V

Référentiels non galiléens

«Un physicien moderne étudie la physique quantique les lundis, mercredis et vendredis et médite sur la théorie de la relativité gravitationnelle les mardis, jeudis et samedis. Le dimanche, il prie... pour que quelqu'un trouve la corrélation entre les deux.»
NORBERT WIENER (1894-1964)

PLAN DU CHAPITRE

I Le changement de référentiel : lois cinématiques - "outillage" fondamental

I.1 Mouvements d'un référentiel par rapport à un autre

a - Position du problème

Définition I-1: RÉFÉRENTIEL

Un référentiel est un ensemble constitué d'un centre, d'une base orthonormée (à trois dimensions) et d'une horloge, permettant d'étudier le mouvement de tout point mobile M au cours du temps.

Exemple : $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ référentiel de centre O et de base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ repérant la position de tout point M par ses coordonnées $M(x,y,z)$ à l'instant t :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\cdot\overrightarrow{i} + y(t)\cdot\overrightarrow{j} + z(t)\cdot\overrightarrow{k}$$

IDÉE : dans de très nombreux problèmes de physique, on peut être amené à décrire le mouvement d'un mobile dans deux référentiels différents, par exemple $\mathcal{R}[0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ et $\mathcal{R}'[0';\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}]$:

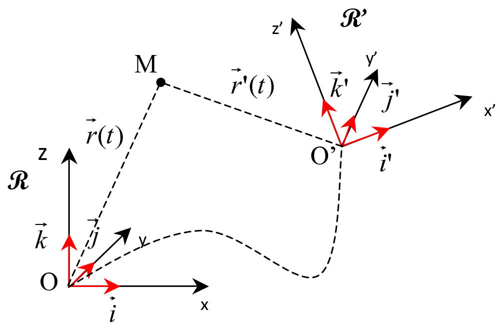


FIGURE V.1 – Deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ pour décrire le mouvement d'un seul et même mobile

⟹On observe alors une trajectoire très différente du mobile suivant que l'on se trouve dans l'un ou l'autre des deux référentiels.

EXEMPLE CLASSIQUE :

- Passager assis dans un train en mouvement rectiligne dans le référentiel terrestre (quai). Celui-ci tient une pomme en hauteur, puis la lâche; pour le passager solidaire du référentiel du train, la pomme décrit un mouvement vertical rectiligne, mais pour un observateur immobile sur le quai, donc solidaire du référentiel terrestre, cette trajectoire est parabolique. (schema en live!)

b - Cas particuliers au programme

- CAS DE LA TRANSLATION D'UN RÉFÉRENTIEL PAR RAPPORT À UN AUTRE

  Un référentiel $\mathcal{R}'$ est dit en translation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si son solide de référence, c'est à dire le solide, hypothétique ou pas qui lui est rigidement lié, est en mouvement de translation dans $\mathcal{R}$.

  Cela signifie que les axes du référentiel $\mathcal{R}'$ gardent en permanence la même direction par rapport à ceux de $\mathcal{R}$. On retiendra la définition suivante :

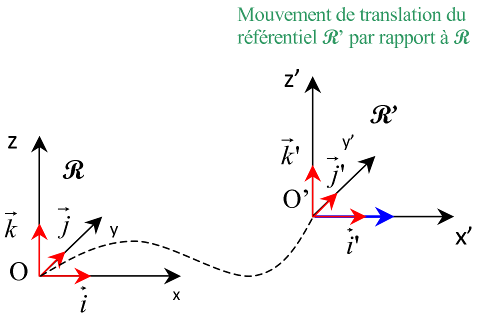


FIGURE V.2 – Mouvement de translation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$

Définition I-2: TRANSLATION D'UN RÉFÉRENTIEL

Le référentiel $\mathcal{R}'(O';\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ si et seulement si tous les vecteurs fixes de $\mathcal{R}'$ sont également fixes dans $\mathcal{R}$.

CONSÉQUENCE IMMÉDIATE : en choisissant la coincidence des vecteurs de base de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à $t=0$:

$$\overrightarrow{i'}(t=0)=\overrightarrow{i}(t=0) \qquad \overrightarrow{j'}(t=0)=\overrightarrow{j}(t=0) \qquad \overrightarrow{k'}(t=0)=\overrightarrow{k}(t=0)$$

on a ensuite :

$$\overrightarrow{i'}(\forall t>0)=\overrightarrow{i}(\forall t>0) \qquad \overrightarrow{j'}(\forall t>0)=\overrightarrow{j}(\forall t>0) \qquad \overrightarrow{k'}(\forall t>0)=\overrightarrow{k}(\forall t>0)$$

A ELIMINER
EXEMPLES : en live !
◇ Mouvement d'un ascenseur
◇ Hélicoptère en vol latéral sans changement d'azimut

Remarque I-1: (IMPORTANT ! ! !)

Dans le cas de la translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$: le mouvement du point O', origine de la base de $\mathcal{R}'$ n'est pas nécessairement en translation et peut avoir un mouvement curviligne complexe ! ! ! (cas de l'hélicoptère ci-dessus)

► CAS PARTICULIER DE LA ROTATION UNIFORME D'UN RÉFÉRENTIEL PAR RAPPORT À UN AUTRE
L'autre cas important de mouvement relatif des deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Par exemple, lors de la rotation d'un manège S autour de son axe $[Oz)$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, si $\theta(t)$ est l'angle repérant cette rotation alors par définition, la vitesse de rotation du manège, appelée aussi vitesse angulaire du manège dans $\mathcal{R}$ est :

$$\overrightarrow{\omega}_{S/\mathcal{R}}=\dot{\theta}(t)\cdot\overrightarrow{e_z}$$

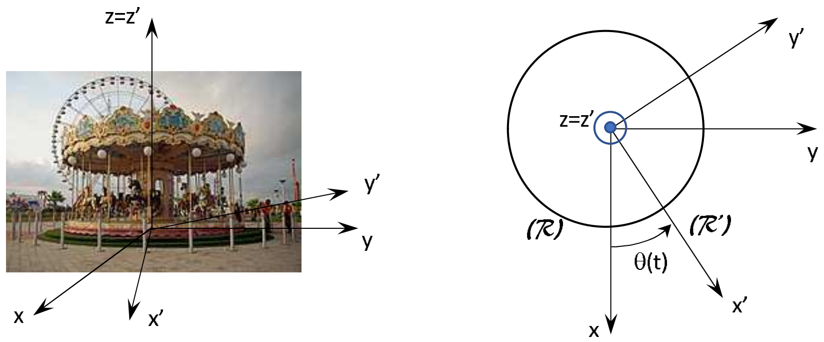


FIGURE V.3 – Manège en rotation dans le référentiel terrestre

Si de plus, la rotation est uniforme, on a $\dot{\theta}(t) = cste$.

Si le manège est le solide de référence du référentiel $\mathcal{R}'$ alors on pourra définir la vitesse de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$:

Définition I-3: VITESSE DE ROTATION DE $\mathcal{R}'$ PAR RAPPORT À $\mathcal{R}$

Le vecteur vitesse de rotation d'un référentiel $\mathcal{R}'(O, x', y', z)$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe $[Oz)$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ est par définition le vecteur de rotation du solide de référence de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\omega}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_z} = cste \cdot \overrightarrow{e_z}}$$

c - Préliminaire : dérivation temporelle d'un vecteur - vecteur vitesse de rotation d'un référentiel par rapport à un autre $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

Considérons deux référentiels $\mathcal{R}_O$ et $\mathcal{R}'_{O'}$ de bases respectives $\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right]$ et $\left[\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right]$.

Soit $\overrightarrow{U}$, un vecteur quelconque de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}'$:

$$\overrightarrow{U} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

Sa dérivée s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}$: $$\left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\dot{x'}\,\vec{i'} + \dot{y'}\,\vec{j'} + \dot{z'}\,\vec{k'}}_{\left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'}:\ \text{dérivée de } U \text{ dans } R'} \underbrace{+ x' \left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + y' \left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + z' \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}_{\text{caractéristique du mvt de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

D'après leur expression, les trois derniers termes dépendent de la variation des vecteurs de base $\overrightarrow{i}'$, $\overrightarrow{j}'$, $\overrightarrow{z}'$ du référentiel $\mathcal{R}'$.

On se propose de les calculer dans un cas particulier qui sera facilement généralisable; supposons $\mathcal{R}'$ en rotation autour d'un axe fixe $[Oz) = [Oz')$ de $\mathcal{R}$ exactement comme dans le cas du manège vu plus haut. on peut écrire :

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{i'} = \cos(\theta) \cdot \overrightarrow{i} + \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j'} = -\sin(\theta) \cdot \overrightarrow{i} + \cos(\theta) \cdot \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k'} = \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

dont les dérivées dans le référentiel $\mathcal{R}$ par rapport au temps sont :

$$\left[\begin{array}{l} \left.\dfrac{d\overrightarrow{i'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot\theta\sin(\theta)\cdot\overrightarrow{i} + \dot\theta\cos(\theta)\cdot\overrightarrow{j} = \dot\theta\,\overrightarrow{k}\wedge(\sin(\theta)\cdot\overrightarrow{j}) + \dot\theta\,\overrightarrow{k}\wedge(\cos(\theta)\cdot\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{i'} \\ \left.\dfrac{d\overrightarrow{j'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot\theta\cos(\theta)\cdot\overrightarrow{i} - \dot\theta\sin(\theta)\cdot\overrightarrow{j} = \dot\theta\,\overrightarrow{k}\wedge(\cos(\theta)\cdot\overrightarrow{j}) - \dot\theta\,\overrightarrow{k}\wedge(\sin(\theta)\cdot\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{j'} \\ \left.\dfrac{d\overrightarrow{j'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \overset{\text{astuce}}{=} \dot\theta\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{k'} = \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{k'} \end{array}\right.$$

En injectant ce dernier résultat dans l'expression de la dérivée de $\overrightarrow{U}$, il vient :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + x'\left(\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{i'}\right) + y'\left(\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{j'}\right) + z'\left(\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{k'}\right)$$

et finalement la relation générale de dérivation d'un vecteur par rapport au temps, appelée formule de Boor :

Propriété I-1: FORMULE DE BOOR

$$\left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{U} \qquad \text{(V.1)}$$

avec $\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ appelé **vecteur vitesse de rotation instantané de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$**

I.2 Les lois de composition des vitesses et accélérations

a - Loi de composition des vitesses - point coincident

IDÉE : cherchons à exprimer la vitesse $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$, **nommée vitesse absolue** en fonction de sa vitesse $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ **nommée vitesse relative** :

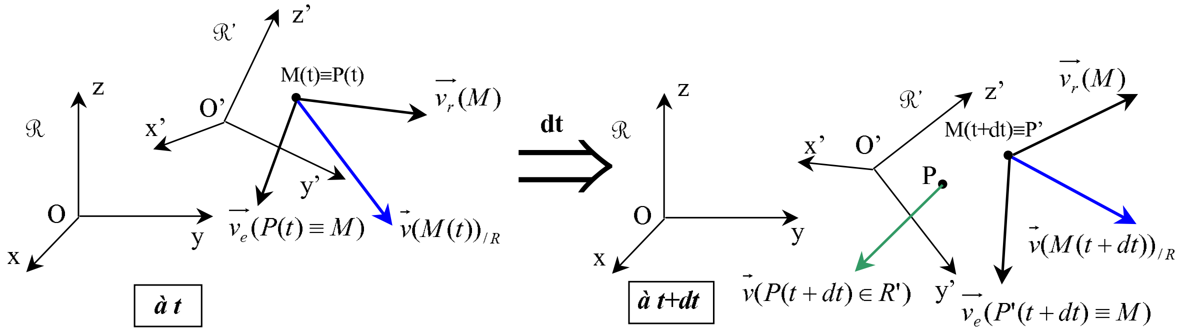


FIGURE V.4 – Composition galiléenne des vitesses

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

soit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\substack{= \vec{v_e}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{v}(P=M)|_R \\ \text{vitesse d'entrainement ou vitesse de } P \text{ appelé point coincident attaché à } R' \text{ (cf schéma)}}}$$

soit :

Propriété I-2: Loi de composition des vitesses

$$\underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{v}(M)_a} = \underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{v}(M)_r} + \vec{v_e}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Commentaires :

- $\vec{v}(M)_a = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ est la vitesse dite "absolue"
- $\vec{v}(M)_r = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ est la vitesse dite "relative"
- $\vec{v_e}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathcal{O}')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ est appelée vitesse d'entraînement du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Elle représente concrètement la vitesse dans $\mathcal{R}$ du point P **coincident** avec M à l'instant t et **solidaire de** $\mathcal{R}'$; en effet :

$$\vec{v}(P \in \mathcal{R}')_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_e(\overrightarrow{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})$$

Propriété I-3: Pour les mouvements de référentiels au programme

Pour les deux mouvements étudiés dans le cadre du programme, cela donne :

- **translation :**
Dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, tous les vecteurs de $\mathcal{R}'$ gardent une direction fixe dans $\mathcal{R}$ en particulier les vecteurs de base donc :
$\left.\dfrac{d\vec{i'}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{d\vec{j'}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{d\vec{k'}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ ce qui implique $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et donc
$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}}$$

- **rotation autour d'un axe fixe :**
Dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en rotation autour d'un axe fixe, on a : $\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et donc
$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

b - Loi de composition des accélérations

Recherchons de même à exprimer l'accélération $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ (accélération absolue) en fonction de l'accélération $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (accélération relative) :

Partons de l'expression de la vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

que nous dérivons :

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$= \left.\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \left.\frac{d\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \left.\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$$

$$= \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \left.\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$+\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$$

soit finalement :

Propriété I-4: Loi de composition des accélérations

$$\underbrace{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{a}(M)_a} = \underbrace{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{a}(M)_r} + \underbrace{\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{=\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{a}_c}$$

Commentaires :

- $\vec{a}(M)_a = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ est l'accélération dite "absolue".
- $\vec{a}(M)_r = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$ est l'accélération dite "relative".
- $\vec{a_e}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ est appelée accélération d'entraînement du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. C'est l'accélération du point P, point **coincident** avec M à l'instant t, c'est à dire l'accélération à l'instant t d'un point solidaire du référentiel $\mathcal{R}'$ qui est confondu avec M.
- $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$ est l'accélération dite "de Coriolis" [1].

Pour les deux mouvements relatifs de référentiels au programme, il vient :

■ pour la translation : $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ donc $\vec{a}_c = \vec{0}$ et $\vec{a_e} = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$ donc :

Propriété I-5: Loi de composition des accélérations pour la translation

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$$

■ pour la rotation uniforme autour d'un axe fixe (en choisissant $[Oz) = [Oz')$ i.e. $\vec{k} = \vec{k'}$) on a :

◇ $\dfrac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0}$

◇ $\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$

◇ $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \omega \cdot \vec{k'} \wedge \left(\omega \cdot \vec{k'} \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM})\right) = \omega \cdot \vec{k'} \wedge \left(\omega \cdot \vec{k'} \wedge HM \cdot \vec{i'}\right) = \omega \cdot \vec{k'} \wedge \left(\omega HM \cdot \vec{j'}\right) = \omega \cdot \vec{k'} \wedge \left(\omega HM \cdot \vec{j'}\right) = -\omega^2 HM \vec{i'} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$ avec H projeté orthogonal de M sur l'axe $[Oz)$

1. Gaspard-Gustave Coriolis mathématicien et ingénieur français 1792-1843

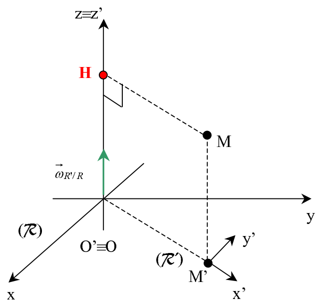


FIGURE V.5 – Rotation uniforme de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ autour de $[Oz)$

donc :

Propriété I-6: LOI DE COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS POUR LA ROTATION

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} - \omega^2\overrightarrow{HM} + 2\omega\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$$

c - Référentiel galiléen - transformation de Galilée spéciale

Propriété I-7: RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

Tout référentiel $\mathcal{R}'$ en **translation rectiligne uniforme** par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}$ réputé galiléen est également galiléen.

CONSÉQUENCE : $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}$

TRANSFORMATION DE GALILÉE "SPÉCIALE" : dans le cas où $\mathcal{R}'$ est un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_e}$ par rapport à un autre référentiel, il est très simple de déterminer les coordonnées (x', y', z') d'un point M à tout instant dans $\mathcal{R}'$ à partir de celles (x, y, z) dans $\mathcal{R}$:

Supposons les deux référentiels galiléens $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\mathcal{R}'(O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ avec O' de vitesse $\overrightarrow{v}(O')_{/\mathcal{R}} = v_e \cdot \overrightarrow{i'} = \overrightarrow{cste}$ dans R.

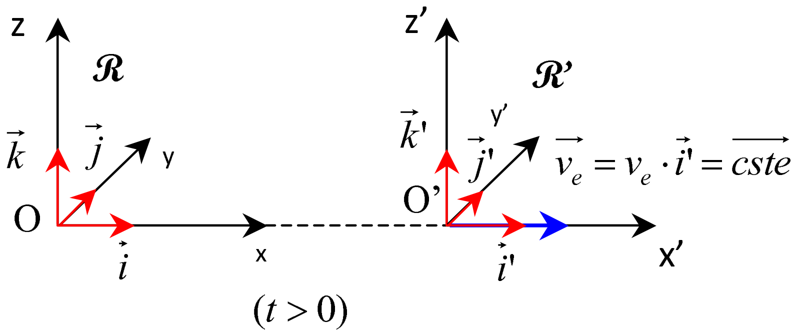


FIGURE V.6 – Deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + v_e \cdot \overrightarrow{i'}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}} = \begin{pmatrix}\dot{x'}\\ \dot{y'}\\ \dot{z'}\end{pmatrix}_{\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'},\overrightarrow{k'}} + \begin{pmatrix}v_e\\ 0\\ 0\end{pmatrix}_{\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'},\overrightarrow{k'}}$$

ATTENTION : les vecteurs $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j'} = \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k'} = \overrightarrow{k}$ sont invariants dans le temps !!!!

soit en intégrant par rapport au temps :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_e \cdot t + cste_{x'}\\ cste_{y'}\\ cste_{z'}\end{pmatrix}$$

avec les CI $x(t=0) = x'(t=0)$, $y(t=0) = y'(t=0)$,s et $z(t=0) = z'(t=0)$ on obtient finalement la transformation "spéciale" (uniaxe) de Galilée :

Propriété I-8: TRANSFORMATION DE GALILÉE "SPÉCIALE"

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_e \cdot t\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boxed{t = t'}$$

II Le changement de référentiel : lois dynamiques et énergétiques des référentiels non galiléens

OBJECTIFS DE CE PARAGRAPHE : reformuler les théorèmes PFD,TMC,TEC pour le mouvement d'un point matériel $M(m)$ dans un référentiel non galiléen.

II.1 Rappel fondamental : les 3 postulats de Newton (MP2I)

La mécanique classique [2] est édifiée sur la base de 3 postulats fondamentaux, oeuvre de Newton, et dont la version finale fut publiée en 1687 dans le recueil *Principia Mathematica*.
On rappelle brièvement ici le contenu de ces 3 lois :

Propriété II-1: PREMIÈRE LOI OU **principe d'inertie**

Tout point matériel M isolé est au repos ou possède un mouvement rectiligne uniforme par rapport à tout référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Cet état ne peut changer que si une force l'y contraint :

$$M \text{ isolé dans } \mathcal{R} \text{ galiléen} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v}(M)|_{\mathcal{R}(gal)} = \overrightarrow{cste}$$

2. soit *non relativiste et non quantique*

Propriété II-2: SECONDE LOI OU **relation fondamentale de la dynamique**

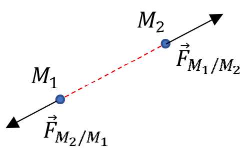
Tout point matériel M de masse m soumis à une résultante de n forces "vraies" (i.e. action d'un acteur !) $\overrightarrow{R} = \sum_i^n \overrightarrow{F_i}$ vérifie dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen la relation suivante :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{p}(M)_{/R}}{dt} = \overrightarrow{R} \quad \text{avec } \overrightarrow{p}(M)_{/R} = m\,\overrightarrow{v}(M)|_{\mathcal{R}}$$

NB : m est la masse inerte identifiée à la masse grave (cf MP2I)

Propriété II-3: TROISIÈME LOI OU **principe des actions réciproques**

Un point matériel M_1 soumis à l'action d'un autre point matériel M_2 exerce à son tour une action sur M_2 de même intensité et de même direction, mais de sens opposé :



$$\overrightarrow{F}_{M_1\rightarrow M_2} = -\overrightarrow{F}_{M_2\rightarrow M_1}$$

On admettra dans le cadre classique de ce cours le caractère instantané de la réponse de M_1 sur M_2.

II.2 Les lois de la dynamique en référentiel non galiléen

a - Relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen : expression générale - forces d'inertie

Nous reprenons toujours le cas de nos deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$; nous avons montré la relation de composition des accélérations :

$$\underbrace{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}}}_{=\overrightarrow{a}(M)_a} = \underbrace{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\overrightarrow{a}(M)_r} + \underbrace{\overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{=\overrightarrow{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} + \underbrace{2\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\overrightarrow{a}_c}$$

<u>HYPOTHÈSE :</u> on suppose $\mathcal{R}$ galiléen.
Examinons deux cas de figure :

- Si : $\overrightarrow{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cste} \implies$ le référentiel $\mathcal{R}'$ est galiléen avec : $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{0}\end{array}\right.$

  <u>CONSÉQUENCE IMMÉDIATE :</u> $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$

  donc l'expression de la RFD est inchangée lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\boxed{m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_i^n \overrightarrow{F_i}}$$

■ Si : $\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \neq \overrightarrow{cste} \implies$ le référentiel $\mathcal{R}'$ est non galiléen avec $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \neq \vec{0} \\ \vec{a}_c \neq \vec{0} \text{ si } \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \neq \vec{0} \end{array}\right.$

<u>Conséquence immédiate :</u> $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} \neq \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$

On peut alors présenter la relation fondamentale de la dynamique de deux manières :

◇ <u>formulation dans R</u> : $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \sum\limits_i \vec{F}_i(M)$

◇ <u>formulation dans R'</u> : $m\left[\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)\right] = \sum_i \vec{F}_{ext}(M)$
soit :

Propriété II-4: Relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i(M)}_{\text{forces vraies}} \overbrace{-ma_e(M)}^{\text{pseudo-forces d'inertie d'entraînement } = \overrightarrow{F_{ie}}} \underbrace{-ma_c(M)}_{\text{pseudo-forces d'inertie de Coriolis } = \overrightarrow{F_{ic}}} = \sum_i \vec{F}_i(M) + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}$$

Remarque II-1: Commentaires

Les nouveaux termes apparaissant dans le membre de droite du principe fondamental de dynamique sont appelés **forces d'inertie** (ou **pseudo-forces**) :

- elles ne sont pas le fait d'un *acteur*.
- elles sont la conséquence immédiate du mouvement du référentiel dans lequel on pose le PFD. On les appelle aussi **forces de repère**.

b - Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

On considère toujours $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ galiléen et $\mathcal{R}'(O';\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ non galiléen en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$.

Un point matériel M de masse m possède dans $\mathcal{R}'$ le moment cinétique en O' :

$$\overrightarrow{L_{O'_{\mathcal{R}'}}}(M) = m\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$$

qui donne par dérivation :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{L_{O'_{\mathcal{R}'}}}(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} = \underbrace{m\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{O'M} \wedge \underbrace{m\left.\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'}}_{=\sum_i \vec{F_i}(M)+\overrightarrow{F_{ie}}+\overrightarrow{F_{ic}}}$$

soit finalement en posant la résultante de forces vraies $\vec{R}(M) = \sum_i \vec{F_i}(M)$:

Propriété II-5: THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE EN O' DANS $\mathcal{R}'$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{L_{O'_{\mathcal{R}'}}}(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{M}_{O'}(\overrightarrow{R}) + \overrightarrow{M}_{O'}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{M}_{O'}(\overrightarrow{F_{ic}})$$

c - Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen

L'énergie cinétique d'un point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$E_{c_{/\mathcal{R}'}}(M) = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}(M)^2_{/\mathcal{R}'}$$

qui donne en différenciant :

$$\begin{aligned} dE_{c_{/\mathcal{R}'}}(M) &= m\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}(M)\cdot d\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = m\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}(M)\cdot\frac{d\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}(M)\big|_{/\mathcal{R}'}}{dt}\cdot dt \\ &= \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}\cdot\left[\overrightarrow{R}+\overrightarrow{F_{ie}}+\overrightarrow{F_{ic}}\right]dt = \delta W(\overrightarrow{R}) + \delta W(\overrightarrow{F_{ie}}) + \delta W(\overrightarrow{F_{ic}}) \end{aligned}$$

En outre : $\boxed{\delta W(\overrightarrow{F_{ic}}) = \overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}'}\cdot\left(-2m\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}'}\right)\cdot dt = 0}$
Ainsi, on retiendra :

Propriété II-6: THÉORÈMES DE L'ÉNERGIE ET DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

Sous forme élémentaire :

$$dE_{c_{/\mathcal{R}'}}(M) = \delta W(\overrightarrow{R}) + \delta W(\overrightarrow{F_{ie}})$$

que l'on peut intégrer entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\Delta_{t_1\to t_2}E_{c_{/\mathcal{R}'}}(M) = W_{t_1\to t_2}(\overrightarrow{R}) + W_{t_1\to t_2}(\overrightarrow{F_{ie}})$$

ou bien diviser par dt pour obtenir le **théorème de la puissance cinétique dans** $\mathcal{R}'$

$$\left.\frac{dE_{c_{/\mathcal{R}'}}(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} = \frac{\delta W(\overrightarrow{R})}{dt} + \frac{\delta W(\overrightarrow{F_{ie}})}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{R}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ie})$$

II.3 RFD dans les mouvements simples de référentiels

a - Référentiel entraîné en translation accélérée par rapport à un autre référentiel réputé galiléen - énergie potentielle d'entraînement

■ RFD :

Si le référentiel $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ est en translation rectiligne accéléré par rapport à $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ galiléen , soit $\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$, on a : $\overrightarrow{a_e}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}}$, et $\overrightarrow{a}_c(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$
Par conséquent, pour tout point M :
on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

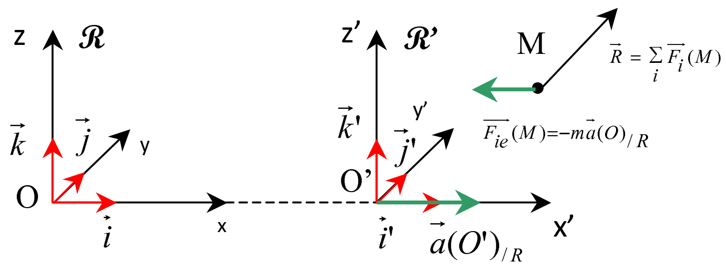


FIGURE V.7 – Translation accélérée de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ (ici selon $[Ox)$

d'où :

Propriété II-7: RFD DANS $\mathcal{R}'$ DANS LE CAS DE LA TRANSLATION DE $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$

$$\text{translation } \mathcal{R}'/\mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_i \overrightarrow{F}_i(M) - m\overrightarrow{a}(O')_{/\mathcal{R}}$$

■ ENERGIE POTENTIELLE D'ENTRAÎNEMENT :

Le travail de la force d'inertie s'écrit : $\delta W = \overrightarrow{F_{ie}} \cdot \overrightarrow{dr'} = -ma(O') \cdot dx'$
soit en appelant E_p l'énergie potentielle associée à cette force : $dE_p = -\delta W = +ma(O') \cdot dx'$
d'où :

Propriété II-8: ENERGIE POTENTIELLE D'ENTRAÎNEMENT DANS LE CAS DE LA TRANSLATION

$$E_p = ma(O') \cdot x' + \underbrace{cste}_{arbitraire}$$

Exemples :

■ POIDS "APPARENT" D'UNE PERSONNE DANS UN ASCENSEUR $\longrightarrow$ en live !

■ PENDULE SIMPLE DANS UNE VOITURE EN ACCÉLÉRATION UNIFORME :
on suppose une voiture se déplaçant sur l'axe $[Ox)$ en accélération constante $\overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{i}$ et un pendule suspendu à son plafond. On stabilise le pendule en position "d'équilibre relatif" pendant l'accélération.

QUESTION : quel est la valeur de l'angle d'équilibre θ_e d'inclinaison par rapport à la verticale dans le référentiel $\mathcal{R}'$?

On suppose $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ galiléen et on attache $\mathcal{R}'(O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ rigidement à la voiture

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{R}' \text{ est en translation par rapport à } \mathcal{R}}$$

On a : $\overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{a}(O')_{\mathcal{R}} = a \cdot \overrightarrow{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{0}}$

La RFD dans le référentiel $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_{ie}} = \overrightarrow{0} \quad \text{car équilibre dans } \mathcal{R}'$$

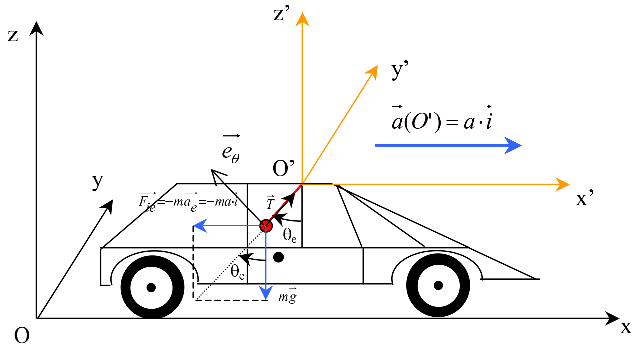


FIGURE V.8 – Pendule dans une voiture en accélération rectiligne uniforme

En projetant cette relation sur la direction $\overrightarrow{e_\theta}$, il vient :

$$0 = -mg\sin\theta_e + ma\cos\theta_e$$

soit finalement : $\boxed{\tan\theta_e = \frac{a}{g}}$

b - Référentiel entraîné en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel réputé galiléen : force "centrifuge" et force de Coriolis

Choisissons le référentiel $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ galiléen, avec $\overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega\overrightarrow{k} = \overrightarrow{cste}$ et $O' \equiv O$:

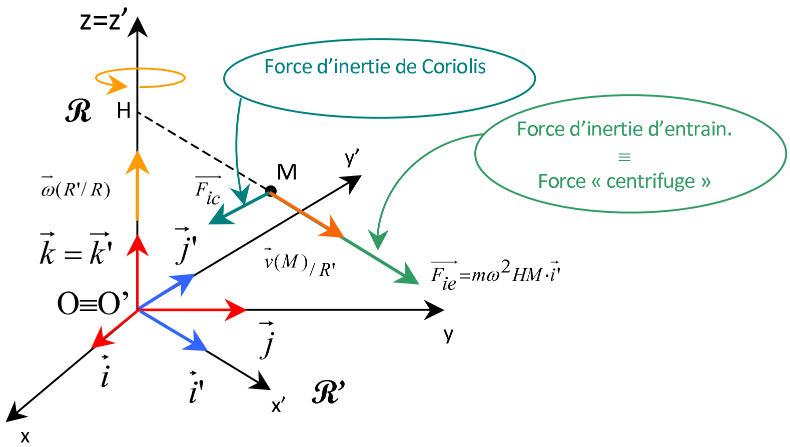


FIGURE V.9 – Rotation uniforme de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ autour de $[Oz)$

on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left[\overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}\right] \\ \qquad = -m\omega\overrightarrow{k}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left[\omega\overrightarrow{k} \wedge \left(O'H\overrightarrow{k} + HM\overrightarrow{e_r}\right)\right] = +m\omega^2\overrightarrow{HM} \\ \overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \end{cases}$$

ainsi,

Propriété II-9: RFD DANS LE CAS DE LA ROTATION UNIFORME DE $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$

$$\text{Rotation uniforme selon [Oz] de } \mathcal{R}'/\mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_i \overrightarrow{F}_i(M) + \overbrace{m\omega^2\overrightarrow{HM}}^{\text{force centrifuge ou axifuge}} \underbrace{-2m\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{\text{force de Coriolis}}$$

■ ENERGIE POTENTIELLE CENTRIFUGE :

Le travail de la force d'inertie centrifuge s'écrit : $\delta W = \overrightarrow{F_{ie}} \cdot \overrightarrow{dr} = m\omega^2\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{dr} = m\omega^2\overrightarrow{HM} \cdot d\overrightarrow{HM}$
soit en appelant E_p l'énergie potentielle associée à cette force : $dE_p = -\delta W = -m\omega^2 HM \cdot dHM$

Propriété II-10: ENERGIE POTENTIELLE CENTRIFUGE/AXIFUGE

$$E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 \cdot x'^2 + cste = -\frac{1}{2}m\omega^2 \cdot HM^2 + \underbrace{cste}_{arbitraire \text{ (pris souvent } = 0)}$$

Exemple : EFFET CENTRIFUGE POUR UNE MASSE DANS UN VÉHICULE PRENANT UN ROND-POINT

Supposons un point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour de l'axe $[Oz) = [O'z')$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Par exemple, la masse d'un pendule suspendue au plafond d'une voiture prenant un rond point de rayon R. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est rigidement lié à la voiture et $\mathcal{R}$ lié à la Terre et supposé galiléen.

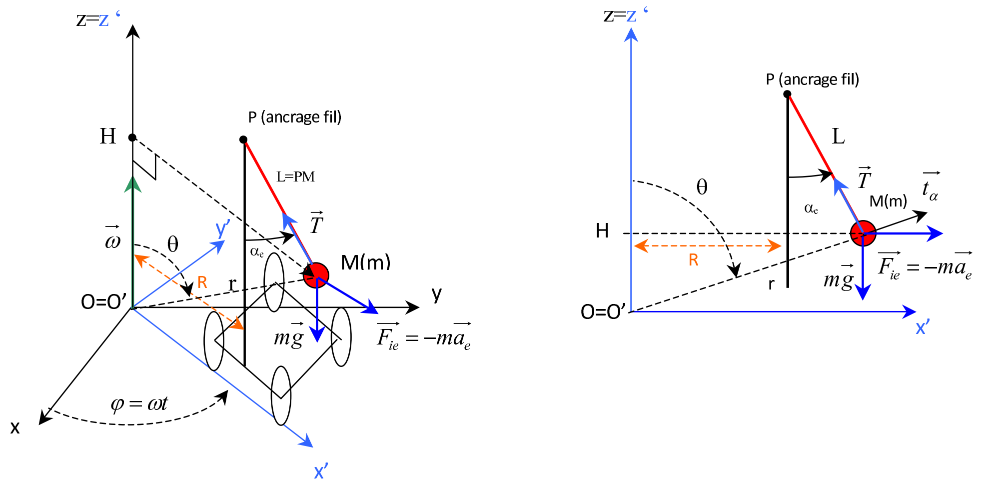


FIGURE V.10 – Action de la pseudo-force d'inertie d'entraînement lors de la prise d'un rond point

Le véhicule parcourt le rond point à la vitesse angulaire **constante** $\omega = \dot{\varphi} = cste$.

HYPOTHÈSE : on suppose que le pendule n'oscille pas dans le référentiel du véhicule :

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{v}(M)|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$$

Questions : ■ Expression de la pseudo-force F_{ie} ?
■ Quel est l'angle d'inclinaison α_e du pendule par rapport à la verticale dans le référentiel $\mathcal{R}'$?

Appliquons la RFD au point $M(m)$ dans $\mathcal{R}'$:

$$m\,\overrightarrow{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}_{ie} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} - m\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{0}$$

Dans le choix du schéma ci-dessous, on a : $\begin{cases} O' \equiv O \Longrightarrow \overrightarrow{a}(O')|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega\cdot\overrightarrow{k} = \dot{\varphi}\cdot\overrightarrow{k} = \overrightarrow{Cste} \end{cases}$

Ainsi l'accélération d'entraînement se réduit à :

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left[\overrightarrow{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}\right] = -\omega^2\overrightarrow{HM}$$

et la pseudo-force d'inertie d'entraînement en M qui s'écrit donc :

$$\overrightarrow{F}_{ie}(M) = +m\omega^2\overrightarrow{HM}$$

Finalement la RFD devient : $\quad -mg\overrightarrow{k} + \overrightarrow{T} + m\omega^2\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{0}$

Projetons ce dernier résultat sur la direction tangente à $\overrightarrow{t_\alpha}$:

$$-mg\sin\alpha_e + mHM\omega^2\cos\alpha_e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -mg\sin\alpha_e + mHM\omega^2\cos\alpha_e = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -mg\sin\alpha_e + m(R + L\sin\alpha_e)\omega^2\cos\alpha_e = 0$$

d'où l'on tire l'équation trigonométrique suivante :

$$\boxed{g\tan\alpha_e - L\omega^2\sin\alpha_e = R\omega^2}$$

Résolution numérique : en live ! ! ! .

III Référentiels utiles et leurs propriétés

Note préliminaire : dans toute la suite, nous poserons l'identité de la masse grave m^* apparaissant dans la loi de gravitation, et de la masse inerte m apparaissant dans la quantité d'accélération (premier membre de la RFD). Ceci fut démontré expérimentalement par Eötvös en 1889 .

III.1 Le référentiel de Copernic

Définition III-1: Référentiel de Copernic

Le référentiel de Copernic a pour centre le centre de masse du système solaire, et ses trois axes normaux pointent vers des étoiles réputées fixes dans la voute céleste.

Important : ce référentiel est postulé **Galiléen**.

Formulation de la RFD :

Dans ce référentiel, un point matériel M de masse m est soumis aux force suivantes :

$$\begin{cases} m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) & \text{force gravitationnelle exercée par la Terre sur } m \\ m\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M) & \text{force gravitationnelle exercée par tous les autres astres du } \Sigma \text{ solaire sur } m \\ \overrightarrow{R} & \text{Résultante de forces autres que la gravitation s'exerçant sur } M \end{cases}$$

avec $\overrightarrow{\mathcal{G}}_i(M) = -G\dfrac{m_i}{M_iM^3} \cdot \overrightarrow{M_iM}$ le champ de gravitation engendré en M par la masse m_i.
<u>NB :</u> $G = 6,67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ cste de la gravitation universelle

Ainsi, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce référentiel :

<u>Propriété III-1</u>: Relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}_{Cop}$

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Cop}} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M)$$

III.2 Le référentiel géocentrique

a - Définition et RFD

<u>Définition III-2</u>: Référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de masse de la Terre T, et ses trois axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic i.e. $\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}_{geo}/\mathcal{R}_{Cop}} = \overrightarrow{0}$.

<u>Conséquence de la définition :</u> **le référentiel géocentrique est en translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Copernic[a]. Il est donc non galiléen.**

a. son centre décrit un quasi-cercle autour du centre du référentiel de Copernic

<u>Formulation de la RFD :</u>

Ce référentiel n'est pas galiléen $\Longrightarrow$ on doit ajouter aux forces déjà évoquées dans le cas du référentiel de Copernic les pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Geo}} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M) + \overrightarrow{F_{ie}} + \underbrace{\overrightarrow{F_{ic}}}_{=\overrightarrow{0} \text{ car } \overrightarrow{\omega}_{geo/Cop} = \overrightarrow{0}}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}(T)_{/\mathcal{R}_{Cop}}$
donc :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Geo}} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M) - m\overrightarrow{a}(T)_{/\mathcal{R}_{Cop}}$$

or la RFD appliquée à la Terre dans le référentiel de Copernic conduit à : $\overrightarrow{a}(T)_{/\mathcal{R}_{Cop}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_a(T)$
donc finalement :

Propriété III-2: RFD appliquée à un mobile M de masse m dans $\mathcal{R}_{geo}$

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Geo}} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + \underbrace{m\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}}_a(T)\right]}_{\text{force de marée } = \overrightarrow{F}_{\text{marées}}}$$

b - Caractère galiléen approché de ce référentiel - approche succincte des marées

Idée : on peut comparer quantitativement le terme de force de marée au terme de force de gravitation terrestre ; si le premier peut être négligé face au second, alors nous pourrons considérer le référentiel géocentrique comme galiléen avec une bonne approximation.

Le soleil étant l'un des deux principaux responsables des effets de Marée sur Terre (l'autre étant la Lune), évaluons l'ordre de grandeur du terme de marée qu'il engendre.

Supposons que le système soit composé de seulement deux astres : la Terre $T(m_T)$ dans le champ de gravitation du Soleil $S(m_S)$, et plaçons nous un point $M(m)$ en surface de T tel que T,S, et M soient alignés. La force de marée exercée par le soleil S en M s'écrit :

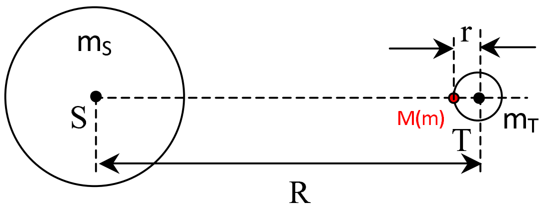


Figure V.11 – Evaluation de l'ordre de grandeur des marées

$$\overrightarrow{F}_{\text{marées}} = m\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}_S(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}}_S(T)\right] = -\frac{Gm_sm}{(R-r)^2}\overrightarrow{e_r} + \frac{Gm_sm}{R^2}\overrightarrow{e_r} = -Gmms\left[\frac{1}{R^2\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{1}{R^2}\right]\overrightarrow{e_r}$$

soit en réalisant un DL au premier ordre avec $r << R$:

$$\overrightarrow{F}_{\text{marées}} = -Gmms\left[\frac{1}{R^2}\left(1+2\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{R^2}\right]\overrightarrow{e_r}$$

et finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{marées}} = -m\underbrace{\frac{2Gm_S}{R^3}r\cdot\overrightarrow{e_r}}_{\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{marées}}}}$$

En reprenant cette démonstration pour un point M' toujours situé sur l'équateur mais sur l'autre "face" de la Terre, on obtient sans peine :

$$\overrightarrow{F}_{\text{marées}} = +m\underbrace{\frac{2Gm_S}{R^3}r\cdot\overrightarrow{e_r}}_{\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{marées}}}$$

Comparons désormais l'effet de marée du soleil à l'effet de gravitation de la Terre à sa surface :

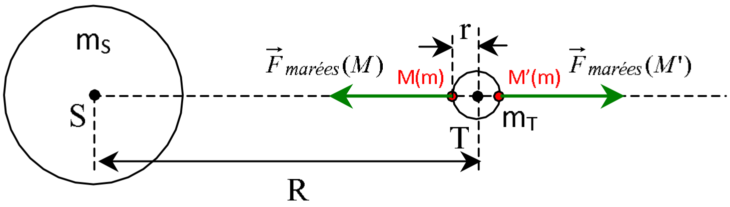


FIGURE V.12 – Direction des forces de marées

Remarque III-1: BOURRELETS OCÉANIQUES

On peut dès lors expliquer le phénomène des 2 "bourrelets océaniques", conséquence des forces de marées, entraînant deux "pleines mers" et deux "basses mers" par 24h :

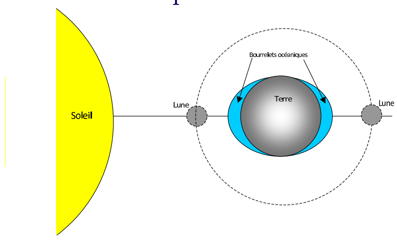


FIGURE V.13 – Bourrelets océaniques dans la configuration de marées la plus favorable i.e. au moment des équinoxes (alignement soleil, Lune, Terre)

$$\alpha_{\text{marées/grav.T}} = \frac{\frac{2Gm_S}{R^3}R_T}{\frac{Gm_T}{R_T^2}} = \frac{2m_S}{m_T}\frac{R_T^3}{R^3} \simeq \boxed{5.10^{-8} << 1} \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} m_s = 2.10^{30}\ kg \\ m_T = 5,97.10^{24}\ kg \\ R_T = 6370\ km \\ R = 150.10^6\ km \end{array}\right.$$

Propriété III-3: CARACTÈRE GALILÉEN APPROCHÉE DU RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE

On peut considérer le référentiel géocentrique comme Galiléen avec **une excellente approximation.**

Remarque III-2: LUNE VERSUS SOLEIL DANS L'INTENSITÉ DE LA FORCE DE MARÉES

On évoque souvent le rôle prépondérant de la lune dans les phénomènes de marées océaniques. C'est un peu troublant lorsque l'on compare les valeurs numériques du tableau ci-dessus qui laissent apparaître que $\mathcal{G}_{Soleil}(T) >> \mathcal{G}_{Lune}(T)$. En fait, la force de marée est une force différentielle (cf son expression primaire) ce qui change tout ! ! ! Evaluons le rapport des forces de marées dûes à la Lune et celle dûes au Soleil :

$$\alpha_{\text{marées Lune/marées Soleil}} = \frac{m_L}{m_S}\frac{d_{TS}^3}{d_{TL}^3} \simeq 2,4 \implies OK!!!$$

Ainsi, l'action de la lune est prépondérante sur celle du soleil à hauteur d'un facteur 2 environ

III.3 Le référentiel terrestre

a - Définition et RFD

Définition III-3: Référentiel terrestre

Un référentiel terrestre $\mathcal{R}_{terr}$ a pour centre un point solidaire du mouvement propre de la Terre (ce peut être son centre, sans obligation cependant) et des axes **rigidement** liés à la Terre également. Ainsi, la Terre constitue **le solide de référence** du référentiel terrestre.

On appellera dans la suite $\overrightarrow{\Omega} = \Omega \cdot \overrightarrow{e_{z_0}}$ le vecteur rotation propre de la Terre autour de ses pôles.

Attention : Le référentiel terrestre est non galiléen

Remarque III-3:

On choisit assez souvent le centre O de ce référentiel en un point de la surface de la Terre et les trois axes ainsi :

$$\left[\begin{array}{l}(Ox) \text{ pointant vers l'est}\\ (Oy) \text{ pointant vers le nord}\\ (Oz) \text{ radial depuis le centre de la Terre}\end{array}\right.$$

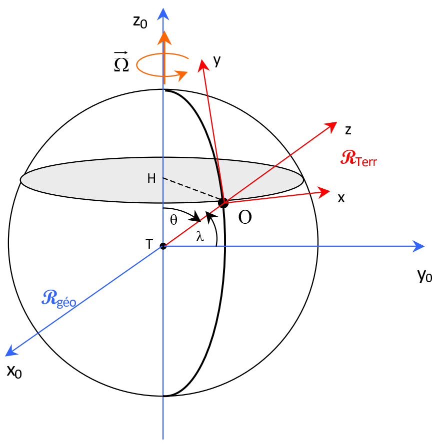


Figure V.14 – Référentiels géocentrique $\mathcal{R}_{geo}$ et terrestre $\mathcal{R}_{Terr}$

Formulation de la RFD :
NB : pour cette démonstration, on choisit l'origine de $\mathcal{R}_{terr}$ au centre de la Terre T : $R_{terr} = [T, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}]$.

Les référentiels terrestres ne sont pas galiléens $\Longrightarrow$ on doit tenir compte des pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis liées à la rotation de la Terre. Afin de bien comprendre l'origine des différents termes intervenant dans la RFD appliquée à un point M de masse m dans $\mathcal{R}_{Terr}$, reprenons l'établissement de celle-ci à partir du référentiel de Copernic :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Cop}} = m\left[\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Terr}} + \overrightarrow{a}_e\left(\mathcal{R}_{Terr}/\mathcal{R}_{Cop}\right) + \overrightarrow{a}_c(M)_{\mathcal{R}_{Terr}/\mathcal{R}_{Cop}}\right] = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M)$$

Ainsi, la RFD appliquée au point M de masse m mobile de vitesse $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}_{Terr}}$ dans le référentiel terrestre s'écrit :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M) + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}$$

avec : $\begin{cases} \overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a}(T)_{\mathcal{R}_{Cop}} - m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left[\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}\right] \\ \overrightarrow{F_{ic}} = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}_{Terr}} \\ \overrightarrow{a}(T)_{\mathcal{R}_{Cop}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}(T)_a \qquad \text{(par RFD appliqué à la Terre dans } \mathcal{R}_{Cop}\text{)} \end{cases}$

ainsi :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} = \overrightarrow{R} + \underbrace{m\overbrace{\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}\right)\right]}^{=\overrightarrow{g}}}_{\text{Pesanteur "vulgaire"}} + \underbrace{m\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}_a(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}}_a(T)\right]}_{\text{Forces de marées}} \underbrace{-2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}_{Terr}}}_{\text{Force de Coriolis}}$$

on négligera par la suite la contribution des forces de marées (cf justification plus haut en IV.2.b) :

Propriété III-4: RFD APPLIQUÉE À UN MOBILE M DE MASSE m DANS $\mathcal{R}_{Terr}$

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} - 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}_{Terr}}$$

b - Force centrifuge et gravitationnelle : pesanteur "vulgaire" en détail

Définition III-4: PESANTEUR VULGAIRE

Le poids d'un point matériel M de masse m ou **pesanteur vulgaire** est l'addition des effets de **gravitation de la Terre** et de la **pseudo-force centrifuge** liée à la rotation de la Terre :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}(M) = m\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}\right)\right] = m\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega^2\overrightarrow{HM}\right]$$

EVALUATION :

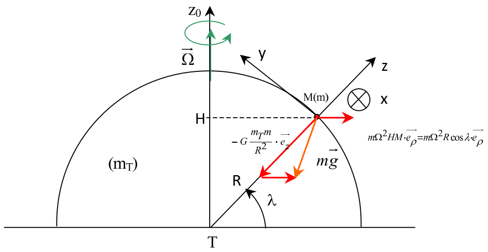


FIGURE V.15 – Effet de la force centrifuge : définition de la pesanteur vulgaire

Le champ de pesanteur vulgaire s'écrit :

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}\right) = -\frac{Gm_T}{R_T^2}\overrightarrow{e_z} + \Omega^2 HM \cdot \overrightarrow{e_\rho}$$

soit :

$$\overrightarrow{g} = -\frac{Gm_T}{R^2}\overrightarrow{e_z} + \Omega^2 R\cos\lambda \cdot \overrightarrow{e_\rho}$$

Les composantes du champ de pesanteur vulgaire dans $(M; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont donc :

$$\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} g_x = 0 \\ g_y = -\Omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda \\ g_z = -\dfrac{Gm_T}{R^2} + \Omega^2 R \cos^2\lambda \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})}$$

<u>Quelques ordres de grandeurs :</u>

- Champ de pesanteur aux pôles $\lambda_p = \dfrac{\pi}{2}$ (valeur la plus élevée)

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{g_p} = g_z \cdot \overrightarrow{e_z} = -\frac{Gm_T}{R^2} \cdot \overrightarrow{e_z} \quad \Longrightarrow \quad g_p \simeq 9,83\ m.s^{-2}$$

- Champ de pesanteur à l'équateur $\lambda_e = 0$ (valeur la plus faible)

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{g_e} = g_z \cdot \overrightarrow{e_z} = \left(-\frac{Gm_T}{R^2} + \Omega^2 R\right) \cdot \overrightarrow{e_z} \quad \Longrightarrow \quad g_e \simeq 9,78\ m.s^{-2}$$

L'erreur relative sur g est donc de l'ordre de : $\dfrac{\Delta g}{g} \sim 1\%$

c - Force de Coriolis et déviation vers l'est en détail (et ordres de grandeur !)

Sous forme d'un exercice simple : **chute libre d'un point matériel en référentiel Terrestre.**

<u>Hypothèses :</u>

- Chute d'un point matériel M de masse m dans le champ de pesanteur vulgaire $\overrightarrow{g}$ depuis une altitude h sans vitesse initiale.
- On modifie les axes du référentiel terrestre en choisissant la verticale z selon la direction de la pesanteur $\overrightarrow{g} \Longrightarrow$ bien plus simple !!!

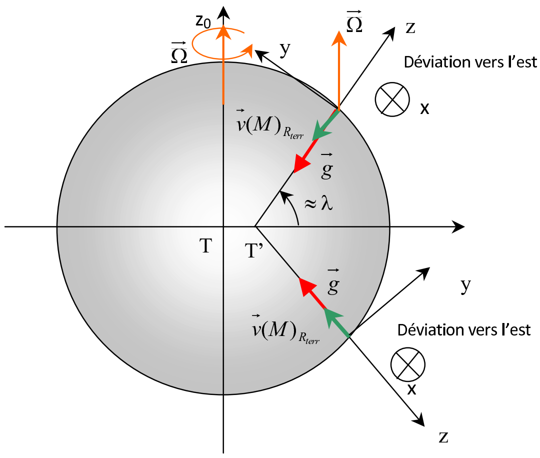


Figure V.16 – Effet terrestre de la force de Coriolis : déviation vers l'est

<u>Exercice de cours:</u> **(III.3) - n° 1.** *Confirmer qualitativement que tout corps en chute libre dans le référentiel terrestre subit une déviation vers l'est quelque soit l'hémisphère concernée (on négligera la résistance de l'air).*

Appliquons la RFD dans le référentiel terrestre :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/R_{terr}} = m\overrightarrow{g} - 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/R_{terr}}$$

soit :

$$m\left|\begin{array}{c}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right. = m\left|\begin{array}{c}0\\ 0\\ -g\end{array}\right. - 2m\left|\begin{array}{c}0\\ \Omega\cos\lambda\\ \Omega\sin\lambda\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right.$$

soit :

$$\begin{cases}(1) & \ddot{x} = -2\Omega\dot{z}\cos\lambda + 2\Omega\dot{y}\sin\lambda\\ (2) & \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin\lambda\\ (3) & \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{x}\cos\lambda\end{cases}$$

En intégrant (3) sans tenir compte de l'effet de Coriolis qui est négligeable face à g, on a :

$$\dot{z} \simeq -gt \quad\Longrightarrow\quad z \simeq -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

En outre, comme $\dot{z} >> \dot{y}$ on peut intégrer facilement (1) :

$$\dot{x} \simeq \Omega\cos\lambda g t^2$$

puis

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x \simeq \frac{1}{3}\Omega\cos\lambda g t^3}$$

soit pour une hauteur de chute h et donc un temps de chute de $t_c = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x_{t_c} \simeq \frac{1}{3}\Omega\cos\lambda g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}}$

Remarque III-4: EVALUATION EXPÉRIMENTALE PAR FERDINAND REICH

Cette expérience de chute libre a été menée en 1831 par Reich [a] à Freiberg (ville minière de la saxe) dans un puits de mine d'une profondeur de 158 m à la latitude de $\lambda = 51^0$. Son résultat expérimental donna :

$$x_{exp}(158\ m) = 2,83.10^{-2}\ m$$

et la valeur théorique calculée donne $x_{th}(158\ m) = 2,74.10^{-2}\ m$ ce qui est remarquablement proche, l'écart résultant notamment de la non prise en compte du frottement contre l'air forcément présent dans l'expérience de Reich.

a. Ferdinand Reich 1799-1863 physicochimiste allemand

d - Caractère galiléen approché de ce référentiel

NB : $\overrightarrow{F}_{\text{marées}}$ toujours abandonnées.

On peut caractériser le caractère galiléen approché du référentiel terrestre en évaluant par exemple la limite de vitesse pour laquelle le rapport entre l'accélération de Coriolis et l'accélération de pesanteur vulgaire est significatif :

$$\alpha_{Corio./Pesant} = \frac{||2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}(M)||}{g} \sim \frac{2\Omega \cdot v(lim)_{\mathcal{R}_{terr}}}{g} \leq 0.1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{v(lim)_{\mathcal{R}_{terr}} \leq \frac{0.1g}{2\Omega} \simeq 6,700\ km.s^{-1}!!!}$$

Ainsi, dans la majorité des expériences courantes (hors tir d'une fusée ou d'une balle de fusil à grande distance), on pourra considérer le référentiel terrestre comme une bonne approximation d'un référentiel galiléen.

e - Exemple d'application : L'Airbus "0G" (pour l'entraînement des spationautes ! !) et le vaisseau spatial (pour de vrai cette fois ! !)

Depuis 1996, la société Novespace filiale du CNES exploite un AIRBUS A300 aménagé pour réaliser des vols dits "paraboliques", permettant de recréer des conditions de microgravité propres aux séjours dans la station spatiale internationale (ISS). En outre, ces vols d'une durée d'environ 20 s chacun permettent de réaliser quelques expériences de physique en condition de microgravité. Le principe est le suivant :

Supposons un point $M(m)$ dans le référentiel $\mathcal{R}'(O')$ non galiléen attaché à l'avion $\begin{cases} \text{en translation} \\ \text{en chute libre donc présence de gravité } \overrightarrow{g} \end{cases}$ par rapport à $\mathcal{R}_{terr}$ supposé galiléen ; la RFD dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_{ie}} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{F}_i(M)}_{=\overrightarrow{0} \text{ car chute libre}} = m\left(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{a}(O')_{\mathcal{R}}\right)$$

or $\overrightarrow{a}(O'))_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{g}$ puisque $\mathcal{R}'$ est en chute libre donc :

$$\boxed{\overrightarrow{v(M)}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \text{le référentiel } \mathcal{R}' \text{ est pseudo-galiléen, ou } \textbf{inertiel}}$$

Ce principe est justement exploité dans l'AIRBUS "0g" qui peut se transformer en référentiel inertiel. Le schéma ci-dessous détaille les différentes phases des vols paraboliques de l'avion :

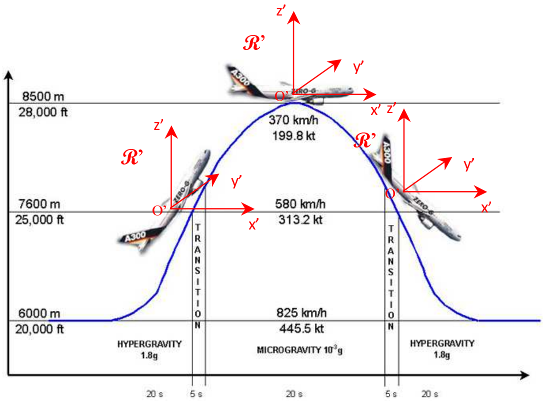


FIGURE V.17 – Vol parabolique de l'AIRBUS ZERO-G - condition de microgravité

Dans un vaisseau spatial plongé dans l'espace interstellaire et avec **moteurs coupés**, le principe est le même : supposons M point matériel de masse m à l'intérieur du vaisseau spatial soumis au champ gravitationnel résultant $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$ des astres environnants . Appelons $\mathcal{R}'$ le référentiel en translation dont le centre O' est confondu avec le centre de masse du vaisseau.

$$m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m\mathcal{G}(M) - m\overrightarrow{a_e} = m\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) - m\overrightarrow{a}(O')$$

or la RFD appliqué au vaisseau de masse M_v donne : $M_v\overrightarrow{a}(O') = M_v\overrightarrow{\mathcal{G}}(O')$

donc : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m\left[\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}}(O')\right] \simeq \overrightarrow{0}$ en supposant le champ gravitationnel identique en O' et en M.

<u>CONCLUSION :</u>

$$\boxed{\overrightarrow{v(M)}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \text{le vaisseau est pseudo-galiléen, ou } \textbf{inertiel}}$$