

Quantum Hall Effects 量子 Hall 效应

Mark O. Goerbig
Laboratoire de Physique des Solides, CNRS UMR 8502
Université Paris-Sud, France

Revised & Translated by LASERDOG
Chaoli Translation Group

April 13, 2017

目录

1 简介	1
1.1 (量子)Hall 效应的历史	1
1.1.1 研究的系统	1
1.1.2 经典 Hall 效应	2
1.1.3 Shubnikov-de Haas 效应	3
1.1.4 整数量子 Hall 效应	4
1.1.5 分数量子 Hall 效应	5
1.1.6 石墨烯中的相对论性量子 Hall 效应	6
1.2 二维电子系统	6
1.2.1 场效应管	6
1.2.2 半导体异质结	8
1.2.3 石墨烯	8
2 Landau 量子化	9
2.1 $B = 0$ 下的单粒子 Hamiltonian 原型	9
2.1.1 自由粒子的 Hamiltonian	9
2.1.2 石墨烯中的 Dirac Hamiltonian	10
2.2 非零磁场的 Hamiltonian	12
2.2.1 Peierls 替换与最小耦合	12
2.2.2 量子力学处理	12
2.3 Landau 能级	13
2.3.1 非相对论性 Landau 能级	14
2.3.2 相对论性 Landau 能级	15
2.3.3 能级简并	16
2.3.4 能级简并的半经典解释	17
2.4 本征态	19
2.4.1 对称规范下的波函数	19
2.4.2 Landau 规范下的波函数	21
3 整数量子 Hall 效应	23
3.1 外静电势下电子的运动	23
3.1.1 半经典处理	24
3.1.2 x -平移对称性的静电势	25
3.2 单一 Landau 能级的电导	26
3.2.1 边界态	27
3.3 两端 vs 六端法测量	28
3.3.1 两端法测量	28
3.3.2 六端法测量	29
3.4 整数量子 Hall 效应和过滤沥滤法	30
3.4.1 光学测量中的延展/局域体态	32
3.4.2 平台期的转移与标度变换律	33
3.5 石墨烯中的相对论性 Hall 效应	34

4 强关联与分数量子 Hall 效应	39
4.1 库伦相互作用的效应	39
4.2 Laughlin 理论	41
4.2.1 二粒子波函数与 Laughlin 规范	41
4.2.2 Haldane 赝势	43
4.2.3 分数电荷的准粒子与准空穴	45
4.2.4 分数电荷准粒子的实验观察	47
4.2.5 Laughlin 的等离子体类比	48
4.3 分数统计	49
4.3.1 波色子, 费米子, 任意子——简介	49
4.3.2 Laughlin 准粒子的统计性质	51
4.4 Laughlin 波函数的推广	52
4.4.1 复合费米子	52
4.4.2 半满 Landau 能级和 Pfaffian 态	54
5 多组分的量子 Hall 系统简介	57
5.1 多组分系统的不同之处	57
5.1.1 电子自旋的效应	57
5.1.2 石墨烯: 四组分量子 Hall 系统	58
5.1.3 双层量子 Hall 系统	58
5.1.4 宽量子阱	59
5.2 $\nu = 1$ 态	59
5.2.1 量子 Hall 反铁磁性	60
5.2.2 双层系统的激发态凝聚	61
5.2.3 石墨烯的 $SU(4)$ 反铁磁性	63
5.3 多组分波函数	64
5.3.1 Halperin 波函数	64
5.3.2 Halperin 波函数的推广	67
A 石墨烯的电子能带结构	69
B 有质量的 Dirac 粒子的 Landau 能级	73

Chapter 1

Introduction

简介

量子 Hall 效应——二维 (2D) 电子在强磁场下的研究 [见图. 1.1(a)] 在过去的几十年里成为了一个非常重要的研究课题。对于量子 Hall 问题的兴趣源于其处于低维量子系统和强关联电子系统 (或许是无尽的凝聚态物理中最主要的问题) 的交合处。理论角度上说, 学习量子 Hall 系统需要详尽阐述一系列新概念, 其中很多是在高能物理的量子场论中而不是凝聚态物理中熟知的, 比如电荷分数化, 非对易几何, 拓扑场论等。

这个讲义是出于提供一个量子 Hall 物理的基本知识的合集, 从而使得有兴趣的研究生能够获得他/她自己在这方面学习的能力。我们由此努力的完成了这个讲义, 不可避免的舍去了一些我们认为超出这个讲义应有的介绍性的内容——这些在我们给出的参考文献或者详细的教科书中有讲述。

1.1 History of the (Quantum) Hall Effect (量子)Hall 效应的历史

1.1.1 The physical system 研究的系统

我们的主要的关于量子 Hall 系统——在垂直磁场下的 2D 电子系统——的知识, 源自于对电运输的测量。我们驱动电流 I 通过样品, 并测量纵向和横向的电阻 (也叫 Hall 电阻)。这两种电阻的不同是至关重要的, 而且可以拓扑的来定义: 考虑通过样品流经任意两个接触点 [图. 1.1(a) 的 C1 和 C4] 的电流, 并在你心中画一条连接着两个接触点的线。纵向电阻就是你测了两个连线不会穿过 C1 和 C4 连线的点之间的电阻。在图. 1.1(a) 中, 我们选 C5 和 C6 作为纵向电阻的测量。横向电阻则是通过连接两端的必然会穿过连接 C1 和 C4 的线 [比如图. 1.1(b) 中的 C3 和 C5]。

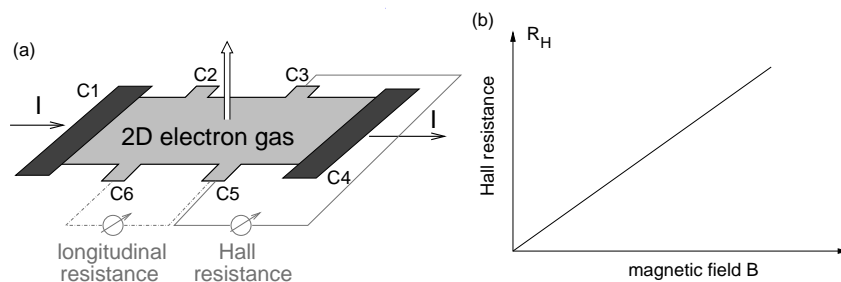


图 1.1: (a) 处在垂直磁场中的 2D 电子 (量子 Hall 系统)。在传统的输运测量中, 在 C1 和 C4 之间施加电流 I 。纵向电阻可以是 C5 和 C6 之间 (或者 C2 和 C3 之间) 的测量。横向 (或 Hall) 电阻是通过比如说 C3 和 C5 中间测量得到的。(b) 经典 Hall 电阻关于磁场的函数。

1.1.2 Classical Hall effect 经典 Hall 效应

显然的，如果有量子 Hall 效应，我们自然会期望有经典 Hall 效应。事实上就是这样，而且历史可以追溯到 1879 年 Hall 展示薄金属片的横向电阻 R_H 随垂直磁场强度 B 线性变化 [图. 1.1(b)] 那时去。

$$R_H = \frac{B}{qn_{el}}, \quad (1.1)$$

其中， q 是载流子的电量（电子导电时 $q = -e$ ，其中 e 在本讲义此后的地方被规定为正数。），而 n_{el} 是 2D 的载流子密度。大家可以简单地想成是 Lorentz 力导致带电粒子运动的转向，从而形成样品由 C1 和 C4 分割的两端的密度梯度的堆积。值得注意的是经典 Hall 电阻在现在仍然被广泛的用来判定导电材料的带电粒子的电荷以及密度。定量的讲，经典 Hall 效应可以用 Drude 模型在金属中的扩散输运来理解。在这个模型中，我们可以考虑一个载流子，携带动量 \mathbf{p} ，由运动方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m_b} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau},$$

来描述，其中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 分别是电场和磁场。这里我们考虑了带负电荷的粒子（比如，电子 $q = -e$ ），而其有效质量[†] m_b 。最后一项解释了由杂质带来的耗散和弛豫。从运动方程的稳态解 $d\mathbf{p}/dt = 0$ 可以得到宏观的输运性质，比如说系统的电阻率或电导率，而对于 2D 电子来说 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$

$$\begin{aligned} eE_x &= -\frac{eB}{m_b}p_y - \frac{p_x}{\tau}, \\ eE_y &= \frac{eB}{m_b}p_x - \frac{p_y}{\tau}, \end{aligned}$$

其中我们设磁场在 z -方向。上面的式子中，自然地出现了特征频率

$$\omega_C = \frac{eB}{m_b}, \quad (1.2)$$

我们称为**回转频率**，因为它标志着带电粒子在磁场中的回旋运动。通过 Drude 电导率，

$$\sigma_0 = \frac{n_{el}e^2\tau}{m_b}, \quad (1.3)$$

我们可以把方程重写为

$$\begin{aligned} \sigma_0 E_x &= -en_{el}\frac{p_x}{m_b} - en_{el}\frac{p_y}{m_b}(\omega_C\tau), \\ \sigma_0 E_y &= en_{el}\frac{p_x}{m_b}(\omega_C\tau) - en_{el}\frac{p_y}{m_b}, \end{aligned}$$

或者用电流密度来表示，

$$\mathbf{j} = -en_{el}\frac{\mathbf{p}}{m_b}, \quad (1.4)$$

如果用矩阵形式来写的话， $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}$ ，电阻率张量为

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_C\tau \\ -\omega_C\tau & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \mu B \\ -\mu B & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

最后一步中，像前面讲过的，将迁移率定义为

$$\mu = \frac{e\tau}{m_b}. \quad (1.6)$$

[†]由能带决定

从前面的式子中，我们可以很快地得到 Hall 电阻 (电阻率矩阵 ρ 的非对角元)

$$\rho_H = \frac{\omega_C \tau}{\sigma_0} = \frac{eB}{m_b} \tau \times \frac{m_b}{n_{el} e^2 \tau} = \frac{B}{en_{el}}. \quad (1.7)$$

而类似的，从(1.5)中，通过矩阵求逆，电导率矩阵为

$$\sigma = \rho^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_L & -\sigma_H \\ \sigma_H & \sigma_L \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

其中 $\sigma_L = \sigma_0/(1 + \omega_C^2 \tau^2)$ ，而 $\sigma_H = \sigma_0 \omega_C \tau / (1 + \omega_C^2 \tau^2)$ 。值得讨论的是，在理论上没有杂质的极限下，即 $\omega_C \tau \rightarrow \infty$ 这种非常长的散射时间下电阻率和电导率的矩阵分别为

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B}{en_{el}} \\ -\frac{B}{en_{el}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{以及} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{en_{el}}{B} \\ \frac{en_{el}}{B} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

注意到，如果我们只关注**纵向电阻率**的话，我们会得到非常反直觉的结论，即 (纵向) 电阻率会和 (纵向) 电导率同时趋于零。在干净的样品的极限 $\omega_C \tau \rightarrow \infty$ 下，存在磁场的系统的输运性质完全由非对角元，即横向电阻率/电导率成分来描述。我们会在量子 Hall 系统中讨论整数量子 Hall 效应时再来看这一点。

Resistivity and resistance

电阻率与电阻

上面对于电子输运的处理都是用 Drude 模型来计算有磁场下的经典耗散 2D 电子系统的电导率或电阻率的。然而，实验上并不能测量理论上很好计算的电导率或者电阻率，而是测量**电导**或者**电阻**。通常来说，这些量彼此之间是相关的，但是这取决于导体的几何形状——电阻 R 与电阻率 ρ 的关系为 $R = (L/A)\rho$ ，其中 L 是导体的长度，而 A 是截面大小。从尺度变换的角度来说，一个 d -维的导体，截面大小按照 L^{d-1} 变换，所以电阻和电阻率的尺度变换行为是

$$R \sim \rho L^{2-d}, \quad (1.10)$$

从中可以立刻发现 2D 导体是很特殊的。从量纲的角度来说，2D 的电阻和电阻率是一样的，而且电阻是尺度不变的。这种尺度缩放的观点忽略了长度 L 和宽度 W (2D 的散射截面大小) 并不非要一样：事实上，2D 导体的电阻取决于所谓的**长宽比** L/W ，前面有一个系数 $f(L/W)$ [8]。然而，对于横向 Hall 电阻来说，长度反而是一个散射截面大小的作用，因此 Hall 电阻率和 Hall 电阻确实是一样的，即 $f = 1$ 。我们在第3章中会看到，这样的结论不仅仅在经典层面，对量子 Hall 效应也成立。不仅如此，量子 Hall 效应更不要求输运的样品有特定的几何性质，所以 Hall 电阻的测量十分精准 (准确到 10^{-9})。量子 Hall 效应如今被用来给电阻定标。

1.1.3 Shubnikov-de Haas effect

Shubnikov-de Haas 效应

首先在强磁场下的 2D 电子输运实验中与量子现象相关的是 1930 年发现的 Shubnikov-de Haas 效应 [9]。经典的电阻率张量的结果(1.5)规定纵向电阻率 $\rho_L = 1/\sigma_0$ (纵向电阻类似)，与磁场无关，然而 Shubnikov 和 de Haas 发现超过某些特定的磁场强度之后纵向电阻关于磁场发生振荡，如图 1.2(a)；而 Hall 电阻不像纵向电阻那样振荡，仍然是 B 的线性关系，与经典 Drude 模型一致(1.7)。Landau 很快的解释了 Shubnikov-de Haas 效应是有 2D 电子在强磁场下能量量子化导致的。这即为**Landau 量子化**，我们在第2节会讲解。通俗的说，Landau 量子化相当于对回转半径的量子化，即电子在磁场中做圆周运动的量子化。这就导致了其动能量子化为所谓的 Landau 能级 (LLs)， $\epsilon_n = \hbar \omega_C (n + 1/2)$ ，其中 n 是整数。为了使这个量子化有效，磁场必须强到使得电子的一个完整的圆周运动周期中不会发生碰撞，即 $\omega_C \tau > 1$ 。这个条件定义了临界磁场 $B_c \simeq m_b / e \tau = \mu^{-1}$ (其取决于迁移率)，超过它纵向电阻就开始振荡。注意当今的样品最高的迁移率可以达到 $\mu \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs} = 10^3 \text{ m}^2/\text{Vs}$ ，从而只需要 $B_c \sim 1 \text{ mT}$ 就可以观察到 Shubnikov-de Haas 振荡。

这种效应可以用比 Drude 模型更精确一些的描述电子输运的理论模型 (比如说，Boltzman 输运方程) 来理解。其得到电导率和扩散方程的 Einstein 关系，以及纵向电阻率

$$\sigma_L = e^2 D \rho(E_F) \quad (1.11)$$

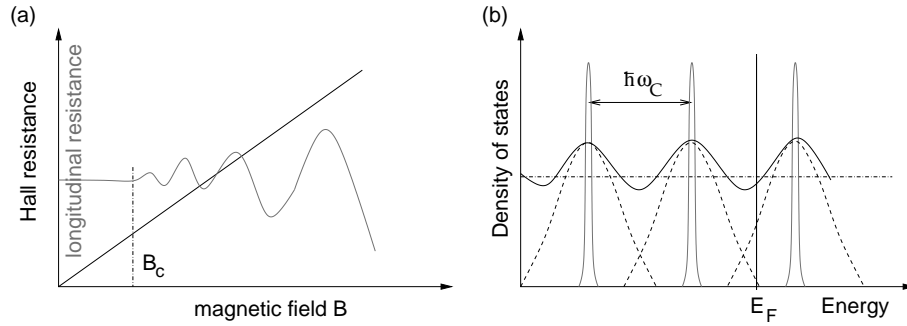


图 1.2: (a) the Shubnikov-de Haas 效应草图。超过临界磁场 B_c 之后, 纵向电阻 (灰色) 关于磁场强度开始震荡。Hall 电阻仍然是 B 的线性关系。(b) 态密度 (Density of states, DOS)。在干净的系统, DOS 包含等距分布的处于能量为 $\epsilon_n = \hbar\omega_C(n + 1/2)$ 的峰 (灰色), 而在有高浓度的杂质的样品中, 峰会被展宽 (dashed 线)。连续的黑线表示对峰包括交叠部分的和, E_F 表示费米能。

表明会正比于在费米能 E_F 的态密度 (DOS) $\rho(E_F)$, 而不是电子密度¹。根据 Landau 量子化, 洁净系统的 DOS 在能量处于 $\epsilon_n = \hbar\omega_C(n + 1/2)$ 时包含一系列 delta 峰

$$\rho(\epsilon) = \sum_n g_n \delta(\epsilon - \epsilon_n),$$

其中 g_n 则是考虑了能级简并的结果。这些峰由于真实样品的杂质而被展宽 [见图. 1.2(b)], 从而 DOS 在能级 ϵ_n 处达到能量最大值。考虑样品内电子数恒定, 由零场的费米能位置决定而不与 B 相关²。当扫动磁场强度[†]时, LLs 的能级间距发生变化, DOS 在 E_F 恰好扫过一个 LL 的能量时候最大, 而在 E_F 处于两个紧邻的 LLs 之间的时候最小。这种 DOS 关于磁场的振荡从(1.11)中可以得到纵向电导率 (或电阻率), 这是 Shubnikov-de Haas 效应的核心。

1.1.4 Integer quantum Hall effect 整数量子 Hall 效应

50 年后, v. Klitzing, Dorda, 和 Pepper 在 1980 年发现了量子力学在磁场下的 2D 电子输运性质中有一个更有力的证据: 整数量子 Hall 效应 (IQHE)[10]。1985 年的诺贝尔奖就因为 v. Klitzing 的这项极为重要的发现而授予了他。

IQHE 的发现与材料科学的突破密切相关, 直接导致了制备高品质的场效应管, 从而实现了 2D 电子气。这些技术会在后面的一节中做简单的综述 (第 1.2 节)。

IQHE 在极低的温度下实现, 其能量尺度 $k_B T$ 比 LL 的间距 $\hbar\omega_C$ 要小得多。这个图中 Hall 电阻量子化了, 从而不再是经典中的那种与 B 的线性关系, 反而展现出了在某些特定磁场下的平台 (见图. 1.3)。在平台处, Hall 电阻是一个常数——实际上是 e^2/h 的整数分之一

$$R_H = \left(\frac{h}{e^2} \right) \frac{1}{n}, \quad (1.12)$$

其中 n 是整数。Hall 电阻的平台伴随着纵向电阻为零。这使得我们回想起 Shubnikov-de Haas 效应, 纵向电阻同样会趋于极小值, 尽管不是零。Shubnikov-de Haas 最小值点的纵向电阻的趋零确实可以用来决定从 Shubnikov-de Haas 到 IQHE 的 crossover[‡]。

¹然而, 需要注意费米能和 DOS 都是电子密度的函数。不仅如此, 考虑到更多的细节之后, 扩散系数 D 同样取决于态密度, 从而取决于外磁场。这影响到了振荡的具体形式, 但是并不会影响振荡的周期。

²实际上这是一个很粗糙的假定, 因为如果态密度是磁场的函数 $\rho(\epsilon, B)$, 费米能则有关系式

$$\int_0^{E_F} d\epsilon \rho(\epsilon, B) = n_{el}.$$

然而, Shubnikov-de Haas 振荡的基本形式可以在假定费米能恒定的前提下理解

[†]译者注: 扫动——和扫频一个用法的“扫”

[‡]译者注: 有的时候会被翻译为过渡

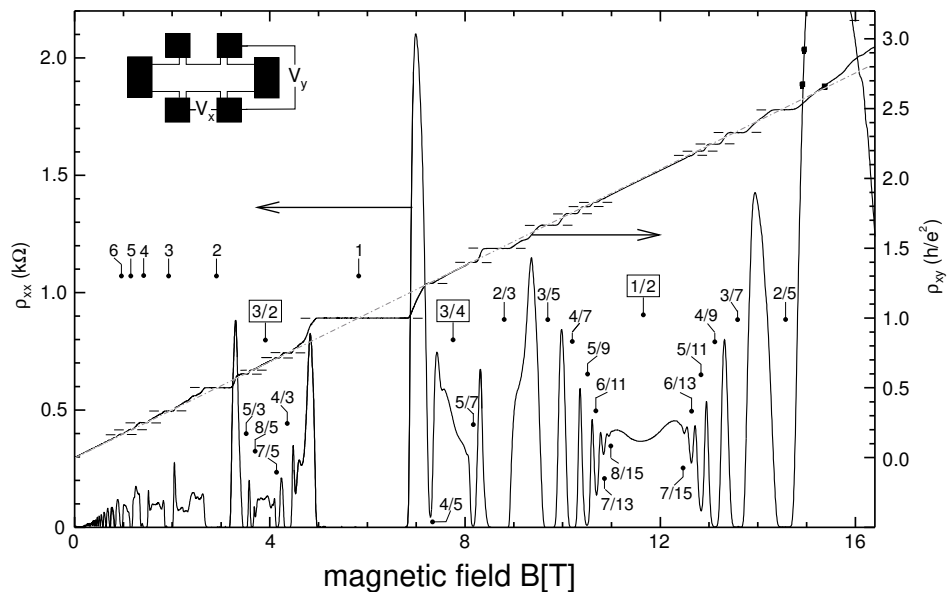


图 1.3: 量子 Hall 效应的通常样子 (由 J. Smet, MPI-Stuttgart 测量)。每一个 Hall 电阻的平台伴随着零纵向电阻。经典 Hall 电阻由 dashed-dotted 线表示。数字标识了平台：整数 n 表示 IQHE；而 $n = p/q$ ，其中 p 和 q 是整数，则标志了 FQHE。

值得说明的是，Hall 电阻的量子化(1.12)是普遍现象，即与样品的特性，比如几何尺寸啊，制备 2D 电子气的衬底啊，甚至杂质的浓度和分布啊都无关。这种普遍性是导致 Hall 电阻量子化的高精确性 (通常 $\sim 10^{-9}$) 的原因，而且如今——自从 1990 年——被用来做电阻标准³

$$R_{K-90} = h/e^2 = 25\,812.807\,\Omega, \quad (1.13)$$

也被称为 Klitzing 常数 [11, 12]。而且，在第 1.1.2 节中已经提到的，纵向电阻趋零标志的散射时间趋于无穷 [见 (1.9) 式]。这是另一个标志着这个效应的普适性的现象，即 IQHE 并不取决于特定的杂质（或者散射体）的排列特性。

对于 IQHE 的详细讨论，以及杂质的贡献，请见第 3 章。

1.1.5 Fractional quantum Hall effect 分数量子 Hall 效应

在发现了 IQHE 的三年之后，在更高品质，即更高迁移率的 2D 电子系统中发现了更意想不到的现象：分数量子 Hall 效应 (FQHE)。这个现象的名字就是被设立来与 IQHE，即 (1.12) 式中的 n 是整数，相对的。Tsui, Störmer 和 Gossard 发现了 $n = 1/3$ [13] 的 Hall 量子化电阻。从唯象的角度来说，这种现象十分容易令人联想到 IQHE：量子化的电阻平台，以及趋零的纵向电阻 (见图 1.3，其中可以同事看到 IQHE 和 FQHE)。1998 年的诺贝尔奖授予了 Tsui, Störmer 和 Laughlin，由于他们对于 FQHE 的实验发现和理论。

在发现了 $n = 1/3$ 的 FQHE 之后⁴，物理学家们发现了大量的不同形式的 FQHE，和各种理论描述。首先是 $2/5$ 和 $3/7$ 态 (即 $n = 2/5$ 和 $n = 3/7$) 这种 $p/(2sp \pm 1)$ 系列，其中 s 和 p 是整数。这个系列建立了一个很有趣的解释，把 FQHE 看成有电子“捕获”了偶数个磁通量子的特殊的准粒子的 IQHE，被称为复合费米子 (CF) 理论 [15, 16]。这种理论的基础我们在第 4.4 节讲述。1987 年，Willet *et al.* 发现了另一种有趣的 FQHE： $n = 5/2$ 和 $7/2$ [17]——它之所以有趣是因为那时之前只有 $n = p/q$ 中奇数分母的态才在单层系统中观测到了。从理论的角度，1991 年 Moore 和 Read [18]，以及 Greiter, Wilczek 和 Wen [19] 表明 FQHE 可

³角标 K 致敬 v. Klitzing，而 90 表示开始使用 IQHE 作为电阻的单位的的时间。

⁴ n 代表着 LLs 的占据数，通常有希腊字母 ν 表示，在第 2 节将会讨论到

能由一类非常特殊的, 称为 *Pfaffian* 的波函数来描述, 其包含粒子配对和非 Abel 统计的任意子型激发。这些粒子由于其潜在的量子计算价值, 在当今被充分的研究。任意子有关的物理性质我们在第4.3节简要介绍。最后, 我们会对 2003 年 Pan et al.[20] 的 $n = 4/11$ FQHE 做简要 (而且不完全的) 回顾: 它不符合上述 CF 序列, 但是却属于 FQHE 的一种生成 CF 序列而不是 IQHE 的 CF 序列。

1.1.6 Relativistic quantum Hall effect in graphene 石墨烯中的相对论性量子 Hall 效应

最近, 量子 Hall 物理经历了另一件意料之外的事情的推导: 在石墨烯——一种单原子厚的石墨层——中发现了“相对论性”量子 Hall 效应 [6, 7]。石墨烯中的电子表现的好像相对论性无质量粒子一样。形式上, 它们的量子力学性质不再由 (非相对论性的) Schrödinger 方程描述, 而是由 2D 相对论性 Dirac 方程 [21] 描述。而其导致的就是, 对石墨烯的电子动能的 Landau 量子化和常规的 (非相对论性的) 2D 电子系统不一样, 我们会在第2节讨论。这种“相对论性”量子 Hall 效应有不一样的 Hall 平台, 其 Hall 电阻 $R_H = h/e^2 n$ 中, 不再是 n 为整数, 而是 $n = \pm 2(2n' + 1)$ 其中 n' 为整数, 即 $n = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$ 。序列中的正负号 (\pm) 代表石墨烯中有两种对量子 Hall 效应载流子, 电子在导带而空穴在价带。我们会在第1.2节简要讨论, 通过场效应, 我们可以很容易的改变石墨烯中的载流子特性。

相互作用有的时候会影响到其它整数 Hall 平台的形成, 比如 $n = 0$ 和 $n = \pm 1$ [22], 就不会自然地出现在 $n = \pm 2(2n' + 1)$ 的相对论性量子 Hall 效应序列里面。此外, 最近还观察到了 $n = 1/3$ 的 FQHE, 尽管是在比图. 1.1(a) 更为简单的几何 (二端) 构型中 [23, 24]。

1.2 Two-Dimensional Electron Systems 二维电子系统

上面已经提到过, 量子 Hall 效应的历史与制备高迁移率的 2D 电子系统的技术进步是密切相关的。更高的迁移率使得人们可以去探测 Hall 曲线的精细结构, 从而看到那些不容易观察到的量子 Hall 态, 比如奇异 FQHE 态 (比如 $5/2, 7/2$ 或 $4/11$ 态)。这与光学里面追求更高的分辨率是一个意思: 更高的光学分辨率就可以去观察更微小的物体。类似的, 电子迁移率就相当于分辨率, 微小的物体就是量子 Hall 态。数量级上, 现今最好的 2D 电子气 (在 GaAs/AlGaAs 异质结中) 的特征迁移率为 $\mu \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 。

1.2.1 Field-effect transistors 场效应管

首个发现 IQHE 的样品被称为**金属-氧化物-半导体场效应管**(MOSFET)。金属层和半导体层 (通常为掺杂的硅) 中间放了绝缘的氧化物 (比如 SiO_2) 层 (见图. 1.4的内插图 I)。金属层的化学势可以通过栅极电压[†] V_G 来调节。当 $V_G = 0$ 时, 费米能在半导体中的位置处于能隙中, 且在掺杂的受主能级之下 [图. 1.4(a)]。利用正栅极电压 $V_G > 0$ 调低金属中的化学势, 金属中就会流入空穴, 从而通过场效应将电子从半导体中吸到半导体-绝缘体界面。这些电子占据受主能级, 从而半导体靠近界面的部分的能带向下弯曲, 填充的受主能级就会低于费米能 [图. 1.4(b)]。

栅极电压超过某一阈值之后, 半导体能带的弯曲强烈到不仅是受主能级, 就连靠近界面的导带都低于费米能了, 从而有一些电子填充到了上面 [图. 1.4(c)]。因此我们就有了通过这种三角形的结构来获得导带中的电子的束缚势的办法, 而且其动力学行为被量子化为 z -方向的离散能级子带 (见图. 1.4的内插图 II)。电子波函数在 z -方向延展, 但是通常来说 MOSFETs 只在最低的子带 E_0 上填充[‡], 从而电子就是纯粹的 2D 行为, 没有在 z -方向上的运动。

通常这些系统中的 2D 电子密度都在 $n_{el} \sim 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ 量级, 即远低于正常的金属。这实际上对于学习 IQHE 和 FQHE 很重要, 因为当 2D 电子密度在穿过系统的磁通密度 (以磁通量子 h/e 作单位) 的量级 $n_B = B/(h/e)$ 的时候, 这些现象才会显著。而金属表面电子密度在 10^{14} cm^{-2} 量级, 这需要非常高的磁场 (1000T 的量级) 来实现 $n_{el} \sim n_B$ 。

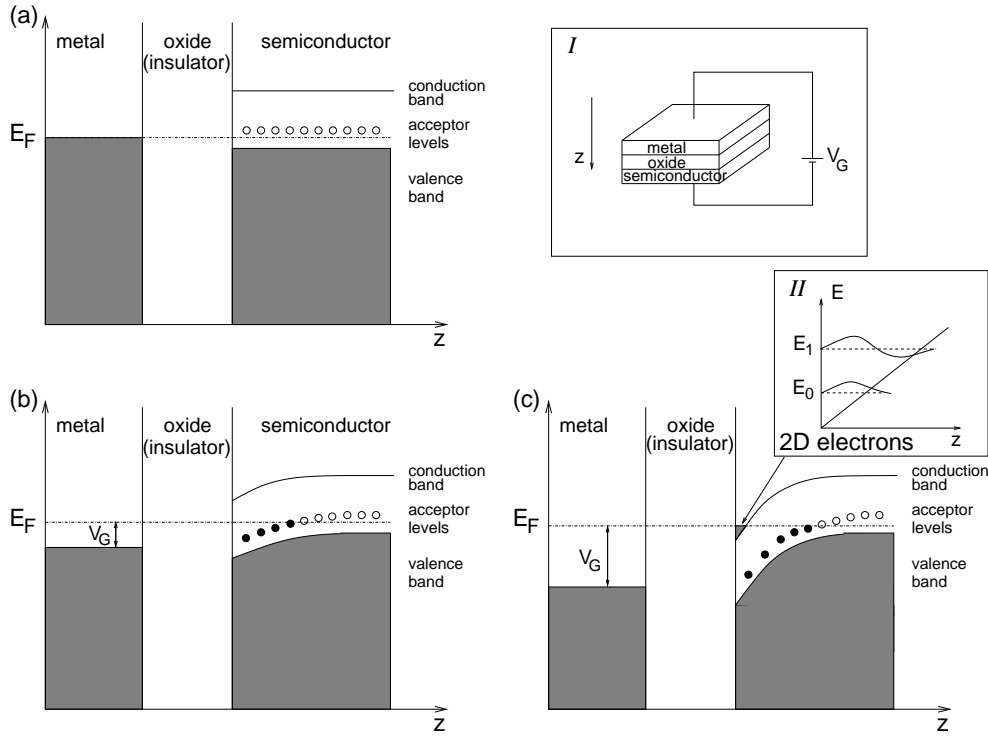


图 1.4: MOSFET(金属-氧化物-半导体场效应管)。内插图 I 为 MOSFET 的图示。(a) $V_G = 0$ 时的能级结构。金属部分, 能带填充到费米能级 E_F , 氧化物部分绝缘。半导体部分, 费米能处在能带的带隙上 (价带和导带中间)。接近价带的地方, 尽管比 E_F 高, 仍然是受主能级 (acceptor levels)。(b) 金属部分的化学势仍然由栅极电压 V_G 通过场效应来控制。其结果是半导体中被引入空穴, 且能带向下弯曲但仍高于阈值电压。(c), 在绝缘体界面附近的导带也被占据, 从而得到了 2D 电子气。这种束缚势得到的是三角形结构; 能级 (电子的子能带) 见内插图 II。

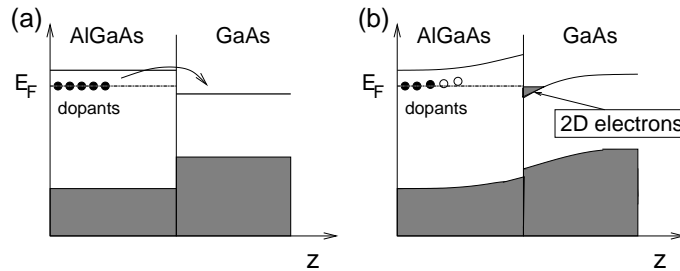


图 1.5: 半导体异质结 (GaAs/AlGaAs). (a) 距离表面一定距离处引入 AlGaAs 层的掺杂。费米能在能隙处, 位于掺杂能级处。GaAs 导带比掺杂能级要低, 因此掺杂层靠近界面的电子倾向于进入 GaAs 的导带。(b) 这种极化会弯曲两个半导体边界附近的能带, 从而在 GaAs 一边形成 2D 电子气。

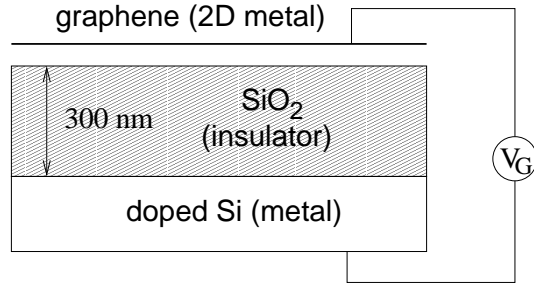


图 1.6: SiO₂ 衬底上的石墨烯示意图, 背栅极用金属性掺杂的硅。石墨烯-SiO₂-背栅极系统可以看成由栅极电压 V_G 控制电荷密度的电容器。

1.2.2 Semiconductor heterostructures 半导体异质结

MOSFETs 的迁移率通常在 $\mu \sim 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 的量级, 其主要受限于氧化物-半导体界面的品质, 而利用分子束外延生长 (MBE) 的半导体异质结——最主流的是 GaAs/AlGaAs 异质结——则克服了这项技术的困难, 实现了原子精度的界面, 而迁移率也达到了 $\mu \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 的量级。这是实现 FQHE 所必要的迁移率, 也确实在 GaAs/AlGaAs 样品中第一次观察到 [13]。

在 (一般的)GaAs/AlGaAs 中, 两种半导体并没有相同的能隙: GaAs 的能隙比被施主离子在距离界面一定距离处掺杂的 AlGaAs 小 [图. 1.5(a)]。费米能因此被钉在那些 AlGaAs 的施主能级上, 从而可能会比那些没被占据的 GaAs 中的导带能级更高, 从而能量的角度上来讲, 施主能级上的电子会倾向于去占据靠近界面处的 GaAs 的导带能级。从而, AlGaAs 的能带就会向上弯曲, GaAs 的则向下弯曲。类似于之前说过的 MOSFET, 这样就可以用三角约束势在 GaAs 侧获得 2D 电子气了。

1.2.3 Graphene 石墨烯

石墨烯——一种单原子厚的石墨层——是一种非常新奇的 2D 电子系统, 它可以看成是零交叠的半金属, 或者零能隙的半导体, 其导带和价带之间没有能隙。而如果没有掺杂的情况下, 费米能就恰好处在价带导带接触的位置, 其态密度线性的趋于零。

为了调制石墨烯中的费米能, 通常来说会把石墨烯薄片放在 300nm 厚的 SiO₂ 层上, 而这 SiO₂ 层又放在正掺杂的硅衬底上 (见图. 1.6)。这种三明治结构可以看成是一个电容, 其中硅层用来做背栅极 (图. 1.6), 电容量为

$$C = \frac{Q}{V_G} = \frac{\epsilon_0 \epsilon A}{d}, \quad (1.14)$$

其中 $Q = en_{2D}A$ 是电容的电荷量, 总电压 A , 栅极电压 V_G , SiO₂ 厚度 $d = 300$, 相对介电常数 $\epsilon = 3.7$ 。从而, 场效应导致的 2D 载流子密度为

$$n_{2D} = \alpha V_G \quad \text{with} \quad \alpha \equiv \frac{\epsilon_0 \epsilon}{ed} \simeq 7.2 \times 10^{10} \frac{\text{cm}^{-2}}{\text{V}}. \quad (1.15)$$

栅极电压大概在 -100 到 100 V 之间, 因此最大的载流子密度大概在 10^{12} cm^{-2} 量级, 而石墨烯自己的载流子密度是零, 下一章会讲到这点。栅极电压超过 $\pm 100 \text{ V}$ 之后, 电容会被击穿。

不同于半导体异质结中的 2D 电子气, 石墨烯中的迁移率很低: 通常在 $\mu \sim 10^4 - 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 这个数量级。然而, 石墨烯样品是通过表皮剥离技术来实现的, 即将石墨晶体从周围的环境下剥离下来, 而最高迁移率的 GaAs/AlGaAs 的样品则是由非常高级的技术才能制备的。石墨烯样品的迁移率与商用的硅基元件相当。

[†]译者注: 也叫门极电压, 或门电压

[‡]译者注: 因为 z -方向长度很短, 其对应的能级间隔就很高, 从而任一激发能级都在费米能之上

Chapter 2

Landau Quantisation

Landau 量子化

最基本的了解 IQHE 和 FQHE 的出发点是 Landau 量子化，即自由带电 2D 粒子在垂直磁场中动能的量子化。本章中，我们将会对不同形式的 Landau 量子化做详细介绍。我们选择了这种量子化的最一般的形式，从而能够解释非相对论性和相对论性 2D 粒子的诸多性质，比如能级简并和全同性。在第 2.1 节中，我们介绍没有磁场情况下的 2D 粒子的 Hamiltonians，并讨论 Schrödinger 型和 Dirac 型粒子，进而在第 2.2 节讨论非零磁场。第 2.3 节则讨论非相对论性和相对论性粒子的 LL 结构。

2.1 Basic One-Particle Hamiltonians for $B = 0$

$B = 0$ 下的单粒子 Hamiltonian 原型

在本节中，我们介绍接下来要使用的最基本的量子力学中处理方法。一般的，我们考虑平移不变的 2D 粒子的 Hamiltonian¹，即动量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ 在没有磁场下是一个运动常数。在量子力学中，这代表动量算符与 Hamiltonian 对易， $[\mathbf{p}, H] = 0$ ，并且动量算符提供一个好量子数。

2.1.1 Hamiltonian of a free particle

自由粒子的 Hamiltonian

自由粒子的情况下，我们有非相对论形式

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.1)$$

其中粒子质量 m 。²然而我们感兴趣的是电子在某些材料（金属中，或者在半导体界面上）中的运动。粗看起来，用自由空间来描述晶体环境中的电子的运动是非常粗糙的假设。实际上，粒子在晶格中的行为并非由 (2.1) 中的 Hamiltonian 来描述，而是由

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \sum_i^N V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.2)$$

描述，其中最后一项表示格点 \mathbf{r}_i 上的离子实带来的静电能。显然，Hamiltonian 现在是关于粒子距离粒子实位置 \mathbf{r} 的函数，而动量 \mathbf{p} 也不再是运动常数或好量子数了。

通过 Bloch 定理可以解决这个问题：尽管一般的空间平移并不像自由粒子 (2.1) 的情况一样是对称性算符了，在晶格无限延展的情况下（我们这里做这种假定³），任意格矢的平移仍然使得系统不变。类似于自由粒子的时候我们定义了动量为空间平移的生成元，现在可以定义晶格平移的生成元。这种生成元被称为**晶格动**

¹所有的矢量（包括量子力学中的算符） $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ 除非特别说明，都是 2D 的。

² \mathbf{p} 是常数的结论即使在相对论性粒子中都是对的。不同的是，Hamiltonian 描述是取决于参考系的，因为能量并不是 Lorentz 不变的，即换到另一个匀速平动参考系将会使得能量变化。这使得相对论性量子力学更倾向使用 Lagrangian 而不是 Hamiltonian。

³尽管这看起来是标准的“理论学家的假定”，当晶体尺寸比其它任何尺寸，比如晶格距离，或者费米波长都要大时，它实际上是一个非常好的近似。

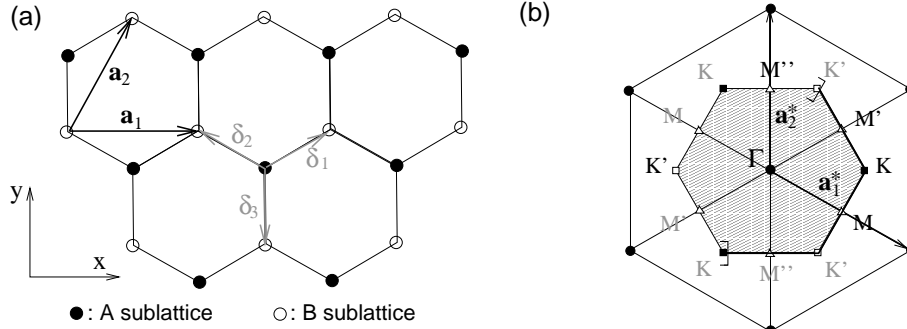


图 2.1: (a) 蜂巢晶格。三个矢量 δ_1 , δ_2 , 和 δ_3 将 *nn* 碳原子连在一起, 间隔 $a = 0.142$ 。三角形 Bravais 格子的基矢为 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 。(b) 倒格子为三角形晶格。原胞的格矢为 \mathbf{a}_1^* 和 \mathbf{a}_2^* 。阴影区域代表第一 Brillouin 区 (BZ), 中心为 Γ 点, 两个不等价的角落 K (黑色方块) 和 K' (白色方块)。第一 BZ 的深色边界表示定义中包含的部分, 从而没有点被重复计算两次。从而, 第一 BZ 的严格定义是阴影区假设深色的边界。为了完整性, 我们同样展示了三个不等价的格点 M , M' 和 M'' (白色三角)。

量, 或者准动量。这种晶格平移的离散性的结果就是, 不是所有的晶格动量都是物理的, 只有那些在第一布里渊区 (Brillouin zone, BZ) 才是: 任何的振动模式, 无论是晶格振动或是电子波, 波矢超出第一 BZ 的都可以用第一 BZ 内的某个波矢的某个模式描述。这份讲义不可能包含完整的固体物理课程, 我们推荐读者关于这部分参考标准的固体物理教科书 [25, 26]。

对于 (完美) 晶体来说也是这样的, 如果一直记得 \mathbf{p} 是第一 BZ 种的晶格动量的话, 我们可以把 Hamiltonian 用 $H(p_x, p_y)$ 来表示。注意到, 尽管最后的 Hamiltonian 经常会写成 (2.1) 的形式, 其质量往往不是自由电子质量而是有效质量 m_b , 其由能带的特殊性质决定⁴——不仅如此, 质量通常还依赖传播方向, 因此一般的 Hamiltonian 应该写为

$$H = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y}.$$

2.1.2 Dirac Hamiltonian in graphene 石墨烯中的 Dirac Hamiltonian

上面考虑的 2D 晶格中的电子行为只在 Bravais 晶格, 即所有的格点从晶体学的角度来说都是等价的, 下才成立。然而, 有些晶格, 比如石墨烯中碳原子的蜂巢晶格, 由于价带电子的 sp^2 杂化, 并不是 Bravais 晶格。这种时候, 人们就会考虑用 Bravais 晶格再加上一种特定的 N_s 个格点 (被称为基元) 的形式来刻画这种晶格。如图 2.1(a) 所示为蜂巢晶格的情况。比较格点 A (实心圆) 和格点 B (空心圆) 的时候, 我们注意到这两者周围的原子的不同: A 的最近邻是在东北, 西北和南向的, 而 B 的最近邻则是在北, 西南和东南向。准确的说, 晶体学上这两种格点并不等价——尽管它们化学上来说是等价的, 即由同种原子或离子占据。每一个晶格的子集构成了两种子晶格, 蜂巢晶格因此可以看出三角形的 Bravais 晶格和一个两原子基元 (即由 δ_3 连接的 A 和 B 格点) 的组合物。

为了计算有 N_s 个 Bravais 子格子——即 N_s 个格点的基元——的电子能带结构, 必须要把一般的电子波函数用 N_s 个不同的波函数的叠加态来描述, 而且要对每个子晶格满足 Bloch 定理 [25, 26]。严格地讲, 它得用 $N_s \times N_s$ 的矩阵来描述, 而其产生 N_s 个不同的能带。有 N_s 个子晶格的晶格里面, 实际上每一个子晶格都 (数量上对应) 有一个能带, 而石墨烯的话就是有两个带, 分别对应导带和价带。

倒空间中低能电子的 Hamiltonian 即为

$$H(\mathbf{k}) = t \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mathbf{k}}^* \\ \gamma_{\mathbf{k}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

这是用考虑最近邻 hopping 的紧束缚模型计算得到的, 其中 hopping 强度为 t 。由于 A 格点的最近邻就是 B 格点, 而且反之亦然, 所以 Hamiltonian 是非对角的, 而由于时间反演对称性 $[H(-\mathbf{k})^* = H(\mathbf{k})]$, 非对角元彼此复共轭。前面讲到, 在第一 BZ, 即图 2.1(b) 中那个六角型的区域, 中的晶格动量 \mathbf{k} 已然完备, 而函数

⁴比如在 GaAs 中, 有效质量是 $m_b = 0.068m_0$, 其中电子自由质量 m_0 。

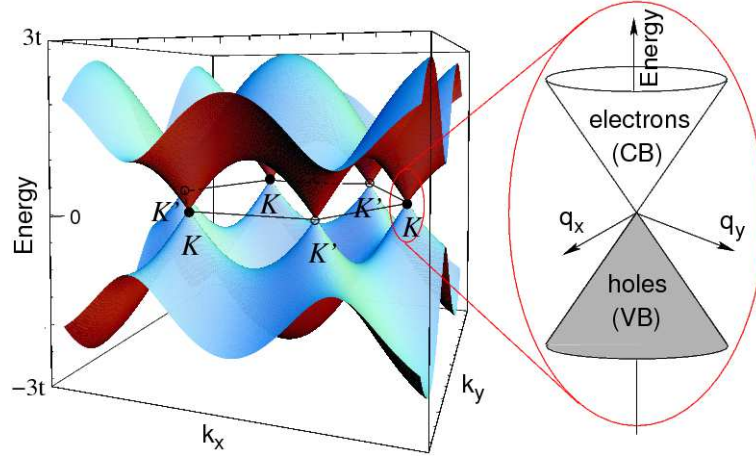


图 2.2: 石墨烯的能带。价带和导带在两个不等价的 BZ 角落 K 和 K' 处相交。非掺杂的石墨烯的费米能就在这两个接触点处, 在其附近能带的色散行为是圆锥形的。

$\gamma_{\mathbf{k}}$ 的准确形式会在附录A中作解释 [(A.9)]。通过把 Hamiltonian 进行对角化, 我们可以得到如图. 2.2所示的两条能带, 标记为 $\lambda = \pm$ 。价带 ($\lambda = -$) 与导带 ($\lambda = +$) 在第一 BZ 中的不等价的两个角会接触。由于石墨烯决定低能导电性的 π -轨道的电子数量和格点数量一样多, 所以总的能带结构是半满的。这半满性来自于电子的自旋取向, 使得 π -轨道被两个电子占据。而其结果就是, 除非如上一章第1.2节来用场效应进行掺杂, 否则费米能就会与两条能带在 K and K' 处相接。

图. 2.2的内插图表明了石墨烯能带的接触点 K 和 K' 附近能带色散为线性的, 而这个区间足以描述关心的能量尺度⁵。两个能带的圆锥形状令人想到相对论性粒子, 其色散为 $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$, 其中光速 c , 粒子质量 m 。如果后者是零, 我们就有 $E = \pm c|\mathbf{p}|$, 与低能石墨烯的情况十分接近 (图. 2.2的内插图), 因此可以处理为无质量 Dirac 费米子。对石墨烯中的电子的描述我们这里取得是连续极限, 但是要注意到我们实际上有两种粒子——一种 K 附近的, 而一种 K' 附近的。这带来了我们称之为谷简并的二重简并。

石墨烯中的电子和无质量的相对论性粒子是通过相接触点 K 和 K' 附近把 Hamiltonian 做低能展开 (2.3) 得到的; 两个接触点的动量为 \mathbf{K} 和 $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$ [见图. 2.1(a)], 我们关心的动量 $\mathbf{k} = \pm\mathbf{K} + \mathbf{p}/\hbar$, 其中 $|\mathbf{p}/\hbar| \ll |\mathbf{K}|$ 。通过把函数 $\gamma_{\pm\mathbf{K}+\mathbf{p}/\hbar}$ 展开到一阶, 就得到了如下形式⁶

$$H = t \begin{pmatrix} 0 & \nabla \gamma_{\mathbf{K}}^* \cdot \mathbf{p} \\ \nabla \gamma_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} = v \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y)$ 为 Pauli 矩阵。

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{以及} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

而我们把 Hamiltonian (2.3) 在 K 点附近展开⁷。费米速度 v 实际上就相当于光速 c , 只不过小了三百倍 $c \simeq 300v$ 。这部分的具体细节看附录A。上面的 Hamiltonian 就是标准的无质量 2D 粒子的形式, 有的时候也被称为 Weyl 或 Dirac Hamiltonian。

本章的剩下部分会讨论两种分别对应非相对论性和相对论性粒子的 Hamiltonian

$$H_S = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_b} \quad \text{和} \quad H_D = v \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.4)$$

在非零磁场下是如何进行描述的。

⁵实际上, 石墨烯的低能区间大概处于 10 – 100meV 区, 而非线性的修正则在 eV 区才会显著。

⁶其中, 对称性要求 $\gamma_{\pm\mathbf{K}} = 0$

⁷在 K' 点可以得到类似的结果, 见附录A的 (A.15) 式。

2.2 Hamiltonians for Non-Zero B Fields 非零磁场的 Hamiltonian

2.2.1 Minimal coupling and Peierls substitution Peierls 替换与最小耦合

为了描述磁场中的电子，需要用规范不变的动量形式 [27]

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{\Pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 是磁场产生的磁矢势 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ 。这种规范不变的动量正比于电子速度 \mathbf{v} ，而电子速度是一个物理量从而自然是规范不变的。由于磁矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 不是规范不变的，所以动量 \mathbf{p} 也不是。对磁矢势加一个任意的函数 $\lambda(\mathbf{r})$ 的梯度 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\lambda(\mathbf{r})$ 并不会改变磁场，因为梯度的旋度是零。而动量在规范变换下需要按照 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\nabla\lambda(\mathbf{r})$ 变换，来弥补差的磁矢势而保证 $\mathbf{\Pi}$ 是规范不变的。这种替换 (2.5) 也被叫为**最小替换**。

当我们用格点来考虑电子的位置的时候，由于多条能带的存在，这种替换就更加微妙了。磁矢势会变得无界，即使是有限的磁场。当我们选取某个特定的规范，比如 Landau 规范 $\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = B(-y, 0, 0)$ 的时候，着看的更加清楚，磁矢势会大到 $B \times L_y$ ，而 L_y 是系统在 y -方向的宏观延展程度。然而，(2.5) 这种替换在晶格间距 a 仍然远小于**磁场尺度**

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}, \quad (2.6)$$

的时候仍然正确。此时我们称它为**Peierls 替换**。磁场尺寸是存在磁场时一个很自然的基本长度尺度。 a 大概是原子尺度 (~ 0.1 to 10 nm)，而 $l_B \simeq 26 \text{ nm}/\sqrt{B[\text{T}]}$ ，这种条件，在如今的高场实验室中 (连续区域 ~ 45 T，脉冲区域 ~ 80 T)，对所有的原子晶格中都成立⁸。

利用 (Peierls) 替换 (2.5)，由于我们已经知道没有磁场的情况，存在磁场中的带电粒子的 Hamiltonian 就很显然了

$$H(\mathbf{p}) \rightarrow H(\mathbf{\Pi}) = H(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = H^B(\mathbf{p}, \mathbf{r}).$$

注意由于磁矢势的空间分布，我们得到的 Hamiltonian 不再是平移不变的，而 (规范相关的) 动量 \mathbf{p} 也不是一个守恒量了。我们在 Hamiltonian(2.4) 的基础上做推广，得到对于非相对论性情况

$$H_S^B = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m_b} \quad (2.7)$$

而对相对论性情况

$$H_D^B = v[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.8)$$

2.2.2 Quantum mechanical treatment 量子力学处理

为了在量子力学框架下分析单电子 Hamiltonian(2.7) 和 (2.8)，我们用标准的**正则量子化**[28] 来处理，即把物理量用作用在 Hilbert 空间中的态矢量的算符来表示。这些算符彼此不对易，也就是说它们作用在态矢量上的顺序影响对系统的描述。形式上，在两个算符 \mathcal{O}_1 和 \mathcal{O}_2 中引入**对易关系** $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \equiv \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1$ 。如果 $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$ 则二者对易，反之不对易。Hamiltonian 中最基本的物理量是 2D 坐标 $\mathbf{r} = (x, y)$ 及其对应的正则动量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ ，其满足对易关系

$$[x, p_x] = i\hbar, \quad [y, p_y] = i\hbar \quad \text{以及} \quad [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0, \quad (2.9)$$

即坐标和其对应方向的动量不对易。这种不对易性导致了 Heisenberg 不等式，即人们没办法同时知道量子型粒子的坐标和动量 $\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$ 以及 $\Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar$ 。

对易关系 (2.9) 导致了规范不变的动量算符的各个分量不再对易

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= [p_x + eA_x(\mathbf{r}), p_y + eA_y(\mathbf{r})] = e([p_x, A_y] - [p_y, A_x]) \\ &= e\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}[p_x, x] + \frac{\partial A_y}{\partial y}[p_x, y] - \frac{\partial A_x}{\partial x}[p_y, x] - \frac{\partial A_x}{\partial y}[p_y, y]\right), \end{aligned}$$

⁸高磁场只能够通过半损毁实验 (semi-destructive experiments) 实现，里面的样品仍能保持使用，但是产生磁场的线圈需要替换

其中我们用到了在两个算符的对易式是个复常数，或者某个算符自己与 \mathcal{O}_1 和 \mathcal{O}_2 都对易 [28] 时的如下关系⁹

$$[\mathcal{O}_1, f(\mathcal{O}_2)] = \frac{df}{d\mathcal{O}_2} [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \quad (2.10)$$

利用对易关系 (2.9)，可以看到

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -ie\hbar \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -ie\hbar (\nabla \times \mathbf{A})_z = -ie\hbar B,$$

用磁场尺度表示出来 (2.6)，

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i \frac{\hbar^2}{l_B^2}. \quad (2.11)$$

这个式子是这一章的最基本的结论，值得我们对它进行更多的讨论。

- 如我们所料，规范不变量 (Π 的两个分量) 之间的对易式也是规范不变的。它只取决于普适的常数和磁场强度 B ，而与矢势 \mathbf{A} 无关。
- 规范不变的动量 Π 的分量互相**共轭**，就像 x 与 p_x ，或者 y 与 p_y 那样。而 p_x 作为生成元生成了沿着 x -方向的平移操作 (p_y 生成 y -方向的)。这里是一样的： Π_x 生成了一个对规范不变动量的沿着 y -方向的推动，而 Π_y 则生成了 x -方向的。
- 其结果就是无法同时将 Π_x 和 Π_y 对角化，而不像 p_x 和 p_y 对易的零磁场中那样。

为了解 Hamiltonians (2.7) 和 (2.8)，像量子力学里面的一维谐振子一样，通常使用共轭算符对 Π_x 和 Π_y 引入**阶梯算符**。量子力学课上会讲，阶梯算符就像取一维谐振子相空间的值一样，可以用位置 (x -轴) 和动量 (y -轴) 来表示

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - i \frac{p}{p_0} \right) \quad \text{以及} \quad \tilde{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + i \frac{p}{p_0} \right),$$

其中 $x_0 = \sqrt{\hbar/m_b\omega}$ ， $p_0 = \sqrt{\hbar m_b\omega}$ 是谐振子频率 ω 下的归一化系数 [28]。由于位置 x 与动量 p 彼此是共轭变量，以及精心选取的归一化系数，我们得到了非常棒的阶梯算符对易关系 $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ 。

对于磁场中的 2D 电子气，阶梯算符实际上起到了一种复规范不变动量 (或速度) 的作用，即

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\Pi_x - i\Pi_y) \quad \text{以及} \quad a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\Pi_x + i\Pi_y), \quad (2.12)$$

其中我们同样精心选取了恰当的归一化系数从而

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.13)$$

同样可以将算符用阶梯算符 (2.12) 展开，这在后面会极大地方便运算

$$\Pi_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_B} (a^\dagger + a) \quad \text{以及} \quad \Pi_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}l_B} (a^\dagger - a). \quad (2.14)$$

2.3 Landau Levels

Landau 能级

在之前的章节里面所讨论的内容将会对计算非相对论性的 (2.7) 和相对论性的 (2.8) Hamiltonian 的能谱有很大帮助。而本节则着重于理解这种能谱。考虑到电子不仅携带电荷还携带自旋，每一个能级都会因此劈裂成能级差为 $\Delta_Z \epsilon = g\mu_B B$ 的两个能级， g 是 Landé g -因子， $\mu_B = e\hbar/2m_0$ 是 Bohr 磁子。我们忽略自旋自由度从而简化量子力学的形式以及能级结构，也就是说我们相当于在处理**无自旋费米子**。然而，自旋自由度实际上会带来很多有趣的物理问题，这值得我们特别留意。这些问题我们在第5章详述。

⁹更严格的说，我们利用了多元函数的梯度在算符函数中的推广

$$[\mathcal{O}_0, f(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_J)] = \sum_{j=1}^J \frac{\partial f}{\partial \mathcal{O}_j} [\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_j]$$

只要 $[[\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_j], \mathcal{O}_0] = [[\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_j], \mathcal{O}_j] = 0$ 其中 $j = 1, \dots, N$ 满足，这个关系就是正确的。

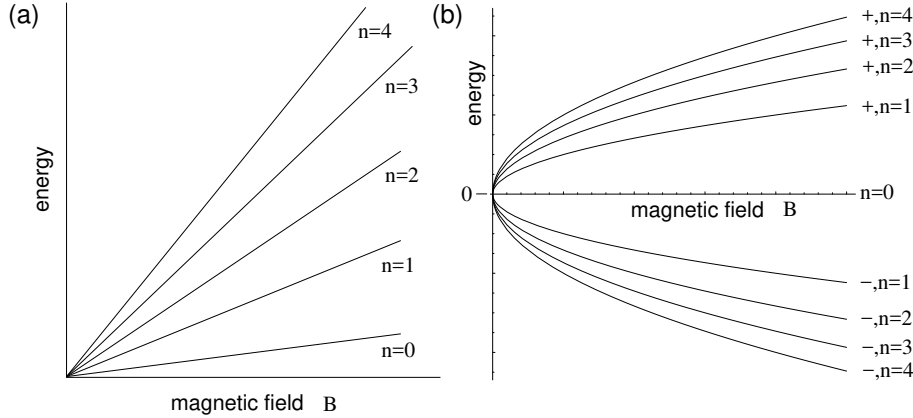


图 2.3: Landau 能级作为磁场的函数 (a) 非相对论性, $\epsilon_n = \hbar\omega_C(n + 1/2) \propto B(n + 1/2)$. (b) 相对论性, $\epsilon_{\lambda,n} = \lambda(\hbar v/l_B)\sqrt{2n} \propto \lambda\sqrt{Bn}$.

2.3.1 Non-relativistic Landau levels 非相对论性 Landau 能级

非相对论性电子的 Hamiltonian (2.7) 用规范不变动量写出来有下面的形式:

$$H_S^B = \frac{1}{2m_b} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2).$$

很自然的可以把它与一维谐振子类比, 因为 Π_x 与 Π_y 彼此共轭, 且都以二次形式出现在 Hamiltonian 里面。如果用阶梯算符 (2.14) 和对易关系 (2.13) 来描述的话, 很容易就得到

$$\begin{aligned} H_S^B &= \frac{\hbar^2}{4ml_B^2} [a^{\dagger 2} + a^{\dagger}a + aa^{\dagger} + a^2 - (a^{\dagger 2} - a^{\dagger}a - aa^{\dagger} + a^2)] \\ &= \frac{\hbar^2}{2ml_B^2} (a^{\dagger}a + aa^{\dagger}) = \frac{\hbar^2}{ml_B^2} \left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega_C \left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中最后一步利用了电子回转频率 (1.2) 和磁场特征尺度 (2.6) 的关系 $\omega_c = \hbar/m_b l_B^2$ 。

就像一维谐振子那样, Hamiltonian (2.15) 的本征值和本征态即由占据数算符 $a^{\dagger}a$ 的本征值本征态 $a^{\dagger}a|n\rangle = n|n\rangle$ 来完备描述。阶梯算符作用在这些态上得到如下行为 [28]

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \text{以及} \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.16)$$

其中最后一步仅对于 $n > 0$ 成立—— a 作用在基态 $|0\rangle$ 上得零,

$$a|0\rangle = 0. \quad (2.17)$$

这个式子能帮助我们计算最低能量本征态和构造高能量 n 的态 (见第 2.4.1 节)

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.18)$$

2D 带电非相对论性粒子的能级由分立的整数 n 标志,

$$\epsilon_n = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.19)$$

这些能级我们叫它 **Landau 能级** (LL) 如图. 2.3(a) 所示, 显然是磁场的函数。由于回转频率与磁场强度成线性, LL 自然也就与磁场强度成线性了。

2.3.2 Relativistic Landau levels 相对论性 Landau 能级

我们用与处理非相对论性电子完全一样的办法来处理石墨烯中相对论性电子 (2.8) 的行为。用阶梯算符 (2.12) 表示, Hamiltonian 为

$$H_D^B = v \begin{pmatrix} 0 & \Pi_x - i\Pi_y \\ \Pi_x + i\Pi_y & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \frac{\hbar v}{l_B} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

注意到特征频率 $\omega' = \sqrt{2}v/l_B$ 在这里就起到和回转频率相类似的效果。然而, 这次特征频率没办法写成 eB/m_b 的样子了——对于石墨烯来说, 有效质量就是零, 回转频率发散¹⁰。

求解 Hamiltonian (2.20) 的本征值和本征态, 首先写出本征值方程 $H_D^B \psi_n = \epsilon_n \psi_n$ 。由于 Hamiltonian 是 2×2 矩阵, 所以本征态是一个 2-旋量,

$$\psi_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

从而我们需要解方程组

$$\hbar\omega' a v_n = \epsilon_n u_n \quad \text{以及} \quad \hbar\omega' a^\dagger u_n = \epsilon_n v_n, \quad (2.21)$$

对旋量的第二个分量有

$$a^\dagger a v_n = \left(\frac{\epsilon_n}{\hbar\omega'} \right)^2 v_n \quad (2.22)$$

注意到这个分量是占据数算符的本征态 $n = a^\dagger a$, 我们在前面的小节里面已经见过了。从而我们可以得到旋量第二分量 v_n 与 **非相对论性** Hamiltonian (2.15) 的本征态 $|n\rangle$ 最多差一个归一化系数: $v_n \sim |n\rangle$ 。此外还可以看到能量的平方正比于量子数 $\epsilon_n^2 = (\hbar\omega')^2 n$ 。这个方程有正负两个解, 从而得要引入另一个量子数 $\lambda = \pm$ 来标记正负能的解。这个量子数其实也起到了在第 2.1 节中零磁场时标记能带的作用 (导带 $\lambda = +$, 价带 $\lambda = -$)。总之我们有了能谱 [29]

$$\epsilon_{\lambda,n} = \lambda \frac{\hbar v}{l_B} \sqrt{2n} \quad (2.23)$$

能级如图 2.3(b) 所示。这种 **相对论性 Landau 能级** 的色散关于磁场有 $\lambda\sqrt{Bn}$ 形式。

我们知道旋量第二分量的时候, 利用 (2.21) 其实也同时得到了第一分量 $u_n \propto a v_n \sim a|n\rangle \sim |n-1\rangle$ 。得注意的是把零能 LL($n=0$) 与其它能级区分开。对于 $n=0$, 从 (2.17) 看出第一分量为零, 从而旋量为

$$\psi_{n=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ |n=0\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

而对于其它情况 ($n \neq 0$), 有正负能两个解, 其本征态的两个分量有一个会差负号。通常来说会使用这种旋量的表示方法

$$\psi_{\lambda,n \neq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |n-1\rangle \\ \lambda|n\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Experimental observation of relativistic Landau levels 相对论性 Landau 能级的实验观测

相对论性 LL 可以通过传输谱的测量来发现, 即我们给样品打光上去, 并测量光的透过率。实验用的石墨烯是通过外延生长得到的¹¹[31], 并随后进行了对衬底的剥离 [32]。如果单色光的频率和 (部分) 填充的 LL(λ, n) 与未被占据的 LL($\lambda', n \pm 1$) 之间偶极跃迁频率共振了的话, 光子就会被吸收, 并形成两个能级之间的电磁激发 [见图 2.4(a)]。而注意到非相对论性 2D 电子气中, 只有与最末的 LL n 与第一个未被占据的 LL $n+1$ 之间存在偶极跃迁, 跃迁能量为 $\hbar\omega_C$, 与 n 无关, 因此只能观测到回转频率处单个吸收峰 (回转共振)。在石墨烯中, 由于导带价带两条电子能带的存在, 会出现多种可能的跃迁, 其能量为

$$\Delta_{n,\xi} = \frac{\hbar v}{l_B} \left[\sqrt{2(n+1)} - \xi \sqrt{2n} \right],$$

其中 $\xi = +$ 表示同属一种能带, 而 $\xi = -$ 则反之。因此我们得到一系列共振能级, 其色散关系为 $\Delta_{n,\xi} \propto \sqrt{B}$, 并且可以从试验中得到 [见图 2.4(c), 结果取自 Sadowski *et al.* [31]]。注意到图 2.4(c) 中的虚线是根据一个拟合参数 (费米 v) 得到的, 与各个 n 的实验数据都吻合的很好。

¹⁰ 有时会认为引入一个 **回转质量** m_C , 其引入的办法是令 $\omega' \equiv eB/m_C$ 。然而这种质量是人为引入的, 从而与载流子密度相关。本讲义中不引入这个概念。

¹¹ 外延生长的石墨烯通过在 SiC 晶体上通过热石墨堆积而形成石墨烯 [30]

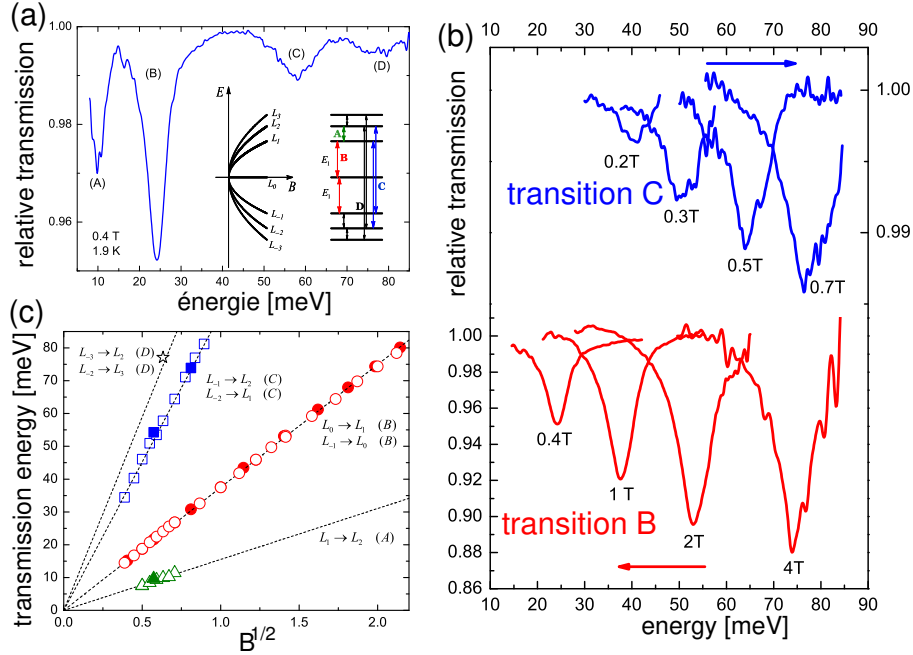


图 2.4: (from Sadowski *et al.*, 2006 石墨烯中的 LL 谱). (a) 对恒定磁场 0.4 T, 传输谱中共振位置关于激发光子能量的关系。共振与相对论性 Landau 能级的偶极跃迁相关。(b) 共振位置关于磁场的位置移动。(c) 共振关于磁感应强度 \sqrt{B} 的平方根的关系, 得到与理论温和的线性结果。

2.3.3 Level degeneracy 能级简并

前面的小节里面, 我们了解了 2D 相对论/非相对论性带电粒子的 n -Landau 能级 (对于相对论性粒子还有一个额外能带指标 λ)。然而, 我们会从下面的维度的角度看到, 这个量子系统还是没有确定下来。原本的 Hamiltonian(2.7) 和 (2.8) 分别是两对共轭算符 x 与 p_x , y 与 p_y 的函数, 而当 Hamiltonian 用规范不变动量 Π 或者阶梯算符 a 与 a^\dagger 表示出来后 (2.15) 和 (2.20), 它们只与一对共轭算符相关。从原来的模型来看, 我们会觉得得有两个相关的量子数来描述才对 (对应每一个空间维度)。对于零场模型 (2.4) 来说确实是这样的, 量子态有两个量子数 p_x 和 p_y , 即 2D 动量的分量, 来描述。对于量子态的完备描述也从而必须要用另外的共轭算符来描述, 而且其必须与 Hamiltonian 对易, 使得 LL 形成除了如自旋¹²或石墨烯的两个谷自由度等内禀自由度之外的能级简并。

类比规范不变动量 $\Pi = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$, 我们考虑其相反的符号的组合形式

$$\tilde{\Pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.26)$$

我们管这个算符叫赝动量。我们可以把动量算符 \mathbf{p} 和矢势算符 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 用 Π 和 $\tilde{\Pi}$ 表示出来

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\Pi + \tilde{\Pi}) \quad \text{以及} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2e}(\Pi - \tilde{\Pi}). \quad (2.27)$$

注意到, 不像规范不变动量那样, 赝动量是依赖规范的, 而且因此不是一个物理量¹³。然而, 赝动量两个分量的对易关系则是规范不变的,

$$[\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y] = i \frac{\hbar^2}{l_B^2}. \quad (2.28)$$

¹²只在忽略 Zeeman 效应下不同自旋态简并

¹³尽管如此, 我们还是会尝试在半经典的角度给它一个图像

这个计算和 Π_x 与 Π_y 的对易计算 (2.11) 一样；当然也可以计算规范不变动量和赝动量的对易，

$$\begin{aligned}\left[\Pi_x, \tilde{\Pi}_x\right] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x}, \\ \left[\Pi_y, \tilde{\Pi}_y\right] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial y}, \\ \left[\Pi_x, \tilde{\Pi}_y\right] &= ie\hbar \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = -\left[\tilde{\Pi}_x, \Pi_y\right].\end{aligned}\quad (2.29)$$

赝动量与 Hamiltonian 不对易 $[\tilde{\Pi}_{x/y}, H] \neq 0$ ，从而这些交错的对易量会带来不物理的动力学效应——这不是我们希望的。然而，通过选取一组合适的规范，比如[对称规范](#)，

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}(-y, x, 0), \quad (2.30)$$

所有的交错的对易量 (2.29) 都为零，从而赝动量与 Hamiltonian 也对易。

注意，矢势的规范还通常选取[Landau规范](#)，我们上面已经提过

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = B(-y, 0, 0), \quad (2.31)$$

而使得最后一个交错对易量 (2.29) 并不为零。而规范其实可以选的更简单：由于矢势只与位置的 y 分量相关，系统在 x -轴仍然保持平移不变。因此，其对应的动量 p_x 仍然是一个好量子数，从而可以作为除了 LL 的量子数 n 之外的数来标记量子态。对于 Landau 规范，其可以方便的描述某具有 y 平移对称的几何形状的系统，而波函数则由第2.4.2节中计算得到。而如第2.4.1节中的对称规范下计算出来的波函数则有其它两方面的意义；首先，相比 Landau 规范，它让我们能更好的用半经典的办法来解释问题，其次，对称规范给出的波函数恰好是构成描述 FQHE 中的平庸波函数 *à la Laughlin* 的基本成分，我们会在第4章中了解它。

赝动量与其共轭成分 $\tilde{\Pi}_x$ 和 $\tilde{\Pi}_y$ 提供给我们了与规范不变动量 Π 一样引入阶梯算符的办法

$$b = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\tilde{\Pi}_x + i\tilde{\Pi}_y) \quad \text{以及} \quad b^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\tilde{\Pi}_x - i\tilde{\Pi}_y), \quad (2.32)$$

同样满足对易关系 $[b, b^\dagger] = 1$ ，且在对称规范下与阶梯算符 a 和 a^\dagger 对易， $[b, a^{(\dagger)}] = 0$ ，从而与 Hamiltonian 对易 $[b^{(\dagger)}, H_B] = 0$ 。因此会想到引入由它们构成的数量算符 $b^\dagger b$ ，其本征态满足特征值方程

$$b^\dagger b |m\rangle = m |m\rangle.$$

从而得到第二个量子数，整数 $m \geq 0$ ，可以想象，除了 LL 量子数 n 之外，它对于描述上面那些维度的论据是必要的。从而在非相对论性粒子的情况下，量子态变成了两个 Hilbert 矢量的张量积

$$|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle \quad (2.33)$$

而对于相对论性的情况，对于 $n \neq 0$ 有

$$\psi_{\lambda n, m} = \psi_{\lambda n, m} \otimes |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |n-1, m\rangle \\ \lambda |n, m\rangle \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

而对于零能 LL

$$\psi_{n=0, m} = \psi_{n=0} \otimes |m\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |n=0, m\rangle \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

2.3.4 Semi-classical interpretation of the level degeneracy 能级简并的半经典解释

我们如何描述上面提出的这个有些神秘的赝动量问题？注意到，由于赝动量是由规范决定的量，其物理解释也必须要注意到这点。然而，在半经典的处理中，对称规范让我们可以很好地建立起它与经典理论中磁场里电子匀速圆周运动之间的联系。

$$m_b \ddot{\mathbf{r}} = -e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} &= -\omega_C \dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega_C \dot{x} \end{cases} \quad (2.36)$$

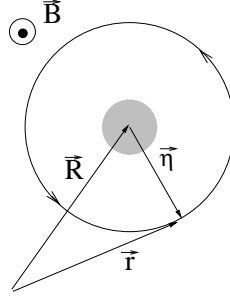


图 2.5: 电子在磁场中绕着中心 \mathbf{R} 做回转运动。灰色区域表示量子力学由于 (2.39) 中它自身分量的不对易导致的中心位置的不确定性。

这就是电子在 Lorentz 力中加速的方程而已。对这些方程积分，然后可以发现

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = \frac{\Pi_x}{m_b} &= -\omega_C(y - Y) \\ \dot{y} = \frac{\Pi_y}{m_b} &= \omega_C(x - X) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Y - \frac{\Pi_x}{eB} \\ x = X + \frac{\Pi_y}{eB} \end{cases} \quad (2.37)$$

其中 $\mathbf{R} = (X, Y)$ 是我们的积分常数，物理上描述了运动的守恒量。这个量可以理解为电子回转运动的中心 (如图 2.5)。事实上，(2.37) 式直接得到了电子回转运动的经典形式

$$x(t) = X - r \sin(\omega_C t + \phi) \quad \text{以及} \quad y(t) = Y + r \cos(\omega_C t + \phi),$$

其中相位 ϕ 是另一运动常数。回转运动本身由速度（也叫规范不变动量） Π_x/m 和 Π_y/m 描述。这些动量能够确定回转运动的半径，从而决定了能量。可以从运动方程 (2.36) 看出，能量与其中心位置 \mathbf{R} 毫无关系。从此后我们管这个中心叫引导中心¹⁴。

我们利用式 (2.27) 描述的对称规范下的矢势从而把引导中心 \mathbf{R} 与赝动量 $\tilde{\Pi}$ 联系起来

$$e\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{eB}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Pi} - \tilde{\boldsymbol{\Pi}}).$$

位置 x 和 y 可以由动量 $\boldsymbol{\Pi}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}$ 表示

$$\begin{aligned} y &= \frac{\tilde{\Pi}_x}{eB} - \frac{\Pi_x}{eB} \\ x &= -\frac{\tilde{\Pi}_y}{eB} + \frac{\Pi_y}{eB}. \end{aligned}$$

可以和式 (2.37) 对比，从而我们有

$$X = -\frac{\tilde{\Pi}_y}{eB} \quad \text{以及} \quad Y = \frac{\tilde{\Pi}_x}{eB}. \quad (2.38)$$

这说明，在对称规范下，赝动量除了系数之外，完全就是引导中心的坐标位置，自然就是运动场数。在量子力学的处理中，我们也验算过了这些算符必须得和 Hamiltonian 对易。除此之外，赝动量分量之间的对易关系 (2.28) $[\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y] = i\hbar^2/l_B^2$ 直接给出引导中心坐标的对易关系

$$[X, Y] = i l_B^2 \quad (2.39)$$

这说明对于某一量子态，引导中心位置存在一个 Heisenberg 不确定性导致的不能同时确定其 x - 和 y - 分量大小，从而引导中心实际上弥散在大小为

$$\Delta X \Delta Y = 2\pi l_B^2 \quad (2.40)$$

¹⁴原文: guiding center

的区域中 (见图. 2.5 中的灰色阴影区域)。¹⁵ 这个最小不确定区域与表面 (作用量) h 在相空间中的作用一样, 让我们可以统计某个 (宏观) 大小 \mathcal{A} 中的量子态数量,

$$N_B = \frac{\mathcal{A}}{\Delta X \Delta Y} = \frac{\mathcal{A}}{2\pi l_B^2} = n_B \times \mathcal{A},$$

其中我们使用了磁通密度

$$n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{B}{h/e}, \quad (2.41)$$

这其实就是在磁通量子 h/e 单位下的磁场大小。因此, 一个 LL 中的量子态数等于样品表面 \mathcal{A} 上通过的磁通量子数, 且每个 LL 都宏观简并。我们会在下一节讨论对称和 Landau 规范下的电子波函数的时候用更定量的角度通过 Heisenberg 不等式说明每个 LL 的态数确实就是 N_B 。

与导引中心算符类似, 我们可以引入回转变量 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$, 其决定了回转运动与完整的动力学性质。回转变量与电子的运动垂直, 且可以用规范不变动量 $\boldsymbol{\Pi}$ 描述

$$\eta_x = \frac{\Pi_y}{eB} \quad \text{以及} \quad \eta_y = -\frac{\Pi_x}{eB}, \quad (2.42)$$

可从式 (2.37) 有所了解。电子的位置从而可以分解为导引中心和回转变量两部分, $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}$ 。此外, 回转变量的分量也不对易, 利用 (2.11) 可以得到

$$[\eta_x, \eta_y] = \frac{[\Pi_x, \Pi_y]}{(eB)^2} = -il_B^2 = -[X, Y]. \quad (2.43)$$

现在为止我们实际上只讨论了单粒子行为和其可能的量子态。考虑如果我们在零温有 N 个无关的量子态的电子。如果没有磁场的话, 金属中的电子就会填充到费密能量下的所有量子态, 因为费米子的 Pauli 不相容原理使得电子无法同时占据一个量子态。费米能因此只和电子数有关。加了磁场之后并没有太大变化: 电子更倾向于占据最低能量的 Landau 能级们。但是一旦一个 LL 被占据满了, 剩下的电子就必须得占据更高的 LL。为了描述 LL 占据, 我们介绍占据因子: 电子数 $N_{el} = n_{el} \times \mathcal{A}$ 与磁通量子的比,

$$\nu = \frac{N_{el}}{N_B} = \frac{n_{el}}{n_B} = \frac{hn_{el}}{eB}, \quad (2.44)$$

而其整数部分, $[\nu]$ 则代表完全占据的 LLs。注意占据因子会随着粒子数或磁场强度而发生改变。同一粒子数时, 更低的磁场则表明更高的占据数。

2.4 Eigenstates

本征态

2.4.1 Wave functions in the symmetric gauge

对称规范下的波函数

我们上面建立了一套用来处理电子波函数的合理的代数工具。如果要了解某个具体模式 $|n, m\rangle$ 的空间分布, 我们有 $\phi_{n,m}(x, y) = \langle x, y | n, m \rangle$ ¹⁶。首先注意到任何量子态 $|n, m\rangle$ 都可以从 $|n=0, m=0\rangle$ 这个态利用

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |n=0, m=0\rangle, \quad (2.45)$$

得到, 其就是 (2.18) 式的推广而已。这个方程很容易改写成对于波函数 $\phi_{n,m}(x, y)$ 的微分方程。

对于处于最低 Landau 能级 ($n=0$) 的态可以用 (2.17) 来处理

$$a|n=0, m\rangle = 0, \quad (2.46)$$

¹⁵ 数学的讲, 文中所说叫非对易几何, 带电二维粒子则是这一概念的非常好的典型案例。

¹⁶ 我们仅就非相对论情况考虑。利用式 (2.34) 和 (2.35) 就可以方便的得到相对论性电子的旋量波函数。

我们接下来把它处理成微分方程。利用式 (2.12): $a = (l_B/\sqrt{2}\hbar)(\Pi_x - i\Pi_y)$, 且有定义 $\Pi = -i\hbar\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$, 其中我们自然的把动量算符的空间表述写为梯度 $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ 。于是可以看到

$$a = -i\sqrt{2} \left[\frac{l_B}{2} (\partial_x - i\partial_y) + \frac{x - iy}{4l_B} \right],$$

其中 ∂_x 和 ∂_y 是梯度的分量 $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, 且从表达式中可以很方便的引入复坐标来描述 2D 平面。令 $z = x - iy$, $z^* = x + iy$, 从而 $\partial = (\partial_x + i\partial_y)/2$, $\bar{\partial} = (\partial_x - i\partial_y)/2$ 。最低的 LL 的条件 (2.46) 可以写为微分方程

$$\left(\frac{z}{4l_B} + l_B \bar{\partial} \right) \phi_{n=0}(z, z^*) = 0, \quad (2.47)$$

其可以通过复函数得到

$$\phi_{n=0}(z, z^*) = f(z) e^{-|z|^2/4l_B^2}, \quad (2.48)$$

其中, $f(z)$ 是解析函数, 即 $\bar{\partial}f(z) = 0$, 此外还有 $|z|^2 = zz^*$ 。这说明还有额外的自由度, 因为 $f(z)$ 可以是任意的解析函数。考虑到我们的第二个量子数 m 这实际上非常显然。

阶梯算符 b 和 b^\dagger 可以像我们前面处理 a 的时候那样用位置算符和动量算符表示出来, 从而我们有

$$\begin{aligned} a &= -i\sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} + l_B \bar{\partial} \right), & a^\dagger &= i\sqrt{2} \left(\frac{z^*}{4l_B} - l_B \partial \right) \\ b &= -i\sqrt{2} \left(\frac{z^*}{4l_B} + l_B \partial \right), & b^\dagger &= i\sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

与前面处理最低 LL 的情况一样, 对于 $m = 0$ 的态, $b|n, m = 0\rangle = 0$, 从而得到微分方程

$$(z^* + 4l_B^2 \partial) \phi'_{m=0}(z, z^*) = 0$$

其解为

$$\phi'_{m=0}(z, z^*) = g(z^*) e^{-|z|^2/4l_B^2},$$

为反-解析函数 $g(z^*)$, 有 $\partial g(z^*) = 0$ 。波函数 $\phi_{n=0, m=0}(z, z^*)$ 因此必须为高斯型的, 且其系数同时为解析和反-解析型, 从而只能是一个由归一化决定的系数。从而就有

$$\phi_{n=0, m=0}(z, z^*) = \langle z, z^* | n = 0, m = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} e^{-|z|^2/4l_B^2}, \quad (2.50)$$

可以通过 (2.45) 得到任意 m 下最低的 LL

$$\begin{aligned} \phi_{n=0, m}(z, z^*) &= \frac{i^m \sqrt{2^m}}{\sqrt{2\pi l_B^2} m!} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2} \\ &= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi l_B^2} m!} \left(\frac{z}{\sqrt{2} l_B} \right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

在最低 LL 内的态可以并不是高斯型, 因为可以出现解析函数 z^m 这种多项式。对于任意一个 LL, 其上的态可以通过类似的办法得到, 但是要注意微分算符 (2.49) 不仅仅作用在高斯型上, 也要作用在多项式函数上, 从而得到 Laguerre 多项式¹⁷。

作为总结, 我们来利用对称规范下的波函数计算导向中心算符在 $|n = 0, m\rangle$ 态上的期望值。利用 (2.32) 和 (2.38), 我们能够将导向中心算符利用阶梯算符 b 和 b^\dagger 表示出来

$$X = \frac{l_B}{i\sqrt{2}}(b^\dagger - b) \quad \text{以及} \quad Y = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^\dagger + b), \quad (2.52)$$

而且, 类似 (2.16), 阶梯算符作用在 $|n, m\rangle$ 上得到

$$b^\dagger |n, m\rangle = \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle \quad \text{以及} \quad b |n, m\rangle = \sqrt{m} |n, m-1\rangle.$$

¹⁷译注: 多翻译为拉盖尔多项式

从而导向中心算符的 $|n, m\rangle$ 态平均值是零

$$\langle \mathbf{R} \rangle \equiv \langle n=0, m | \mathbf{R} | n=0, m \rangle = 0,$$

但是我们有

$$\langle |\mathbf{R}| \rangle = \left\langle \sqrt{X^2 + Y^2} \right\rangle = l_B \left\langle \sqrt{2b^\dagger b + 1} \right\rangle = l_B \sqrt{2m+1}. \quad (2.53)$$

这说明 $|n, m\rangle$ 态的导向中心是一个半径为 $l_B \sqrt{2m+1}$ 的圆，其角度 (或者说相位) 完全不确定。

对称规范是描述盘子这种形状的样品的非常自然的规范。考虑一个半径为 R_{max} 的样品 (其面积为 $\mathcal{A} = \pi R_{max}^2$)。它有多少量子态呢？考虑 m 量子数最大的量子态，记为 M ，其半径为 $l_B \sqrt{2M+1}$ ，最理想的情况自然是它和 R_{max} 相等。因此可以得到 $\mathcal{A} = \pi l_B^2 (2M+1)$ ，而在热力学极限 $M \gg 1$ 下，态的数量可以写为

$$M = \frac{\mathcal{A}}{2\pi l_B^2} = n_B \times \mathcal{A} = N_B, \quad (2.54)$$

这个与 (2.41) 中根据 Heisenberg 不确定性得到的结论是一样的。

2.4.2 Wave functions in the Landau gauge Landau 规范下的波函数

如果样品的几何形状是长方形的，Landau 规范 (2.31) $\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = B(-y, 0, 0)$ 则更适合来描述这个系统的对称性。我们前面讲过，由于 x 的平移对称性， $p_x = \hbar k$ 是一个好量子数。因此可以假定¹⁸波函数由平面波的形式

$$\psi_{n,k}(x, y) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \chi_{n,k}(y),$$

这种情况下，Hamiltonian (2.7) 变成

$$H_S^B = \frac{(p_x - eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_C(y - y_0)^2, \quad (2.55)$$

其中我们定义

$$y_0 = kl_B^2. \quad (2.56)$$

Hamiltonian (2.55) 就是中心位置在 y_0 的一维谐振子而已，其本征态为

$$\chi_{n,k}(y) = H_n \left(\frac{y - y_0}{l_B} \right) e^{-(y - y_0)^2 / 4l_B^2},$$

其中 $H_n(x)$ 为 Hermite 多项式 [28]。坐标 y_0 实际上就等效于导向中心的分量 Y ，而 X 分量则弥散在整个样品的长度 L ，就像 Heisenberg 不确定原理描述的那样 (2.39) $[X, Y] = il_B^2$ 。

利用周期边界条件， x -方向的波矢 $k = m \times 2\pi/L$ ，就可以得到长 L 宽 W (y -方向) 矩形样品的态数量，这与我们之前对称规范给出的类似。样品从 $y_{min} = 0$ 到 $y_{max} = W$ ，由 (2.56) 我们知道这两者极限情况分别对应 $k = 0$ 和 $k_{max} = M \times 2\pi/L$ 。相邻量子态的距离为 $\Delta y = \Delta k l_B^2 = \Delta m (2\pi/L) l_B^2 = 2\pi l_B^2/L$ ，从而每个态占据面积 $\sigma = \Delta y \times L = 2\pi l_B^2$ ，与利用 Heisenberg 不确定原理得到的结果 (2.40) 完全一样。因此，总量子数和前面对称规范的结论是一致的，而且符合了 (2.41) 的一般结果，

$$M = N_B = n_B \times LW = n_B \times \mathcal{A},$$

i.e., 表面 $\mathcal{A} = LW$ 上量子磁通的个数

¹⁸译注：“假定”的原文是 ansatz