TD11 (éléments de réponse)

Exercice 1

Question 1. Pour $s \in \mathcal{A}_{J_1}$, posons : $\text{rang}(s) = \min\{j \geqslant 0 \mid s \in \mathcal{A}_{J_1}\}$. Montrons par récurrence forte sur son rang que chaque sommet de $\mathcal{A}_{J_1}$ est une position gagnante pour J_1.

- Les sommets de rang 0 sont ceux dans F_1. La propriété est vérifiée au rang 0.
- Soit $j \geqslant 0$ et supposons la propriété vraie pour les rangs $j' \leqslant j$. Soit un sommet $s \in A_{j+1} \setminus A_j$ de rang $j+1$.
  - Si $s \in V_1$, alors par définition $\exists s' \in \mathcal{A}_{J_1}$ tel que $s \to s'$: J_1 peut donc jouer cet arc. Or, par hypothèse, s' est une position gagnante pour J_1, donc s aussi.
  - Si $s \in V_2$, par définition, tout coup joué par J_2 depuis s aboutit en un sommet $s' \in A_j$. Or, par hypothèse, s' est une position gagnante pour J_1, donc s aussi.

Inversement, si $s \notin \mathcal{A}_{J_1}$, on vérifie que s n'est pas une position gagnante pour J_1 en construisant, de manière similaire, une stratégie *non perdante* pour J_2 depuis s.

- Si $s \in F_2$, J_2 peut jouer en un sommet $s' \in \mathcal{A}_{J_1}$.
- Si $s \in F_1$, n'importe quel coup joué par J_1 mène à un sommet $s' \in \mathcal{A}_{J_1}$.

J_2 peut donc toujours faire en sorte d'éviter F_1.

Question 2.
□ **2.1.** L'algorithme termine car il s'agit essentiellement d'un parcours de graphe en profondeur, où aucun sommet n'est traité que deux fois (la deuxième fois $s \in \mathcal{A}_{J_1}$).
□ **2.2.** Montrons qu'à la fin de l'algorithme, $\mathcal{A}_{J_1}$ contient exactement les attracteurs associés à F_1.
On montre ce résultat par double inclusion. On commence par montrer que la propriété *tout élément de A est un attracteur* est un invariant de l'algorithme.

- Au début, $\mathcal{A}_{J_1} = \varnothing$, donc la propriété est vraie.
- Si parcours(s) est lancé dans la boucle principale, c'est que $s \in F_1$, donc s est bien un attracteur.
- Sinon, parcours(s') est lancé pendant parcours(s), avec s un attracteur.
  - Si $s' \in V_1$, cela signifie que l'arc $s' \to s$ est présent dans G, donc par définition : s' est un attracteur.
  - Sinon, $s' \in V_2$ et cela signifie que $v_{s'} = 0$. Or $n_{s'}$ est décrémenté (au plus) une fois par sommet attracteur s tel que $s' \to s$ soit un arc de G : si $n_{s'}$ atteint 0, cela signifie que tous les sommets que l'on peut atteindre s' depuis s sont des attracteurs, donc par définition s est aussi un attracteur.

  Montrons maintenant que tout sommet attracteur se trouve dans $\mathcal{A}_{J_1}$ à la fin de l'algorithme.
  Par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas, et considérons un sommet attracteur s de rang minimal parmi ceux qui ne sont pas dans $\mathcal{A}_{J_1}$.
  - s n'est pas de rang 0.
  - Si $s \in V_1$, alors par hypothèse, il existe un sommet attracteur s' de rang strictement inférieur (donc $s' \in \mathcal{A}_{J_1}$) tel que $s \to s'$ est un arc de G.
    Dans l'appel parcours(s') où s' est ajouté à $\mathcal{A}_{J_1}$, parcours(s) aurait du être lancé : absurde.
  - Sinon, $s \in V_2$, et par hypothèse tous les voisins de s dans G sont des attracteurs et ont un rang plus petits (donc sont dans $\mathcal{A}_{J_1}$).
    Notons s' le dernier à être ajouté à $\mathcal{A}_{J_1}$: lorsque s est examiné dans la liste d'adjacence de u dans ${}^tG$, n_s passe à 0 et parcours(s) aurait du être lancé : absurde.

Tous les cas sont impossibles, donc, par l'absurde, tout sommet attracteur se trouve dans $\mathcal{A}_{J_1}$ à la fin de l'algorithme.
□ **2.3.** L'algorithme peut être implémenté avec une complexité $O(|S| + |A|)$.
□ **2.4.** Pour calculer en parallèle une stratégie gagnante pour J_1, il suffit de modifier légèrement l'algorithme : lorsqu'on lance parcours(v) dans parcours(u) , on peut poser $\varphi(v) = u$.
□ **2.5.** Pour calculer une stratégie *non perdante* pour J_2 sur un sommet $u \in V_2$ n'appartenant pas aux attracteurs pour F_1, il suffit de parcourir la liste d'adjacence de u à la recherche d'un sommet v qui n'est pas non plus dans $\mathcal{A}_{J_1}$.

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Question 1. S'il existe une chemin gagnant pour l'un des joueurs, il coupe le plateau en deux composantes. Il ne peut alors pas exister de chemin pour l'autre joueur car celui-ci passerait nécessairement par l'une des cases du premier chemin.

Question 2. Considérons deux composantes connexes pour le joueur noire situées sur le bord gauche et sur le bord droit. S'il existe une case de la composante du bord droit qui est également dans la composante du bord gauche, cela signifie que le joueur noir est gagnant. Sinon, les deux composantes sont séparées par un chemin blanc, indiquant que le joueur blanc est gagnant. Et il n'existe pas d'autre possibilité. Donc le jeu comporte *toujours* un gagnant et il n'y a pas de match nul.

Question 3. Pour répondre à cette question, on utilise l'argument de *vol de la stratégie*.. Tout d'abord, les deux questions précédentes montrent qu'il existe toujours une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. Supposons que le joueur blanc dispose d'une telle stratégie. Alors, le joueur noir, qui commence avec lui, peut la lui *voler*.

- Il commence en jouant un coup arbitraire.
- Puis, pour chaque autre coup joué, il suit la statégie gagnante du dernier coup du joueur blanc. Si ce coup correspond à un coup arbitraire, il joue lui-même à nouveau un coup arbitraire.
- La stratégie est alors nécessairement gagnante pour le joueur noir, le coup arbitraire ne causant aucun désavantage.

Par l'absurde, on conclut que le joueur noir a toujours une stratégie gagnante. Toutefois, malgré la connaissance de l'existence d'une telle stratégie gagnante, sauf à joueur sur de petits plateaux, on ne sait pas *construire* une telle stratégie. La recherche de stratégies *efficaces*, à défaut d'être gagnantes, est l'objet d'études en IA.

Exercice 6

Question 1. En phase terminale du jeu, le nombre d'allumettes qui restent mène inévitablement à un état sans allumettes. En conséquence, il ne peut y avoir de partie nulle puisque ces états sont, selon la variante du jeu, soit gagnants, soit perdants pour le dernier joueur qui joue.

Question 2. Les rôles des joueurs sont symétriques. Supposons que le joueur 1 commence. Dans la variante classique, il peut prendre les n allumettes en 1 coup et gagner. Dans la variante misère, il prend $n-1$ allumette, laissant le joueur 2 prendre à la dernière allumette et perdre. Dans les deux cas, le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante.

Question 3. L'existence de deux tas de même taille permet au joueur 2 de gagner. En effet, si le joueur 1 prend k allumettes sur l'un des tas, le joueur 2 fait de même. Si $k=n$ alors le joueur 2 gagne. Si $k<n$ alors la situation est celle du jeu $*(n-k)+*(n-k)$. Par récurrence décroissante, le joueur 2 gagne toujours.

Question 4. La dissymétrie du jeu en terme de nombre d'allumettes sur les deux tas constitue un avantage pour le joueur 1. Il lui suffit de prendre $n-m$ allumettes dans le tas qui en comporte le plus. La situation est alors celle du jeu $*m+*m$ qui correspond à la situation analysée à la question précédente. Comme c'est à présent au joueur 2 de jouer en partant de cette situation, il perd donc. Le joueur 1 a une stratégie gagnante.

Question 5.

- Dans le jeu $*1+*n$, le joueur 1 prend les n allumettes d'un tas. Le joueur 2 ne peut que prendre la seule allumette de l'autre tas et perd donc. Le joueur 1 a une stratégie gagnante.
- Dans le jeu $*2+*2$, le joueur 1 peut prendre soit 1, soit 2 allumettes sur l'un des tas. S'il en prend 1, on est ramené à la situation de la question précédente. Le joueur 2 gagne alors. S'il en prend 2, le joueur 2 prend 1 allumette sur le second tas, laissant le joueur 1 prendre la dernière allumette. Le joueur 2 gagne encore.
- Dans le jeu $*2+*n$, le joueur 1 prend $n-2$ allumettes. Le jeu est alors celui décrit à la question précédente. Mais comme c'est à présent au joueur 2 de jouer, ce dernier perd. Le joueur 1 a une stratégie gagnante.

Question 6. Dans la variante misère du jeu $*n+*n$, le joueur 2 possède une stratégie gagnante. À la question précédente, on a montré que c'était le cas pour le jeu $*2+*2$. Montrons le résultat dans le cas général par récurrence. Supposons le résultat vrai pour $*m+*m$ avec $2 \leqslant m \leqslant n$ puis considérons le jeu $*(m+1)+*(m+1)$. Quel que soit le nombre d'allumettes k prises par le joueur 1, le jeu se ramène à $*(m-k+1)+*(m+1)$, qui est gagnant pour le prochain joueur, par hypothèse de récurrence.
Dans la variante misère du jeu $*m+*n$, avec $1 \leqslant m < n$, le joueur 1 possède une stratégie gagnante. À la question précédente, on a montrer que c'était le cas pour le jeu $*1+*n$. Supposons le résultat vrai pour $*m+*n$ puis considérons le jeu $*(m+1)+*n$ avec $m+1<n$. Le joueur 1 peut prendre $n-(m+1)$ allumettes dans le second tas. Le jeu se ramène à $*(m+1)+*(m+1)$. Comme c'est à présent au joueur 2 de jouer, ce dernier perd d'après ce qui vient d'être établi ci-dessus.

Exercice 7

Question 1. Tout d'abord, remarquons que pour tout entier naturel x, $x \oplus x = 0$ et $x \oplus 0 = x$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} y &= 0 \oplus y \\ &= x \oplus x \oplus y \\ &= x \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y_1 \oplus \cdots \oplus y_n \\ &= x \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus (x_2 \oplus y_2) \oplus \cdots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus \cdots \oplus (x_n \oplus y_n) \end{aligned}$$

Si, pour tout entier naturel $i \neq k$, $x_i = y_i$, chaque terme $x_i \oplus y_i = 0$. En enlevant les allumettes du tas k, x_k devient $y_k \neq x_k$ de sorte que $x_k \oplus y_k \neq 0$. De l'expression de droite ci-dessus, il ne reste que $x \oplus x_k \oplus y_k$. Ce qui établit le résultat.

Question 2. Tout d'abord, puisque $y_k \neq x_k$ alors $y_k \oplus x_k \neq 0$. Si $x = 0$, d'après le résultat de la question précédente, , il vient $y = y_k \oplus x_k \neq 0$.

Question 3. Supposons $x \neq 0$. Désignons par m l'entier associé au rang du bit de poids fort dans x. Ce bit vaut 1 par définition de m. Sachant que $x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$, il existe au moins un entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que le bit de rang m de x_k vale 1. Puisque tous les bits de x de rangs strictement plus grands que m sont nuls, $x \oplus x_k < x$. Alors, en prenant $x_k - x \oplus x_k$ allumettes dans le tas k, il en reste $y_k = x \oplus x_k$. Comme $y = x \oplus x_k \oplus y_k$, il vient $y = x \oplus x_k \oplus x \oplus x_k = 0$. Ce qui établit l'existence d'un coup tel que $x \neq$ et $y = 0$.

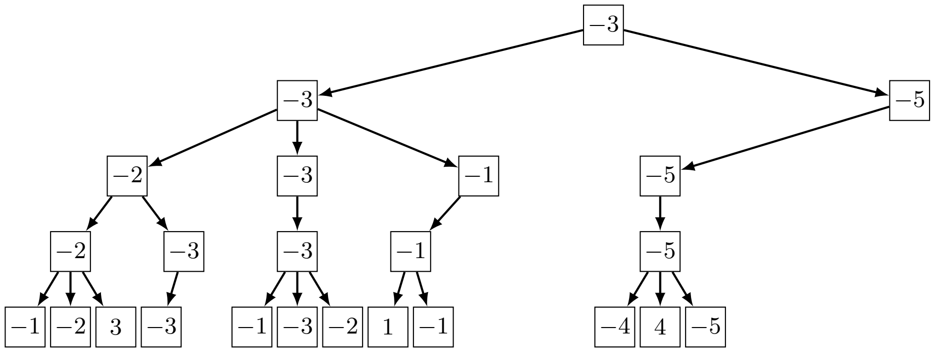
Question 4. Procédons par récurrence. Clairement, s'il ne reste qu'une seule allumette en tout, le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante. Dans ce cas, $x \neq 0$. Dans le cas général, la récurrence se propage grâce aux deux questions précédentes puisque le nombre total d'allumettes décroît strictement à chaque coup.

Question 5.
□ **5.1.** Puisque $1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = 001 \oplus 011 \oplus 101 \oplus 111 = 0$ il n'existe pas de stratégie gagnante pour le joueur 1.
□ **5.2.** Puisque $1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9 = 0 \oplus 9 = 9$ il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 : prendre les 9 allumettes du dernier tas. Ensuite, on se ramène à la situation de la question précédente.
□ **5.3.** Tout entier de la forme 2^i admet une écriture binaire formée d'un seul 1 suivi de i zéros. Dans l'écriture $1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus \cdots \oplus 2^n$, tous les entiers comportent un 1 qui est toujours associé à des zéros dans le ou exclusif. Le résultat est donc l'entier de représentation binaire formé de n uns, soit l'entier $2^{n+1} - 1 \neq 0$. En prenant exactement 1 allumette du dernier tas, on dispose d'une stratégie gagnante.
□ **5.4.** Posons $x = 1 \oplus 3 \oplus 7 \oplus \cdots \oplus (2^n - 1)$. La dernière valeur a un bit égal à 1 qui ne peut être annulé par le ou exclusif car il n'apparaît dans aucun des autres entiers. L'écriture binaire de x est dond formée d'un 1 suivi d'une alternance de 0 et de 1 (ce qui se montre par récurrence).

- Si $n = 2m$ est pair alors $x = \sum_{i=1}^{m} 2^{2i-1}$. Pour gagner, on prend alors $x \oplus (2^n - 1) = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{2i}$ allumettes.
- Si $n = 2m + 1$ est impair alors $x = \sum_{i=1}^{m} 2^{2i}$. Pour gagner, on prend alors $x \oplus (2^n - 1) = \sum_{i=1}^{m} 2^{2i-1}$ allumettes.

Exercice 8

Question 1.



Question 2.