Maths : Caractérisations séquentielles

1 Bornes inférieures, supérieures

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\}$.
(1) Soit M un majorant de A, *i.e*, $\forall x \in A, x \leqslant M$. On a alors :

$$M = \sup(A) \;\Leftrightarrow\; \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$$

(2) Soit m un minorant de A, *i.e*, $\forall x \in A, m \leqslant x$. On a alors :

$$m = \inf(A) \;\Leftrightarrow\; \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$$

2 Densité

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Alors A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

3 Limites

Soient $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction définie au voisinage de a. Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \;\Leftrightarrow\; \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_f \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\ f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

4 Continuité

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en a. Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) \;\Leftrightarrow\; \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_f \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\ f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$