Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I

Atividade Avaliativa III: Aproximação de Derivada por Diferenças Finitas e Soma de Riemann.
Professor: Carlos Antônio Freitas da Silva
Discentes: Laís da Silva Fagundes Pereira e Hanna Raissa Oliveira Santos
Data: 15/07/2025

Requisitos para a execução dos códigos

Para executar os códigos implementados e anexados a este trabalho, é necessário que o ambiente Python tenha instalado as seguintes bibliotecas:

- SymPy: utilizada para manipulação simbólica das funções matemáticas.
- NumPy: usada para operações numéricas vetoriais.
- Matplotlib: responsável pela visualização gráfica das aproximações implementadas.

A instalação das dependências pode ser feita com o comando: *pip install sympy numpy matplotlib*.

Os códigos implementados utilizam a biblioteca *SymPy* para a manipulação simbólica das funções matemáticas. Isso significa que a função de entrada fornecida pelo usuário é interpretada como uma expressão simbólica e pode ser derivada, avaliada numericamente ou manipulada pela biblioteca *SymPy*. Para que isso funcione corretamente, todas as expressões devem estar escritas em termos da variável **x**, que é a variável simbólica usada nos códigos. Além disso, as funções devem respeitar a sintaxe do *Python/SymPy*, utilizando ** para potências, * para multiplicações e nomes de funções em letras minúsculas (por exemplo, **sin(x)**, **log(x)**, **x**2**).

Alguns exemplos de expressões válidas estão listados na Tabela 1 abaixo. Outros exemplos ou recursos da biblioteca, estão disponíveis em sua documentação oficial do SymPy.

Tabela 1 - Exemplos de funções válidas no SymPy

Expressão matemática	Como escrever na entrada
x^2	`x^2 ou x**2`
$x^3 - 2x + 5$	`x**3 - 2*x + 5 ou x^3 - 2*x + 5`
$\sqrt{x}$	`sqrt(x)`

e^x	`exp(x)` ou `e**x`
$ln(x)$	`log(x)`
$log_{10}(x)$	`log(x, 10)`
$sen(x)$	`sin(x)`
$cos(x)$	`cos(x)`
$tg(x)$	`tan(x)`
e^2	`e^2 ou e**2`
$\frac{1}{x}$	`1/x`

Aproximação da derivada em um ponto x_0 por diferenças finitas

A derivada de uma função em um ponto representa a taxa de variação instantânea da função nesse ponto. Porém, na prática, nem sempre é possível calcular a derivada exata de uma função, especialmente quando ela é definida por dados experimentais ou por expressões complicadas. Nesse contexto, os métodos de diferenças finitas oferecem uma forma numérica para aproximar a derivada utilizando valores da função em pontos próximos.

Seja f(x) uma função derivável, e h um pequeno incremento positivo, então temos três formas principais para aproximar a derivada de f em um ponto x_0 usando diferenças finitas, como mostra a Figura 1.

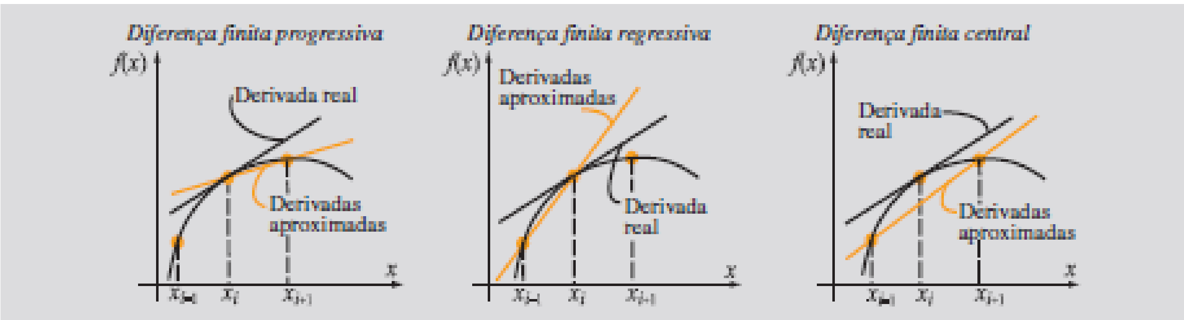

Figura 1 - Representação visual dos métodos de aproximação por diferenças finitas.

- **Diferença progressiva**

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Nesse caso, utiliza-se o valor de $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0 + h}$ para aproximar o valor da derivada.

- **Diferença regressiva**

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Nesse caso, utiliza-se o valor de $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0 - h}$ para aproximar o valor da derivada.

- **Diferença central**

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Nesse caso, utiliza-se o valor de $\mathbf{x_0 - h}$ e $\mathbf{x_0 + h}$ para aproximar o valor da derivada. Esse método tende a ser mais preciso.

A escolha do valor de **h** também é algo importante para a precisão da aproximação obtida. Se for muito grande, o erro de truncamento aumenta. Já se for muito pequeno, o erro de arredondamento devido a precisão da máquina aumenta. Por isso, é comum escolher um $h \approx 10^{-5}$, dependendo do problema.

Por exemplo, utilizando o método para aproximação da derivada da função $f(x) = sen(x)$ para o ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$ e assumindo um h = 0.001, temos as aproximações:

- Progressiva

$$f'(\frac{\pi}{4}) \approx \frac{sen(\frac{\pi}{4} + 0.001) - sen(\frac{\pi}{4})}{0.001}$$

$$\approx \frac{0.7078135 - 0.70710678}{0.001}$$

$$\approx 0.7067$$

- Regressiva

$$f'(\frac{\pi}{4}) \approx \frac{sen(\frac{\pi}{4}) - sen(\frac{\pi}{4} - 0.001)}{0.001}$$

$$\approx \frac{0.70710678 - 0.7063993}{0.001}$$

$$\approx 0.7075$$

- Central

$$f'(\frac{\pi}{4}) \approx \frac{sen(\frac{\pi}{4} + 0.01) - sen(\frac{\pi}{4} - 0.01)}{2 * 0.01}$$

$$\approx \frac{0.7078135 - 0.7063993}{0.002}$$

$$\approx 0.7071$$

Sabemos que a derivada da função seno é a função cosseno, ou seja, $f(x) = sen(x) \Leftrightarrow f'(x) = cos(x)$). Portanto, o valor exato da derivada no ponto $\frac{\pi}{4}$ é:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\approx 0.7071068$$

Podemos observar que todas as formas de aproximar a derivada em um ponto obtiveram um resultado muito próximo do valor exato, sendo, a aproximação central a mais precisa das três.

Aproximação da área de funções pela Soma De Riemann

A integral definida de uma função real em um intervalo [a,b] representa, geometricamente, a área sob a curva dessa função entre os pontos x = a e x = b. Em muitos casos, essa área pode ser aproximada numericamente por meio da Soma de Riemann, um método fundamental no cálculo integral.

Seja f(x) uma função contínua em um intervalo fechado [a,b], podemos aproximar a área sob a curva por meio da seguinte ideia:

1. Dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos de mesmo comprimento:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

2. Em cada subintervalo, escolhemos um ponto x^*_i onde a função será avaliada. Esse ponto pode ser à esquerda, à direita ou no meio do subintervalo. Para a implementação realizada, optou-se por escolher um ponto à esquerda.
3. A área total é aproximada pela soma das áreas dos retângulos de altura $f(x^*_i)$ e base Δx:

$$Soma\ de\ Riemann\ \approx \sum_{i=1}^{n} f(x*_i) \cdot \Delta x$$

Como já mencionado, o valor de x^*_i pode ser assumido como sendo à esquerda, à direita ou no centro do subintervalo. Sendo assim, temos três formas de realizarmos a soma de Rienmann:

- Soma à esquerda. Utiliza-se o valor da função no início de cada subintervalo. Temos:

$$x*_i = x_{i-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$$

- Soma à direita. Utiliza-se o valor da função no fim de cada subintervalo. Temos:

$$x*_i = x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

- Soma no ponto médio. Utiliza-se o meio de cada subintervalo. Temos:

$$x*_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}) \cdot \Delta x$$

Por exemplo, utilizando a Soma de Riemann para calcular a área sob a curva da função $f(x) = x^2$, no intervalo de [0, 2] e utilizando n = 4 subintervalos, temos as aproximações:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

- Na soma à esquerda, meus pontos x_i serão: 0, 0.5, 1 e 1.5; e a soma de Riemann:

  $S = (0^2 + 0.5^2 + 1^2 + 1.5^2) \cdot 0.5 = 3.5 \cdot 0.5 = 0.75$

- Na soma à direita, meus pontos x_i serão: 0.5, 1, 1.5 e 2; e a soma de Riemann:

  $S = (0.5^2 + 1^2 + 1.5^2 + 2^2) \cdot 0.5 = 7.5 \cdot 0.5 = 3.75$

- Na soma no ponto médio, meus pontos x_i serão: 0.25, 0.75, 1.25 e 1.75; e a soma de Riemann:

  $S = (0.25^2 + 0.75^2 + 1.25^2 + 1.25^2) \cdot 0.5 = 5.25 \cdot 0.5 = 2.625$

A Figura 2 exemplifica graficamente a soma de Riemann considerando as três formas apresentadas (na primeira imagem: soma à esquerda; na segunda imagem: soma à direita e na terceira imagem: soma no ponto médio).

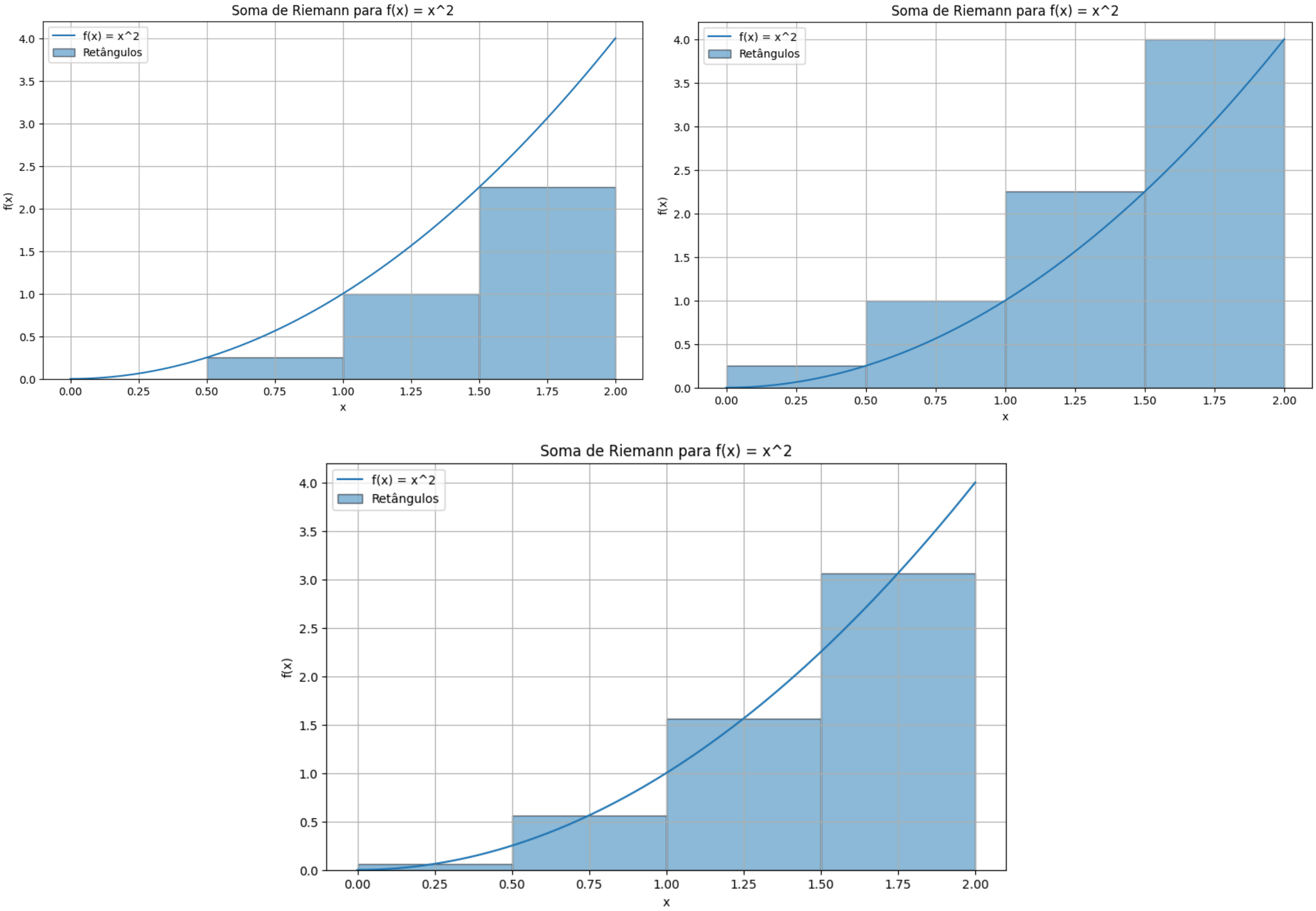

Figura 2 - Representação gráfica do exemplo (área de x^2 de [0, 2] com 4 subintervalos) considerando as três formas da soma de Riemann.

Sabemos que o valor exato da integral é:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2.6667$$

Com isso, obtemos uma aproximação da área sob a curva da função utilizando as três formas da soma de Riemann e podemos observar que ao considerar o ponto médio de cada subintervalo obtemos um valor mais preciso.

Podemos observar que, as aproximações por diferenças finitas e Somas de Riemann mostram como é possível lidar computacionalmente com funções contínuas por meio de métodos numéricos simples e eficazes. As diferenças finitas possibilitam a estimativa de derivadas com boa precisão, e métodos como a forma central, costumam oferecer resultados mais confiáveis quando comparados às versões progressiva ou regressiva. No caso da integração, as Somas de Riemann permitem aproximar a área sob uma curva por meio de retângulos, e se tornam cada vez mais precisas à medida que aumentamos a quantidade de retângulos. O uso do ponto médio, em particular, tende a gerar melhores aproximações com menos subintervalos em comparação com a soma à esquerda ou à direita. A teoria garante que essas aproximações convergem para o valor real da integral ou derivada, justificando sua ampla aplicação em simulações numéricas, modelagem científica e engenharia. Além de úteis computacionalmente, esses métodos fortalecem a intuição sobre os conceitos fundamentais vistos na disciplina de cálculo diferencial e integral I.