

1. **Banque CCINP 2024 : 25** plutôt facile : révision du cours-à savoir faire.

2. **Banque CCINP 2024 : 27** Classique, des séries.

3. **Banque CCINP 2024 : 30** Rajouter une question 4 : déterminer entièrement f .

4. [CCINP] On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.

a. Montrer que $] -1; 1[$ est inclus dans le domaine de définition de g .

b. Trouver un développement en série entière de $g(x)$ sur $] -1; 1[$.

c. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$.

d. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$ par une méthode différente.

5. [CCINP]

Soit $f: (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 1] \mapsto t^{-t} t^x$.

(a) Montrer que $f(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{x+n} (\ln t)^n}{n!}$.

(b) Soit, pour $(y, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, $I(y, q) = \int_0^1 t^y (\ln t)^q dt$. Montrer l'existence de $I(y, q)$. Donner une relation entre $I(y, q)$ et $I(y, q-1)$ pour $q \in \mathbb{N}^*$. En déduire une expression de $I(y, q)$ pour $y \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $F: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ . Exprimer F sous forme de somme.

6. [Centrale] Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+2\pi)\}$.

On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $G(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt$ si $f \in E$.

a. Montrer que G est un endomorphisme de E .

b. Montrer que $G(f)$ est de classe C^1 et trouver une équation différentielle vérifiée par $G(f)$ si $f \in E$.

c. G est-il surjectif? injectif?

d. Résoudre l'équation $G(f) = lf$ pour $l \in \mathbb{R}$ et $f \in E$.

7. [Mines Ponts]

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2 + t^2} dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f . Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

(b) Donner un équivalent de f aux bornes.

8. [Mines] On définit $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{\ln(t)} dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur un domaine D à préciser.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur D . En déduire une expression simple de f .