Maths : Topologie

Contents

1 Norme 4
1.1 Définition (*norme*) 4
1.2 Proposition (*inégalité triangulaire renversée*) 4
1.3 Convexité 4
1.3.1 Définition (*segment*) 4
1.3.2 Définition (*Partie convexe*) 4
1.4 Normes usuelles 5
1.4.1 Sur $\mathbb{K}^n$ 5
1.4.2 Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ 5
1.5 Fonctions lipschitziennes 5
1.6 Définition (*normes équivalentes*) 5

2 Topologie d'un espace vectoriel normé 6
2.1 Voisinages 6
2.1.1 Définition (*voisinage*) 6
2.1.2 Propriétés 6
2.1.3 Extension à l'infini 7
2.2 Ouverts, fermés 7
2.2.1 Définition (*Ouvert*) 7
2.2.2 Définition (*Fermé*) 7
2.2.3 Propriétés 7
2.3 Adhérence 8
2.3.1 Définition (*Adhérence*) 8
2.3.2 Définition (*densité*) 8
2.3.3 Caractérisation de l'adhérence (intersection) 8
2.3.4 Propriétés 9
2.3.5 Caractérisation séquentielle de l'adhérence 9
2.3.6 Corollaire 9
2.4 Intérieur 9
2.4.1 Définition (*Intérieur*) 9
2.4.2 Propriétés 10
2.4.3 Caractérisation (union) 10
2.4.4 Propriétés 10
2.5 Frontière 10
2.5.1 Définition (*Frontière*) 10
2.5.2 Définition (*Extérieur*) 10

2.5.3 Proposition 11
2.6 Topologie relative à une partie 11
2.6.1 Définition (*voisinage relatif*) 11
2.6.2 Définition (*ouvert, fermé relatif*) 11
2.6.3 Caractérisation 11
2.6.4 Caractérisation séquentielle 12

3 Limites, continuité d'une application **12**
3.1 Limites 12
3.1.1 Définition (*Limite en un point*) 12
3.1.2 Caractérisation séquentielle de la limite 12
3.1.3 Propriété (limite d'une application définie sur un produit cartésien) 12
3.2 Continuité d'une application 13
3.2.1 Définition (*continuité*) 13
3.2.2 Propriétés 13
3.2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité 14
3.2.4 Propriétés (exemples d'applications continues) 14
3.2.5 Lien avec les ouverts 14
3.2.6 Propriété 14
3.3 Cas des applications linéaires 15
3.3.1 Théorème (CNS de continuité pour des applications linéaires) 15
3.3.2 Définition (*norme d'opérateurs*) 15
3.3.3 Propriété (*sous-multiplicabilité*) 15
3.3.4 Continuité d'une application multilinéaire 16

4 Compacité **16**
4.1 Définition, propriétés 16
4.1.1 Définition (*compact*) 16
4.1.2 Propriété (caractère fermé borné) 16
4.1.3 Propriété (partie fermé d'un compact) 16
4.1.4 Propriété (produit de compacts) 17
4.1.5 Propriété (convergence d'une suite sur un compact) 17
4.2 Fonctions continues sur un compact 17
4.2.1 Propriété (image d'un compact par une fonction continue) 17
4.2.2 Corollaire (fonction continue sur un compact à valeurs réelles) 17
4.2.3 Définition (*fonction uniformément continue*) 17
4.2.4 Propriétés 18
4.2.5 Théorème de Heine 18

5 Connexité par arcs **18**
5.1 Définitions 18

5.1.1 Définition (*chemin continu*) . . . 18
5.1.2 Propriété . . . 18
5.1.3 Définition (*Composantes connexes par arcs*) . . . 18
5.1.4 Définition (*connexité par arcs*) . . . 19
5.1.5 Définition (*Partie étoilée*) . . . 19
5.1.6 Propriété (partie étoilée et connexité par arcs) . . . 19
5.1.7 Propriété . . . 19
5.2 Fonctions continues sur une partie connexe . . . 19
5.2.1 Propriété (Image d'une partie connexe par une fonction continue) . . . 19
5.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires généralisé . . . 20
5.2.3 Corollaire . . . 20

6 Cas des espaces vectoriels de dimension finie 20
6.1 Normes . . . 20
6.1.1 Théorème de RIESZ . . . 20
6.1.2 Conséquence . . . 20
6.2 Compacité . . . 20
6.2.1 Propriété . . . 20
6.3 Suites . . . 20
6.3.1 Propriété (convergence et composantes) . . . 20
6.3.2 Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS . . . 21
6.3.3 Propriété (CNS de convergence d'une suite bornée) . . . 21
6.4 Continuité . . . 21
6.4.1 Propriété (continuité des applications linéaires) . . . 21
6.4.2 Propriété (continuité des applications multilinéaires) . . . 21

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Norme

1.1 Définition (*norme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une *norme* sur E est une application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

- la séparation :
$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
- l'homogénéité :
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$
- l'inégalité triangulaire :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$$

1.2 Proposition (*inégalité triangulaire renversée*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N une norme sur E.
On a :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x+y)$$

1.3 Convexité

1.3.1 Définition (*segment*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $A, B \in E$.
Le *segment* $[A, B]$ est définit par :

$$\begin{aligned} [A,B] &= \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in [0\ ;\ 1]\} \\ &= \{\lambda A + (1-\lambda) B \mid \lambda \in [0\ ;\ 1]\} \end{aligned}$$

1.3.2 Définition (*Partie convexe*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$.
Alors $\mathcal{A}$ est dite *convexe* si, et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A},\ [A, B] \in \mathcal{A}$$

1.4 Normes usuelles

1.4.1 Sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
\|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \\
\|x\|_\infty &= \max_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} |x_k|
\end{aligned}$$

Ces applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

1.4.2 Sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On peut munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{K}\right)$ de normes définies par, $\forall f \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{K}\right)$:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x \\
\|x\|_2 &= \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x} \\
\|x\|_\infty &= \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|
\end{aligned}$$

1.5 Fonctions lipschitziennes

Soient $[E, \|\cdot\|_E]\,, [F, \|\cdot\|_F]$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.
Alors f est dite k-lipschitzienne si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\, \|y - x\|_E$$

1.6 Définition (*normes équivalentes*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $N, \widetilde{N}$ deux normes sur E.

Les normes N et $\widetilde{N}$ sont *équivalentes* si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists k, \widetilde{k} \in \mathbb{R}_+^* \ | \forall x \in E, \left| \begin{array}{l} N(x) \leqslant \widetilde{k}\widetilde{N}(x) \\ \widetilde{N}(x) \leqslant kN(x) \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k, k' \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in E,\ k'\widetilde{N}(x) \leqslant N(x) \leqslant k\widetilde{N}(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in E,\ \frac{1}{k}\widetilde{N}(x) \leqslant N(x) \leqslant k\widetilde{N}(x) \end{aligned}$$

2 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, on désigne par $[E, \|\cdot\|]$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Voisinages

2.1.1 Définition (*voisinage*)

Soit $a \in E$.
Un *voisinage* de a est une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A$$

On note $v(a)$ l'ensemble des voisinages de a :

$$\forall a \in E,\ v(a) = \left\{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A\right\}$$

2.1.2 Propriétés

On a :

- $\forall a \in E,\ \forall V \in v(a),\ a \in V$
- $\forall (a, W) \in E \times \mathcal{P}(E),\ (\exists V \in v(a) \mid V \subset W) \Rightarrow W \in v(a)$
- Soit $I \neq \varnothing$ un ensemble d'indexation, et $a \in E$.

$$\forall \left(V_i\right)_{i \in I} \subset v(a),\ \bigcup_{i \in I} V_i \in v(a)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in E$.

$$\forall (V_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \subset v(a),\ \bigcap_{k=1}^{n} V_k \in v(a)$$

- $\forall a, b \in E \mid a \neq b,\ \exists V, W \in v(a) \mid V \cap W = \varnothing$
- Deux normes équivalentes définissent la même notion de voisinage.

2.1.3 Extension à l'infini

On appelle *voisinage de* $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) toute partie $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\exists A \in \mathbb{R} \mid \ ]A\ ;\ +\infty[\subset V \quad (\text{resp. }]-\infty\ ;\ A[\subset V)$$

On note

$$\begin{aligned} v(+\infty) &= \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists A \in \mathbb{R} \mid \ ]A\ ;\ +\infty[\subset V\} \\ v(-\infty) &= \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists A \in \mathbb{R} \mid \ ]-\infty\ ;\ A[\subset V\} \end{aligned}$$

2.2 Ouverts, fermés

2.2.1 Définition (*Ouvert*)

Un ouvert de $[E, \|\cdot\|]$ est une partie de E vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall O \in \mathcal{P}(E),\ O \text{ ouvert} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall a \in O,\ O \in v(a) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall a \in O,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset O \end{aligned}$$

2.2.2 Définition (*Fermé*)

Un fermé de $[E, \|\cdot\|]$ est une partie vérifiant :

$$\forall F \in \mathcal{P}(E),\ F \text{ fermé} \ \Leftrightarrow\ \complement_E(F) = E \setminus F \text{ ouvert}$$

2.2.3 Propriétés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $I \neq \varnothing$ un ensemble d'indexation.

- $\forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i$ ouvert
- $\forall (O_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ ouverts, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} O_k$ ouvert
- $\forall (F_i)_{i \in I}$ fermés, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ fermé
- $\forall (F_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ fermés, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ fermé
- Soient $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\mathscr{B}_o(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\} \ \text{ ouvert}$$

$$\mathscr{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\} \text{ fermé}$$
$$\mathscr{S}(a,r) = \mathscr{B}_f(a,r) \setminus \mathscr{B}_o(a,r) \text{ fermé}$$

Soient $([E_k, N_k])_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés. On note $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$. On munit E de la norme produit N.
Alors

$$\forall (O_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ O_k \text{ ouvert de } E_k,\ \prod_{k=1}^{n} O_k \text{ ouvert de } [E, N]$$

$$\forall (F_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ F_k \text{ fermé de } E_k,\ \prod_{k=1}^{n} F_k \text{ fermé de } [E, N]$$

2.3 Adhérence

2.3.1 Définition (*Adhérence*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $a \in E$.
Alors a est dit *adhérent* à A lorsque

$$\forall V \in v(a),\ V \cap A \neq \varnothing$$

On note alors $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, appelée *adhérence de A* :

$$\overline{A} = \{a \in E \mid \forall V \in v(a),\ V \cap A \neq \varnothing\}$$

2.3.2 Définition (*densité*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On dit que A est *dense* dans E lorsque

$$\overline{A} = E$$

2.3.3 Caractérisation de l'adhérence (intersection)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ A \subset F}} F$$

Donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

2.3.4 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A = \overline{A} \;\Leftrightarrow\; A$ fermé
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (car $\overline{A}$ fermé)
- $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

2.3.5 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $a \in E$.
Alors :

$$a \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

2.3.6 Corollaire

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.
On a :

- $\forall x \in E, x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; d(x, A) = 0$
- A fermé dans $E \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ (\exists \ell \in E \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell) \Rightarrow \ell \in A$
- A dense dans $E \;\Leftrightarrow\; \forall x \in E,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

2.4 Intérieur

2.4.1 Définition (*Intérieur*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $a \in E$.
Alors a est dit *intérieur* à A lorsque

$$\begin{aligned} & \exists O \text{ ouvert de } E \left| \begin{array}{l} O \subset A \\ a \in O \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow\; & \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A \\ \Leftrightarrow\; & A \in v(a) \end{aligned}$$

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé *intérieur* de A :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid A \in v(x)\}$$

2.4.2 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On a :
- $\mathring{A} \subset A$
- $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

2.4.3 Caractérisation (union)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors
$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert de } E \\ O \subset A}} O$$

Donc $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus A.

2.4.4 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On a :
- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
- $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$
- $\complement_E(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E(A)}}$
- $\complement_E\left(\mathring{A}\right) = \overline{\complement_E(A)}$
- A ouvert $\Leftrightarrow \quad A = \mathring{A}$

2.5 Frontière

2.5.1 Définition (*Frontière*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle *frontière* de A, et on le note souvent $Fr(A)$, l'ensemble
$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \complement_{\overline{A}}\left(\mathring{A}\right) = \overline{A} \cap \complement_E\left(\mathring{A}\right)$$

2.5.2 Définition (*Extérieur*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On appelle *extérieur* de A l'ouvert

$$\complement_E(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E(A)}}$$

2.5.3 Proposition

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors l'intérieur, l'extérieur et la frontière de A forment une partition de E.

2.6 Topologie relative à une partie

2.6.1 Définition (*voisinage relatif*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $a \in A$, et $W \in \mathcal{P}(A)$.
Alors W est un *voisinage relatif à* A de a si

$$\exists W' \in v(a) \mid W = W' \cap A$$

On note

$$v_A(a) = \{W \in \mathcal{P}(A) \mid \exists W' \in v(a) \mid W = W' \cap A\}$$

l'ensemble des voisinages relatifs à A de a.

2.6.2 Définition (*ouvert, fermé relatif*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $W \in \mathcal{P}(A)$.

- Alors W est un *ouvert relatif à* A de E si

$$\forall a \in A,\ W \in v_A(a)$$

- W est un *fermé relatif à* A de E si c'est le complémentaire d'un ouvert relatif à A.

2.6.3 Caractérisation

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

- $\forall O \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$O \text{ ouvert relatif à } A \ \Leftrightarrow\ \exists O' \text{ ouvert de } E \mid O = O' \cap A$$

- $\forall W \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$W \text{ fermé relatif à } A \ \Leftrightarrow\ \exists W' \text{ fermé de } E \mid W = W' \cap A$$

2.6.4 Caractérisation séquentielle

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
$\forall F \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$F \text{ fermé relatif à } A \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}},\ (\exists \ell \in A \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell) \Rightarrow \ell \in F$$

3 Limites, continuité d'une application

Dans toute cette section, on pose deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel normés $[E, \|\cdot\|_E]$ et $[F, \|\cdot\|_F]$.

3.1 Limites

3.1.1 Définition (*Limite en un point*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $f \in F^A$, et $a \in \overline{A}$.
On dit que f *admet une limite* $b \in F$ *en* a si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in A,\ \|x-a\|_E \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta_\varepsilon \mid f(\mathscr{B}_f(a,\delta_\varepsilon) \cap A) \subset \mathscr{B}_f(b,\varepsilon) \\
\overset{\text{si } a\in A}{\Leftrightarrow}\ & \forall V \in v_F(b),\ \exists W \in v_A(a) \mid f(W) \subset V \\
\overset{\text{si } a\in A}{\Leftrightarrow}\ & \forall V \in v_F(b),\ f^{-1}(V) \in v_A(a)
\end{aligned}$$

Remarque : deux normes équivalentes définissent la même notion de voisinage et d'adhérence, donc la même notion de convergence : changer de norme pour une autre qui lui est équivalente ne change pas l'existence ni la valeur d'une limite.

3.1.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $f \in F^A$, et $a \in \overline{A}$.
Alors f admet une limite en a si et seulement si

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\ \exists \ell \in F \mid f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Et dans ce cas, la limite de f est ℓ.

Remarque : peut être intéressant sans la valeur de la limite.

3.1.3 Propriété (limite d'une application définie sur un produit cartésien)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés, $G = \prod_{k=1}^{n} G_k$ que l'on munit de la norme produit, et $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.

Soient $\forall k \in [\![1 \ ; \ n]\!]\,,\ f_k \in {G_k}^A$, et :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

Alors $\forall a \in \overline{A}$,

$$\exists \ell \in G \mid f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow \ \forall k \in [\![1 \ ; \ n]\!]\,,\ \exists \ell_k \in G_k \mid f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_k$$

Et dans ce cas, pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in G$ et $a \in \overline{A}$, on a :

$$\lim_a f = \ell \ \Leftrightarrow \ \forall k \in [\![1 \ ; \ n]\!]\,,\ \lim_a f_k = \ell_k$$

3.2 Continuité d'une application

3.2.1 Définition (*continuité*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.

• La fonction f est *continue en* $a \in A$ si et seulement si

$$\exists \ell \in F \mid f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

et dans ce cas, $\ell = f(a)$, *i.e* si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta_\varepsilon \mid \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$$

• La fonction f est *continue* (sur A) si et seulement si elle est continue en tout point de A.
Dans ce cas, on note

$$f \in \mathcal{C}^0(A, F)$$

3.2.2 Propriétés

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_k)_{k \in [\![1 \ ; \ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés, $G = \prod_{k=1}^{n} G_k$ que l'on munit de la norme produit, et $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.
Soient $\forall k \in [\![1 \ ; \ n]\!]\,,\ f_k \in {G_k}^A$, et :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

Alors f est continue en $a \in A$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1 \ ; \ n]\!]\,,\ f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f_k(a)$$

• Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $a \in A$, et $f \in F^A$.
Alors si f est continue en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

• Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$. Alors $\mathcal{C}^0(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de F^A.

3.2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $a \in A$, et $f \in F^A$.
Alors f est continue en a si et seulement si

$$\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\ f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

3.2.4 Propriétés (exemples d'applications continues)

• Une application lipschitzienne est continue.

• On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, et on note $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ une de ses $\mathbb{K}$-bases.
On pose $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^n) \setminus \varnothing$ finie, et $(\lambda_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K}$.

Alors l'application polynômiale (en les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$)

$$\begin{array}{rccl} f & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{i\in I \\ i=(i_1,\dots,i_n)}} \lambda_i \prod_{k=1}^{n} \left(e_k^*(x)\right)^{i_k} \end{array}$$

est continue.

3.2.5 Lien avec les ouverts

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.
Alors on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^0(A, F) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall O \text{ ouvert de } F,\ f^{-1}(O) \text{ ouvert relatif à } A \\ &\Leftrightarrow \quad \forall F \text{ fermé de } F,\ f^{-1}(F) \text{ fermé relatif à } A \end{aligned}$$

3.2.6 Propriété

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $B \in \mathcal{P}(A) \mid \overline{B} = A$, et $f, g \in \mathcal{C}^0(A, F)$
Alors

$$f_{|B} = g_{|B} \ \Rightarrow\ f = g$$

3.3 Cas des applications linéaires

3.3.1 Théorème (CNS de continuité pour des applications linéaires)

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
On a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^0(E, F) &\Leftrightarrow f \text{ continue en } 0_E \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant \alpha \|x\|_E \\ &\Leftrightarrow f \text{ lipschitzienne} \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E \mid\ \|x\|_E \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M \end{aligned}$$

On note

$$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{C}^0(E, F) \cap \mathcal{L}(E, F)$$

C'est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

3.3.2 Définition (*norme d'opérateurs*)

On peut munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ d'une norme dite *subordonnée* (à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$), ou *norme d'opérateurs*, par :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{L}_c(E, F),\ \|u\| = \|u\|_{\text{op}} &= \sup\left\{ \|u(x)\|_F \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in E \\ \|x\|_E = 1 \end{array} \right\} \\ &= \sup\left\{ \|u(x)\|_F \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in E \\ \|x\|_E \leqslant 1 \end{array} \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \;\middle|\; x \in E \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

Remarque : une norme subordonnée dépend des normes choisies sur E et F.

3.3.3 Propriété (*sous-multiplicabilité*)

Soient $[E, \|\cdot\|_E]$, $[F, \|\cdot\|_F]$, $[G, \|\cdot\|_G]$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soient $\left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}_c(E, F) \\ v \in \mathcal{L}_c(F, G) \end{array} \right.$.

Alors

$$v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$$

et

$$\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \cdot \|u\|$$

3.3.4 Continuité d'une application multilinéaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\left[A_k, \|\cdot\|_{A_k}\right]\right)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés, $A = \prod_{k=1}^{n} A_k$ munit de la norme produit, et $f \in F^A$ une application n-linéaire.
Alors

$$f \in \mathcal{C}^0(A, F) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x_1, \ldots, x_n) \in A,\ \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leqslant \alpha \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_{A_k}$$

4 Compacité

On note, dans cette section, $[E, \|\cdot\|_E]$ et $[F, \|\cdot\|_F]$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

4.1 Définition, propriétés

4.1.1 Définition (*compact*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors la partie A est dite *compacte* lorsque toute suite de points de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A, *i.e* lorque

$$\forall \left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ strictement croissante},\ \exists \ell \in A \mid x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

Remarque : deux normes équivalentes définissent la même notion de convergence et de limite, donc *a posteriori* la même notion de compacité.

4.1.2 Propriété (caractère fermé borné)

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$ un compact de E.
Alors C est un fermé borné de E, *i.e*

$$\begin{cases} C = \overline{C} \\ \exists r \in \mathbb{R}_+ \mid C \subset \mathscr{B}_f(0, r) \end{cases}$$

4.1.3 Propriété (partie fermé d'un compact)

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$ un compact.
Alors $\forall F \in \mathcal{P}(C) \mid \overline{F} = F,\ F$ est un compact.

4.1.4 Propriété (produit de compacts)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(A_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $C_k \in \mathcal{P}(A_k)$ un compact de A_k.

On munit $\prod_{k=0}^{n} A_k$ de la norme produit.

Alors

$$\prod_{k=1}^{n} C_k \quad \text{est un compact de} \quad \prod_{k=1}^{n} A_k$$

4.1.5 Propriété (convergence d'une suite sur un compact)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie compacte de E, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.
Alors

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow \exists! v \in E \mid v \text{ valeur d'adhérence de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

4.2 Fonctions continues sur un compact

4.2.1 Propriété (image d'un compact par une fonction continue)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$.

Alors $\forall B \in \mathcal{P}(A)$ compacte, $f(B)$ est un compact de F.

Donc en particulier, $f_{|B}$ est bornée.

4.2.2 Corollaire (fonction continue sur un compact à valeurs réelles)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(A)$ un compact de E, et $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Alors $f_{|B}$ est bornée et atteint ses bornes, *i.e* $\inf\limits_{B} f$ et $\sup\limits_{B} f$ existent, et

$$\exists b_{\mathrm{i}}, b_{\mathrm{s}} \in B \left| \begin{array}{l} \inf\limits_{B} f = f(b_{\mathrm{i}}) \\ \sup\limits_{B} f = f(b_{\mathrm{s}}) \end{array} \right.$$

4.2.3 Définition (*fonction uniformément continue*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $f \in F^A$.
Alors f est *uniformément continue sur* A si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

4.2.4 Propriétés

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $f \in A^F$.

- Si f est uniformément continue sur A, alors elle est continue sur A.
- Si f est lipschitzienne, alors elle est uniformément continue.

4.2.5 Théorème de Heine

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$ un compact de E, et $f \in \mathcal{C}^0(C, F)$.

Alors f est uniformément continue sur C.

5 Connexité par arcs

On note, dans cette section, $[E, \|\cdot\|_E]$ et $[F, \|\cdot\|_F]$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

5.1 Définitions

5.1.1 Définition (*chemin continu*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$
Un *chemin continu (tracé) sur* A est une application

$$f \in \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], A)$$

5.1.2 Propriété

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $\mathcal{R}$ la relation sur A^2 définie par

$$\forall (a,b) \in A^2,\ a\mathcal{R}b \ \Leftrightarrow\ \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], E) \left| \begin{array}{l} \gamma(0) = a \\ \gamma(1) = b \\ \forall t \in [0\ ;\ 1],\ \gamma(t) \in A \end{array} \right.$$

$i.e$ $a\mathcal{R}b \ \Leftrightarrow$ il existe un chemin continu tracé sur A reliant a à b.

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

5.1.3 Définition (*Composantes connexes par arcs*)

On reprend les notations de la propriété précédente (5.1.2).

Alors les *composantes connexes par arcs* de A sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

5.1.4 Définition (*connexité par arcs*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors A est dite *connexe par arcs* lorsque

$$\forall (a,b) \in A^2,\ \exists \eta \in \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], E)\ \left| \begin{array}{l} \eta(0) = a \\ \eta(1) = b \\ \forall t \in [0\ ;\ 1],\ \eta(t) \in A \end{array} \right.$$

$i.e$ lorsque $\forall (a,b) \in A^2,\ a\mathcal{R}b$ avec les notations de 5.1.2.

Remarques :
- Une composante connexe par arcs est connexe par arcs ;
- Une partie de E est connexe par arcs lorsqu'elle n'a qu'une seule composante connexe par arcs.

5.1.5 Définition (*Partie étoilée*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On dit que A est *étoilée* lorsque

$$\exists x_0 \in A \mid \forall a \in A,\ [a\ ;\ x_0] \subset A$$

Dans ce cas, on dit que A est *étoilée par rapport à* x_0.

Remarque : les parties convexes sont étoilées (par rapport à tous leurs points).

5.1.6 Propriété (partie étoilée et connexité par arcs)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie étoilée.
Alors A est connexe par arcs.

5.1.7 Propriété

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ (donc aussi les convexes de $\mathbb{R}$).

5.2 Fonctions continues sur une partie connexe

5.2.1 Propriété (Image d'une partie connexe par une fonction continue)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ connexe par arcs, et $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$.

Alors $f(A)$ est aussi connexe par arcs.

5.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ connexe par arcs, et $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Alors $f(A)$ est un intervalle, *i.e*

$$\forall y_1, y_2 \in f(A),\ \forall y \in [y_1\ ;\ y_2],\ \exists x \in A \mid y = f(x)$$

5.2.3 Corollaire

Soient $a, b \in E$, et $f \in \mathcal{C}^0([a\ ;\ b], \mathbb{R})$.
Alors $f([a\ ;\ b])$ est un segment de $\mathbb{R}$, *i.e* un intervalle compact.

6 Cas des espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, on pose $[E, \|\cdot\|_E]$ et $[F, \|\cdot\|_F]$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec E de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}$, et F de dimension quelconque.

6.1 Normes

6.1.1 Théorème de Riesz

Sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

6.1.2 Conséquence

Dans un espace vectoriel de dimension finie, le caractère ouvert, fermé, compact, connexe par arcs d'une partie, et les notions de convergence, de limite d'une suite, et de voisinage ne dépendent pas de la norme choisie.

6.2 Compacité

6.2.1 Propriété

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors on a

$$A \text{ compact} \ \Leftrightarrow\ A \text{ fermé borné}$$

6.3 Suites

6.3.1 Propriété (convergence et composantes)

Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ une base de E, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Alors

$$\exists \ell \in E \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \;\Leftrightarrow\; \forall k \in [\![1 \;;\; n]\!],\ \exists \ell_k \in E \mid e_k^*(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$$

Et dans ce cas, on a

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

6.3.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée, *i.e*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+ \mid \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{B}_f(0_E, r)$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence, *i.e*

$$\exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ strictement croissante, } \exists \ell \in E \mid x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

6.3.3 Propriété (CNS de convergence d'une suite bornée)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.
Alors

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow \exists! v \in E \mid v \text{ valeur d'adhérence de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

6.4 Continuité

6.4.1 Propriété (continuité des applications linéaires)

On rappelle que E est de dimension finie.
On a :

$$\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{C}^0(E, F)$$

6.4.2 Propriété (continuité des applications multilinéaires)

Soit $m \in \mathbb{N}$, $(A_k)_{k\in[\![1 \;;\; m]\!]}$ des espaces vectoriels normés, et

$$f : \prod_{k=1}^{m} A_k \longrightarrow F$$

une application m-linéaire.

Alors

$$f \in \mathcal{C}^0\left(\prod_{k=1}^{m} A_k,\ F\right)$$