Info : Trying to proove something

1 Définition inductive d'un arbre binaire

On définit inductivement un arbre binaire par :

$$\frac{}{\text{Vide est un arbre binaire}} \qquad \frac{}{\text{Feuille est un arbre binaire}}$$

$$\frac{g \text{ est un arbre binaire} \quad d \text{ est un arbre binaire}}{\text{Nœud}(g, d) \text{ est un arbre binaire}}$$

2 Proposition

Soit A un arbre binaire dont on note n le nombre de nœuds internes.
Alors :

(1) A a au plus $n+1$ feuilles ;
(2) Si A est strict, alors A a exactement $n+1$ feuilles ;
(3) Si A est de hauteur h, alors A a au plus 2^h feuilles ;
(4) Si A a k feuilles, alors A est de hauteur au moins $\lceil \log_2(k) \rceil$

☐ Démonstration :

(1) (2) Par récurrence :

Init : pour $n = 0$, il n'y a pas de nœud interne et donc au maximum seulement la racine (nécessairement si A strict) et il y a au maximum 1 feuille.

Hérédité : supposons $\exists n \in \mathbb{N} \mid A$ ait n nœuds internes et au plus $n+1$ feuilles.

Alors pour chaque feuille, on peut ajouter au plus (exactement si A strict) 2 feuilles, et il y aura $2n+2$ feuilles et $n+n+1 = 2n+1$ nœuds internes, d'où la récurrence.

(3) Par induction structurelle :

Si A est vide, $h = -1$, et $2^{-1} = \dfrac{1}{2} \geqslant 0$ et A a bien au plus 2^h feuilles.

Si A est une feuille, $h = 0$ et a $1 = 2^0 = 2^h$ feuille, donc bien au plus 2^h feuilles.

Si $A = \text{Nœud}(g, d)$, avec g a au plus 2^{h_g} feuilles, et de même pour d, comme $h_g = h_d = h-1$, alors A a au plus $2^{h_g} + 2^{h_d} = 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$ feuilles, d'où l'induction.

(4) Si A a k feuilles, alors par (3), $k \leqslant 2^h \Rightarrow \log_2(k) \leqslant h \Rightarrow h \geqslant \lceil \log_2(k) \rceil$ ■