Maths : Développements limités

Contents

1 Définitions

1.1 Développement limité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^{D_f}$, avec $D_f = I$ ou $D_f = I \setminus \{x_0\}$.
La fonction f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n, noté $DL_n(x_0)$, si :

$$\left| \begin{array}{l} \exists (a_k)_{k \in [\![0\ ;\ n]\!]} \subset \mathbb{R} \\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{D_f} \mid \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \end{array} \right.$$

tels que :

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

1.2 Partie régulière

Si f admet un $DL_n(x_0)$

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

on appelle *partie régulière* le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X - x_0)^k$$

1.3 Forme normalisée

Soit f une fonction admettant un $DL_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

tel que $\exists k \in [\![0\ ;\ n]\!] \mid a_k \neq 0$.

Soit $p \in [\![0\ ;\ n]\!]$ $\left| \begin{array}{l} a_p \neq 0 \\ \forall k \in [\![0\ ;\ p-1]\!],\ a_k = 0 \end{array} \right.$

Alors la *forme normalisée* du développement limité de f est :

$$f(x) = (x - x_0)^p \left(\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^{k-p} + o(x - x_0)^{n-p} \right)$$

2 Propriétés

2.1 Troncature

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ admetant un $DL_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

Alors $\forall p \leqslant n$, f admet un $DL_p(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^p$$

2.2 DL_0 et limite / continuité

La fonction f admet un $DL_0(x_0)$

$$f(x) = a_0 + o(1)$$

si, et seulement si

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a_0$$

Donc une fonction qui admet un $DL_n(x_0)$ est soit continue, soit prolongeable par continuité en x_0, et dans ce cas,

$$a_0 = f(x_0)$$

2.3 DL_1 et dérivabilité

La fonction f admet un $DL_1(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

si, et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$$

2.4 Parité

Si f est paire (resp. impaire) et admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est paire (resp. impaire).

2.5 Somme, produit

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ deux fonctions admettant des $DL_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n$$

La fonction $f+g$ admet un $DL_n(x_0)$:

$$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n$$

La fonction fg admet un $DL_n(x_0)$:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n$$

La fonction $x \longmapsto (f(x))^s$, pour $s \in \mathbb{N}^*$, admet un $DL_n(x_0)$:

$$(f(x))^s = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k\right)^s + o(x-x_0)^n$$

où l'on tronque la puissance s-ième de la partie régulière à l'ordre n.

Remarque : Si f admet un $DL_n(x_0)$ et g admet un $DL_m(x_0)$, alors $f+g$ admet seulement un $DL_{\min(n,m)}(x_0)$.
De plus, si leur forme normalisée est

$$f(x) = (x-x_0)^p\left(\sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{n-p}\right)$$

$$g(x) = (x-x_0)^q\left(\sum_{k=0}^{m-q} b_{k+q}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{n-q}\right)$$

alors fg admet un $DL_{p+q+\min(n-p,m-q)}(x_0)$, qui est :

$$f(x)g(x) = (x-x_0)^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{\min(n-p,m-q)}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{i+p} b_{k-(i+q)}\right)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{\min(n-p,m-q)}\right)$$

2.6 Quotient de développements limités

2.6.1 Propriété

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction admettant un $DL_n(0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

et telle que $f(0) = 0$.

Alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1 - f(x)}$ admet un $DL_n(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-f(x)} &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j \right)^i + o(x^n) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} a_i x^i \right)^k + o(x^n) \end{aligned}$$

où les puissances de x sont tronquées à l'ordre n.

2.6.2 Quotient

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ admettant un $DL_n(0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

et telle que $f(0) \neq 0$.

Alors $\dfrac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$. En effet :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)\dfrac{f(x)}{f(0)}} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{f(x)}{f(0)}\right)}$$

En posant $h(x) = 1 - \dfrac{f(x)}{f(0)}$, on a $h(0) = 0$, et on utilise 2.6.1.

2.7 Composition

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ deux fonction admettant un $DL_n(0)$

$$f(x) = \sum_{k=}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

avec $g(0) = 0$.

Alors la fonction $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ obtenu en composant les parties régulières des $DL_n(0)$ de f et g en tronquant à l'ordre n :

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{n-k+1} b_i x^i \right)^k + o(x^n)$$

2.8 Intégration

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ une fonction admettant un $DL_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

Alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(x_0)$

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o(x - x_0)^{n+1}$$

2.9 Formule de Taylor-Young

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction n-fois dérivable sur I, et $x_0 \in I$.
Alors f admet un $DL_n(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

3 Développements limités des fonctions usuelles en 0

$\forall x \in]-1;1[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} x^n$$

donc :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x}{1-x} x^n$$

or $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \qquad \text{par intégration de } \frac{1}{1+x} \\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{par intégration de } \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Puis par le théorème de Taylor :

$$
\begin{array}{rcll}
e^x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) & \\
\mathrm{ch}(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) & \text{partie paire de } e^x \\
\mathrm{sh}(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) & \text{partie impaire de } e^x \\
\cos(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) & \text{car } \cos(x) = \mathrm{ch}(ix) \\
\sin(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) & \text{car } \sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i} \\
\mathrm{th}(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6) & \text{par quotient} \\
\tan(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6) & \text{par quotient} \\
(1+x)^a & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (a-i) \right) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) & \text{par Taylor } (a \in \mathbb{R}) \\
\sqrt{1+x} & = & 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3) & \\
\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} + i \right) \right) \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^{2n}) & \\
\arcsin(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} + i \right) \right) \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} + o(x^{2n+1}) & \text{par intégration de } \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arccos(x) & = & \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} + i \right) \right) \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} + o(x^{2n+1}) & \text{par intégration de } \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{array}
$$

4 Applications

4.1 Position par rapport à une tangente

Soient $x_0 \in I,\ f \in \mathbb{R}^I \cap \mathcal{D}(\{x_0\}),\ p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2$.

Si f admet un $DL_p(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o(x - x_0)^p, \quad (a_0, a_1, a_p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Alors :

- Si $a_p(x-x_0)^p > 0,\ (x,\ f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
- Si $a_p(x-x_0)^p < 0,\ (x,\ f(x))$ est en-dessous de la tangente.

4.2 Étude d'un extremum local

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $I =]a, b[$, $f \in \mathcal{D}(I)$, $x_0 \in I$, $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$.

Si $f'(x_0) = 0$ et si f admet un $DL_p(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_p(x-x_0)^p + o(x-x_0)^p, \quad (a_0, a_p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Alors :

- Si $p \equiv 1\ [2]$, $f(x_0)$ n'est pas un extremum ;
- Si $p \equiv 0\ [2]$:
  - Si $a_p > 0$, $f(x_0)$ est un minimum local ;
  - Si $a_p < 0$, $f(x_0)$ est un maximum local.

4.3 Étude d'asymptotes

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$ et admettant une limite en $\pm\infty$, et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*,\ p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2$.

Si, pour $u > 0$ (resp. $u < 0$), on a au voisinage de 0^+ (resp 0^-) :

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = a + bu + cu^p + \underset{0}{o}(u^p)$$

Alors on a au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^{p-1}} + \underset{\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$$

et f admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote d'équation

$$y = ax + b$$

et la position de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{c}{x^{p-1}}$

5 Développements asymptotiques

5.1 Définition

Les développements asymptotiques sont une généralisation des développements limités : la "partie régulière" n'est pas forcément une fonction polynomiale, mais une somme finie de fonctions de référence, négligeables les unes devant les autres, qui donne une bonne approximation du comportement de la fonction dans le voisinage considéré.

Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction définie au voisinage de x_0.
On cherche une fonction de référence g_1 telle que

$$f \underset{x_0}{\sim} g_1 \;\Leftrightarrow\; f = g_1 + \underset{x_0}{o}(g_1)$$

On cherche ensuite une fonction de référence g_2 telle que

$$f - g_1 \underset{x_0}{\sim} g_2 \;\Leftrightarrow\; f = g_1 + g_2 + \underset{x_0}{o}(g_2)$$

On continue ainsi si possible, et on appelle alors le développement asymptotique à n termes de f l'expression :

$$f = \sum_{k=1}^{n} g_k + o(g_n)$$

5.2 Exemples

1) Soit $f(x) = (x\mathrm{e})^x = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{x\ln x}$. On a, au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$$

avec $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Donc pour $u(x) = x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{x\ln x} = 1 + x\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2} + (x\ln x)^2\varepsilon(x\ln x)$$

Donc

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\left(1 + x\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2} + (x\ln x)^2\varepsilon(x\ln x)\right)$$

Or $x^2 = \underset{0}{o}(x^2\ln^2 x)$, donc la précision maximale est en $o(x^2\ln^2 x)$, et on obtient :

$$f(x) = 1 + x\ln x + x + \frac{x^2\ln^2 x}{2} + o(x^2\ln^2 x)$$

On en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$, le graphe du prolongement par continuité de f en 0 admet une tangente verticale car

$$\frac{f(x)-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

et le graphe de f est au-dessus de celui de $x \longmapsto 1 + x\ln x$ au voisinage de 0^+ car

$$f(x) - (1 + x\ln x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x \geqslant 0$$

2) Soit u_n l'unique solution dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\ ;\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan(x) = x$.

- Par le théorème d'encadrement, $\boxed{u_n \sim n\pi}$.
- Soit $v_n = u_n - n\pi$. On a $\tan(v_n) = \tan(u_n) = u_n$. Mais $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, donc $v_n = \arctan(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $\boxed{v_n \sim \frac{\pi}{2}}$
- Soit $w_n = v_n - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors :

$$w_n \sim \tan(w_n) = -\frac{1}{\tan(v_n)} \sim -\frac{1}{n\pi}$$

Et finalement :

$$\boxed{u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$