Maths : Polynomial

Contents

Dans tout ce qui suit, K est un corps abélien, et $n, m \in \mathbb{N}$.

1 Définitions

1.1 Polynôme à une indéterminée

Un polynôme à une indéterminée X à coefficients dans K est une somme formelle

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec } \forall k \in [\![0\ ;\ n]\!]\,,\ a_k \in K$$

Par convention, $\forall k > n,\ a_k = 0$.
On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K.

1.2 Degré d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Si $P = 0$, alors $\deg(P) = -\infty$.
Sinon, $\deg(P) = \max\{k \in [\![0\ ;\ n]\!] \mid a_k \neq 0,\ \forall j \in [\![k+1\ ;\ n]\!]\,,\ a_j = 0\}$

On note $\operatorname{dom}(P) = a_{\deg(P)}$ (Attention, notation non universelle, à définir avant de l'utiliser)

P est *unitaire* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{dom}(P) = 1$

On note $K_n[X] = \{P \in K[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}$

1.3 Propriétés

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors :

$\deg(P) \leqslant n$
$\deg(P) = n \ \Leftrightarrow\ a_n \neq 0$
$\exists p \in [\![0\ ;\ n]\!] \mid a_p \neq 0 \Rightarrow \deg(P) \geqslant p$

2 Somme, produit

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

2.1 Somme

On définit la somme $P+Q$ par :

$$P+Q=\sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k+b_k)X^k$$

2.2 Produit

Soit $\lambda \in K$.
On définit λP par :

$$\lambda P=\sum_{k=0}^{n}\lambda a_k X^k$$

On définit le produit PQ par :

$$PQ=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\right)X^k=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)X^k$$

On peut aussi écrire le produit comme suit :

$$PQ=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_ib_jX^{i+j}=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}}a_ib_jX^{i+j}$$

2.3 Degré d'une sommme, produit

Soient $P,Q\in K[X]$. On a :

- $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$, et plus précisément :
  - Si $\deg(P)\neq\deg(Q)$, alors $\deg(P+Q)=\max(\deg(P),\deg(Q))$
  - Sinon, $\deg(P)=\deg(Q)$, et $\deg(P+Q)=\deg(P)\iff\mathrm{dom}(P)\neq-\mathrm{dom}(Q)$
- $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Soient $P\in K[X]\setminus\{0\},\ n\in\mathbb{N}$. On a $\deg(P^n)=n\deg(P)$

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(P_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}\subset K[X]$. Alors :

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{n}P_k\right)\leqslant\max\left\{\deg(P_k)\mid k\in[\![1\ ;\ n]\!]\right\}$$

2.4 Anneau $K[X]$

$(K[X],+,\cdot)$ est un anneau abélien intègre.
$K[X]^*=\{P\in K[X]\mid\ \deg(P)=0\}=K^*$ (polynômes constants non nuls)

3 Composée

3.1 Définition

Soient $P, Q \in K[X]$, avec $P = \sum_k a_k X^k$

On définit le polynôme composé $P \circ Q$ par

$$P \circ Q = P(Q(X)) = \sum_k a_k Q^k$$

3.2 Propriétés

Soient $A, B, R \in K[X]$. Alors :

$$(A \circ R) \cdot (B \circ R) = (AB) \circ R$$

$$A \circ R + B \circ R = (A + B) \circ R$$

Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, alors

$$\deg(A \circ B) = \deg(A) \deg(B)$$

4 Division euclidienne

4.1 Divisibilité

Soient $A, B \in K[X]$.

$$A | B \iff \exists D \in K[X] \mid B = AD$$

4.2 Définition (association)

Soient $A, B \in K[X]$. On note A et B sont *associés* par $A \sim B$, et

$$A \sim B \iff \exists \lambda \in K^* \mid A = \lambda B$$

4.3 Propriétés

Soient $A, B \in K[X]$. On a :

$$\begin{cases} A | B \\ B \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \deg(A) \leqslant \deg(B)$$

$$A \sim B \iff \begin{cases} A | B \\ B | A \end{cases}$$

4.4 Division euclidienne

$$\forall (A,B) \in K[X] \times (K[X] \setminus \{0\}),\ \exists! (Q,R) \in (K[X])^2 \mid \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

4.5 Propriété

$\forall (a,P) \in K \times K[X],\ \exists (b,Q) \in K \times K[X] \mid P = (X-a)Q + b$, et on a $b = P(a)$.

5 Polynôme dérivé

5.1 Définition

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On définit le polynôme dérivé de P par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Et par récurrence, le polynôme dérivé d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est :

$$P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$$

avec $P^{(0)} = P$.

5.2 Propriétés

Soient $P, Q \in K[X]$, et $\lambda, \mu \in K$. On a :

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

$$(PQ)' = P'Q + Q'P$$

$\forall n, p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X^n)^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} X^{n-p} & \text{si } n \geqslant p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $P, Q \in K[X]$. On a :

$$P' = 0 \ \Leftrightarrow\ \deg(P) \leqslant 0$$

$$\deg(P) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \deg(P') = \deg(P) - 1 \\ \operatorname{dom}(P') = \deg(P) \cdot \operatorname{dom}(P) \end{cases}$$

Si $P \neq 0$, alors :

$$\forall n \leqslant \deg(P),\ \deg(P^{(n)}) = \deg(P) - n$$
$$P^{(\deg(P))} = (\deg(P))! \cdot \mathrm{dom}(P)$$
$$P^{(\deg(P)+1)} = 0$$

5.3 Formule de Leibniz

Soient $P, Q \in K[X]$. On a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

6 Racines d'un polynôme

6.1 Fonction polynomiale, formule de Taylor

6.1.1 Défintion (fonction polynomiale)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$.

La fonction polynomiale associée à P est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P} & : & K & \longrightarrow & K \\ & & x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

Pour $\alpha \in K$, on note

$$P(\alpha) = \widetilde{P}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

6.1.2 Formule de Taylor

Soient $P \in K[X]$, et $a \in K$. On a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

6.1.3 Propriétés

Soient $P \in K[X]$, et $a \in K$. On a :

$$\forall m \geqslant \deg(P),\ P(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Soient $n \in \mathbb{N},\ a \in K$, et $(a_k)_{k\in[\![0\ ;\ n]\!]} \subset K$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(X-a)^k = 0 \ \Rightarrow\ \forall k \in [\![0\ ;\ n]\!]\,,\ a_k = 0$$

Soient $(P, a, n) \in K[X] \times K \times \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \\ &= (X-a)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-n}}_{Q} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}_{R} \end{aligned}$$

avec Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^n$

6.2 Racines simples

6.2.1 Définition

Soient $P \in K[X]$, et $a \in K$.
a est *racine* de $P \ \Leftrightarrow\ P(a) = 0$.

6.2.2 Propriétés

Soient $A, B \in K[X],\ a \in K$. Alors

$$\begin{cases} A(a) = 0 \\ A|B \end{cases} \Rightarrow B(a) = 0$$

Soient $P \in K[X],\ \alpha \in K$. On a :

$$P(\alpha) = 0 \ \Leftrightarrow\ X - \alpha | P$$

Soient $\left| \begin{array}{l} P \in K[X] \\ n \in \mathbb{N}^* \\ (\alpha_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset K \mid \forall (i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2\,,\ i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \end{array} \right.$ Alors :

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ P(\alpha_k) = 0 \ \Leftrightarrow\ \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \mid P$$

Soient $\left|\begin{array}{l} P \in K[X] \\ n = \deg(P) \\ (\alpha_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \subset K \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ P(\alpha_k) = 0 \end{array}\right.$ Alors :

$$\exists \lambda \in K^* \mid P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

6.3 Racines multiples

6.3.1 Propriétés

Soient $P \in K[X],\ a \in K,\ n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$(X-a)^n | P \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\ P^{(k)}(a) = 0$$

Soient $P \in K[X],\ a \in K,\ n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\exists Q \in K[X] \begin{cases} P = (X-a)^n Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (X-a)^n | P \\ (X-a)^{n+1} \nmid P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\ P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(n)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

6.3.2 Définition (Ordre de multiplicité)

Soient $P \in K[X],\ a \in K,\ n \in \mathbb{N}^*$.

a est une racine d'ordre (exactement) n de P $\Leftrightarrow \begin{cases} (X-a)^n | P \\ (X-a)^{n+1} \nmid P \end{cases}$

L'entier n est alors appelé *l'ordre de multiplicité* de la racine a.

P admet a comme racine d'ordre au moins n $\Leftrightarrow$ $(X-a)^n | P$.

6.3.3 Définition (racines simples, multiples)

Soit $P \in K[X]$

Une racine simple de P est une racine d'ordre exactement 1.

Une racine multiple de P est une racine d'ordre au moins 2.

6.3.4 Propriétés

Soient $P \in K[X],\ a \in K,\ n \in \mathbb{N}^*$. Si a est racine d'ordre (exactement) n de P, alors a est racine d'ordre (exactement) $n-1$ de P'.

Soient $\left| \begin{array}{l} P \in K[X] \\ n \in \mathbb{N}^* \\ (r_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset N^* \\ (a_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset K \mid \forall (i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j \end{array} \right.$ Alors :

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ (X-a_k)^{r_k} | P \ \Leftrightarrow\ \prod_{k=1}^{n} (X-a_k)^{r_k} | P$$

De plus, si $\deg(P) = \sum_{k=1}^{n} r_k$, on a :

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ \begin{cases} (X-a_k)^{r_k} | P \\ (X-a)^{r_k+1} \nmid P \end{cases} \quad \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in K^* \mid P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-a_k)^{r_k}$$

6.4 Polynômes scindés

6.4.1 Définition (polynôme scindé)

Soit $P \in K[X]$.

$$P \text{ est } \textit{scindé} \text{ sur } K \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \deg(P) > 0 \\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset K,\ \exists \lambda \in K^* \mid P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-x_k) \end{cases}$$

6.4.2 Propriétés

Soient $A, B \in K[X] \setminus \{0\}$, avec A scindé.

Soient $\left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^*, \\ (r_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset N^* \\ (a_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset K \mid \forall (i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j \end{array} \right.$

tels que $\exists \lambda \in K^* \mid A = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-a_k)^{r_k}$ ($i.e$ les a_k sont les racines d'ordre r_k de A).

Alors :

$$A|B \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ (X-a_k)^{r_k} | B$$

7 Étude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

7.1 Définition (polynôme conjugé)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

On définit $\overline{P}$ le polynôme conjugé de P par :

$$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$$

7.2 Propriétés

Soient $P \in \mathbb{C}[X],\ z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$$

$$\overline{P^{(k)}} = \overline{P}^{(k)}$$

$$P \in \mathbb{R}[X] \ \Leftrightarrow\ P = \overline{P}$$

$$\begin{cases} (X-z)^k | P \\ (X-z)^{k+1} \nmid P \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (X-\overline{z})^k | \overline{P} \\ (X-\overline{z})^{k+1} \nmid \overline{P} \end{cases}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 + 2\Re(z)X + |z|^2$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors on peut décomposer P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\left|\begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \\ \exists n, m \in \mathbb{N}^* \\ \exists (a_k) \in \mathbb{R}^{[\![1\ ;\ n]\!]} \\ \exists (b_k),\ (c_k) \in \mathbb{R}^{[\![1\ ;\ m]\!]} \\ \exists (r_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]},\ (s_k)_{k\in[\![1\ ;\ m]\!]} \subset \mathbb{N}^* \end{array}\right. \quad | \ P = \lambda \left(\prod_{k=1}^{n} (X-a_k)^{r_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m} (X^2 + b_k X + c_k)^{s_k}\right)$$

où $\forall k \in [\![1\ ;\ m]\!],\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + b_k x + c_k = 0$.