

Oblig 1

MEK1110

Lasse Steinnes

Februar 27. 2018

Introduksjon

Formålet med besvarelsen er å dekke hovedtemaene skalering, vektor og strømfelt.

1 Skalering

Dersom en ball kastes ut fra origo over en horisontal bakke, og koordinataksene har positiv retning mot høyre horisontalt (x-akse) og vertikalt oppover (y-akse), kan ballens bevegelse beskrives med

$$x(t) = v_0 t \cos \theta,$$

og

$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Ballen har en startfart v_0 ved tida t_0 , og utkastvinkel θ . Bevegelsesligningene for kastet kan utledes fra Newtons andre lov (N2L) og integrasjon av akselerasjonen.

(a) Beregning av t_m og $x(t_m)$

Høyden over bakken tilsvarer y-koordinaten, og dersom $t_m \neq 0$ er tida da ballen treffer bakken etter kastet ($y = 0$), må t_m være bestemt av

$$y(t_m) = 0 = v_0 t_m \sin \theta - \frac{1}{2} g t_m^2 = t_m (v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_m).$$

Siden $t_m \neq 0$ må

$$v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_m = 0,$$

slik at med omskriving blir

$$t_m = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}.$$

Posisjonen i x-retning blir da

$$x(t_m) = v_0 t_m \cos \theta = \frac{2V_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}.$$

(b) Innføring av dimensjonsløse størrelser

Skalering er en metode for å innføre dimensjonsløse størrelser uten enheter, ved hjelp av karakteristiske størrelser. Den karakteristiske størrelsen er en referanse som avhenger av problemstillingen. Ofte benyttes maksimumsverdier som referansestørrelser, slik at de skalerte størrelsene ligger mellom 0 og 1. Formålet med skalering er at likningen for kastebevegelsen kan gjøres universell, der posisjonen (x,y) bestemmes ut fra essensielle parametere. Gitt $x(t_m)$ og t_m fra forrige avsnitt, blir skaleringen

$$x^* = \frac{x}{x_m} = \frac{v_0 t \cos \theta}{\frac{2V_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}} = \frac{gt}{2v_0 \sin \theta}$$

og

$$y^* = \frac{y}{x_m} = \frac{v_0 t_m \sin \theta - \frac{1}{2} g t_m^2}{\frac{2V_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}} = \frac{tg}{2v_0 \sin \theta} - \frac{g^2 t^2}{4v_0^2 \sin \theta \cos \theta}.$$

Dersom

$$t^* = \frac{t}{t_m} = \frac{t}{\frac{2v_0 \sin \theta}{g}} = \frac{tg}{2v_0 \sin \theta},$$

gir omskriving $t = t^* \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$. Innsetting av t i x^* og y^* resulterer i

$$x^* = t^*$$

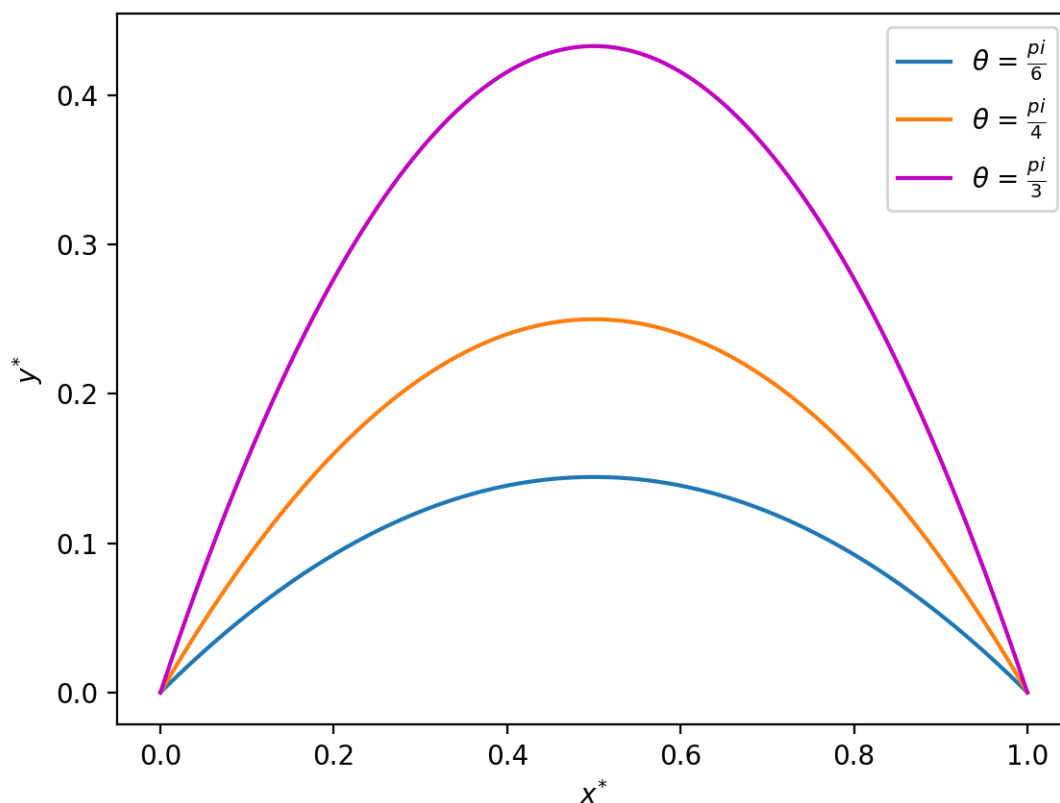
$$y^* = \tan \theta (t^* - t^{*2})$$

Her er det ingen essensielle parametere. Når bevegelseslikningene er skrevet på formen ovenfor må ikke enhetene på størrelsene tas hensyn til. Ved å variere utkastvinkelen θ

kan alle kast beskrives med en kurve for den spesifikke utkastvinkelen. Legg merke til at vinkelen ikke må skaleres, fordi $\theta = \frac{\text{buelengde}}{\text{radius}}$; vinkelen er bestemt av forholdet mellom to størrelser med like enheter, og er dermed dimensjonsløs.

(c) Grafisk fremstilling av skalerte kurver

Et program ble skrevet i programvaren Python, for å tegne de skalerte kurvene (1, Vedlegg 1).



Figur 1: En kurve kan beskrive alle kastebevegelser for en spesifikk utkastvinkel θ .

De skalerte kurvene (1) kan benyttes for å finne ballens baner for forskjellige verdier av startfarten (v_0) og tyngdeakselerasjonen (g) fordi disse parameterne ikke er essensielle for bevegelsen. Forholdet mellom hvor langt ballen beveger seg vertikalt (y) og horisontalt (x) avhenger kun av utgangsvinkelen θ og tida, t .

2 Strømlinjer til et todimensjonalt hastighetsfelt

I de påfølgende avsnittene er hastighetsfeltet \vec{v} gitt ved

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = xy \hat{i} + y \hat{j}$$

(a) Strømlinjene til hastighetsfeltet

Strømlinja utgjøres av hastighetsvektoren som tangent i ulike punkter langs strømmen. Dermed ligger en liten forskyving fra et punkt r på strømlinja, $d\vec{r}$, i retning av \vec{v} . Siden $\sin \theta = 0$ for $\theta = 0$ må kryssproduktet per definisjon bli $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$. Som et resultat av dette må $v_x dy = v_y dx$. Strømlinja blir derfor

$$xydy = ydx,$$

$$dy = \frac{1}{x} dx$$

Integrasjon gir

$$\int dy = y = \ln(x) + C.$$

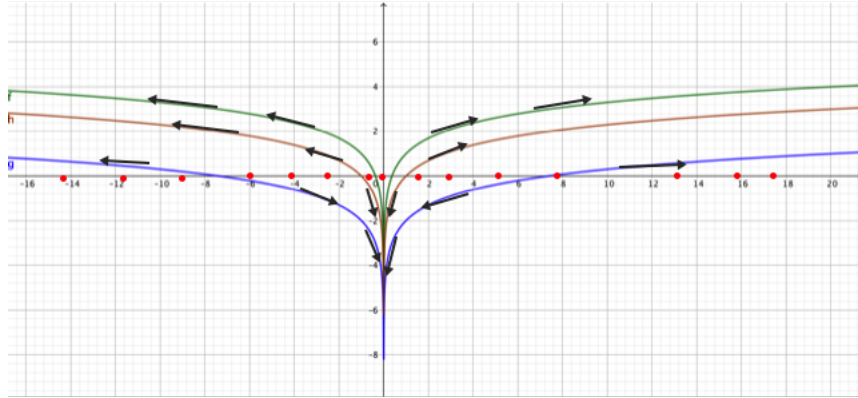
Strømfunksjonen blir da skalarfunksjonen

$$y - \ln(x) = C$$

(b) Grafisk fremstilling av strømlinjene og hastighetsfeltet

Strømlinjen ble tegnet for hånd (2). Hastighetsvektorene er tangent til strømlinja og forteller hvilken vei strømmen vil gå langs strømlinja. Siden hastighetsvektoren, \vec{v} , er dekomponert i x -og y -retning, vil retningen på strømmen avhenge av fortegnet til henholdsvis \hat{i} og \hat{j} . Stagnasjonspunktene ligger der $\vec{v} = 0$, som betyr at disse ligger langs x -aksen.

Strømlinjene for ulike verdier av skalaren ble plottet, sammen med hastighetsfeltet, i et Python-program (3, vedlegg 2).



Figur 2: Skissering av strømlinje og retningen på strømmen, for ulike verdier av skalarfeltet (grønn: $C = 1$, brun: $C = 0$, blå: $C = -1$. Stagnasjonspunkter er merket rødt.

(c) Strømfunksjonen

Et todimensjonalt hastighetsfelt har en strømfunksjon som beskriver strømlinje dersom $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. I dette tilfellet er

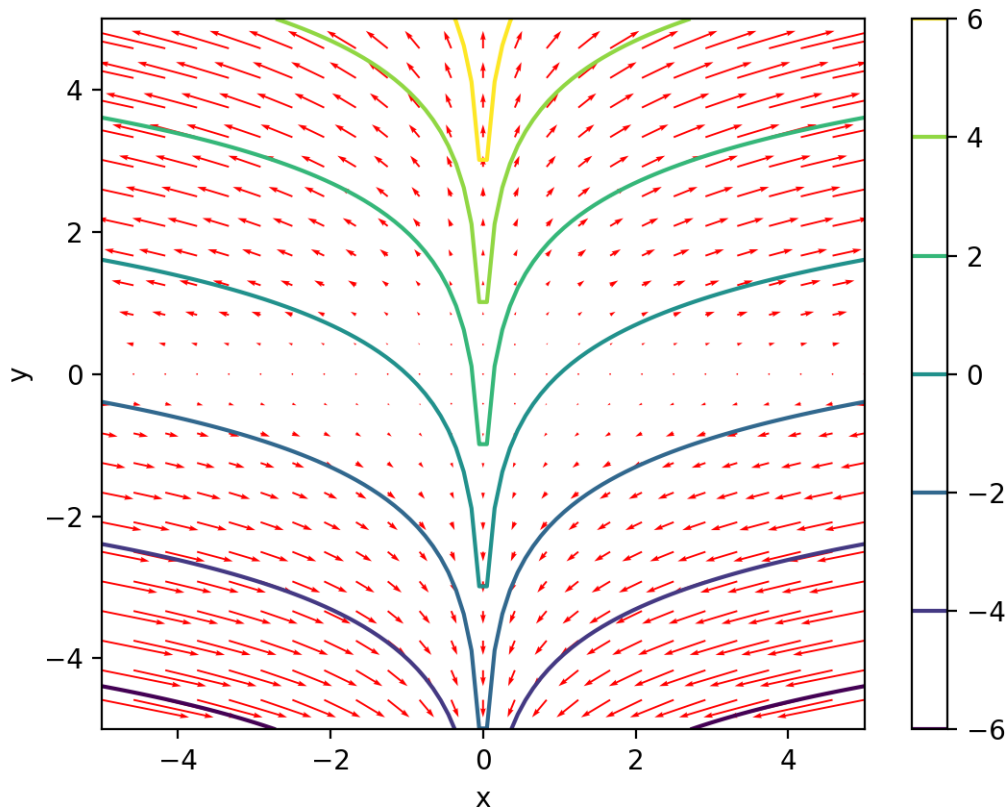
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &= y + 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Siden $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$ kan ikke strømlinje beskrives med en strømfunksjon. Dette kan kun mulig dersom hastighetsfeltet ikke har divergens.

3 Et annet todimensjonalt strømfelt

I avsnittene under er hastighetsfeltet gitt ved

$$\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$$



Figur 3: Detaljert plot av strømlinje og retningen på strømmen, for ulike verdier av skalar (indikert i sidekanten).

(a) Divergens til hastighetsfeltet

Divergensen til hastighetsfeltet (\vec{v}) er definert fra flateintegralet

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\partial V \rightarrow 0} \frac{1}{\partial V} \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \partial S = \nabla \cdot \vec{v}$$

Dermed blir divergensen

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x) \sin(y) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(x) \cos(y) = 0$$

Virvlingen til (\vec{v}) er definert fra et kurveintegral

$$\vec{n} \cdot \text{curl} \vec{v} = \lim_{\partial S \rightarrow 0} \frac{1}{\partial S} \oint_{\partial C} \vec{v} \cdot \vec{n} \partial r = \nabla \times \vec{v}.$$

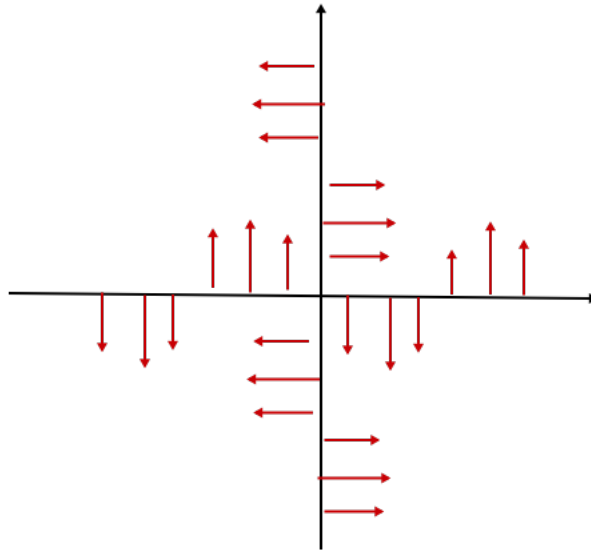
Så virvlingen til hastighetsfeltet blir

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \hat{k} = -2\cos(x)\cos(y)\hat{k}.$$

Hastighetsfeltet har ingen utvidelse eller innskrenking fordi divergensen er null. Imidlertid har \vec{v} virvling i retningen $\vec{u} = (0, 0, -2\cos(x)\cos(y))$.

(b) Skisse av strømvektorer langs x -og y-aksen

Hastighetsvektoren $\vec{v} = \cos(x)\sin(y)\hat{i} - \sin(x)\cos(y)\hat{j}$ tilsvarer strømmingen av henholdsvis $v_x = -\sin(y)$ langs y-aksen ($x = 0$) og $v_y = \sin(x)$ langs x-aksen ($y = 0$). Retningen blir tydelig dersom man setter inn for ulike x,y-verdier i \vec{v} (4).



Figur 4: Skisse av strømvektorene langs aksene tilsvarer henholdsvis $v_x = -\sin(y)$ langs y-aksen ($x = 0$) og $v_y = \sin(x)$ langs x-aksen ($y = 0$).

(c) Sirkulasjonen om randa

Sirkulasjon er definert som kurveintegralet av strømhastighetsvektoren i retningen av kurven strømmen går langs; $\oint_C \vec{v} dr$.

For en kurve som beskriver randa til et rektangel med $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ og $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kan sirkulasjonen beskrives som fire integraler, med tilhørende parametrisering $r(t)$ for kurvene C_1, C_2, C_3 og C_4 . Siden sirkulasjonen avhenger av hvilken vei man beveger seg langs kurven, gitt at vektoren ikke er konservativ, bestemmer retningen man velger å parametrisere fortegnet til størrelsen. Dersom sirkulasjonen går i positiv omdreiningsretning (mot klokka), blir parametriseringen henholdsvis

$$C_1 : r = [x, -\frac{\pi}{2}], x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$C_2 : r = [\frac{\pi}{2}, y], y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$C_3 : r = [x, \frac{\pi}{2}], x \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$$

$$C_4 : r = [-\frac{\pi}{2}, y], y \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$$

Dersom parametrisering for kurven C_1 deriveres med hensyn på x , gir omskriving av Leibniz notasjonen $d\vec{r} = [1, 0]dx$. Settes parametriseringen for r inn i komponentene for \vec{v} blir kurveintegralet for C_1

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{v} dr &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) \sin(y), -\sin(x) \cos(y)] \cdot [1, 0] dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin(y) dx \end{aligned}$$

Langs C_1 er $y = -\frac{\pi}{2}$, så

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin(-\frac{\pi}{2}) dx = [-\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2.$$

De resterende integralene kan beregnes på tilsvarende måte, som gir

$$\oint \vec{v} dr = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} \vec{v} dr = -2 - 2 - 2 - 2 = -8.$$

Altså er sirkulasjonen om randa til kvadratet -8, gitt vektorfeltet $\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$. At det er en sirkulasjon om randa betyr at vektoren påfører objekter som følger randa til kvadratet en rotasjonsbevegelse.

(d) Strømfunksjonen

Strømfunksjonen ϕ eksisterer dersom vektorfeltet er todimensjonalt, og divergensen er lik null. Begge kravene er oppfylt for $\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$ (se avsnittene ovenfor). Strømfunksjonen er definert slik at divergensen alltid blir 0, og ut fra definisjonen må

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

og

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Strømfunksjonen ϕ må da være slik at

$$\phi(x, y) = - \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = - \int v_x dy = \cos(x) \cos(y) + f_1(x)$$

og

$$\phi(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int v_y dx = \cos(x) \cos(y) + f_2(y).$$

I den siste likheten er integrasjonen utført for $\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$. Begge kravene ϕ er oppfylt dersom

$$\phi = \cos(x) \cos(y)$$

(e) Taylorutviklingen for tilnærmede strømlinjer nær origo

Strømfunksjonen (ϕ) er konstant langs strømlinjene. ϕ beskriver derfor strømlinjene. En tilnærming til strømlinjene er mulig å finne ved hjelp av taylortilnærmingen. Andre ordens taylor til ϕ blir

$$\begin{aligned} T_2 \phi(x, y) = \phi(0, 0) + \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial x} (x - 0) + \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial y} (y - 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(0, 0)}{\partial^2 x} (x - 0)^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(0, 0)}{\partial^2 y} (y - 0)^2 + \frac{\partial^2 \phi(0, 0)}{\partial y \partial x} (x - 0)(y - 0) \end{aligned}$$

Med innsetting av ϕ , slik den er beskrevet i forrige avsnitt, gir derivasjon

$$T_2 \phi(x, y) = 1 - \sin(0) \cos(0)x - \sin(0) \cos(0)y - \frac{1}{2} \cos(0) \cos(0)x^2 - \frac{1}{2} \cos(0) \cos(0)y^2 + \sin(0) \sin(0)yx,$$

så tilnærmingen for en skalar ϕ om punktet $(0,0)$ blir

$$\phi(x,y) \approx T_2\phi(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Det ble skrevet en funksjon for å beregne strømhastighetsvektorene fra strømfunksjonen (ϕ), og tilnærmingen til strømlinje ($T_2\phi(x,y)$) ble plottet sammen med strømhastighetsvektorene (5, Vedlegg 3). Strømhastighetsvektorene, de røde pilene i plottet, er ikke tangent med de tilnærmede strømlinjene. Å bruke taylorapprosimasjonen for å beregne v_x og v_y fra definisjonen av strømfunksjon, lar seg derfor ikke gjøre i dette tilfellet. Som en konsekvens av at taylorutviklingen har til hensikt å beskrive strømlinje, og ikke dens globale hastighetsvektorer, blir det generelt feil å finne hastighetsvektorene fra taylorapprosimasjonen.

4 Strømlinjer og hastighetsfelt i Python

(a) Grafisk fremstilling av konturlinjer

Funksjonen `streamfunble` benyttet i et program i Python, til å beregne og plote konturlinjene for ϕ med henholdsvis 5 og 30 punkter (n) for x og y (6, vedlegg 4). Strømlinjene blir kantete for få punkter ($n = 5$), og glattere for flere ($n = 30$). Dette kommer spesielt til uttrykk nær origo, da få datapunkter resulterer i firkantete konturlinjer. De kantete konturlinjene samsvarer ikke med sirklene man ville forvente av taylortilnærmingen om $(0,0)$, $T_2\phi(x,y)$. Til motsetning illustrerer konturlinjene for $n = 30$ en sirkulær strømlinje om origo, nettopp slik $T_2\phi(x,y)$ indikerer. Imidlertid er det verdt å merke seg at veldig mange datapunkter gjør at det tar lengre tid å plote diagrammene.

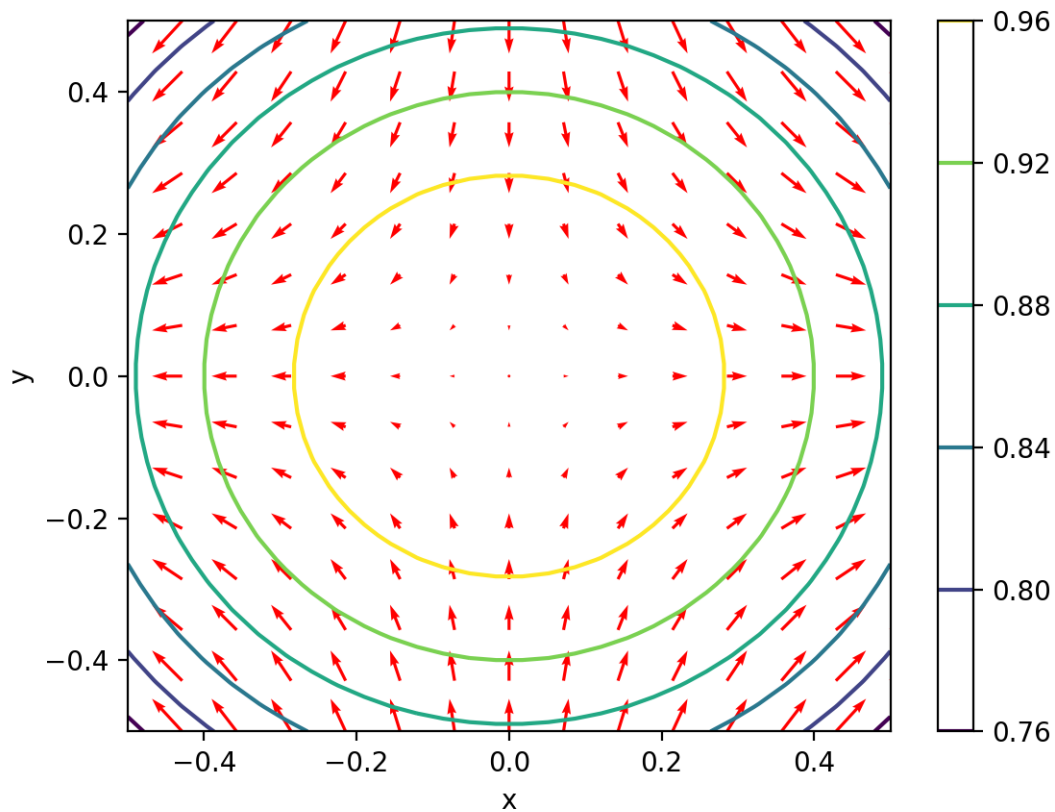
(b) Grafisk fremstilling av hastighetsfeltet

Funksjonen `"velfieldble` benyttet til å beregne og plote hastighetsfeltet (7, vedlegg 5). Hastighetsfeltet går som forventet i retning mot omdreiningsretningen (med klokka), som en spiral.

Plottet sammen med strømfunksjonen, er det tydelig at hastighetsvektorene utgjør tangentene til strømlinjen (8, vedlegg 6).

Vedlegg

1 Plot av skalerte kurver

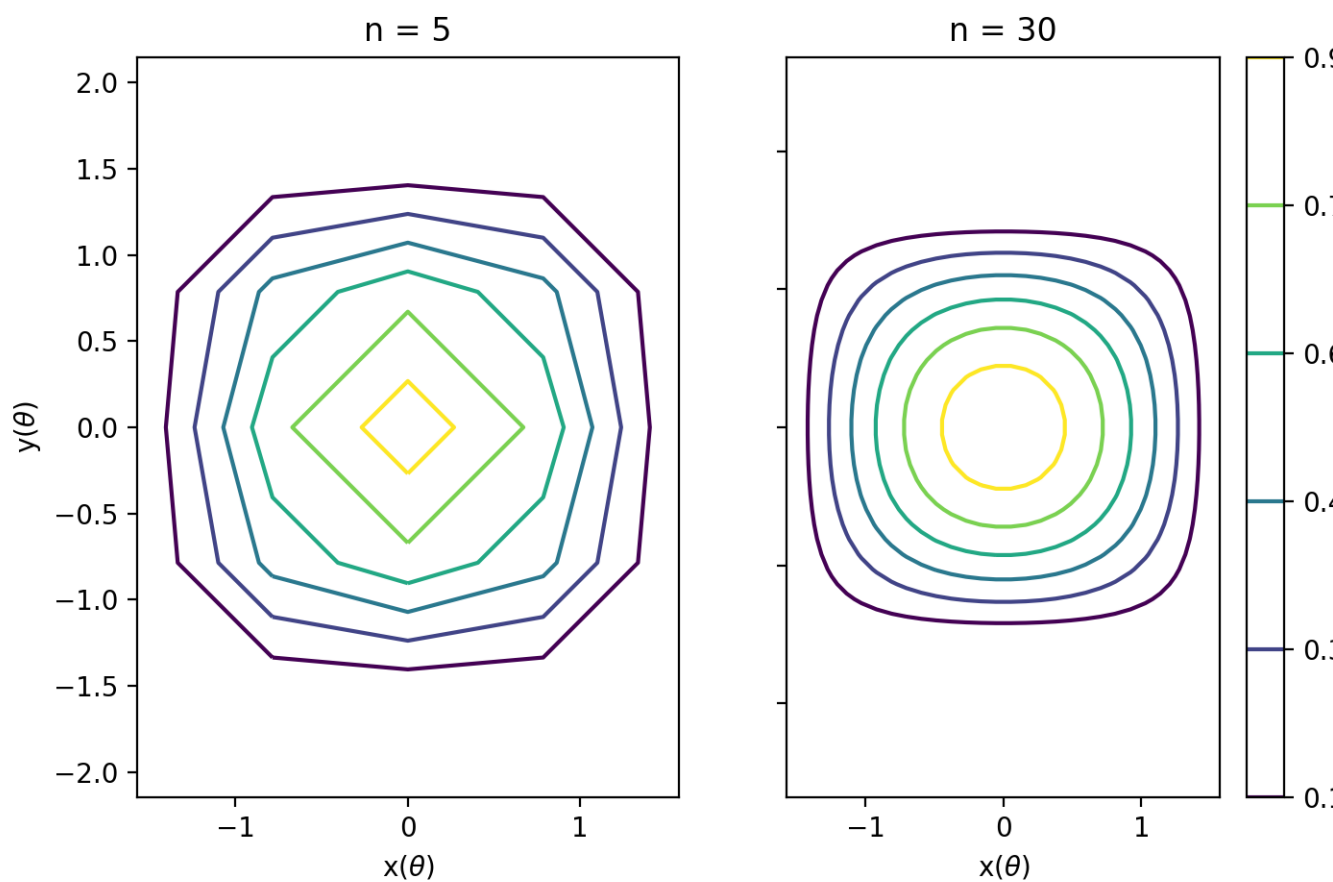


Figur 5: Tilnærmete strømlinjer for $\phi = \cos(x)\cos(y)$ ($T_2\phi$ om $(0,0)$). De røde pilene er beregnede strømhastighetsvektorer.

```

1 ##### Oblig 1 MEK #####
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 # Oppgave 1
5 # Plotte skalerte funksjoner
6 t = np.linspace(0,1,1000)
7 theta1 = np.linspace(np.pi/6,np.pi/6,1000)
8 theta3 = np.linspace(np.pi/3,np.pi/3,1000)
9 theta2 = np.linspace(np.pi/4,np.pi/4,1000)
10
11 x = t
12 y = lambda theta,t: np.tan(theta)*(t-t**2)
13 plt.plot(x,y(theta1,t),x,y(theta2,t),x,y(theta3,t), '-m')
14 plt.xlabel(r'$x^{[*]}$')

```



Figur 6: Strømlinjene for $\vec{v} = \cos(x) \sin(y)\hat{i} - \sin(x) \cos(y)\hat{j}$ med forskjellig antall datapunkter ($n = 5, n = 30$).

```

15 plt.ylabel(r'$y^{*}$')
16 plt.legend([r'$\theta = \frac{\pi}{6}$', r'$\theta = \frac{\pi}{4}$', r'$\theta = \frac{\pi}{3}$'])
17 plt.title('Skalert kast')
18 plt.show()

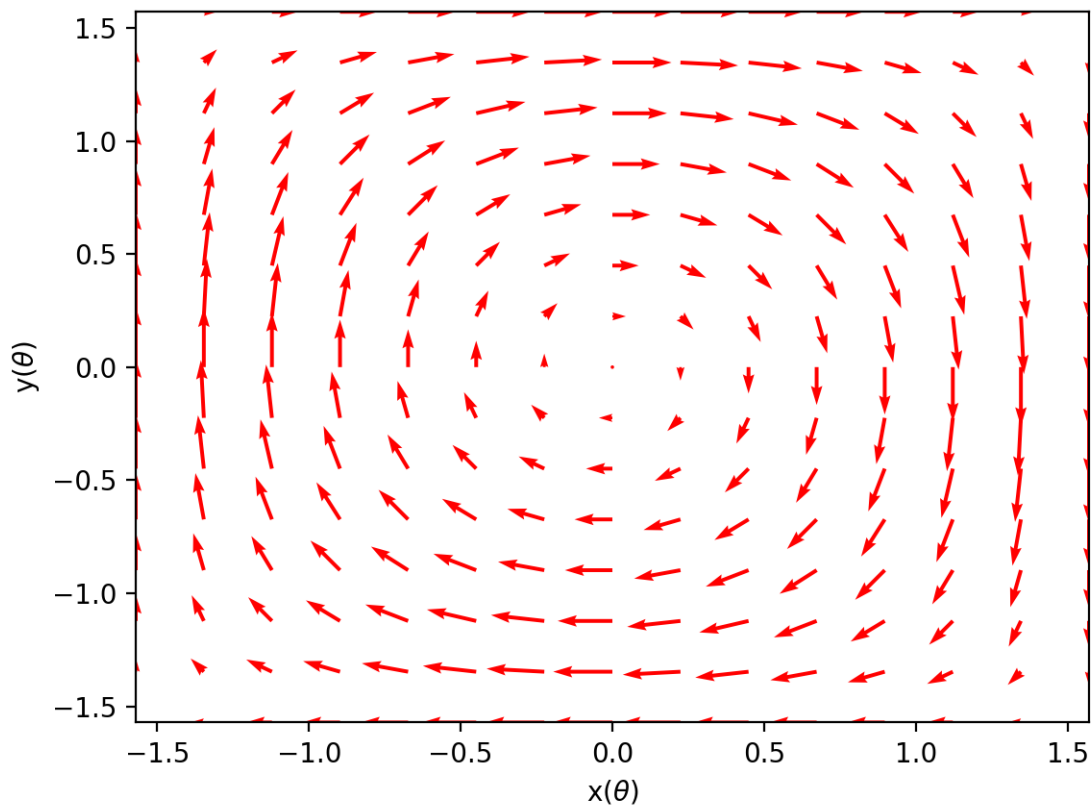
```

2 Plot av strømlinje for hastighetsfelt $\vec{v} = xy\hat{i} + y\hat{j}$

```

1 # 2b)

```

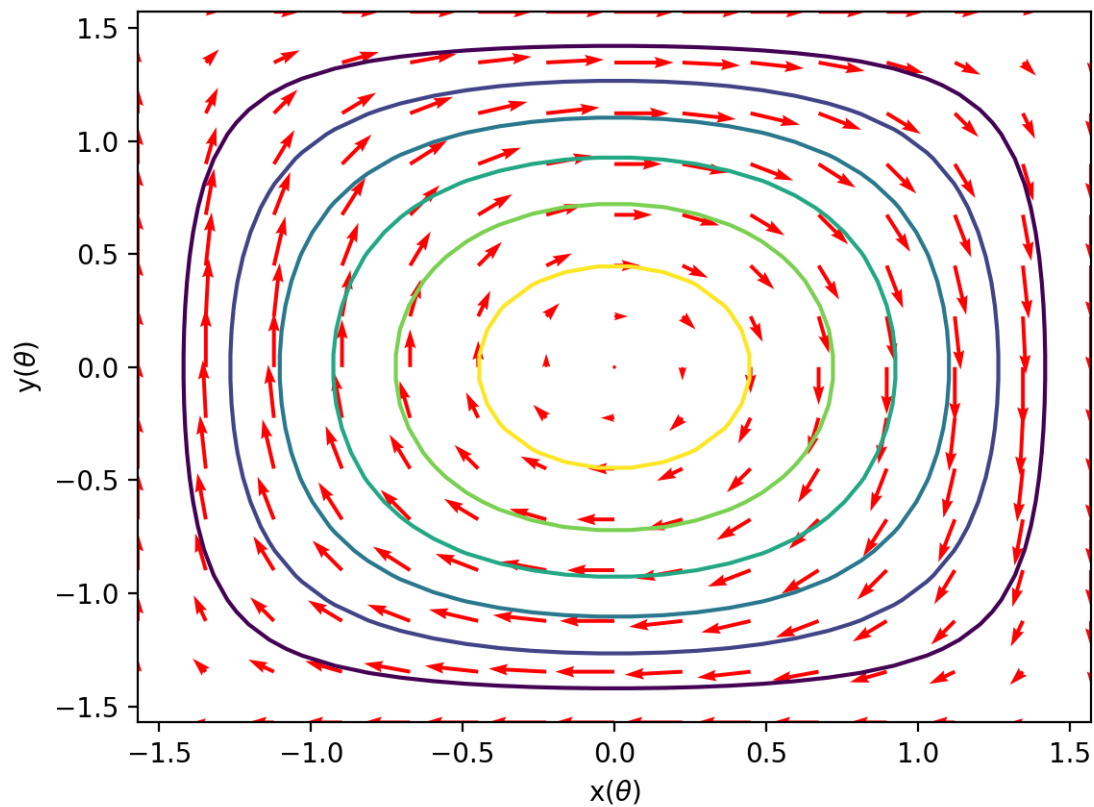


Figur 7: Hastighetsfeltet $\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$.

```

2 # skal tegne konturlinja vha python
3 # v tangent til strÅymlinje, bestemmer retning
4
5
6 def streamline(n):
7     '''Regner ut et grid og en strÅymfunksjon'''
8     x= np.linspace(-5,5,n)
9     [X,Y] = np.meshgrid(x,x)
10    psi= Y - np.log(abs(x))
11    return X, Y, psi
12
13 x0,y0,psi = streamline(100)
14
15 def vecfelt(n):
16     x = np.linspace(-5,5,n)
17     [X,Y] = np.meshgrid(x,x)

```



Figur 8: Hastighetsfeltet $\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$, med strømfunksjon $\phi = \cos(x) \cos(y)$.

```

18     Vx = X*Y
19     Vy = Y
20     return X,Y,Vx, Vy
21
22 x,y, vx, vy = vecfelt(25) # f  rre punkter for str  ymvektorene
23
24 # antall punkter -> antall piler
25 # scale bestemmer lengden av pilene
26
27
28 plt.contour(x0,y0,psi)
29 plt.colorbar()
30
31 # plotter vektorplot av hastighetsfelt
32 plt.quiver(x,y,vx,vy,scale = 20, units = 'x', color = 'r') #

```

```

33 plt.axis([-5,5,-5,5])
34 plt.xlabel('x')
35 plt.ylabel('y')
36 plt.show()

```

3 Beregning av strømvektorer og plot av tilnærming til strømfunksjonen ϕ

```

1  # Oppgave 3e
2  # Skal plotte tilnærming for psi
3  def streamTaylor(n):
4      x = np.linspace(-.5,.5,n)
5      [X,Y] = np.meshgrid(x,x)
6      return X, Y
7
8  x,y = streamTaylor(15)
9  x2,y2 = streamTaylor(30)
10
11 def psi(x,y):
12     return 1 - 1/2*(x**2+y**2)
13
14 psiarr = psi(x,y) # tilnærmede konturlinjer rundt origo
15 psiarr2 = psi(x2,y2)
16 vy, vx = np.gradient(psi(x,y))
17 plt.quiver(x,y,-vx,vy,units = 'x',color = 'r') # bruker def a strømfunksjonen
18
19 plt.contour(x2,y2,psiarr2)
20 plt.colorbar()
21 plt.axis([-0.5,0.5,-0.5,0.5])
22 plt.xlabel('x')
23 plt.ylabel('y')
24 plt.show()

```

4 Plot av strømfunksjonen ϕ

```

1  # Oppgave 4
2  # a) Skal plotte konturlinjer for psi
3  # Hvert sitt diagram for n = 5, n = 30
4  import numpy as np
5
6  def streamfun(n):
7      '''Regner ut et grid og en strømfunksjon'''
8      x= np.linspace(-0.5*np.pi,0.5*np.pi,n)
9      #resultatet er en vektor med n elementer, fra -pi/2 til pi/2
10     [X,Y] = np.meshgrid(x,x)
11     psi= np.cos(X)*np.cos(Y)
12     return X, Y, psi
13
14 # for n = 5;
15 x,y,psi = streamfun(5)

```

```

16
17 # for n = 30
18 x1,y1,psi1 = streamfun(30)
19
20 # plotte konturlinjer til skalarfeltet (strÅymlinje)
21 import matplotlib.pyplot as plt
22 plt.figure(figsize = (8,5))
23
24 plt.subplot(121)
25 plt.contour(x,y,psi)
26 plt.xlabel(r '$\theta$ ')
27 plt.ylabel(r '$\theta$ ')
28 plt.axis('equal')
29 plt.title('n = 5')
30
31
32 ax2 = plt.subplot(122)
33 plt.contour(x1,y1,psi1)
34 plt.colorbar()
35 plt.axis('equal')
36 plt.xlabel(r '$\theta$ ')
37 plt.setp(ax2.get_yticklabels(), visible=False)
38 plt.title('n = 30')
39 plt.show()

```

5 Plot av str mvektorene $\vec{v} = \cos(x) \sin(y) \hat{i} - \sin(x) \cos(y) \hat{j}$

```

1 # oppgave 4b) Del 1
2 # funksjonen beregner hastigheter og lagrer de som array
3 import numpy as np
4
5 def velfield(n):
6     x = np.linspace(-0.5*np.pi,0.5*np.pi,n)
7     [X,Y] = np.meshgrid(x,x)
8     Vx = np.cos(X)*np.sin(Y)
9     Vy = -np.sin(X)*np.cos(Y)
10    return X,Y,Vx, Vy
11
12 """
13 Eksempelkall
14 x,y,vx, vy = velfield(15)
15 """

```

6 Plot av str mvektor og strømfunksjonen sammen

```

1 # vektorplot og kontur
2 plt.quiver(x,y,vx,vy,scale = 5, units = 'x', color = 'r')
3 plt.contour(x1,y1,psi1)
4 plt.axis([-0.5*np.pi,0.5*np.pi,-0.5*np.pi,0.5*np.pi])

```



```
5 plt.xlabel(r'x(\theta$)')
6 plt.ylabel(r'y(\theta$)')
7 plt.show()
```