

# Chapitre 15 : Compléments de logique

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notion formelle de démonstration</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.1.1	Motivation . . . . .	2
1.1.2	Syllogismes . . . . .	2
1.1.3	Vers la logique moderne . . . . .	2
1.2	Définitions . . . . .	3
1.2.1	Rappels ( <i>cf</i> chapitre 5, 2.1) . . . . .	3
1.2.2	Remarque . . . . .	3
1.2.3	Séquents . . . . .	4
1.2.4	Arbre de preuve . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Dédution naturelle</b>	<b>6</b>
2.1	Règles de la déduction naturelle . . . . .	6
2.1.1	Remarque . . . . .	6
2.1.2	Dédution naturelle intuitionniste, cas propositionnel . . . . .	6
2.1.3	Dédution naturelle classique, cas propositionnel . . . . .	8
2.1.4	Dédution naturelle pour la logique du premier ordre . . . . .	9
2.2	Théorème de complétude . . . . .	10
2.2.1	Introduction . . . . .	10
2.2.2	Théorème (correction de la déduction naturelle, cas propositionnel) . . . . .	10
2.2.3	Théorème (complétude de la déduction naturelle, cas propositionnel) . . . . .	11

# 1 Notion formelle de démonstration

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Motivation

Nous avons vu dans le chapitre 8 la syntaxe des formules logiques, *i.e* un cadre formel pour énoncer des faits, et une sémantique pour les formules propositionnelles, *i.e* une définition de la vérité permettant donc de distinguer les faits avérés des énoncés erronés. La notion de sémantique ne permet pas de formaliser la notion de raisonnement. La définition d'un système formel de démonstration permet de résoudre ce problème en donnant des règles qui autorisent à déduire un énoncé, appelé *conclusion*, d'autres énoncés, appelés *hypothèses*.

### 1.1.2 Syllogismes

Les travaux logiques visant à formaliser la notion de démonstration remontant à l'antiquité, en particulier avec les travaux d'ARISTOTE (IV<sup>ème</sup> siècle avant J.C) qui sont restés particulièrement importants dans le monde scientifique.

Au cœur de ses travaux se trouve la notion de *syllogisme* qui est une manière très codifiée de représenter la notion de déduction.

Les syllogismes sont des règles qui permettent de déduire des faits d'autres faits.

Exemple : SOCRATE est un homme, tous les hommes sont mortels, donc SOCRATE est mortel.

Certains syllogismes sont assez importants pour avoir un nom. Par exemple :

- Le *modus ponens*, qui caractérise la notion d'implication : si on a établi les faits  $A \rightarrow B$  et  $A$ , alors on peut déduire  $B$ .
- Le syllogisme *barbara*, qui permet de combiner des implications : si on a établi les faits  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$ , alors on peut déduire  $A \rightarrow C$ .

Ce n'est que vers la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle que la logique connaît une forte évolution grâce à la volonté de donner des fondements rigoureux aux mathématiques (*cf* le programme de HILBERT)

### 1.1.3 Vers la logique moderne

C'est Gottlob FREGE qui débloquent le monde de la logique en établissant formellement la logique des prédicats (*cf* chapitre 8 2.2.) et en proposant la première formalisation de la théorie des ensembles, plus tard invalidée par Bertrand RUSSELL avec le paradoxe de RUSSELL : l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contient pas se contient-il ?

C'est en 1934 que Gerhard GENTZEN publie un système de règles de déduction visant à donner un système proche de la pratique mathématique des démonstrations : la *déduction naturelle*.



Son approche repose sur le fait qu'à tout moment dans une démonstration, on a un ensemble de faits (hypothèses ou faits intermédiaires déjà démontrés), et un énoncé que l'on cherche à démontrer (ou conclusion).

En notant  $\text{hyp}_1, \dots, \text{hyp}_n \vdash \text{concl}$  l'assertion : « je peux déduire la conclusion *concl* des hypothèses  $\text{hyp}_1, \dots, \text{hyp}_n$  », le système de la déduction naturelle fournit des règles décrivant l'évolution de ces assertions (donc des ensembles d'hypothèses et de conclusion) au cours d'un raisonnement mathématique.

Remarque : l'assertion  $\Gamma \vdash A$  représente une forme de conséquence logique, d'où le choix d'un symbole proche de celui de la conséquence sémantique ( $\Gamma \models A$ , cf chapitre 8, 3.2.3).

## 1.2 Définitions

### 1.2.1 Rappels (cf chapitre 5, 2.1)

- Définition (*système de règles d'inférences*) : Un système de règles d'inférences est constitué d'un ensemble d'assertions et de *règles d'inférences* utilisées pour démontrer ces assertions.

Une *règle d'inférence* est l'association d'un ensemble fini d'assertions appelées prémisses de la règle, et d'une assertion, appelée *conclusion* de la règle.

Une telle règle est notée ainsi :

$$\frac{\text{prémisse}_1 \quad \dots \quad \text{prémisse}_n}{\text{concl}}$$

Une règle sans prémisse est appelée *axiome*.

- Définition (*dérivation*) : étant donné un système de règles d'inférences, une assertion est dite *dérivable* si et seulement si elle est la conclusion d'un axiome ou d'une règle dont les prémisses sont dérivables.

Cette définition inductive permet de définir la notion d'*arbre de dérivation* : une dérivation de l'assertion  $A$  est un arbre étiqueté par des règles d'inférence telles que  $A$  est la conclusion de l'étiquette de la racine, les feuilles sont étiquetées par des axiomes, et pour tout nœud interne, les prémisses de son étiquette sont les conclusions des étiquettes des ses fils.

### 1.2.2 Remarque

Nous avons vu que la notion de système de règles d'inférences permet de définir des ensembles par induction, comme par exemple l'ensemble des formules de la logique propositionnelle (cf chapitre 8, 2.1.2), et qu'il est possible de raisonner par induction sur de tels ensembles (cf chapitre 5 2.2).

La notion de dérivation étant elle-même définie inductivement, on peut raisonner par induction structurelle sur les dérivations (cf chapitre 14, 1.3.6 par exemple).

### 1.2.3 Séquents

- Définition (*séquent*) : On note  $F$  l'ensemble des formules logiques (propositionnelles, ou du premier ordre, ou autre).

On appelle *séquent* tout couple  $(\Gamma, A) \in \mathcal{P}_f(F) \times F$  (où  $\mathcal{P}_f(F)$  : parties finies de  $F$ ).

Un séquent  $(\Gamma, A)$  est noté  $\Gamma \vdash A$ .

On appelle  $\Gamma$  l'ensemble des hypothèses du séquent, et  $A$  la conclusion du séquent.

- Exemples :

- Le *modus ponens*,  $A \rightarrow B, A \vdash B$  ;
- Le syllogisme barbara,  $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

- Remarques :

- Un séquent est une assertion qui représente le fait que sa conclusion est une conséquence logique de ses hypothèses, donc on peut s'en servir pour définir un système de règles d'inférence.
- On parle de séquent *asymétrique*, par opposition aux séquents *symétriques*, de la forme  $\Gamma \vdash \Delta$ , où  $\Delta$  est un ensemble fini de formules, qui représentent le fait que la disjonction des formules de la conclusion est une conséquence logique de la conjonction des hypothèses du séquent.

Remarque :

$$A_1 \cdots A_n \vdash B_1 \cdots B_n$$

peut être vu comme

$$A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, B_n \vdash \perp$$

GENTZEN a publié, également en 1934, un système de règles d'inférence pour les séquents symétriques, appelé *calcul des séquents*, et on a montré l'équivalence des deux systèmes.

### 1.2.4 Arbre de preuve

- Définition (*règle d'inférence*) : une règle d'inférence pour la déduction naturelle ou pour tout autre système basé sur les séquents asymétriques est une règle d'inférence au sens de 1.2.1 (page 3), utilisant les séquents comme assertions. C'est donc une règle de la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

Accessoirement, on peut utiliser comme assertion l'appartenance d'une formule aux hypothèses ( $A \in P$ ) en l'appartenance d'une variable à l'ensemble des variables libres d'un ensemble de formules ( $x \in \text{FV}(\Gamma)$ , cf chapitre 8, 2.2.6).



- On peut écrire l'« axiome »  $\frac{A \in P}{\Gamma \vdash A}$  ou bien la règle dite *de coupure*

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

qui représente l'introduction d'un lemme intermédiaire au cours d'une démonstration.

- Définition (*arbre de preuve*) : un arbre de preuve / arbre de dérivation / dérivation / démonstration d'un séquent  $\Gamma \vdash A$  est un arbre de dérivation au sens de 1.2.1 (page 3), de conclusion le séquent  $\Gamma \vdash A$ .

On dit alors que  $\Gamma \vdash A$  est *démontrable* / *dérivable*.

- Exemple : on se donne comme règles d'inférence une réécriture du *modus ponens*

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

On suppose donnés des arbres de preuve  $T$  et  $T'$  des séquents  $\Gamma, A \vdash B$  et  $\Gamma \vdash A$  et on construit l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Remarque : on reconnaît la règle de coupure. On dit alors que la règle de coupure est dérivable dans le système de règles d'inférence que l'on s'est donné.

Plus généralement, une règle

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

est dite dérivable si l'on peut utiliser les règles du système pour prolonger la dérivation de  $\Gamma_1 \vdash A_1 \dots \Gamma_n \vdash A_n$  en une dérivation de  $\Gamma \vdash A$ .

Plus généralement encore, une règle

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

est dite *admissible* (H.P) si, dès lors que  $\Gamma_1 \vdash A_1 \dots \Gamma_n \vdash A_n$  sont dérivables, on sait que  $\Gamma \vdash A$  l'est aussi.

Les règles dérivables sont admissibles, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Par exemple, la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \subseteq \Gamma'}{\Gamma' \vdash A}$$

est admissible, mais pas dérivable en déduction naturelle.

Démontrer qu'une règle est admissible se fait souvent par induction sur la dérivation de ses prémisses.

## 2 Dédution naturelle

### 2.1 Règles de la déduction naturelle

#### 2.1.1 Remarque

On donne ici un système de règles pour la déduction naturelle, mais il en existe plusieurs.

On présente un système pour des formules logiques dont la syntaxe inclut une tautologie  $\top$  et une antilogie  $\perp$ . L'antilogie est particulièrement utile pour définir les règles de la négation, même si on pourrait s'en passer.

(Remarque : on pourrait se passer de la négation en définissant  $\neg A$  comme  $A \rightarrow \perp$ ).

#### 2.1.2 Dédution naturelle intuitionniste, cas propositionnel

- Les règles de la déduction naturelle se répartissent en trois catégories :
  - L'axiome, seul dans sa catégorie : il n'y a rien à démontrer si la conclusion fait partie des hypothèses ;
  - Les règles d'introduction : elles permettent, pour chaque connecteur logique  $C$ , d'établir les conditions qui permettent de démontrer une conclusion dont le symbole de tête est  $C$  ;
  - Les règles d'élimination : elles permettent, pour chaque connecteur logique  $C$ , d'établir les règles de déduction d'une formule à partir d'une formule dont le connecteur de tête est  $C$ .

- L'axiome :  $\frac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A}$

- Règles de l'implication :

- Introduction : pour démontrer  $A \rightarrow B$ , on suppose  $A$ , et on démontre  $B$  :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_{\text{INTRO}}$$

- Élimination : si on a démontré  $A \rightarrow B$  et  $A$ , on peut déduire  $B$  (*modus ponens*) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_{\text{ÉLIM}}$$

- Règle de la conjonction :

- Introduction : pour démontrer  $A \wedge B$ , on démontre  $A$  et on démontre  $B$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_{\text{intro}}$$

– Élimination : de  $A \wedge B$ , on peut déduire  $A$  ou alors  $B$ , donc deux règles :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_{\text{ÉLIM}_g} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_{\text{ÉLIM}_d}$$

• Règles de la disjonction :

– Introduction : pour démontrer  $A \vee B$ , soit on démontre  $A$ , soit on démontre  $B$  : deux règles :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{\text{INTRO}_g} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{\text{INTRO}_d}$$

– Élimination : si  $A \vee B$  est démontré, on peut faire une disjonction de cas afin de démontrer une autre formule

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_{\text{ÉLIM}}$$

• Règles de la tautologie :

– Introduction :  $\top$  est toujours vraie

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_{\text{intro}}$$

– Élimination : on ne peut rien déduire de la vérité, donc pas de règle.

• Règles de l'antilogie :

– Introduction : on ne doit pas pouvoir démontrer de contradiction : pas de règle.

– Élimination : du faux, on peut tout déduire. C'est le principe d'*explosion* (*ex falso quodlibet* en latin)

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_{\text{ÉLIM}}$$

• Règles de la négation :

– Introduction : pour démontrer  $\neg A$ , on suppose  $A$  et on démontre une contradiction

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_{\text{INTRO}}$$

– Élimination : de  $\neg A$ , on peut déduire une contradiction si on démontre aussi  $A$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_{\text{ÉLIM}}$$

- Exemple de démonstration :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg A, A \vdash \neg A} \text{AX.} \quad \frac{}{\neg A, A \vdash A} \text{AX.} \quad \frac{}{A \rightarrow \perp, A \vdash A \rightarrow \perp} \text{AX.} \quad \frac{}{A \rightarrow \perp, A \vdash A} \text{AX.} \\
\hline
\frac{}{\neg A, A \vdash \perp} \neg\text{ÉLIM} \quad \frac{}{A \rightarrow \perp, A \vdash \perp} \rightarrow\text{ÉLIM} \\
\hline
\frac{}{\neg A \vdash A \rightarrow \perp} \rightarrow\text{intro} \quad \frac{}{A \rightarrow \perp \vdash \neg A} \neg\text{INTRO} \\
\hline
\frac{}{\vdash \neg A \rightarrow A \rightarrow \perp} \rightarrow\text{intro} \quad \frac{}{\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A} \rightarrow\text{intro} \\
\hline
\vdash \neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \perp) \quad \wedge\text{intro}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma \vdash (C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B)} \text{AX.} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, C \rightarrow A \vdash C \rightarrow A} \text{AX.} \quad \frac{}{\Gamma, C \rightarrow A \vdash C} \text{AX.} \quad \frac{}{\Gamma, C \rightarrow B \vdash C \rightarrow B} \text{AX.} \quad \frac{}{\Gamma, C \rightarrow B \vdash C} \text{AX.} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, C \rightarrow A \vdash A} \rightarrow\text{ÉLIM} \quad \frac{}{\Gamma, C \rightarrow B \vdash B} \rightarrow\text{ÉLIM} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, C \rightarrow A \vdash A \vee B} \vee\text{INTRO}_g \quad \frac{}{\Gamma, C \rightarrow B \vdash A \vee B} \vee\text{INTRO}_d \\
\hline
\frac{}{\Gamma = ((C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B), C) \vdash A \vee B} \vee\text{ÉLIM} \\
\hline
\frac{}{(C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B) \vdash C \rightarrow A \vee B} \rightarrow\text{intro} \\
\hline
\vdash (C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \vee B) \quad \rightarrow\text{intro}
\end{array}$$

Pour démontrer la réciproque, on aimerait distinguer les cas où  $C$  est vraie ou  $C$  est fausse, car dans le cas où  $C$  est fausse, on peut démontrer toute implication  $C \rightarrow D$  et dans le cas où  $C$  est vraie, on peut faire une disjonction de cas selon que  $A$  ou  $B$  est vraie.

La formule  $C \vee \neg C$ , appelée *tiers exclu*, n'est démontrable qu'en logique classique.

### 2.1.3 Dédution naturelle classique, cas propositionnel

La différence entre la logique classique et intuitionniste est la réponse que l'on apporte à la question « Ne pas être faux, est-ce être vrai ? »

Une certitude : une formule vraie n'est pas fausse :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A, \neg A \vdash \neg A} \text{AX.} \quad \frac{}{A, \neg A \vdash A} \text{AX.} \\
\hline
\frac{}{A, \neg A \vdash \perp} \neg\text{ÉLIM} \\
\hline
\frac{}{A \vdash \neg\neg A} \neg\text{intro} \\
\hline
\vdash A \rightarrow \neg\neg A \quad \rightarrow\text{intro}
\end{array}$$

On remarque que la réciproque est le principe du raisonnement par l'absurde.

- Règles de la déduction naturelle classique :

Il suffit de remplacer  $\perp_{\text{elim}}$  par

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{RAA}$$

(*Reductio Ad Absurdum*)





$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{\Gamma \vdash A} \text{ AX.}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \vee_{\text{INTRO}_g} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash \neg(A \vee \neg A)} \text{ AX.}}{\Gamma = (\neg(A \vee \neg A), A) \vdash \perp} \neg_{\text{ÉLIM}} \\
\frac{\Gamma = (\neg(A \vee \neg A), A) \vdash \perp}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A} \neg_{\text{intro}} \\
\frac{\overline{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)} \text{ AX.} \quad \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A} \vee_{\text{INTRO}_d} \\
\frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \perp} \neg_{\text{ÉLIM}} \\
\hline
\vdash A \vee \neg A \quad \text{RAA}
\end{array}$$

### 2.1.4 Dédution naturelle pour la logique du premier ordre

- On doit ajouter des règles pour les quantificateurs. Elles sont les mêmes dans les cas classique et intuitionniste :

– Règles du quantificateur

+ Introduction : pour démontrer  $\forall x A$ , on introduit un  $x$  quelconque (« soit  $x$  »), et on démontre  $A$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \notin \text{FV}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x A} \forall_{\text{intro}}$$

La condition  $x \notin \text{FV}(\Gamma)$  exprime le fait que  $x$  est bien quelconque : il n'entre pas en conflit avec une variable pour laquelle on dispose d'hypothèses.

+ Élimination : de  $\forall x A$ , on peut déduire  $A$  pour n'importe quelle valeur de  $x$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \forall_{\text{ÉLIM}}$$

Ici,  $t$  est un terme quelconque de votre choix.

– Règles du quantificateur existentiel :

+ Introduction : pour démontrer  $\exists x A$ , il suffit d'exhiber une valeur de  $x$  qui rend  $A$  démontrable.

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_{\text{INTRO}}$$

+ Élimination : si on a démontré  $\exists x A$ , on peut se donner un  $x$  tel que  $A$  est vraie et poursuivre le raisonnement

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \notin \text{FV}(\Gamma, B)}{\Gamma \vdash B} \exists_{\text{ÉLIM}}$$

Ici aussi,  $x$  ne doit pas être en conflit avec des variables déjà introduites.

- Exemple : on illustre l'importance de la condition de fraîcheur des noms à l'aide d'une preuve fausse :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma \vdash \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)} \text{AX.} \\
\frac{}{\Gamma \vdash \exists x A(x)} \wedge_{\text{ÉLIM}_g} \quad \frac{}{\Gamma, A(x) \vdash A(x)} \text{AX.} \quad \dots \\
\frac{}{\Gamma = (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \vdash A(x)} \exists_{\text{ÉLIM}} !! \quad \frac{}{\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \vdash B(x)} \dots \\
\frac{}{\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \vdash A(x) \wedge B(x)} \wedge_{\text{intro}} \\
\frac{}{\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \vdash \exists x (A(x) \wedge B(x))} \exists_{\text{intro}} [x := x] \\
\frac{}{\vdash (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))} \rightarrow_{\text{intro}}
\end{array}$$

- Une preuve correcte :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma \vdash \exists x \neg A} \text{AX.} \quad \frac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A} \text{AX.} \quad \frac{}{\Gamma, \neg A \vdash \forall x A} \text{AX.} \\
\frac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A} \wedge_{\text{ÉLIM}_g} \quad \frac{}{\Gamma, \neg A \vdash A} \forall_{\text{ÉLIM}} \\
\frac{}{\Gamma, \neg A \vdash \perp} \neg_{\text{ÉLIM}} x \notin \text{FV}(\Gamma, \perp) \\
\frac{}{\Gamma = (\forall x A, \exists x \neg A) \vdash \perp} \exists_{\text{ÉLIM}} \\
\frac{}{\forall x A \vdash \neg \exists x \neg A} \neg_{\text{intro}}
\end{array}$$

## 2.2 Théorème de complétude

### 2.2.1 Introduction

Le théorème de complétude de la déduction naturelle exprime l'équivalence entre le fait pour une formule d'être démontrable et celui d'être sémantiquement vraie. Comme la sémantique de la logique du premier ordre est H.P, on se limitera au cas propositionnel. On le démontre en deux temps : d'abord la correction de la déduction (toute formule démontrable est une tautologie), puis sa complétude (toute tautologie est démontrable).

### 2.2.2 Théorème (correction de la déduction naturelle, cas propositionnel)

Soit  $A$  une formule propositionnelle.  
Si  $\vdash A$ , alors  $\models A$ .

□

On montre  $\forall \Gamma, A$ , si  $\Gamma \vdash A$ , alors  $\models A$  par induction sur une dérivation de  $\Gamma \vdash A$  en faisant une disjonction de cas selon la dernière règle.

- $\frac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A} \text{AX.}$  : Si  $d$  est un modèle de  $\Gamma$ , alors comme  $A \in \Gamma$ , on sait que  $\llbracket A \rrbracket_d = V$ . Donc  $\Gamma \models A$ .

- $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_{\text{intro}}$  : Soit  $d$  un modèle de  $\Gamma$ .



- Si  $\llbracket A \rrbracket_d = V$ , alors  $d$  est un modèle de  $\Gamma, A$ , donc par H.I,  $\llbracket B \rrbracket_d = V$ , donc par définition de l'implication,  $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_d = V$ .
- Si  $\llbracket A \rrbracket_d = F$ ,  $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_d = V$  par définition.

Donc  $\Gamma \models A \rightarrow B$ .

- $\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_{\text{ÉLIM}}$  : Si  $d$  est un modèle de  $\Gamma$ , alors  $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_d = V = \llbracket A \rrbracket_d$  par H.I.

Donc  $\llbracket B \rrbracket_d = V$  par définition de  $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_d$ .

Donc  $\Gamma \models B$ .

- $\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_{\text{ÉLIM}}$  : Soit  $d$  un modèle de  $\Gamma$ . Par H.I,  $\llbracket A \vee B \rrbracket_d = V$ , donc par définition,  $\llbracket A \rrbracket_d = V$  ou  $\llbracket B \rrbracket_d = V$ 
  - Si  $\llbracket A \rrbracket_d = V$ ,  $d$  est un modèle de  $\Gamma, A$ , donc par H.I,  $\llbracket C \rrbracket_d = V$ .
  - Si  $\llbracket B \rrbracket_d = V$ , de même  $\llbracket C \rrbracket_d = V$ .

Donc  $\Gamma \models C$ .

- $\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{RAA}$  : Soit  $d$  un modèle de  $\Gamma$ .

– Si  $\llbracket A \rrbracket_d = V$ , ok.

– Si  $\llbracket A \rrbracket_d = F$ , alors par définition  $\llbracket \neg A \rrbracket_d = V$ , donc  $d$  est un modèle de  $\Gamma, \neg A$ , donc par H.I,  $\llbracket \perp \rrbracket_d = V$  : absurde.

Donc  $\Gamma \models A$ .

- Ect. Exo. ■

### 2.2.3 Théorème (complétude de la déduction naturelle, cas propositionnel)

Soit  $A$  une formule propositionnelle.  
Si  $\Gamma \models A$ , alors  $\Gamma \vdash A$ .

□

Pour toute formule  $A$  et toute valuation (distribution de vérité)  $d$ , on note  $\varphi(A, d)$  la formule

$$\varphi(A, d) = \bigwedge_{i=1}^n \delta(X_i, d)$$

où :

- $X_1, \dots, X_n$  sont les variables de  $A$  dans leur ordre d'apparition dans un parcours en profondeur de l'arbre représentant  $A$  (avec répétition) ;
- $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,

$$\delta(X_i, d) = \begin{cases} X_i & \text{si } \llbracket X_i \rrbracket_d = V \\ \neg X_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :  $A = ((X \wedge Y) \rightarrow Z) \vee \neg X$ ,  $d = \{(X, V), (Y, F), (Z, F)\}$ , alors  $\varphi(A, d) = X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge X$ .

• Lemme 1 :

$\forall A, B$ , et  $\forall \oplus \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$  connecteur,  $\forall d$  valuation,

$$\begin{aligned} \vdash \varphi(A \oplus B, d) &\leftrightarrow \varphi(A, d) \wedge \varphi(B, d) \\ \vdash \varphi(\neg A, d) &\leftrightarrow \varphi(A, d) \end{aligned}$$

□

On remarque que  $\varphi(\neg A, d) = \varphi(A, d)$  [Exo].

Si  $A, B$  ont toutes deux des variables,

$$\varphi(A \oplus B, d) = \varphi(A, d) \wedge \varphi(B, d)$$

(à associativité de  $\wedge$  près)

Si  $A$  n'a pas de variable,  $\varphi(A \oplus B, d) = \varphi(B, d)$ .

Si  $B$  n'a pas de variable,  $\varphi(A \oplus B, d) = \varphi(A, d)$ .

Il suffit donc de démontrer que pour toute formule  $C$ ,

$$\begin{aligned} \vdash C &\leftrightarrow C \\ \vdash C &\leftrightarrow \top \wedge C \\ \vdash C &\leftrightarrow C \wedge \top \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\overline{C \vdash C} \text{ AX}}{\vdash C \rightarrow C} \rightarrow \text{intro} \quad \frac{\overline{C \vdash C} \text{ AX}}{\vdash C \rightarrow C} \rightarrow \text{intro}}{\vdash C \leftrightarrow C} \wedge \text{intro}$$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{C \vdash \top} \top \text{intro} \quad \overline{C \vdash C} \text{ AX}}{C \vdash \top \wedge C} \wedge \text{intro} \quad \frac{\overline{\top \wedge C \vdash \top \wedge C} \text{ AX}}{\top \wedge C \vdash C} \wedge \text{ÉLIM}_d}{\vdash C \rightarrow \top \wedge C} \rightarrow \text{intro} \quad \frac{\overline{\top \wedge C \vdash C}}{\vdash \top \wedge C \rightarrow C} \rightarrow \text{intro}}{\vdash C \leftrightarrow \top \wedge C} \wedge \text{INTRO}$$

$\vdash C \leftrightarrow C \wedge \top$  en [Exo]. ■

• Lemme 2 :

$\forall A$ , et  $\forall d$  valuation,

$$\varphi(A, d) \vdash \begin{cases} A & \text{si } \llbracket A \rrbracket_d = V \\ \neg A & \text{si } \llbracket A \rrbracket_d = F \end{cases}$$

□

Par induction sur  $A$  :

–  $A = \top : \llbracket A \rrbracket_d = V$ , et

$$\frac{}{\varphi(A, d) \vdash A} \top_{\text{intro}}$$

–  $A = \perp : \llbracket A \rrbracket_d = F$ , et

$$\frac{\frac{}{\varphi(A, d), \perp \vdash \perp} \text{AX}}{\varphi(A, d) \vdash \neg \perp} \neg_{\text{intro}}$$

–  $A = X : \text{si } \llbracket A \rrbracket_d = V$ , alors  $\varphi(A, d) = X$ , et  $\frac{}{X \vdash X} \text{AX}$

Si  $\llbracket A \rrbracket_d = F$ , alors  $\varphi(A, d) = \neg X$ , et  $\frac{}{\neg X \vdash \neg X} \text{AX}$ .

–  $A = \neg B : \text{si } \llbracket A \rrbracket_d = V$ , alors par définition  $\llbracket B \rrbracket_d = F$ , donc par H.I,

$$\underbrace{\varphi(B, d) \vdash \neg B}_{=\varphi(A, d)} \quad \underbrace{\quad}_{=A}$$

Si  $\llbracket A \rrbracket_d = F$ , alors  $\llbracket B \rrbracket_d = V$ , donc par H.I,  $\underbrace{\varphi(B, d) \vdash B}_{=\varphi(A, d)}$

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi(A, d), A \vdash \neg B} \text{AX} \quad \varphi(A, d), A \vdash B}{\varphi(A, d), A \vdash \perp} \neg_{\text{ÉLIM}}}{\varphi(A, d) \vdash \neg A} \neg_{\text{intro}}$$

–  $A = B \oplus C$ , où  $\oplus \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$

Par le lemme 1, il suffit de démontrer  $\varphi(B, d), \varphi(C, d) \vdash B \oplus C$  ou  $\neg(B \oplus C)$  (selon le cas).

En effet, si  $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2$  et  $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi$ , alors :

$$\frac{\frac{\frac{\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi}{\varphi, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \vdash \psi} \text{AFF} \quad \frac{\frac{}{\varphi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \text{AX} \quad \frac{\varphi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_1}{\varphi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_1} \wedge_{\text{ÉLIM}_g}}{\varphi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \varphi_1 \rightarrow \psi} \rightarrow_{\text{intro}} \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2} \text{AFF} \quad \frac{\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge_{\text{ÉLIM}_g} \quad \frac{}{\varphi \vdash \varphi} \text{AX}}{\varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2} \rightarrow_{\text{ÉLIM}}}{\varphi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \rightarrow_{\text{ÉLIM}} \quad \frac{\varphi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \psi}{\varphi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi} \rightarrow_{\text{intro}} \quad \frac{\varphi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi \quad \varphi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi \vdash \psi} \rightarrow_{\text{ÉLIM}}$$

+ Si  $\oplus = \vee$ , et  $\llbracket B \vee C \rrbracket_d = V$ , on doit montrer  $\varphi(B, d), \varphi(C, d) \vdash B \vee C$

Par définition, soit  $\llbracket B \rrbracket_d = V$ , soit  $\llbracket C \rrbracket_d = V$ .

Si  $\llbracket B \rrbracket_d = V$ , alors par H.I,  $\varphi(B, d) \vdash B$ .

$$\frac{\frac{\varphi(B, d) \vdash B}{\varphi(B, d) \vdash B \vee C} \vee_{\text{INTRO}_g}}{\varphi(B, d), \varphi(C, d) \vdash B \vee C} \text{AFF}$$

De même si  $\llbracket C \rrbracket_d = V$ .

+ Si  $\oplus = V$  et  $\llbracket B \vee C \rrbracket_d = F$ , on doit montrer  $\varphi(B, d), \varphi(C, d) \vdash \neg(B \vee C)$ . Par définition,  $\llbracket B \rrbracket_d = F = \llbracket C \rrbracket_d$ , donc par H.I,

$$\begin{cases} \varphi(B, d) \vdash \neg B \\ \varphi(C, d) \vdash \neg C \end{cases}$$

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash B \vee C} \text{ AX} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi(B, d) \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg B} \text{ AFF} \quad \frac{\overline{\Gamma, B \vdash B} \text{ AX}}{\Gamma, B \vdash \perp} \neg\text{ELIM} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi(C, d) \vdash \neg C}{\Gamma, C \vdash \neg C} \text{ AFF} \quad \frac{\overline{\Gamma, C \vdash C} \text{ AX}}{\Gamma, C \vdash \perp} \neg\text{ELIM}}{\Gamma = (\varphi(B, d), \varphi(C, d), B \vee C) \vdash \perp} \vee\text{ELIM}}{\varphi(B, d), \varphi(C, d) \vdash \neg(B \vee C)} \neg\text{intro}$$

+ etc. Exo 

- Lemme 3 :

Si  $A$  est une tautologie, alors

$$\bigvee_d \varphi(A, d) \vdash A$$

□

On numérote les valuations et on montre  $\bigvee_{i=1}^n \varphi(A, d_i) \vdash A$ .

On montre par récurrence finie que  $\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \bigvee_{i=1}^n \varphi(A, d_i) \vdash A$ .

\*  $k = 1$   $\varphi(A, d_1) \vdash A$  vrai car  $\llbracket A \rrbracket_{d_1} = V(A)$  est une tautologie + lemme 2.

\* Hérédité :

$$\text{Si } \bigvee_{i=1}^k \varphi(A, d_i) \vdash A$$

$$\frac{\overline{\bigvee_{i=A}^{k+1} \varphi(A, d_i) \vdash \bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i))}}{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i) \vdash A} \text{AX} \quad \frac{\overline{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i), \bigvee_{i=1}^k \varphi(A, d_i) \vdash A}}{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i) \vdash A} \text{AFF} \quad \frac{\overline{\overline{\overline{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i), \varphi(A, d_{k+1}) \vdash A}}} \text{AFF}}{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i) \vdash A} \text{AFF} \quad \frac{\overline{\overline{\overline{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i) \vdash A}}} \text{AFF}}{\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi(A, d_i) \vdash A} \text{AFF}$$

■

- Lemme 4 :



$$\left| \begin{array}{c} \forall A, \\ \bigvee_d \varphi(A, d) \\ \text{est démontrable} \end{array} \right.$$

Le lemme permet de conclure : si  $\models A$ , alors

$$\frac{\frac{\text{lemme 3 car } \models A}{\bigvee_d \varphi(A, d) \vdash A}}{\vdash \bigvee_d \varphi(A, d) \rightarrow A} \xrightarrow{\rightarrow \text{intro}} \frac{\text{lemme 4}}{\vdash \bigvee_d \varphi(A, d)} \xrightarrow{\neg A} \rightarrow \text{ÉLIM}$$

□

(lemme 4) : on procède par récurrence sur le nombre de variables de  $A$ .

\* Pas de variable :  $\forall d, \varphi(A, d) = \top$ , donc

$$\frac{\frac{\overline{\vdash \top}}{\vdash \top} \top \text{intro}}{\vdash \bigvee_d \varphi(A, d)} \vee_{\text{INTRO}_d}$$

\* Hérédité : si la propriété est vraie pour toute formule à  $n \in \mathbb{N}$  variables,

Soit  $A$  une formule à  $n + 1$  variables  $X_1, \dots, X_{n+1}$  dans l'ordre d'apparition.

$$\begin{aligned} \forall d, \varphi(A, d) &= \bigwedge_{i=1}^{n+1} \delta(X_i, d) \\ &= \left( \bigwedge_{i=1}^n \delta(X_i, d) \right) \wedge \delta(X_{n+1}, d) \\ &= \varphi \left( \bigwedge_{i=1}^n X_i, d \right) \wedge \delta(X_{n+1}, d) \end{aligned}$$

$$\bigvee_d \varphi(A, d) = \bigvee_d \left( \varphi \left( \bigwedge_{i=1}^n X_i, d \right) \wedge \delta(X_{n+1}, d) \right)$$

Donc

$$\vdash \bigvee_d \varphi(A, d) \leftrightarrow \left( \bigvee_{d(X_{n+1})=V} \left( \varphi \left( \bigwedge_{i=1}^n X_i, d \right) \wedge X_{n+1} \right) \right) \wedge \left( \bigvee_{d(X_{n+1})=F} \left( \varphi \left( \bigwedge_{i=1}^n X_i, d \right) \wedge \neg X_{n+1} \right) \right)$$

(commutativité + commutativité disjonction + récurrence)

Donc

$$\vdash \bigvee_d \varphi(A, d) \leftrightarrow \left( X_{n+1} \wedge \bigvee_{d(X_{n+1})=V} \left( \varphi \left( \bigwedge_{i=1}^n X_i, d \right) \right) \right) \wedge \left( \neg X_{n+1} \wedge \bigvee_{d(X_{n+1})=F} \left( \varphi \left( \bigwedge_{i=1}^n X_i, d \right) \right) \right)$$

On remarque que

$$\bigvee_{d(X_{n+1})=V} \varphi\left(\bigwedge_{i=1}^n X_i, d\right) = \bigvee_{d(X_{n+1})=F} \varphi\left(\bigwedge_{i=1}^n X_i, d\right)$$

Comme pour tout  $B$ ,  $\vdash B \vee B \leftrightarrow B$ , on a alors :

$$\vdash \bigvee_d \varphi(A, d) \leftrightarrow \underbrace{\left( X_{n+1} \wedge \bigvee_d \varphi\left(\bigwedge_{i=1}^n X_i, d\right) \right) \vee \left( \neg X_{n+1} \wedge \bigvee_d \varphi\left(\bigwedge_{i=1}^n X_i, d\right) \right)}_B$$

$$\frac{\frac{\vdash \bigvee_d \varphi(A, d) \leftrightarrow B}{\vdash B \rightarrow \bigvee_d \varphi(A, d)} \wedge_{\text{ÉLIM}_d} \quad \frac{\text{tiers exclus}}{\vdash X_{n+1} \vee \neg X_{n+1}} \quad \frac{\frac{\frac{\text{H.R.}}{\vdash C}}{\frac{X_{n+1} \vdash X_{n+1}}{X_{n+1} \vdash C} \text{AX}} \quad \frac{\text{idem}}{\neg X_{n+1} \vdash B}}{\vdash B} \rightarrow_{\text{ÉLIM}} \vdash \bigvee_d \varphi(A, d)$$

■

■