

Maths : Endomorphismes d'un espace euclidien

Contents

1	Adjoint d'un endomorphisme	3
1.1	Adjoint	3
1.1.1	Définition (<i>Endomorphisme adjoint</i>)	3
1.1.2	Propriété (<i>Linéarité de l'adjoint</i>)	3
1.1.3	Propriétés	3
1.1.4	Proposition (stabilité)	3
1.1.5	Proposition (lien avec les matrices)	3
1.2	Endomorphisme autoadjoint	4
1.2.1	Définition (<i>Endomorphisme autoadjoint</i>)	4
1.2.2	Caractérisation matricielle	4
1.2.3	Corollaire	4
1.2.4	Théorème spectral	4
1.2.5	Définition (<i>autoadjoint positif, défini positif</i>)	5
1.2.6	Proposition	5
1.2.7	Caractérisation spectrale	5
2	Matrices orthogonales	5
2.1	Définitions	5
2.1.1	Définition	5
2.1.2	Définition (<i>matrice positive, définie positive</i>)	6
2.1.3	Propriété	6
2.2	Matrices orthogonales	6
2.2.1	Définition (<i>matrice orthogonale</i>)	6
2.2.2	Caractérisation des matrices orthogonales	6
2.2.3	Corollaire	7
2.2.4	Caractérisation (par les matrices de passage)	7
2.3	Groupe orthogonal	7
2.3.1	Définition (<i>groupe spécial orthogonal</i>)	7
2.3.2	Propriété	7
2.3.3	Définition (<i>matrice directe, indirecte</i>)	8
2.3.4	Proposition (morphisme de $[\mathbb{R}, +]$ dans $[SO(2), \times]$)	8
2.3.5	Corollaires	8
2.4	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	8
2.4.1	Définition (cas général)	8
2.4.2	Propriétés (orientation d'un espace euclidien)	9
2.5	Théorème spectral matriciel	9

2.5.1	Définition (<i>matrices orthogonalement semblables</i>)	9
2.5.2	Théorème spectral matriciel	9
3	Isométries vectorielles	10
3.1	Définitions	10
3.1.1	Définition (<i>isométrie vectorielle</i>)	10
3.1.2	Propriété (<i>symétries orthogonales</i>)	10
3.2	Caractérisation	10
3.3	Groupe orthogonal	10
3.3.1	Propriété (<i>déterminant d'une isométrie</i>)	10
3.3.2	Définition	11
3.3.3	Propriété (structure de groupe)	11
3.3.4	Définition (<i>isométrie directe, indirecte</i>)	11
3.3.5	Propriété	11
3.3.6	Propriété (<i>rotation vectorielle d'un plan euclidien</i>)	11
3.4	Réduction	12
3.4.1	Propriété (stabilité)	12
3.4.2	Théorème de réduction d'une matrice orthogonale	12
3.4.3	Théorème de réduction des isométries	12

Dans tout ce qui suit, on pose $[E, \langle \cdot | \cdot \rangle]$ un espace euclidien.

1 Adjoint d'un endomorphisme

1.1 Adjoint

1.1.1 Définition (*Endomorphisme adjoint*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors

$$\exists! u^* \in E^E \mid \forall x, y \in E, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$

On appelle alors u^* l'(endomorphisme) *adjoint* de u .

1.1.2 Propriété (*Linéarité de l'adjoint*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors

$$u^* \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$$

1.1.3 Propriétés

- L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \\ u & \longmapsto & u^* \end{array}$$

est linéaire et involutive (*i.e* $\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E), (u^*)^* = u$)

- $\forall u, v \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E), (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$
- $\text{id}_E^* = \text{id}_E$
- $\forall u \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(E), u^* \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(E), \text{ et } (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

1.1.4 Proposition (stabilité)

Soit F un sous espace vectoriel de E , et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid u(F) \subset F$.

Alors

$$u^*(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$$

1.1.5 Proposition (lien avec les matrices)

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{\top}$$

1.2 Endomorphisme autoadjoint

1.2.1 Définition (*Endomorphisme autoadjoint*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors u est dit *autoadjoint* si et seulement si

$$u = u^*$$

i.e si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$$

On note alors

$$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid u = u^*\}$$

1.2.2 Caractérisation matricielle

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors

$$u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^{\top}$$

1.2.3 Corollaire

$\mathcal{S}(E)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, avec :

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{(\dim E)(1 + \dim E)}{2}$$

1.2.4 Théorème spectral

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, et $n = \dim E$.

Alors :

$$\begin{aligned} & u \in \mathcal{S}(E) \\ \Leftrightarrow & E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u)}^{\perp} E_{\lambda}(u) \\ \Leftrightarrow & \exists \mathcal{B} = (e_k)_{k \in [1 ; n]} \subset \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \mid \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \end{aligned}$$

1.2.5 Définition (*autoadjoint positif, défini positif*)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

Alors u est dit :

- *positif* si il vérifie

$$\forall x \in E, \langle u(x) | x \rangle \geq 0$$

- *défini positif* si il vérifie

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x) | x \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E, \begin{cases} \langle u(x) | x \rangle \geq 0 \\ \langle u(x) | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

On définit alors les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^+(E) &= \{u \in \mathcal{S}(E) \mid \forall x \in E, \langle u(x) | x \rangle \geq 0\} \\ \mathcal{S}^{++}(E) &= \{u \in \mathcal{S}(E) \mid \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x) | x \rangle > 0\} \end{aligned}$$

1.2.6 Proposition

Les ensembles $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ sont convexes (mais ne sont pas des espaces vectoriels).

1.2.7 Caractérisation spectrale

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

Alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}^+(E) &\Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \mathbb{R}_+ \\ u \in \mathcal{S}^{++}(E) &\Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

2 Matrices orthogonales

2.1 Définitions

2.1.1 Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note alors

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

l'ensemble des matrices symétriques.

2.1.2 Définition (*matrice positive, définie positive*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit alors que A est :

- *positive* si elle vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \underbrace{X^\top A X}_{\in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}} \geq 0$$

- *définie positive* si elle vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^\top A X > 0$$

On définit alors les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ positive}\} \\ \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ définie positive}\} \end{aligned}$$

2.1.3 Propriété

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , $n = \dim E$, et $u \in \mathcal{S}(E)$.

Alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}^+(E) &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \\ u \in \mathcal{S}^{++}(E) &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2.2 Matrices orthogonales

2.2.1 Définition (*matrice orthogonale*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (carrée !).

Alors A est dite *orthogonale* si et seulement si

$$A^\top A = I_n$$

On note alors

$$O_n(\mathbb{R}) = O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}$$

2.2.2 Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(C_k)_{k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket}$ les colonnes de A , et $(L_k)_{k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket}$ ses lignes.



On a :

$$\begin{aligned}
 A \in O(n) &\Leftrightarrow A^\top A = I_n \\
 &\Leftrightarrow AA^\top = I_n \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A^{-1} = A^\top \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (C_k)_{k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket} \text{ famille (base) libre orthonormée de } \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\
 &\Leftrightarrow (L_k)_{k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket} \text{ famille (base) libre orthonormée de } \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

2.2.3 Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in O(n)$.

Alors

$$\det(A) \in \{\pm 1\}$$

2.2.4 Caractérisation (par les matrices de passage)

Soit \mathcal{B} une base de E .

Alors :

$$\forall A \in O(\dim E), \exists ! \mathcal{B}' \text{ base orthonormée de } E \mid A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

2.3 Groupe orthogonal

2.3.1 Définition (*groupe spécial orthogonal*)

On définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$SO(n) = SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

2.3.2 Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors :

- $O(n)$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe orthogonal* ;
- $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé *groupe spécial orthogonal*.

2.3.3 Définition (*matrice directe, indirecte*)

Soit $A \in O(n)$.

Alors A est dite :

- *directe* si et seulement si

$$A \in SO(n)$$

- *indirecte* si et seulement si

$$A \in O(n) \setminus SO(n)$$

2.3.4 Proposition (morphisme de $[\mathbb{R}, +]$ dans $[SO(2), \times]$)

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow SO(2) \\ t &\longmapsto R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes de $[\mathbb{R}, +]$ dans $[SO(2), \times]$ surjectif, et

$$\ker \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$$

2.3.5 Corollaires

- Le groupe $SO(2)$ est commutatif.

- L'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{U} &\longrightarrow SO(2) \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} \Re(z) & -\Im(z) \\ \Im(z) & \Re(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes de $[\mathbb{U}, \times]$ dans $[SO(2), \times]$.

2.4 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

2.4.1 Définition (cas général)

Soit E' un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Alors *Orienter* E' signifie choisir une base \mathcal{B} de E' qui servira de référence : \mathcal{B} définit le *sens direct*.

De plus, $\forall \mathcal{B}'$ base de E' ,

- soit \mathcal{B}' est *directe*, lorsqu'elle vérifie

$$\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$



- sinon, i.e si

$$\det(\mathcal{P}_B^{\mathcal{B}'}) = \det_B(\mathcal{B}') < 0$$

alors \mathcal{B}' est dite *indirecte*.

2.4.2 Propriétés (orientation d'un espace euclidien)

- Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E (espace euclidien), et $n = \dim E$.

Alors \mathcal{B} et \mathcal{B}' définissent la même orientation de E si et seulement si

$$\mathcal{P}_B^{\mathcal{B}'} \in SO(n)$$

- Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases directes de E .

Alors

$$\det_B = \det_{B'}$$

On note parfois Det cette application.

- Soit H un hyperplan de E .

Alors on peut orienter H en choisissant une normale \vec{n} de H , i.e un $\vec{n} \in E \mid \{\vec{n}\}^\perp = H$.

Une base \mathcal{B}_H de H est directe si et seulement si la base (\mathcal{B}_H, \vec{n}) de E est directe.

2.5 Théorème spectral matriciel

2.5.1 Définition (*matrices orthogonalement semblables*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors A et B sont dites *orthogonalement semblables* si, et seulement si

$$\exists P \in O(n) \mid A = P^{-1}BP = P^\top BP$$

Remarques :

- Comme $O(n)$ est un groupe, la relation « être semblable » définit une relation d'équivalence.
- Deux matrices sont orthogonalement semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases orthonormées.

2.5.2 Théorème spectral matriciel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors :

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists P \in O(n) \mid P^{-1}AP = P^\top AP \text{ diagonale}$$

3 Isométries vectorielles

3.1 Définitions

3.1.1 Définition (*isométrie vectorielle*)

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Alors f est une *isométrie vectorielle* si et seulement si elle conserve la norme, i.e si et seulement si

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

3.1.2 Propriété (*symétries orthogonales*)

Les symétries orthogonales de E , donc en particulier les réflexions de E (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) sont des isométries vectorielles.

3.2 Caractérisation

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, et $n = \dim E$.

Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \mid u(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée} \\ &\Leftrightarrow \forall \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E, u(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u \in \text{GL}(E) \\ u^{-1} = u^* \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u^* \circ u = \text{id}_E \\ &\Leftrightarrow u^* \circ u = u \circ u^* = \text{id}_E \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n) \\ &\Leftrightarrow \forall \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n) \end{aligned}$$

3.3 Groupe orthogonal

3.3.1 Propriété (*déterminant d'une isométrie*)

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ une isométrie.

Alors

$$\det(f) \in \{\pm 1\}$$



3.3.2 Définition

On définit les ensembles :

$$\begin{aligned} O(E) &= \{f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|\} \\ SO(E) &= \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\} \end{aligned}$$

3.3.3 Propriété (structure de groupe)

- L'ensemble $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé *groupe orthogonal* de E .
- L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal*.

3.3.4 Définition (*isométrie directe, indirecte*)

Soit $u \in O(E)$.

Alors u est dite :

- *directe* (on dit aussi que u est une rotation) si et seulement si

$$\det(u) = 1 \Leftrightarrow u \in SO(E)$$

- *indirecte* sinon, i.e si et seulement si

$$\det(u) = -1 \Leftrightarrow u \in O(E) \setminus SO(E)$$

3.3.5 Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et $R_\theta, S_\theta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$\begin{aligned} R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ S_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} SO(2) &= \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ O(2) \setminus SO(2) &= \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3.3.6 Propriété (*rotation vectorielle d'un plan euclidien*)

Soit $[P, \langle \cdot \mid \cdot \rangle]$ un plan euclidien (donc $\dim P = 2$), et $r \in SO(P)$, i.e r est une rotation de P .

Alors

$$\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases orthonormées de } P, \text{ Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(r)$$

et, avec \mathcal{B} une base orthonormée de P ,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec θ unique modulo 2π .

3.4 Réduction

3.4.1 Propriété (stabilité)

Soit F un sous espace vectoriel de E , et $u \in O(E)$ une isométrie.

Alors :

$$u(F) \subset F \Rightarrow u(F^\perp) \subset F^\perp$$

3.4.2 Théorème de réduction d'une matrice orthogonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall A \in O(n), \left\{ \begin{array}{l} \exists P \in O(n) \\ \exists r, p, q \in \mathbb{N} \\ \exists (\theta_k)_{k \in \llbracket 1 ; q \rrbracket} \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^q \end{array} \right. \text{ tels que}$$

$$A = P^{-1} \left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{cc} R_{\theta_1} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & R_{\theta_q} \end{array} \end{array} \right) P$$

où $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

3.4.3 Théorème de réduction des isométries

Soit $u \in O(E)$ une isométrie.

Alors :

$$\exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E \left\{ \begin{array}{l} \exists r, p, q \in \mathbb{N} \\ \exists (\theta_k)_{k \in \llbracket 1 ; q \rrbracket} \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^q \end{array} \right. \text{ tels que}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{cc} R_{\theta_1} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & R_{\theta_q} \end{array} \end{array} \right)$$

où $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$