1. Calculs de rayons

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

(a) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$.

(b) (a_n) est périodique non nulle.

(c) $a_n = \sum_{d|n} d^2$.

(d) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

(e) $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$, $0 < a < b$.

(f) $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.

(g) $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.

(h) $a_n = e^{\sqrt{n}}$.

(i) $a_n = \dfrac{1.4.7\dots(3n-2)}{n!}$.

(j) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.

(k) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$.

(l) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$.

(m) $a_n = \dbinom{nk}{n}$, k entier fixé.

(n) $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.

(o) $a_n = \int_{t=0}^{1} (1+t^2)^n \, dt$.

(p) $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.

(q) $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

2. Trouver les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour :

(a) a_n est la somme des diviseurs de n ;

(b) $a_n = 1$ si n est premier, $a_n = 0$ sinon ;

(c) $a_n = (\sqrt{n})^n$;

(d) $a_n = (\ln(n!))^2$;

(e) $a_n = n^{(-1)^n}$;

(f) $a_n = e^{-\sqrt{n}}$;

(g) $a_n = \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$.

3. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Lui comparer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux :

(a) $a_n^2 z^n$;

(b) $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$;

(c) $a_n z^{2n}$;

(d) $a_n z^{n^2}$;

(e) $n^\alpha a_n z^n$, α réel quelconque.

4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} z^{4n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 + n}{2^n + n!} z^n$

5. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient : $a_n = \left(\sin \dfrac{n\pi}{3}\right)$ converge (resp. converge absolument).

6. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général : $u_n(x) = \dfrac{x^{n^2}}{n}$ converge (resp. converge absolument).

7. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

8. Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre réel x :

(a) $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

(b) $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}$

9. Déterminer le rayon de convergence R et pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ calculer de deux manières différentes la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin \frac{n\pi}{3} x^n$.

10. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

Calculer sa fonction somme $f(x)$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

11. Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum a_n z^n$, où $a_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$

12. Étudier la nature et calculer la somme de la série de terme général : $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{k^2}$

13. Calculer les sommes des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(6n+5)}$

14. Développer en séries entières autour de 0 (en précisant l'ensemble de validité) la fonction f définie par

(a) $f(x) = \ln(1+x+x^2)$;

(b) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(c) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$;

(d) $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$;

(e) $f(x) = \arctan(x+1)$;

(f) $f(x) = \arctan(x+\sqrt{3})$;

(g) $f(x) = \sin^3 x$.

15. Montrer que :

(a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

(b) $\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

16. Formule de Cauchy (classique)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on note $f(z)$ sa somme.
Soit $r \in]0, R[$, montrer que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$$

17. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

(b) Montrer que f est solution de l'équation de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

(c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

(d) Déterminer le développement en série entière de $x \to \mathrm{Arcsin}^2 x$.

18. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{Arccos}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

(b) Montrer que f est solution de l'équation de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = -1$.

(c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

(d) Déterminer le développement en série entière de $x \to \mathrm{Arccos}^2 x$.

19. Soit la série entière de coefficient $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
Trouver son rayon de convergence R, puis calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$, la somme $S(x)$ de la série.

20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$.
Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.

21. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose

$$S_n \to +\infty \text{ et } a_n/S_n \to 0$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

22. On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$$

(a) Donner une formule permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(b) Calculer $S(x)$.

(c) Calculer les a_n.

(d) Donner un équivalent de la suite (a_n).

23. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ et préciser le rayon de convergence R.

24.* Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, on définit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0, 1[$

(a) Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.

(b) Montrer que

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

25.* Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de somme respectives $f(z)$ et $g(z)$, telles que les b_n soient tous positifs, et $a_n = o(b_n)$.

(a) On suppose de plus que le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est infini.
Montrer que $f(x) = o\left(g(x)\right)$ si x tend vers $+\infty$.

(b) En supposant cette fois-ci que le rayon de convergence R de $\sum b_n z^n$ est fini, et $\sum b_n R^n$ diverge, comparer f et g au voisinage de R à gauche.

(c) On remplace dans la question précédente l'hypothèse $a_n = o(b_n)$ par $a_n \sim b_n$.
Comparer f et g au voisinage de R à gauche.

(d) Application :
Soit (a_n) une suite réelle convergente de limite $a \neq 0$. Trouver le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{a_n}{n} z^n$.

Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n} t^n$, calculer $\lim\limits_{t \to 1^-} \dfrac{f(t)}{\ln(1-t)}$.

26.* On considère deux suites (a_n) et (b_n) de réels. On suppose que les b_n sont positifs ou nuls, que le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum b_n x^n$ est égal à 1 et que la série $\displaystyle\sum b_n$ diverge. On suppose enfin que $a_n \sim b_n$.

On définit alors pour $|x| < 1$, les deux fonctions $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

(a) Montrer que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1^-.

(b) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ lorsque x tend vers 1^-.

(c) application : Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer un équivalent quand x tend vers 1^- de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n$.

27.* On considère la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n,\ x \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer le rayon R.

(b) Étudier la convergence en $-R$ et R.

(c) En notant S la somme, étudier la continuité de S.

(d) Montrer que : $(1-x)S(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$.