Maths : Convexité

Contents

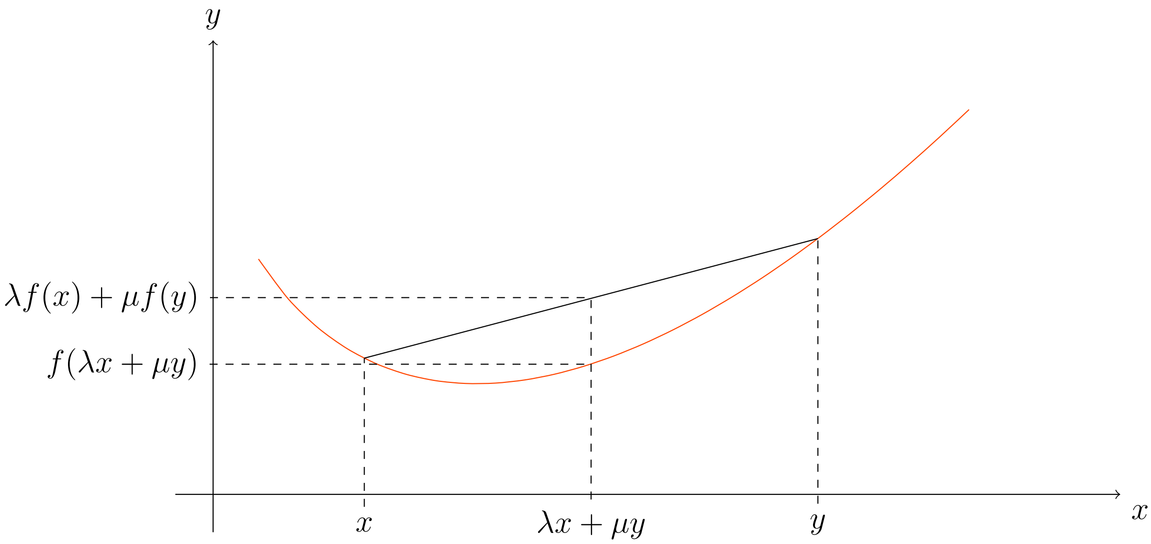
Dans la suite, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1 Définitions

1.1 Définition (*fonction convexe*)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
La fonction f est *convexe* sur I si

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0\ ;\ 1], && f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x, y \in I,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \mid \lambda + \mu = 1, && f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$



Remarque :

$$\forall x, y \in I \mid x < y,\ [x\ ;\ y] = \left\{ \lambda x + (1-\lambda) y \ \middle|\ \lambda \in [0\ ;\ 1] \right\}$$

1.2 Définition (*fonction concave*)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
La fonction f est *concave* sur I si $-f$ est convexe, *i.e* si

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0\ ;\ 1], && f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x, y \in I,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \mid \lambda + \mu = 1, && f(\lambda x + \mu y) \geqslant \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

2 Propriétés

Dans la suite, on pose $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$, $J \in \Big\{ [a\ ;\ b],\ [a\ ;\ b[,\ ]a\ ;\ b],\ ]a\ ;\ b[\Big\}$, et $\widetilde{J} =]a\ ;\ b[$.

2.1 Inégalité de convexité

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
Alors f est convexe $\Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} \forall p \in \mathbb{N}^* \\ \forall (\lambda_k)_{k \in [\![1\ ;\ p]\!]} \subset \mathbb{R}^+ \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \\ \forall (x_k)_{k \in [\![1\ ;\ p]\!]} \subset I \end{array} \right. \quad f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(x_k)$$

2.2 Propriété (*fonctions convexes et dérivation*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(J) \cap \mathcal{D}\left(\widetilde{J}\right)$.

Alors f est convexe sur J $\Leftrightarrow$ f' croissante sur $\widetilde{J}$.

2.3 Propriété (*fonctions convexes et tangentes*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(J) \cap \mathcal{D}\left(\widetilde{J}\right)$.

Alors f est convexe sur J $\Leftrightarrow$ elle est au dessus de ses tangentes, *i.e* $\Leftrightarrow$

$$\forall (x, c) \in J \times \widetilde{J},\ f(x) \geqslant (x - c) f'(c) + f(c)$$

2.4 Propriété (*fonctions convexes et dérivées secondes*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(J)$ une fonction deux fois dérivable sur $\widetilde{J}$.

Alors f est convexe sur J $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in \widetilde{J},\ f''(x) \geqslant 0$$