Maths : Topologie

Contents

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Norme

1.1 Définition (*norme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une *norme* sur E est une application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

- la séparation :
$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
- l'homogénéité :
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$
- l'inégalité triangulaire :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$$

1.2 Proposition (*inégalité triangulaire renversée*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N une norme sur E.
On a :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x + y)$$

1.3 Convexité

1.3.1 Définition (*segment*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $A, B \in E$.
Le *segment* $[A, B]$ est définit par :

$$\begin{aligned} [A, B] &= \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in [0\ ;\ 1]\} \\ &= \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0\ ;\ 1]\} \end{aligned}$$

1.3.2 Définition (*Partie convexe*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$.
Alors $\mathcal{A}$ est dite *convexe* si, et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A},\ [A, B] \in \mathcal{A}$$

1.4 Normes usuelles

1.4.1 Sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} |x_k| \end{aligned}$$

Ces applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

1.4.2 Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On peut munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{K}\right)$ de normes définies par, $\forall f \in \mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{K}\right)$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} \\ \|x\|_\infty &= \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{aligned}$$

1.5 Fonctions lipschitziennes

Soient $\left[E, \|\cdot\|_E\right], \left[F, \|\cdot\|_F\right]$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.
Alors f est dite k-lipschitzienne si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\,\|y - x\|_E$$

1.6 Définition (*normes équivalentes*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $N, \widetilde{N}$ deux normes sur E.

Les normes N et $\widetilde{N}$ sont *équivalentes* si et seulement si

$$\begin{aligned}
& \exists k, \widetilde{k} \in \mathbb{R}_+^* \ | \forall x \in E, \left| \begin{array}{l} N(x) \leqslant \widetilde{k}\widetilde{N}(x) \\ \widetilde{N}(x) \leqslant kN(x) \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \exists k, k' \in \mathbb{R}_+^* \ | \ \forall x \in E, \ k'\widetilde{N}(x) \leqslant N(x) \leqslant k\widetilde{N}(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{R}_+^* \ | \ \forall x \in E, \ \frac{1}{k}\widetilde{N}(x) \leqslant N(x) \leqslant k\widetilde{N}(x)
\end{aligned}$$

2 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, on désigne par $[E, \|\cdot\|]$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Voisinages

2.1.1 Définition (*voisinage*)

Soit $a \in E$.
Un *voisinage* de a est une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \ | \ \mathscr{B}_o(a, r) \subset A$$

On note $v(a)$ l'ensemble des voisinages de a :

$$\forall a \in E, \ v(a) = \left\{ A \in \mathcal{P}(E) \ | \ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \ | \ \mathscr{B}_o(a, r) \subset A \right\}$$

2.1.2 Propriétés

On a :

- $\forall a \in E, \ \forall V \in v(a), a \in V$
- $\forall (a, W) \in E \times \mathcal{P}(E), \ (\exists V \in v(a) \ | \ V \subset W) \Rightarrow W \in v(a)$

Soit $I \neq \varnothing$ un ensemble d'indexation, et $a \in E$.

$$\forall \left(V_i\right)_{i \in I} \subset v(a), \ \bigcup_{i \in I} V_i \in v(a)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in E$.

$$\forall (V_k)_{k \in [\![1 \ ; \ n]\!]} \subset v(a), \ \bigcap_{k=1}^{n} V_k \in v(a)$$

- $\forall a, b \in E \ | \ a \neq b, \ \exists V, W \in v(a) \ | \ V \cap W = \varnothing$
- Deux normes équivalentes définissent la même notion de voisinage.

2.2 Ouverts, fermés

2.2.1 Définition (*Ouvert*)

Un ouvert de $[E, \|\cdot\|]$ est une partie de E vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall O \in \mathcal{P}(E),\ O \text{ ouvert} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall a \in O,\ O \in v(a) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall a \in O,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a,r) \subset O \end{aligned}$$

2.2.2 Définition (*Fermé*)

Un fermé de $[E, \|\cdot\|]$ est une partie vérifiant :

$$\forall F \in \mathcal{P}(E),\ F \text{ fermé} \ \Leftrightarrow\ \complement_E(F) = E \setminus F \text{ ouvert}$$

2.2.3 Propriétés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $I \neq \varnothing$ un ensemble d'indexation.

- $\forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i$ ouvert
- $\forall (O_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ ouverts, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} O_k$ ouvert
- $\forall (F_i)_{i \in I}$ fermés, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ fermé
- $\forall (F_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ fermés, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ fermé
- Soient $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\mathscr{B}_o(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\} \text{ ouvert}$$

$$\mathscr{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\} \text{ fermé}$$

$$\mathscr{S}(a,r) = \mathscr{B}_f(a,r) \setminus \mathscr{B}_o(a,r) \text{ fermé}$$

Soient $([E_k, N_k])_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés. On note $E = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k$. On munit E de la norme produit N.
Alors

$$\forall (O_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ O_k \text{ ouvert de } E_k,\ \prod_{k=1}^{n} O_k \text{ ouvert de } [E, N]$$

$$\forall (F_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ F_k \text{ fermé de } E_k,\ \prod_{k=1}^{n} F_k \text{ fermé de } [E, N]$$

2.3 Adhérence

2.3.1 Définition (*Adhérence*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $a \in E$.
Alors a est dit *adhérent* à A lorsque

$$\forall V \in v(a),\ V \cap A \neq \varnothing$$

On note alors $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, appelée *adhérence de A* :

$$\overline{A} = \{a \in E \mid \forall V \in v(a),\ V \cap A \neq \varnothing\}$$

2.3.2 Définition (*densité*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On dit que A est *dense* dans E lorsque

$$\overline{A} = E$$

2.3.3 Caractérisation de l'adhérence (intersection)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ A \subset F}} F$$

Donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

2.3.4 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A = \overline{A} \iff A$ fermé
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (car $\overline{A}$ fermé)
- $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

2.3.5 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $a \in E$.
Alors :

$$a \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

2.3.6 Corollaire

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.
On a :

- $\forall x \in E, x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; d(x, A) = 0$
- A fermé dans $E \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\; (\exists \ell \in E \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell) \Rightarrow \ell \in A$
- A dense dans $E \;\Leftrightarrow\; \forall x \in E,\; \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

2.4 Intérieur

2.4.1 Définition (*Intérieur*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $a \in E$.
Alors a est dit *intérieur* à A lorsque

$$\begin{aligned}
& \exists O \text{ ouvert de } E \left| \begin{array}{l} O \subset A \\ a \in O \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow\; & \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A \\
\Leftrightarrow\; & A \in v(a)
\end{aligned}$$

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé *intérieur* de A :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid A \in v(x)\}$$

2.4.2 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On a :
- $\mathring{A} \subset A$
- $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

2.4.3 Caractérisation (union)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

Alors

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert de } E \\ O \subset A}} O$$

Donc $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus A.

2.4.4 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On a :

- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
- $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$
- $\complement_E(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E(A)}}$
- $\complement_E\left(\mathring{A}\right) = \overline{\complement_E(A)}$
- A ouvert $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$

2.5 Frontière

2.5.1 Définition (*Frontière*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle *frontière* de A, et on le note souvent $Fr(A)$, l'ensemble

$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \complement_{\overline{A}}\left(\mathring{A}\right) = \overline{A} \cap \complement_E\left(\mathring{A}\right)$$

2.5.2 Définition (*Extérieur*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle *extérieur* de A l'ouvert

$$\complement_E(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E(A)}}$$

2.5.3 Proposition

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors l'intérieur, l'extérieur et la frontière de A forment une partition de E.

2.6 Topologie relative à une partie

2.6.1 Définition (*voisinage relatif*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $a \in A$, et $W \in \mathcal{P}(A)$.
Alors W est un *voisinage relatif à* A de a si

$$\exists W' \in v(a) \mid W = W' \cap A$$

On note

$$v_A(a) = \{W \in \mathcal{P}(A) \mid \exists W' \in v(a) \mid W = W' \cap A\}$$

l'ensemble des voisinages relatifs à A de a.

2.6.2 Définition (*ouvert, fermé relatif*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $W \in \mathcal{P}(A)$.

- Alors W est un *ouvert relatif à* A de E si

$$\forall a \in A,\ W \in v_A(a)$$

- W est un *fermé relatif à* A de E si c'est le complémentaire d'un ouvert relatif à A.

2.6.3 Caractérisation

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

- $\forall O \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$O \text{ ouvert relatif à } A \;\Leftrightarrow\; \exists O' \text{ ouvert de } E \mid O = O' \cap A$$

- $\forall W \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$W \text{ fermé relatif à } A \;\Leftrightarrow\; \exists W' \text{ fermé de } E \mid W = W' \cap A$$

2.6.4 Caractérisation séquentielle

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
$\forall F \in (A)$, on a :

$$F \text{ fermé relatif à } A \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}},\ (\exists \ell \in A \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell) \Rightarrow \ell \in F$$