Maths : Projections et symétries

Contents

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps, et E un K-espace vectoriel.

1 Projections

1.1 Définition (*projection*)

Soient A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($i.e$ $E = A \oplus B$).
La *projection* (ou le *projecteur*) sur A parallèlement à B est l'application

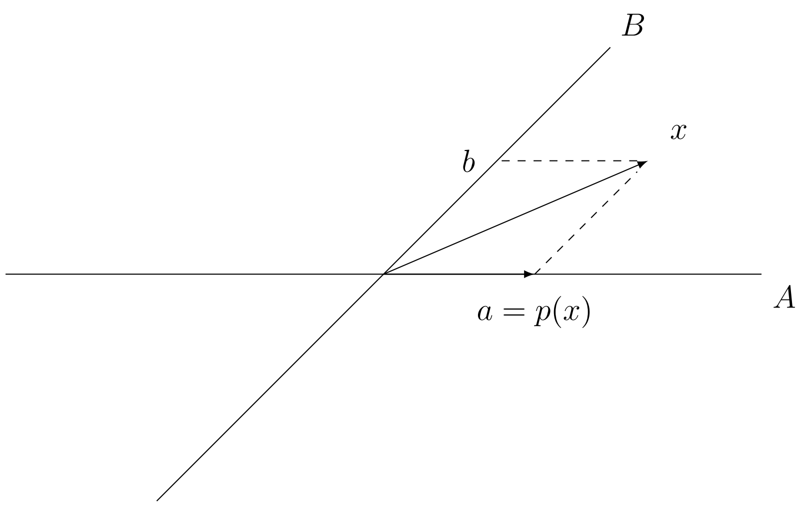
$$p \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ a+b & \longmapsto & a \end{array}$$

où $(a, b) \in A \times B$.
On appelle A et B les *éléments caractéristiques* de p.

Remarque : cette application est bien définie puisque $E = A \oplus B$ (donc $\forall x \in E, \ \exists!(a, b) \in A \times B \mid x = a + b$).

1.2 Exemple

Prenons $E = \mathbb{R}^2$, et A, B deux droites vectorielles non parallèles ($i.e$ $E = A \oplus B$).
Soit p la projection sur A parallèlement à B, et $x = a + b \in E$, où $(a, b) \in A \times B$.



1.3 Propriété (*linéarité, idempotence*)

Soit p une projection de E.
Alors :

- $p \in \mathcal{L}(E)$
- $p \circ p = p$ (idempotence)

Remarque : Comme on travaille dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, on note $p^2 = p \circ p$.

1.4 Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E) \mid f^2 = f$.
Alors f est une projection.

1.5 Propriété (*éléments caractéristiques*)

Soit p une projection de E.
Alors :
• $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$
• p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Autrement dit, avec les notations de la définition 1.1, on a :

$$\begin{cases} A = \mathrm{Im}(p) \\ B = \mathrm{Ker}(p) \end{cases}$$

• $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid x = p(x)\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$

2 Symétries

2.1 Définition (*symétrie*)

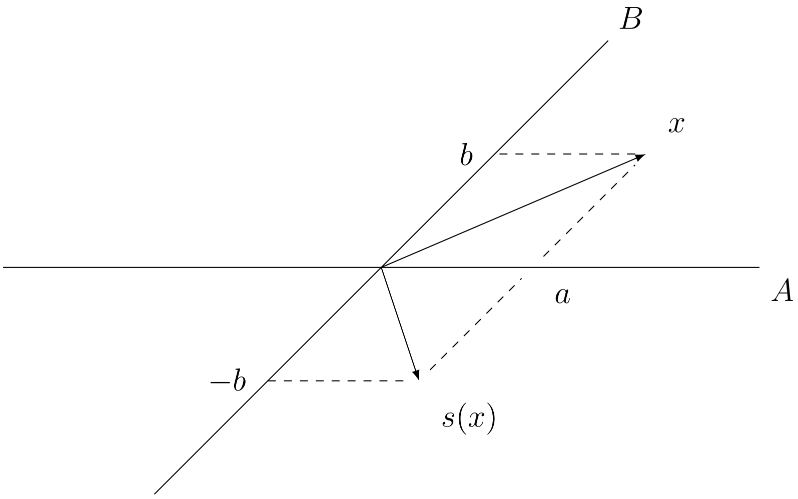
Soient A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($i.e$ $E = A \oplus B$).
La *symétrie* par rapport à A et parallèlement à B est l'application

$$s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ a+b & \longmapsto & a-b \end{array}$$

où $(a, b) \in A \times B$.
On appelle A et B les *éléments caractéristiques* de s.

2.2 Exemple

Prenons $E = \mathbb{R}^2$, et A, B deux droites vectorielles non parallèles ($i.e$ $E = A \oplus B$).
Soit s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B, et $x = a+b \in E$, où $(a, b) \in A \times B$.



2.3 Propriété (*automorphisme, involution*)

Soit s une symétrie de E.
Alors :
- $s \in GL(E)$ (automorphisme)
- $s^2 = \mathrm{id}_E$ (involution)

2.4 Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E) \mid f^2 = \mathrm{id}_E$.
Alors f est une symétrie de E.

2.5 Propriété (*éléments caractéristiques*)

Soit s une symétrie de E.
Alors :
- $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$
- s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Autrement dit, avec les notations de la définition 2.1, on a :

$$\begin{cases} A = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \\ B = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{cases}$$

Remarque :

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$$
$$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$$

2.6 Propriété (*relation projection / symétrie*)

Soient $p, s \in \mathcal{L}(E) \mid s = 2p - \mathrm{id}_E$.
On a alors :

$$p \text{ projection } \Leftrightarrow s \text{ symétrie}$$

Et dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \\ \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{cases}$$

$i.e$ p et s ont les mêmes éléments caractéristiques.