TD n°7 Electrostatique: Electrostatique 1: champ et potentiel par lois intégrales - notions énergétiques essentielles - Topographies de champs et potentiels

Calculs de champs et potentiels

EXERCICE N°1: **Exploitation des symétries/invariances**

En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance du champ électrostatique, et sans effectuer de calcul, déterminer l'allure générale des lignes de champ, ainsi que des lignes isopotentielles dans les cas suivants:

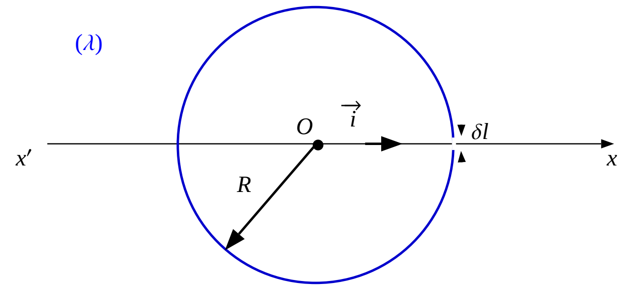
❶ Sphère chargée en volume.

❷ Cylindre chargé en surface.

❸ Plan chargé en surface.

EXERCICE N°2: **Champ électrique engendré par une distribution filiforme**

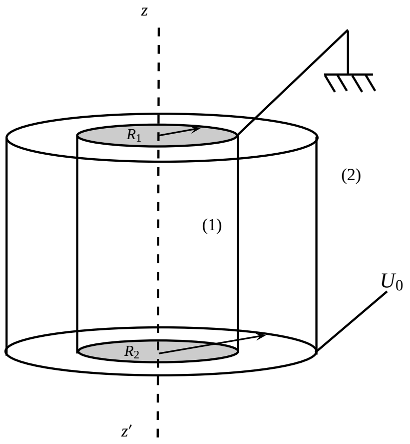
Un fil isolant est courbé suivant un cercle de rayon $R = 50\ cm$ et de centre O. Entre les extrémités du fil subsiste un espace de $2\ mm$ assimilable à un élément infinitésimal de longueur. Une charge électrique de $10^{-9}\ C$ est répartie uniformément sur la longueur du fil.



Calculer le champ électrique créé en O par ce fil.

EXERCICE N°3: **Etude statique d'un câble coaxial chargé en surface**

Un câble coaxial infini est constitué par deux armatures conductrices cylindriques coaxiales (considérées comme infinies) séparées par un isolant de permittivité relative $\epsilon_r = 3$. L'armature interne (1) reliée au sol a pour rayon R_1, et l'armature (2) portée au potentiel $U_0 > 0$ a pour rayon R_2. On précise que les lois de l'électrostatique du vide sont encore valable dans ce milieu diélectrique à condition de remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par celle du milieu c'est à dire $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$.



❶ Détermination du champ électrostatique

a· Déterminer par des considérations de symétrie, la topographie du champ électrique en tout point M situé entre les deux armatures, à une distance r de l'axe de symétrie $z'z$.

b· Etablir l'expression de l'intensité du champ au point M situé entre les armatures. On désignera par λ la valeur absolue de la densité linéique de charge sur les conducteurs.

❷ En déduire le potentiel U au point M en fonction de r et de R_1.

❸ En généralisant la définition de la capacité d'un condensateur, établir l'expression de la capacité **linéique** C_l de ce câble en fonction de R_1 et R_2, et d'autres constantes. Faire l'application numérique en prenant:

$R_1 = 1\ mm$, $R_2 = 2,5\ mm$. On donne $\epsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9} = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$

Exercice n°4: Modélisation d'une distribution plane

On considère deux plans d'équation $z = -a/2$ et $z = +a/2$ entre lesquels règne une distribution volumique de charge ρ_0. La charge volumique est nulle en dehors de cette zone.

❶ Montrer que le champ électrique en tout point de l'espace est de la forme:

$$\overrightarrow{E} = E(z) \cdot \overrightarrow{e_z}$$

❷ Montrer que ce champ est nul sur la plan (xOy).

❸ Choisir une surface de Gauss permettant de calculer le champ en un point M de cote z. Distinguer les cas $z < -a/2$, $-a/2 < z < a/2$, et $z > a/2$. Tracer le graphe $E = f(z)$.

❹ Proposer une solution pour le potentiel $V(M)$. On pourra introduire trois constantes V_0, V_1 et V_2 chacune homogène à un potentiel, et l'on déterminera deux relations entre-elles. Ainsi, il n'existe qu'une seule inconnue; ce résultat était-il attendu?

❺ On envisage le passage à une épaisseur a tendant vers 0, la densité surfacique restant constante et égale à σ_0.

a· Déterminer σ en fonction de ρ_0 et a.

b· Préciser la valeur du champ dans chaque demi-espace $z > 0$ et $z < 0$.

c· Que devient le graphe de la fonction $E(z)$ dans cette modélisation surfacique de charge. Que constatez-vous à la traversée de la surface chargée?

Exercice n°5: Modélisation électrostatique d'une membrane cellulaire

On considère que très localement (donc proche de la surface) une membrane cellulaire peut être assimilée à un plan noté (yOz); l'axe $[Ox)$ est orienté vers l'extérieur de la cellule.

Une microélectrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique en général négative.

On schématise le potentiel par la fonction $V(x)$ suivante:

$$\begin{cases} x \leq 0, & V(x) = -V_0 \\ x > 0, & V(x) = -V_0 \cdot e^{-\frac{x}{a}} \end{cases}$$

où V_0 est une constante positive homogène à un potentiel et où a est une distance.

❶ Justifier que la fonction de potentiel ne dépendent que de la variable x. Qu'en est-il alors pour le champ électrique?

❷ Exprimer le champ électrique en tout point $M(x, y, z)$.

❸ Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe $[Ox)$ et de base S, limitée par les plans d'abscisses x et $x + dx$. En déduire la densité volumique de charge ρ en tout point.

Quel est le signe de ρ? Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide à priori neutre.

❹ En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.

❺ Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe $[Ox)$ et de base S, s'étendant indéfiniment le long de l'axe $[Ox)$ soit de $-\infty$ à $+\infty$? Commenter.

EXERCICE N°6: **Pouvoir des pointes**

Pour un potentiel donné, le champ à proximité d'une surface est d'autant plus intense que celle-ci est "pointue". Ce phénomène porte le nom de pouvoir des pointes et s'applique particulièrement aux surfaces des conducteurs à l'équilibre électrostatique qui sont équipotentielles. Il explique notamment que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus.

Le conducteur est modélisé par une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface au potentiel V. Afin de relier le champ au voisinage de la surface et le potentiel, on calcule d'abord le champ créé par une charge surfacique σ sur la sphère, puis on en déduit le potentiel.

❶ Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'espace par cette distribution en fonction de r.

❷ En déduire l'expression du potentiel en fonction de r en prenant $V = 0$ à l'infini.

❸ En déduire une relation entre le champ et le potentiel en $r = R$ et conclure.

EXERCICE N°7: **Champ et potentiel dans l'atmosphère terrestre**

Au voisinage immédiat de la surface de la Terre supposée sphérique, on relève un champ électrique vertical et dirigé vers le bas, de module $100\ V.m^{-1}$.

❶ A quelle densité uniforme de charge superficielle σ ce champ correspond-il ? En déduire la charge totale Q portée par la Terre, sachant que son rayon est $R = 6370\ km$?

❷ Lorsque l'on s'élève dans l'atmosphère, le champ conserve les mêmes direction et sens qu'au sol, mais son module $|\overrightarrow{E}|$ varie en fonction de l'altitude z selon:

$$|\overrightarrow{E}| = E_0 \cdot e^{-768 \cdot \frac{z}{R}}$$

avec $E_0 = 113,1\ V.m^{-1}$

Calculer la différence de potentiel entre un point d'altitude $z = 5\ km$ et le sol.

EXERCICE N°8: **Modèle électrostatique simplifié de l'atome**

❶ On représente de façon très simplifié, un atome par son noyau placé O, de rayon a, contenant Z protons de charge e et son nuage électronique dont la densité volumique de charge en M ($OM = r > a$) est $\rho(r) = A \cdot r^{-n}$ (n et A sont des constantes). Sachant que l'atome est électriquement neutre:

a· Montrer que $n > 3$.

b· Déterminer la constante A.

❷ Calculer le champ électrique $E(r)$ et le potentiel $V(r)$ en M.

❸ La théorie de Yukawa montre qu'en tout point M, $\rho(r)$ et $V(r)$ sont liés par la relation:

$$\rho(r) = K \cdot V(r)^{\frac{3}{2}}$$

En déduire n et la loi $V(r)$.

❹ Application numérique: on considère un atome pour lequel le numéro atomique est $Z = 100$, et le rayon du noyau $a = 10^{-4}$Å. Calculer le potentiel créé par l'atome à la distance $r = 50a$. On donne $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

Calculs énergétiques

Exercice n°9: **Bilan d'énergie dans un condensateur**

On reprend ici le modèle du condensateur plan étudié en cours. L'écartement des armatures est noté e (selon l'axe $[Oz)$, et la surface des armatures est notée S.

❶ Montrez qu'il existe une force électrostatique exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure. Commenter sa direction et son sens.

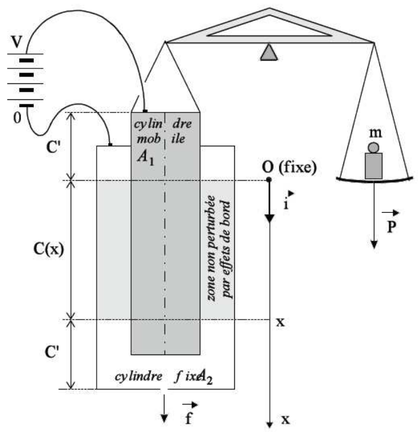
❷ L'armature inférieure est fixe, sa cote est choisie nulle. Un opérateur écarte l'armature supérieure en exerçant une force $\overrightarrow{F}_{op}$ colinéaire à $\overrightarrow{u_z}$. Quelle doit être l'intensité de cette force pour que l'énergie cinétique acquise par l'armature soit négligeable durant le déplacement?

❸ On isole électriquement l'armature mobile. La valeur de la distance inter-armature passe de d_1 à d_2. Quel est le travail de la force exercée par l'opérateur durant la transformation?

❹ Par un bilan énergétique, retrouver l'expression de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur.

Exercice n°10: Résolution de Problème - **Balance électrostatique de grande précision**

Un condensateur à air est formé de deux armatures cylindriques A_1 et A_2, d'axe commun vertical et de rayons $R_1 = 23\ mm$ et $R_2 = 60\ mm$; A_1 est mobile et A_2 fixe. Pour un enfoncement donné de A_1 dans A_2, la hauteur de la zone commune non perturbée par les effets de bord est x. On note C la capacité qui correspond à la zone de hauteur x, et C' celle qui correspond aux deux zones où se manifestent les effets de bord; on admettra qu'une variation de l'enfoncement produit une variation égale de x, mais que C' reste constante. L'armature A_1, qui est solidaire d'un fléau de balance dont les deux bras ont même longueur, est équilibrée par un contrepoids. Le fléau est horizontal lorsque A_1 et A_2 sont au potentiel nul. On porte A_1 au potentiel V et on rééquilibre le système avec une masse $m = 5\ g$ sur le plateau de la balance.



Quelle est la valeur de V?

Topographies de champs et potentiels

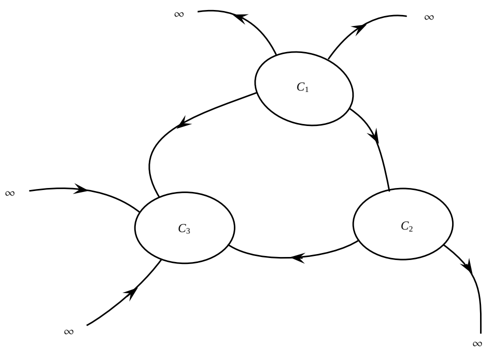
Exercice n°11: **Etude qualitative d'un système de conducteurs**

Trois corps conducteurs notés C_1 C_2 et C_3 sont représentés avec quelques lignes de champ électrostatique.

❶ En régime stationnaire, un corps conducteur est équipotentiel. En quoi la figure ci-dessous permet de confirmer que la surface des conducteurs C_1 C_2 et C_3 est équipotentielle?

❷ Sans effectuer de calcul, préciser le signe des potentiels électrostatiques respectifs V_1, V_2 et V_3, et la relation d'ordre qui existe entre eux? On précise que le potentiel est choisi nul à l'infini par convention (arbitraire).

❸ Pourquoi les lignes de champ ne se prolongent-elles pas à l'intérieur des conducteurs?



Exercice n°12: **Etude qualitative de cartes de champ et potentiel**

Faire une analyse purement qualitative de chacune des deux cartes de champs et potentiels présentées ci-dessous. En particulier, donner toutes les propriétés que l'on peut en déduire: nombre de charges, signe des charges, comparaison des valeurs absolue des charges etc....

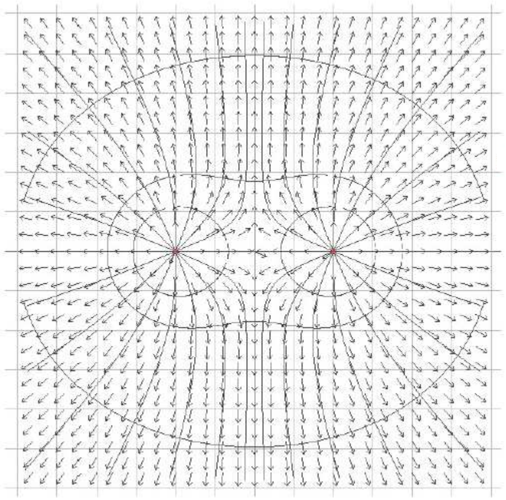


Figure 1: Carte n°1

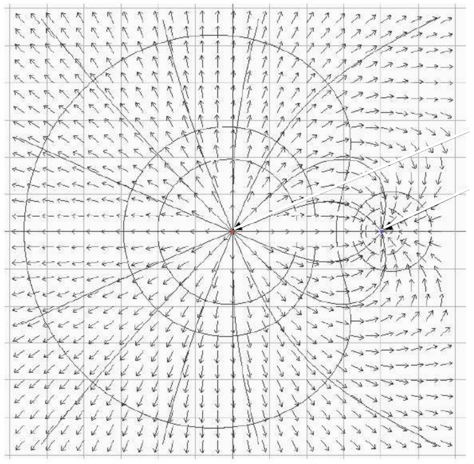


Figure 2: Carte n°2