

Oblig 3

FYS-MEK1110

Lasse Steinnes

Mars 2. 2018

Introduksjon

Formålet med oppgaven er å beskrive den horisontale bevegelsen til en hul metallsylin-
der (5 kg) langs et metallrør. En fjær med fjærkonstant $k = 500\text{N}/\text{m}$ er festet til sylindere
og et bord, slik at avstanden mellom objektene er 0.3 m (h). Lengden til fjæra i likevekts-
posisjon (l_0) er 0.5 m.

(a) Horisontalposisjonen, x_0

Horisontalposisjonen (x_0), til sylindere når fjæra har likevektslengden, blir ved hjelp av
Pytagoras

$$x_0 = \sqrt{l_0^2 - h^2} = \sqrt{0.5\text{m}^2 - 0.3\text{m}^2} = 0.4\text{m}.$$

(b) Fjæras lengde som funksjon av x

Når fjæra er utstrekkt eller komprimert kan fjærlengden beskrives på to måter

$$l = \cos(\alpha),$$

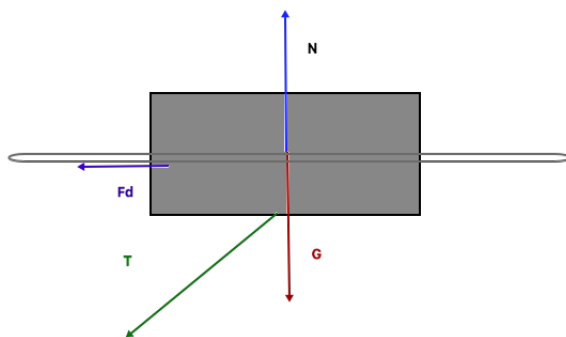
og

$$l = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Den første likheten er utledet ved hjelp av forholdet $\cos(\alpha) = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}}$, mens den
andre følger direkte fra Pytagoras setning om rettvinklede trekanter.

(c) Frilegemediagram av sylindren

Gravitasjonskraften, normalkraft, fjærkraft og friksjonskraft vil virke på sylindren (1).



Figur 1: Frilegemediagram av kreftene som vil virke på en hul sylinder festet i en fjær og et metallrør: Fjærkraften (T), normalkraft (N), gravitasjonskraft (G) og friksjonskraft (F_d) virker på legemet. Friksjonskraftene avhenger av retning på bevegelsen (i dette tilfellet til høyre).

(d) og (e): Horisontal fjærkraft

Den horisontal fjærkraften er en diagonal kraft som kan dekomponeres langs aksene. Dersom $r = x\hat{i} + h\hat{j}$, og fjærkrafta er gitt ved

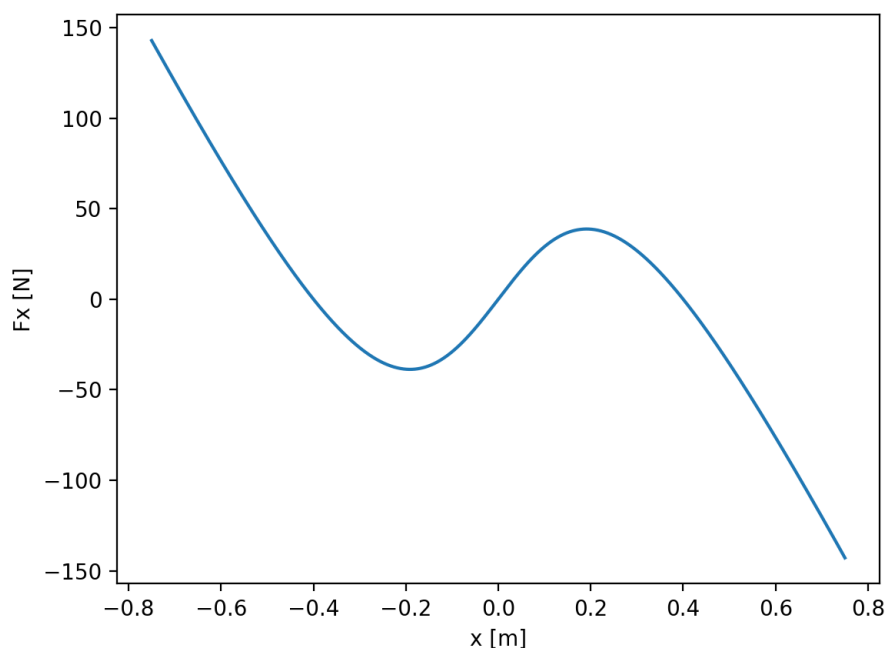
$$F = -k(|\vec{r}| - l_0) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

blir fjærkraften i horisontal retning

$$F_x = -k(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0) \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = -kx(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}).$$

Siden fjærkraften virker mot bevegelsesretningen, er den forventet å øke negativt når sylindren beveger seg i positiv retning fra x_0 , og fjæra strekkes (2), vedlegg 1). Imidlertid vil F_x øke positivt når bevegelsen er motsatt rettet fra x_0 , på grunn av valg av positiv x-koordinatakse mot høyre. Siden fjæra presser mot kompresjon, får man en sigmoid kurve mellom $-x_0 \leq x \leq x_0$. Dersom fjæra er strukket over l_0 og slippes, vil den sprette tilbake i motsatt retning. Om fjæra dekomprimeres, vil kraften virke slik at den skyves

ut langs siden. På grunn av at det trengs en del kraft for at fjæra skal endre side i forhold til festepunktet, må fjæra dekomprimeres/strekkes for å få en bevegelse fram og tilbake.



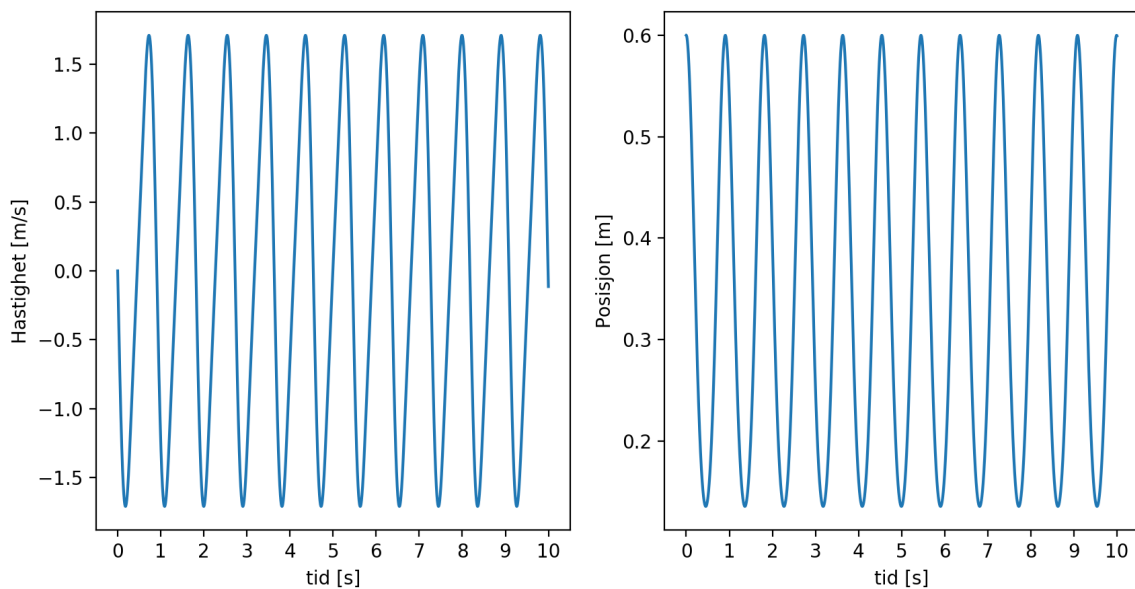
Figur 2: Horisontal fjærkraft F_x (N) som en funksjon av posisjonen, x (m).

(f) Posisjon og hastighet for $x_0 = 0.6$

Det ble skrevet et program for å løse og gi en grafisk fremstilling av bevegelsesligningene gitt $x_0 = 0.6$ m, og $v_0 = 0$ m/s (3, Vedlegg 2). Sylindren vil pendle frem og tilbake 11 ganger i løpet av de første 10 sekundene, men fortsatt holde seg til høyre fjæras festepunkt ($x = 0$ m). Siden friksjonen ikke er inkludert som en horisontal kraft, vil sylindren ikke miste noe av sin hastighet.

(g) Posisjon og hastighet for $x_0 = 0.65$

Det samme programmet ble kjørt med $x_0 = 0.65$ (4). I denne startposisjonen får sylindren så mye horisontal fjærkraft at den blir skøvet over på venstre side av fjæras festepunkt. Når festepunktet vil fjæra dekomprimeres og den kinetiske energien endres



Figur 3: Hastighet og posisjon til sylindere for de første 10 sekundene, gitt $x_0 = 0.6$ m, og $v_0 = 0$ m/s .

til potensiell energi i fjæra. Derfor minker farten i bevegelsesretningen, før sylindere skyter fart igjen når fjæra snur, og bruker sin potensielle energi til kinetisk energi i bevegelsesretningen. Farten er symmetrisk om dette punktet fordi energi ikke går tapt i form av varme fra friksjonen og energien er bevart i systemet.

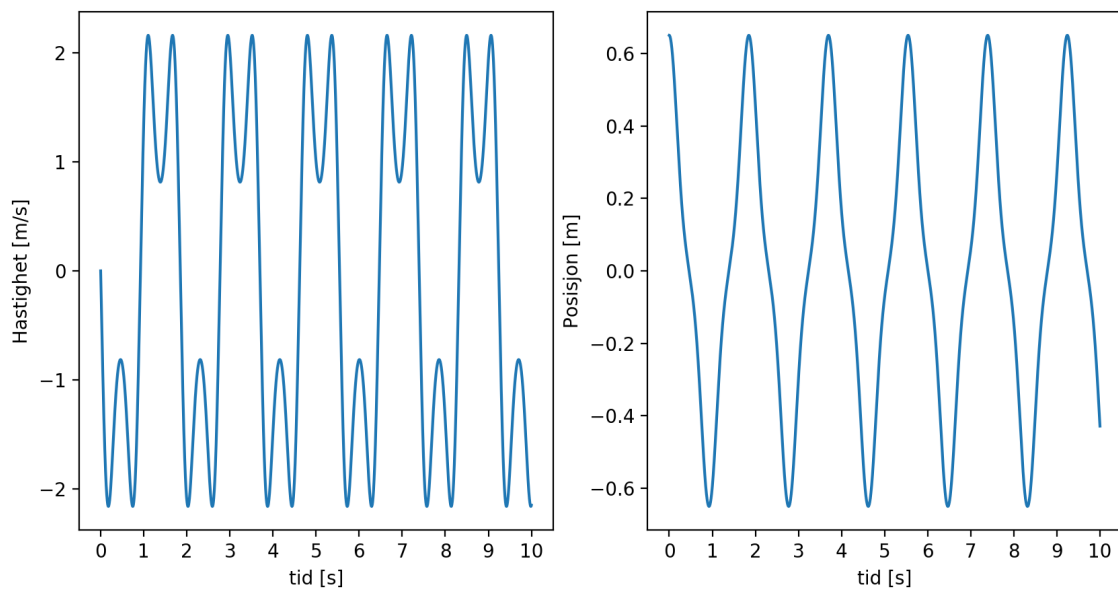
(h) Den vertikale fjærkraften

Den vertikale fjærkraften tilsvarer krafta i \hat{j} komponent, langs y-aksen. Dersom $r = x\hat{i} + h\hat{j}$, og fjærkrafta er gitt ved

$$F = -k(|\vec{r}| - l_0) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

blir fjærkraften i vertikal retning

$$F_y = -k(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0) \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} = -kh(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}).$$



Figur 4: Hastighet og posisjon til sylindren for de første 10 sekundene, gitt $x_0 = 0.65$ m, og $v_0 = 0$ m/s .

(i) og (j): Normalkraften på sylindren

Summen av kreftene i y-retning består av

$$\sum F_{y_{tot}} = G + F_y + N.$$

Akselerasjonen vertikal er lik 0. Ved Newtons andre lov (N2L) gjelder $\sum F_{y_{tot}} = 0$, som ved omskrivning gir en generell funksjon for normalkraften, avhengig av x

$$N = -(G + F_y) = mg + kh\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right).$$

Satt inn for $l_0 = 0.5$ m, $h = 0.3$ m og $k = 500$ N/m, blir normalkraften 49.05 N. Den holder sylindren oppe, og virker mot gravitasjonen.

(k) Løsning for x når $N = 0$

Dersom det ikke skal virke noen normalkraft på sylindere må

$$N = 0 = mg + kh(1 - \frac{l_0}{x^2 + h^2}).$$

Omskriving gir

$$-\sqrt{x^2 + h^2}(mg + kh) = -khl_0,$$

og

$$\sqrt{x^2 + h^2} = \frac{khl_0}{mg + kh} = \frac{l_0}{\frac{mg}{kh} + 1}.$$

Kvadreres uttrykket på begge sider, og løser for x gir dette

$$x = \pm \sqrt{(\frac{l_0}{1 + \frac{mg}{kh}})^2 - h^2}$$

(l) Numerisk løsning for bevegelseligningene med friksjon

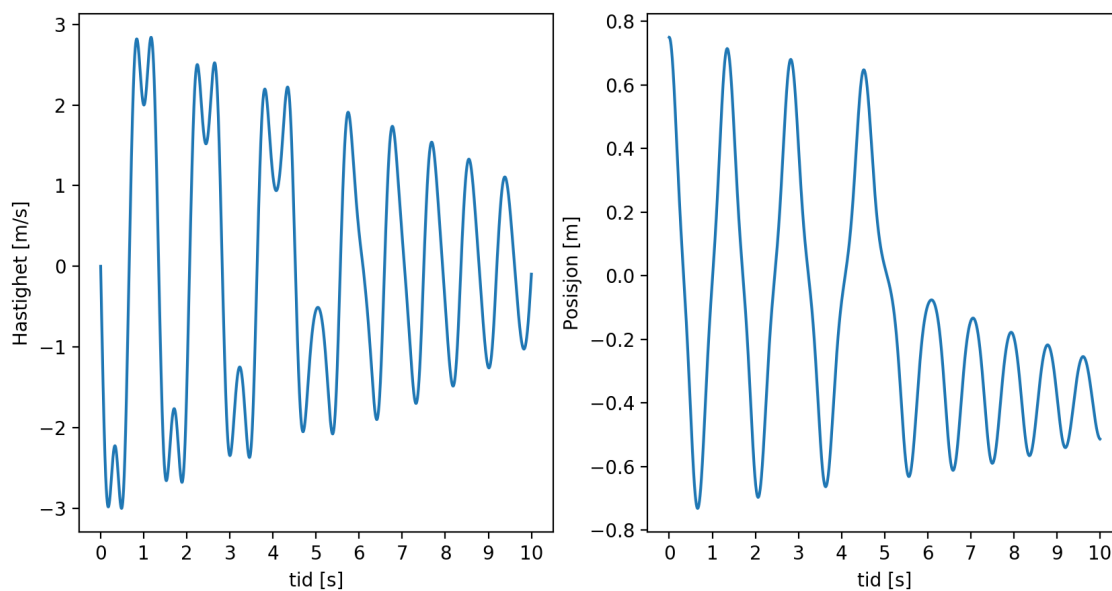
Programmet fra tidligere oppgaver ble endret til å inkludere friksjonskraften ($\mu_d = 0.05$) som virker horisontalt, og løsningen for hastighet og posisjon ble fremstilt grafisk (5, Vedlegg 3). Med friksjonskraft mister sylindere hastighet. Friksjonen tar opp kinetisk energi, og omdanner den til indre kinetisk energi i stålrøret som avgis i form av varme. Ettersom hastigheten saknes, blir svingningen fram og tilbake mindre.

(m) Grafisk fremstilling av kinetisk energi

Et program ble skrevet for å beskrive den kinetiske energien $K = \frac{1}{2}mv^2$ som en funksjon av posisjon (6, Vedlegg 4). Den kinetiske energien er avhengig av farten, og siden farten kvadreres, kan den kun være positiv. Ettersom farten minker rundt fjæras festepunkt (5) gjør også den kinetiske energien det. Kinetisk energi blir omdannet til potensiell energi, men noe mistes også til varmeenergi på grunn av friksjonskraften. Energi er altså ikke bevart, og kinetisk energi minker totalt sett i systemet, noe som gjør at sylindere stopper til venstre for fjæras festepunkt (??, 6).

(n) Arbeidet som trengs for å flytte sylindere fra $x_0 = 0.4$ til $x=0.75$

Arbeid er definert som



Figur 5: Hastighet og posisjon til cylinderen for de første 10 sekundene, gitt $x_0 = 0.75$ m, og $v_0 = 0$ m/s. I modellen er det tatt hensyn til friksjonskraft; $f_d = \mu N$ ($\mu_d = 0.05$).

$$W = \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

For

$$F(x) = -k * (0.05 * h + x) * \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x * 2 + h * 2)}}\right) - 0.05 * m * g,$$

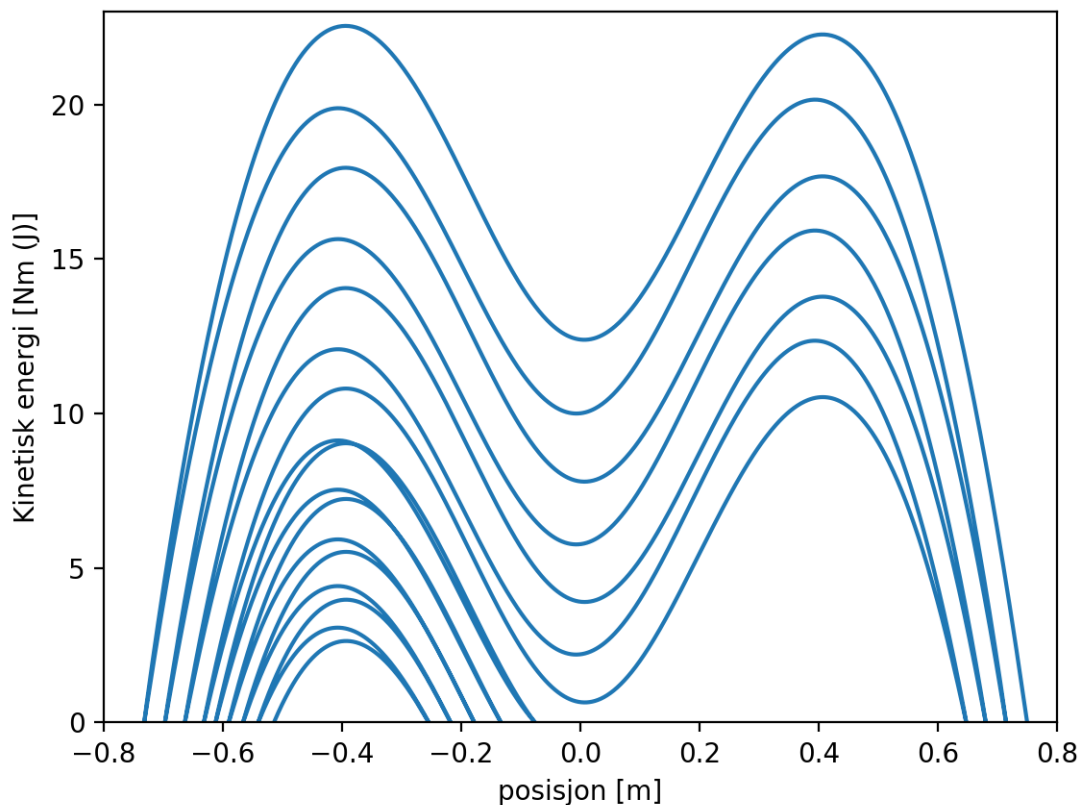
ble trapesmetoden for numerisk integrasjon benyttet til å løse integralet (Vedlegg 5), slik at

$$W = -85.05 Nm.$$

(o) Potensiell energi

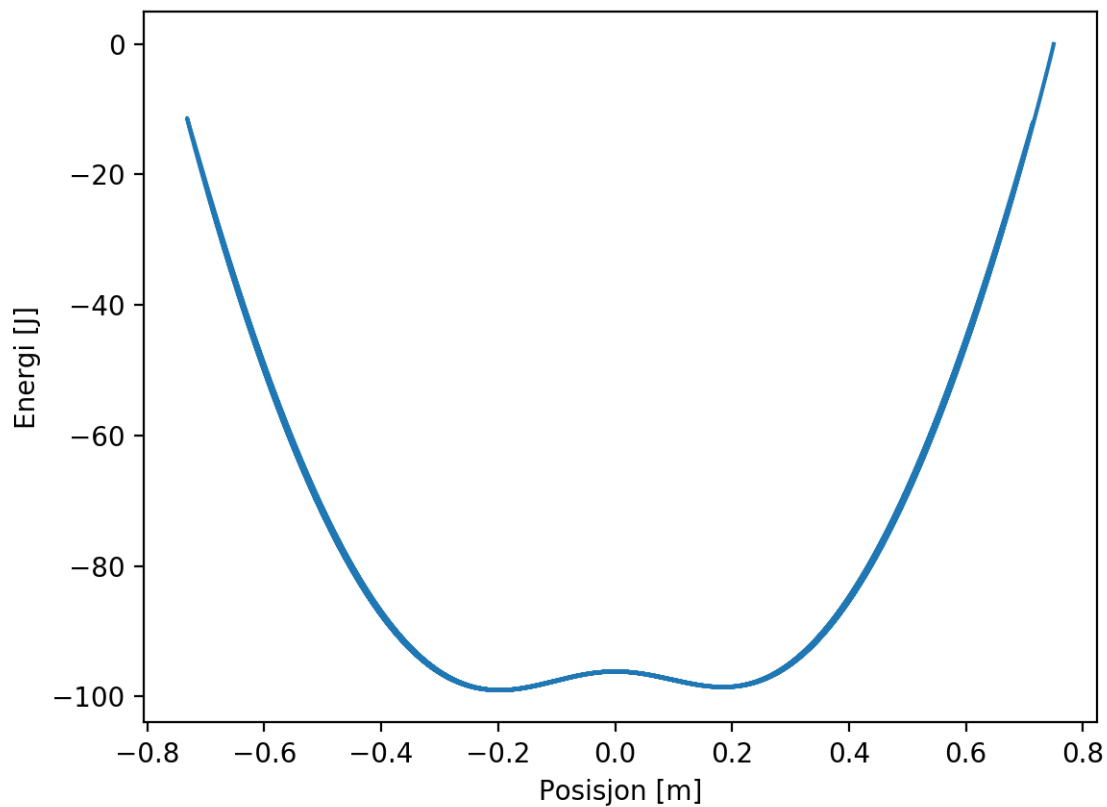
Alle kreftene som virker på legemet er kun avhengige av posisjonen, x , som fri variabel. Derfor er kreftene konservative, og følgende likhet gjelder

$$\frac{dU(x)}{dx} = -F(x)$$



Figur 6: Kinetisk energi (J), som en funksjon av posisjon til sylindren (m).

Ved hjelp av numerisk integrasjon, kan man løse for potensialfunksjonen, $U(x)$, som beskriver potensiell energi. Det ble skrevet et program i Python for å løse for den potensielle energien (7, Vedlegg 6). Potensiell energi er størst når sylindren er langt unna festepunktet til fjæra. Det kan forklares av at hastigheten bremses mer opp, desto lenger strukket fjæra er. Inn mot, eller ut fra, fjæras festepunkt akselerer derimot sylindren, og den har en høy kinetisk energi(6). Konsekvensen er en lavere potensiell energi. Imidlertid vil kompresjonen i fjæra bidra til en liten økning i potensiell energi omtrent når $0.2 \leq x \leq 0.2$ (7). Det er i området der den kinetiske energien minker (6).



Figur 7: Potensiell energi (J), som en funksjon av posisjon til sylindren (m).

(p) Systemets likevektspunkter

Systemets ustabile likevektspunkter vil være der potensialfunksjonen har sitt maksimum. Der vil litt kinetisk energi føre til at sylindren beveger seg mot en av de stabile likevektspunktene, der potensialfunksjonen har sitt minimum. I de stabile likevektspunktene trengs det en aktiveringsenergi; for å flytte på sylindren trengs det et dytt. I situasjonen med sylindren, er det ett ustabil likevektspunkt i $x = 0$ m, og to stabile likevektspunkter i henholdsvis $x = \pm 0.22$ (7).

Vedlegg

Kommentar: Formelen for akselerasjon m/u friksjon ble utledet ved hjelp av N2L. Akselerasjonsfunksjonen er beskrevet i koden.

1) Horisontal springkraft (e)

```
1  ## Obligatorisk innlevering 3 FYS-MEK ##
2
3  # e) Skal plotte horisontal fj  erkraft som funksjon av x-pos.
4  import numpy as np
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  import matplotlib.ticker as plticker
7
8  #setter globale parametere
9  l0 = 0.5 # m
10 h = 0.3 # m
11 k = 500 # N/m
12 m = 5 # kg
13 g = 9.81 # kg
14 x0 = 0.4 # m
15
16
17 def F_x(x):
18     return -k*x*(1 - l0/np.sqrt(x**2 + h**2))
19
20 x = np.linspace(-0.75,0.75,1000)
21
22 # plotter
23 plt.plot(x, F_x(x))
24 plt.xlabel("x [m]")
25 plt.ylabel('Fx [N]')
26 plt.show()
```

2) Løsning av bevegelsesligningene numerisk (f)

```
1  # f)
2  # Vi har at akselerasjonen er
3  def a_x(x):
4      return -k*x/m*(1 - l0/np.sqrt(x**2 + h**2))
5
6
7  n = 10000          # tidssteg
8  T = 10             # tid [sek]
9  dt = T/n           #     t, ett tidssteg
10 a_arr = np.zeros(n) # Array for akselerasjon
11 v = np.zeros(n)     # Array for fart
12 x = np.zeros(n)     # Array for x posisjon
```

```

13 t = np.zeros(n)      # Tidsarray
14
15 # Initialverdiene
16 x[0] = 0.6
17 # De andre er 0
18
19 # Eulers Cromers metode:
20
21 for i in range(0,n-1):
22     a_arr[i] = a_x(x[i])
23     v[i+1] = v[i] + dt*a_arr[i]
24     x[i+1] = x[i] + dt*v[i+1]
25     t[i+1] = t[i] + dt
26
27 # dermed blir plottet:
28
29 plt.figure(figsize = (10,5))
30
31 ax1 = plt.subplot(121)
32 plt.plot(t,v)
33 plt.xlabel('tid [s]')
34 plt.ylabel('Hastighet [m/s]')
35 loc = plticker.MultipleLocator(base=1.0) # this locator puts ticks at regular intervals
36 ax1.xaxis.set_major_locator(loc)
37
38
39 ax2 = plt.subplot(122)
40 plt.plot(t,x)
41 plt.xlabel('tid [s]')
42 plt.ylabel('Posisjon [m]')
43 loc = plticker.MultipleLocator(base=1.0) # this locator puts ticks at regular intervals
44 ax2.xaxis.set_major_locator(loc)
45 plt.show()

```

3) Numerisk løsning av bevegelsesligningene, når akselerasjonen også avhenger av friksjon (I)

```

1  ## 1) Skal inkludere friksjonen (mÅ huske at denne krafta kan endre retning)
2  def a_x(x,v):
3      if v < 0:
4          ax = k/m*(0.05*h-x)*(1-10/np.sqrt(x**2 + h**2)) + 0.05*g
5      else:
6          ax = -k/m*(0.05*h+x)*(1-10/np.sqrt(x**2 + h**2)) - 0.05*g
7      return ax
8
9  # Initialverdiene
10 x[0] = 0.75
11 # De andre er 0
12
13 # Eulers Cromers metode:
14
15 for i in range(0,n-1):
16     a_arr[i] = a_x(x[i],v[i])

```

```

17     v[i+1] = v[i] + dt*a_arr[i]
18     x[i+1] = x[i] + dt*v[i+1]
19     t[i+1] = t[i] + dt
20
21 # dermed blir plottet:
22
23 plt.figure(figsize = (10,5))
24
25 ax1 = plt.subplot(121)
26 plt.plot(t,v)
27 plt.xlabel('tid [s]')
28 plt.ylabel('Hastighet [m/s]')
29 loc = plticker.MultipleLocator(base=1.0) # this locator puts ticks at regular intervals
30 ax1.xaxis.set_major_locator(loc)
31
32
33 ax2 = plt.subplot(122)
34 plt.plot(t,x)
35 plt.xlabel('tid [s]')
36 plt.ylabel('Posisjon [m]')
37 loc = plticker.MultipleLocator(base=1.0) # this locator puts ticks at regular intervals
38 ax2.xaxis.set_major_locator(loc)
39 plt.show()

```

4) Grafisk fremstilling av kinetisk energi (m)

```

1 # m) Skal plotte den kinetiske energien:
2
3 def K1(v):
4     return 0.5*m*(v**2)
5
6 # kinetisk energi i et objekt
7 kin = K1(v)
8
9 #plot
10 plt.plot(x,kin)
11 plt.xlabel('posisjon [m]')
12 plt.ylabel('Kinetisk energi [Nm (J)]')
13 plt.axis([-0.8,0.8,0,23])
14 plt.show()

```

5) Numerisk integrasjon av F: Arbeidet (n)

```

1 # Oppgave n)
2 # Skal finne arbeidet det tar Å komme til posisjon x = 0.75 vha numerisk integrasjon
3 # Det tilsvarer Å løse integralet int(f_x) dr. fra x0 til x
4
5 def F_x2(x):
6     return -k*(0.05*h+x)*(1-10/np.sqrt(x**2 + h**2)) - 0.05*m*g

```

```

7
8 x1 = np.linspace(0.4,0.75,1000)
9 W = np.trapz(x1,F_x2(x1))
10 print('Arbeidet det tar komme fra x0:{:.1 f} til x:{:0.2 f} er  $\hat{=}$  {:.2 f} Nm'.format(x0←
    ,0.75,W))

```

6) Kumulativ numerisk integrasjon: Potensiell energi (o)

```

1  ## o) Skal finne potensialfunksjonen: potensiell energi. Konservativ kraft, sÅ du/dx =←
   -F
2
3  import scipy.integrate
4  U = scipy.integrate.cumtrapz(x,-F_x2(x))
5
6
7  plt.plot(x[:-1],U)
8  plt.xlabel('Posisjon [m]')
9  plt.ylabel('Energi [J]')
10 plt.show()

```