

Physics : Mechanics theorems

Contents

1	Principe fondamental de la dynamique	3
1.1	Définitions	3
1.1.1	Définition (<i>quantité de mouvement</i>)	3
1.1.2	Propriété	3
1.2	Lois de NEWTON	3
1.2.1	Première loi de NEWTON	3
1.2.2	Deuxième loi de NEWTON	3
1.2.3	Troisième loi de NEWTON	4
2	Énergie	4
2.1	Travail	4
2.1.1	Définition (<i>travail d'une force constante</i>)	4
2.1.2	Définition (<i>travail élémentaire</i>)	4
2.1.3	Définition (<i>travail le long d'une courbe</i>)	4
2.2	Puissance	5
2.2.1	Définition (<i>puissance d'une force</i>)	5
2.2.2	Propriétés	5
2.3	Énergie cinétique	5
2.3.1	Définition (<i>énergie cinétique</i>)	5
2.3.2	Théorème de la puissance cinétique	5
2.3.3	Théorème de l'énergie cinétique	6
2.4	Énergie potentielle	6
2.4.1	Définition (<i>Énergie potentielle</i>)	6
2.4.2	Propriétés	6
2.5	Énergie mécanique	7
2.5.1	Définition (<i>Énergie mécanique</i>)	7
2.5.2	Propriété	7
2.5.3	Théorème de l'énergie mécanique	7
2.5.4	Théorème de la puissance mécanique	7
3	Moment	7
3.1	Moment d'une force	7
3.1.1	Par rapport à un point	7
3.1.2	Par rapport à un axe orienté	8
3.1.3	Bras de levier	8
3.2	Moment cinétique d'un point	9

3.2.1	Par rapport à un point	9
3.2.2	Par rapport à un axe orienté	9
3.3	Théorème du moment cinétique	9
3.3.1	En un point fixe	9
3.3.2	Par rapport à un axe fixe	9

1 Principe fondamental de la dynamique

1.1 Définitions

1.1.1 Définition (*quantité de mouvement*)

Soit M un point de masse m , de vitesse \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} .

La *quantité de mouvement* du point M est la grandeur suivante :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

1.1.2 Propriété

Soit $\Sigma = \{M_k \mid k \in I\}$ un système, où $\forall k \in I$ M_k est de masse m_k .

La quantité de mouvement de Σ est :

$$\vec{p} = \sum_{k \in I} m_k \vec{v}$$

1.2 Lois de NEWTON

1.2.1 Première loi de NEWTON

Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

Ces référentiels sont appelés *référentiels galiléens*.

1.2.2 Deuxième loi de NEWTON

Soit M un point matériel de masse m dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

Soit \vec{F} la résultante des forces s'exerçant sur M , et \vec{p} la quantité de mouvement de M .

Alors :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

et si m est constante, on a :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

avec \vec{a} l'accélération de M dans \mathcal{R} .

Remarques :

- Cette loi est aussi appelée *principe fondamental de la dynamique*.
- Cette loi est un postulat, elle ne se démontre pas, mais se vérifie expérimentalement.

1.2.3 Troisième loi de NEWTON

Soient A, B deux points matériels.

On a :

$$\overrightarrow{f_{A/B}} + \overrightarrow{f_{B/A}} = \vec{0}$$

De plus, ces deux forces sont portées par la droite (AB) .

Remarque :

- On appelle aussi cette loi le *principe des actions réciproques*.

2 Énergie

2.1 Travail

2.1.1 Définition (*travail d'une force constante*)

Soient A, B deux points, et soit \vec{f} une force constante.

Le *travail* de \vec{f} est :

$$W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

2.1.2 Définition (*travail élémentaire*)

Soit M un point mobile, et \vec{f} une force.

On définit le *travail élémentaire* de \vec{f} dans le déplacement $d\vec{M}$ par :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{M}$$

Remarque :

Si on se place dans un référentiel \mathcal{R} , avec O un point fixe de \mathcal{R} , on a $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, donc $d\vec{M} = d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt$, et :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}dt$$

2.1.3 Définition (*travail le long d'une courbe*)

Soient A, B deux points d'un référentiel \mathcal{R} , M un point mobile se déplaçant de A à B le long d'une courbe (\mathcal{C}) , et soit \vec{f} une force s'exerçant sur M .

Le *travail* de \vec{f} entre A et B sur (\mathcal{C}) est :

$$W_{A \rightarrow B, (\mathcal{C})}(\vec{f}) = \int_A^B \delta W(\vec{f})$$

Remarque :

En cas de parcours fermé (*i.e* $A = B$), on note $W = \oint_{(\mathcal{C})} \delta W$.

2.2 Puissance

2.2.1 Définition (*puissance d'une force*)

Soit M un point de vitesse \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} , et soit \vec{f} une force s'exerçant sur M .

Alors la *puissance* de \vec{f} est :

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

2.2.2 Propriétés

Soit M un point de vitesse \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} , et soit \vec{f} une force s'exerçant sur M .

Comme $\delta W = \vec{f} \cdot \vec{v} dt$, on a

$$\delta W = P dt$$

2.3 Énergie cinétique

2.3.1 Définition (*énergie cinétique*)

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} (de norme v) dans un référentiel \mathcal{R} .

Alors l'*énergie cinétique* de M est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

2.3.2 Théorème de la puissance cinétique

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} (de norme v) dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , et \vec{F} la résultantes des forces s'exerçant sur M .

Alors on a :

$$P = \frac{dE_c}{dt}$$

Conséquence : si \vec{F} est normale à \vec{v} , alors $v = \|\vec{v}\|$ est constante.

2.3.3 Théorème de l'énergie cinétique

Soit M un point matériel de masse m dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , deux points A, B , et \vec{F} la résultante de toutes les forces s'exerçant sur M .

Alors on a :

$$\Delta_{A \rightarrow B} E_c = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

où $\Delta_{A \rightarrow B} E_c = E_c(B) - E_c(A)$.

2.4 Énergie potentielle

2.4.1 Définition (*Énergie potentielle*)

Soit M un point matériel soumis à un champ de forces $\vec{f}(M)$.

Si $\exists U \mid \delta W(\vec{f}) = -dU$, alors on dit que :

- La force \vec{f} est *conservative* ;
- La force \vec{f} *dérive* du potentiel U ;
- U est le potentiel de la force \vec{f} ;
- $U(M)$ est l'*énergie potentielle* du point M dans le champ de forces $\vec{f}(M)$.

2.4.2 Propriétés

Soit M un point matériel soumis à un champ de forces $\vec{f}(M)$ conservatif de potentiel U .

- U n'est connue que par dU , donc U est définie à une constante additive près.
- On a $\delta W = -dU$, donc :

$$\int_A^B \delta W = - \int_A^B dU$$

Donc :

$$W_{A \rightarrow B} = U(A) - U(B) = -\Delta_{A \rightarrow B} U$$

I.e le travail ne dépend pas du chemin suivi par M , et si le parcours est fermé, le travail est nul.

- Si le point M a une vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} , on a

$$-dU = \delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dM} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt$$

Donc :

$$\frac{dU}{dt} = -\vec{f} \cdot \vec{v}$$

2.5 Énergie mécanique

2.5.1 Définition (*Énergie mécanique*)

Soit un point M soumis à un champ de forces $\vec{f}(M) = \vec{f}_1(M) + \vec{f}_2(M)$ dans un référentiel \mathcal{R} , où \vec{f}_1 est conservatif de potentiel U .

Alors l'énergie mécanique du point M est :

$$E = E_c + U$$

2.5.2 Propriété

Soit M un point matériel soumis à un champ de forces $\vec{f}(M)$ conservatif de potentiel U , dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

Alors l'énergie mécanique E est constante.

2.5.3 Théorème de l'énergie mécanique

Soit un point matériel M dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , et soit $\vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_{nc}$ la résultante des forces s'exerçant sur M , où \vec{f}_c est conservative et \vec{f}_{nc} est non conservative.

Alors :

$$\Delta_{A \rightarrow B} E = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{nc})$$

Forme infinitésimale du théorème de l'énergie mécanique :

$$dE = \delta W(\vec{f}_{nc})$$

2.5.4 Théorème de la puissance mécanique

On reprend les notations du point précédant (2.5.3).

On a :

$$\frac{dE}{dt} = P(\vec{f}_{nc})$$

3 Moment

3.1 Moment d'une force

3.1.1 Par rapport à un point

Soit M un point soumis à une force \vec{f} , et A un point quelconque.



Le moment de \vec{f} par rapport à A est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$$

3.1.2 Par rapport à un axe orienté

Soit M un point soumis à une force \vec{f} , A un point quelconque, Δ un axe passant par A et orienté par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ .

Le moment de \vec{f} par rapport à Δ est :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Remarque : cette grandeur est bien définie, car pour $A' \in \Delta$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A'}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta &= (\overrightarrow{A'M} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= (\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{f} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= \underbrace{(\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta}_{\perp \Delta} + (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta \end{aligned}$$

3.1.3 Bras de levier

Soit M un point soumis à une force \vec{f} , A un point quelconque, et Δ l'axe passant par A perpendiculaire au plan formé par \overrightarrow{AM} et \vec{f} , orienté par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ .

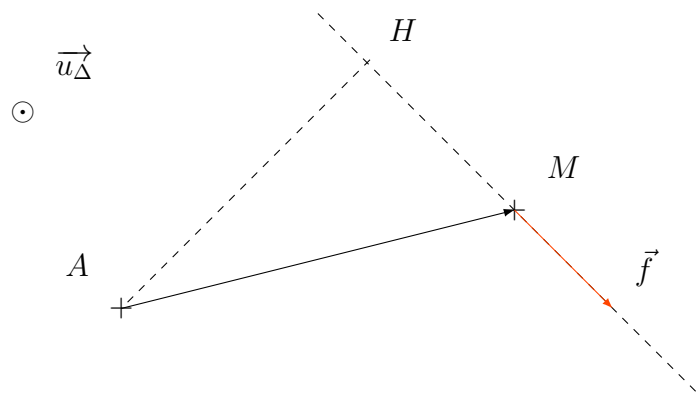
Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite d'action de \vec{f} .

On a alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

et :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f})\| = |\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})| = \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{f}\|$$



3.2 Moment cinétique d'un point

3.2.1 Par rapport à un point

Soit M un point matériel de masse m , de vitesse \vec{v} dans un référentiel \mathcal{R} , de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, et soit A un point quelconque.

Le *moment cinétique* de M par rapport à A est :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A(M) &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{p}) \\ &= \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} \\ &= m\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\end{aligned}$$

Remarque : on note aussi $\overrightarrow{L}_A(M) = \vec{\sigma}_A(M)$

3.2.2 Par rapport à un axe orienté

Soit M un point matériel, A un point quelconque, et Δ un axe passant par A et orienté par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ .

Le *moment cinétique* de M par rapport à Δ est :

$$\sigma_\Delta(M) = \vec{\sigma}_A(M) \cdot \vec{u}_\Delta$$

3.3 Théorème du moment cinétique

3.3.1 En un point fixe

Soit M un point de masse m , de vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , A un point **fixe** de \mathcal{R} , et $\vec{F} = \sum_{k \in I} \vec{f}_k$ la résultante des forces \vec{f}_k s'exerçant sur M .

Alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \sum_{k \in I} \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_k)$$

Remarque : on appelle aussi ce théorème le *théorème vectoriel du moment cinétique*

3.3.2 Par rapport à un axe fixe

Soit M un point de masse m , de vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , A un point **fixe** de \mathcal{R} , et Δ un axe **fixe** passant par A , et orienté par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ . On note \vec{F} la résultante des forces s'exerçant sur M .

Alors :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

Remarque : On appelle ce théorème le *théorème scalaire du moment cinétique*