PROBLÈME 2 (CCP 2018 MP)

Q31. La variable aléatoire X admet une espérance. De fait, c'est évident si $X(\Omega)$ est fini. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, et si $\{x_0, x_1, \dots,\}$ en est une énumération, l'espérance de X est, par définition, la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \mathbf{P}(X = x_n)$, pourvu que cette série soit absolument convergente.
Or, $|x_n \, \mathbf{P}(X = x_n)| \leqslant \mathbf{P}(X = x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ est convergente, donc X admet bien une espérance en vertu du théorème de comparaison. Le résultat s'étend immédiatement à toute variable aléatoire bornée (par majoration, ou en se ramenant à $[-1, 1]$ par normalisation) ; cela sera utile par la suite.

Q32. **Inégalité de Markov.** *Si* Y *est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors*

$$\forall \alpha > 0 \colon \ \mathbf{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Y)}{\alpha}.$$

Démonstration. Cas où $Y(\Omega)$ *est fini.* La validité des manipulations sur les sommes finies est immédiate.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \, \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y < a}} y \, \mathbf{P}(Y = y) + \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \geqslant a}} y \, \mathbf{P}(Y = y) \\ &\underset{[Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+]}{\geqslant} \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geqslant a}} y \, \mathbf{P}(Y = y) \geqslant \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \geqslant a}} a \, \mathbf{P}(Y = y) = a \, \mathbf{P}(Y \geqslant a).\end{aligned}$$

Cas où $Y(\Omega)$ *est infini dénombrable.* Le formalisme est un peu différent, mais la démonstration est intrinsèquement la même. On peut par exemple utiliser les fonctions indicatrices et la croissance de l'espérance :

$$Y = Y \mathbb{1}_{(Y < a)} + Y \mathbb{1}_{(Y \geqslant a)} \geqslant 0 + a \mathbb{1}_{(Y \geqslant a)} \quad \therefore \quad \mathbf{E}(Y) \geqslant \mathbf{E}\left(a \mathbb{1}_{(Y \geqslant a)}\right) = a \, \mathbf{P}(Y \geqslant a).$$

□

Q33. Comme X admet une espérance, il en va de même de $|X|$, à qui l'on peut appliquer l'inégalité de Markov, puisqu'elle est positive.

Q34. Le fait que $tn > 0$, la croissance de l'exponentielle, puis l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire positive bornée (donc admettant une espérance) e^{tnS_n}, donnent

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(tnS_n \geqslant tn\varepsilon) = \mathbf{P}\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(e^{tnS_n}\right)}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Or, $e^{tnS_n} = \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}$ et les variables aléatoires e^{tX_i} sont bornées, donc admettent une espérance. Alors, l'indépendance des X_i donne

$$\mathbf{E}\left(e^{tnS_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) = \left[\, \mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right]^n.$$

Q35. De $g_a(x) = P(x) - a^x$ avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on tire que g_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $g_a''(x) = -(\ln a)^2 a^x < 0$, ce qui montre que g_a' est strictement décroissante. Comme

$$g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0 = a - a = g_a(1),$$

le théorème de Rolle entraine que g_a' s'annule au moins une fois sur $]-1,1[$. Comme g_a' est strictement décroissante, g_a' s'annule une seule fois et est d'abord positive, puis négative. Ainsi, il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que g_a est strictement croissante sur $[-1, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, 1]$. En particulier, g_a est positive sur $[-1,1]$. Notons que l'hypothèse $a > 0$ suffit.

Q36. Soit $t > 0$. En prenant $a = \mathrm{e}^t > 1$, l'inégalité $g_a(x) \geqslant 0$ donne

$$\frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{tx} \geqslant 0,$$

d'où l'inégalité demandée en ajoutant e^{tx} des deux côtés.

Q37. Par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = 0$, l'inégalité de la question 36 donne

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \frac{1-\mathrm{X}}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+\mathrm{X}}{2}\mathrm{e}^{t} = \mathrm{ch}t + (\mathrm{sh}t)\mathrm{X} \quad \therefore \quad \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right) \leqslant \mathrm{ch}t + (\mathrm{sh}t)\,\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{ch}t.$$

Q38. Si $k \geqslant 1$, on a

$$(2k)! = k!\prod_{j=1}^{k}(k+j) \geqslant k!\prod_{j=1}^{k} 2 = 2^k k!,$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $k = 0$ $(1 = 1)$. En en prenant l'inverse, puis en multipliant par la quantité positive t^{2k}, il vient $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$.
En utilisant alors la question 37, il vient, en utilisant les développements en série entière du cosinus hyperbolique et de l'exponentielle, lesquels sont de rayon de convergence infini :

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right) \leqslant \mathrm{ch}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Q39. Posons $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$. Alors, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\varphi'(t) = n(t-\varepsilon)\varphi(t)$ est du signe de $t - \varepsilon$. Il s'ensuit que φ admet un minimum en ε et que ce minimum vaut $\varphi(\varepsilon) = \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Q40. Les questions précédentes donnent une majoration de $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \geqslant \varepsilon)$ valable pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \geqslant \varepsilon) \underset{[\mathrm{Q}.34]}{\leqslant} \mathrm{e}^{-nt\varepsilon}\,\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right)^n \underset{[\mathrm{Q}38]}{\leqslant} \mathrm{e}^{-nt\varepsilon} \times \mathrm{e}^{\frac{nt^2}{2}}.$$

En particulier, pour $t = \varepsilon$, choix optimal en vertu de la question 39, il vient $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Les v.a. $-\mathrm{X}_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i (elles sont à valeurs dans $[-1,1]$ et indépendantes). Il s'ensuit que l'on peut appliquer la majoration ci-dessus à $-\mathrm{S}_n$, ce qui donne $\mathbf{P}(-\mathrm{S}_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$. Alors,

$$\mathbf{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(\mathrm{S}_n \leqslant -\varepsilon) + \mathbf{P}(\mathrm{S}_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Q41. La croissance des mesures de probabilité et la question 40 donnent la majoration

$$\mathbf{P}(|\mathrm{S}_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Le théorème de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$ assurent alors la convergence de la série de terme général $\mathbf{P}(|\mathrm{S}_n| > \varepsilon)$.

Q42. $\{\omega \in \Omega\,;\ |\mathrm{S}_m(\omega)| > \varepsilon\} = \mathrm{S}_m^{-1}(]-\infty,-\varepsilon[) \cup \mathrm{S}_m^{-1}(]\varepsilon,+\infty[)$ est la réunion de deux événements, donc un événement. Alors, B_n est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.

Par ailleurs, $\mathbf{P}(\mathrm{B}_n) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega\,;\ |\mathrm{S}_m(\omega)| > \varepsilon\}\right)$, reste d'une série convergente d'après la question 41. Comme la suite $(\mathrm{B}_n)_n$ est décroissante, il s'ensuit

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{B}_n) = 0.$$

Q43. Posons pour plus de clarté $\mathrm{B}_n(\varepsilon) = \mathrm{B}_n$. On peut écrire

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n\colon |\mathrm{S}_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega\,;\ |\mathrm{S}_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{B}_n(1/k)}$$

donc Ω_k est une réunion dénombrable d'événements et donc un événement. On peut par ailleurs écrire

$$\mathrm{A} = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n\colon |\mathrm{S}_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k,$$

ce qui montre que A est un événement.

Q44. En reprenant l'expression de Ω_k obtenue à la question 43, le passage au complémentaire donne $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n(1/k)$ et en appliquant ce que l'on a montré à la question 42, on obtient $\mathbf{P}\left(\overline{\Omega_k}\right) = 0$, d'où $\mathbf{P}(\Omega_k) = 1$.

Enfin, $\left(|\mathrm{S}_m| \leqslant \frac{1}{k}\right) \supset \left(|\mathrm{S}_m| \leqslant \frac{1}{k+1}\right)$, ce qui entraine que la suite d'événements $(\Omega_k)_k$ est décroissante. On peut alors conclure :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(\Omega_k) = 1.$$

Autrement dit, $(\mathrm{S}_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Ce résultat est la *loi forte des grands nombres.*

♣

♢

♡

♠

Exercice n°1 (e3a MP 2015)

1. On a $\boxed{1-p = \mathrm{P}(b'=0 \mid b=1)\,;\; q = \mathrm{P}(b'=0 \mid b=0) \text{ et } 1-q = \mathrm{P}(b'=1 \mid b=0)}$

2. $(b=1)$ et $(b=0)$ forment un système complet d'évènements
donc $\mathrm{P}(b'=1) = \mathrm{P}(b'=1 \mid b=1)\mathrm{P}(b=1) + \mathrm{P}(b'=1 \mid b=0)\mathrm{P}(b=0)$ donc
$\boxed{\mathrm{P}(b'=1) = p\alpha + (1-q)(1-\alpha)}$

3. Selon la formule de Bayes : $\mathrm{P}(b=1|b'=1) = \dfrac{\mathrm{P}(b'=1|b=1)\mathrm{P}(b=1)}{\mathrm{P}(b'=1)}$ si $\mathrm{P}(b'=1) \neq 0$
si on avait $\mathrm{P}(b'=1) = 0$ on aurait $p\alpha = (1-q)(1-\alpha) = 0$
On est obligé de supposer $p > 0$ et $0 < \alpha < 1$ vu le contexte.
Sachant que l'on a reçu le bit 1,

$$\boxed{\text{la probabilité qu'un 1 ai été envoyé est de } \mathrm{P}(b=1|b'=1) = \frac{p\alpha}{p\alpha + (1-q)(1-\alpha)}}$$

4. Si un 1 est envoyé, les éventuels perturbations sont indépendantes les unes des autres a priori.
On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 envoyés
de sorte que $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k|b=1)) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)$
On répète n fois de façon idendépendante la même expérience de Bernoulli dont les deux issus sont

- 1 avec une probabilité de p
- 0 avec une probabilité de $(1-p)$

Y compte le nombre de 1
Par conséquent Y suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
donc pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
En notant Z tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k|b=1)) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)$ on a $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,(1-q))$
donc pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k) = \binom{n}{k}(1-q)^k q^{n-k}$
Ensuite la formule des probabilité totales donne $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\mathrm{P}(b=1) + \mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)\mathrm{P}(b=0)$
Ainsi $\boxed{\text{pour } k \in [\![0,n]\!], \text{ on a } \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}\left(\alpha p^k(1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}\right)}$
Résultat conforme à 2. pour $n = 1 = k$

5. On a l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \alpha\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)$
donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \alpha\mathrm{E}(\mathrm{Y}) + (1-\alpha)\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \alpha np + (1-\alpha)n(1-q)$ (Y et Z suivent des lois binomiales)
ainsi $\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = n\left(\alpha p + (1-\alpha)(1-q)\right)}$

6. Si le bit envoyé est 1 (c'est à dire $b = 1$) alors si Y désigne le nombre de bits 1 reçus alors $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
la famille $((\mathrm{X}=j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ forme un système complet d'événements
On peut encore appliquer la formule de Bayes
$\mathrm{P}(b=1|\mathrm{X}=k) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=k|b=1)\mathrm{P}(b=1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)} = \mathrm{P}(b=1)\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)}$
ainsi $\mathrm{P}(b=1|\mathrm{X}=k) = \alpha\dfrac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k}\left(\alpha p^k(1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}\right)}$

donc $\boxed{\mathrm{P}(b=1|\mathrm{X}=k) = \alpha\dfrac{p^k(1-p)^{n-k}}{\alpha p^k(1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}}}$

7. (a) L'hypothèse canal symétrique donne $\mathrm{P}(b=1|\mathrm{X}=k) = \dfrac{\alpha p^k(1-p)^{n-k}}{\alpha p^k(1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}$

donc $\mathrm{P}(b=0|\mathrm{X}=k) = \dfrac{(1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}{\alpha p^k(1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}$

donc $P(b=1|X=k) > P(b=0|X=k) \iff \alpha p^k(1-p)^{n-k} > (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}$

ainsi $P(b=1|X=k) > P(b=0|X=k) \iff \left(\dfrac{p}{1-p}\right)^{2k} > \left(\dfrac{p}{1-p}\right)^{n} \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$

comme $p > 1/2$ alors $p/(1-p) > 1$ donc $\ln(p) - \ln(1-p) > 0$

donc $\boxed{\text{le 1 est le plus probable si et seulement si } k > \dfrac{n(\ln(p)-\ln(1-p)) + \ln(1-\alpha) - \ln(\alpha)}{2(\ln(p)-\ln(1-p))}}$

(b) $\boxed{\text{Si } \alpha = 1/2 \text{ le 1 est le plus probable si et seulement si } 2k > n}$ (résultat rassurant)

8. (a) Les hypothèses $\alpha = 1/2$ et $p = q$ donnent

$P(b=1|X=k) = \dfrac{p^k(1-p)^{n-k}}{p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}}$

donc $P(b=0|X=k) = \dfrac{(1-p)^k p^{n-k}}{p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}}$

et $P(X=k) = \frac{1}{2}\binom{n}{k}\left(p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}\right)$

La formule des probabilités totales donne

$$\boxed{f(n) = \sum_{n/2<k\leqslant n} P(b=0|X=k)P(X=k) + \sum_{0\leqslant k<n/2} P(b=1|X=k)P(X=k)}$$

(b) donc $\boxed{f(n) = \dfrac{1}{2}\sum_{n/2<k\leqslant n}\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} + \dfrac{1}{2}\sum_{0\leqslant k<n/2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$

(c) On fait comme vue ne classe : on calcule de façon récursive $n \in \mathbb{N}^*$ étant donné, la liste des $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$

```
def tab_bin(n):
    if n<2: return (n+1)*[1]
    else:
        coefs=tab_bin(n-1)
        coefs.append(1)
        for i in range(n-1,0,-1):
            coefs[i]+=coefs[i-1]
        return coefs
def binome(n,k):
    if k>n:
        return 0
    else:
        return tab_bin(n)[k]
```

(d) Là c'est classique, il est préférable de calculer avec la fonction précédente `tab_bin`.

```
p=0.95
def f(n):
    somme=0
    coefs=tab_bin(n)
    for k in range(n+1):
        if 2*k>n:
            somme+=coefs[k]*((1-p)**k)*(p**(n-k))
        if 2*k<n:
            somme+=coefs[k]*(p**k)*((1-p)**(n-k))
    return somme/2
```