Généralités sur les déterminants

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$.
Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes $C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $B_1, \dots, B_n$ déterminées par $B_j = \sum\limits_{i \neq j} A_i$.
Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}} (x_1, ..., f(x_j), ..., x_n) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$$

5. Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Etablir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Calcul de déterminants

6. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

7. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

8. Calculer pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

9. Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

10. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

11. On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1$$

a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.
b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + z_n \end{pmatrix}$$

12. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficient

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminants tridiagonaux

13. Pour $a \in \mathbb{K}^\star$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$$

14. Soient $a, b \in \mathbb{C}^\star$ distincts. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

15. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

16. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

17. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Déterminant par blocs

18. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Etablir

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

19. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

20. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

b) Justifier que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.

21. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

b) Donner son inverse quand cela est possible.

Pour finir

22. Montrer que le polynôme $P(x)$ suivant est divisible par $(x-1)^3$: $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

23. Soit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit la matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$ en posant :

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}.$$

Comparer $\det A$ et $\det B$.