Physics : Mechanics theorems

Contents

1 Principe fondamental de la dynamique

1.1 Définitions

1.1.1 Définition (*quantité de mouvement*)

Soit M un point de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$.
La *quantité de mouvement* du point M est la grandeur suivante :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

1.1.2 Propriété

Soit $\Sigma = \{M_k \mid k \in I\}$ un système, où $\forall k \in I$ M_k est de masse m_k.
La quantité de mouvement de Σ est :

$$\vec{p} = \sum_{k\in I} m_k \vec{v}$$

1.2 Lois de Newton

1.2.1 Première loi de Newton

Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.
Ces référentiels sont appelés *référentiels galiléens*.

1.2.2 Deuxième loi de Newton

Soit M un point matériel de masse m dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$.
Soit $\vec{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur M, et $\vec{p}$ la quantité de mouvement de M.
Alors :

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

et si m est constante, on a :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

avec $\vec{a}$ l'accélération de M dans $\mathscr{R}$.

Remarques :
- Cette loi est aussi appelée *principe fondamental de la dynamique*.
- Cette loi est un postulat, elle ne se démontre pas, mais se vérifie expérimentalement.

1.2.3 Troisième loi de Newton

Soient A, B deux points matériels.
On a :

$$\overrightarrow{f_{A/B}} + \overrightarrow{f_{B/A}} = \overrightarrow{0}$$

De plus, ces deux forces sont portées par la droite (AB).

Remarque :

- On appelle aussi cette loi le *principe des actions réciproques*.

2 Énergie

2.1 Travail

2.1.1 Définition (*travail d'une force constante*)

Soient A, B deux points, et soit $\vec{f}$ une force constante.

Le *travail* de $\vec{f}$ est :

$$W\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

2.1.2 Définition (*travail élémentaire*)

Soit M un point mobile, et $\vec{f}$ une force.

On définit le *travail élémentaire* de $\vec{f}$ dans le déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ par :

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

Remarque :

Si on se place dans un référentiel $\mathscr{R}$, avec O un point fixe de $\mathscr{R}$, on a $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}\mathrm{d}t$, et :

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$$

2.1.3 Définition (*travail le long d'une courbe*)

Soient A, B deux points d'un référentiel $\mathscr{R}$, M un point mobile se déplaçant de A à B le long d'une courbe $(\mathscr{C})$, et soit $\vec{f}$ une force s'exerçant sur M.
Le *travail* de $\vec{f}$ entre A et B sur $(\mathscr{C})$ est :

$$W_{A\to B,(\mathscr{C})}\left(\vec{f}\right) = \int_{A\ (\mathscr{C})}^{B} \delta W\left(\vec{f}\right)$$

Remarque :

En cas de parcours fermé ($i.e$ $A = B$), on note $W = \oint_{(\mathscr{C})} \delta W$.

2.2 Puissance

2.2.1 Définition (*puissance d'une force*)

Soit M un point de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$, et soit $\vec{f}$ une force s'exerçant sur M.
Alors la *puissance* de $\vec{f}$ est :

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

2.2.2 Propriétés

Soit M un point de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$, et soit $\vec{f}$ une force s'exerçant sur M.
Comme $\delta W = \vec{f} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$, on a

$$\delta W = P\mathrm{d}t$$

2.3 Énergie cinétique

2.3.1 Définition (*énergie cinétique*)

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ (de norme v) dans un référentiel $\mathscr{R}$.
Alors l'*énergie cinétique* de M est :

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2$$

2.3.2 Théorème de la puissance cinétique

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ (de norme v) dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, et $\vec{F}$ la résultantes des forces s'exerçant sur M.
Alors on a :

$$P = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}$$

Conséquence : si $\vec{F}$ est normale à $\vec{v}$, alors $v = \|\vec{v}\|$ est constante.

2.3.3 Théorème de l'énergie cinétique

Soit M un point matériel de masse m dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, deux points A, B, et $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces s'exerçant sur M.
Alors on a :

$$\Delta_{A\to B} E_c = W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$$

où $\Delta_{A\to B} E_c = E_c(B) - E_c(A)$.

2.4 Énergie potentielle

2.4.1 Définition (*Énergie potentielle*)

Soit M un point matériel soumis à un champ de forces $\vec{f}(M)$.
Si $\exists U \mid \delta W\left(\vec{f}\right) = -\mathrm{d}U$, alors on dit que :

- La force $\vec{f}$ est *conservative* ;
- La force $\vec{f}$ *dérive* du potentiel U ;
- U est le potentiel de la force $\vec{f}$;
- $U(M)$ est l'*énergie potentielle* du point M dans le champ de forces $\vec{f}(M)$.

2.4.2 Propriétés

Soit M un point matériel soumis à un champ de forces $\vec{f}(M)$ conservatif de potentiel U.

- U n'est connue que par $\mathrm{d}U$, donc U est définie à une constante additive près.
- On a $\delta W = -\mathrm{d}U$, donc :

$$\int_A^B \delta W = -\int_A^B \mathrm{d}U$$

Donc :

$$W_{A\to B} = U(A) - U(B) = -\Delta_{A\to B} U$$

I.e le travail ne dépend pas du chemin suivi par M, et si le parcours est fermé, le travail est nul.

- Si le point M a une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$, on a

$$-\mathrm{d}U = \delta W = \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\vec{f}\cdot\vec{v}$$

2.5 Énergie mécanique

2.5.1 Définition (*Énergie mécanique*)

Soit un point M soumis à un champ de forces $\vec{f}(M) = \vec{f_1}(M) + \vec{f_2}(M)$ dans un référentiel $\mathscr{R}$, où $\vec{f_1}$ est conservatif de potentiel U.

Alors l'*énergie mécanique* du point M est :

$$E = E_{\mathrm{c}} + U$$

2.5.2 Propriété

Soit M un point matériel soumis à un champ de forces $\vec{f}(M)$ conservatif de potentiel U, dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$.

Alors l'énergie mécanique E est constante.

2.5.3 Théorème de l'énergie mécanique

Soit un point matériel M dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, et soit $\vec{f} = \vec{f_{\mathrm{c}}} + \vec{f_{\mathrm{nc}}}$ la résultante des forces s'exerçant sur M, où $\vec{f_{\mathrm{c}}}$ est conservative et $\vec{f_{\mathrm{nc}}}$ est non conservative.

Alors :

$$\Delta_{A\to B} E = W_{A\to B}\left(\vec{f_{\mathrm{nc}}}\right)$$

Forme infinitésimale du théorème de l'énergie mécanique :

$$\mathrm{d}E = \delta W\left(\vec{f_{\mathrm{nc}}}\right)$$

2.5.4 Théorème de la puissance mécanique

On reprend les notations du point précédant (2.5.3).
On a :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P\left(\vec{f_{\mathrm{nc}}}\right)$$

3 Moment

3.1 Moment d'une force

3.1.1 Par rapport à un point

Soit M un point soumis à une force $\vec{f}$, et A un point quelconque.

Le *moment* de $\vec{f}$ par rapport à A est :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$$

3.1.2 Par rapport à un axe orienté

Soit M un point soumis à une force $\vec{f}$, A un point quelconque, Δ un axe passant par A et orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.

Le *moment* de $\vec{f}$ par rapport à Δ est :

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Remarque : cette grandeur est bien définie, car pour $A' \in \Delta$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_{A'}}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} &= \left(\overrightarrow{A'M} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\
&= \left(\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{f} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\
&= \underbrace{\left(\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{f}\right)}_{\perp\Delta} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} + \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\
&= \overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}
\end{aligned}$$

3.1.3 Bras de levier

Soit M un point soumis à une force $\vec{f}$, A un point quelconque, et Δ l'axe passant par A perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{f}$, orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.

On a alors :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) = \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

3.2 Moment cinétique d'un point

3.2.1 Par rapport à un point

Soit M un point matériel de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$, de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, et soit A un point quelconque.

Le *moment cinétique* de M par rapport à A est :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_A}(M) &= \overrightarrow{\mathscr{M}_A}(\vec{p}) \\
&= \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} \\
&= m\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}
\end{aligned}$$

Remarque : on note aussi $\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{\sigma_A}(M)$

3.2.2 Par rapport à un axe orienté

Soit M un point matériel, A un point quelconque, et Δ un axe passant par A et orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.

Le *moment cinétique* de M par rapport à Δ est :

$$\sigma_\Delta(M) = \overrightarrow{\sigma_A}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

3.3 Théorème du moment cinétique

3.3.1 En un point fixe

Soit M un point de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, A un point **fixe** de $\mathscr{R}$, et $\vec{F} = \sum_{k \in I} \vec{f_k}$ la résultante des forces $\vec{f_k}$ s'exerçant sur M.

Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{F}\right) = \sum_{k \in I} \overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f_k}\right)$$

Remarque : on appelle aussi ce théorème le *théorème vectoriel du moment cinétique*

3.3.2 Par rapport à un axe fixe

Soit M un point de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, A un point **fixe** de $\mathscr{R}$, et Δ un axe **fixe** passant par A, et orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$. On note $\vec{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur M.

Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}\right)$$

Remarque : On appelle ce théorème le *théorème scalaire du moment cinétique*