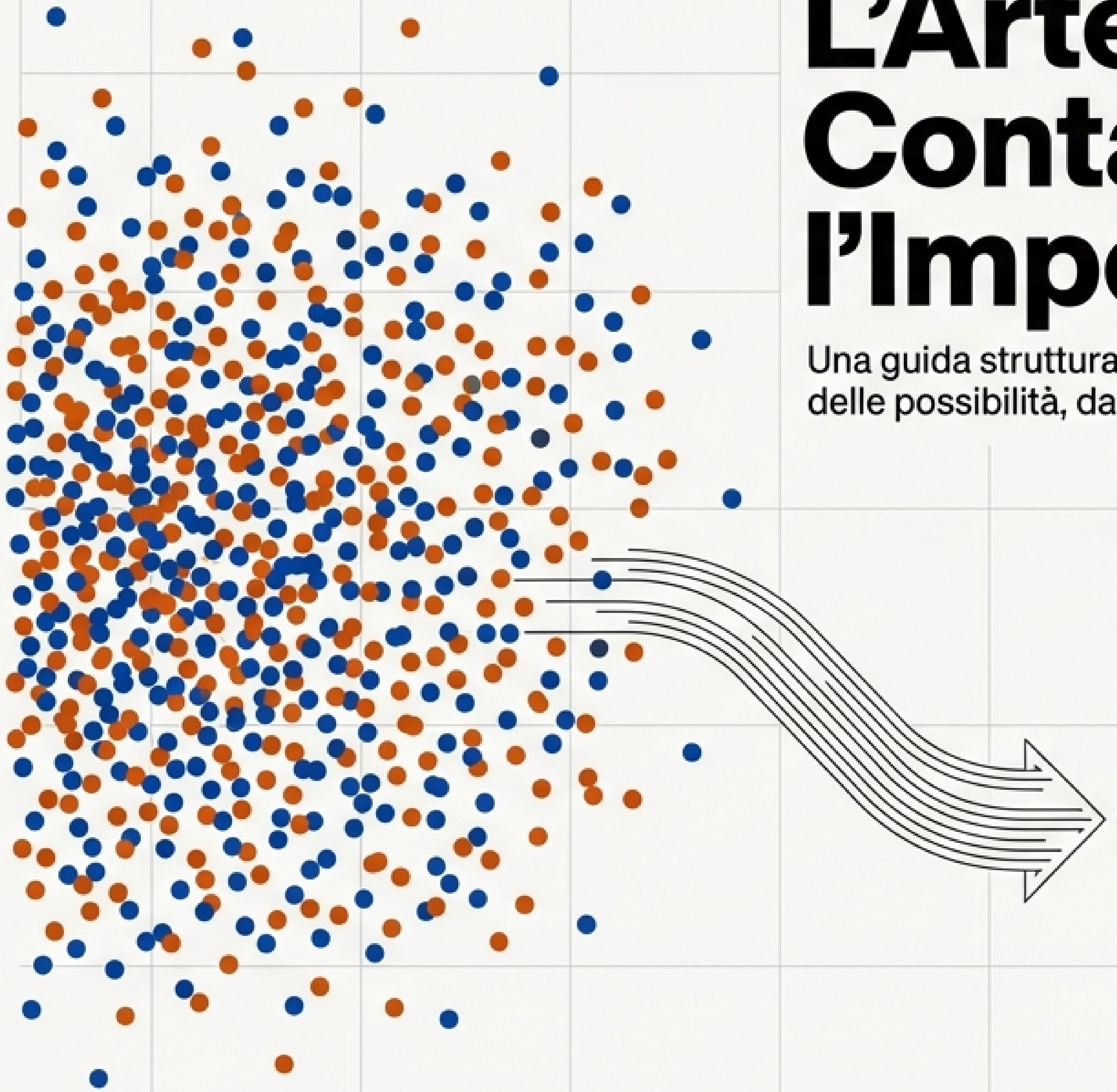
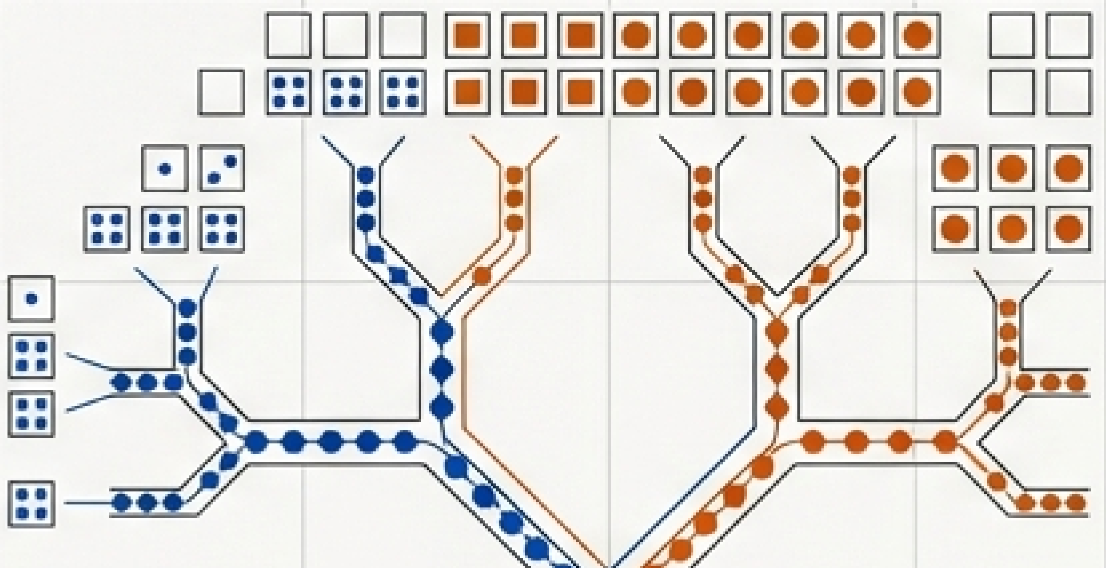
IL CALCOLO COMBINATORIO

L'Arte di Contare l'Impossibile

Una guida strutturata per navigare nel mare delle possibilità, dai bit ai biglietti della lotteria.





Principio Fondamentale del Conteggio

$n_1 \quad n_2 \quad n_1 \quad n_2 \quad = n_1 \times n_2$

Fattoriali

$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$

$5! = 120$

DIsposizioni

Con Ripetizione

$D'_{n,k} = n^k$

k

Senza Ripetizione

$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Scoglisme 3 distinct distintto digite dal 10:

$D_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Combinazioni

Con Ripetizione

$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Senza Ripetizione

$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Scogliemo 5 numeri numeri dl 90 per laorte un lotteria.

$C_{90,5} = \frac{90!}{5!85!} \approx 4{,}4 \times 10^7$

Permutazioni

$P_n = n!$

Arrangina n distinct distinct elemutations

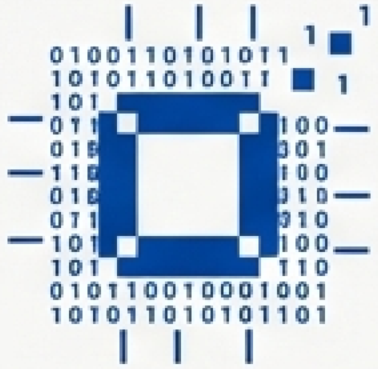
Con Ripetizione

$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$

Esempio anagrams for word (n = 11, I = 4, S = 4, P = 2, M = 1)

$\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34650$

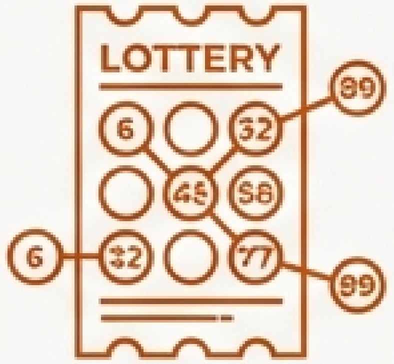
Quando contare uno a uno non basta



Il Mondo Digitale

Un singolo byte è una sequenza di 8 bit (0 o 1). Quante informazioni diverse può rappresentare?

$2^8 = 256$
variazioni



La Fortuna

Nel Superenalotto, dobbiamo scegliere 6 numeri su 90. Quante colonne diverse esistono?

622.614.630
combinazioni

La Sicurezza

Una password di 8 caratteri alfanumerici. Quanti tentativi servirebbero per indovinarla tutte?

Miliardi
di tentativi

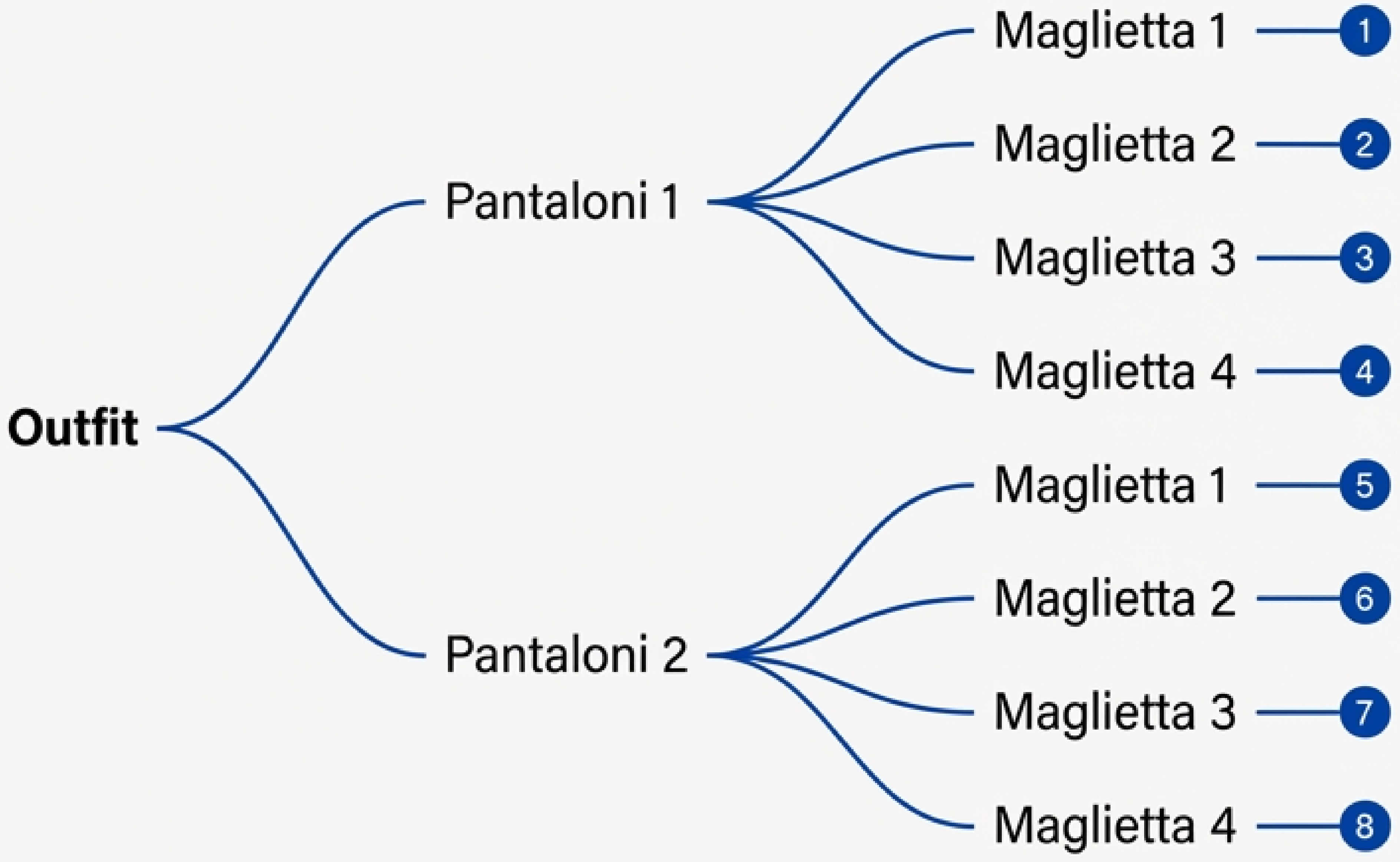
Insight: Il calcolo combinatorio è l'arte di calcolare i raggruppamenti senza doverli elencare.

La Radice: Il Principio di Moltiplicazione

La Regola Fondamentale:

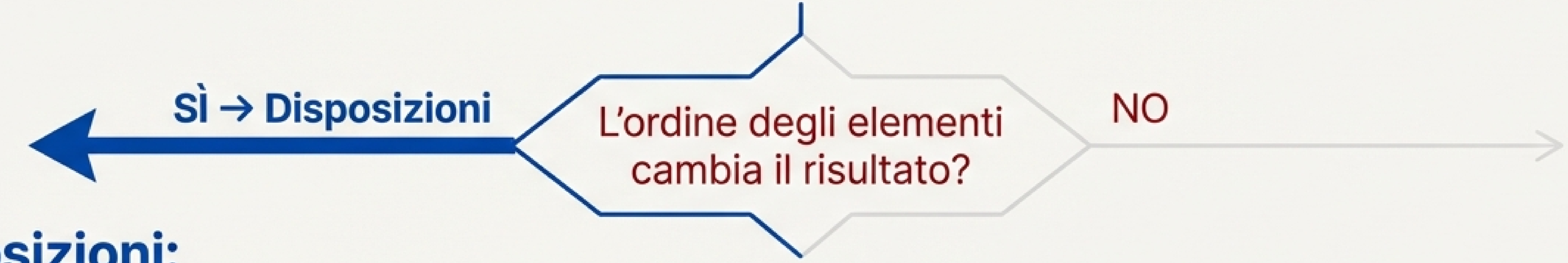
Se una scelta può essere fatta in n modi e una seconda in m modi, il totale delle sequenze è $n \cdot m$.

Formula Generale: $n \cdot m \cdot k \cdot \ldots$



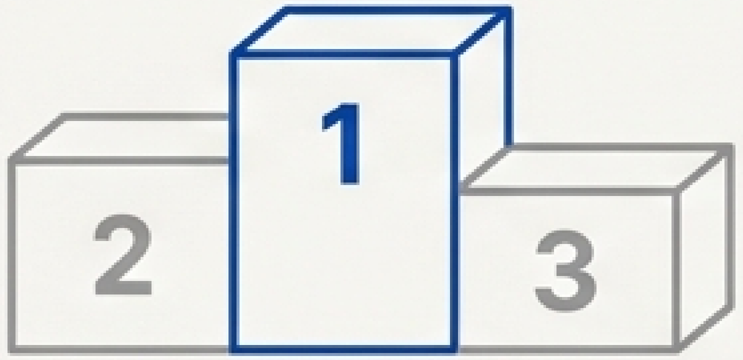
2 Pantaloni × 4 Magliette = **8 Outfit Possibili**

Decisione 1: L'Ordine Conta?



Disposizioni:

Gruppi che si distinguono per gli elementi
O per l'ordine ($\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$).



Esempio: Una gara con 4 atleti (Pierre, Quentin, Robert, Samuel).

- Podio **P-Q-R** $\neq$ Podio **R-Q-P**
  (Oro, Argento, Bronzo sono diversi)

1° Posto: 4 scelte
2° Posto: 3 scelte
3° Posto: 2 scelte

Totale: $4 \times 3 \times 2 = 24$

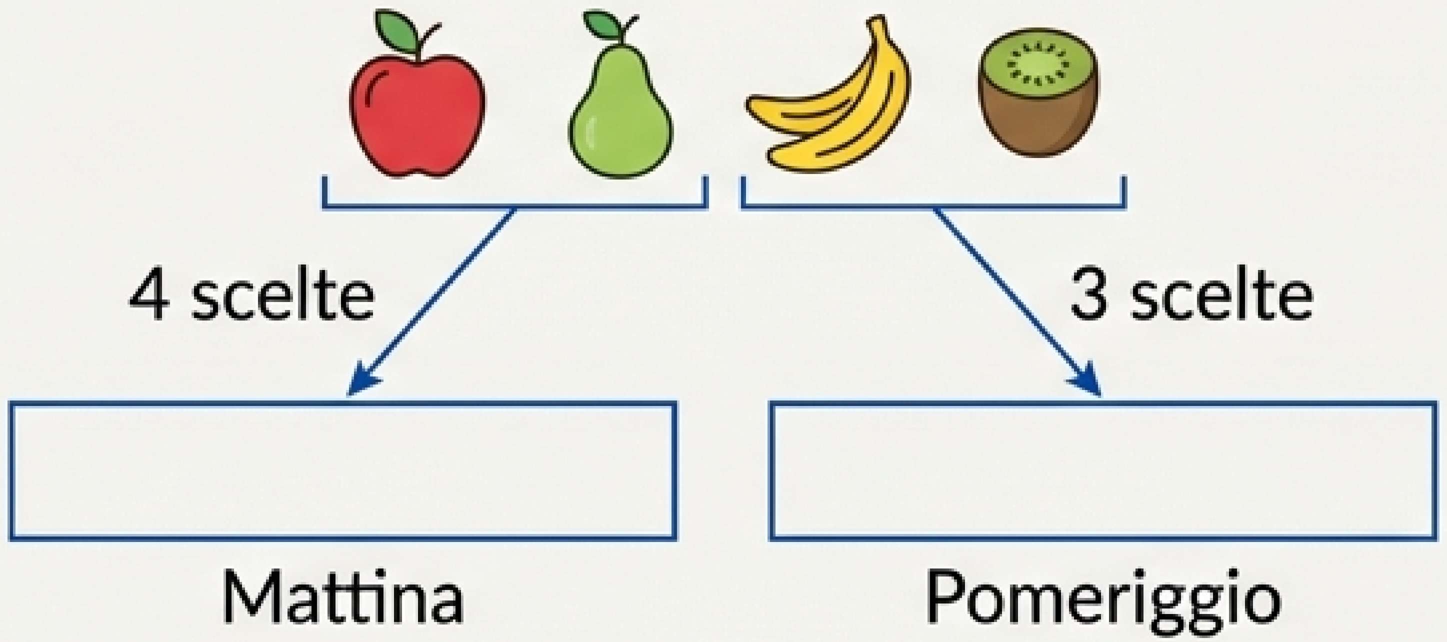
Disposizioni

Semplici vs. Con Ripetizione

Disposizioni Semplici (Senza Ripetizione)

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Ogni elemento usato viene rimosso dal pool.

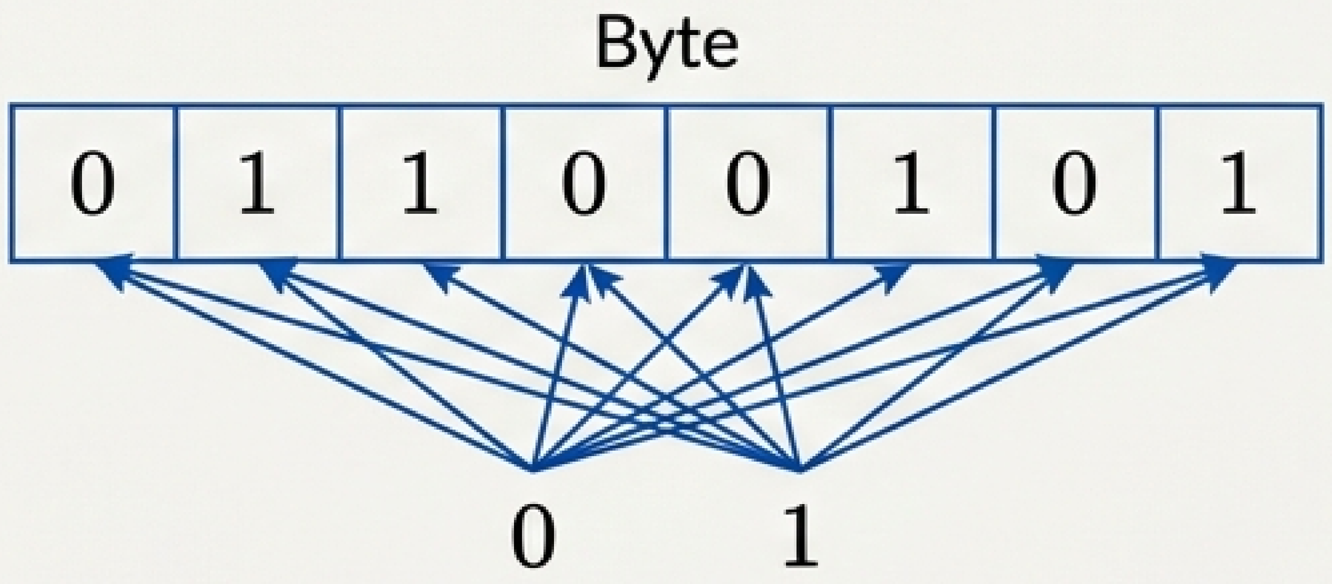


$4 \text{ scelte} \times 3 \text{ scelte} = 12$

Disposizioni con Ripetizione (Con Reinserimento)

$$D'_{n,k} = n^k$$

Gli elementi tornano disponibili ogni volta.



2 simboli (0,1) su 8 posizioni $\rightarrow 2^8 = 256$

Quando n = k: Le Permutazioni

Cosa succede se ordiniamo TUTTI gli oggetti a disposizione?
Le Disposizioni diventano Permutazioni.

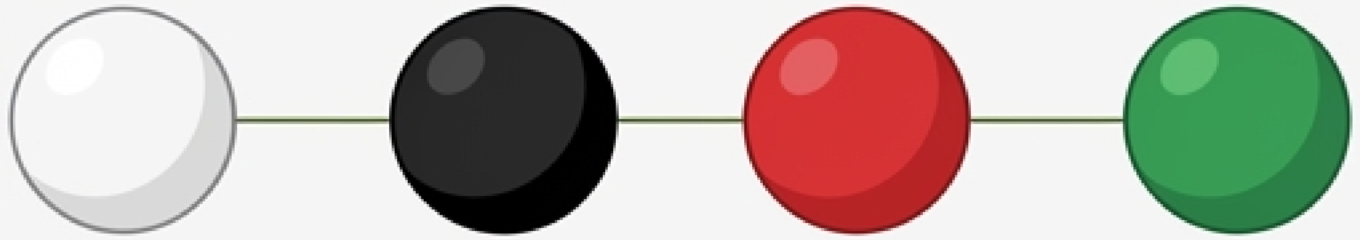
Formula: $P_n = n!$

n!

Crimson Pro

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

$$0! = 1$$



Esempio: 4 palline in fila.
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modi

La crescita del fattoriale:
5! = 120, ma
10! = 3.628.800

L’Eccezione dei Gemelli: Permutazioni con Ripetizione

Il Problema dei Gemelli

TETTO

Identificazione Iniziale: “T” Distinte

TTTTO

Realtà: “T” Identiche

Anagrammare la parola TETTO.

- 5 lettere totali, ma 3 sono identiche.
- Scambiare due “T” non cambia la parola.

La Matematica delle Ripetizioni

Formula: Permutazioni con Ripetizione

$$P_n^{(h,k\ldots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \ldots}$$

La Permutazioni con Ripetizione:

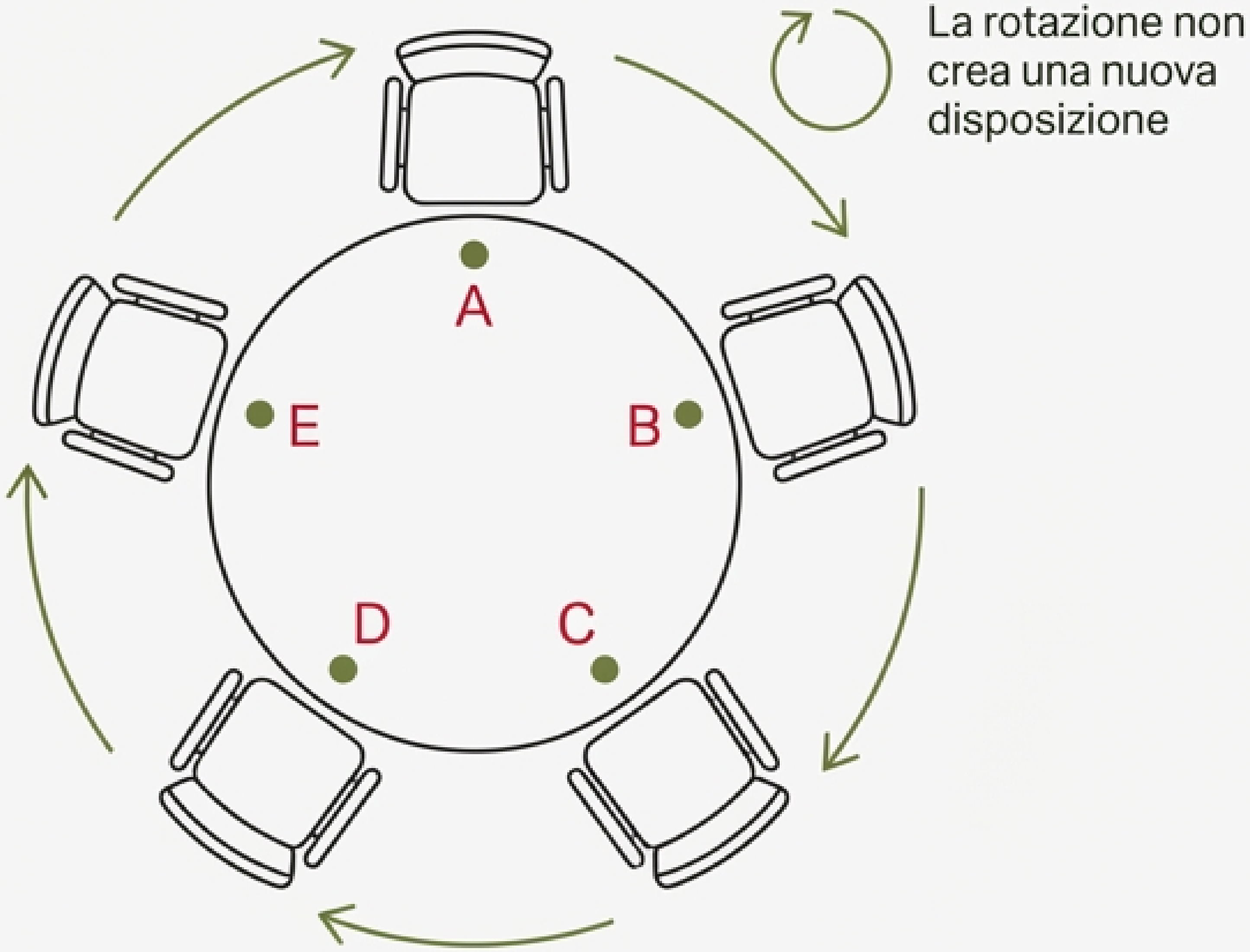
Numeratore: 5! (tutte le lettere)
Denominatore: 3! (per le tre T) $\times$ $1!$ (E) $\times$ $1!$ (O)

$$5! = 120, \quad 3! \cdot 1! \cdot 1! = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

$$\frac{120}{6} = 20 \text{ anagrammi unici}$$

La divisione per i fattoriali delle ripetizioni corregge il sovraconteggio delle disposizioni identiche.

La Tavola Rotonda: Permutazioni Circolari



Differenza Chiave: In un cerchio non esiste un primo o ultimo posto assoluto. Conta solo la posizione relativa.

$$\boxed{P_n(\text{circ}) = (n-1)!}$$

Comparison

5 persone in fila: $5! = 120$

5 persone al tavolo: $4! = 24$

Decisione 2: L'Ordine Non Conta

SÌ

L'ordine degli elementi cambia il risultato?

NO →

Combinazioni: Il gruppo rimane lo stesso indipendentemente dalla sequenza.

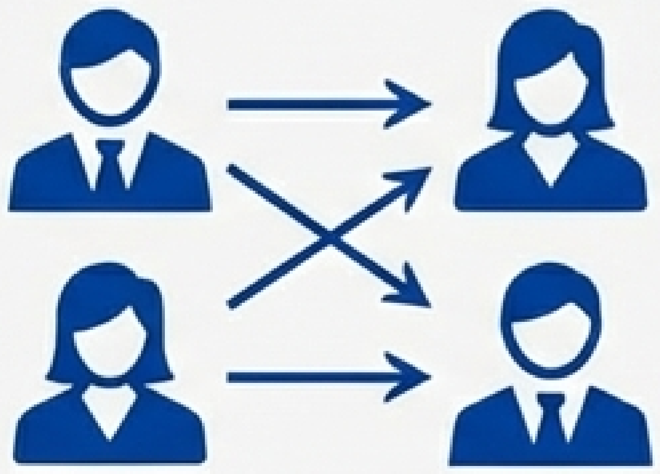
ABC = BCA = CBA

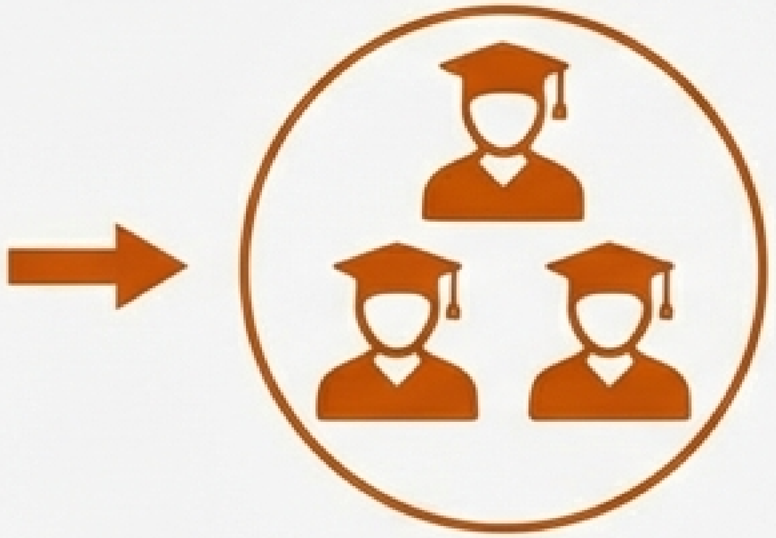
Disposizioni
(Ordine Conta)

Combinazioni
(Ordine Non Conta)

Presidente, Segretario, Tesoriere

3 Studenti in gita





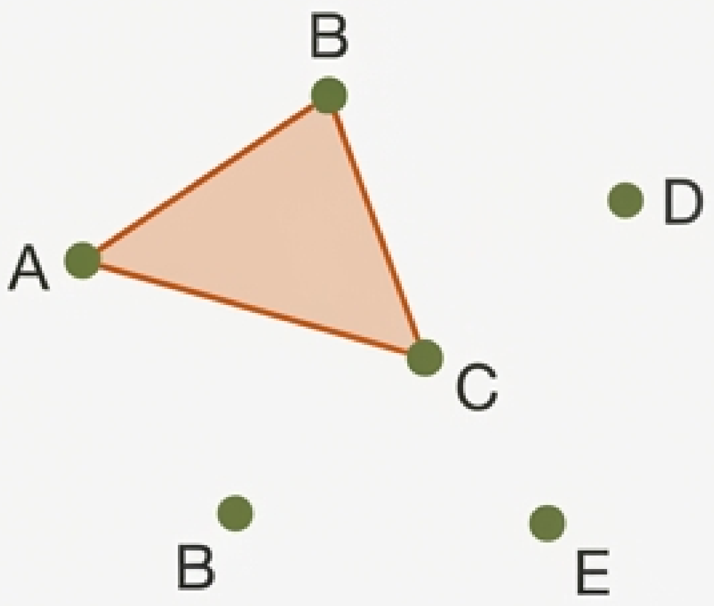
Presidente, Segretario, Tesoriere

3 Studenti in gita

Le Combinazioni sono Disposizioni divise per le permutazioni ridondanti (k!).

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Combinazioni Semplici e il Coefficiente Binomiale



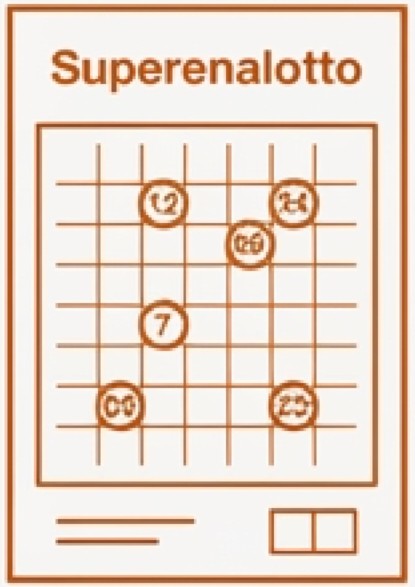
Quanti triangoli con 5 punti?

Triangolo ABC = BCA.

Calcolo: $\binom{5}{3} = 10$

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si legge "*n* su *k*"



Superenalotto: 6 numeri su 90.

L'ordine di estrazione è irrilevante.

Calcolo: $C_{90,6}$ (milioni)

Raggruppare Oggetti Indistinguibili

Combinazioni con Ripetizione

Testa Croce

Lanci di una moneta:
Conta solo QUANTE
Conta solo QUANTE Teste e QUANTE Croci, non l'ordine.

TT, TC, CC

Scenario: Distribuzione di oggetti in contenitori, o selezione dove gli elementi possono ripetersi e l'ordine non conta.

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Example: 2 lanci di moneta (n=2 facce, k=2 lanci)

$$\binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2}$$

= 3 risultati possibili (TT, TC, CC)

NotebookLM

La Geometria delle Scelte: Il Triangolo di Tartaglia

Ogni numero è un *coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & 1
\end{array}
$$

Applicazione:
Il Binomio di Newton $(A+B)^n$

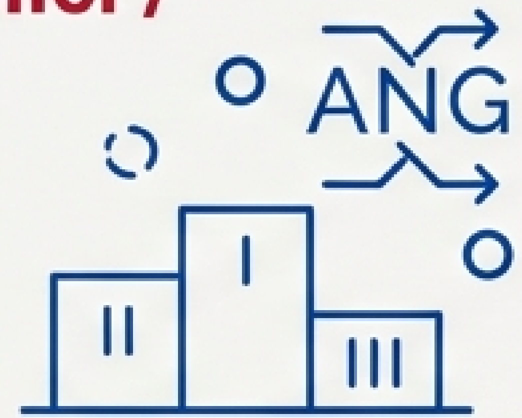
Esempio n=4:

$$(A+B)^4 = \mathbf{1}A^4 + \mathbf{4}A^3B + \mathbf{6}A^2B^2 + \mathbf{4}AB^3 + \mathbf{1}B^4$$

I coefficienti corrispondono esattamente alla riga 4 del triangolo.

Il Quadro Sinottico: Quale Formula Usare?

	Senza Ripetizione	Con Ripetizione
L'Ordine Conta (Sì)	**Disposizioni Semplici / Permutazioni** Crimson Pro Regular $D_{n,k} \quad P_n$	**Disposizioni con Ripetizione** Crimson Pro Regular n^k
L'Ordine Non Conta (No)	**Combinazioni Semplici** Crimson Pro Regular $\binom{n}{k}$	**Combinazioni con Ripetizione** Crimson Pro Regular $\binom{n+k-1}{k}$



Applicazione Reale: Strategie di Investimento

Scenario

Elena deve investire su 5 titoli azionari (n=5).

Investimento totale: 30.000€

Minimo richiesto già coperto: 17.000€

Capitale residuo da allocare: 13.000€ in quote da 1.000€ (k=13).

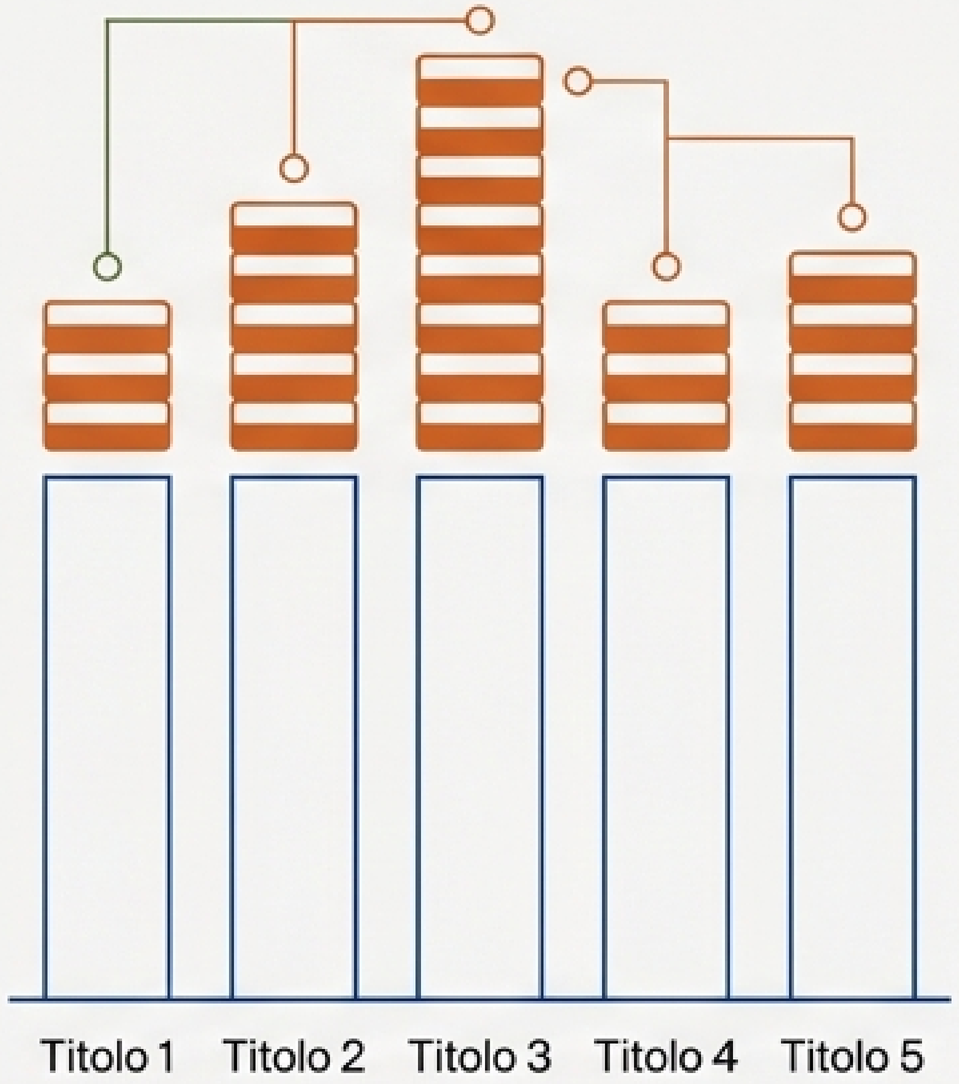
Logica & Soluzione

Logica: L'ordine di acquisto non conta. Conta solo quante quote vanno su ogni titolo.

Soluzione: Combinazioni con Ripetizione.

$$\binom{5+13-1}{13} = \binom{17}{13}$$

2.380 Strategie Diverse



Oltre i Numeri

Il calcolo combinatorio non serve solo a vincere al gioco o sbloccare un telefono. È la logica che struttura il nostro mondo digitale, ottimizza le risorse economiche e ci aiuta a comprendere la complessità.

"Dall'alfabeto alle stelle, tutto è questione di come combiniamo gli elementi."