CAPITOLO 24
CALCOLO COMBINATORIO

Linguaggi codificati

Per gestire ed elaborare le informazioni, i computer utilizzano il codice binario: un sistema numerico basato su due cifre, 0 e 1, dette **bit**. I bit sono raggruppati in sequenze più lunghe, come il **byte**, formato da 8 bit.

Quante informazioni diverse si possono rappresentare con un byte?

→ La risposta a pag. 1362

T TEORIA

1 Che cos'è il calcolo combinatorio

→ Esercizi a p. 1374

«Quante sono tutte le colonne che si possono giocare al Superenalotto, cioè quanti sono tutti i modi possibili di scegliere 6 numeri tra i 90 a disposizione?»
«Quante sono le possibili classifiche di una gara a cui partecipano 10 concorrenti?»

Il **calcolo combinatorio** permette di rispondere a queste domande o ad altre simili, in quanto studia il numero di modi in cui è possibile raggruppare, disporre o ordinare gli elementi di un insieme finito di oggetti o persone.

Listen to it

Combinatorial analysis (or **combinatorics**) is the branch of mathematics which studies the number of different ways of arranging the elements of a given set.

Raggruppamenti

Esaminiamo il seguente problema.
Un ragazzo ha a disposizione due paia di pantaloni e quattro magliette. Ci domandiamo in quanti modi diversi può vestirsi.
Fissato un paio di pantaloni, a questo può accostare, una alla volta, ognuna delle quattro magliette, e quindi abbiamo quattro possibilità. Ma a questo numero di possibilità dobbiamo aggiungere le possibilità che si ottengono con il secondo paio di pantaloni e, di nuovo, ognuna delle quattro magliette. Quindi le possibilità sono in totale otto.

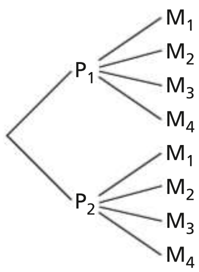
GUARDA!

2 Video
8 Listen to it
3 Pdf di approfondimento

Indichiamo le due paia di pantaloni con P_1 e P_2, le quattro magliette con M_1, M_2, M_3, M_4 e consideriamo gli insiemi $P = \{P_1, P_2\}$ e $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

Elenchiamo tutte le possibili coppie. Esse non sono altro che gli elementi del prodotto cartesiano fra l'insieme dei pantaloni P e l'insieme delle magliette M:

$$P \times M = \{(P_1; M_1), (P_1; M_2), (P_1; M_3), (P_1; M_4), (P_2; M_1), (P_2; M_2), (P_2; M_3), (P_2; M_4)\}.$$



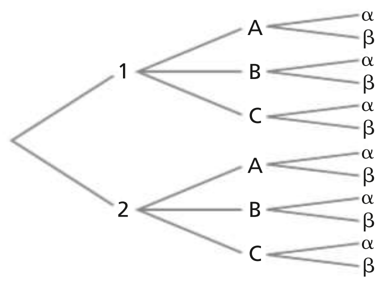
Il diagramma ad albero della figura a fianco suggerisce un metodo per determinare il numero di tutti i gruppi che è possibile formare.
Le 2 possibilità corrispondenti ai rami dei pantaloni devono essere moltiplicate per le 4 possibilità corrispondenti ai rami delle magliette.

Quindi in totale abbiamo $2 \cdot 4 = 8$ gruppi.

ESEMPIO

Elenchiamo tutte le sigle di tre elementi che possiamo scrivere utilizzando le cifre 1 e 2 per il primo posto, le lettere A, B, C per il secondo e le lettere greche α e β per l'ultimo posto. Calcoliamo poi quante sono.

Disegniamo il diagramma ad albero. Percorrendo i diversi rami del diagramma possiamo costruire tutte le sigle possibili. Procedendo dall'alto verso il basso: $1A\alpha$, $1A\beta$, $1B\alpha$, …
Calcoliamo il numero delle sigle che possiamo scrivere: 2 sono le possibilità per la prima posizione, 3 per la seconda e 2 per la terza. Complessivamente abbiamo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ gruppi.



In generale, per determinare quanti gruppi si possono formare assegnando il primo posto a un elemento di un insieme A con n elementi, il secondo a uno di un insieme B con m elementi, il terzo a uno di un insieme C con k elementi, …, con n, m, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, occorre calcolare il prodotto $n \cdot m \cdot k \cdot \ldots$

PROVA SUBITO

Un fast food propone 4 tipi di panini, 3 tipi di bibite e 2 contorni. Quanti diversi tipi di menù «panino + contorno + bibita» offre? [24]

Listen to it

The **rule of product** states that when a first task can be performed in *n* different ways, a second one in *m* different ways, a third one in *k* different ways and so on, the number of different ways to perform all the tasks one after another is $n \cdot m \cdot k \cdot \ldots$

T

TEORIA

2 Disposizioni

Disposizioni semplici

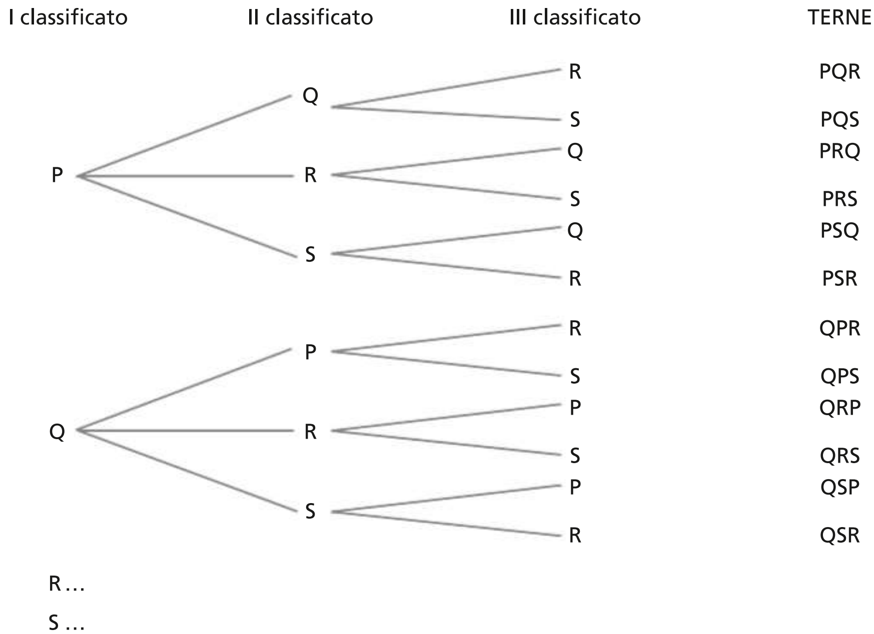
→ Esercizi a p. 1375

Pierre, Quentin, Robert e Samuel si sfidano in una corsa campestre. Vengono premiati solo i primi tre.
Calcoliamo quante sono le possibili classifiche dei premiati.

Indichiamo i quattro atleti con le lettere P, Q, R, S e con A l'insieme costituito da questi quattro elementi, cioè:

$$A = \{P, Q, R, S\}.$$

Costruiamo con un diagramma ad albero tutte le possibili terne di premiati.



Notiamo che ogni terna si distingue dalle altre per

- la **diversità di almeno un elemento**,
- l'**ordine** degli elementi,

oppure per entrambi i motivi.

Chiamiamo i gruppi con le caratteristiche indicate con il termine di **disposizioni semplici**.

Per arrivare rapidamente al calcolo del numero di disposizioni, consideriamo che per il primo posto le possibilità sono 4. Dopo aver scelto il primo classificato, per il secondo classificato restano $4 - 1 = 3$ atleti che possono arrivare secondi, cioè 3 possibilità per il secondo posto. Per il terzo classificato, infine, restano $4 - 2 = 2$ atleti ancora in gara, cioè 2 possibilità per il terzo posto. Complessivamente i gruppi sono:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Per indicare il valore trovato, usiamo la seguente notazione:

$$D_{4,3} = 24$$

(si legge: «disposizioni semplici di 4 elementi di classe 3»).

Generalizziamo il procedimento considerando n oggetti distinti e determiniamo la formula per i raggruppamenti di classe k, cioè con k oggetti.

DEFINIZIONE

Le **disposizioni semplici** di n elementi distinti di classe k (con $0 < k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per l'ordine* con cui gli elementi sono collocati:

$$\boldsymbol{D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{\text{prodotto di } k \text{ fattori}}}, \text{ con } n, k \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < k \leq n.$$

PROVA SUBITO

Francesco mangia un frutto la mattina e uno a merenda. Ha una mela, una pera, una banana e un kiwi. Quante sono le possibili scelte dei frutti da mangiare al mattino e al pomeriggio? [12]

Listen to it

Given a set S of n distinct elements, the **simple *k*-permutations** are all the **ordered selections** of k elements chosen among the elements of the set S.

Per esempio, calcoliamo:

$$D_{7,3} = \underbrace{\overset{\text{si parte da 7}}{7} \cdot 6 \cdot 5}_{\text{3 fattori}}.$$

Qui e nel seguito, indicheremo con $D_{n,k}$ sia le disposizioni sia il loro numero.

ESEMPIO

1. A un torneo di calcio femminile partecipano 15 squadre. Quante sono le possibili classifiche delle prime cinque squadre?
   L'insieme di partenza contiene come elementi le 15 squadre, perciò $n = 15$; i raggruppamenti contengono 5 elementi, dunque $k = 5$.
   Il numero delle possibili classifiche è:

$$D_{15,5} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360.$$

2. Quante sigle di 5 elementi si possono formare in modo che i primi due posti siano occupati da 2 diverse cifre e gli altri tre posti da 3 lettere diverse dell'alfabeto italiano?

   Primi due posti: $D_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$.

   Ultimi tre posti: $D_{21,3} = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$.

   A ogni disposizione di due cifre ne accompagniamo una di tre lettere:

$$D_{10,2} \cdot D_{21,3} = 90 \cdot 7980 = 718\,200.$$

3. Quanti numeri di 4 cifre, tutte diverse tra loro, si possono formare con le dieci cifre decimali?
   Se calcoliamo $D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$, nel risultato sono compresi anche quei numeri che iniziano con la cifra 0 e che, in realtà, non sono numeri di quattro cifre, ma di tre. Dobbiamo determinare quanti sono e sottrarre il loro numero da quello appena calcolato.
   Ragioniamo così: prendiamo le nove cifre diverse dallo zero e calcoliamo tutte le disposizioni di classe 3. Infatti, se a ognuno dei numeri che così si formano poniamo davanti lo zero, abbiamo tutti i numeri da eliminare.
   Poiché $D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, i numeri con 4 cifre significative tutte diverse che si possono formare sono:

$$D_{10,4} - D_{9,3} = 5040 - 504 = 4536.$$

   Possiamo giungere direttamente al risultato con il «metodo delle possibilità».
   Per il primo posto abbiamo 9 possibilità (le dieci cifre meno lo zero), per il secondo posto 9 possibilità (non utilizziamo la cifra collocata al primo posto, ma possiamo utilizzare ora la cifra zero), per il terzo posto 8 possibilità e infine per il quarto 7 possibilità. Quindi, appunto,

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

T TEORIA

PROVA SUBITO

In quanti modi si possono sistemare quattro fotografie in tre cornici?

[24]

PROVA SUBITO

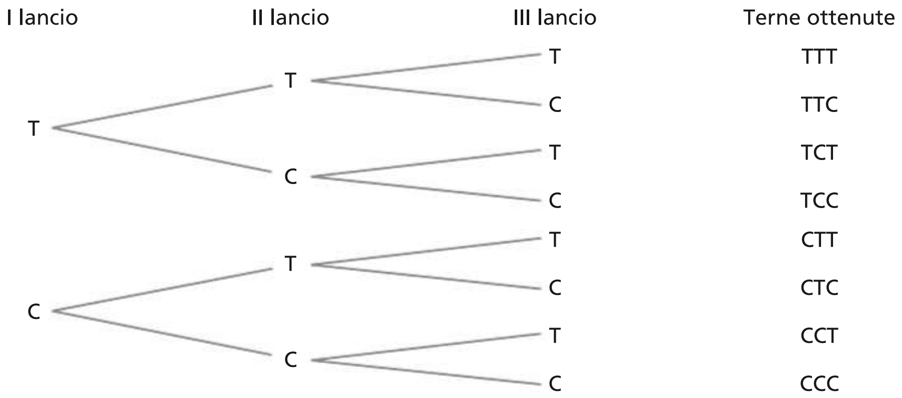
In quanti modi si può costruire una password di 6 lettere usando le 21 lettere dell'alfabeto italiano se nessuna lettera viene ripetuta e se l'ultima lettera non può essere z?

Animazione nell'ebook

Disposizioni con ripetizione

→ Esercizi a p. 1377

Lanciamo una moneta tre volte e cerchiamo di prevedere tutti i modi con cui si succedono le uscite delle due facce.
L'insieme A che contiene i due possibili risultati del lancio è: $A = \{T, C\}$, dove T indica il risultato «Testa» e C il risultato «Croce».
Costruiamo con un diagramma ad albero le terne di tutti i possibili risultati.



I gruppi così ottenuti differiscono per l'**ordine** degli elementi contenuti, ma **un elemento può comparire più di una volta**.

I gruppi trovati si chiamano **disposizioni con ripetizione**.
A differenza delle disposizioni semplici, la classe k di un gruppo può essere maggiore del numero n di elementi a disposizione. Nell'esempio la classe di ogni gruppo è 3, mentre gli elementi sono 2.
Osserviamo che le terne ottenute corrispondono agli elementi del prodotto cartesiano $A \times A \times A$.
Per determinare il loro numero possiamo usare ciò che già sappiamo sui raggruppamenti. L'insieme A ha 2 elementi, quindi il numero dei possibili gruppi di tre elementi di A, cioè il numero di elementi dell'insieme $A \times A \times A$, è

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3.$$

In alternativa possiamo ricorrere al «metodo delle possibilità». Per il primo posto abbiamo 2 possibilità, che restano 2 anche per il secondo e per il terzo in quanto un elemento già utilizzato può ripresentarsi:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8.$$

In simboli, scriviamo:

$$D'_{2,3} = 8.$$

Generalizziamo il procedimento considerando n oggetti distinti e determiniamo la formula per raggruppamenti di classe k.

DEFINIZIONE

Le **disposizioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con k numero naturale qualunque non nullo) sono tutti i gruppi di k elementi, anche ripetuti, scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per il loro ordine*:

$$\boldsymbol{D'_{n,k} = n^k}.$$

Anche in questo caso, con $D'_{n,k}$ indicheremo sia le disposizioni con ripetizione sia il loro numero.

Listen to it

Given a set S of n distinct elements, the ***k*-permutations with repetition** are all the ordered selections of k elements of the set S, where every element can appear more than once.

PROVA SUBITO

Quante sigle di 8 elementi che hanno le prime quattro posizioni occupate da cifre e le rimanenti dalle vocali dell'alfabeto italiano puoi formare se le sigle devono contenere almeno una A e possono contenere ripetizioni?

Animazione nell'ebook

T TEORIA

ESEMPIO Quante notti?

Vogliamo organizzare un viaggio in Scozia, per visitare il faro di Neist Point e i dintorni. Dobbiamo prenotare sei pernottamenti, in luoghi diversi oppure fermandoci più di una notte nello stesso luogo. Abbiamo a disposizione una lista di nove Bed and Breakfast.

- In quanti modi possiamo fare la nostra scelta?

Poiché possiamo fermarci anche più notti nello stesso B&B, le possibilità sono:

$$D'_{9,6} = 9^6 = 531441.$$

IDEE E PROBLEMI INFORMATICA
Dal bit al byte

Il linguaggio utilizzato dai computer è il codice binario, un sistema di numerazione in base due. L'unità di base è il *bit*, che può assumere i valori 0 o 1. L'ordine e la sequenza in cui sono raggruppati i bit danno la possibilità di rappresentare un grande numero di informazioni.
Una stringa formata da 8 bit è chiamata *byte*; il byte e i suoi multipli sono l'unità di misura delle memorie di archiviazione di tutti i dispositivi informatici.

Quante informazioni? Camilla vuole comprare un nuovo hard disk esterno per archiviare i dati presenti sul suo computer. In commercio trova vari modelli con diverse capacità di memoria, indicate da multipli del byte.

- Quante informazioni distinte possono essere rappresentate da un byte?

Il byte, come abbiamo visto, è formato da una sequenza di 8 bit, ciascuno dei quali può assumere solo un valore tra due possibili. Il numero di informazioni che si possono rappresentare con un byte si può calcolare con la formula per le disposizioni con ripetizione:

$$D'_{2,8} = 2^8 = 256.$$

Con un byte è possibile rappresentare 256 informazioni diverse.

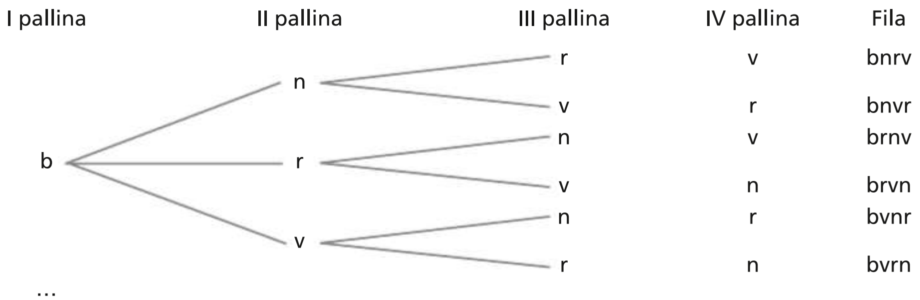
3 Permutazioni

Permutazioni semplici

→ Esercizi a p. 1378

Abbiamo quattro palline colorate, ognuna di un colore diverso (bianco, nero, rosso, verde). Calcoliamo in quanti modi diversi possiamo metterle in fila.
L'insieme dei colori è: $A = \{b, n, r, v\}$.

Costruiamo con un diagramma ad albero tutti i possibili raggruppamenti.



Se la prima pallina è bianca, si ottengono 6 raggruppamenti. Ma la prima pallina può essere bianca, rossa, nera o verde, quindi:

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ raggruppamenti}.$$

Notiamo che **ogni gruppo contiene tutti gli elementi** dell'insieme e **differisce dagli altri solo per l'ordine**. Stiamo quindi considerando le disposizioni semplici di 4 elementi di classe 4.
Chiamiamo i raggruppamenti che hanno queste caratteristiche **permutazioni semplici** o più brevemente **permutazioni**.
Nel nostro esempio parliamo di *permutazioni di 4 elementi* e scriviamo il numero delle permutazioni ottenute nel modo seguente:

$$P_4 = 24.$$

Nel caso generale, poiché le permutazioni di n elementi coincidono con le disposizioni semplici di classe n degli n elementi, per calcolare il numero delle permutazioni, poniamo nella formula delle disposizioni semplici $k = n$:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) =$$
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Il numero di permutazioni di n elementi, quindi, è il prodotto dei primi n numeri naturali (escluso lo 0). Tale prodotto si indica con il simbolo $\boldsymbol{n!}$ e si legge «n fattoriale». Nel nostro esempio le permutazioni delle quattro palline colorate sono:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

DEFINIZIONE
Le **permutazioni semplici** di n elementi distinti sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per il loro *ordine*:

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad \text{con } n \geq 2.$$

Anche in questo caso, con P_n indicheremo sia le permutazioni sia quante sono.

ESEMPIO

1. Quanti numeri di sei cifre distinte possiamo scrivere utilizzando gli elementi dell'insieme $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$?

   $$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

2. Calcoliamo il numero di anagrammi, anche senza significato, che si possono ottenere con le lettere della parola CANTO:

   $$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Listen to it

When all the n elements of a set are **distinct**, the ordered selections of all the n elements are called **n-permutations**.

PROVA SUBITO

▶ Dario ha 5 caramelle gommose di 5 colori diversi e 2 cioccolatini, uno al latte e uno fondente. Quanti sono i modi in cui Dario può mangiare i 7 dolciumi senza mangiare per prime tutte le caramelle?

Animazione nell'ebook

ESEMPIO AZIENDA

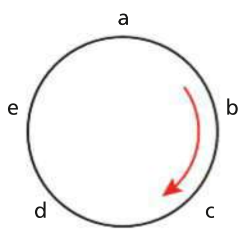
Cda in riunione

Il Consiglio di amministrazione di un'azienda è formato da cinque persone. Durante una riunione, siedono disponendosi in modo circolare.

► In quanti modi possono sedersi?

Se si sedessero in fila, i modi sarebbero $P_5 = 5! = 120$.
Essendo disposti su una circonferenza, occorre considerare che vi sono permutazioni che, poste in ordine circolare, coincidono.
Chiamiamo i membri del Cda con le prime cinque lettere dell'alfabeto. Fissato un raggruppamento, per esempio

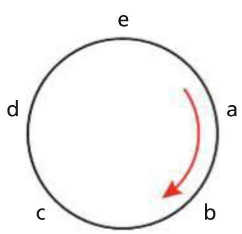
$$a \quad b \quad c \quad d \quad e,$$



sono a esso equivalenti i seguenti:

$$b \quad c \quad d \quad e \quad a; \qquad d \quad e \quad a \quad b \quad c;$$

$$c \quad d \quad e \quad a \quad b; \qquad e \quad a \quad b \quad c \quad d.$$



I modi che coincidono sono tanti quanti i consiglieri. Quindi, se cinque consiglieri siedono circolarmente, tutti i modi possibili di sedersi sono:

$$\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{5}} = 4! = P_4 = 24.$$

Questo è un esempio di **permutazione circolare**, in quanto gli elementi non sono in fila, ma disposti intorno a una circonferenza.

Funzione fattoriale

→ Esercizi a p. 1379

Abbiamo visto che il simbolo $n! = n(n-1)(n-2)\ldots \cdot 2 \cdot 1$ indica il prodotto dei primi n numeri naturali, escluso lo zero.
Questa scrittura non è valida per $n = 0$ ma nemmeno per $n = 1$, perché un prodotto si può eseguire solo se ci sono almeno due fattori.
Per poter estendere il significato di fattoriale a tutti i numeri naturali abbiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Definiamo la **funzione fattoriale** come:

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots \cdot 2 \cdot 1}, \quad \text{con } n \geq 2,$$

$$\boldsymbol{0! = 1}, \qquad \boldsymbol{1! = 1}.$$

La funzione $n!$ è crescente, con crescita molto rapida.

$$2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \quad 7! = 5040 \quad 8! = 40\,320$$

$$9! = 362\,880 \quad 10! = 3\,628\,800 \quad \ldots$$

Dalla definizione deduciamo la relazione:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1)!}.$$

Infatti: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot [(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1] = n \cdot (n-1)!$.
Per esempio, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 4! = 5 \cdot (5-1)!$.

In particolare, questa relazione, applicata per $n = 2$, giustifica il fatto che abbiamo posto $1! = 1$. Infatti:

$$2! = 2 \cdot (2-1)! = 2 \cdot 1!,$$

ma poiché è anche vero che

$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$

allora deve essere $2 \cdot 1! = 2$ e quindi $1! = 1$.

La relazione $n! = n \cdot (n-1)!$ vale anche se consideriamo $(n+1)!$, cioè:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Questa uguaglianza suggerisce una **definizione ricorsiva di $n!$**:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}.$$

Vale anche la seguente relazione:

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!.$$

Infatti:

$$(n+1)! - n! = (n+1) \cdot n! - n! = (n+1-1) \cdot n! = n \cdot n!.$$

Per esempio,

$$6! - 5! = 6 \cdot 5! - 5! = (6-1) \cdot 5! = 5 \cdot 5!.$$

PROVA SUBITO

- Ricava 1! con questa definizione.

n! e le disposizioni

Utilizziamo la funzione fattoriale per esprimere le disposizioni. Per esempio:

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{(2 \cdot 1)} = \frac{5!}{2!}.$$

In generale:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Infatti:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$ moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(n-k)!$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Considerando poi che le permutazioni di n oggetti sono le disposizioni di classe n di n oggetti, possiamo giustificare anche l'aver posto $0! = 1$ nella definizione di fattoriale.

PROVA SUBITO

- Verifica che l'uguaglianza $\frac{D_{n+1,k} - D_{n,k-1}}{n^2} = D_{n-1,k-2}$ è vera per ogni $n > 0$ e per ogni k tale che $0 < k \leq n$.

Animazione nell'ebook

T TEORIA

Infatti, sostituendo $k = n$ nella formula per le disposizioni,

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!},$$

ma, poiché è anche vero che

$$D_{n,n} = P_n = n!,$$

deve essere $\frac{n!}{0!} = n!$ e quindi dobbiamo porre $0! = 1$.

Video

Gioco della zara
Nel gioco della zara si lanciano tre dadi e si scommette sulla somma che uscirà. Sia il numero 10 sia il numero 9 si ottengono con sei terne diverse di numeri.

- Hanno la stessa probabilità di uscita?

Permutazioni con ripetizione

→ Esercizi a p. 1381

Calcoliamo quanti anagrammi (anche privi di significato) si possono formare con le lettere della parola TETTO.
Pensiamo per il momento che le tre T non siano uguali e distinguiamole colorandole: TETTO.
Se calcoliamo le permutazioni P_5 di 5 elementi, consideriamo come diverse anche le parole che differiscono soltanto per la posizione delle tre T colorate.
Per esempio, mettendo la E e la O nelle prime due posizioni, nel conteggio delle permutazioni semplici sono distinte le parole:

EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT.

Abbiamo 6 casi diversi, corrispondenti alle permutazioni delle tre T colorate:

$$3! = 6.$$

Questi casi sono invece indistinguibili, e uguali a EOTTT, se consideriamo la T come lettera ripetuta più volte.
Se consideriamo le 120 permutazioni di 5 lettere, in questo caso troviamo ogni raggruppamento ripetuto 6 volte. Quindi per ottenere il numero degli anagrammi di TETTO dobbiamo dividere 120 per 6:

$$\frac{120}{6} = 20.$$

Per indicare che dei cinque elementi tre corrispondono a uno stesso elemento ripetuto usiamo il simbolo $P_5^{(3)}$, che si legge: «permutazioni di 5 elementi di cui 3 ripetuti». Abbiamo che:

$$P_5^{(3)} = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20.$$

Chiamiamo i raggruppamenti di questo tipo **permutazioni con ripetizione**.
In generale:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}.$$

La formula si generalizza ulteriormente quando nell'insieme di n elementi gli elementi ripetuti sono $k, h, \ldots, r$, dove $k + h + \ldots + r \leq n$.

Listen to it

When h elements of a set S of n elements are not distinct from one another, the ordered selections are called ***n*-permutations with *h* indistinguishable objects**.

DEFINIZIONE
Le **permutazioni con ripetizione** di n elementi, di cui h, k, … ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per l'*ordine* in cui si presentano gli elementi distinti e la *posizione* che occupano gli elementi ripetuti:

$$\boldsymbol{P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \ldots}}.$$

ESEMPIO

► In quanti modi cinque sedie possono essere occupate da tre persone?

Dobbiamo calcolare il numero delle permutazioni di 5 elementi, con 3 distinti e 2 ripetuti (le due sedie vuote), quindi:

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

PROVA SUBITO

► Quanti sono gli anagrammi, anche senza senso, della parola STRETTE?

Animazione nell'ebook

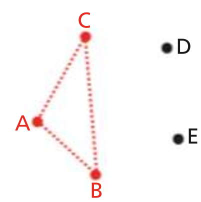
4 Combinazioni

Combinazioni semplici

→ Esercizi a p. 1382

Consideriamo cinque punti nel piano, a tre a tre non allineati. Determiniamo quanti triangoli possiamo costruire congiungendo tre punti.
Indichiamo i punti con le lettere A, B, C, D, E. Consideriamo, per esempio, il triangolo ABC. Esso viene individuato da tutte queste terne:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.



Nel contare i triangoli queste terne vanno prese una volta sola.
Quindi, tutte le terne di lettere che indicano i vertici dei triangoli costituiscono dei **gruppi** che **si differenziano** fra di loro **solo per gli elementi contenuti e non per il loro ordine**.
Chiamiamo questi gruppi **combinazioni (semplici) di 5 elementi di classe 3**. Per indicare il loro numero usiamo il simbolo $C_{5,3}$.
Per ricavare $C_{5,3}$, partiamo da tutte le terne possibili, ossia le disposizioni $D_{5,3}$. Per ogni scelta di 3 elementi ci sono $P_3 = 3!$ disposizioni di questi elementi che differiscono solo per l'ordine. Tutte queste vanno contate solo una volta.
Per esempio, abbiamo già visto che al triangolo ABC corrispondono le terne ABC, ACB, BCA, BAC, CBA e CAB.
Abbiamo perciò:

$$C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

In generale, con ragionamenti analoghi, si ottiene la formula generale:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Listen to it

Given a set S of n distinct elements, the **simple** ***k*-combinations** are all the **unordered selections** of k elements chosen among the elements of the set S.

DEFINIZIONE

Le **combinazioni semplici** di n elementi distinti di classe k (con $0 < k \le n$) sono tutti i gruppi di k elementi, scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento (ma non per l'ordine):

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}, \quad \text{con } k \le n.$$

Con il simbolo $C_{n,k}$ indicheremo ancora sia le combinazioni sia il loro numero.

PROVA SUBITO

► Bisogna sistemare 18 libri su 3 mensole mettendo 6 libri su ciascuna. In quanti modi possiamo farlo senza considerare l'ordine dei libri su ciascuna mensola?

Animazione nell'ebook

ESEMPIO

In un'importante corsa automobilistica una scuderia ha a disposizione cinque vetture da assegnare a due piloti.

► In quanti modi la scuderia può utilizzare le automobili?

L'insieme di partenza contiene le automobili che numeriamo da 1 a 5:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Poiché i piloti sono due, i raggruppamenti sono tutte le coppie che si possono formare con due macchine, scelte tra le cinque disponibili. L'ordine non conta, quindi tali raggruppamenti sono combinazioni:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

PROVA SUBITO

› Calcola il numero di terni che si possono fare al gioco del lotto. [117 480]

Coefficienti binomiali

→ Esercizi a p. 1383

Il numero delle combinazioni viene anche indicato con il simbolo $\binom{n}{k}$, che si chiama *coefficiente binomiale* e si legge «n su k».

DEFINIZIONE

Il **coefficiente binomiale** di due numeri naturali n e k, con $0 \leq k \leq n$, è il numero $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Per esempio, $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!(6-2)!}$.

Se semplifichiamo, otteniamo:

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15.$$

Dalla definizione e dalle proprietà del fattoriale, per $k = 0$ otteniamo:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1, \qquad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1.$$

Si può anche calcolare $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!}$, da cui: $\binom{n}{n} = 1$.

Proprietà

- Dalla definizione possiamo dedurre la seguente proprietà, chiamata *delle classi complementari*:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \textbf{legge delle classi complementari.}$$

Infatti $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$.

PROVA SUBITO

› Calcola separatamente $\binom{18}{16}$ e $\binom{18}{2}$ verificando che sono uguali.

- Vale anche la seguente proprietà:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \qquad \textbf{formula di ricorrenza.}$$

La formula di ricorrenza è utile quando conosciamo il valore del coefficiente binomiale per un certo valore di k e dobbiamo trovare i valori delle classi successive (o precedenti).

PROVA SUBITO

› Verifica la formula di ricorrenza applicando a entrambi i membri la definizione di coefficiente binomiale.

PROVA SUBITO

› Usa il valore noto di $\binom{32}{15} = 565722720$ per calcolare $\binom{32}{14}$ e $\binom{32}{18}$.

Animazione nell'ebook

ESEMPIO

Se sappiamo che $\binom{14}{5} = 2002$, allora:

$$\binom{14}{6} = \binom{14}{5} \frac{14-5}{5+1} = 2002 \cdot \frac{9}{6} = 3003.$$

Possiamo giustificare ora la definizione delle combinazioni semplici $C_{n,k} = \binom{n}{k}$.
Utilizzando la formula che esprime il numero delle disposizioni semplici $D_{n,k}$ come rapporto di due fattoriali, abbiamo:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

Combinazioni con ripetizione

→ Esercizi a p. 1386

Riprendiamo il problema affrontato nello studio delle disposizioni con ripetizione.

Lanciamo consecutivamente una moneta e segniamo la successione di uscita di testa (T) e di croce (C). Questa volta non interessa l'ordine di uscita, ma solo la composizione di ogni possibile gruppo.

Se i lanci sono 2, il numero delle possibilità, rispetto alle disposizioni, si riduce a 3:

$$TT \quad TC \qquad CC \qquad k = 2.$$

Se i lanci sono 3, il numero delle possibilità si riduce a 4:

$$TTT \qquad TTC \qquad TCC \qquad CCC \qquad k = 3.$$

Chiamiamo questi raggruppamenti **combinazioni con ripetizione**.
Utilizziamo le combinazioni con ripetizione in tutti i problemi di distribuzione nei quali occorre formare gruppi con oggetti *non distinguibili*.

Osserviamo che in ogni gruppo un elemento può ripetersi fino a k volte e, non interessando l'ordine, ogni gruppo contiene gli stessi elementi, ma con un numero di ripetizioni diverso in ciascun gruppo distinto.
Per indicare le combinazioni con ripetizione usiamo la seguente notazione:

$$C'_{2,3} = 4, \qquad \text{con } n = 2,\ k = 3.$$

DEFINIZIONE

Le **combinazioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con k numero naturale qualunque non nullo) sono tutti i gruppi di k elementi che si possono formare, nei quali:

- ogni elemento può essere ripetuto al massimo fino a k volte;
- non interessa l'ordine con cui gli elementi si presentano;
- è diverso il numero di volte col quale un elemento compare:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n}{k!}.$$

Per esempio:

$$C'_{2,3} = C_{2+3-1,3} = C_{4,3} = 4.$$

ESEMPIO

In quanti modi diversi possiamo distribuire 6 oggetti in 4 scatole?
Se indichiamo con le lettere a, b, c, d le 4 scatole, alcune possibili distribuzioni sono le seguenti:

$$a\,a\,a\,b\,c\,d, \qquad a\,a\,a\,a\,a\,a, \qquad a\,b\,b\,c\,d\,d, \qquad b\,b\,b\,c\,c\,d.$$

Nella prima distribuzione 3 oggetti vanno nella scatola a, uno nella b, uno nella c, uno nella d; nella seconda distribuzione tutti gli oggetti vanno nella

MATEMATICA AL COMPUTER

Il calcolo combinatorio Una scatola contiene g gettoni gialli (numerati da 1 a g) e b gettoni blu (numerati da 1 a b). Consideriamo l'estrazione di un gruppo di e gettoni.
Costruiamo un foglio elettronico che, ricevuti i numeri g, b ed e, determini quanti gruppi differenti possiamo estrarre.
Deve poi essere calcolato il numero di gruppi in relazione al numero k dei gettoni gialli in essi contenuti. Poniamo come limite $g \leq 10$.

Risposta – Esercizi in più

TEORIA

Video

Disposizioni, permutazioni, combinazioni

- Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola TEMA? E della parola TATTICA?
- In un campionato di 12 squadre, come si possono classificare le prime 4 squadre?

PROVA SUBITO

› In un'urna ci sono una pallina rossa, una blu e una verde. Si estraggono quattro palline rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Quanti sono i possibili esiti in cui, tra le quattro palline estratte, compare almeno una pallina rossa?

Animazione nell'ebook

scatola a e le altre scatole restano vuote... Tutti i modi sono le combinazioni con ripetizione di 4 elementi di classe 6:

$$C'_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84.$$

Notiamo che alcune scatole possono rimanere vuote.

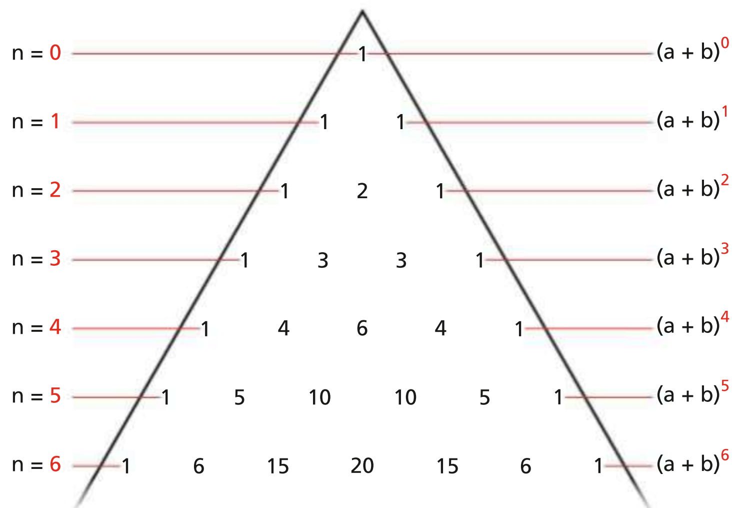
5 Binomio di Newton

→ Esercizi a p. 1390

Con il calcolo letterale possiamo scrivere le potenze di un binomio. Per esempio:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Per potenze con esponente maggiore di 3 si ricorre al triangolo di Tartaglia, che fornisce i coefficienti dello sviluppo di $(A+B)^n$.



I lati obliqui del triangolo sono formati da tanti 1, mentre ogni coefficiente interno è la somma dei due coefficienti della riga precedente che sono alla sua destra e alla sua sinistra. Per esempio:

$n = 3$ 1 3 3 1

⊕ ⊕ ⊕

$n = 4$ 1 4 6 4 1

e continuando così si costruiscono tutte le righe successive del triangolo.

La potenza con esponente n ha il seguente sviluppo:

coefficienti dell'n-esima riga

$$(A+B)^n = (\dots)A^nB^0 + (\dots)A^{n-1}B^1 + \dots + (\dots)A^0B^n.$$

la somma degli esponenti è sempre n

Per esempio: $(A+B)^4 = 1A^4B^0 + 4A^3B^1 + 6A^2B^2 + 4AB^3 + 1B^4$.

La costruzione del triangolo è scomoda al crescere di n perché occorre costruire tutte le righe precedenti alla riga n-esima.

MATEMATICA E LETTERATURA

› **Uno, cento, mille racconti** Combinando diversamente alcune parole, si ottengono frasi diverse. Combinando diversamente le frasi, si ottengono tanti racconti. Da questa tecnica narrativa è nata la letteratura combinatoria, di cui Italo Calvino è uno degli esponenti più autorevoli.

- Qual è l'opera in cui Calvino costruisce racconti combinatori?

Risposta

Ordiniamo le righe utilizzando i valori di n: nella figura, la riga più in alto è la riga zero, quella più in basso è la riga 6. In ogni riga indichiamo con k la posizione di un numero, dove il primo 1 a sinistra corrisponde alla posizione $k = 0$. Con queste convenzioni, se osserviamo i numeri che compongono il triangolo di Tartaglia, ci accorgiamo per esempio che la posizione $k = 3$ della riga 6 è occupata dal numero 20, che corrisponde al coefficiente binomiale:

riga 6

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

posizione 3

In generale la k-esima posizione dell'n-esima riga è occupata dal numero che corrisponde al coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$.

Per lo sviluppo di $(A + B)^n$ possiamo perciò anche utilizzare i coefficienti binomiali ottenendo la **formula del binomio di Newton**:

$$(A + B)^n = \binom{n}{0} A^n B^0 + \binom{n}{1} A^{n-1} B^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{n} A^0 B^n.$$

ESEMPIO

$(a + b)^6 =$

$\binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5 b + \binom{6}{2}a^4 b^2 + \binom{6}{3}a^3 b^3 + \binom{6}{4}a^2 b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$

$a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$

Ricordando che $\sum_{k=0}^{n}$ significa «la somma dei termini che otteniamo quando k varia da 0 a n», riscriviamo in modo sintetico la formula: $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

$\binom{n}{k}$ è chiamato coefficiente binomiale proprio perché si trova nella formula del binomio di Newton.

In particolare, se $A = 1$ e $B = 1$, dalla formula del binomio otteniamo

$$(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}, \text{ cioè:}$$

$$\boldsymbol{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n},$$

quindi la somma dei termini sull'n-esima riga del triangolo di Tartaglia è 2^n.

La caratteristica del triangolo di Tartaglia, per cui ogni coefficiente è la somma dei due coefficienti della riga precedente che sono alla sua destra e alla sua sinistra, è una proprietà dei coefficienti binomiali espressa dalla **formula di Stifel**:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

ESEMPIO

$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$. Infatti, $\frac{4 \cdot 3}{2} = 3 + \frac{3 \cdot 2}{2}$.

T

TEORIA

Listen to it

The **binomial expansion**, proposed by Newton, is the formula which describes the expansion of **powers** of a **binomial**.

PROVA SUBITO

› Qual è il coefficiente di $a^8 b^2$ nello sviluppo di $(a + b)^{10}$? [45]

MATEMATICA INTORNO A NOI

› **Sempre in giro** Ogni giorno i rappresentanti commerciali viaggiano di casa in casa e di città in città per presentare i loro prodotti.

- Come fanno a sapere qual è il percorso più breve per raggiungere i loro clienti?

Risposta

PROVA SUBITO

› Applica la proprietà di Stifel a $\binom{5}{3}$ e verifica il risultato ottenuto.

MAPPA DEI FONDAMENTALI

Raggruppamenti

Dati gli insiemi A con n elementi, B con m elementi, C con k elementi, … con n, m, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, e così via, il **numero dei raggruppamenti** che si possono formare prendendo il primo elemento in A, il secondo in B, il terzo in C, … è: $n \cdot m \cdot k \cdot \ldots$

T

TEORIA

Funzione fattoriale

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n \geq 2 \\ 1 & \text{se } n = 0 \text{ o } n = 1 \end{cases}.$$

› $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

- **Proprietà di $n!$**

  $n! = n \cdot (n-1)!$

  › $7! = 7 \cdot 6!$

Disposizioni

- **Disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k, con $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$, e $k \leq n$**

  Gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, tali che **ogni gruppo è diverso** dagli altri **per almeno uno degli elementi** contenuti o **per il loro ordine**.

  $$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  › I modi di accostare 8 palline di colore diverso in gruppi da 3 è dato da:

  $D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6$

  oppure

  $$D_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6.$$

- **Disposizioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k, con $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$**

  Gruppi che si possono formare con k elementi, **anche ripetuti**, presi fra gli n, tali che **ogni gruppo è diverso** dagli altri **per almeno uno degli elementi** contenuti o **per il loro ordine**.

  $D'_{n,k} = n^k$

  › Quanti numeri di 4 cifre, anche ripetute, possiamo scrivere con l'insieme $\{1, 2, 5\}$?

  $D'_{3,4} = 3^4 = 81$.

Permutazioni

- **Permutazioni semplici di *n* elementi distinti**

$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ — Sono tutti i gruppi formati dagli ***n*** elementi che differiscono per il loro ordine.

▶ In quanti modi si possono disporre 7 persone in fila?

$P_7 = 7! = 5040.$

- **Permutazioni di *n* elementi, di cui *h*, *k*, … ripetuti**

$P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \ldots}$ — Sono i gruppi formati dagli ***n*** elementi che differiscono per l'ordine degli elementi distinti e il posto occupato dagli elementi ripetuti.

▶ In quanti modi, lanciando una moneta per 5 volte, possono uscire 2 teste e 3 croci?

$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$

Coefficienti binomiali

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, con n, k numeri naturali, $0 \le k \le n$.

▶ $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!}$

Vale la **legge delle classi complementari**: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

▶ $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36.$

Combinazioni

- **Combinazioni semplici di *n* elementi distinti di classe *k* (con 0 < *k* ≤ *n*)**

$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — Sono tutti i gruppi che si possono formare con ***k*** elementi, presi tra gli ***n***, tali che **ogni gruppo è diverso** dagli altri per **almeno un elemento contenuto** ma non per l'ordine.

▶ In quanti modi possiamo scegliere 3 tartine da offrire a una festa fra 7, tutte diverse, a disposizione?

$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3! \cdot \cancel{4!}} = 35.$

- **Combinazioni con ripetizione di *n* elementi distinti di classe *k***

Sono tutti i gruppi che si possono formare con ***k*** elementi, presi tra gli ***n***; ogni elemento di un gruppo può essere ripetuto fino a *k* volte, non interessa l'ordine in cui gli elementi si presentano, e in ciascun gruppo è diverso il numero delle volte in cui un elemento compare.

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot \ldots \cdot (n+1)\cdot n}{k!}.$$

▶ In quanti modi diversi possiamo distribuire 4 penne in 5 scatole?

$C'_{5,4} = \binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70.$

FAI IL PUNTO SUI FONDAMENTALI → p. 1392

T TEORIA

ESERCIZI

GUARDA!
10 Attività interattive

1 Che cos'è il calcolo combinatorio

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1357

Raggruppamenti

1 **ESERCIZIO GUIDA** Una mensa aziendale offre ai suoi dipendenti ogni giorno la possibilità di scegliere fra due primi, tre secondi e due dessert. Quanti sono i tipi di pasto che si possono costruire con i piatti offerti? Forniamo una rappresentazione della soluzione con un diagramma ad albero.

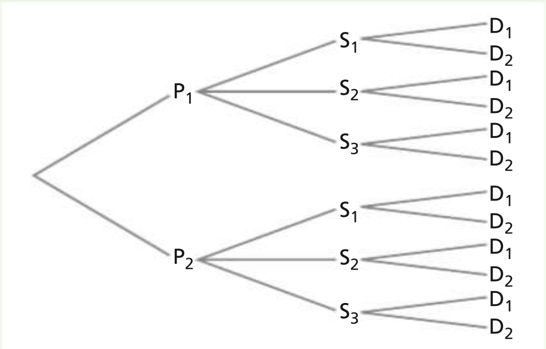
Abbiamo nell'ordine le seguenti possibilità:

2 primi piatti,

3 secondi piatti,

2 dessert.

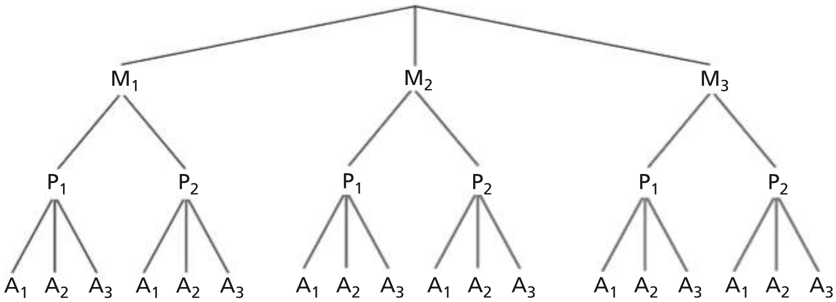
In totale abbiamo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ possibilità.
Il diagramma ad albero corrispondente è quello a fianco.



2 Abbiamo cinque palline nere numerate da 1 a 5 e tre bianche numerate da 1 a 3. Quante coppie di palline possiamo ottenere con una pallina nera e una bianca? Fornisci una rappresentazione della soluzione con un diagramma ad albero. [15]

3 Prese le palline dell'esercizio precedente, quante coppie di palline una nera e una bianca, entrambe dispari, possiamo formare? Fornisci una rappresentazione della soluzione con un diagramma ad albero. [6]

4 **LEGGI IL GRAFICO** Osserva il seguente diagramma ad albero.



Scrivi gli insiemi con i quali formare i raggruppamenti e quanti sono i raggruppamenti possibili.

5 In una scuola di ballo sono iscritte dodici donne e sette uomini. Quante sono le coppie che si possono formare? [84]

6 In una classe vi sono otto ragazze e undici ragazzi. Quante sono le coppie formate da una ragazza e un ragazzo che si possono formare? [88]

7 In tre classi quinte di una scuola ci sono rispettivamente 22, 18 e 23 alunni. Occorre mandare una rappresentanza formata da un alunno di ciascuna quinta. Quante sono le terne di studenti che è possibile formare? [9108]

E ESERCIZI

8 Calcola quante sigle di tre elementi si possono formare ponendo al primo posto una delle cinque vocali, al secondo posto una delle sedici consonanti e al terzo posto una delle dieci cifre. [800]

9 Calcola quante sigle di tre elementi si possono formare ponendo al primo posto una delle cinque vocali, al secondo posto una delle sedici consonanti e al terzo posto ancora una consonante non necessariamente diversa da quella precedentemente collocata al secondo posto. [1280]

2 Disposizioni

Disposizioni semplici

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1358

10 Costruisci con i diagrammi ad albero tutte le terne che si possono formare con gli elementi non ripetuti dell'insieme $\{a, b, c, d\}$, in modo che le terne differiscano o per almeno un elemento o per l'ordine. Quante sono? [24]

11 Se $D_{n,2} = 42$, quanto vale n? [7]

Calcola i valori delle seguenti espressioni.

12 $D_{11,4}$; $D_{6,2}$; $D_{10,5}$.

13 $D_{x-1,2}$; $D_{x+1,3}$; $D_{x,3}$.

14 $2 - \frac{D_{7,3}}{D_{7,2}} + \frac{D_{5,2}}{D_{5,1}}$ [1]

15 $\frac{D_{8,4} - D_{7,3}}{7 \cdot D_{7,2}}$ [5]

16 $\frac{D_{6,3}}{D_{5,4}} : \frac{D_{5,2}}{D_{6,4}} - \frac{D_{11,3}}{D_{10,2}}$ [7]

17 $\frac{D_{8,3} - D_{4,2}}{D_{9,3}}$ $\left[\frac{9}{14}\right]$

18 **TEST** Un codice di accesso a un sistema di sicurezza è formato da 6 cifre tutte diverse ed è escluso lo zero. Il numero totale dei possibili codici è:

A 15 120. **B** 120 960. **C** 151 200. **D** 60 480.

19 **ESERCIZIO GUIDA** Quanti numeri di tre cifre tutte diverse si possono costruire con gli elementi dell'insieme $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$? Quanti sono i numeri che cominciano con la cifra 8?

I gruppi che si possono formare sono:

$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, con $1 \leq k \leq n$

Otteniamo i numeri di tre cifre tutte diverse che cominciano con la cifra 8 formando tutti i gruppi di classe 2 senza utilizzare questa cifra, e poi ponendo la cifra 8 davanti a ognuno di essi:

$D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Oppure applichiamo il «metodo delle possibilità», tenendo conto che al primo posto abbiamo una sola possibilità data dalla cifra 8: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$.

20 Calcola quanti numeri di quattro cifre diverse si possono formare con le nove cifre dell'insieme

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. [3024]

21 Quante parole, anche prive di significato, si possono formare con tre lettere diverse scelte fra le seguenti?

a; e; c; d; n. [60]

22 **AZIENDA** **Cercasi personale** Un'azienda deve assumere tre persone diplomate da collocare in tre diversi uffici: amministrazione, contabilità, commerciale. Ha a disposizione venti curriculum di persone con i requisiti necessari. In quanti modi può essere fatta la scelta? [6840]

23 REALTÀ E MODELLI **Più persone che sedie** In quanti modi diversi cinque persone, su un gruppo di otto, possono sedersi sulle cinque sedie in figura? [6720]

24 Calcola quante sigle di cinque elementi, tutti diversi, si possono formare con le ventuno lettere dell'alfabeto italiano e le dieci cifre decimali, sapendo che i primi tre posti devono essere occupati dalle lettere e gli ultimi due dalle cifre. [718 200]

25 In quanti modi un'associazione di 40 soci può costituire un comitato direttivo composto da presidente, vicepresidente, segretario? [59 280]

26 Avendo a disposizione sei atlete per la gara di staffetta 4×100, in quanti modi possiamo stabilire la successione ordinata delle atlete che correranno durante la gara? [360]

27 Una polisportiva ha organizzato una lotteria benefica con cinque premi diversi in valore. Ha venduto ottanta biglietti. In quanti modi si possono avere i vincitori? [2 884 801 920]

28 Calcola quante parole, anche prive di significato, si possono scrivere con quattro lettere diverse dell'insieme $A = \{a, e, i, o, m, r, t\}$, in modo che le parole comincino tutte con «me». [20]

29 A un torneo di calcio partecipano sedici squadre. Quante partite si devono effettuare fra girone di andata e di ritorno, sapendo che tutte le squadre si devono incontrare? [240]

30 REALTÀ E MODELLI **Titolari in campo** Un allenatore di calcio ha a disposizione quattro attaccanti, sei centrocampisti e cinque difensori. Ha scelto di giocare con il modulo 4-3-3, che prevede quattro difensori, tre centrocampisti e tre attaccanti, ma non ha ancora scelto i giocatori titolari. Quante formazioni potrebbe schierare, sapendo che ha a disposizione anche tre portieri? [1 036 800]

31 COSTRUZIONI **Periferie a colori** Un piano di lottizzazione prevede la costruzione di cinque edifici. Per pitturare le facciate, ognuna con un colore diverso, l'architetto ha a disposizione 10 colori.

a. In quanti modi può colorare gli edifici?

b. Se fa pitturare subito un edificio di giallo, in quanti modi può poi pitturare gli altri palazzi? Qual è la relazione con il caso precedente?

c. Quanti colori basterebbe avere per poter colorare due palazzi in più di dieci modi diversi?

[a) 30 240; b) 3024; c) 4]

Equazioni con le disposizioni

32 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione $3 \cdot D_{x,2} = 2 \cdot D_{x+1,2}$.

x deve essere un numero naturale e:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x + 1 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 2. \qquad \text{condizione di esistenza}$$

$$\underbrace{3x(x-1)}_{D_{x,2}} = \underbrace{2(x+1)x}_{D_{x+1,2}}$$ svolgiamo i calcoli

$x[3(x-1)-2(x+1)]=0 \quad \rightarrow \quad x(x-5)=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \vee x=5$

Tenuto conto della condizione iniziale ($x \geq 2$), l'equazione ha per soluzione $x = 5$.

Risolvi le seguenti equazioni.

33 $D_{x,3} - x^3 = D_{x,2} - 1$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

34 $2 \cdot D_{x-1,3} - D_{x+1,3} = 2 \cdot D_{x,2}$ [12]

35 $6 \cdot D_{x,2} + D_{x-1,3} = 2 \cdot D_{x,3}$ [6]

36 $x^3 - 2x \cdot D_{x-1,2} = 2(24-x) - D_{x,3}$ [4]

E ESERCIZI

Disposizioni con ripetizione

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1361

Calcola i valori delle seguenti espressioni.

37 $D'_{3,1}$, $D'_{2,6}$, $D'_{5,2}$, $D'_{10,3}$. [3; 64; 25; 1000]

38 $D'_{6,2} - D_{6,2} + D'_{7,2}$ [55]

39 $12\left(D'_{3,3} - \frac{1}{4}D'_{4,3}\right) : D_{3,2}$ [22]

40 $\frac{1}{2}D_{4,2} - D'_{2,3} + \frac{1}{3}D'_{3,3}$ [7]

41 **TEST** Un'impresa codifica le proprie merci utilizzando tre cifre diverse da 0, non necessariamente diverse tra loro. Il numero di merci che è possibile codificare è:

A 729. B 6561. C 1000. D 720.

42 **ESERCIZIO GUIDA** Si lanciano due dadi, uno dopo l'altro. Quanti sono i casi possibili? Quanti sono i casi in cui entrambe le facce presentano numeri pari?

Rispondiamo alla prima domanda. Ogni dado ha 6 numeri e in un lancio lo stesso numero si può presentare in entrambi i dadi. Abbiamo quindi delle disposizioni con ripetizione. Tutti i casi che si possono presentare sono:

$D'_{6,2} = 6^2 = 36.$ $\quad D'_{n,k} = n^k$

Per la seconda domanda, abbiamo $n = 3$ e $k = 2$. I casi in cui le due facce sono entrambe pari sono:

$D'_{3,2} = 3^2 = 9.$

43 Indica quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono formare con gli elementi del seguente insieme:

$A = \{3, 5, 6, 7, 8\}$. [125]

44 In un'urna ci sono dieci palline numerate da 1 a 10. Per tre volte si estrae una pallina, rimettendola ogni volta dentro l'urna. Calcola le possibili terne ordinate che si possono ottenere. [1000]

45 Quanti codici a cinque cifre si possono formare con le cifre decimali da 1 a 9? [59 049]

46 Trova quanti codici a cinque cifre si possono formare con le cifre decimali da 0 a 9, sapendo che la prima cifra non può essere 0. [90 000]

47 Indica quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono formare con gli elementi del seguente insieme.

$A = \{0, 3, 5, 6, 7, 8\}$ [180]

48 Determina quante sigle di quattro elementi si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano e le cifre decimali da 1 a 9, sapendo che i primi due posti devono essere occupati dalle lettere e gli ultimi due dalle cifre. [35 721]

49 Quanti numeri pari di 3 cifre si possono scrivere utilizzando le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$? [25]

50 **REALTÀ E MODELLI** **Playlist** Una delle playlist di Nuria contiene 12 MP3. Ne vuole ascoltare 3, scegliendone a caso uno alla volta. Quante sono le possibili terne di brani? Quante sono le terne sfortunate, cioè quelle in cui almeno un brano si ripete? [1728; 408]

51 Quanti numeri dispari di 3 cifre si possono scrivere utilizzando le cifre dell'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$? [144]

52 In un'urna abbiamo dieci palline numerate da 1 a 10. Calcola quante terne ordinate si possono ottenere, estraendo una pallina per tre volte consecutive e rimettendola ogni volta nell'urna dopo l'estrazione, tali che il primo numero sia divisibile per tre. [300]

53 **REALTÀ E MODELLI** **Sigle aeree** Le compagnie aeree sono identificate da una sigla formata da due lettere, anche uguali, oppure da una lettera e una cifra. Le lettere sono scelte tra le 26 dell'alfabeto inglese e la cifra, da 1 a 9, può essere messa in prima o in seconda posizione (es. AC, WW, L6, 2P). Gli aeroporti sono invece identificati da codici di tre lettere dell'alfabeto inglese di cui al massimo due si possono ripetere.

a. Se le sigle delle compagnie aeree sono 856, quante sigle sono ancora disponibili per nuove compagnie?

b. Calcola in quanti modi si può associare una sigla di una compagnia a un codice di un aeroporto (considera le sigle e i codici possibili, non quelli effettivamente esistenti). [a) 288; b) 20 077 200]

Equazioni con le disposizioni con ripetizione

Risolvi le seguenti equazioni.

54 $D'_{x,3} = D_{x+1,3} + 4 - x$ [2]

55 $D'_{x+1,2} = 2D_{x,2} - 2(x^2 - 3)$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

56 $D_{x,3} = D'_{x,3} - 19x$ [7]

57 $\dfrac{D'_{x,2} + 8x}{D_{x,2}} = 4$ [4]

3 Permutazioni

Permutazioni semplici

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1362

Calcola le seguenti espressioni.

58 $P_5 - 5P_4$ [0]

59 $\dfrac{P_4}{P_3} - 1$ [3]

60 $\dfrac{P_6 - P_5}{5P_4}$ [5]

61 $6\dfrac{P_6}{6!} + 2P_3 - P_2$ [16]

62 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo in quanti modi si possono mettere in fila tre bambini e quattro bambine, prima nel caso in cui non importi l'ordine col quale si dispongono maschi e femmine, e poi nel caso in cui prima vi siano tutte le femmine e poi tutti i maschi.

Se non importa l'ordine, non c'è distinzione fra bambini e bambine: dobbiamo considerare le permutazioni di 7 elementi:

$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

$P_7 = 7! = 5040.$

Nel caso in cui il gruppo delle femmine preceda quello dei maschi dobbiamo considerare che a ogni permutazione semplice del primo gruppo si associa una permutazione semplice del secondo gruppo. Il numero delle possibilità è:

$P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144.$

63 A una gara partecipano otto concorrenti. In quanti modi può presentarsi la classifica finale? [40 320]

64 In quanti modi si possono distribuire nove premi a nove bambini? [362 880]

65 Quanti numeri di dieci cifre diverse si possono scrivere con le dieci cifre decimali? [3 265 920]

66 Calcola quante sigle, di sette elementi tutti diversi, si possono scrivere con le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e le lettere dell'insieme $B = \{a, b, c, d\}$, sapendo che le cifre precedono le lettere. [144]

67 REALTÀ E MODELLI **Facile?** Il numero di telefono di Gianni è 0538 691742. La sua amica Anna nota che il numero di telefono è formato da tutte e sole le dieci cifre, quindi pensa che sia facile da ricordare. Dopo qualche tempo Anna vuole chiamare Gianni. Sa che Gianni vive a Villa Bò, quindi risale al prefisso 0538 dopo una ricerca sul Web, ma non riesce assolutamente a ricordare il resto del numero. Quanti tentativi, al massimo, dovrà fare Anna per riuscire a telefonare? [720]

68 Calcola quanti anagrammi, anche senza significato, si possono fare con le parole:

MONTE, STORIA e RESIDUO. [120; 720; 5040]

69 YOU & MATHS In how many ways can five keys be placed on a circular key ring?

A 12 B 24 C 5 D 18 E None of these.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*)

70 A un congresso nove persone devono sedere intorno a un tavolo rotondo. Calcola in quanti modi le persone possono prendere posto. Se le stesse persone attendono in fila davanti all'ingresso della sala, in quanti modi si possono disporre? [40 320; 362 880]

Funzione fattoriale

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1364

Calcola i valori delle seguenti espressioni.

71 $5!$

72 $0! + 1!$

73 $2! - 3!$

74 $\frac{6!}{20}$

75 $\frac{4!}{0!}$

76 $\frac{10!}{9!}$

77 VERO O FALSO?

a. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$ V F

b. $\frac{10!}{5!} = 2!$ V F

c. $\frac{7!}{7} = 6!$ V F

d. $\frac{6!}{2!3!} = 1$ V F

e. $\frac{290!}{289!} = 290$ V F

78 VERO O FALSO?

a. $9! - 8! = 1!$ V F

b. $8! - 7! = 7 \cdot 7!$ V F

c. $\frac{9!}{9} - 8! = 1$ V F

d. $4 \cdot 4! + 4! = 5!$ V F

e. $10! = 5!2!$ V F

Identità con *n*!

79 SPIEGA PERCHÉ $n!$ è un numero sempre positivo al variare di n in $\mathbb{N}$. Perché?

80 ESERCIZIO GUIDA Verifichiamo l'identità $2n! + (n+1)! = (n+3) \cdot n!$.

Primo membro: utilizzando la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$ e raccogliendo poi $n!$, otteniamo

$$2n! + (n+1)! = 2n! + (n+1) \cdot n! = (2+n+1) \cdot n! = (n+3) \cdot n!.$$

Essendo il primo membro uguale al secondo, l'identità è verificata.

ESERCIZI

Verifica le seguenti identità.

81 $n \cdot n! - (n+1)! = -n!$

82 $(n+1)^2 \cdot n! + (n+1)! = (n+2)!$

83 $\dfrac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1)$

84 $n! + (n+1)! + (n+2)! = n! \cdot (n+2)^2$

Equazioni e disequazioni con *n*!

85 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione $10(x-1)! = 5x!$.

$x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1, \quad \text{con } x \in \mathbb{N}.$ condizione di esistenza

$10(x-1)! = 5x!$

poiché $n! = n \cdot (n-1)!$

$10(x-1)! = 5x(x-1)! \quad \rightarrow \quad 10(x-1)! - 5x(x-1)! = 0$

raccogliamo $(x-1)!$

$(x-1)! \cdot (10-5x) = 0$

poiché $(x-1)! \neq 0$

$10 - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

La soluzione è accettabile perché verifica la condizione di esistenza iniziale.

Risolvi le seguenti equazioni.

86 $2(x+1)! = 4x!$ $[1]$

87 $x! = 6(x-2)!$ $[3]$

88 $x! + 7(x-2)! = 0$ $[\nexists x \in \mathbb{N}]$

89 $(x+1)! - x! = 2x!$ $[2]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

90 $2(x+1)! > x!$ $[\forall x \in \mathbb{N}]$

91 $\dfrac{1}{2}x! > (x-1)!$ $[x \in \mathbb{N}, x > 2]$

92 $(x+1)! + 5x! < 3x!$ $[\nexists x \in \mathbb{N}]$

93 $x! \leq 6(x-2)!$ $[x = 2, x = 3]$

Identità con le permutazioni semplici e le disposizioni

94 ESERCIZIO GUIDA Verifichiamo l'identità $P_n = n \cdot D_{n-1,n-2}$, con $n \geq 3$.

$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Primo membro: $P_n = n!$.

Secondo membro: $n \cdot D_{n-1,n-2} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(\cancel{n} - 1 - \cancel{n} + 2)!} = \dfrac{n(n-1)!}{1!} = n!$.

Entrambi i membri sono uguali a $n!$, quindi l'identità è verificata.

Verifica le seguenti identità.

95 $(n-3)D_{n,3} = D_{n,4}$

96 $P_n + P_{n-1} = (n+1)P_{n-1}$

97 $D_{n+1,3} - 3D_{n,2} = D_{n,3}$

98 $P_n = D_{n,k} \cdot P_{n-k}$

99 $D_{n+1,3} = P_{n+1} : P_{n-2}$

100 $n \cdot D_{n-1,k} = (n-k)D_{n,k}$

Equazioni con le permutazioni semplici

101 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo l'equazione $P_{x+1} = 6 \cdot P_{x-1}$.

Riscriviamo l'equazione di partenza usando i fattoriali: $(x+1)! = 6 \cdot (x-1)!$.

$P_n = n!$

$x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1, \;$ con $x \in \mathbb{N}$. condizione di esistenza

$(x+1)! = 6 \cdot (x-1)! \quad \rightarrow \quad (x+1)\,x(x-1)! = 6 \cdot (x-1)! \quad \rightarrow$ trasportiamo tutto al primo membro

$x(x+1)(x-1)! - 6 \cdot (x-1)! = 0$ raccogliamo a fattore comune

$(x-1)! \cdot [x\,(x+1) - 6] = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)! \cdot (x^2 + x - 6) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto

$(x-1)! = 0 \quad \rightarrow \quad$ impossibile; $\quad x^2 + x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3 \;\vee\; x = 2.$

$x = -3$ *non è accettabile perché* -3 *non è un numero naturale, quindi solo* $x = 2$ è accettabile, poiché verifica la condizione di esistenza iniziale.

Risolvi le seguenti equazioni.

102 $P_x = 30 \cdot P_{x-2}$ [6]

103 $P_x - 20 \cdot P_{x-2} = 0$ [5]

104 $P_{x+1} - P_x = 0$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

105 $P_{x-1} = 6 \cdot P_{x-3}$ [4]

Permutazioni con ripetizione

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1366

106 Hai dieci palline di cui cinque nere, tre rosse, due gialle. Calcola:

a. in quanti modi si possono disporre in fila;

b. quante sono le sequenze nelle quali le palline gialle occupano i primi due posti;

c. in quanti modi si possono disporre in maniera che le palline di uno stesso colore siano tutte vicine.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

a. Sono le permutazioni di 10 oggetti con 5, 3 e 2 oggetti ripetuti:

$$P_{10}^{(5,3,2)} = \boxed{} = \frac{3\,628\,800}{120 \cdot 6 \cdot 2} = 2520.$$

$P_n^{(h,k,\ldots)} = \dfrac{n!}{h! \cdot k! \ldots}$

b. Sono tutte le permutazioni di 8 oggetti con 5 e 3 oggetti ripetuti, che si accodano alle due palline gialle che occupano i primi due posti:

$$\boxed{} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{40\,320}{120 \cdot 6} = 56.$$

c. Sono tutte le permutazioni semplici che possiamo fare con i gruppi dei tre colori:

$$\boxed{} = \boxed{} = 6.$$

107 Calcola quanti anagrammi, anche senza significato, si possono fare con le parole:

MENTE, STESSA e TRATTATIVA. [60; 120; 25 200]

108 Una moneta viene lanciata otto volte. In quanti modi si può presentare una sequenza che contiene sei teste e due croci? [28]

109 In uno spettacolo, sul palcoscenico si devono disporre in fila sei ballerine e quattro ballerini. In quanti modi si possono disporre gli artisti, dovendo solo distinguere le posizioni di maschi e femmine? [210]

110 **YOU & MATHS** What is the number of different 7-digit numbers that can be made by rearranging the digits of 3053354? (Note that this includes the given number, and that the first digit of a number is never 0.)

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*)

[360]

111 **AZIENDA** **Scatoloni ordinati** Un magazzino di stoccaggio contiene box in cui possono essere disposti in fila 8 scatoloni, di cui 5 della merce A e 3 della merce B. In quanti modi si possono disporre gli scatoloni, dovendo solo distinguere le posizioni delle merci A e B e sapendo che il primo scatolone è sempre della merce A? [35]

112 Quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare con le lettere di CARTELLA? Quanti di essi iniziano e finiscono per A? Quanti iniziano per CE? [10 080; 360; 180]

IN 4 PASSI

1. Per ogni richiesta, stabilisci se si tratta di permutazioni semplici o con ripetizione.
2. Determina il numero n di lettere da permutare.
3. Determina quali lettere si ripetono e quante volte si ripete ciascuna di esse.
4. Applica la formula.

113 Quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato, di CIOCCOLATA? Quanti finiscono per ATA? Quanti iniziano con una consonante? [151 200; 420; 75 600]

114 **YOU & MATHS** In how many ways can the letters of the word METCALF be arranged if M is always at the beginning and A and E are always side by side? (IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level)

[240]

4 Combinazioni

Combinazioni semplici

Attività interattiva

$C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{P_k}$

→ Teoria a p. 1367

115 Calcola, se possibile, $C_{5,2}$, $C_{6,3}$, $C_{3,1}$, $C_{4,4}$, $C_{1,4}$.

116 **VERO O FALSO?**

a. $C_{10,4} = \dfrac{D_{10,4}}{P_4}$ V F

b. $D_{7,3} = C_{7,3} \cdot P_7$ V F

c. $C_{8,5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!}$ V F

d. $C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$ V F

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

117 $C_{4,2} + C_{5,3} - D_{3,2}$ [10]

118 $4D'_{3,2} - C_{5,3} + P_3$ [32]

119 $\frac{C_{6,4}}{D_{6,3}} + \frac{P_4}{2} : C_{3,2}$ $\left[\frac{33}{8}\right]$

120 $C_{9,2} - P_3 + 2 \cdot \frac{D_{5,3}}{P_4}$ [35]

121 Calcola le seguenti espressioni usando le informazioni a fianco.

$C_{15,6}$, sapendo che $D_{15,6} = 3\,603\,600$. $D_{12,4}$, sapendo che $C_{12,4} = 495$.

122 **TEST** In un casello autostradale ci sono 12 ingressi aperti, di cui 4 occupati da un'automobile e 3 da una motocicletta. Quante sono le possibili configurazioni, indipendentemente dal tipo di automobile o di motocicletta?

A 3 991 680 B 144 C 27 720 D 3 326 400

Coefficienti binomiali

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1368

123 Calcola $\binom{4}{2}$, $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{0}$, $\binom{10}{10}$.

124 **VERO O FALSO?**

a. $\binom{4}{0} = 4$ V F

b. $\binom{30}{1} = 1$ V F

c. $\binom{6}{6} = \binom{6}{0}$ V F

d. $\binom{20}{16} = \binom{20}{15} \cdot \frac{5}{16}$ V F

125 **SPIEGA PERCHÉ** Se $\binom{9}{k} = 9$, quali valori può assumere k? [1; 8]

126 Calcola $\binom{16}{5}$, sapendo che $\binom{16}{4} = 1820$. [4368]

127 Calcola $\binom{n+1}{n}$ e $\binom{n}{n-2}$. $\left[n+1; \frac{n(n-1)}{2}\right]$

Calcola le seguenti espressioni.

128 $\binom{0}{0} + \binom{5}{2}$ [11]

129 $\binom{8}{8} + \binom{8}{1}$ [9]

130 $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ [7]

Identità con i coefficienti binomiali

131 Verifica l'identità $\frac{n+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

IN 2 PASSI

1. Utilizza la definizione $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ per sviluppare entrambi i membri.
2. Svolgi i calcoli separatamente in ciascuno dei due membri e verifica l'uguaglianza.

Verifica le seguenti identità.

132 $\binom{n}{1} = \frac{2}{n+1} \cdot \binom{n+1}{2}$

133 $\binom{n}{4} = \frac{n}{4} \cdot \binom{n-1}{3}$

134 $\binom{n+1}{2} = n^2 - \binom{n}{2}$

135 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (formula di Stifel)

Equazioni e disequazioni con i coefficienti binomiali

136 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo l'equazione $4\binom{x}{x-2}+2\binom{x-1}{2}=3x^2-18$.

Poniamo le condizioni di esistenza.

Per $\binom{x}{x-2}$: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x \geq x-2 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 2.$

Per $\binom{x-1}{2}$: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 3.$

Quindi deve essere $x \geq 3$.

Sostituiamo $\binom{x}{x-2}$ con $\binom{x}{2}$. per la legge delle classi complementari $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

L'equazione diventa:

$$4\binom{x}{2}+2\binom{x-1}{2}=3x^2-18$$ per la definizione $\binom{n}{k}=C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{k!}$

$$4\frac{x(x-1)}{2}+2\frac{(x-1)(x-2)}{2}=3x^2-18 \rightarrow$$ svolgiamo i calcoli

$$2x^2-2x+x^2-3x+2-3x^2+18=0 \rightarrow$$

$$-5x+20=0 \rightarrow \quad x=4.$$

La soluzione è accettabile.

Risolvi le seguenti equazioni.

137 $3\cdot\binom{x}{3}=x\cdot\binom{x-1}{4}$ [7]

138 $\binom{x+1}{3}=\binom{x}{2}$ [2]

139 $\binom{x-1}{2}=2\cdot\binom{x-2}{2}$ [5]

140 $\binom{x}{2}=\binom{x}{3}$ [5]

141 $\binom{x}{x-2}=2x$ [5]

142 $\binom{x}{x-3}=\frac{10}{3}\cdot\binom{x}{5}$ [6]

Risolvi le seguenti disequazioni.

143 $C_{x,2} \geq \frac{x}{2}$ $[x \geq 2]$

144 $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}<2x^2$ $[x \geq 3]$

145 $\binom{x+2}{x-1}<\binom{x+1}{2}$ $[\nexists x \in \mathbb{N}]$

146 $\frac{1}{3}\binom{x}{3} \geq \frac{1}{2}\binom{x}{2}$ $[x \geq 7]$

Problemi con le combinazioni semplici

147 Un'urna contiene nove palline numerate di cui sei rosse e tre bianche. Si estraggono contemporaneamente cinque palline. Calcola quanti gruppi diversi si possono avere di:

a. cinque palline;
b. cinque palline tutte rosse;
c. quattro palline rosse e una bianca;
d. tre palline rosse e due bianche;
e. due palline rosse e tre bianche.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

a. Poiché non interessa l'ordine, dobbiamo calcolare le combinazioni semplici che si possono fare con le nove palline prese cinque alla volta:

$$\square=\square=\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!}=126.$$

$C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

b. Dobbiamo calcolare le combinazioni semplici che si possono fare con le sei palline rosse prese cinque alla volta:

$$\boxed{} = \boxed{} = \binom{6}{1} = 6.$$

c., d., e. Otteniamo il numero di tutti i gruppi di $k = 4, 3, 2$ palline rosse e $(5 - k) = 1, 2, 3$ palline bianche con il prodotto delle singole combinazioni relative a ciascun colore:

c. $\boxed{} = \binom{6}{4} \cdot \binom{3}{1} = \boxed{} \binom{3}{1} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 3 = 45;$

d. $C_{6,3} \cdot \boxed{} = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 3 = 60;$

e. $\boxed{} \cdot C_{3,3} = \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{3} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 1 = 15.$

Osservazione. Il numero totale dei raggruppamenti di tipo **b**, **c**, **d** ed **e** è 126, ossia è uguale al numero delle combinazioni di nove palline prese cinque alla volta, tipo **a**. Questo perché per un raggruppamento di cinque palline non ci sono ulteriori possibilità per le combinazioni dei colori.

148 Quante cinquine si possono fare con i novanta numeri del lotto? [43 949 268]

149 Quanti terni e quanti ambi si possono fare con i novanta numeri del lotto? [117 480; 4005]

150 Calcola quante sono le cinquine che contengono due numeri prefissati. [109 736]

151 Calcola in quanti modi si possono estrarre quattro carte da un mazzo da quaranta. [91 390]

152 In quanti modi si possono estrarre cinque carte di fiori da un mazzo di cinquantadue carte? [1287]

153 In quanti modi si possono estrarre cinque carte nere da un mazzo di cinquantadue carte? [65 780]

154 Calcola in quanti modi si possono estrarre cinque carte di fiori o cinque carte di picche da un mazzo di cinquantadue carte. [2574]

155 **TEST** Un bambino ha 10 pennarelli di colore diverso e vuole colorare un disegno in tanti modi, combinando ogni volta solo due colori. Quante versioni del disegno può colorare, che differiscano per almeno un colore?

A 100 **B** 90 **C** 20 **D** 45

156 Calcola quanti sono i sottoinsiemi di quattro elementi di un insieme costituito da sei. [15]

157 In quanti modi posso formare un campione di dieci persone da intervistare in un gruppo di trenta? [30 045 015]

158 In quanti modi diversi può essere formata una rappresentanza di tre alunni di una classe di venti studenti? [1140]

159 Calcola quante sono le diagonali di:

a. un quadrilatero; **b.** un pentagono. [a) 2; b) 5]

160 Calcola in quanti modi diversi si possono collocare quattro maglioni in sei cassetti affinché in ogni cassetto ci sia al massimo un maglione. [15]

161 Tutte le persone che partecipano a una riunione si stringono la mano reciprocamente. Se le strette di mano che le persone si scambiano sono in tutto 15, quanti sono i partecipanti alla riunione? [6]

162 **EUREKA!** Caterina ha una somma tale da acquistare cinque libri da leggere in vacanza. Ne ha già scelti alcuni, ma è indecisa sugli altri da scegliere fra otto titoli diversi. Se ha 56 modi diversi per effettuare la scelta, quanti sono i libri che ha già scelto? [2]

163 MODA **Maglioni in mostra** Per allestire una vetrina una commessa ha a disposizione 7 nuovi tipi di maglioni e 3 manichini. A rotazione vuole esporre in vetrina tutti i capi, senza mai riproporre lo stesso abbinamento.

a. In quanti modi diversi la commessa può allestire la vetrina?

b. Per quante settimane si potranno osservare allestimenti diversi, supponendo che ogni lunedì e giovedì si rinnovino gli abbinamenti?

c. Supponendo che un manichino non possa essere utilizzato, quanti tipi di maglioni dovrebbe avere a disposizione la commessa per esaurire tutte le combinazioni entro 10 settimane? [a) 35; b) 18; c) 6]

Equazioni con le combinazioni semplici

Risolvi le seguenti equazioni.

164 $C_{x,3} = C_{x-1,2}$ [3]

165 $C_{x+2,3} = 3C_{x+1,2}$ [7]

166 $C_{x-1,2} = 1$ [3]

167 $P_3 \cdot C_{x-1,3} = D_{x-2,4}$ [7]

168 $C_{x+1,3} = \frac{x^3}{6} - 2$ [12]

169 $3C_{x+1,2} = 4C_{x,2}$ [7]

170 REALTÀ E MODELLI Francesco colleziona modellini di aeroplani. Ha comprato un espositore con tre spazi in cui mettere i modellini e ha calcolato in quanti modi diversi può sistemare tre dei suoi modellini nell'espositore senza considerare l'ordine. Avendo scartato subito due modellini un po' rovinati, ora ha 64 possibilità in meno. Quanti modellini non rovinati ha in tutto Francesco? [8]

171 Due classi terze hanno rispettivamente 24 e 16 alunni. Vogliamo formare una rappresentanza con tre alunni, di cui due dalla terza più numerosa. Quante sono le terne che si possono formare? [4416]

172 Si estraggono tre carte da un mazzo di cinquantadue. Quante sono le possibili terne? Quante sono le terne formate da tre carte di cuori? Quante terne sono formate da una figura e due assi? [22 100; 286; 72]

173 Una scatola contiene 20 pile, di cui 3 scariche. Scegliendo a caso 4 pile, quante sono le scelte possibili che contengono almeno una pila scarica? [2465]

D Combinazioni con ripetizione

Attività interattiva → Teoria a p. 1369

174 Calcola, se possibile, $C'_{4,2}$, $C'_{2,4}$, $C'_{7,3}$, $C'_{6,4}$, $\frac{C'_{7,2}}{C_{8,2}}$.

175 ESERCIZIO GUIDA Lanciando contemporaneamente quattro dadi uguali, quante sono le combinazioni con cui si possono presentare le sei facce?

In ogni lancio un numero può comparire più volte, al massimo quattro, quindi ogni gruppo si distingue dagli altri per i numeri contenuti e per il diverso numero di volte col quale compare lo stesso numero, ma non interessa l'ordine. Si tratta allora di combinazioni con ripetizione:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$C'_{6,4} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$$

176 In quanti modi diversi possiamo distribuire otto tavolette di cioccolato a cinque bambini, sapendo che possiamo assegnare a qualche bambino più di una tavoletta? [495]

177 Calcola in quanti modi diversi possiamo distribuire quattro tavolette di cioccolato a sei bambini, tenendo presente la possibilità di assegnare a qualche bambino più di una tavoletta. [126]

178 In quanti modi possiamo collocare sei palline uguali in quattro urne? [84]

179 In quanti modi possiamo mettere sei palline uguali in quattro urne in modo che nessuna risulti vuota? [10]

180 Lanciamo contemporaneamente 5 dadi. Quante possibili combinazioni di numeri si possono ottenere? E quante contengono il numero 1 almeno una volta? [252; 126]

IN 4 PASSI

1. Stabilisci se si tratta di combinazioni semplici o con ripetizione.
2. Determina il valore di n, numero di elementi distinti, e quello di k, numero di elementi di ciascuna combinazione. Applica la formula per il tipo di combinazioni individuato.
3. Per calcolare quante combinazioni contengono il numero 1 almeno una volta, stabilisci quante combinazioni non contengono il numero 1: il valore n cambia.
4. Sottrai al numero totale di combinazioni quello delle combinazioni che non contengono 1.

E

ESERCIZI

Riepilogo: Calcolo combinatorio

181 **VERO O FALSO?**

a. Nelle disposizioni due raggruppamenti differiscono per la natura degli elementi. V F

b. Le permutazioni contengono tutti gli elementi dell'insieme di partenza. V F

c. Nelle combinazioni due raggruppamenti differiscono per la natura o per l'ordine degli elementi. V F

182 **TEST** Utilizziamo 7 lampadine colorate per creare un festone luminoso da stendere fra due pali. Le lampadine hanno tutte colore diverso tranne 3 che sono rosse. Le possibili sequenze dei colori sono:

A 5040.
B 840.
C 343.
D 210.

I FONDAMENTALI 47

Risolvere problemi con il calcolo combinatorio

Calcoliamo quante sigle di 5 elementi si possono formare usando le 21 lettere dell'alfabeto italiano e le cifre decimali da 1 a 9 nei seguenti casi.

a. Il primo carattere è la lettera A, nei quattro posti successivi ci possono essere lettere o cifre. In ogni sigla nessun elemento può essere ripetuto e due sigle sono diverse se cambia l'ordine degli elementi.

b. I primi tre caratteri sono lettere, con la lettera A al primo posto, gli ultimi due caratteri sono cifre e tutti gli elementi possono essere ripetuti e le sigle sono diverse se cambia l'ordine.

c. I posti possono essere occupati da lettere e cifre non ripetute e sono considerate uguali le sigle che contengono gli stessi elementi.

Stabiliamo quali tipi di raggruppamenti sono richiesti.

a. Dato che il primo posto è occupato dalla lettera A, dobbiamo calcolare quante quaterne si possono formare con 20 lettere e 9 cifre, senza ripetizioni, considerando diverse le quaterne in cui cambia l'ordine degli elementi. Si tratta quindi di calcolare le *disposizioni semplici* di 29 elementi di classe 4: $D_{29,4}$.

Per stabilire il tipo di raggruppamento occorre capire se interessa l'ordine e se ci possono essere ripetizioni.

b. Anche in questo caso si devono contare delle quaterne, perché il primo posto deve essere occupato dalla lettera A. Dato che gli elementi possono essere ripetuti, si tratta di *disposizioni con ripetizione*.
Il numero delle disposizioni possibili per le lettere del secondo posto e quelle del terzo è: $D'_{21,2}$.
Il numero delle disposizioni possibili per le cifre del quarto posto e quelle del quinto è: $D'_{9,2}$.
A ogni gruppo di due lettere abbiniamo tutti i gruppi di due cifre, quindi in totale dobbiamo calcolare:

$$D'_{21,2} \cdot D'_{9,2}.$$

Per determinare quanti gruppi si possono formare assegnando al primo posto un insieme di m elementi e al secondo un insieme di n elementi, occorre calcolare il prodotto $n \cdot m$.

c. In questo caso le sigle sono delle cinquine di 30 elementi, senza ripetizioni, in cui non interessa l'ordine in cui si presentano gli elementi. Si tratta quindi di *combinazioni semplici*:

$$C_{30,5}.$$

Le combinazioni semplici differiscono dalle disposizioni semplici solo perché non interessa l'ordine in cui gli elementi si presentano in ogni gruppo.

Calcoliamo il numero di raggruppamenti possibili.

a. $D_{29,4} = \underbrace{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}_{\text{4 fattori decrescenti a partire da 29}} = 570024$

b. $D'_{21,2} \cdot D'_{9,2} = 21^2 \cdot 9^2 = 441 \cdot 81 = 35721$

c. $C_{30,5} = \dfrac{D_{30,5}}{P_5} = \dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 142506.$

183 Quanti numeri pari di tre cifre diverse si possono scrivere utilizzando le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$? [40]

184 Un sacchetto contiene dodici palline numerate. Calcola in quanti modi, tenendo conto dell'ordine, si possono estrarre tre palline ordinate non rimettendo la pallina estratta nel sacchetto. [1320]

185 In quanti modi quattro persone possono sedersi su una fila di dieci sedie? [5040]

186 In quanti modi si possono collocare cinque oggetti diversi in tre cassetti? [243]

187 Calcola quante sigle si possono costruire se per i primi cinque posti utilizziamo tre lettere A e due lettere B e per gli altri cinque posti tre cifre 1 e due cifre 0. [100]

188 Calcola in quanti modi si possono sistemare in fila cinque bambine e quattro bambini se tutte le bambine vogliono stare vicine tra loro e lo stesso vale per tutti i bambini. [5760]

189 Si lancia una moneta per 4 volte consecutive. Calcola quante sono le possibili sequenze:

a. di testa e croce;

b. di testa e croce che iniziano con testa;

c. nelle quali testa compare una volta;

d. nelle quali compare sempre la stessa faccia.

[a) 16; b) 8; c) 4; d) 2]

190 REALTÀ E MODELLI **Riporre matrioske** Osserva la fotografia. In quanti modi si possono mettere le matrioske nei cassetti della cassettiera, in modo che in ogni cassetto al massimo ve ne sia una? [2520]

IN 3 PASSI

1. Stabilisci di che tipo di gruppi si tratta: disposizioni, permutazioni o combinazioni.
2. Determina se sono gruppi semplici o con ripetizione.
3. Individua i valori di n e k e determina in quanti modi si possono mettere le matrioske.

191 Quanti numeri di cinque cifre puoi formare con quelle del numero 83 368 in modo che le cifre 8 e 3 siano ripetute due volte? Quanti iniziano con 8? Quanti sono maggiori di 60 000? [30; 12; 18]

192 REALTÀ E MODELLI **PIN** Devi costruire il codice PIN del tuo cellulare nuovo; vuoi scegliere quattro delle dieci cifre, senza ripeterne nessuna. Quanti possibili codici puoi inventare? [5040]

193 In partenza per le vacanze, devi inserire la combinazione per chiudere e aprire la tua valigia. Il numero deve contenere sei cifre, anche ripetute. Quante sono le possibili combinazioni? Se le cifre non possono essere ripetute, le combinazioni aumentano o diminuiscono? [1 000 000]

194 Tre amici si recano in un negozio per acquistare una T-shirt ciascuno. Sono disponibili 25 magliette diverse. Quante sono le possibili terne di T-shirt acquistabili dai tre ragazzi? [15 625]

195 A una festa cui partecipano quindici persone si fa un brindisi. Se ciascuna persona fa incontrare il suo bicchiere con quello di tutte le altre, quanti «cin-cin» si fanno? [105]

196 ALIMENTAZIONE **Dieta sì, ma variata** Il piano alimentare di una dieta prevede ogni giorno 2 pasti principali, 3 merende e 2 bibite. Per i pasti principali si può scegliere tra 5 piatti diversi, le merende a disposizione sono di 6 tipi e le bibite di 7. In quanti modi può essere organizzata la dieta di una giornata se le scelte non si possono ripetere? [4200]

197 Quanti numeri diversi si possono scrivere mescolando le cinque cifre dispari? Quanti terminano con 1? [120; 24]

198 Calcola in quanti modi si possono disporre in fila tre gettoni rossi e quattro gialli se il primo gettone deve essere rosso. [15]

199 In un piano sono dati nove punti a tre a tre non allineati. Quanti triangoli si possono disegnare con i vertici in quei punti? [84]

200 Si ritaglia un esagono di cartoncino e si vogliono colorare gli angoli relativi ai vertici con sei colori diversi (rosso, giallo, verde, blu, marrone, viola). Quanti sono i modi possibili? [120]

201 AZIENDA **Porte cifrate** Un'azienda produce dispositivi elettronici per aprire le porte delle camere degli hotel in cui è necessario digitare sequenze di 5 caratteri.

a. Qual è il numero totale dei codici possibili se i caratteri utilizzabili sono le cifre da 0 a 9, ipotizzando sia che le cifre possano ripetersi, sia che debbano essere tutte diverse?

b. Qual è il numero totale dei codici se i caratteri utilizzabili sono le cifre da 1 a 5, senza ripetizioni?

c. Qual è il numero totale dei codici possibili se nella combinazione possono essere utilizzate sia le cifre da 0 a 5 che le 26 lettere dell'alfabeto inglese, senza ripetizioni?

[a) 100 000, 30 240; b) 120; c) 24 165 120]

E ESERCIZI

202 Quante cinquine, nel gioco del lotto, contengono una quaterna prefissata? [86]

203 Per formare le targhe automobilistiche si utilizzano ventidue lettere e dieci cifre; le targhe sono formate da due lettere seguite da tre cifre e di nuovo da due lettere. Calcola quante sono le targhe possibili che hanno:

a. uguali le prime due lettere e uguali le ultime due;

b. le tre cifre tutte pari. [a) 484 000; b) 29 282 000]

204 Un test è formato da 8 quesiti a risposta multipla con cinque possibilità. In quanti modi puoi rispondere alle otto domande del test? [390 625]

205 REALTÀ E MODELLI **Superenalotto** Nel gioco del Superenalotto si vince se si indovinano i 6 numeri naturali estratti, compresi tra 1 e 90.

a. Quante sono tutte le possibili sestine di numeri estratti?

b. Quante delle possibili sestine contengono almeno un multiplo di 6?

[a) 622 614 630; b) 421 255 080]

5 Binomio di Newton

Attività interattiva → Teoria a p. 1370

206 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo lo sviluppo della potenza: $(x^2 - 2y)^4$.

$$(x^2-2y)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4(-2y)^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}(x^2)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(x^2)^1(-2y)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^0(-2y)^4 = x^8 - 8x^6y + 24x^4y^2 - 32x^2y^3 + 16y^4$$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$$

Calcola lo sviluppo delle seguenti potenze di binomi.

207 $(2a+3y)^3$; $(a-2b)^8$.

208 $(x+1)^4$; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$.

209 $(2a^2+3a^3)^4$; $\left(\frac{a}{2}+x\right)^8$.

210 $(\sqrt{2}+2)^4$; $\left(\frac{1}{2}x^2-2y\right)^6$.

211 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo il quarto termine dello sviluppo di $(x+2)^{10}$.

Data la formula $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, consideriamo soltanto il termine generale $\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$; poiché per $k=0$ si ha il primo termine, il quarto termine si ha per $k=3$. Essendo $n=10$, otteniamo:

$$\binom{10}{3}\cdot x^7\cdot 2^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}x^7\cdot 8 = 120x^7\cdot 8 = 960x^7.$$

212 Calcola il quarto termine dello sviluppo di $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^7$. [$-70x^4y^3$]

213 Determina il terzo, il quinto e l'ottavo termine dello sviluppo di $(x-1)^9$. [$36x^7$; $126x^5$; $-36x^2$]

214 Determina n, sapendo che il coefficiente del terzo termine dello sviluppo di $(x+2y)^n$ è 60. [6]

LA MATEMATICA NELL'ECONOMIA
Trading e finanza

La Borsa valori è un mercato virtuale in cui vengono negoziati degli *asset*: titoli azionari, obbligazioni, valute, criptovalute. In particolare, i titoli azionari, o azioni, sono delle quote di capitale di un'azienda che vengono comprate o vendute dagli investitori in base a quanto l'azienda è quotata in Borsa: più l'azienda cresce, più valgono le sue azioni; viceversa, se l'azienda è in crisi, le sue azioni si svalutano. Il *trading* consiste nell'acquisto o nella vendita dei titoli azionari: il guadagno di un trader deriva dalla vendita delle azioni nel momento in cui il loro valore è cresciuto rispetto al prezzo di acquisto o dalla riscossione di una quota dell'utile aziendale proporzionale alla quantità delle azioni possedute. Il trading è un'attività rischiosa e per praticarla il calcolo combinatorio può essere utile.

Strategie di investimento Elena è una trader e vuole investire 30 000 € su 5 diversi titoli azionari. Per ogni titolo è previsto un investimento minimo e le somme investite devono essere multipli di 1000 €.
Gli investimenti minimi per ogni titolo sono rispettivamente di 5, 4, 3, 3, 2 migliaia di euro.

Calcoliamo quante sono le possibili strategie di investimento per Elena.

Inizialmente calcoliamo qual è l'investimento minimo globale per i cinque titoli azionari:

$$(5000 + 4000 + 3000 + 3000 + 2000)\,€ = 17\,000\ €.$$

Quindi, i soldi che rimangono a disposizione da distribuire sui diversi titoli sono:

$$(30\,000 - 17\,000)\,€ = 13\,000\ €.$$

Questa quota deve essere distribuita secondo multipli di 1000 €, quindi rimangono 13 elementi da distribuire su 5 titoli.
Dal momento che gli elementi si possono ripetere (ci sono più elementi che titoli) e che l'ordine è indifferente, il calcolo si effettua con la formula delle combinazioni con ripetizione.
Indichiamo con n i titoli azionari e con k le quote da 1000 €. Abbiamo quindi $n = 5$ e $k = 13$ e otteniamo:

$$C'_{5,13} = \binom{5+13-1}{13} = \binom{17}{13} = \binom{17}{4} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{4!} = 2380.$$

Per investire i suoi soldi nei titoli azionari Elena ha a disposizione 2380 combinazioni diverse.

1 **Titoli azionari** Kevin e Alessia vogliono investire 15 000 € e vengono proposti loro 3 diversi titoli azionari. Ogni investimento deve essere un multiplo di 500 € e per ciascun titolo è richiesto il versamento di una somma minima pari rispettivamente a 1500 €, 2000 € e 2500 €. Quante sono le possibili strategie di investimento se vogliono investire su almeno due dei titoli azionari? [259]

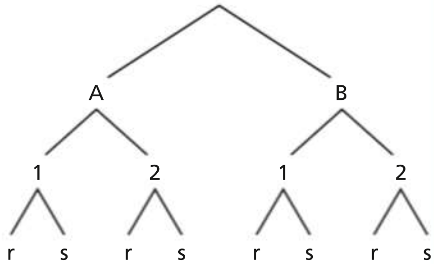
ESERCIZI

E

FAI IL PUNTO SUI FONDAMENTALI

GUARDA!
Ripassa con le **attività interattive**
Fai questi esercizi anche su **ZTE**

1 **RAGGRUPPAMENTI** In base al diagramma ad albero a lato, quanti raggruppamenti contengono la cifra 2?



- **A** Nessuno.
- **B** 2.
- **C** 4.
- **D** 8.

2 **DISPOSIZIONI SEMPLICI** Quale dei seguenti valori non è possibile calcolare?

A $D_{1,1}$ **B** $D_{4,1}$ **C** $D_{4,4}$ **D** $D_{4,0}$

3 **DISPOSIZIONI SEMPLICI** Mentre ti prepari per uscire con gli amici ascolti 5 canzoni diverse scelte a caso fra le 100 canzoni salvate nella tua playlist. Quante possibili sequenze di 5 brani esistono?

4 **DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE** Determina quante sigle di cinque elementi, anche ripetuti, si possono formare con le 5 vocali *a*, *e*, *i*, *o*, *u* e le 10 cifre da 0 a 9, sapendo che i primi due posti sono occupati dalle vocali e gli ultimi tre dalle cifre.

5 **FUNZIONE FATTORIALE**

a. $(4n)! = 4n!$ V F

b. $\dfrac{n!}{n-1} = (n-2)!$ V F

c. $\dfrac{(n+1)!}{n+1} = n!$ V F

d. $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ V F

6 **PERMUTAZIONI SEMPLICI** In quanti modi diversi 6 amiche e 4 amici possono sedersi in fila a teatro se tutte le amiche vogliono stare vicine tra loro e anche gli amici vogliono fare la stessa cosa?

7 **PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE** Quanti sono gli anagrammi della parola BIBLIOTECA?

8 **COEFFICIENTI BINOMIALI**

a. $\dbinom{8}{5} = \dfrac{8!}{5!\,3!}$ V F

b. $\dbinom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!}$ V F

c. $\dbinom{6}{2} = \dfrac{3 \cdot 5!}{4!}$ V F

d. $\dbinom{7}{3} = \dfrac{4}{3}\dbinom{7}{2}$ V F

9 **COMBINAZIONI SEMPLICI** Quante quaterne si possono fare con i 90 numeri del lotto?

10 **COMBINAZIONI E COEFFICIENTI BINOMIALI**

a. $C_{5,3} = \dbinom{5}{3}$ V F

b. $C'_{8,4} = C_{11,4}$ V F

c. $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!3!}$ V F

d. $C'_{3,6} = \dbinom{8}{6}$ V F

11 **COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE** In quanti modi possono essere assegnate dieci copie di un libro a sei biblioteche?

ALLENATI SULLE COMPETENZE

Argomentare

1 Descrivi le combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k. Considera poi la seguente situazione. Si pesca cinque volte una pallina da un'urna che contiene una pallina blu e una rossa. Ogni volta si rimette la pallina all'interno. Indica tutti i possibili esiti delle cinque estrazioni, considerando uguali gli esiti che differiscono solo per l'ordine di uscita. Verifica che il loro numero è quello che avresti ottenuto applicando opportunamente la formula.

2 Scrivi e giustifica la legge delle classi complementari e spiega perché, in una classe di 24 alunni, stabilire in quanti modi possiamo scegliere i 20 non interrogati in un giorno equivale a stabilire in quanti modi possiamo scegliere i 4 interrogati nello stesso giorno.

3 Spiega la differenza tra disposizioni e combinazioni e indica i modi per calcolarne il numero. Scrivi due esempi a partire dall'insieme di dieci cavalli che partecipano a una corsa.

4 Indica la differenza tra permutazioni e permutazioni circolari e confronta il numero dei modi di sistemare 10 persone attorno a un tavolo rotondo con il numero dei modi di sistemarle su 10 sedie allineate.

5 Aiutandoti con un esempio, spiega nel modo che ritieni opportuno perché il numero di permutazioni di n oggetti è minore del numero di disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe n.

Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

6 $P_4 - C_{4,2} - 1!$ [17]

7 $\dfrac{D_{7,4}}{D_{7,3}} + 5$ [9]

8 $P_2 \cdot D'_{3,2}$ [18]

9 $3! \cdot \binom{7}{2} - 4$ [122]

Risolvi le seguenti equazioni.

10 $(x+1)! - 4(x-1)! = x!$ [2]

11 $(D_{x,3} + 2 \cdot D_{x-1,3}) \cdot D'_{x,2} = 0$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

12 $D_{x,3} - D_{x-1,3} = 18$ [4]

13 $C_{x+1,2} + C_{x,2} = x^2 - x$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

14 $P_{x+2} - 3 \cdot P_x = 3 \cdot P_{x+1}$ [2]

15 $3C_{x-3,3} = \dfrac{x}{2}$ [6]

16 $3 \cdot \binom{x+1}{x-1} = 9 \cdot \binom{x}{x-2}$ [2]

17 $P_x - 8P_{x-2} = 3(x-1)!$ [5]

18 **TEST** Dobbiamo intervistare 5 persone diverse fra 12 che hanno partecipato a una vacanza all'estero organizzata da una determinata agenzia di viaggi. Tutti i possibili modi con cui possiamo scegliere gli intervistati sono:

A 95 040. **B** 3 991 680. **C** 792. **D** 5544.

19 **TEST** Si usano gli elementi dell'insieme $M = \{x, y, t, z\}$ e le dieci cifre per formare sigle da 6 elementi. Sapendo che i primi due posti sono costituiti da lettere anche ripetute e gli altri quattro posti da cifre diverse, le sigle che si possono ottenere sono:

A 160 000. **B** 80 640. **C** 120 000. **D** 60 480.

Sviluppa le seguenti potenze di binomi.

20 $(2x+1)^5$

21 $(a^2-1)^4$

22 $\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^6$

23 $(x^2-2y^2)^5$

Risolvere problemi

24 In un'urna ci sono dieci palline numerate da 1 a 10. Tre sono bianche e le altre nere. Calcola quante sono le cinquine che contengono esattamente una pallina bianca. [105]

25 Per aprire una cassaforte occorre formare un numero di quattro cifre diverse (scelte fra le dieci decimali). Quanti tentativi si possono fare? [5040]

26 Un'urna contiene tre palline di colori diversi: bianco, rosso, nero. Si estrae consecutivamente per quattro volte una pallina rimettendola nell'urna prima dell'estrazione successiva. Quante sono le possibili sequenze di colori? [81]

27 In una banca ci sono sei sportelli. In quanti modi diversi si possono disporre le prime sei persone che entrano nella banca? [720]

28 Trova in quanti modi si possono riporre quattro oggetti distinti in sei scatole diverse sapendo che è possibile riporre in una scatola più oggetti. [1296]

29 Determina il numero degli anagrammi delle parole ANTENNA e RADIO. [420; 120]

30 In quanti modi si possono scegliere i due rappresentanti di classe, se nella classe ci sono venticinque studenti? [300]

31 In una classe di ventotto alunni, di cui quindici maschi, devono essere scelti due ragazzi e due ragazze per un'assemblea di delegati. Quante sono le scelte possibili? [8190]

32 Calcola quante sono le diagonali di un esagono. [9]

33 Quanti numeri di quattro cifre distinte, scelte fra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, si possono formare? Quanti di questi sono pari? Quanti dispari? Quanti terminano con 2? Quanti sono maggiori di 6000? [840; 360; 480; 120; 240]

34 Calcola in quanti modi si possono disporre sei oggetti distinti in quattro scatole diverse sapendo che vi possono essere scatole vuote. [4096]

35 In quanti modi possono disporsi quattro uomini e sette donne su una fila di quattordici sedie? [120 120]

36 In una famiglia i figli sono tre. Calcola quante diverse possibilità ci sono fra maschi e femmine. [4]

37 Marco deve chiamare Laura sul cellulare, ma non ricorda bene le dieci cifre che compongono il numero. Le prime tre sono 3, 2, 8 e le ultime sono 3, 9, 4. Quanti tentativi può fare, sapendo che le rimanenti cifre sono tutte dispari? E se ricorda anche che la quarta cifra è 7? [625; 125]

38 L'insegnante di storia oggi vuole interrogare quattro studenti, tra cui Paolo e Andreina. Se le possibili quaterne di interrogati sono 276, quanti sono gli alunni della classe? [26]

39 Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola CALCOLATRICE? Quanti cominciano per C? Quanti finiscono per TRICE? [19 958 400; 4 989 600; 630]

V

ALLENATI SULLE COMPETENZE

40 Cinque giocatori partecipano a un concorso a premi (nel quale lo stesso giocatore può vincere anche tutti i premi). In quanti modi possono essere assegnati i primi tre premi? [125]

41 Possiedo dieci DVD tra cui due copie di un primo film, tre copie di un secondo e due copie di un terzo. In quanti modi li posso sistemare nel mio scaffale? [151 200]

42 In una scatola ci sono trenta gettoni numerati da 1 a 30. Dieci sono rossi, gli altri sono di colore diverso. Calcola quante terne distinte si possono estrarre in modo che ognuna di esse contenga:

a. solo un gettone rosso;
b. almeno un gettone rosso;
c. nessun gettone rosso;
d. soltanto gettoni rossi. [a) 1900; b) 2920; c) 1140; d) 120]

Costruire e utilizzare modelli

43 **A Monza** Per il GP d'Italia di Formula 1 si qualificano venti piloti con le rispettive vetture. In quanti modi può essere formata la griglia di partenza? Se la pole position e la seconda posizione sono occupate rispettivamente da una Mercedes e da una Ferrari, quante sono le possibili griglie di partenza? (Considera che ogni scuderia schiera due autovetture.) [$20!$; $4 \cdot 18!$]

44 INFORMATICA **Codice binario** Il computer sceglie a caso tra le due cifre 0 e 1 per quattro volte. Calcola quante sono le possibili sequenze:

a. di 0 e 1;
b. di 0 e 1 che iniziano con 0;
c. nelle quali la cifra 0 compare una volta;
d. nelle quali compare sempre la stessa cifra. [a) 16; b) 8; c) 4; d) 2]

45 **Nice to meet you** A una festa partecipano 8 uomini e 6 donne. Determina il numero di strette di mano:

a. se ciascun uomo stringe la mano a tutti i partecipanti, mentre le donne stringono la mano solo agli uomini;
b. senza alcuna restrizione;
c. generalizza il problema con n uomini e m donne. $\left[\text{a) } 76;\ \text{b) } 91;\ \text{c) } nm + \binom{n}{2}, \binom{n+m}{2}\right]$

46 **Biglietti in regalo** A un gruppo di dieci amici, fra i quali ci sono anche Marta e Luca, vengono regalati quattro biglietti per un concerto. In quanti modi possono essere scelti i quattro amici che andranno allo spettacolo, se Marta non vuole andare senza Luca, mentre Luca è disposto ad andare anche senza Marta? [154]

47 **Doppie per otto** Otto amici devono occupare otto camere singole a loro riservate nell'hotel in cui sono arrivati per trascorrere le vacanze. In quanti modi si possono disporre nelle camere? Arrivati in hotel, però, si accorgono che sono state riservate loro quattro camere doppie. In quanti modi possono formare le coppie? In quanti modi possono occupare le quattro camere? [40 320; 105; 2520]

48 **Macedonia** Alessia ha a disposizione 20 tipi di frutta (fragole, pesche, limoni, kiwi, …). Vuole preparare due macedonie usando per la prima quattro frutti diversi ma senza il limone e per la seconda cinque frutti diversi, evitando quelli usati nella prima macedonia e senza kiwi. Quante coppie di macedonie può preparare? [12 753 468]

TUTOR matematica
https://su.zanichelli.it/tutor
allenati con 15 esercizi interattivi con feedback "hai sbagliato perché…"
(risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con Tutor)

VERIFICA LE COMPETENZE

GUARDA! Inquadrami e controlla i risultati

Prova A 1 ora

Punteggio totale .... / 100

1 ..../15 In una classe di 28 alunni e alunne, l'insegnante di matematica vuole scegliere 6 studenti che saranno interrogati nella settimana. In quanti modi può effettuare la scelta?

2 ..../15 Con le 5 vocali, le 16 consonanti e le 10 cifre decimali, quante sigle di 6 elementi puoi costruire se i primi 2 posti devono essere occupati da vocali diverse seguite da 2 consonanti diverse e infine da un numero di due cifre?

3 ..../15 Con le prime cinque cifre (da 0 a 4) quanti numeri puoi formare:

a. di tre cifre tutte diverse;

b. di quattro cifre anche ripetute;

c. di cinque cifre diverse che iniziano con 4;

d. di due cifre pari diverse.

4 ..../10 Determina il sesto termine dello sviluppo di $(x^2 - y)^{10}$.

5 ..../15 Allo slalom speciale del campionato del mondo di sci partecipano quaranta atlete. In quanti modi si può formare la classifica delle prime cinque?

6 ..../30 Abbiamo cinque palline nere numerate da 1 a 5 e tre palline bianche numerate da 1 a 3. Determina quanti sono i gruppi ordinati di tre palline diverse che si possono formare avendo:

a. due nere seguite da una bianca;

b. due nere seguite da una bianca, usando i numeri dispari;

c. tutte palline con numeri dispari.

Prova B 1 ora

Punteggio totale .... / 100

1 ..../10 Sviluppa $(x - 1)^6$.

2 ..../15 Calcola quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato, delle parole CAMPING e FOTOGRAFO.

3 ..../15 Quanti numeri di quattro cifre distinte si possono formare con le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6? Quanti di essi sono pari? Quanti sono maggiori di 5000?

4 ..../25 Calcola in quanti modi diversi 5 ragazzi e 3 ragazze possono occupare una fila di 8 posti al cinema se:

a. le ragazze vogliono stare sempre vicine;

b. anche i maschi vogliono stare vicini tra loro.

5 ..../20 Una classe è composta da 17 maschi e 11 femmine. L'insegnante di storia deve interrogare e sorteggia tre persone a caso. Calcola in quanti modi può avvenire l'estrazione per avere:

a. tutte femmine;

b. tutti maschi;

c. almeno un maschio.

6 ..../15 Calcola in quanti modi diversi puoi estrarre da un'urna, contenente i 90 numeri del lotto, 3 numeri se l'estrazione è:

a. consecutiva senza reinserimento del numero estratto;

b. consecutiva con reinserimento del numero estratto;

c. contemporanea.