

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Généralités

Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace $F$ par un endomorphisme $u$ à l'aide de la matrice de $u$ dans une base adaptée à $F$ .

### b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	$\Leftrightarrow$ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.  La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est fini, et de cardinal au plus $n$ . Si deux endomorphismes $u$ et $v$ commutent, tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$ . Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.  Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$ . Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}'$ .

### c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations $\chi_u, \chi_A$ . Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n - 1$ .
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire (non traité). Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit (non traité).	La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est majorée par la multiplicité de $\lambda$ (non traité).

### d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
--	--

## CONTENUS   CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à  $E$ .

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est diagonalisable.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes.

Pour qu'un endomorphisme  $u$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que  $\chi_u$  soit scindé et que, pour toute valeur propre de  $u$ , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

---

Cas des projecteurs, des symétries.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

