2. Seštevanje celih števil, zapis v plavajoči vejici

Seštevanje celih števil

- Prenos in pravilnost rezultata pri seštevanju **nepredznačenih števil**

  Pravilnost rezultata pri seštevanju nepredznačenih števil določa prenos (*ang. carry*) na najpomembnejšem bitu C_{MSB}. Če je prenos C_{MSB} enak 0, je rezulat pravilen. Če je prenos 1, je rezultat nepravilen. V tem primeru se rezultata ne da predstaviti z danim številom bitov. Torej:

  $$C_{MSB} = \begin{cases} 0, & Rezultat\ seštevanja\ je\ pravilen \\ 1, & Rezultat\ seštevanja\ ni\ pravilen \end{cases},$$

  - **Primer**: Opazujte prenos pri seštevanju 190 in 20 :

    Najprej pretvorimo števili v dvojiški sistem:

    $$190_{(10)} = 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 \rightarrow 1011\ 1110_{(2)}$$
    $$20_{(10)} = 16 + 4 \rightarrow 0001\ 0100_{(2)}$$

    Seštejemo binarni števili po modulu 2 (1+1 = 0 -> prenos v naslednji bit je 1)

    $$\begin{array}{rr} & 1011\ 1110 \\ + & 0001\ 0100 \\ \hline C_{MSB} = 0 & 1101\ 0010 \end{array}$$

    C_{MSB} je enak 0, torej je rezultat pravilen.

- Prenos in pravilnost rezultata pri seštevanju **predznačenih števil**

  Veljavnost rezultat pri seštevanju predznačenih števil določa bit preliva (*ang. overflow*) V. Če sta oba predznaka seštevancev enaka in je predznak rezultata različen, potem je V enak 1 in je rezultat nepravilen. Drugače pa je $V = 0$ in je rezultat pravilen. To lahko predstavimo z naslednjo tabelo:

op1	op2	rez	V
+	-	+/-	0
-	+	+/-	0
+	+	+	0
+	+	-	1
-	-	-	0
-	-	+	1

  $$V = \begin{cases} 0, & \text{Rezultat seštevanja je pravilen} \\ 1, & \text{Rezultat seštevanja ni pravilen} \end{cases},$$

  - **Primer**: Opazujte prenos pri seštevanju 123 in (-123) :

    Pretvorba v dvojiški sistem (Dvojiški komplement):

    $$\begin{aligned} 124_{(10)} &\rightarrow 0111\ 1100_{(2)} \\ -123_{(10)} &\rightarrow 1000\ 0101_{(2)} \end{aligned}$$

    Seštejemo po modulu 2

    $$\begin{array}{rr} & 0111\ 1100 \\ + & 1000\ 0101 \\ \hline \\ C_{MSB} = 1 & 0000\ 0001 \end{array}$$

    Seštevanca in rezultat so pozitivni -> $V = 0$ -> Rezultat je pravilen, čeprav je $C_{MSB} = 1$. Pri seštevanju predznačenih števil upoštevamo samo bit preliva V.

  - **Primer**: Opazujte prenos pri seštevanju -80 in (-60) :

    Pretvorba v dvojiški sistem (dvojiški komplement):

    $$\begin{aligned} -80_{(10)} &\rightarrow 1011\ 0000_{(2)} \\ -60_{(10)} &\rightarrow 1100\ 0100_{(2)} \end{aligned}$$

    Seštejemo po modulu 2

$$\begin{array}{rr} & 1011\,0000 \\ + & 1100\,0100 \\ \hline C_{MSB} = 1 & 0111\,0100 \end{array}$$

Seštevanca sta pozitivna, rezultat je negativen -> $V = 1$ -> Rezultat je nepravilen.

- **Naloge**: Opazujte prenos, preliv in pravilnost rezultata pri seštevanju naslednjih 8-bitnih števil:

  - nepredznačeni števili 190 in 70 :

    Pretvorba v dvojiški sistem:

    $$\begin{aligned} 190_{(10)} &\rightarrow 1011\,1110_{(2)} \\ 70_{(10)} &\rightarrow 0100\,0110_{(2)} \end{aligned}$$

    Seštejemo števili v dvojiškem zapisu po modulu 2

    $$\begin{array}{rr} & 1011\,1110 \\ + & 0100\,0110 \\ \hline C_{MSB} = 1 & 0000\,0100 \end{array}$$

    C_{MSB} je enak 1, torej rezultat ni pravilen.

  - predznačeni števili v dvojiškem komplementu 124 in 7 Pretvorba v dvojiški sistem:

    $$\begin{aligned} 124_{(10)} &\rightarrow 0111\,1100_{(2)} \\ 7_{(10)} &\rightarrow 0000\,0111_{(2)} \end{aligned}$$

    Seštejemo števili v dvojiškem zapisu po modulu 2

    $$\begin{array}{rr} & 0111\,1100 \\ + & 0000\,0111 \\ \hline C_{MSB} = 0 & 1000\,0011 \end{array}$$

    Seštevanca sta pozitivna, rezultat je negativen -> $V = 1$ -> Rezultat je nepravilen.

  - predznačeni števili v dvojiškem komplementu -80 in 60

    Pretvorba v dvojiški sistem:

    $$\begin{aligned} -80_{(10)} &\rightarrow 1011\,0000_{(2)} \\ 60_{(10)} &\rightarrow 0011\,1100_{(2)} \end{aligned}$$

Seštejemo števili v dvojiškem zapisu po modulu 2 (1+1 = 0 -> prenos v naslednji bit je 1)

$$\begin{array}{rr} & 1011\ 0000 \\ + & 0011\ 1100 \\ \hline \\ C_{MSB} = 0 & 1110\ 1100 \end{array}$$

Predznaka seštevancev sta različna -> $V = 0$ -> Rezultat je pravilen.

- **Naloga iz izpita 1** Imamo podani naslednji števili:
  - $A = 0\mathtt{x}0A63$ 16-bitno predznačeno celo število v zapisu z dvojiškim komplementom
  - $B = \quad 0\mathtt{x}F4$ 8-bitno predznačeno celo število v zapisu z dvojiškim komplementom

  Izračunajte $E = A + (-B)$. Ali je pri seštevanju prišlo do prenosa ali preliva? Število B najprej pretvorite v 16-bitno predznačeno celo število. Rezultat E zapišite v šestnajstiški obliki kot 16-bitno predznačeno celo število v dvojiškem komplementu.

  Rešitev:

  Najprej predstavimo število B kot 16-bitno :

  $$B = ????\ ????\ \overbrace{1111\ 0100}^{0\mathtt{x}F4}$$

  Ker je B predznačeno število, namesto zgornjih bitov vstavimo bit predznaka, oziroma razširimo B z bitom predznaka. Ker je B negativno število, namesto $?$ podamo 1. Torej:

  $$B = 1111\ 1111\ 1111\ 0100 = 0\mathtt{x}FFF4$$

  Izračunamo $-B$

  $$-B = \neg(B) + 1 = 0000\ 0000\ 0000\ 1100$$

  pri čemer $\neg(\cdot)$ pomeni negacijo bitov ($1- > 0, 0- > 1$). Na koncu seštejemo $A + (-B)$

  $$E = A + (-B) = 0000\ 1010\ 0110\ 1111_{(2)} = 0\mathtt{x}0A6F_{(16)}$$

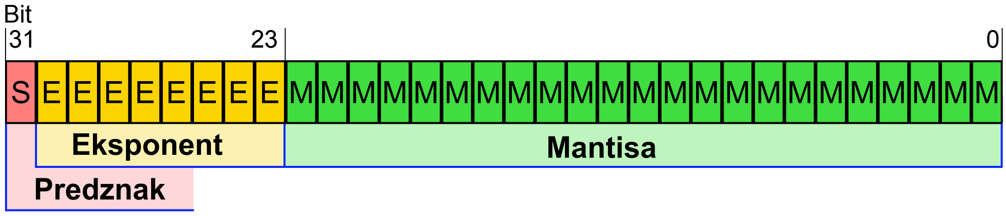
  Seštevanca A in $(-B)$ ter rezultat E so pozitivni $\rightarrow$ Rezultat je pravilen.

Zapis realnih števil s plavajočo vejico

Zapis s plavajočo vejico v formatu IEEE 754 v računalništvu uporabljamo za predstavitev realnih števil. Obstajaja več formatov zapisov števil v plavajoči vejici. Najpogostojše se uporabljata dva zapisa:

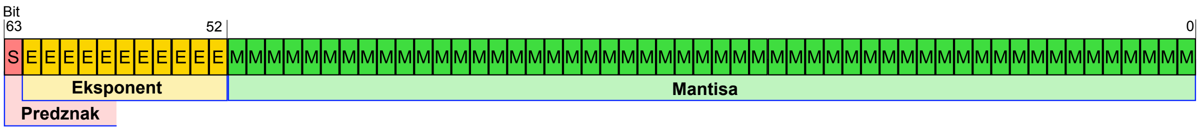
- IEEE 754 z enojno natančnostjo (podatkovni tip *float* - 32 bitov):

    1. Predznak - 1 bit
    2. Eksponent - 8 bitov
    3. Mantisa - 23 bitov



- IEEE 754 z dvojno natančnostjo (podatkovni tip *double* - 64 bitov):

    1. Predznak - 1 bit
    2. Eksponent - 11 bitov
    3. Mantisa - 52 bitov



- **Primer**: Število –210,5937510 najprej zapišimo v dvojiški obliki s plavajočo vejico, nato pa še šestnajstiško v prestavitvi IEEE 754 z enojno natančnostjo.

$$-210,5937510_{(10)} \rightarrow ?_{(IEEE754\ z\ enojno\ natančnostjo)}$$

Postopek:

1. Pretvorba v **dvojiški sistem**:

$$210,5937510_{(10)} \rightarrow 1101\ 0010,1001\ 1_{(2)}$$

To ni IEEE 754 zapis !!!!

2. Dvojiška eksponentna oblika -> Pretvorimo v zapis ($1,m \cdot 2^e$)

$$1101\ 0010,1001\ 1 = 1,1010\ 0101\ 0011 \cdot 2^7$$

pri čemer:

- $m = 1010\ 0101\ 0011,$
- $e = 7$

3. Zapis v IEEE 754 z enojno natačnostjo

- Predznak: Število je negativno $\rightarrow s = 1_{(2)}$

- Eksponent: $E = e + 127 = 134_{(10)} \rightarrow 1000\,0110_{(2)}$
- Mantisa: $m = 1010\,0101\,0011\,0000\,0000\,000_{(2)}$

4. Rešitev:

$$\underbrace{1}_{Predznak}\ \overbrace{100\,0011\,0}^{Eksponent}\underbrace{101\,0010\,1001\,1000\,0000\,0000}_{Mantisa} = 0\mathtt{x}C352\,9800$$

- **Primer**: Število $0\mathtt{x}BF580000$ je zapisano v IEEE 754 z enojno natančnostjo. Zapišimo desetiško vrednost.

$$0\mathtt{x}BF580000_{(IEEE754\ z\ enojno\ natančnosti)} \rightarrow ?_{(10)}$$

Zapišimo podano število v dvojiškem sistemu:

$$0\mathtt{x}BF580000 = \underbrace{1}_{Predznak}\ \overbrace{011\,1111\,0}^{Eksponent}\underbrace{101\,1000\,0000\cdots0}_{Mantisa}$$

- Predznank
  - $s = 1 \rightarrow$ Število je negativno
- Eksponent
  - $E = 0111\,1110_{(2)} \rightarrow 126_{(10)} \Rightarrow e = E - 127 = -1$
- Mantisa
  - $m = 1011$
- Končni rezultat
  - $$(-1)^s \cdot 1,m \cdot 2^e = -1.1011_2 \cdot 2^{-1} = -0,84375$$

- **Naloga**: V šestnajstiškem sestavu zapišite število –87,421875 v zapis IEEE 754 z enojno natančnostjo.

Rešitev:

1. Pretvorba v **dvojiški sistem**:

$$87,421875_{(10)} \rightarrow 0101\,0111,\ 0110\,1100_{(2)}$$

2. Dvojiška eksponentna oblika -> Pretvorimo v zapis ($1,m \cdot 2^e$)

$$0101\,0111,\ 0110\,11 = 1,\ 0101\,1101\,1011 \cdot 2^6$$

3. Zapis v IEEE 754 z enojno natančnostjo

- Predznak: Število je negativno $\rightarrow s = 1_{(2)}$
- Eksponent: $E = e + 127 = 133_{(10)} \rightarrow 1000\,0101_{(2)}$
- Mantisa: $m = 0101\,1101\,1011_{(2)}$

4. Rešitev:

$$1\,1000\,0101\,0101\,1101\,1011\,0000\,0000\,000_{IEEE754} = 0\mathtt{x}C2AE\,D800_{IEEE754}$$

- **Naloga**: Zapišite pozitivno neskončno vrednost v šestnajstiškem zapisu v IEEE 754 z dvojno natančnostjo.

  Rešitev: Poglejte prosojnice iz predavanj

  $+\infty \rightarrow 0\mathrm{x}7FF0\ 0000\ 0000\ 0000_{IEEE754\ z\ dvojno\ natančnostjo}$

  $-\infty \rightarrow 0\mathrm{x}FFF0\ 0000\ 0000\ 0000_{IEEE754\ z\ dvojno\ natančnostjo}$

- **Naloga**: Katero desetiško vrednost predstavlja $0\mathrm{x}FFF1\ 0000\ 0000\ 0000$ v IEEE 754 z dvojno natančnostjo?

  Rešitev: Poglejte prosojnice iz predavanja

  $0\mathrm{x}FFF1\ 0000\ 0000\ 0000_{IEEE754\ z\ dvojno\ natančnosti} \rightarrow NaN$

- **Naloga iz izpita 2**: Imamo podani naslednji števili:

  - $C = 0\mathrm{x}3F58\ 0000$ 32-bitno število, zapisano po standardu IEEE 754
  - $D = 0\mathrm{x}425C\ 4000$ 32-bitno število, zapisano po standardu IEEE 754

  Izračunajte $F = C + D$. Zapišite števili C in D v dvojiški eksponentni obliki (primer: $1,1001011 \cdot 2^{-10}$). Število F mora biti zapisano na oba načina – v dvojiški eksponentni obliki in šestnajstiško po formatu IEEE 754.

  Rešitev:

  - Zapišemo podani števili v dvojiški eksponentni obliki

  $$C = 0\mathrm{x}3F58\ 0000 \rightarrow 1,011 \cdot 2^{-1}$$

  $$D = 0\mathrm{x}425C\ 4000 \rightarrow 1,101110001 \cdot 2^{5}$$

  - Števili prestavimo na isto potenco

  $$C = 1,011 \cdot 2^{-1}$$

  $$D = 1101110,0010 \cdot 2^{-1}$$

  - Števili seštejemo in premaknemo vejico

  $$F = C + D = 1,1011111101 \cdot 2^{5}$$

  - Zapišemo v IEEE 754

  $$F = 0\mathrm{x}425F\ A000$$

- **Naloga iz izpita 3**: Izračunajte produkt $P = M \cdot N$ dveh realnih števil, zapisanih v 32-bitnem zapisu v plavajoči vejici po standardu IEEE 754. Števila pred množenjem zapišite v dvojiški eksponentni obliki brez odmika (primer: $+1,011 \cdot 2^{-32}$). Množenje izvedite v dvojiški obliki. Rezultat P zapišite po standardu IEEE 754 v šestnajstiškem zapisu.

  - $M = 0\mathrm{x}ABCD\ 0000$
  - $N = 0\mathrm{x}4EB0\ 0000$

Rešitev:

- Zapišemo podani števili v dvojiški eksponentni obliki

$$M = 0\mathtt{x}ABCD\,0000 \to -1,1001101 \cdot 2^{-40}$$

$$N = 0\mathtt{x}4EB0\,0000 \to 1,1011 \cdot 2^{30}$$

- Pomnožimo M in N

$$P = M \cdot N = (-1,1001101) \cdot 2^{-40} \cdot 1,1011 \cdot 2^{30}$$

$$= -(1,1001101 \cdot 1,1011) \cdot 2^{-40+30}$$

$$= -(1,1001101 \cdot 1,1011) \cdot 2^{-10}$$

$$= -(10,0011001111) \cdot 2^{-10}$$

$$= -(1,00011001111) \cdot 2^{-9}$$

$$\begin{array}{rl}
\underline{1,1001101 \cdot 1,011} & \\
11001101 & (1 \cdot 11001101) \\
11001101 & (1 \cdot 11001101\,\text{pomaknjeno za 1 mesto}) \\
00000000 & (0 \cdot 11001101\,\text{pomaknjeno za 2 mesti}) \\
\underline{+\,11001101} & (1 \cdot 11001101\,\text{pomaknjeno za 3 mesta}) \\
10,0011001111 & \text{Rezultat (} 7+3=10 \text{ decimalnih mest)}
\end{array}$$

- Zapišemo v IEEE 754

$$P = 0\mathtt{x}BB0C\,F000$$