Endomorphismes d'un espace euclidien.

L'objectif de ce chapitre est double :

- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrices orthogonales : définition de $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractére orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $O_n(\mathbb{R}), O(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $SO_n(\mathbb{R}), SO(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications Det_e et $Det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition une isométrie vectorielle est linéaire.On mentionne la terminologie «automorphisme orthogonal». tout en lui préférant «Isométrie vectorielle».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.	
Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $O(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $SO(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale.	Interprétation matriciel.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.

f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Endomorphisme autoadjoint : définition par$u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.