Suites et séries de fonctions

A - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
b) Continuité, double limite	
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) ci-dessus.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).
e) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.

♣♢♡♠