Théorie des jeux

Montaigne 2023-2024

– mpi23@arrtes.net –

Ce chapitre introduit des éléments de théorie et d'algorithmique sur les **jeux à deux joueurs**.

Pour certains de ces jeux, une **stratégie gagnante** existe et mène à l'écriture d'un algorithme.

Pour d'autres, une telle stratégie n'étant pas toujours simple à trouver, l'utilisation d'une **heuristique** peut permettre d'approcher la solution optimale.

Dans un **jeu à deux joueurs antagonistes**, désignés par J_1 et J_2 dans la suite de l'exposé, chaque adversaire joue à tour de rôle.

Le jeu est à **information totale** si à tout instant, chaque joueur a une connaissance complète de l'état de la partie en cours, comme dans les échecs, les dames, le go, othello. Ce n'est pas le cas de certains jeux de cartes où chaque joueur n'a en général pas la vision du jeu de son adversaire, ni des cartes présentes dans une éventuelle pioche.

Le jeu est **sans mémoire** si la décision prise par le joueur qui doit jouer ne dépend que de la situation actuelle et pas des situations antérieures.

Le jeu est **sans hasard** si une même décision prise par un joueur aboutit toujours à un même état de la partie. Ceci exclut les jeux de dés pour lesquels toute nouvelle situation dépend du résultat du lancer de dé.

Jeu d'accessibilité à deux joueurs

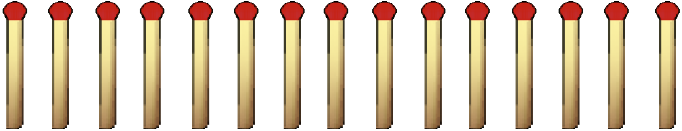
Jeu de Nim

Il existe non pas un mais plusieurs jeux de Nim. Sous diverses formes, ces jeux semblent avoir été pratiqués en Chine d'abord, en Europe ensuite. L'origine du nom ne semble pas vraiment connnue.

Ses règles sont les suivantes : m lignes d'allumettes (ou de jetons) sont disposées devant deux joueurs et comportent respectivement n_1 allumettes, n_2 allumettes, ..., n_m allumettes. Chaque joueur joue à tour de rôle en prenant au moins autant d'allumettes qu'il le souhaite sur une seule dans une ligne. Celui qui prend la dernière allumette est déclaré vainqueur ou perdant, dans la version dite *misère* du jeu.

Jeu de Nim

Un version populaire du jeu à une seule ligne d'allumettes autorise l'enlèvement d'un nombre maximal fixé d'allumettes.



La suite de l'exposé étudie la variante où 1, 2 ou 3 allumettes sont enlevées. Dans cette situation, le joueur qui commence dispose d'une *stratégie gagnante* : toujours laisser au deuxième joueur un nombre d'allumettes congru à 1 modulo 4.

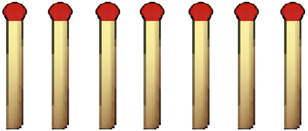
Modélisation par un graphe

D'un point de vue formel, un jeu antagonsite peut être représenté par un **graphe orienté**.

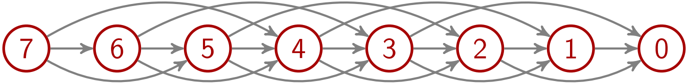
Chaque **sommet** du graphe est associé une **configuration du jeu**.

Chaque **arc** du graphe est associé un unique **coup** faisant passer d'une configuration à une autre.

Modélisation par un graphe



Par exemple, au jeu de Nim à 7 allumettes pour lequel chaque joueur peut enlever 1, 2 ou 3 allumettes est associé le graphe suivant.



Chaque sommet du graphe est étiqueté par le nombre d'allumettes encore présentes sur le jeu. Chaque arc représente la suppression de 1, 2 ou 3 allumettes, menant à un sommet associé à une nouvelle configuration du jeu.

Partie sur un graphe

Une **partie** sur un graphe est un chemin où chaque joueur, à tour de rôle, suit un arc, si c'est possible, le premier joueur démarrant depuis le sommet de départ.

Une partie est **finie** si ce chemin atteint un sommet sans arc sortant, **infinie** dans le cas contraire.

Si un graphe est sans cycle alors toute partie est finie. Dans le jeu de Nim, toute partie est finie.

Graphe biparti

Un tel graphe ne met pas en évidence le joueur qui a le trait. On peut lui préférer un graphe $G = (V, E)$ où chaque configuration est dédoublée et associée à chacun des joueurs.

Un tel graphe est un **graphe biparti** : l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles disjoints V_1 et V_2.

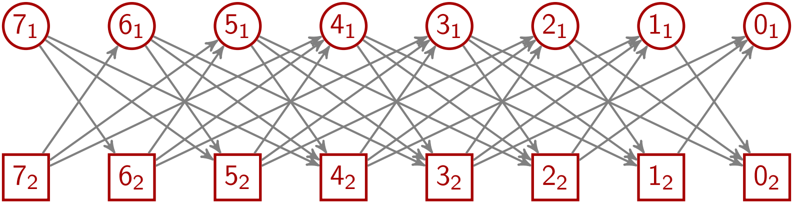
$$V = V_1 \cup V_2 \qquad\qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Toute arc issu d'un sommet de V_1 pointe vers un sommet de V_2 et inversement. Il n'est donc pas possible de joindre deux sommets d'un même sous-ensemble V_i par un seul arc.

Arène

En pratique, on peut distinguer les sommets de V_1 **contrôlés** par J_1 (cercles) des sommets de V_2 **contrôlés** par J_2 (carrés).

Une **arène** (ou graphe de jeu) est alors le triplet (G, V_1, V_2).



Arène du jeu de Nim à 7 allumettes et 1, 2 ou 3 enlèvements.

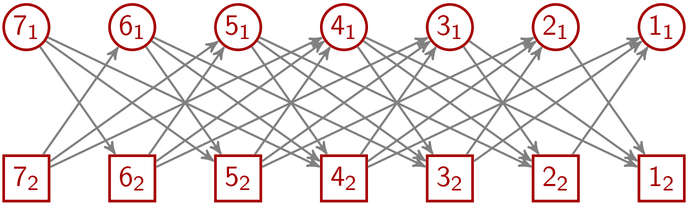
Une **partie** consiste à se déplacer sur les arcs du graphe, d'un cercle vers un carré pour J_1, d'un carré vers un cercle pour J_2.

Condition de victoire

Une **condition de victoire** pour J_1 (resp. J_2) est un sous-ensemble $F_1 \subset V$ (resp. $F_2 \subset V$) tel que J_1 (resp. J_2) remporte la partie s'il visite un sommet de F_1 (resp. F_2).

Dans le jeu exemple, la partie s'arrête quand il ne reste qu'une seule allumette.

$$F_1 = \{1_2\} \qquad F_2 = \{1_1\}$$



Arène simplifiée, les sommets 0_1 et 0_2 étant inutiles.

Stratégie

Désignons par F_1^+ (resp. F_2^+) l'ensemble des sommets de degré sortant non nul contrôlés par J_1 (resp. J_2).

Une **stratégie** pour le joueur i est une application $\varphi : F_i^+ \to V$ telle que pour tout sommet $v \in F_i^+$, $(v, \varphi(v)) \in E$.

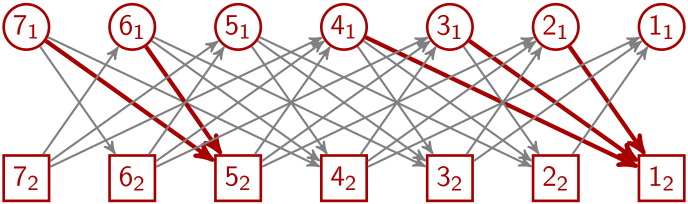
On dit que le joueur i **respecte** la stratégie φ lors d'une partie définie par le chemin $(v_0, v_1, \ldots)$ si :

$$\forall j,\ v_j \in F_i^+ \Rightarrow v_{j+1} = \varphi(v_j)$$

Autrement dit, si le joueur i peut jouer et si c'est son tour, il choisit le sommet donné par la stratégie.

Stratégie gagnante

Une **stratégie** φ est dite **gagnante** pour le joueur i depuis le sommet $v_0 \in V$ si toute partie jouée depuis v_0 est gagnée par i dès lors qu'il respecte la stratégie φ .



Arcs en gras : stratégie gagnante pour J_1.

Position gagnante

Un sommet $v \in V$ est une **position gagnante** pour le joueur i si ce dernier possède une stratégie gagnante depuis v.

Par exemple, 5_1 n'est pas une position gagnante pour le joueur 1 ; 2_1, 3_1, 4_1, 6_1 et 7_1 le sont.

Attracteurs

Résoudre un jeu d'accessiblité à deux joueurs, c'est calculer l'ensemble des positions gagnantes pour chaque joueur et une stratégie définie sur chaque position gagnante qu'un joueur contrôle.

La notion d'**attracteurs** intègre cette idée en calculant les positions gagnantes de J_1 qui lui permettent d'atteindre l'ensemble F_1.

Attracteurs

Le jeu étant modélisé par son arène (G, V_1, V_2) où $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, on note F_i l'ensemble des positions à atteindre pour le joueur J_i.

Dans notre exemple, $F_1 = \{1_2\}$ et $F_2 = \{1_1\}$.

On définit une **suite de sous-ensembles** $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots$ par $\mathcal{A}_0 = F_1$ et incrémentalement :

$$\begin{aligned} \forall k \geqslant 0 \quad \mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k &\cup \{v_1 \in V_1 \mid \exists v \in \mathcal{A}_k, (v_1, v) \in E\} \\ &\cup \{v_2 \in V_2 \mid \forall v' \in V, (v_2, v') \in E \Rightarrow v' \in \mathcal{A}_k\} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_k$ est l'*ensemble des positions gagnantes* pour J_1 en moins de k coups.

Attracteurs

- $\mathcal{A}_0$ est l'ensemble des positions à atteindre pour J_1 : toute position de $\mathcal{A}_0$ est gagnante pour J_1, en 0 coups.
- Supposons que toute position de $\mathcal{A}_k$ est gagnante pour J_1 en moins de k coups et soit $v \in \mathcal{A}_{k+1}$.
  - Soit $v \in \mathcal{A}_k$ donc v est gagnante pour J_1 en moins de k coups.
  - Soit $v \in \{v_1 \in V_1 \mid \exists v \in \mathcal{A}_k, (v_1, v) \in E\}$ et $v \in V_1$ est contrôlée par J_1. C'est à J_1 de jouer et il existe un arc qui mène à une position de $\mathcal{A}_k$ gagnante pour J_1 en moins de $(k+1)$ coups.
  - Soit $v \in \{v_2 \in V_2 \mid \forall v' \in V, (v_2, v') \in E \Rightarrow v' \in \mathcal{A}_k\}$ et $v \in V_2$ est contrôlée par J_2. Tout coup jouable par J_2 ramène à une position de $\mathcal{A}_k$, gagnante pour J_1 en moins de $(k+1)$ coups.

  Dans tous les cas, v est gagnante pour J_1 en moins de $(k+1)$ coups.

Attracteurs

Les **attracteurs associés à F_1** sont définis par $\mathcal{A}_{J_1}$ qui contient précisément l'ensemble des positions gagnantes pour J_1.

$$\mathcal{A}_{J_1} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_k$$

Avec notre exemple :

$$\mathcal{A}_{J_1} = \{6_1, 5_1, 3_1, 2_1, 7_2, 4_2, 1_2\}$$

Théorème 1

J_1 possède une stratégie gagnante pour tout sommet de $\mathcal{A}_{J_1}$ et uniquement ceux-ci.

Démonstration

Démontré en TD.

Attracteurs

Si une partie peut être nulle, les attracteurs associés à F_2 doivent être calculés.

S'il ne peut y avoir de match nul, les attracteurs associés à F_2 sont le complémentaire des attracteurs associés à F_1.

Dans notre exemple, la partie n'étant jamais nulle, on a :

$$\mathcal{A}_{J_2} = \{7_1, 4_1, 1_1, 6_2, 5_2, 3_2, 2_2\}$$

On vérifie effectivement :

$$\mathcal{A}_{J_1} \cup \mathcal{A}_{J_2} = V_1 \cup V_2 \qquad \mathcal{A}_{J_1} \cap \mathcal{A}_{J_2} = \varnothing$$

aux sommets 0_1 et 0_2 près qui peuvent être omis.

Algorithme

En pratique, le calcul des attracteurs requiert un parcours sur le **graphe transposé** ${}^tG$ de G : on part de l'ensemble F_1 et on remonte les arcs.

Il est utile de calculer les degrés sortants des sommets dans G qui sont les degrés entrants dans ${}^tG$ pour gérer la condition : *tout arc d'un sommet V_2 aboutit à un sommet attracteur*.

Algorithme

Algorithme 1 : calcul des attracteurs de J_1

Entrée : graphe $G = (V, E)$, partition (V_1, V_2), ensemble F_1
Sortie : attracteurs associés à F_1

$\mathcal{A} \leftarrow \varnothing$
pour $v \in V$ **faire**
    $n_v \leftarrow$ degré sortant de v dans G
calculer le graphe transposé ${}^tG$
fonction *parcours(v)*
    si $v \notin \mathcal{A}$ **alors**
        $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{v\}$
        pour v' *voisin de* v *dans* ${}^tG$ **faire**
            $n_{v'} \leftarrow n_{v'} - 1$
            si $v' \in V_1$ *ou* $n_{v'} = 0$ **alors**
                parcours(v')
pour $v \in F_1$ **faire**
    parcours(v)
renvoyer $\mathcal{A}$