soit encore en posant l'énergie interne volumique du système  $u_v = \frac{\delta U}{d\tau}$  :

$$\frac{\partial u_v(x, t)}{\partial t} = \rho c_m \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} + \sigma \quad (\text{XXI.5})$$

EQUATION DE LA DIFFUSION :

On rappelle que :

$$\rho \cdot c_m \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_Q}{\partial x} + \sigma \quad (\text{XXI.6})$$

Enfin, en injectant la loi de Fourier réduite à une dimension  $J_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$  dans cette équation, on dégage finalement l'équation de la chaleur à 1D :

$$\rho \cdot c_m \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \sigma \quad (\text{XXI.7})$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{\rho c_m}} \quad \text{Equation de diffusion de la chaleur 1D} \quad (\text{XXI.8})$$

avec  $D = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_m}$  diffusivité thermique ou coefficient de diffusion thermique.

**NB :**  $[D] = L^2 \cdot T^{-1} \equiv m^2 \cdot s^{-1}$

**Remarque III-2:**

On retrouve une équation de diffusion type "équation de Fourier" rencontrée dans l'étude de l'effet de peau 1D :  $\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}$  avec  $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$  coefficient de diffusion de même dimension.

**b - Géométrie cylindrique**

On considère cette fois un système cylindrique creux de rayons interne et externe  $R_1$  et  $R_2$ , de hauteur  $h \gg R_1, R_2$  supposée assez importante pour négliger tout effet de bord.

Cette géométrie impose un problème radial 1D :

$$\boxed{\text{géométrie cylindrique invariante par translation selon } [Oz] \Leftrightarrow \vec{J}_Q = J_Q(r,t) \cdot \vec{e}_r}$$

EQUATION LOCALE DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE :

On isole un système élémentaire compris entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  (hauteur  $h$ ) dans ce cylindre de volume :

$$d\tau = 2\pi r h dr$$

Réalisons un bilan des flux thermiques sur les faces interne ( $r$ ) et externe ( $r + dr$ ) de ce système élémentaire :

► en  $r$  :

$$I_Q(r,t) = \iint \vec{J}_Q(r,t) \cdot \vec{e}_r dS = 2\pi r h \cdot J_Q(r,t)$$

► en  $r + dr$  :

$$I_Q(r + dr,t) = \iint \vec{J}_Q(r + dr,t) \cdot \vec{e}_r dS = 2\pi(r + dr)h \cdot J_Q(r + dr,t)$$

Le bilan algébrique de flux thermique donne :

$$dI_Q = I_Q(r,t) - I_Q(r + dr,t) = 2\pi h [r \cdot J_Q(r,t) - (r + dr) \cdot J_Q(r + dr,t)]$$

soit :

$$dI_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = -2\pi h \frac{\partial (r \cdot J_Q(r,t))}{\partial r} dr$$

Enfin, en multipliant haut et bas par  $r$  dans le second membre :

$$dI_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} \underbrace{2\pi r dr h}_{=d\tau}$$

soit finalement :

$$dI_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} d\tau$$

En écrivant le premier principe, et en considérant d'éventuelles sources de puissance thermique, il vient le bilan de conservation d'énergie suivant :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} d\tau + \sigma \cdot d\tau$$

soit :

$$\frac{\partial u_v(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_Q(r, t))}{\partial r} + \sigma \quad (\text{XXI.9})$$

EQUATION DE LA DIFFUSION :

La loi de Fourier s'écrivant  $J_Q(r, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \Big|_{\vec{e}_r} = -\lambda \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}$  pour un problème ne dépendant que de la variable radiale cylindrique, l'équation de la chaleur devient :

$$\rho c_m \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = +\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + \sigma$$

soit finalement :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = +D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + \frac{\sigma}{\rho c_m} \quad (\text{XXI.10})$$

### c - Géométrie sphérique

A TITRE D'INFORMATION : EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = +D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{\rho c_m} \quad (\text{XXI.11})$$

### d - Cas général 3D

Reprenons l'expression du premier principe établi sur le système élémentaire de volume  $d\tau$ , partie d'un système macroscopique de volume  $V$ , soit :

$$\frac{d(\delta U)}{dt} = \rho c_m \cdot \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau = dI_Q + \sigma \cdot d\tau$$

Intégrons l'équation ci-dessus sur le volume total  $V$  du système; il vient :

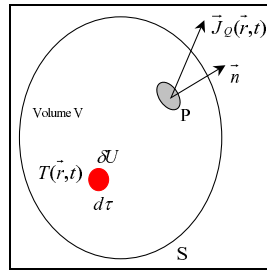


FIGURE XXI.8 – Diffusion thermique 3D

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \int_{\Sigma(V)} dI_Q + \iiint_V \sigma \cdot d\tau = - \oint_{S/V} \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} + \iiint_V \sigma \cdot d\tau$$

En outre, le théorème de Stokes permet de dégager l'égalité suivante :

$$\iiint_V \rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = - \iiint_V \left[ \text{div}(\vec{J}_Q) + \sigma \right] \cdot d\tau$$

d'où l'on tire en identifiant les intégrands :

$$\boxed{\rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{J}_Q) + \sigma}$$

En injectant la loi de Fourier dans cette dernière équation, il vient :

$$\rho c_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \sigma$$

On en déduit finalement l'équation générale de la diffusion thermique à laquelle satisfait la température du système :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = +D\Delta T + \frac{\sigma}{\rho c_m}} \text{ (Equation de la diffusion généralisée à 3D)} \quad (\text{XXI.12})$$

### e - Propriétés de l'équation de diffusion thermique

- L'équation de diffusion est en dérivée d'ordre 2 par rapport à l'espace  $\xRightarrow{1D}$  si  $T(x, t)$  est solution, alors  $T(-x, t)$  l'est aussi.
- L'équation de diffusion est en dérivée d'ordre 1 par rapport au temps, elle est non invariante par renversement du temps  $\Rightarrow$  la diffusion thermique est un phénomène irréversible :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D\Delta T(x, t) + \frac{\sigma}{\rho c_m} \xrightarrow{t \rightarrow -t} -\frac{\partial T(x, -t)}{\partial t} = D\Delta T(x, -t) + \frac{\sigma}{\rho c_m} \neq \text{équation de la diffusion}$$

- L'équation de diffusion est linéaire  $\Rightarrow$  toute combinaison linéaire de solutions est solution.

## f - Conditions initiales et aux limites en 1D - conditions aux limites classiques

L'équation de la diffusion thermique sans source s'écrit en version 1D cartésienne :

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x, t)$$

- La dérivée temporelle est d'ordre 1,  
 $\Rightarrow$  **nécessite une seule C.I. pour une résolution complète**  
 ex :  $T(x, 0)$  (en 3D :  $T(\vec{r}, t)$ )
- La dérivée spatiale est d'ordre 2,  
 $\Rightarrow$  **nécessite deux C.L. fixées pour une résolution complète**  
 ex :  $T(x = 0, t)$  et  $T(x = L, t)$  (en 3D :  $T(\vec{r}, t)$ )

Parmi les C.L. les plus classiques, on trouve :

- ◇ Système en contact avec un thermostat à l'abscisse  $x = L$  (problème 1D)  $\Rightarrow$  **Température de surface fixée** :

$$T(L) = T_{thermo}$$

- ◇ Surface parfaitement calorifugé à l'abscisse  $x = L \Rightarrow$  :

$$\left. \vec{J}_Q \right|_{x=L} \cdot \vec{n}_{surf} = 0$$

- ◇ Contact entre deux solides différents à l'abscisse  $x = L \Rightarrow$  **continuité du flux thermique de part et d'autre de l'interface** :

$$\begin{aligned} I_Q(L^-) &= I_Q(L^+) \quad \Rightarrow \quad \varphi(L^-, t) = \varphi(L^+, t) \\ \Rightarrow \quad \vec{J}_Q(L^-, t) \cdot \vec{n}_{-+} &= \vec{J}_Q(L^+, t) \cdot \vec{n}_{-+} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{J}_Q(L^-, t) = \vec{J}_Q(L^+, t)}$$

g - Echelles de temps et de longueur de la diffusion thermique : temps caractéristique  $\tau_c$ 

QUESTION : comment dégager un temps caractéristique  $\tau_c$  de la diffusion thermique en fonction des caractéristiques intrinsèques du système i.e. ( $\underbrace{\lambda}_{\text{thermo.}}, \underbrace{\text{dimension}}_{\text{géométr.}}$ ) ?

- ◇ PAR ANALYSE DIMENSIONNELLE "CLASSIQUE".

Prenons comme caractéristiques intrinsèques du système :  $\begin{cases} L_c : \text{longueur caractéristique} [L_c] = L \\ D : \text{diffusivité du matériau} [D] = L^2 T^{-1} \end{cases}$

**Méthode** : on veut former une grandeur homogène à un temps avec  $L_c$  et  $D$ . Posons :

$$\tau_c = L_c^\alpha \cdot D^\beta$$

soit :

$$[\tau_c] = T = L^{\alpha+2\beta} T^{-\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Bilan :

$$\tau_c = \frac{L_c^2}{D}$$

◇ PAR ANALYSE DE LA STRUCTURE DE L'ÉQUATION.

Supposons un système thermique unidimensionnel de variable d'espace  $x$  que l'on soumet, à partir du régime stationnaire, à une brusque variation de température de valeur  $\Delta T$  sur une longueur caractéristique typique  $L_c$ . Appelons  $\tau_c$  le temps caractéristique de relaxation du système, i.e. le temps nécessaire pour retrouver le régime permanent.

En traduisant en terme d'ordre de grandeur l'équation de la chaleur à partir de ces grandeurs élémentaires typiques, il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\tau_c} \equiv D \frac{\Delta T}{(L_c)^2}$$

On peut alors dégager l'expression du temps caractéristique d'évolution, avec :

$$\tau_c \simeq \frac{L_c^2}{D} \quad (\text{XXI.13})$$

Cette relation peut alors être adaptée à la géométrie du problème, permettant de dégager  $\tau_c$  dans des cas simples, par exemple :

### III.4 Résolution de l'équation de la chaleur

#### a - Exemple 1 : température d'un barreau en régime permanent (résolution 1D)

On envisage ici un conducteur thermique cylindrique dont les dimensions de la section  $S$  sont très petites face à la longueur. On appelle  $[Ox]$  son axe. On suppose le régime permanent et l'absence de terme de source ou puits,

$$\text{soit : } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas l'équation de la diffusion s'écrit simplement :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$$

soit après une première intégration :

$$\frac{dT}{dx} = A = -\frac{J_{Q,x}}{\lambda}$$

et après une seconde intégration :



$$T(x) = Ax + B = -\frac{J_{Q,x}}{\lambda} \times x + B$$

La variation de température est donc une fonction linéaire décroissante de la position.

Imaginons que les deux extrémités du cylindre en  $x = 0$  et  $x = L$  soient maintenues à des températures connues respectivement  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_2 < T_1$ , alors :

$$\begin{cases} T(0) = T_1 = B \\ \text{et} \\ T(L) = T_2 = AL + B \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} A = \frac{T_2 - T_1}{L} = -\frac{J_{Q,x}}{\lambda} \\ B = T_1 \end{cases}$$

D'où la fonction température :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

On constate, dans ce cas simple, une évolution affine de la température entre les deux frontières aux températures imposées.

### b - Exemple 2 : température d'une cave (ondes thermiques - effet de peau thermique)

Supposons un problème unidimensionnel selon  $[Ox)$ , dans lequel la température en  $x = 0$  subit une variation sinusoïdale (modélisation grossière des saisons par exemple) autour d'une valeur moyenne  $T_m$  :

$$T(0, t) = \theta_m \times \cos \omega t + T_m$$

$T_m$  désignant une température moyenne.

Posons  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_m$

Postulons que la solution est de la forme :

$$\theta(x, t) = \theta(x) \times \cos(\omega t + \varphi)$$

En formalisme complexe, l'équation de la diffusion devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - j \frac{\omega}{D} \theta = 0$$

**Exercice de cours:** (III.4) - n° 1. Résolution du régime harmonique

❶ Montrer que la solution finale s'écrit pour  $T(x, t)$  :

$$T(x, t) = \theta_m \times e^{-\frac{x}{\delta}} \times \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + T_m$$

avec  $\delta$  que l'on précisera en fonction de  $D$  et  $\omega$ , et dont on indiquera la dimension.

- ② Indiquer des analogies avec d'autres phénomènes relatifs à d'autres branches de la physique.
- ③ A quelle profondeur faut-il enterrer une cave pour limiter les fluctuations thermiques annuelles ? On donne pour le sol  $D = 0,28 \cdot 10^{-6} \text{ S.I.}$ .

## IV Résistance et conductance thermiques en RP/ARQS thermique

### IV.1 ARQS thermique

EN LIVE!!!

### IV.2 Expressions

#### a - Système de géométrie cartésienne

Reprenons le système précédent 1D de géométrie cylindrique, d'axe  $[Ox]$ , de longueur  $L$ , et de section  $S$  soumis aux températures  $T_1$  et  $T_2 (< T_1)$  à ses extrémités.

La loi de Fourier fournit l'expression du vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{J}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{dT}{dx} \cdot \vec{e}_x = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot \vec{e}_x$$

Par ailleurs, en introduisant le flux thermique à travers la section transverse du barreau :

$$I_Q = \iint_S \vec{J}_Q \cdot \vec{dS} = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} \iint_S dS = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{L} \times S$$

En rappelant l'analogie électro-thermique suivante :  $\begin{cases} V \leftrightarrow T \\ I \leftrightarrow I_Q \end{cases}$

On peut alors définir, toujours par analogie avec l'électricité, les résistance et conductance thermiques, soient respectivement :

$$R_{elec} = \frac{\Delta V}{I} \quad \leftrightarrow \quad R_Q = \frac{T_1 - T_2}{I_Q} = \frac{L}{\lambda S} \quad (\text{XXI.14})$$

et

$$G_{elec} = \frac{I}{\Delta V} \quad \leftrightarrow \quad G_Q = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{L} \quad (\text{XXI.15})$$

#### b - Système de géométrie cylindrique

On envisage un système de géométrie cylindrique sans effet de bord, de rayons interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , dont les surfaces sont maintenues aux températures respectives  $T(R_1)$  et  $T(R_2)$  avec  $T(R_1) > T(R_2)$ . On suppose le régime thermique permanent.

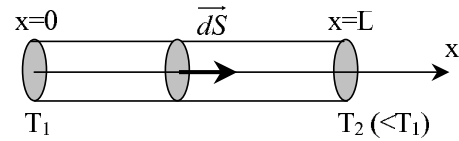


FIGURE XXI.9 – Barreau soumis à une différence de température

Il y a conservation du flux thermique sur un cylindre de rayon  $r \in [R_1, R_2]$  et de hauteur  $h$  quelconque, on a :

$$I_Q = \iint \vec{J}_Q \cdot \vec{n} dS = 2\pi r h J_Q(r) = -2\pi r h \lambda \frac{dT}{dr}$$

soit en séparant les variables :

$$I_Q \frac{dr}{r} = -2\pi h \lambda dT$$

qui donne en intégrant entre  $R_1$  et  $R_2$  :

$$I_Q \ln \frac{R_2}{R_1} = -2\pi h \lambda [T(R_2) - T(R_1)] \quad (\text{XXI.16})$$

On isole ainsi l'expression de la résistance thermique :

$$R_Q(\text{cyl}) = \frac{T(R_1) - T(R_2)}{I_Q} = \frac{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi h \lambda} \quad (\text{XXI.17})$$

On peut également dégager le profil de température en intégrant entre  $R_1$  et  $r < R_2$ , soit :

$$I_Q \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) = -2\pi h \lambda [T(r) - T(R_1)]$$

En divisant par l'équation [XXI.16](#), on en tire l'expression du profil de température :

$$T(r) = [T(R_2) - T(R_1)] \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + T(R_1)$$

#### Remarque IV-1:

Cette méthode d'intégration directe est à privilégier lorsque l'énoncé ne fournit pas l'expression de l'opérateur Laplacien scalaire dans le système de coordonnées adapté au problème. Dans le cas contraire, il est facile d'intégrer l'équation de la chaleur.

### c - Système de géométrie sphérique

On suppose un système sphérique de rayons intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ .

Si la température du système possède une géométrie sphérique isotrope type  $T(r)$  (toujours en régime permanent), alors les zones de conservation du flux thermique sont maintenant des sphères de rayon  $r \in [R_1, R_2]$ . On peut écrire :

$$I_Q = \iint_S \vec{J}_Q \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 J_Q(r) = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr}$$

qui donne par séparation des variables :

$$I_Q \frac{dr}{r^2} = -4\pi\lambda dT$$

et par intégration :

$$I_Q \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = 4\pi\lambda [T(R_1) - T(R_2)]$$

soit finalement la résistance thermique :

$$R_{th}(sph) = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{4\pi\lambda} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2} \quad (XXI.18)$$

On tire également facilement l'expression du profil de température :

$$T(r) = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} [T(R_2) - T(R_1)] + T(R_1)$$

### IV.3 Lois d'association

On considère deux matériaux de conductivités différentes en contact sur une section commune et siège d'un même flux thermique  $\Phi$ . Réalisons encore une fois l'analogie avec le domaine électrique :

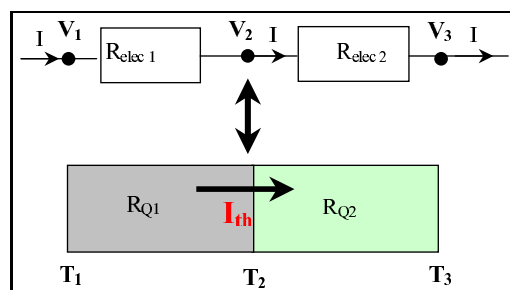


FIGURE XXI.10 – Association "en série" de résistances thermiques

**rappel :** la continuité de  $\vec{J}_Q$  à l'interface entre les deux milieux impose la continuité de la température.

HYPOTHÈSE : contact parfait à l'interface entre les deux milieux.

◇ EN SÉRIE En formant la différence de température en entrée et sortie de l'association, il vient :

$$T_1 - T_3 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) = [R_{Q1} + R_{Q2}] \times I_Q$$

ainsi la résistance thermique équivalente s'écrit :

$$R_{Q_{tot}} = \frac{T_1 - T_3}{I_Q} = R_{Q_1} + R_{Q_2} \quad (\text{XXI.19})$$

EXEMPLE : mur entouré de deux isolants

$$R_{Q_{tot}} = R_{Q_1} + R_{mur} + R_{Q_2} = \frac{L_1}{\lambda_1 S} + \frac{L_{mur}}{\lambda_{mur} S} + \frac{L_2}{\lambda_2 S}$$

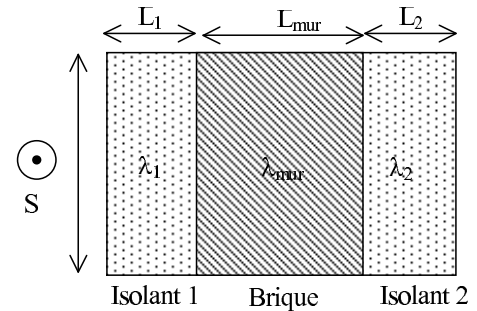


FIGURE XXI.11 – Double isolation d'un mur

◇ EN PARALLÈLE : Si l'association est maintenant faite «en parallèle», c'est cette fois le flux thermique qui se subdivise en autant de dérivation. Soit par exemple pour une dérivation en deux résistances :

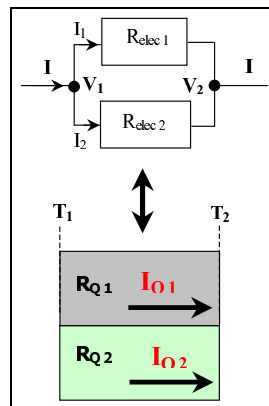


FIGURE XXI.12 – Association "en parallèle" de résistances thermiques

Cette fois, il convient de sommer les flux thermiques soit :

$$I_{Q_{tot}} = I_{Q_1} + I_{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{Q_1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{Q_2}} = (T_1 - T_2) [G_{Q_1} + G_{Q_2}]$$

On en déduit la conductance thermique équivalente de cette association :

$$G_{Q_{tot}} = \frac{I_{Q_{tot}}}{T_1 - T_2} = G_{Q_1} + G_{Q_2} \quad (\text{XXI.20})$$

## IV.4 Analogie importante : conceptions thermique et électrique

GRANDEUR THERMIQUE	GRANDEUR ÉLECTRIQUE
$\vec{J}_Q$	$\vec{J}$
$\mathcal{P}_Q = I_Q = \iint_S \vec{J}_Q(P) \cdot \vec{n}(P) dS$	$I = \iint_S \vec{J}(P) \cdot \vec{n}(P) dS$
$T(P)$	$V(P)$
$\lambda$	$\gamma$
$\vec{J}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$	$\vec{J} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$
$R_Q(1D) = \frac{L}{\lambda S}$	$R_{elec} = \frac{L}{\gamma S}$
$I_Q = C_{th} \frac{dT}{dt}$	$I = C \frac{dV}{dt}$

## V Conducto-convection

V.1 Flux convectif et coefficient conducto-convectif  $h$ 

## a - Loi de Newton

Supposons une surface de matériau solide localement plane à la température  $T_p$  en contact avec un écoulement fluide dont la vitesse est parallèle à la surface. Compte tenu de la viscosité du fluide, il existe une zone appelée «couche limite» d'épaisseur  $\delta_l$  dans laquelle la vitesse du fluide diminue pour finalement s'annuler au contact de la surface du matériau (CL pour un fluide visqueux).

**QUESTION** : A priori, échange entre la surface et le fluide. Comment écrire les échanges thermiques entre le matériau solide et le fluide ?

**Hypothèses :**

- ◇ Couche limite :  $\delta_l$  zone d'écoulement laminaire (température non homogène en absence de turbulence)
- ◇ Problème "1D" + régime permanent  $\Rightarrow T(z)$

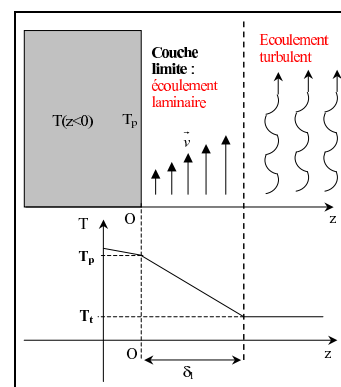


FIGURE XXI.13 – Transfert thermique conducto-convectif

- ◇ Profil de  $T(z)$  linéaire dans  $\delta_l$
- ◇ Echange par conduction dans  $\delta_l$  (hypothèse "forte" !!!)

Dans la couche limite de l'écoulement fluide de conductivité  $\lambda_f$ , c'est à dire pour  $0 < z < \delta_l$ , on peut utiliser un modèle de conduction, en négligeant toute turbulence d'homogénéisation au voisinage de la surface :

$$\vec{J}_Q = -\lambda_f \left( \frac{dT}{dz} \right)_{0+} \vec{e}_z \stackrel{prof.lin}{\sim} -\lambda_f \frac{(T_f(\delta_l) - T_p)}{\delta_l} \vec{e}_z$$

ainsi, le flux thermique surfacique conducto-convectif s'écrit :

$$\varphi_{interf}^{cc} = \vec{J}_Q \cdot \vec{e}_z = -\lambda_f \frac{[T_f(\delta_l) - T_p]}{\delta_l} = h [T_p - T_f(\delta_l)] \quad (\text{Loi de la convection de Newton}) \quad (\text{XXI.21})$$

avec :

$$h = \frac{\lambda_f}{\delta_l} \quad \text{coefficient de transfert convectif}$$

**NB :**  $[h] = P.L^{-2}.K^{-1} \equiv W.m^{-2}.K^{-1}$

### b - Résistance conducto-convective

Dans le cas d'un transfert conducto-convectif entre une paroi solide de surface  $S$  et un fluide de températures respectives  $T_p$  et  $T_f$  ( $T_p > T_f$ ),

on peut écrire le flux thermique conducto-convectif :

$$I_Q^{cc} = \varphi \times S = h(T_p - T_f)S$$

et définir la résistance thermique de conducto-convection par :

$$R_Q = \frac{T_p - T_f}{I_Q} = \frac{1}{hS} \quad (\text{XXI.22})$$

**EXEMPLE :** mur avec isolant et contact avec fluide de part et d'autre.

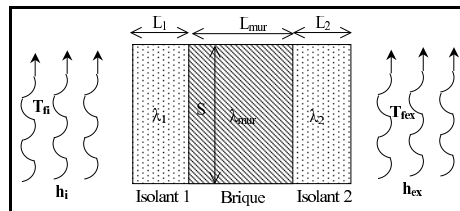


FIGURE XXI.15 – Résistance totale d'un mur isolé avec conducto-convection

D'après la loi d'association des résistances série, on a immédiatement :

$$R_{Q_{tot}} = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_{mur}}{\lambda_{mur}} + \frac{L_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_{ex}} \right)$$

## V.2 Exemple : expérience d'Ingenhousz

On étudie un fil cylindrique d'axe  $[Ox]$  de rayon  $r$  de longueur  $L$ , constitué d'un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ . L'extrémité  $x = 0$  est maintenue à la température  $T_1$  ; l'extérieur est à la température  $T_e$ . La puissance perdue par un élément de fil de surface  $\sigma$ , de température  $T$  en contact avec l'air extérieur en mouvement est donné par la loi de Newton :

$$\mathcal{P} = h(T - T_e)\sigma$$

On se placera en régime permanent.

- ❶ Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $T(x)$ .
- ❷ Si on suppose  $L$  suffisamment long (condition à préciser), déterminer  $T(x)$ .
- ❸ On considère deux fils identiques, l'un en cuivre, l'autre en étain, recouverts de paraffine. La paraffine fond à  $60^\circ\text{C}$ . On note qu'elle fond en  $x_1 = 15,6 \text{ cm}$  pour le fil de cuivre et en  $x_2 = 6,4 \text{ cm}$  pour le fil en étain. Déterminer la conductivité thermique de l'étain sachant que celle du cuivre est  $\lambda_{Cu} = 390 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (le coefficient de convection  $h$  est le même pour les deux fils).
- ❹ Déterminer la puissance perdue par le fil vers l'air extérieur (on donnera deux méthodes de résolution).

## VI Rayonnement thermique

### VI.1 Les différents flux surfaciques - corps opaque

Dans le cas du rayonnement thermique, le transfert thermique s'effectue :

- ◇ sans contact matériel (concerne la diffusion)
- ◇ sans milieu matériel
- ◇ sans transport de matière (concerne la convection)

et comme pour le phénomène de conduction thermique, on est amené à introduire une notion de flux surfacique  $\varphi$ .

Supposons un corps émettant une puissance totale par rayonnement  $\Phi$  ; alors une surface élémentaire  $dS$  reçoit par rayonnement une puissance élémentaire  $d\Phi$  ce qui permet de définir le flux surfacique :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS} \quad (\text{XXI.23})$$

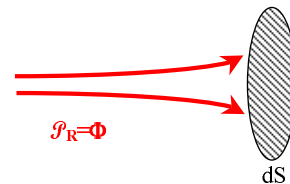


FIGURE XXI.16 – Flux surfacique

$$[\varphi] = P.L^{-2}$$

LES DIFFÉRENTS FLUX SURFACIQUES RELATIFS À UN CORPS :



Lorsqu'un flux incident  $\Phi_i$  arrive sur un corps, une proportion  $\Phi_r$  de ce flux est réfléchi, une autre  $\Phi_a$  est absorbée, en enfin le complément  $\Phi_t$  correspond au flux d'énergie transmise à travers le corps. La conservation de l'énergie conduit au bilan énergétique de flux suivant :

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t$$

soit en terme de flux surfaciques

$$\varphi_i = \varphi_r + \varphi_a + \varphi_t$$

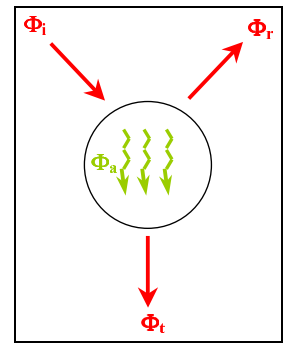


FIGURE XXI.17 – Bilan énergétique de flux

#### Remarque VI-1: RÉFLEXION SPÉCULAIRE ET DIFFUSE

Le flux réfléchi  $\Phi_r$  peut suivre les lois de l'optique de Descartes si la dimension moyenne des aspérités du matériau est très inférieure à la longueur d'onde (réflexion spéculaire). Dans le cas contraire, le flux réfléchi est diffusé dans tout le demi-espace face au matériau (réflexion diffuse). Dans le cas général, la réflexion est à la fois diffuse et spéculaire.

#### CAS LIMITES :

- ◇ Si  $\varphi_r = \varphi_a = 0$  et  $\varphi_i = \varphi_t$  alors le corps est dit **parfaitement transparent**. C'est le cas de nombreux gaz incolores.
- ◇ Si  $\varphi_a = \varphi_t = 0$  et  $\varphi_i = \varphi_r$  alors le corps est dit **parfaitement réfléchissant**. C'est le cas des surfaces métalliques avec une bonne approximation.
- ◇ Si  $\varphi_t = 0$  et  $\varphi_i = \varphi_a + \varphi_r$  alors le corps est dit **parfaitement opaque**.

**IMPORTANT** : la suite du cours se limite à l'étude des corps opakes  $\Rightarrow$  on aura toujours  $\varphi_t = 0$ .

### VI.2 Rayonnement d'un corps opaque : flux surfaciques émis, partant, et radiatif

#### Définition VI-1: RAYONNEMENT THERMIQUE

On appelle rayonnement thermique, l'énergie de nature **électromagnétique** émise par un corps de température  $T$ . Il est caractérisé par le flux surfacique émis :

$\varphi_e$

correspondant à la puissance émise par unité de surface du corps.

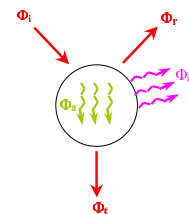


FIGURE XXI.18 – Flux d'émission de rayonnement

**Propriété VI-1:**

Le rayonnement thermique émis par un corps est indépendant du rayonnement incident sur ce dernier.

**NB :** la puissance totale émise par rayonnement par ce corps correspond donc au flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée contenant ce corps.

$$\Phi_e = \oiint_{S(\text{contenant corps})} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S(\text{contenant corps})} \varphi_e \times dS$$

**EXEMPLES :** rayonnement émis par les braises d'un feu, par le filament d'une lampe à incandescence, par le soleil.

**ORIGINE DU RAYONNEMENT THERMIQUE :** le rayonnement émis par tout corps de température  $T$  provient des phénomènes énergétiques dans sa matière, c'est à dire les transitions d'émissions entre les différents niveaux quantiques d'énergie; ils peuvent concerner les niveaux énergétiques de rotation (rotation de molécules, plutôt dans un gaz), de vibrations (oscillations des liaisons covalentes), et de transitions électroniques.

Pour un corps opaque, on a par conservation d'énergie (cf ci-dessus)  $\varphi_i = \varphi_a + \varphi_r$ . On peut alors définir deux flux surfacique particulier :

- ♦ Le **flux surfacique partant** correspondant à la puissance surfacique totale émanant du corps :  $\varphi_p = \varphi_e + \varphi_r$  ;
- ♦ le **flux surfacique radiatif total** correspondant au "solde" de puissance surfacique entre le flux partant et le flux incident :

$$\varphi_R = \varphi_p - \varphi_i = \varphi_e + \varphi_r - \varphi_i = \varphi_e - \varphi_a$$

**CONSEQUENCE IMMÉDIATE :** le bilan radiatif en puissance du corps s'écrira  $\Phi_R = \oiint_{S \text{ corps}} (\varphi_p - \varphi_i) \times dS$

### VI.3 Equilibre radiatif du corps opaque

Appliquons le premier principe au corps opaque d'énergie interne  $U$  subissant une transformation élémentaire de durée  $dt$ , il vient :

$$dU = \delta Q_R + \underbrace{\delta W}_{=0 \text{ car } V = cte} = \Phi_a \cdot dt - \Phi_e \cdot dt$$

soit :

$$\frac{dU}{dt} + \Phi_R = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\Phi_R = \Phi_a - \Phi_e \quad (\text{XXI.24})$$

Si ce corps est à l'équilibre thermique i.e.  $T = cste$ , alors son énergie interne est constante, ce qui conduit à :

$$dU = 0$$

soit :

$$\Phi_a = \Phi_e \quad \text{soit} \quad \oiint_S (\varphi_e - \varphi_a) \cdot dS = 0$$

De plus, si l'équilibre est assuré en tout point de la surface du corps alors l'équilibre est local :

$$\text{Equilibre local} \Leftrightarrow \varphi_e = \varphi_a$$

## VI.4 Rayonnement d'équilibre thermique

### a - Définition

Considérons une enceinte (par exemple un four) isolée thermostatée de parois intérieures **totale**ment absorbantes. Un fois le four chauffé, et le système en état stationnaire, il s'établit l'équilibre thermique c'est à dire que les parois sont à température fixée.

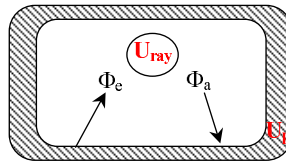


FIGURE XXI.19 – Four en équilibre thermique

On appelle :  $U_p$  l'énergie interne des parois, et  $U_{ray}$  l'énergie de rayonnement dans la cavité avec  $U_{ray} = \iiint_{V_{four}} u_{em} \cdot d\tau$ .

On peut écrire :  $\frac{dU_p}{dt} = \Phi_a - \Phi_e$  et  $\frac{dU_{ray}}{dt} = \Phi_e - \Phi_a$

En situation d'équilibre thermique du four et du rayonnement,  $U_{ray} = cste$  et  $U_p = cste$  on a donc :  $\Phi_a = \Phi_e$

Le rayonnement contenu dans la cavité du four porte le nom de rayonnement d'équilibre thermique avec :

$$U_{ray} = U_{equ} \quad (XXI.25)$$

### b - Spectre du rayonnement d'équilibre : loi de Planck

Ce sont les travaux de Max Planck qui, en 1900, ont permis d'expliquer, à l'aide de la première théorie quantique de la physique moderne, la répartition spectrale du rayonnement d'équilibre. Le résultat, est connu sous le nom de **Loi de Planck** :

**Propriété VI-2: LOI DE PLANCK**

En appelant  $du_{ray}|_T$  la densité volumique d'énergie du rayonnement d'équilibre thermique à  $T$  fixée dans la bande de fréquences comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , on définit la **densité volumique spectrale d'énergie**  $u_\nu$  par :

$$du_{ray}|_T = u_\nu(\nu, T) \cdot d\nu$$

et

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}$$

avec  $\begin{cases} h = 6,626068 \cdot 10^{-34} \text{ J.s cste de Planck} \\ k_b = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} \text{ cste de Boltzmann} \end{cases}$

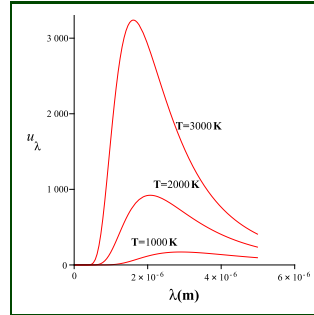


FIGURE XXI.20 – Densité spectrale d'énergie du rayonnement d'équilibre thermique pour diverses températures

**Exercice de cours:** (VI.4) - n° 2. Déterminer la densité volumique spectrale en longueur d'onde  $u_\lambda(\lambda, T)$ .

RÉPONSE :

On peut définir la densité volumique spectrale d'énergie  $u_\lambda(\lambda, T)$ , mais cette fois pour une bande de longueurs d'onde comprises entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ .

En effet, on peut écrire :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{du_{ray}|_T}{\partial \lambda} = \frac{du_{ray}|_T}{d\nu} \cdot \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = u_\nu(\nu, T) \cdot \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right|$$

or comme  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , on a  $\left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{c}{\lambda^2}$

et finalement : 
$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_b T \lambda}} - 1}$$

En outre, l'enceinte étant en équilibre thermique, on a  $\varphi_R = \varphi_p - \varphi_i = 0$ , ainsi le **flux partant** est égal au **flux incident** sur la paroi, ainsi :

$$\varphi_P = \varphi_i$$

On montre, à partir de la loi de Planck, que l'expression du **flux surfacique spectral** qui correspond à la puissance rayonnée par unité de surface et pour un intervalle de fréquence  $d\nu$  par la paroi du four est :

$$\varphi_P^\nu(T, \nu) = \varphi_i^\nu(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

**Exercice de cours:** (VI.4) - n° 3. Montrer rapidement que le flux surfacique spectral en terme de longueur d'onde s'écrit :

$$\varphi_P^\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

**Indication :** utiliser le fait que  $d\varphi = \varphi_\nu \cdot |d\nu| = \varphi_\lambda \cdot |d\lambda|$

### c - Loi de déplacement de Wien

La courbe  $u_\lambda(\lambda, T)$  présente pour toute température  $T$  un maximum pour la longueur d'onde  $\lambda_m$ . Wilhelm Wien est à l'origine de la détermination de la longueur d'onde de ce maximum  $\lambda_m$  :

#### Propriété VI-3: LOI DE DÉPLACEMENT DE WIEN

La densité spectrale d'énergie  $u_\lambda(T, \lambda)$  d'un rayonnement d'équilibre thermique présentent un maximum pour la longueur d'onde  $\lambda_m$  vérifiant la relation :

$$\lambda_m \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$$

On montre par ailleurs que 98% de la puissance émise est comprise entre  $\lambda/2$  et  $8\lambda$ .

On donne ici quelques exemples numériques de  $\lambda_m$  en fonction de la température :

SURFACE CORPS HUMAIN	$T = 303 \text{ K}$	$\lambda_m = 9,5 \text{ } \mu\text{m (I.R.)}$
SOLEIL	$T = 5000 \text{ K}$	$\lambda_m = 0,58 \text{ } \mu\text{m (jaune)}$

Ainsi, une augmentation de température conduit à une diminution de la longueur d'onde  $\lambda_m$  et donc un décalage de l'ensemble du spectre d'émission vers les courtes longueurs d'onde. Par exemple, des braises attisées dont la température augmente, passent d'un rouge sombre, voire le noir, à un rouge-orangé vif. Cette couleur ne correspond pas forcément au maximum d'émission, mais le changement témoigne en tout cas d'un « glissement » du spectre de l'infrarouge vers le visible (**blue shift**).

**Exercice de cours:** (VI.4) - n° 4. Démontrer la loi de déplacement de Wien.

RÉPONSE :

Rappelons l'expression de la densité volumique spectrale d'énergie (en terme de longueur d'onde) :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

Cherchons les conditions d'annulation de la dérivée.

Posons  $x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$ . On a alors :  $\lambda = \frac{hc}{k_B T x}$  et  $\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_T = -\frac{hc}{k_B T \lambda^2}$   
 Le changement de variable conduit à la relation de proportionnalité suivante :

$$u_\lambda(x) \sim \frac{x^5}{e^x - 1}$$

$$\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right)_T = \left(\frac{du_\lambda}{dx}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_T = 0 \Rightarrow \left(\frac{du_\lambda}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow 5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x(x - 5) + 5 = 0$$

La résolution de cette équation est numérique et conduit à la valeur  $x_m = 4,965$ . La loi de Wien en découle directement avec :

$$\lambda_m \cdot T = \frac{hc}{k_B x_m} = 2,896 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$$

#### d - Loi de Stephan

On peut facilement évaluer le flux surfacique total émis par la paroi de l'enceinte en intégrant  $\varphi_P^\nu(\nu, T) = \varphi_i^\nu(\nu, T)$  sur tout l'intervalle des fréquences  $\nu$  :

$$\varphi_P = \int_0^{+\infty} \varphi_P^\nu(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \cdot d\nu = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx}_{\substack{= \frac{\pi^4}{15}}}$$

Soit le flux surfacique total (loi de Stéphan) :  $\varphi_P = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \cdot T^4$

#### Propriété VI-4: LOI DE STEPHAN

Le flux surfacique incident sur un élément de paroi d'une cavité (four) soumis à un rayonnement d'équilibre thermique de température  $T$ , ou encore le flux surfacique émis par la surface d'un corps noir répond à la loi de Stephan :

$$\boxed{\varphi_P = \sigma \cdot T^4} \text{ avec } \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,68 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \text{ constante de Stephan} \quad (\text{XXI.26})$$

ORDRE DE GRANDEUR : pour un corps à  $300 \text{ K}$  (ODG  $T$  surface du corps humain) on a  $\varphi_P \simeq 460 \text{ W.m}^{-2}$ , et pour  $T = 3000 \text{ K}$  (ODG  $T$  surface soleil) on a  $\varphi_P \simeq 4,6 \text{ MW.m}^{-2}$ .

#### VI.5 Le corps noir

## a - Modèle

Supposons un corps opaque c'est à dire pour lequel on a  $\varphi_t = 0$ .

**Définition VI-2: CORPS NOIR**

On appelle corps noir un corps opaque dit **absorbeur intégral d'énergie** c'est à dire  $\varphi_t = \varphi_r = 0$ , ce qui entraîne :

$$\varphi_i^{CN} = \varphi_a^{CN}$$

quelque soit la composition spectrale du rayonnement incident.

CONSÉQUENCE : dans le cas du corps noir, le flux émis est égal au flux partant, soit :

$$\varphi_P^{CN} = \varphi_e^{CN} = \sigma T^4$$

**Remarque VI-2: VALIDITÉ**

Le corps noir est un modèle extrêmement restrictif puisque la plupart des corps ont un comportement qui varie en fonction de la longueur d'onde (ou de la fréquence) ; par exemple, le verre est un "assez bon" corps noir dans le domaine des rayonnements infrarouges (effet de serre), mais il est transparent pour les rayonnements visibles, et donc ne peut être considéré comme un corps noir pour ces derniers.

## b - Exemple simple : linéarisation du flux radiatif du corps noir

HYPOTHÈSES : corps noir de petite taille à la température  $T_c$  dans un four à l'équilibre thermique dont les parois sont à température  $T_e$ .

Le flux radiatif pour ce corps s'écrit :  $\varphi_R = \varphi_P - \varphi_i \stackrel{CN}{=} \varphi_e - \varphi_i = \sigma(T_c^4 - T_e^4)$

Si le corps est en équilibre avec le rayonnement de la paroi alors on a  $T_c = T_e$ . Supposons une légère modification de sa température avec  $T_c = T_e(1 + \epsilon)$  avec  $0 < \epsilon \ll 1$  :

$$\varphi_R = \sigma T_e^4 [(1 + \epsilon)^4 - 1] \simeq 4\sigma T_e^4 \epsilon = 4\sigma T_e^4 \left( \frac{T_c}{T_e} - 1 \right) = 4\sigma T_e^3 (T_c - T_e)$$

En posant  $h^R = 4\sigma T_e^3$  le coefficient de rayonnement, on constate une analogie de forme avec la loi de Newton :

$$\varphi_R = h^R (T_c - T_e)$$

ORDRE DE GRANDEUR : à 300 K on a  $h^R \simeq 6 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , valeur comparable à celle d'un coefficient conducto-convectif « classique ».

Par ailleurs, si  $S$  désigne la surface du corps, alors on peut définir conductance et résistance de rayonnement avec  $\Phi^R = h^R S (T_c - T_e) \Rightarrow \begin{cases} G^R = S h^R \\ R^R = \frac{1}{S h^R} \end{cases}$

## c - Exemples d'applications

■ TEMPÉRATURE À LA SURFACE DE LA TERRE :

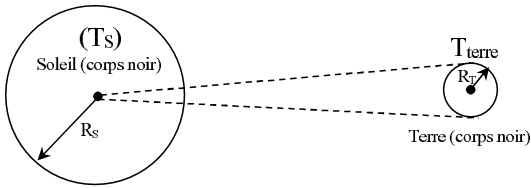


FIGURE XXI.21 – Température de la Terre

On donne :

$$\begin{cases} R_T = 6400 \text{ km} \\ R_S = 6,97 \cdot 10^5 \text{ km} \\ d = 1,44 \cdot 10^8 \text{ km} \end{cases}$$

HYPOTHÈSE : on suppose que le maximum d'émission du rayonnement solaire est obtenu pour  $\lambda_m = 520 \text{ nm}$

D'après la loi de déplacement de Wien, cela correspond à une température :  $T_S = \frac{2,8998 \cdot 10^{-3}}{520 \cdot 10^{-9}} = 5573 \text{ K}$ .

En outre, la puissance totale émise par le soleil est :  $\Phi_{e_S} = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$ , et sa fraction incidente sur Terre :

$$\Phi_{i_T} = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2 \times \frac{\pi R_T^2}{d^2}$$

soit :

$$\text{donc : } \Phi_{i_T} = \frac{\sigma \pi R_S^2 R_T^2}{d^2} T_S^4 = 1,64 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

En considérant la Terre comme un corps noir en équilibre on a :  $\Phi_R = \Phi_{T_e} - \Phi_{i_T} = 0 \Rightarrow \Phi_{T_e} = \Phi_{i_T}$

donc le flux surfacique émis par la Terre  $\varphi_{e_T} = \sigma T_T^4 = \frac{\Phi_{T_e}}{S_T} = \frac{1,64 \cdot 10^{17}}{4\pi R_T^2}$  (Attention : réémission totale de l'énergie reçue de manière isotrope et donc sur les deux hémisphères), d'où la température de la Terre :

$$T_T = \left( \frac{\Phi}{4\pi R_T^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = 274,16 \text{ K}$$

#### ■ EFFET DE SERRE ATMOSPHÉRIQUE DANS UN MODÈLE À UNE COUCHE :

HYPOTHÈSE : le sol terrestre considéré comme un corps noir et la couche de  $CO_2$  atmosphérique totalement transparente au rayonnement solaire, mais se comportant comme un corps noir vis à vis du rayonnement terrestre, essentiellement dans l'infrarouge.

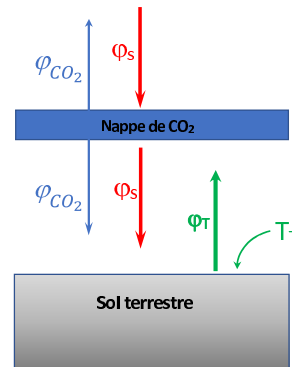


FIGURE XXI.22 – Effet de serre avec une nappe atmosphérique de dioxyde de carbone

On recherche la température du sol terrestre  $T_T$ .

**Principe :** la couche de  $CO_2$  et le sol terrestre sont en équilibre radiatif donc :

$$\begin{cases} \Phi_P(CO_2) = \Phi_i(CO_2) \Rightarrow \varphi_s + 2\varphi_{CO_2} = \varphi_s + \varphi_T \Rightarrow \varphi_T = 2\varphi_{CO_2} & (1) \\ \Phi_P(Terre) = \Phi_i(Terre) \Rightarrow \varphi_T = \varphi_s + \varphi_{CO_2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varphi_T = 2\varphi_s & (2) \end{cases}$$

Le sol terrestre étant par hypothèse un corps noir il vient par la loi de Stephan :  $\varphi_T = 2\varphi_s = \sigma T_T^4$ , soit :

$$T_T = \left( \frac{2\varphi_s}{\sigma} \right)^{1/4}$$



En reprenant la valeur précédente pour le flux solaire incident sur Terre  $\Phi_{i_T} = 1,64.10^{17} \text{ W}$ , on trouve  $\varphi_s \simeq 637 \text{ W.m}^{-2}$  (Attention : incidence du rayonnement solaire sur un hémisphère terrestre seulement).

qui permet de dégager :  $T_T \simeq 387 \text{ K}$ , très largement surévalué (non prise en compte du l'albedo, de la conducto-convection, de la puissance captée pour évaporer l'eau des océans etc....)