Maths : Applications linéaires

Contents

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps, et E, F désignent des K-espaces vectoriels.

1 Applications linéaires

1.1 Premières définitions et propriétés

1.1.1 Définition (*Application linéaire*)

Une *application linéaire* de E vers F est une application $f \in F^E$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de F^E.

1.1.2 Définition (*endomorphisme*)

Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E^E.
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

1.1.3 Définition (*forme linéaire, dual*)

Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de K^E.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E, aussi appelé le *dual* de E.

1.1.4 Caractérisation des applications linéaires

Soit $f \in F^E$.
On a :

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \;\Leftrightarrow\; \forall ((x, y), (\lambda, \mu)) \in E^2 \times K^2,\; f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Ou plus simplement :

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \;\Leftrightarrow\; \forall ((x, y), \lambda) \in E^2 \times K,\; f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

1.1.5 Propriétés

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- On a :

$$f(0) = 0.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $(x_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset E$, et $(\lambda_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset K$.
Alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

1.2 Combinaisons linéaires et composition d'applications linéaire

1.2.1 Propriété

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, *i.e* :

$$\forall((f,g),(\lambda,\mu)) \in (\mathcal{L}(E,F))^2 \times K^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$$

1.2.2 Composition d'applications linéaires

Soient E, F, G des K-espaces vectoriels, et $\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ g \in \mathcal{L}(F,G) \end{array} \right.$

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

1.2.3 Propriété (*anneau des endomorphismes*)

$(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau.

Remarques :

– On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f^{n-1} \circ f$, avec $f^0 = \mathrm{id}$.

– $\left(E^E,+,\circ\right)$ n'est pas un anneau : pour la distributivité à gauche, il faut la linéarité des fonctions.

1.3 Isomorphismes, automorphismes

1.3.1 Définition (*isomorphisme*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors f est un *isomorphisme* de E vers F si elle est bijective.

1.3.2 Définition (*automorphisme*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f est un *automorphisme* de E si elle est bijective, *i.e* un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

1.3.3 Définition (*Espaces isomorphes*)

Soient E, F deux K-espaces vectoriels.
Alors E et F sont isomorphes si et seulement si

$$\exists f \in F^E \mid f \text{ isomorphe}$$

1.3.4 Propriété (*linéarité de la réciproque d'un isomorphisme*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.
Alors :

$$f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$$

1.3.5 Propriété

Soit E un K-espace vectoriel.
Alors $GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$, et $(GL(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(S_E, \circ)$.

2 Noyau et image

2.1 Définitions

2.1.1 Définition (*Noyau*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Le *noyau* de f est l'ensemble

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) = 0_F \right\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

2.1.2 Définition (*Image*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'*image* de f est l'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \left\{ y \in F \;\middle|\; \exists x \in E \mid y = f(x) \right\}$$

2.1.3 Propriétés

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On a :

$$0_E \in \operatorname{Ker}(f)$$
$$0_F \in \operatorname{Im}(f)$$

- $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2.1.4 Théorème (*CNS d'injectivité et de surjectivité*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors :

$$\begin{array}{lll} f \text{ injective} & \Leftrightarrow & \operatorname{Ker}(f) = \{0\} \\ f \text{ surjective} & \Leftrightarrow & \operatorname{Im}(f) = F \end{array}$$

2.2 Propriétés sur les noyaux et les images

2.2.1 Propriété (*composition*)

Soient E, F, G des K-espaces vectoriels, et $\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ g \in \mathcal{L}(F,G) \end{array} \right.$.

Alors :

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)) = g(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Im}(f)}\right)$$

2.2.2 Propriétés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On a :

$$\operatorname{Im}\left(f^2\right) \subset \operatorname{Im}(f)$$
$$\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$$

- On a :

$$f^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$$

2.2.3 Propriété (*noyau d'une restriction*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et soit G un sous-espace vectoriel de E.
On a :

$$\operatorname{Ker}(f_{|G}) = \operatorname{Ker}(f) \cap G$$

2.2.4 Propriété (*antécédents par une application linéaire*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $y_0 \in \mathrm{Im}(f)$.
Soit alors $x_0 \in E \mid y_0 = f(x_0)$.
Alors :

$$\{x \in E \mid y_0 = f(x)\} = x_0 + \mathrm{Ker}(f) = \{x_0 + v \mid v \in \mathrm{Ker}(f)\}$$

(c'est l'ensemble des antécédents de y_0 par f).
I.e pour $x \in E$, $y_0 = f(x) \iff f(x) - y_0 = 0 \iff f(x) - f(x_0) = 0 \iff f(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$

3 Image de familles par une application linéaire

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble d'indexation.

3.1 Propriété

Soit $(e_k)_{k\in I} \subset E$ une famille de E, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors

$$u(\mathrm{vect}(e_k)_{k\in I}) = \mathrm{vect}(u(e_k))_{k\in I}$$

3.2 Corollaire

Soit $(e_k)_{k\in I} \subset E \mid E = \mathrm{vect}(e_k)_{k\in I}$ (*i.e* une famille génératrice de E), et soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors :

- La famille $(u(e_k))_{k\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$, *i.e* :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_k))_{k\in I}$$

- u surjective $\iff F = \mathrm{vect}(u(e_k))_{k\in I}$

3.3 Propriétés

Soit $\mathcal{F} = (e_k)_{k\in I} \subset E$, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ est libre} \\ u \text{ est injective} \end{cases}$, alors la famille $(u(e_k))_{k\in I}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors :

$$u \text{ injective} \iff (u(e_k))_{k\in I} \text{ libre}$$

3.4 Corollaire

Soit $(e_k)_{k\in I} \subset E$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors u est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ $(u(e_k))_{k\in I}$ est une base de F.

3.5 Théorème de prolongement par linéarité

Soit $(e_k)_{k\in I} \subset E$ une base de E.
Alors :

$$\forall (f_k)_{k\in I} \subset F,\ \exists!\, u \in \mathcal{L}(E,F) \mid \forall k \in I,\ u(e_k) = f_k$$

4 Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que le K-espace vectoriel E est de dimension finie non nulle, et on note $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. De plus, I désigne un ensemble d'indexation.

4.1 Image de familles libres, génératrices, bases

4.1.1 Propriétés

Soit $\mathcal{F} = (e_k)_{k\in I} \subset E$, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si u est injective, alors

$$\dim(E) \leqslant \dim(F)$$

De plus, si $\mathcal{F}$ est libre, alors $u(\mathcal{F}) = (u(e_k))_{k\in I}$ est libre.

- Si u est surjective, alors

$$\dim(E) \geqslant \dim(F)$$

De plus, si $E = \mathrm{vect}(\mathcal{F})$, alors $F = \mathrm{vect}(u(\mathcal{F}))$.

- Si u est bijective, alors

$$\dim(E) = \dim(F)$$

De plus, si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors $u(\mathcal{F})$ est une base de F.

4.1.2 Théorème (*CNS d'injectivité, de surjectivité, et de bijection*)

Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in [\![1\ ;\ n]\!]} \subset E$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- La fonction u est injective $\Leftrightarrow$ $u(\mathcal{B})$ est libre.
- La fonction u est surjective $\Leftrightarrow$ $F = \mathrm{vect}(u(\mathcal{B}))$.
- La fonction u est bijective $\Leftrightarrow$ $u(\mathcal{B})$ est une base de F.

4.1.3 Théorème de prolongement par linéarité

Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset E$ une base de E.
Alors

$$\forall (v_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset F,\ \exists!\, \varphi \in \mathcal{L}(E,F) \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ v_k = \varphi(e_k)$$

De plus, pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$ (où $(x_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset K$), on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

En particulier, pour $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, on a :

$$f = g \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ f(e_k) = g(e_k)$$

4.1.4 Corollaire

Soit G un K-espace vectoriel.
Alors G est isomorphe à E $\Leftrightarrow$ $\dim(G) = n < +\infty$

4.2 Théorème du rang

4.2.1 Définition (*rang*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Le *rang* de f, noté $\mathrm{rang}(f)$ ou $\mathrm{rg}(f)$, est :

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

4.2.2 Propriétés

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $(e_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \subset E$ une base de E.

- On a :

$$\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f(e_k))_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$$

- On a :

$$\mathrm{rang}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$$

4.2.3 Propriété (*CNS d'injectivité et de surjectivité avec le rang*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On a :
- f est injective $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(f) = \dim(E)$
- f est surjective $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(f) = \dim(F)$

4.2.4 Propriétés (*conservation du rang par les injections / surjections*)

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels de dimension finie, et $\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E, F) \\ g \in \mathcal{L}(F, G) \end{array} \right.$.
Alors :
- Si f est surjective, on a :

$$\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g)$$

- Si g est injective, on a :

$$\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(f)$$

4.2.5 Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On a :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f)$$

4.2.6 Théorème

Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie tels que

$$\dim(E) = \dim(F),$$

et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a alors :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$