1. Montrer que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé de dimension finie E est fermé.
Pour cela on pourra montrer que F est le noyau d'un projecteur continue.

2. On veut montrer que tout sous-espace vectoriel F de dimension finie dans un espace vectoriel normé **de dimension quelconque** $(E, ||.||)$ est fermé.
Pour cela on admet le résultat de l'exercice précédent : **tout sous espace vectoriel dans un espace vectoriel de dimension finie est fermé (et aussi de dimension finie).**
On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F qui converge vers $x \in E$.
On introduit l'espace vectoriel $G = F + \mathbb{R}x$, justifier que G est de dimension finie puis en déduire $x \in F$.
Ainsi F est fermé.

3. Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.

(b) Y a-t-il unicité de cet élément y_0 ?

4. Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose

$$A_n \to A \text{ et } A_n^{-1} \to B$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q$$

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$$

montrer que nécessairement $A^2 = A$.

7. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad N(AB) \leq cN(A)N(B)$$

8. Soient E un espace de dimension finie de norme $||.||$ et f une application de E vers E.
On dit que f est contractante si

$$\exists k \in]0,1[, \forall x, y \in E, ||f(y) - f(x)|| \leq k||y - x||$$

(a) On suppose que f est contractante et l'on introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$x_0 \in E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer la convergence de la série $\sum x_{n+1} - x_n$.

(b) En déduire que lorsque f est contractante, elle admet un point fixe ($f(x) = x$) et justifier que celui-ci est unique.

(c) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe.

9. Plus petite boule contenant une partie
Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie bornée contenant au moins deux points.

(a) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant A.

(b) Montrer que cette boule n'est pas nécessairement unique (on prendra $||.|| = ||.||_\infty$).

(c) Montrer que si $||.||$ est la norme euclidienne, alors la boule précédente est unique.