

Maths : Caractérisations séquentielles

1 Bornes inférieures, supérieures

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \emptyset$.

(1) Soit M un majorant de A , i.e., $\forall x \in A, x \leq M$. On a alors :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$$

(2) Soit m un minorant de A , i.e., $\forall x \in A, m \leq x$. On a alors :

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m$$

2 Densité

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Alors A est *dense* dans \mathbb{R} si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

3 Limites

Soient $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction définie au voisinage de a . Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_f \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

4 Continuité

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en a . Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_f \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$$