Correction du sujet X-ENS Mathématiques C 2017

I. Première partie : préliminaires

1) Comme f est continue sur $[0,1]$ et $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique, continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ à valeurs dans $[0,1[$, $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Enfin si $n \in \mathbb{Z}$, on a $\tilde{f}(n^-) = f(1) = f(0) = \tilde{f}(n^+) = \tilde{f}(n)$ et $\tilde{f}$ est continue en n et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f restreinte à $[-1,1]$ est continue sur un compact donc uniformément continue par le théorème de Heine. On prend $\eta < 1$ un module d'uniforme continuité de cette restriction pour ε. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leqslant \varepsilon$. Supposons $x \leqslant y$ et $n = \lfloor y \rfloor$. Alors $y' = y - n \in [0,1[$ et $x' = x - n \in [-\eta, 1[\subset [-1,1]$. En particulier x' et y' sont proches à moins d'ε et ils sont dans $[-1,1]$. Il s'ensuit que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

3) Ultra classique théorème de Cesaro. On peut le démontrer en une ligne si on utilise le théorème de sommation des o : $|z_N - z| = o(1)$ et 1 est le terme général positif d'une série divergente donc $\sum_{n=0}^{N} |z_n - z| = o(N+1)$...

II. Deuxième partie : théorème de Fejér et applications

1) L'intégrale de e_k sur $[0,1]$ vaut 1 si $k = 0$ et 0 sinon. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} 1 = 1$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = e_{-n}(x)\sum_{l=0}^{2n} e_l(x) = e_{-n}(x)\frac{1 - e_{2n+1}(x)}{1 - e_1(x)} = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin \pi x},$$

après factorisation par le demi-angle. K_N est donc la partie imaginaire de

$$\frac{1}{(N+1)\sin \pi x}\sum_{n=0}^{N} e^{(2n+1)i\pi x} = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\sum_{n=0}^{N}\left(e^{2i\pi x}\right)^n = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\frac{1 - e^{2i(N+1)\pi x}}{1 - e^{2i\pi x}}$$

ce qui donne par factorisation par demi-angle

$$\frac{e^{i(N+1)\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x},$$

dont la partie imaginaire est bien $\displaystyle\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x}\right)^2$: c'est le noyau de Fejér.

3) a. Par linéarité de l'intégrale,

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^1 f(y)e_k(x-y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\mathrm{d}y.$$

b. Comme $f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x)K_N(y)\mathrm{d}y$, on a en posant $z = x - y$

$$\sigma_N(f)(x)-f(x) = -\int_x^{x-1} f(x-z)K_n(z)\mathrm{d}z - \int_0^1 f(x)K_N(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (f(x-y)-f(x))K_N(y)\mathrm{d}y,$$

car par invariance par translation $\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(x-z)K_n(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(x-z)K_N(z)\mathrm{d}z$ puisque la fonction $z \longmapsto f(x-z)K_N(z)$ est 1-périodique.

4) a. Soit $\delta < 1/2$ un module d'uniforme continuité de f pour ε. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0,\delta]$, $|f(x-y)-f(y)| \leqslant \varepsilon$ et donc comme K_N est positive (I.2), on a

$$\int_0^\delta |f(x-y)-f(y)|K_n(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_0^\delta \varepsilon K_n(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon\int_0^1 K_n(y)\mathrm{d}y = \varepsilon.$$

De même si $y \in [1-\delta, 1]$, $y-1 \in [-\delta, 0]$ et par périodicité, $|f(x-y)-f(x)| = |f(x-(y-1)) - f(x)| \leqslant \delta$ et on obtient de même l'autre inégalité.

b. Pour $\delta \leqslant y \leqslant 1-\delta$, on a $\sin\pi y \geqslant \sin\pi\delta$ si bien que $K_n(y) \leqslant \frac{1}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)}$. Ainsi,

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_\delta^{1-\delta} \frac{2\|f\|_\infty}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}y \leqslant \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1},$$

avec $\kappa_{\delta,f} = \dfrac{2\|f\|_\infty}{\sin^2(\pi\delta)}$.

c. On fixe $\varepsilon > 0$ et l'on prend δ comme en 4)a. On a par découpage de l'intégrale par la relation de Chasles

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(x-y)-f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon + \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

Il existe n_0 tel que si $N \geqslant n_0$, on a $\dfrac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \leqslant \varepsilon$. Ainsi si $N \geqslant n_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve la convergence uniforme de $(\sigma_N(f))_N$ vers f.

5) a. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a par intégration par parties

$$c_k(f') = \int_0^1 f'(y)e^{-2ik\pi y}\mathrm{d}y = \left[f(y)e^{-2ik\pi y}\right]_0^1 + 2ik\pi\int_0^1 f(y)e^{-2ik\pi y}\mathrm{d}y = 2ik\pi c_k(f).$$

Par récurrence immédiate, $c_k(f^{(n)}) = (2ik\pi)^n c_k(f)$.

b. On a $|c_k(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_\infty$. Avec $n = 2$ dans l'égalité précédente, on a donc $|c_k(f)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{4\pi^2k^2}$ pour $k \neq 0$ et par comparaison, la famille des $c_k(f)$ est sommable.

c. Posons $g = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)$. Les séries de fonctions $\sum c_k(f)e_k$ et $\sum c_{-k}(f)e_{-k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (et donc uniformément) puisque $|c_k(f)e_k| \leqslant |c_k(f)|$ (resp. $|c_{-k}(f)e_{-k}| \leqslant |c_{-k}(f)|$) qui est le terme général d'une série convergente. Par le théorème de Cesaro (I.3)), la moyenne des $S_n(f)(x)$ converge donc vers $g(x)$ aussi. Mais aussi vers f par 4). On en déduit que $f = g$ et que la suite de fonction $S_n(f)$ converge uniformément vers f.

III. Troisième partie : équirépartition

Il manque un "si" dans la définition de l'équirépartition.

1) La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ étant supposée fixée, on notera $\gamma_N(Y)$ au lieu de $\gamma(N,(x_n),Y)$: c'est la proportion des termes de la suite parmi les N premiers qui modulo 1 tombent dans la partie Y. Dans cette question on veut montrer qu'on peut remplacer les segments par des intervalles semi-ouverts dans la définition de l'équirépartition.

• Soit $a < b < 1$. On a alors $\gamma_N([a,b[) = \gamma_N([a,1]) - \gamma_N(b,1)$ qui tend par définition vers $1 - a - (1-b) = b - a$. Pour montrer que cela reste encore vrai dans le cas $b = 1$ il suffit de prouver que $\gamma_N(\{1\})$ tend vers 0. Cela se fait en quantifiant. Soit $\varepsilon > 0$. L'intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ contient le singleton $\{1\}$. On a alors $\gamma_N(\{1\}) \leqslant \gamma_N([1-\varepsilon,1])$ pour tout N et le majorant tend vers ε lorsque $N \to +\infty$. Il existe donc un rang N_0 à partir duquel $\gamma_N(\{1\}) \leqslant 2\varepsilon$. D'où le résultat.

• On fait de même dans l'autre sens en encadrant un segment $[a,b]$ quelconque entre $[a,b[$ et $[a,b+\varepsilon[$ pour $\varepsilon > 0$ petit et en traitant à part le cas $b = 1$ où il suffit de majorer par 1.

2) a. Soit η un module d'uniforme continuité de f pour ε. Il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{M} \leqslant \eta$. Dans ces conditions, pour $x \in \mathbb{R}$, si k est sa partie partière et si $j/M \leqslant x < (j+1)/M$, $\Phi_M(f)(x) = f(k + j/M)$. Comme x et j/M sont proches à moins de $1/M \leqslant \eta$, on a $|f(x) - \Phi_M(x)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on obtient bien $\|f - \Phi_M(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

b. On remarque que $\Phi_M(f)$ s'écrit en fait $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1} f(j/M)1_{[j/M,(j+1)/M[} = \sum_{j=0}^{M-1} f(j/M)h_{j,M}$, avec $h_{j,M} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{[j/M,(j+1)/M[}$ par périodicité de f.

On va commencer par démontrer $(*)$ pour une fonction $f_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1} 1_{[a,b[}$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. D'une part l'intégrale de f_0 sur $[0,1]$ vaut $b - a$. D'autre part,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \gamma(N,(x_n),[a,b[)$$

qui tend bien vers $b - a = \displaystyle\int_0^1 f_0$.

Par linéarité de la moyenne et de l'intégrale, $(*)$ reste vraie pour $\Phi_M(f)$.

Passons à f. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'entier M de 2)b. On a alors

$$\left|\int_0^1 f - \int_0^1 \Phi_M(f)\right| \leqslant \int_0^1 |f - \Phi_M(f)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n) - \Phi_M(f)(x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

En écrivant

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) - \int_0^1 \Phi_M(f) + \int_0^1 \Phi_M(f) - \int_0^1 f,$$

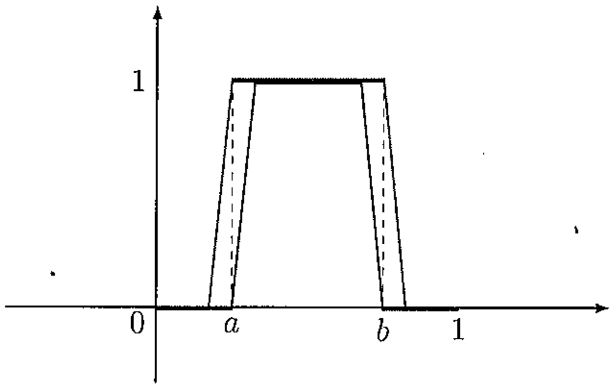
on obtient par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant \varepsilon + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) - \int_0^1 \Phi_M(f)\right| + \varepsilon;$$

et pour N assez grand,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant 3\varepsilon.$$

3) a. Il est facile de construire des fonctions f_ε^+ et f_ε^- affines par morçeaux vérifiant toutes les conditions.



b . Notons $\mu_N(f) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$ pour $f \in \mathcal{C}_{per}$. Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que $\gamma(N, (x_n), [a, b]) = \mu_N(1_{[a,b]})$. On en déduit que

$$\mu_N(f_\varepsilon^-) \leqslant \gamma(N, (x_n), [a, b]) \leqslant \mu_N(f_\varepsilon^+).$$

Étant donné les limites des membres de droite et de gauche, à partir d'un certain rang,

$$\int_0^1 f_\varepsilon^- - \varepsilon \leqslant \gamma(N, (x_n), [a, b]) \leqslant \int_0^1 f_\varepsilon^+ + \varepsilon.$$

Or les deux intégrales sont proches de $\displaystyle\int_0^1 1_{[a,b]} = b - a$ à moins de ε par construction. Donc à partir d'un certain rang, on a

$$b - a - 2\varepsilon \leqslant \gamma(N, (x_n), [a, b]) \leqslant b - a + 2\varepsilon.$$

Au final, $\gamma(N, (x_n), [a, b])$ converge vers $b - a$ et (x_n) est bien équirépartie.

4) On va utiliser le critère précédent. L'assertion $(*)$ est vrai pour tout polynôme trigonométrique de période 1 (par linéarité sur l'hypothèse, le cas $k = 0$ étant trivialement vérifié). Or, les polynômes trigonométriques sont denses dans $(\mathcal{C}_{per}, \| \|_\infty)$ en vertu de la question II4)c. Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$ et $\varepsilon > 0$. On se donne P polynôme trigonométrique approchant f à moins de ε de manière uniforme sur $\mathbb{R}$. On écrit

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) - \int_0^1 P(f) + \int_0^1 P - \int_0^1 f.$$

Comme

$$\left|\int_0^1 f - \int_0^1 P\right| \leqslant \int_0^1 |f - P| \leqslant \varepsilon \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(x_n) - P(x_n)| \leqslant \varepsilon,$$

on obtient par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant \varepsilon + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) - \int_0^1 P\right| + \varepsilon,$$

et donc pour N assez grand,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant 3\varepsilon,$$

et $(*)$ est vraie pour f : la suite (x_n) est bien équirépartie.

5) On va utiliser la question précédente. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ et calculons

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2ik\pi\alpha n + 2ik\pi x) = \frac{\exp(2ik\pi x)}{N}\frac{1-\exp(2i(N+1)k\pi\alpha)}{1-\exp(2ik\pi\alpha)},$$

avec $\exp(2ik\pi\alpha) \neq 1$ car $2\pi k\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ puisque α est irrationnel. En passant au module, il vient

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2ik\pi\alpha n + 2ik\pi x)\right| \leqslant \frac{2}{|1-\exp(2ik\pi\alpha)|N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

La suite $(\alpha n + x)$ est donc bien équirépartie.

6) On remarque avec la majoration précédente que

$$\left\|\int_0^1 e_k - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_k(\alpha n + .)\right\|_\infty \leqslant \frac{2}{|1-\exp(2ik\pi\alpha)|N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Si $k = 0$, la norme infinie est nulle. On en déduit par linéarité et inégalité triangulaire que si P est un polynôme trigonométrique et $P_n(x) = P(\alpha n + x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to+\infty}\left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty = 0.$$

Si P est un polynome trigonométrique approchant f de manière uniforme à ε près,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty &\leqslant \left\|\int_0^1 f - \int_0^1 P\right\|_\infty + \left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty + \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \\ &\leqslant \varepsilon + \left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty + \varepsilon = 2\varepsilon + \left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty\end{aligned}$$

et donc pour N assez grand,

$$\left\|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \leqslant 3\varepsilon.$$

C'est ce qu'on voulait.

♣♢♡♠