VIII

Superposition des ondes lumineuses

«Ce n'est point l'observation mais la théorie qui m'a conduit à ce résultat que l'expérience a ensuite confirmé.»
AUGUSTIN FRESNEL (1788-1827)

PLAN DU CHAPITRE

I Expériences préliminaires

I.1 Superposition de deux vibrations lumineuses issues de deux sources

Superposons deux vibrations lumineuses issues chacune d'un laser He-Ne.

<u>Observations :</u>

- La zone commune aux deux faisceaux montre une augmentation perceptible de l'intensité lumineuse.
- Aucun autre phénomène constaté dans cette zone commune.

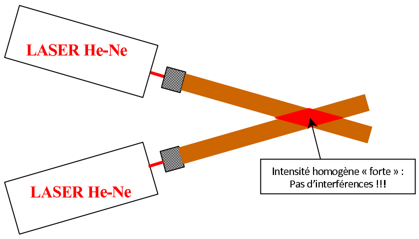


Figure VIII.1 – Superposition de deux faisceaux laser distincts $\Rightarrow$ absence d'interférences

I.2 Superposition de deux vibrations lumineuses issues d'une même source

Le dispositif expérimental des trous d'Young se compose d'un très petit trou S (source primaire) éclairé par un faisceau de lumière parallèle monochromatique, la lumière sortant de S éclairant un ensemble de deux très petits trous disposés dans un plan perpendiculaire à l'axe du montage ;

On utilise pratiquement un faisceau LASER comme source primaire.

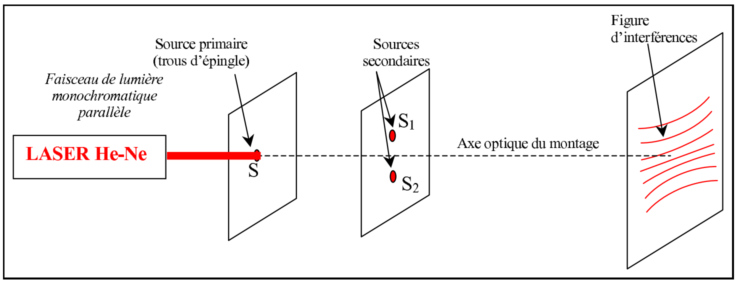


Figure VIII.2 – Expériences des trous d'Young

Enfin, on dispose un écran loin des sources, et perpendiculaire à l'axe optique du montage. On constate alors l'apparition de **franges d'interférences** sur l'écran d'observation **dans la zone commune des faisceaux issus de chacun des trous**.

On constate ainsi que les intensités de ces derniers ne s'additionnent pas dans cette zone. En appelant :
$I_1(M \in \text{zone commune})$ l'intensité du premier faisceau seul en M
et
$I_2(M \in \text{zone commune})$ l'intensité du second faisceau seul en M

on a :

$$\boxed{I(M \in \text{zone commune}) \neq I_1(M) + I_2(M)}$$

ainsi, il n'y a pas de superposition des intensités des deux faisceaux.

<u>Objectifs :</u>

- **Dégager les conditions nécessaires à l'obtention d'interférences à deux ondes**
- **Caractériser les figures d'interférences à deux ondes : paramètre(s) géométrique(s), contraste etc..**
- **Etudier des dispositifs classiques d'interférences :** $\left[\begin{array}{l}\textbf{trous d'Young}\\ \textbf{interféromètre de Michelson}\end{array}\right.$

II Superposition de deux ondes lumineuses

II.1 Intensité de deux ondes superposées - terme d'interférences

Considérons deux ondes lumineuses harmoniques **de forme quelconque** (la suite se concentre sur le cas des ondes sphériques et planes) se propageant dans le vide, de pulsations à priori différentes ω_1 et ω_2. On donne l'expression de leur vibration lumineuse en un point M quelconque de l'espace :

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_1(M,t)=\psi_{01}(M)\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))\\ \psi_2(M,t)=\psi_(M)\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))\end{array}\right.$$

La vibration résultante s'écrit :

$$\psi(M,t)=\psi_{01}(M)\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))+\psi_{02}(M)\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))$$

Calculons ensuite l'intensité lumineuse moyenne (donc celle détectée, cf. chapitre V) résultant au point M :

$$I(M)=K\left\langle\psi(M,t)^2\right\rangle_t=K\left\langle\left[\psi_1(M,t)+\psi_2(M,t)\right]^2\right\rangle_t$$

soit :

$$\begin{gathered}I(M)=K\psi_{01}^2(M)<\cos^2(\omega_1 t-\varphi_1(M))>_t+K\psi_{02}^2(M)<\cos^2(\omega_2 t-\varphi_2(M))>_t+\\ 2K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\left\langle\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))\times\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))\right\rangle_t\end{gathered}$$

En notant les intensités et amplitudes des ondes ψ_1 et ψ_2 prises seules en M :

$$\begin{cases}I_1(M)=\frac{K}{2}\psi_{01}^2(M)\ \Rightarrow\ \psi_{01}=\sqrt{\dfrac{2}{K}}\sqrt{I_1(M)}\\ I_2(M)=\frac{K}{2}\psi_{02}^2(M)\ \Rightarrow\ \psi_{02}=\sqrt{\dfrac{2}{K}}\sqrt{I_2(M)}\end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}I(M)=I_1(M)+I_2(M)+K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)&\underbrace{\left\langle\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t-\varphi_1(M)-\varphi_2(M)\right]\right\rangle_t}_{=0}\\ &+K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1(M)-\varphi_2(M))\right]\right\rangle_t\end{aligned}\tag{VIII.1}$$

soit finalement en remarquant $K\psi_{01}\psi_{02}=K\dfrac{\sqrt{2I_1}}{\sqrt{K}}\times\dfrac{\sqrt{2I_2}}{\sqrt{K}}=2\sqrt{I_1 I_2}$

il vient :

$$I(M)=I_1(M)+I_2(M)+2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right]\right\rangle_t$$

En outre, nous savons qu'un détecteur d'intensité lumineuse évalue une valeur moyenne sur une durée d'acquisition $\tau_a >> T_{vis} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, ainsi l'intensité effectivement mesurée s'écrit :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\,\underbrace{\langle \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right]\rangle_{\tau_a}}_{\text{TERME D'INTERFÉRENCES}}} \qquad \text{(VIII.2)}$$

Définition II-1: TERME D'INTERFÉRENCES

Le terme souligné ci-dessus est le seul susceptible de conduire à une non-uniformité de l'intensité lumineuse. C'est le terme responsable du **phénomène d'interférences** et est appelé **terme d'interférences (souvent désigné en abrégé par TI).**

II.2 Conditions d'obtention

QUESTION : sous quelle(s) condition(s) le T.I. est-il **non partout nul et stationnaire** pour assurer l'observation d'interférences par l'oeil humain ($\tau_a \sim 0,1\ s$) ?

Reprenons le termes d'interférences :

$$TI = \langle \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right]\rangle_{\tau_a}$$

Nous savons en réalité que l'onde émise par une source ne peut être purement monochromatique, mais est en fait une succession de trains d'onde sans relation de phase fixe entre eux. Supposons que les trains d'ondes 1 et 2 soient émis par deux sources ponctuelles S_{01} et S_{02} ; les termes de phase s'écrivent alors pour chaque onde :

$$\begin{cases} \varphi_1(M) = k_0(S_{01}M) + \underbrace{\phi_1(t)}_{\text{(terme de phase aléatoire de la source 1)}} \\ \varphi_2(M) = k_0(S_{02}M) + \underbrace{\phi_2(t)}_{\text{(terme de phase aléatoire de la source 2)}} \end{cases}$$

donc :

$$TI = \langle \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + k_0\left[(S_{02}M) - (S_{01}M)\right] + \phi_2(t) - \phi_1(t)\right]\rangle_{\tau_a}$$

a - Condition sur les pulsations : isochronisme ou quasi-isochronisme des sources

Afin d'éviter la fluctuation temporelle du cosinus dans le TI, ce qui annulerait ce dernier (plus d'interférences), on doit déjà (ce ne sera pas la seule contrainte !) assurer la stationnarité du terme $(\omega_2 - \omega_1)t$.

A RETENIR :

Propriété II-1: ISOCHRONISME DES SOURCES

Pour espérer observer un phénomène d'interférences à deux ondes, les sources doivent **obligatoirement** être de même pulsation $\omega = \omega_1 = \omega_2$. On parle d'isochronisme des sources.

NB : ceci est une condition nécessaire non suffisante !

b - Condition sur les phases à l'origine : nécessité d'un diviseur d'onde

L'obtention de la stationnarité du TI nécessite aussi d'assurer la stationnarité de la différence de phase à l'origine, i.e. :

$$\phi_2(t) - \phi_1(t) \neq f(t)$$

or $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ changent de valeurs avec un temps caractéristique $\tau_c << \tau_a$.

Expérience de cours : tentative d'interférences avec 2 lasers identiques.

$\Longrightarrow$ les trains d'onde émis par les sources étant aléatoires, il ne peut y avoir d'interférences si on utilise deux sources distinctes, **même identiques** :

SOLUTION : on peut par exemple imposer $\phi_1(t) = \phi_2(t) \forall t$

A RETENIR :

Propriété II-2: COHÉRENCE DES DEUX ONDES

Pour espérer observer un phénomène d'interférences à deux ondes, on doit imposer un déphasage à l'origine $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ stationnaire pour les deux trains d'ondes (en plus de l'isochronisme), avec par exemple :

$$\phi_2(t) - \phi_1(t) = 0 \Longrightarrow \boxed{\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t) \quad \forall t}$$

On parle alors de trains d'onde **cohérents**.

Les contraintes d'isochronisme et de cohérence des sources imposent aux deux ondes que l'on tente de faire interférer **d'être toutes deux issues d'une seule et même source**.

CONSÉQUENCE : Les interférences sont obtenues par séparation d'une onde unique en deux ondes issues de la même source origine.

$\Rightarrow$ **nécessité d'utiliser un diviseur d'onde pour fabriquer deux sources secondaires isochrones, et de déphasage à l'origine fixe.**

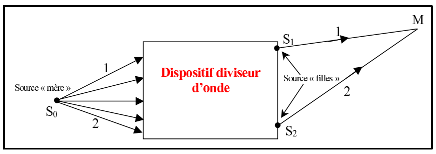


FIGURE VIII.3 – Principe d'un diviseur d'onde

Exemples : diviseur de front d'onde (DFO) et diviseur d'amplitude (DA) (utilise la réflexion en général)

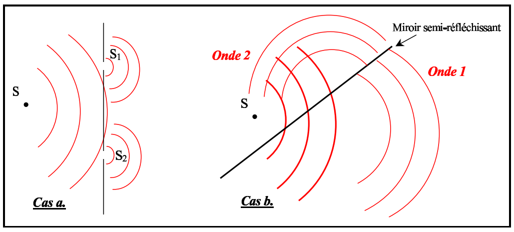


FIGURE VIII.4 – Séparation d'onde par division du front d'onde (a) ou division d'amplitude (b).

Ainsi, en superposant les ondes 1 et 2 issues d'un séparateur d'onde, le T.I. au point M s'écrit :

$$\langle \cos\left[k_0\left((S_0M)_2 - (S_0M)_1\right)\right]\rangle_{\tau_a}$$

et l'intensité en M devient :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle \cos\underbrace{\left[k_0\left((S_0M)_2 - (S_0M)_1\right)\right]}_{\neq fct(t)}\right\rangle_{\tau_a}$$

soit finalement :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\cos\left[k_0\left((S_0M)_2 - (S_{01}M)_1\right)\right]$$

qui devient en introduisant $\delta(M) = (S_0M)_2 - (S_0M)_1$ appelée **différence de marche au point M entre les deux ondes 1 et 2**, on a :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\cos\underbrace{\left[k_0\delta(M)\right]}_{=\Delta\varphi(M)}}$$

avec $\Delta\varphi(M)$ différence de phase des deux vibrations lumineuses au point M.

c - Une autre condition : condition de cohérence des trains d'onde - trains d'onde jumeaux

Les sources réelles émettent des trains d'onde de durée finie (cf chapitre précédent, par. "Modèles de sources"), et fatalement d'extension spatiale finie L_c appelée longueur de cohérence.

Lors d'une tentative d'interférences, deux cas de figure peuvent se présenter :

- les trains d'onde "jumeaux" issus du séparateur d'onde se superposent : **l'interférence à lieu** puisque la phase à l'origine de ces trains d'onde est identique :

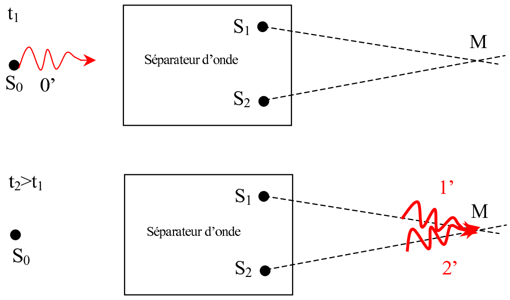


FIGURE VIII.5 – Superposition de trains d'onde jumeaux

- les trains d'onde "jumeaux" issus du séparateur d'onde ne se superposent plus : ce sont des trains d'onde de phase à l'origine non identique et donc non corrélés qui se superposent, **l'interférence n'a pas lieu**.

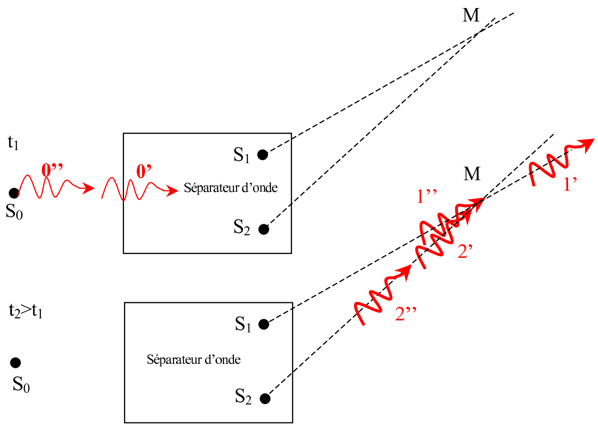


FIGURE VIII.6 – Superposition de trains d'onde non jumeaux

QUESTION : quel critère respecter pour assurer que le recouvrement se produit pour des trains d'onde jumeaux, assurant ainsi l'interférence ?

La différence de marche entre deux trains d'onde s'écrit :

$$\delta = c\Delta\tau = c(\tau_{SS_2M} - \tau_{SS_1M})$$

On constate que le recouvrement de deux trains d'onde "jumeaux" est assuré tant que :

$$\boxed{|\delta(M)| \leq c\tau_c = L_c \text{ longueur de cohérence}} \tag{VIII.3}$$

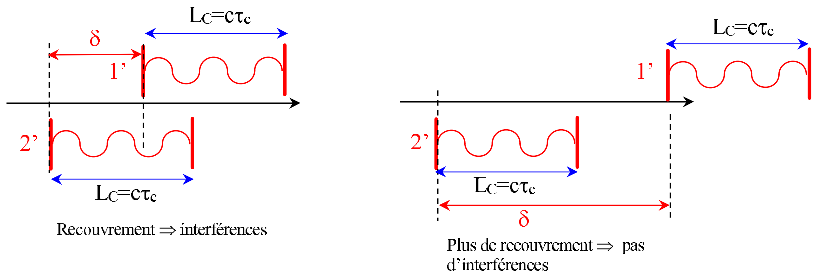


FIGURE VIII.7 – Evaluation du critère de cohérence

d - Aspect «pratique» pour le calcul de l'intensité : usage de la notation complexe

Les conditions de cohérence des trains d'onde étant remplies, on pourra retenir l'onde harmonique comme modèle d'onde ⇒ **Notation complexe adaptée**.

Les deux ondes interférant étant de nature quasi-harmonique (chaque train d'onde est une sinusoïde tronquée), elle peuvent donc s'écrire en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{\psi}_1(M,t) = \psi_{01}(M) \cdot e^{j(\omega t - \varphi_1(M))} \\ \underline{\psi}_2(M,t) = \psi_{02}(M) \cdot e^{j(\omega t - \varphi_2(M))} \end{cases}$$

Le champ résultant étant : $\underline{\psi}(M,t) = \underline{\psi}_1(M,t) + \underline{\psi}_2(M,t)$
l'intensité s'écrit alors par définition :

$$I = K \left\langle \psi^2(M,t) \right\rangle$$

or la notation complexe permet de calculer facilement la valeur moyenne de toute grandeur harmonique, ainsi :

$$I = \frac{1}{2} K \mathcal{R}_e \left[\underline{\psi \psi^*} \right] = \frac{1}{2} K \left[\underline{\psi \psi^*} \right]$$

soit :

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\left(\psi_{01}(M) \cdot e^{-j\varphi_1(M)} + \psi_{02}(M) \cdot e^{-j\varphi_2(M)} \right) \right] \times \left[\left(\psi_{01}(M) \cdot e^{+j\varphi_1(M)} + \psi_{02}(M) \cdot e^{+j\varphi_2(M)} \right) \right]$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\psi_{01}^2(M) + \psi_{02}^2(M) + \psi_{01}(M)\psi_{02}(M) \left(e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) \right]$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\psi_{01}^2(M) + \psi_{02}^2(M) + 2\psi_{01}(M)\psi_{02}(M) \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \right]$$

On retrouve finalement le résultat obtenu plus haut avec :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos\left[k_0 \delta(M)\right]}$$

<u>CONCLUSION :</u> on adoptera toujours dans la mesure du possible la notation complexe pour tous les calculs d'intensité avec :

$$\boxed{I(M) = Cste \times \underline{\psi}(M,t) \cdot \underline{\psi}^*(M,t)}$$

II.3 Superposition de deux ondes isochrones mais incohérentes entre elles

Dans le cas où les deux ondes sont **incohérentes** entre-elles, c'est à dire issues de deux sources certes identiques, mais distinctes (non issues d'une source primaire commune), la condition de cohérence des trains d'onde $\phi_1(t) = \phi_2(t)\ \forall t$, n'est plus assurée. par conséquent, le cosinus dans le T.I. devient aléatoire et :

$$TI = \left\langle \cos\left[k_0\left[(S_{02}M) - (S_{01}M)\right] + \underbrace{\phi_2(t) - \phi_1(t)}_{=f(t)\neq cste}\right]\right\rangle_{\tau_a} = 0$$

donc l'intensité en M est simplement :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

<u>A RETENIR :</u>

Propriété II-3: SUPERPOSITION DE DEUX ONDES INCOHÉRENTES

Lorsque deux vibrations lumineuses incohérentes se superposent en un point M, l'intensité résultante est la somme des intensités en M de chacune des sources :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M)}$$

II.4 Superposition de deux ondes cohérentes entre elles (donc nécessairement isochrones)

a - Formule de Fresnel

Ce qui précède a permis d'établir l'expression de l'intensité lumineuse pour deux ondes interférant en M. On retient en général comme hypothèse simplificatrice que les amplitudes des ondes 1 et 2 sont indépendantes du point M, assurant également la constance des intensités 1 et 2 :

$$I_1 = cste_1 \neq f(M) \text{ et } I_2 = cste_2 \neq f(M) \quad \text{(valable par exemple dans le cas des ondes planes)}$$

Propriété II-4: FORMULE DE FRESNEL

L'intensité obtenue en M par interférence de deux ondes est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(k_0\delta(M)\right)$$

avec $\delta(M) = (S_0S_2M) - (S_0S_1M) = (S_2M) - (S_1M)$ différence de marche des 2 vibrations lumineuses issues de la source S_0 et séparées.

b - Interférogramme - ordre d'interférence

La fonction $I(M)$ varie donc sinusoïdalement entre deux valeurs extrêmes :

- **Interférences constructives donc franges brillantes pour :**

$$k_0\delta(M_{max}) = 2m\pi \ m \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\delta(M) = m\lambda_0$$

L'intensité est alors :

$$\boxed{I(M_{max}) = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2}$$

- **Interférences destructives donc franges sombres pour :**

$$k_0\delta(M_{min}) = (2m+1)\pi = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \ m \in \mathbb{Z}$$

soit

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$$

L'intensité est alors :

$$\boxed{I(M_{min}) = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}$$

Définition II-2: ORDRE D'INTERFÉRENCES

On définit l'ordre d'interférence au point M par :

$$\boxed{p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0(vide)}}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \textbf{sur une frange brillante : ordre } p(M_{max}) = \dfrac{\delta(M_{max})}{\lambda_0} = m \in \mathbb{Z} \\ \\ \textbf{sur une frange sombre : ordre } p(M_{min}) = \dfrac{\delta(M_{min})}{\lambda_0} = m + \dfrac{1}{2} \textbf{ demi-entier} \end{cases}$$

On peut alors tracer l'interférogramme $I = f(\delta)$:

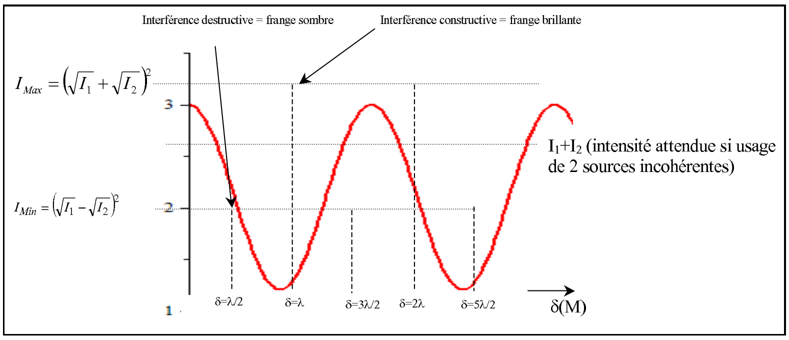


FIGURE VIII.8 – Interférences à deux ondes avec mauvais contraste

c - Facteur de contraste - condition idéale de contraste

La qualité de la figure d'interférence peut être caractérisée par un indicateur numérique sans dimension qualifiant la différence d'intensité entre les franges sombres et les franges brillantes d'interférences. Ce nombre d'appelle le constraste, et il est défini ainsi :

Définition II-3: CONTRASTE

On appelle constraste de la figure d'interférences la grandeur suivante (définition de Michelson) :

$$\boxed{C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}}$$

Exercice de cours: **(II.4) - n° 1.** *Montrer que le contraste est maximal pour* $I_1 = I_2$.

Autre écriture :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} \Longrightarrow \boxed{C = 2\frac{\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = 2\frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1 + \frac{I_1}{I_2}}}$$

On constate avec cette seconde écriture que : $I_1 >> I_2$ ou $I_2 >> I_1 \;\Rightarrow\; \boxed{C \simeq 0}$

CAS IDÉAL : $I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow$ ce cas correspond à un contraste maximal $C_{max} = 1$:
L'intensité est alors donnée par **la formule de Fresnel "idéale"** :

$$\boxed{I(M) = 2I_0 + 2I_0 \cos(k_0\delta(M)) = 2I_0 \left[1 + cos(k_0\delta(M))\right]}$$

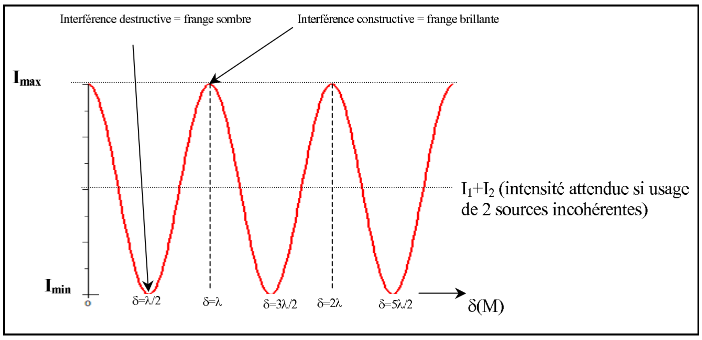
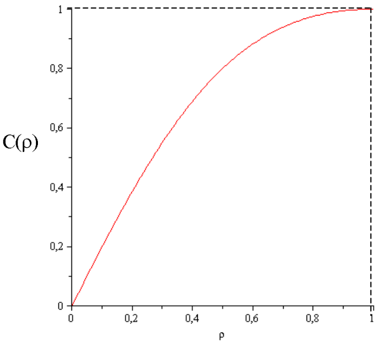


FIGURE VIII.9 – Interférences à deux ondes avec bon contraste

Remarque II-1: ETUDE PLUS FINE DU CONTRASTE

On peut réaliser une étude plus fine du contraste ; supposons que $\psi_{02} < \psi_{01}$; on peut alors poser ρ tel que $0 < \rho = \dfrac{\psi_{02}}{\psi_{01}} = \sqrt{\dfrac{I_2}{I_1}} < 1$:



La formule de Fresnel s'écrit alors : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]$

$$= (I_1 + I_2)\left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]\right)$$

$$= (I_1 + I_2)\left(1 + \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]\right)$$

On remarque facilement que $C = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2}$
et que C est maximal pour $\rho = 1$, i.e. $I_1 = I_2$, ce qui confirme naturellement le résultat précédent.