Probabilités discrètes

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.

La notion de variable à densité est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie, via la formule $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.	
b) Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$	
Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$	
Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.
Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements indépendants. Si A et B sont indépendantes, A et $\bar{B}$ le sont aussi.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1. Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.

e) Variables aléatoires discrètes

Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathcal{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.

Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

La probabilité P_x est déterminée par la distribution de probabilités discrètes $(P(X = n))_{x \in X(\Omega)}$. Notation $X \sim Y$.	La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f5X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
	Notations $P(X = x, Y = y)$ Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	notation $X \perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilité de (X, Y) est le produit des distributions de probabilité de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.	
Fonctions de variables aléatoires in dépendantes : Si $X \perp Y$, alors $f(X) \perp f(Y)$.	Extension au cas se plus de deux variables.
Lemme des coalisions : Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes aussi.	Extension au cas se plus de deux coalitions. Démonstration non exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d de variables de Bernoulli.

g) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p.$$	Notation $\mathcal{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P\left(X_n = k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	$\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.
Inégalité de Markov.	

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x.P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Si X est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P\left(X=x\right))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson. Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P\left(X=x\right)\ f(x))$ est sommable ; si tel est le cas : $$\mathrm{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\ P(X=x).$$	Notation $\mathrm{E}(X)$. variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $\lvert X\rvert \leq Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$. Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extensions au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Si $E(X^2) < +\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : Si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.	Cas d'égalité
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.	Notations $V(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variances d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	

j) Inégalités probabilistes et Loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes (i.i.d), de même loi et de variance finie, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a, $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n} - m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

k) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,t^k$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $E(X)$ et de $V(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	