Maths : Endomorphismes d'un espace euclidien

Contents

Dans tout ce qui suit, on pose $[E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle]$ un espace euclidien.

1 Adjoint d'un endomorphisme

1.1 Adjoint

1.1.1 Définition (*Endomorphisme adjoint*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.
Alors
$$\exists! u^* \in E^E \mid \forall x, y \in E,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$
On appelle alors u^* l'(endomorphisme) *adjoint* de u.

1.1.2 Propriété (*Linéarité de l'adjoint*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.
Alors
$$u^* \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$$

1.1.3 Propriétés

- L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \\ u & \longmapsto & u^* \end{array}$$
est linéaire et involutive ($i.e$ $\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E),\ (u^*)^* = u$)
- $\forall u, v \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E), (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$
- $\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E$
- $\forall u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E),\ u^* \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

1.1.4 Proposition (stabilité)

Soit F un sous espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid u(F) \subset F$.
Alors
$$u^*(F^\perp) \subset F^\perp$$

1.1.5 Proposition (lien avec les matrices)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^\top$$

1.2 Endomorphisme autoadjoint

1.2.1 Définition (*Endomorphisme autoadjoint*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.
Alors u est dit *autoadjoint* si et seulement si

$$u = u^*$$

i.e si et seulement si

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(x) \rangle$$

On note alors

$$\mathscr{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid u = u^*\}$$

1.2.2 Caractérisation matricielle

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.
Alors

$$u \in \mathscr{S}(E) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$$

1.2.3 Corollaire

$\mathscr{S}(E)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, avec :

$$\dim(\mathscr{S}(E)) = \frac{(\dim E)(1 + \dim E)}{2}$$

1.2.4 Théorème spectral

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, et $n = \dim E$.
Alors :

$$\begin{aligned}
& u \in \mathscr{S}(E) \\
\Leftrightarrow\quad & E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)}} E_\lambda(u) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \mathcal{B} = (e_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \mid \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E
\end{aligned}$$

1.2.5 Définition (*autoadjoint positif, défini positif*)

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.
Alors u est dit :

- *positif* si il vérifie

$$\forall x \in E,\ \langle u(x) \mid x \rangle \geqslant 0$$

- *défini positif* si il vérifie

$$\begin{array}{rl} & \forall x \in E \setminus \{0\}\,,\ \langle u(x) \mid x \rangle > 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in E, \left| \begin{array}{l} \langle u(x) \mid x \rangle \geqslant 0 \\ \langle u(x) \mid x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On définit alors les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{S}^+(E) & = & \{u \in \mathscr{S}(E) \mid \forall x \in E,\ \langle u(x) \mid x \rangle \geqslant 0\} \\ \mathscr{S}^{++}(E) & = & \{u \in \mathscr{S}(E) \mid \forall x \in E \setminus \{0\}\,,\ \langle u(x) \mid x \rangle > 0\} \end{array}$$

1.2.6 Proposition

Les ensembles $\mathscr{S}^+(E)$ et $\mathscr{S}^{++}(E)$ sont convexes (mais ne sont pas des espaces vectoriels).

1.2.7 Caractérisation spectrale

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathscr{S}^+(E) & \Leftrightarrow & \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \mathbb{R}_+ \\ u \in \mathscr{S}^{++}(E) & \Leftrightarrow & \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

2 Matrices orthogonales

2.1 Définitions

2.1.1 Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note alors

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^\top\right\}$$

l'ensemble des matrices symétriques.

2.1.2 Définition (*matrice positive, définie positive*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
On dit alors que A est :

- *positive* si elle vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \underbrace{X^\top A X}_{\in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}} \geqslant 0$$

- *définie positive* si elle vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \; X^\top A X > 0$$

On définit alors les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ positive}\} \\ \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ définie positive}\} \end{aligned}$$

2.1.3 Propriété

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $n = \dim E$, et $u \in \mathscr{S}(E)$.
Alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{S}^+(E) &\Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \\ u \in \mathscr{S}^{++}(E) &\Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2.2 Matrices orthogonales

2.2.1 Définition (*matrice orthogonale*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (carrée !).
Alors A est dite *orthogonale* si et seulement si

$$A^\top A = I_n$$

On note alors

$$O_n(\mathbb{R}) = O(n) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\right\}$$

2.2.2 Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(C_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ les colonnes de A, et $(L_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ ses lignes.

On a :

$$\begin{array}{rcl} A \in O(n) & \Leftrightarrow & A^\top A = I_n \\ & \Leftrightarrow & AA^\top = I_n \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A^{-1} = A^\top \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & (C_k)_{k \in [\![1 \ ; \ n]\!]} \text{ famille (base) orthonormée de } \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ & \Leftrightarrow & (L_k)_{k \in [\![1 \ ; \ n]\!]} \text{ famille (base) orthonormée de } \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \end{array}$$

2.2.3 Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in O(n)$.
Alors

$$\det(A) \in \{\pm 1\}$$

2.2.4 Caractérisation (par les matrices de passage)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Alors :

$$\forall A \in O(\dim E),\ \exists! \mathcal{B}' \text{ base orthonormée de } E \mid A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

2.3 Groupe orthogonal

2.3.1 Définition (*groupe spécial orthogonal*)

On définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$SO(n) = SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

2.3.2 Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors :

- $O(n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe orthogonal* ;
- $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé *groupe spécial orthogonal*.

2.3.3 Définition (*matrice directe, indirecte*)

Soit $A \in O(n)$.
Alors A est dite :

- *directe* si et seulement si

$$A \in SO(n)$$

- *indirecte* si et seulement si

$$A \in O(n) \setminus SO(n)$$

2.3.4 Proposition (morphisme de $[\mathbb{R}, +]$ dans $[SO(2), \times]$)

L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & SO(2) \\ & & t & \longmapsto & R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{array}$$

est un morphisme de groupes de $[\mathbb{R}, +]$ dans $[SO(2), \times]$ surjectif, et

$$\ker \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$$

2.3.5 Corollaires

- Le groupe $SO(2)$ est commutatif.

- L'application

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{U} & \longrightarrow & SO(2) \\ & & z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \Re(z) & -\Im(z) \\ \Im(z) & \Re(z) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes de $[\mathbb{U}, \times]$ dans $[SO(2), \times]$.

2.4 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

2.4.1 Définition (cas général)

Soit E' un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors *orienter* E' signifie choisir une base $\mathcal{B}$ de E' qui servira de référence : $\mathcal{B}$ définit le *sens direct*.
De plus, $\forall \mathcal{B}'$ base de E',

- soit $\mathcal{B}'$ est *directe*, lorsqu'elle vérifie

$$\det\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

- sinon, *i.e* si

$$\det\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$$

alors $\mathcal{B}'$ est dite *indirecte*.

2.4.2 Propriétés (orientation d'un espace euclidien)

- Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E (espace euclidien), et $n = \dim E$.
Alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation de E si et seulement si

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in SO(n)$$

- Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases directes de E.
Alors

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$

On note parfois Det cette application.

- Soit H un hyperplan de E.
Alors on peut orienter H en choisissant une normale $\vec{n}$ de H, *i.e* un $\vec{n} \in E \mid \{\vec{n}\}^{\perp} = H$.
Une base $\mathcal{B}_H$ de H est directe si et seulement si la base $(\mathcal{B}_H, \vec{n})$ de E est directe.

2.5 Théorème spectral matriciel

2.5.1 Définition (*matrices orthogonalement semblables*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors A et B sont dites *orthogonalement semblables* si, et seulement si

$$\exists P \in O(n) \mid A = P^{-1}BP = P^{\top}BP$$

Remarques :

– Comme $O(n)$ est un groupe, la relation « être semblable » définit une relation d'équivalence.

– Deux matrices sont orthogonalement semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases orthonormées.

2.5.2 Théorème spectral matriciel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors :

$$A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \exists P \in O(n) \mid P^{-1}AP = P^{\top}AP \text{ diagonale}$$

3 Isométries vectorielles

3.1 Définitions

3.1.1 Définition (*isométrie vectorielle*)

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.
Alors f est une *isométrie vectorielle* si et seulement si elle conserve la norme, *i.e* si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

3.1.2 Propriété (*symétries orthogonales*)

Les symétries orthogonales de E, donc en particulier les réflexions de E (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) sont des isométries vectorielles.

3.2 Caractérisation

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, et $n = \dim E$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\| \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in E,\ \langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \mid u(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E,\ u(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in \mathrm{GL}(E) \\ u^{-1} = u^* \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad u^* \circ u = \mathrm{id}_E \\
& \Leftrightarrow \quad u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{id}_E \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n) \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n)
\end{aligned}$$

3.3 Groupe orthogonal

3.3.1 Propriété (*déterminant d'une isométrie*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ une isométrie.
Alors

$$\det(f) \in \{\pm 1\}$$

3.3.2 Définition

On définit les ensembles :

$$\begin{array}{rcl} O(E) & = & \{f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|\} \\ SO(E) & = & \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\} \end{array}$$

3.3.3 Propriété (structure de groupe)

- L'ensemble $O(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé *groupe orthogonal* de E.
- L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal*.

3.3.4 Définition (*isométrie directe, indirecte*)

Soit $u \in O(E)$.
Alors u est dite :

- *directe* (on dit aussi que u est une rotation) si et seulement si

$$\det(u) = 1 \ \Leftrightarrow\ u \in SO(E)$$

- *indirecte* sinon, *i.e* si et seulement si

$$\det(u) = -1 \ \Leftrightarrow\ u \in O(E) \setminus SO(E)$$

3.3.5 Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et $R_\theta, S_\theta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$\begin{array}{rcl} R_\theta & = & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ S_\theta & = & \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} SO(2) & = & \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ O(2) \setminus SO(2) & = & \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

3.3.6 Propriété (*rotation vectorielle d'un plan euclidien*)

Soit $[P, \langle \cdot \mid \cdot \rangle]$ un plan euclidien (donc $\dim P = 2$), et $r \in SO(P)$, *i.e* r est une rotation de P.
Alors

$$\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases orthonormées de } P,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r)$$

et, avec $\mathcal{B}$ une base orthonormée de P,

$$\exists\theta\in\mathbb{R} \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

avec θ unique modulo 2π.

3.4 Réduction

3.4.1 Propriété (stabilité)

Soit F un sous espace vectoriel de E, et $u\in O(E)$ une isométrie.
Alors :

$$u(F)\subset F\Rightarrow u(F^\perp)\subset F^\perp$$

3.4.2 Théorème de réduction d'une matrice orthogonale

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\forall A\in O(n),\ \left|\begin{array}{l}\exists P\in O(n)\\ \exists r,p,q\in\mathbb{N}\\ \exists\,(\theta_k)_{k\in[\![1\ ;\ q]\!]}\in(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})^q\end{array}\right.\quad\text{tels que}$$

$$A=P^{-1}\left(\begin{array}{c|c|ccc} I_r & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & -I_p & & 0 & \\ \hline & & R_{\theta_1} & & (0)\\ 0 & 0 & & \ddots & \\ & & (0) & & R_{\theta_q}\end{array}\right)P$$

où $\forall\theta\in\mathbb{R}$,

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

3.4.3 Théorème de réduction des isométries

Soit $u\in O(E)$ une isométrie.
Alors :

$$\exists\mathcal{B}\text{ base orthonormée de }E\ \left|\begin{array}{l}\exists r,p,q\in\mathbb{N}\\ \exists\,(\theta_k)_{k\in[\![1\ ;\ q]\!]}\in(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})^q\end{array}\right.\quad\text{tels que}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\left(\begin{array}{c|c|ccc} I_r & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & -I_p & & 0 & \\ \hline & & R_{\theta_1} & & (0)\\ 0 & 0 & & \ddots & \\ & & (0) & & R_{\theta_q}\end{array}\right)$$

où $\forall\theta \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$