Oppgave 1

a)

Dersom $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ er gitt ved

$$f(x,y) = \frac{1}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1},$$

så blir det uegentlige dobbeltintegralet over $\mathbf{R}^2$ for $f(x,y)$ i polarkoordinater:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^4\cos^4\theta + 2r^4\cos\theta\sin^2\theta + r^4\sin^4\theta + 1} dr d\theta,$$

der jacobideterminanten for polarkoordinater, r, er multiplisert inn i telleren.
Omskriving gir

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^4(\cos^4\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) + 1} dr d\theta,$$

og siden parentesen kan skrives som et kvadrat, så er integralet

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^4(\cos^2\theta + sin^2\theta)^2 + 1} dr d\theta.$$

Fordi identiteten $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$, blir integralet

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^4 + 1} dr d\theta.$$

Gjøres substitusjonen $u = r^2$, så er $du = 2rdr$, som betyr at

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{u^2 + 1} du d\theta,$$

Integranden er den deriverte til $\arctan(u)$, slik at

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \arctan(u)_0^\infty d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \lim_{u\to\infty} \arctan(u) - \arctan(0) d\theta,$$

og fordi $\arctan(0) = 0$, og $\lim_{u\to\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$, blir integralet,

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} d\theta = \frac{1}{2} * \frac{\pi}{2} * 2\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

b)

Dersom x,y $\varepsilon\,[-k,k]$, og oppdelingen av disse intervallene deles opp med lik steglengde, blir partisjonen $\prod$:

$$-k = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = k,$$

$$-k = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = k.$$

Størrelsen på intervallet er fra -k til k er 2k, slik at dersom punkter c_{ij} i et utplukk U velges til endepunktet i arealelementet R_{ij}, blir $c_{ij} = (-k + \frac{2ki}{n}, -k + \frac{2kj}{n})$, der i,j $\varepsilon[1,n$. Riemannsummen er definert som

$$R(\Pi,U) = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} f(c_{ij})|\,R_{ij}|$$

slik at

$$R(\Pi,U) = R_n^k = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} f(-k + \frac{2ki}{n}, -k + \frac{2kj}{n})(\frac{2k}{n})^2$$

Etterhvert som partisjonen blir finere og finere, dvs. $\lim_{n\to\infty}$, konvergerer riemannsummen mot integralet oppgitt i a), jamfør øvre og nedre trappesum.

c)

Gitt f definert som en funksjon, og n og k som heltall, kan man beregne riemannsummen numerisk i python ved hjelp av følgende algoritme:

```
sum f = 0
for i in range(1,n+1):
for j in range(1,n+1):
dx = - k + 2*k*i/n
dy = - k + 2*k*j/n
sum f = f(dx,dy)*(2*k/n)**2
```

Algoritmen tar summen over alle i,j-er og evaluerer funksjonen for alle $c_{i,j}$ og samler summen i objektet sum f". For hele koden og kjøreeksempel, se vedlegg 1.

d)

Verdien for n og k ble bestemt slik at riemannsummen R_n^k tilnærmer seg eksaktverdien med feil mindre enn 1/10. Dette ble utført ved hjelp av en if-setning med absoluttverdien av differansen mellom eksakt og tilnærmet verdi (vedlegg 2). $n = 22$ og $k = 19$ vil gi en $\varepsilon < \frac{1}{10}$.

Oppgave 2

Gitt at planeten Solaris har en fast kjerne med radius R, og dekket med et hav med dybde D, i tillegg til en massetetthet

$$\rho(h) = \frac{\alpha}{R+h},$$

er massen gitt som volumintegralet

$$\int\int\int_V \rho(h)dV.$$

Skrives integranden om til kulekoordinater gir dette

$$\int_0^{\pi}\int_D^R\int_0^{2\pi} \frac{\alpha(h^2\sin\phi)}{R+h} d\phi dh d\theta,$$

som følge av at jacobideterminanten til kulekoordinater er $h^2 \sin\phi$. Fra analysens fundamentalteorem har vi at

$$-\int_D^R\int_0^{2\pi} \left[\frac{\alpha(h^2\cos\phi)}{R+h}\right]_0^{\pi} dh d\theta.$$

Siden $\cos(\pi) = -1$ og $\cos(0) = 1$ reduseres integralet til

$$2\alpha\int_D^R\int_0^{2\pi} \frac{h^2}{R+h} dh d\theta.$$

Fordi graden i telleren er mindre enn i nevneren er det lurt å benytte polynomdivisjon til å redusere graden i brøken. Polynomdivisjon ble foretatt to ganger, og integranden ble redusert til

$$h^2 : (R+h) = h - \frac{Rh}{R+h} = h - R + \frac{R^2}{R+h}$$

Da blir integralet

$$2\alpha\int_D^R\int_0^{2\pi} h - R + \frac{R^2}{R+h} dh d\theta,$$

og fordi R kun er en konstant blir dette

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{h}{2}-Rh+R^2lnR+h\right]_R^{R+D}d\theta.$$

Skrives dette ut kan ledd strykes mot hverandre, og benyttes regneregler for logaritme-funksjonen blir integralet som står igjen

$$d2\alpha\int_0^{2\pi}\frac{D^2}{2}+R^2ln(\frac{2R+D}{2R})d\theta.$$

$$=2\alpha 2\pi(\frac{D^2}{2}+R^2ln(\frac{2R+D}{2R}))-0=4\alpha\pi(\frac{D^2}{2}+R^2ln(\frac{2R+D}{2R}))$$

Oppgave 3

Dersom M er kvadratisk, og $\overrightarrow{x}$ og $\overrightarrow{y}$ er lineært uavhengige egenvektorer med henholdsvis egenverdier λ og μ for M, kan en vilkårlig $\overrightarrow{v}$ skrives som en lineærkombinasjon

$$\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}.$$

Dersom $\overrightarrow{v}$ også er en egenvektor med egenverdi ϕ, må vi ha at når M multipliseres inn fra venstre

$$M\overrightarrow{v}=M(a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}).$$

Fra distributiv lov, så

$$M\overrightarrow{v}=Ma\overrightarrow{x}+Mb\overrightarrow{y}.$$

Satt inn for egenverdiene har vi at

$$\phi\overrightarrow{v}=\lambda a\overrightarrow{x}+\mu b\overrightarrow{y}$$

Flytter vi over venstresida

$$\overrightarrow{0}=\lambda a\overrightarrow{x}+\mu b\overrightarrow{y}-\phi\overrightarrow{v}.$$

Satt inn for $\overrightarrow{v}$ gir dette

$$\overrightarrow{0}=\lambda a\overrightarrow{x}+\mu b\overrightarrow{y}-\phi(a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}).$$

Trekkes sammen leddene får vi at

$$\overrightarrow{0}=(\lambda-\phi)a\overrightarrow{x}+(\mu-\phi)b\overrightarrow{y}.$$

Siden $\lambda\neq\mu$, kan ikke $\lambda-\phi$ og $\mu-\phi$ være null samtidig, og derfor må enten $a=0$ eller $b=0$, som var det som skulle bevises. Dette følger også fra setning 4.6.6, om man løser for $(\lambda-\phi)a=0$ og $(\mu-\phi)b=0$.

Vedlegg

1) Numerisk beregning av integralet med riemannssum

```
### Oblig2mat1110 ###
# 1c)
from math import pi

def riemann_f(k,n):
    f = lambda x,y: 1/(x**4 + 2*(x**2)*(y**2) + y**4 +1)

    sum_f = 0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            dx = - k + 2*k*i/n
            dy = - k + 2*k*j/n
            sum_f += f(dx,dy)*(2*k/n)**2
    return sum_f

print('KjÃÿreeksempel')
print('TilnÃęrmet verdi: {:.3f}'.format(riemann_f(19,22)))
print('Eksaktverdi: {:.3f}'.format((pi**2)/2))

"""
KjÃÿreeksempel
TilnÃęrmet verdi: 4.909
Eksaktverdi: 4.935
"""
```

2) Numerisk beregning med $\varepsilon < \frac{1}{10}$

```
# 1d)
# Skal finne en verdi av k og en verdi av n slik at
# summen nÃęrmer seg integral med mindre enn 1/10 feil.
n = 0
k = 0

for k in range(20):
    for n in range(200):
        riemann = riemann_f(k,n)
        n_last = n
        k_last = k
        if abs((pi**2)/2 - riemann_f(k,n)) < 1/10:
            break

print('TilnÃęrmet verdi {:.3f}'.format(riemann))
print('n:{:0.3f}'.format(n))
print('k:{:0.3f}'.format(k))

"""
```

```
TilnÃęrmet verdi 4.851
n:22.000
k:19.000
"""
```