## Groupe symétrique et déterminants (RÉVISION MP2I)

### A - Groupe symétrique

*Le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Généralités** | |
| Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.<br>Cycle, transposition.<br>Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité. | Notation $S_n$.<br>Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.<br>La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.<br>Commutativité de la décomposition. |
| **b) Signature d'une permutation** | |
| Tout élément de $S_n$ est un produit de transpositions.<br>Signature : il existe une et une seule application $\varepsilon$ de $S_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition $\tau$ et $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations $\sigma$ et $\sigma'$. | La démonstration n'est pas exigible. |

### B - Déterminants

*Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :*
- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

*Dans tout ce chapitre, $E$ désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Formes $n$-linéaires alternées** | |
| Forme $n$-linéaire alternée. | La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. |
| Antisymétrie, effet d'une permutation. | Si $f$ est une forme $n$-linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. |
| **b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base** | |
| Si $e$ est une base, il existe une et une seule forme $n$-linéaire alternée $f$ pour laquelle $f(e) = 1$. Toute forme $n$-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$. | Notation $\det_e$.<br>La démonstration de l'existence n'est pas exigible. |
| Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. | Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède). |
| Comparaison, si $e$ et $e'$ sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.<br>La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. | |
| Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. | $\leftrightarrows$ PC : orientation d'un espace de dimension 3. |
| **c) Déterminant d'un endomorphisme** | |
| Déterminant d'un endomorphisme. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Déterminant d'une composée. | Caractérisation des automorphismes. |

**d) Déterminant d'une matrice carrée**

| | |
|---|---|
| Déterminant d'une matrice carrée.<br>Déterminant d'un produit.<br><br>Déterminant d'une transposée. | <br>Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.<br>Caractérisation des matrices inversibles. |

**e) Calcul des déterminants**

| | |
|---|---|
| Effet des opérations élémentaires.<br>Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.<br>Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire.<br>Déterminant de Vandermonde. | |

**f) Comatrice**

| | |
|---|---|
| Comatrice.<br>Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)I_n$. | Notation $\mathrm{Com}(A)$.<br>Expression de l'inverse d'une matrice inversible. |

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

*La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.*

*Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.*

*On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|

**a) Généralités**

| | |
|---|---|
| Matrices semblables, interprétation géométrique. | Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée. |
| Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. | En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace $F$ par un endomorphisme $u$ à l'aide de la matrice de $u$ dans une base adaptée à $F$. |

**b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée**

| | |
|---|---|
| Droite stable par un endomorphisme.<br>Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. | $\leftrightarrows$ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire. |
| Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres. | La notion de valeur spectrale est hors programme. |
| La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. | Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. |
| Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est fini, et de cardinal au plus $n$.<br>Si deux endomorphismes $u$ et $v$ commutent, tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée. | Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.<br>Deux matrices semblables ont même spectre.<br>Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}'$. |

### c) Polynôme caractéristique

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. | Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.<br>Le polynôme caractéristique est unitaire.<br>Notations $\chi_u, \chi_A$.<br>Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$. |
| Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.<br>Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.<br>Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. | La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est majorée par la multiplicité de $\lambda$. |

### d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est diagonale. | Une telle base est constituée de vecteurs propres. |
| Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à $E$. | Cas des projecteurs, des symétries. |
| Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable. | |
| Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale. | Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. |
| Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension $n$ admettant $n$ valeurs propres distinctes. | Traduction matricielle. |
| Pour qu'un endomorphisme $u$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\chi_u$ soit scindé et que, pour toute valeur propre de $u$, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité. | Traduction matricielle. |