Maths : Topologie

Contents

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Norme

1.1 Définition (*norme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une *norme* sur E est une application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

- la séparation :
$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
- l'homogénéité :
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$
- l'inégalité triangulaire :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$$

1.2 Proposition (*inégalité triangulaire renversée*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N une norme sur E.
On a :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x + y)$$

1.3 Convexité

1.3.1 Définition (*segment*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $A, B \in E$.
Le *segment* $[A, B]$ est définit par :

$$\begin{aligned} [A, B] &= \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in [0\ ;\ 1]\} \\ &= \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0\ ;\ 1]\} \end{aligned}$$

1.3.2 Définition (*Partie convexe*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$.
Alors $\mathcal{A}$ est dite *convexe* si, et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A},\ [A, B] \in \mathcal{A}$$

1.4 Normes usuelles

1.4.1 Sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} |x_k| \end{aligned}$$

Ces applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

1.4.2 Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On peut munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ de normes définies par, $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} \\ \|x\|_\infty &= \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{aligned}$$

1.5 Fonctions lipschitziennes

Soient $[E, \|\cdot\|_E], [F, \|\cdot\|_F]$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.
Alors f est dite k-lipschitzienne si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\,\|y - x\|_E$$

1.6 Définition (*normes équivalentes*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $N, \widetilde{N}$ deux normes sur E.

Les normes N et $\widetilde{N}$ sont *équivalentes* si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists k, \widetilde{k} \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in E, \left| \begin{array}{l} N(x) \leqslant \widetilde{k}\widetilde{N}(x) \\ \widetilde{N}(x) \leqslant kN(x) \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k, k' \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in E,\ k'\widetilde{N}(x) \leqslant N(x) \leqslant k\widetilde{N}(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in E,\ \frac{1}{k}\widetilde{N}(x) \leqslant N(x) \leqslant k\widetilde{N}(x) \end{aligned}$$

2 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, on désigne par $[E, \|\cdot\|]$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Voisinages

2.1.1 Définition (*voisinage*)

Soit $a \in E$.
Un *voisinage* de a est une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A$$

On note $v(a)$ l'ensemble des voisinages de a :

$$\forall a \in E,\ v(a) = \left\{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A\right\}$$

2.1.2 Propriétés

On a :

- $\forall a \in E,\ \forall V \in v(a), a \in V$
- $\forall (a, W) \in E \times \mathcal{P}(E),\ (\exists V \in v(a) \mid V \subset W) \Rightarrow W \in v(a)$

Soit $I \neq \varnothing$ un ensemble d'indexation, et $a \in E$.

$$\forall \left(V_i\right)_{i \in I} \subset v(a),\ \bigcup_{i \in I} V_i \in v(a)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in E$.

$$\forall (V_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]} \subset v(a),\ \bigcap_{k=1}^{n} V_k \in v(a)$$

- $\forall a, b \in E \mid a \neq b,\ \exists V, W \in v(a) \mid V \cap W = \varnothing$
- Deux normes équivalentes définissent la même notion de voisinage.

2.1.3 Extension à l'infini

On appelle *voisinage de* $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) toute partie $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\exists A \in \mathbb{R} \mid \ ]A\ ;\ +\infty[\subset V \quad (\text{resp. }]-\infty\ ;\ A[\subset V)$$

On note

$$\begin{aligned} v(+\infty) &= \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists A \in \mathbb{R} \mid \ ]A\ ;\ +\infty[\subset V\} \\ v(-\infty) &= \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists A \in \mathbb{R} \mid \ ]-\infty\ ;\ A[\subset V\} \end{aligned}$$

2.2 Ouverts, fermés

2.2.1 Définition (*Ouvert*)

Un ouvert de $[E, \|\cdot\|]$ est une partie de E vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall O \in \mathcal{P}(E),\ O \text{ ouvert} &\Leftrightarrow \forall a \in O,\ O \in v(a) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in O,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a,r) \subset O \end{aligned}$$

2.2.2 Définition (*Fermé*)

Un fermé de $[E, \|\cdot\|]$ est une partie vérifiant :

$$\forall F \in \mathcal{P}(E),\ F \text{ fermé} \Leftrightarrow \complement_E(F) = E \setminus F \text{ ouvert}$$

2.2.3 Propriétés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $I \neq \varnothing$ un ensemble d'indexation.

- $\forall (O_i)_{i\in I}$ ouverts, $\displaystyle\bigcup_{i\in I} O_i$ ouvert
- $\forall (O_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ ouverts, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} O_k$ ouvert
- $\forall (F_i)_{i\in I}$ fermés, $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$ fermé
- $\forall (F_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ fermés, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ fermé
- Soient $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\mathscr{B}_o(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\} \text{ ouvert}$$

$$\mathscr{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\} \text{ fermé}$$
$$\mathscr{S}(a,r) = \mathscr{B}_f(a,r) \setminus \mathscr{B}_o(a,r) \text{ fermé}$$

Soient $([E_k, N_k])_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés. On note $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$. On munit E de la norme produit N.
Alors

$$\forall (O_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ O_k \text{ ouvert de } E_k,\ \prod_{k=1}^{n} O_k \text{ ouvert de } [E,N]$$

$$\forall (F_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]} \mid \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ F_k \text{ fermé de } E_k,\ \prod_{k=1}^{n} F_k \text{ fermé de } [E,N]$$

2.3 Adhérence

2.3.1 Définition (*Adhérence*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $a \in E$.
Alors a est dit *adhérent* à A lorsque

$$\forall V \in v(a),\ V \cap A \neq \varnothing$$

On note alors $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, appelée *adhérence de A* :

$$\overline{A} = \{a \in E \mid \forall V \in v(a),\ V \cap A \neq \varnothing\}$$

2.3.2 Définition (*densité*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On dit que A est *dense* dans E lorsque

$$\overline{A} = E$$

2.3.3 Caractérisation de l'adhérence (intersection)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ A \subset F}} F$$

Donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

2.3.4 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- $A = \overline{A} \iff A$ fermé
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (car $\overline{A}$ fermé)
- $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

2.3.5 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $a \in E$.
Alors :

$$a \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

2.3.6 Corollaire

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.
On a :

- $\forall x \in E, x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$
- A fermé dans $E \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ (\exists \ell \in E \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell) \Rightarrow \ell \in A$
- A dense dans $E \iff \forall x \in E,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

2.4 Intérieur

2.4.1 Définition (*Intérieur*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $a \in E$.
Alors a est dit *intérieur* à A lorsque

$$\begin{aligned} & \exists O \text{ ouvert de } E \left| \begin{array}{l} O \subset A \\ a \in O \end{array} \right. \\ \iff & \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathscr{B}_o(a, r) \subset A \\ \iff & A \in v(a) \end{aligned}$$

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé *intérieur* de A :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid A \in v(x)\}$$

2.4.2 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On a :
- $\mathring{A} \subset A$
- $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

2.4.3 Caractérisation (union)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert de } E \\ O \subset A}} O$$

Donc $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus A.

2.4.4 Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On a :
- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
- $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$
- $\complement_E(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E(A)}}$
- $\complement_E\left(\mathring{A}\right) = \overline{\complement_E(A)}$
- A ouvert $\Leftrightarrow \quad A = \mathring{A}$

2.5 Frontière

2.5.1 Définition (*Frontière*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle *frontière* de A, et on le note souvent $Fr(A)$, l'ensemble

$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \complement_{\overline{A}}\left(\mathring{A}\right) = \overline{A} \cap \complement_E\left(\mathring{A}\right)$$

2.5.2 Définition (*Extérieur*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On appelle *extérieur* de A l'ouvert

$$\complement_E(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E(A)}}$$

2.5.3 Proposition

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors l'intérieur, l'extérieur et la frontière de A forment une partition de E.

2.6 Topologie relative à une partie

2.6.1 Définition (*voisinage relatif*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $a \in A$, et $W \in \mathcal{P}(A)$.
Alors W est un *voisinage relatif à* A de a si

$$\exists W' \in v(a) \mid W = W' \cap A$$

On note

$$v_A(a) = \{W \in \mathcal{P}(A) \mid \exists W' \in v(a) \mid W = W' \cap A\}$$

l'ensemble des voisinages relatifs à A de a.

2.6.2 Définition (*ouvert, fermé relatif*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, et $W \in \mathcal{P}(A)$.

- Alors W est un *ouvert relatif à* A de E si

$$\forall a \in A,\ W \in v_A(a)$$

- W est un *fermé relatif à* A de E si c'est le complémentaire d'un ouvert relatif à A.

2.6.3 Caractérisation

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

- $\forall O \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$O \text{ ouvert relatif à } A \;\Leftrightarrow\; \exists O' \text{ ouvert de } E \mid O = O' \cap A$$

- $\forall W \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$W \text{ fermé relatif à } A \;\Leftrightarrow\; \exists W' \text{ fermé de } E \mid W = W' \cap A$$

2.6.4 Caractérisation séquentielle

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
$\forall F \in (A)$, on a :

$$F \text{ fermé relatif à } A \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}},\; \left(\exists \ell \in A \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\right) \Rightarrow \ell \in F$$

3 Limites, continuité d'une application

Dans toute cette section, on pose deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel normés $[E, \|\cdot\|_E]$ et $[F, \|\cdot\|_F]$.

3.1 Limites

3.1.1 Définition (*Limite en un point*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $f \in F^A$, et $a \in \overline{A}$.
On dit que f *admet une limite* $b \in F$ *en* a si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\; \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in A,\; \|x-a\|_E \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\; \exists \delta_\varepsilon \mid f(\mathscr{B}_f(a,\delta_\varepsilon) \cap A) \subset \mathscr{B}_f(b,\varepsilon) \\
\overset{\text{si } a\in A}{\Leftrightarrow}\quad & \forall V \in v_F(b),\; \exists W \in v_A(a) \mid f(W) \subset V \\
\overset{\text{si } a\in A}{\Leftrightarrow}\quad & \forall V \in v_F(b),\; f^{-1}(V) \in v_A(a)
\end{aligned}$$

Remarque : deux normes équivalentes définissent la même notion de voisinage et d'adhérence, donc la même notion de convergence : changer de norme pour une autre qui lui est équivalente ne change pas l'existence ni la valeur d'une limite.

3.1.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $f \in F^A$, et $a \in \overline{A}$.
Alors f admet une limite en a si et seulement si

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\; \exists \ell \in F \mid f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Et dans ce cas, la limite de f est ℓ.

Remarque : peut être intéressant sans la valeur de la limite.

3.1.3 Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_k)_{k\in[\![1\;;\;n]\!]}$ des espaces vectoriels normés, $G = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} G_k$ que l'on munit de la norme produit, et $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.

Soient $\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ f_k \in {G_k}^A$, et :

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

Alors pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in G$ et $a \in \overline{A}$, on a :

$$\lim_a f = \ell \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ \lim_a f_k = \ell_k$$

3.2 Continuité d'une application

3.2.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.

• La fonction f est *continue en* $a \in A$ si et seulement si

$$\exists \ell \in F \mid f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

et dans ce cas, $\ell = f(a)$, $i.e$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta_\varepsilon \mid \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$$

• La fonction f est *continue* (sur A) si et seulement si elle est continue en tout point de A.
Dans ce cas, on note

$$f \in \mathcal{C}^0(A, F)$$

3.2.2 Propriétés

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_k)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés, $G = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} G_k$ que l'on munit de la norme produit, et $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$.
Soient $\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ f_k \in {G_k}^A$, et :

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

Alors f est continue en $a \in A$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\ f_k \in \mathcal{C}^0(A, G_k)$$

• Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $a \in A$, et $f \in F^A$.
Alors si f est continue en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

• Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$. Alors $\mathcal{C}^0(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de F^A.

3.2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $a \in A$, et $f \in F^A$.
Alors f est continue en a si et seulement si

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\ f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

3.2.4 Propriétés (exemples d'applications continues)

- Une application lipschitzienne est continue.

- On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, et on note $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ une de ses $\mathbb{K}$-bases.
On pose $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^n) \setminus \varnothing$ finie, et $(\lambda_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K}$.

Alors l'application polynômiale (en les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$)

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{i\in I \\ i=(i_1,\dots,i_n)}} \lambda_i \prod_{k=1}^{n} (e_k^*(x))^{i_k} \end{array}$$

est continue.

3.2.5 Lien avec les ouverts

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, et $f \in F^A$.
Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} f \in \mathcal{C}^0(A,F) & \Leftrightarrow & \forall O \text{ ouvert de } F,\ f^{-1}(O) \text{ ouvert relatif à } A \\ & \Leftrightarrow & \forall F \text{ fermé de } F,\ f^{-1}(F) \text{ fermé relatif à } A \end{array}$$

3.2.6 Propriété

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \varnothing$, $B \in \mathcal{P}(A) \mid \overline{B} = A$, et $f, g \in \mathcal{C}^0(A,F)$
Alors

$$f_{|B} = g_{|B} \ \Rightarrow\ f = g$$

3.3 Cas des applications linéaires

3.3.1 Théorème (CNS de continuité pour des applications linéaires)

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

On a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^0(E,F) &\Leftrightarrow f \text{ continue en } 0_E \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant \alpha \|x\|_E \\ &\Leftrightarrow f \text{ lipschitzienne} \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E \mid\ \|x\|_E \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M \end{aligned}$$

On note

$$\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{C}^0(E,F) \cap \mathcal{L}(E,F)$$

C'est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

3.3.2 Définition (*norme d'opérateurs*)

On peut munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E,F)$ d'une norme dite *subordonnée* (à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$), ou *norme d'opérateurs*, par :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{L}_c(E,F),\ |\!|\!|u|\!|\!| = \|u\|_{\mathrm{op}} &= \sup\left\{ \|u(x)\|_F \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in E \\ \|x\|_E = 1 \end{array} \right\} \\ &= \sup\left\{ \|u(x)\|_F \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in E \\ \|x\|_E \leqslant 1 \end{array} \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \;\middle|\; x \in E \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

Remarque : une norme subordonnée dépend des normes choisies sur E et F.

3.3.3 Propriété (*sous-multiplicabilité*)

Soient $[E, \|\cdot\|_E]$, $[F, \|\cdot\|_F]$, $[G, \|\cdot\|_G]$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soient $\left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}_c(E,F) \\ v \in \mathcal{L}_c(F,G) \end{array} \right.$.

Alors

$$v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,G)$$

et

$$|\!|\!|v \circ u|\!|\!| \leqslant |\!|\!|v|\!|\!| \cdot |\!|\!|u|\!|\!|$$

3.3.4 Continuité d'une application multilinéaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\left[A_k, \|\cdot\|_{A_k}\right]\right)_{k \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ des espaces vectoriels normés, $A = \prod_{k=1}^{n} A_k$ munit de la norme produit, et $f \in F^A$ une application n-linéaire.

Alors

$$f \in \mathcal{C}^0(A, F) \;\Leftrightarrow\; \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x_1, \ldots, x_n) \in A,\; \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leqslant \alpha \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_{A_k}$$

4 Compacité

On note, dans cette section, $[E, \|\cdot\|_E]$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

4.1 Définition (*compact*)

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors la partie A est dite *compacte* lorsque toute suite de points de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A, *i.e* lorque

$$\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\; \exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ strictement croissante},\; \exists \ell \in A \mid x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Remarque : deux normes équivalentes définissent la même notion de convergence et de limite, donc *a fortiori* la même notion de compacité.