Oblig 4

FYS-MEK1110

Lasse Steinnes

5. April 2018

Introduksjon

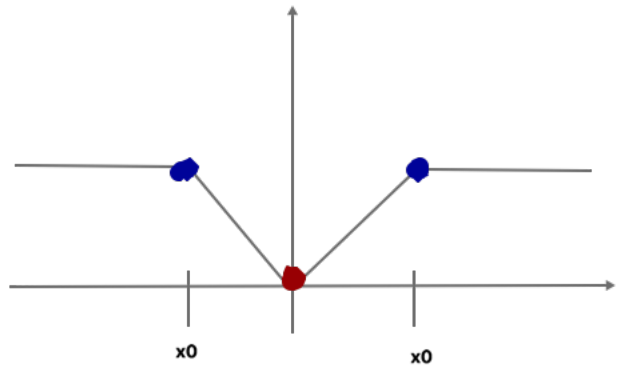
Formålet med oppgaven er å beskrive en enkel modell for å fange og kjøle ned atomer. Metoden som modelleres er en magnetisk-optisk felle (MOT), som benyttes for å studere atomets egenskaper i detalj. Modellen som følger har bakgrunn i kvantemekanikk.

I et endimensjonalt system beveger atomet seg langs en x-akse, og befinner seg i fellen når $|x| < x_0$. Det antas at det magnetiske feltet gir opphav til potensialet

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & |x| \geq x_0 \\ U_0 \frac{|x|}{x_0} & |x| < x_0 \end{cases}$$

a) Skisse av potensialet

Potensialet er konstant utenfor fellen, der atomet ikke blir påvirket av det magnetiske feltet. Imidlertid blir potensialet mindre dess nærmere $x = 0$ atomet kommer, dvs. nærmere senteret (1). I $x = 0$ har atomet et stabilt likevektspunkt, og det vil kreve enten en initiell kinetisk energi, eller tilført kinetisk energi, for å forflytte seg vekk fra $x = 0$. Siden kinetisk energi er gitt ved $K = \frac{1}{2}mv^2$, betyr det at dersom hastigheten er lav nok, vil atomet bli fanget i midten av fellen.



Figur 1: Potensiell energi (J), som en funksjon av posisjon til atomet. Blå punkter er ustabile likevektspunkt, rødt punkt er stabilt likevektspunkt.

b) Kraften som virker på atom i kraftfeltet

Siden potensialet eksisterer må kraften i magnetfeltet, F(x), være konservativ. Dermed gjelder

$$F(x) = -\frac{\delta}{\delta x}U(x),$$

som ved derivasjon gir gir

$$F(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq x_0 \\ -U_0 \frac{x}{x_0|x|} & |x| < x_0 \end{cases}$$

c) Hastigheten v_1 til atomet

I de følgende beregninger er massen til atomet m, og hastighet $v_0 = \sqrt{4U_0/m}$ ved $x = 0$. Hastigheten kan beregnes ved hjelp av arbeid-energiteoremet, som sier at

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F\overrightarrow{v}dt = K_1 - K_0$$

Siden integralet av $\frac{x}{|x|}$ er $|x|$ blir arbeidet fra $0 \leq x \leq x$:

$$W = -U_0 \frac{|x|}{x_0}.$$

Hastigheten i $x = x_0/2$ blir vha. arbeid-energiteoremet:

$$\frac{-U_0}{2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

multiplisert med 2 og innsatt for v_0 gir

$$d - U_0 = mv_1^2 - 4U_0,$$

og med omskriving

$$\overrightarrow{v_1} = \sqrt{3U_0}m$$

Hastigheten for $x = 2x_0$, gitt at man deler opp arbeidet fra $0 \leq x \leq x_0$ og $x_0 \leq x \leq 2x_0$ der sistnevnte gir arbeid lik 0, blir

$$-U_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

satt inn for v_0 og multiplisert med 2, gir

$$-2U_0 = mv_1^2 - 4U_0$$

Omskrevet gir dette

$$\overrightarrow{v_1} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Dette innebærer at hastigheten er størst mot midten av fellen, og hastigheten atomet oppnår i $x = 0$ vil være avgjørende for om atomet unnslipper fella eller ikke. Merk at kun positiv kvadratrot er valgt siden bevegelsen er i positiv x-retning.

d) Hastigheten i motsatt retning

Dersom $v_0 = -\sqrt{4U_0/m}$ ved $x = 0$ så er hastigheten ved $x = -x_0/2$ og $x = -2x_0$ henholdvis $\overrightarrow{v_1} = -\sqrt{3U_0}m$ og $\overrightarrow{v_1} = -\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$. Det følger av symmetrien til skissen (1), og det følger også av at leddene for farten blir kvadrert, samt absoluttverdien til x i beregningen av arbeidet.

e) Elektrostatisk kraft for at atomet slipper unna fellen

Gitt en ladning på atomet, og en konstant elektrostatisk kraft, F_0, blir arbeidet som den konstante kraften utfører:

$$W_{0,1} = \int_0^{x_0} F_0 dx = F_0 x_0$$

Siden arbeidet kun er avhengig av veien, er energi bevart og da gjelder

$$W = K_1 - K_0 = U_0 - U_1,$$

som kan omskrives til

$$W = U_1 - K_0 = U_0 - K_1,$$

slik at

$$W + K_0 = U_1.$$

Dersom atomet skal unnslippe fella må summen av arbeidet og den kinetiske energien være større enn den maksimale potensielle energien, U$_0$,$W + K_0 > U_0$.

I tilfellet der $K = 0$ ved $x = 0$ har vi at

$$F_0 x_0 + 0 > U_0,$$

og omskriving gir

$$F_0 > \frac{U_0}{x_0}.$$

Dersom $K = \frac{U_0}{2}$ ved $x = 0$, så gjelder

$$F_0 x_0 + \frac{U_0}{2} > U_0,$$

$$F_0 > \frac{U_0}{2x_0}.$$

Når atomet har kinetisk energi kreves mindre elektrostatisk energi for at atomet skal unnslippe fella.

f) Modell med magnetisk felt og fotonkraft

Videre blir det antatt at atomet kun er påvirket av det magnetiske feltet, samt en kraft utgjort av fotoner med en spesifikk bølgelengde tilpasset grunnstoffet atomet tilhører: $F = \alpha \vec{v}$. Denne kraften er ikke konservativ fordi den er en-dimensjonell og avhenger av hastighet.

Dermed er det ikke mulig å bruke energibevaring for å beskrive hastigheten. Hastighet og posisjon kan derimot bli funnet ved hjelp av å løse differensialligninger eller numeriske metoder.

g) Uttrykk for akselerasjonen

De to kreftene som virker på atomet er det magnetiske feltet og fotonene. Fra N2L, så

$$\sum F_{ext} = ma$$

$$-U_0 \frac{x}{x_0 \, |x|} - \alpha v = ma,$$

Omskriving og deling på atommassen m gir

$$a = -\frac{1}{m}(U_0 \frac{x}{x_0 \, |x|} + \alpha v), |x| > x_0.$$

Merk at $a = 0$ for $|x| < x_0$.

Initialbetingelsene som trengs for å løse bevegelsesligningene numerisk er v_0 og x_0.

h) Et program som løser bevegelsesligningene numerisk

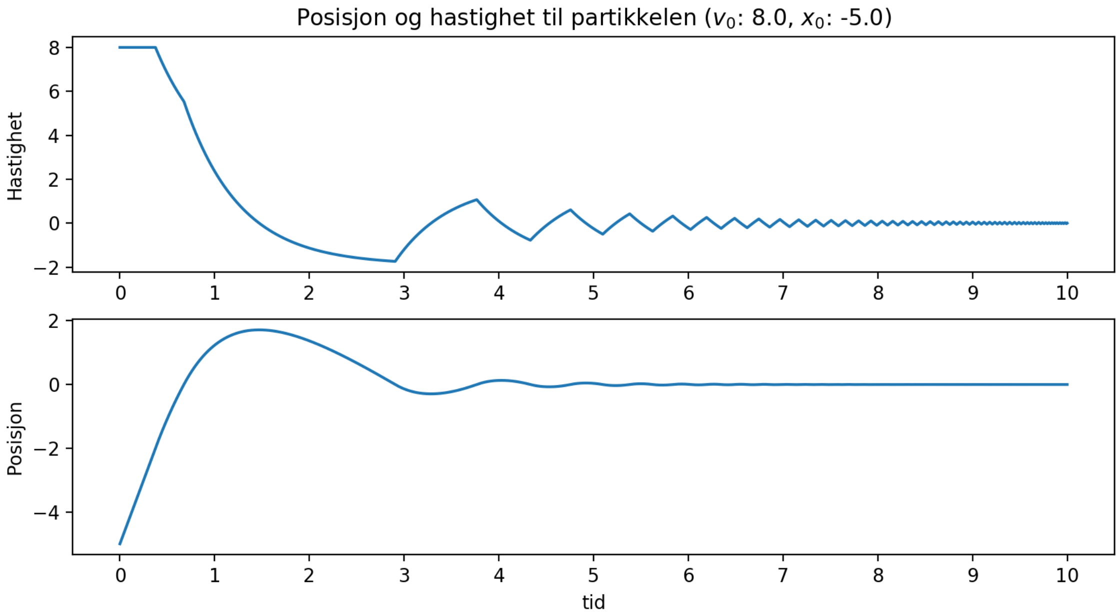
Et program som benytter Euler-Chromers metode ble skrevet i python (Vedlegg 1). Programmet løser for akselerasjon, hastighet og posisjon til atomet, i tillegg til å gi en grafisk fremstilling av hastighet og posisjon. Et kort utdrag av programmet er vist nedenfor.

```
    for i in range(n-1):
        if abs(x[i]) > x0:
            a[i] = 0
        else:
            a[i] = float(F(x[i],v[i]))/m
        v[i+1] = v[i] + dt*a[i]
        x[i+1] = x[i] + dt*v[i+1]
        t[i+1] = t[i] + dt
```

I de påfølgende oppgavene ble det benyttet ikke-dimensjonelle verdier $U_0 = 150$, $m = 23$, $\alpha = 39.48$ og $x_0 = 2$. Hverken tid, posisjon eller hastighet har derfor dimensjoner i de videre beregningene.

i) Numerisk løsning for $v_0 = 8.0$ og $x = -5$

Programmet som ble skrevet i oppgave (h) ble kalt på med funksjonskallet run$_e uler(x,v), med \mathrm{v}_0 =$ 8.0 og $x = -5$ (Vedlegg 2, 2). Med denne intialhastigheten vil atomet gå inn i fella, men ikke ha nok kinetisk energi ved $x = 0$ til å gå ut av det magnetiske feltet. Dermed blir atomet fanget mellom $|x| < x_0 = 2$, og dratt mot $x = 0$ etter et par svingninger.



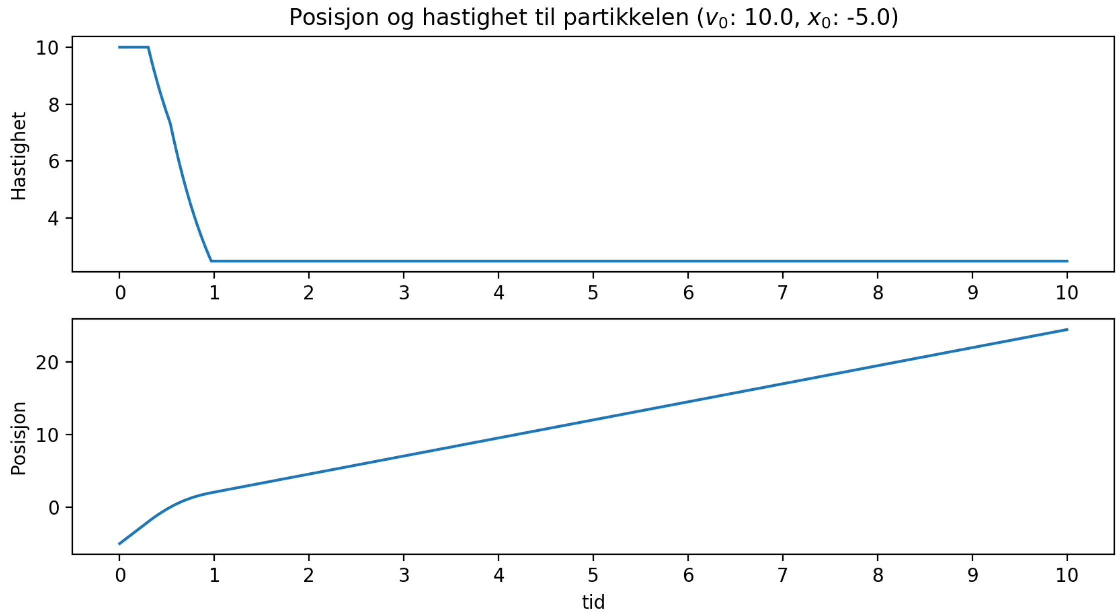
Figur 2: Hastighet og posisjon til atomet som en funksjon av tida. Om $|x| > x_0 = 2$ befinner atomet seg utenfor MOT'en.

j) Numerisk løsning for $v_0 = 10.0$ og $x = -5$

Programmet som ble skrevet i oppgave (h) ble kalt på med funksjonskallet run$_e uler(x, v), med \mathrm{v}_0 =$ 10.0 og $x = -5$ (Vedlegg 2, 3). Med inititalhastightet $v_0 = 10.0$ har atomet så stor kinetisk energi at det unnslipper den magnetisk-optiske fellen. Først minker hastigheten, for så å være konstant, fordi det ikke er antatt at noen krefter virker utenfor $|x| > x_0 = 2$.

k) Maksimal hastighet for atomet slik at den ikke unnslipper atomfellen

Maksimal hastighet ble funnet ved hjelp av den numeriske metoden (Vedlegg 3). Den maksimale initialhastigheten atomet kan ha, og fortsatt bli fanget i MOT'en, er omtrent 8.75.



Figur 3: Hastighet og posisjon til atomet som en funksjon av tida. Om $|x| > x_0 = 2$ befinner atomet seg utenfor MOT'en.

Vedlegg

1) Numerisk løsning for bevegelsesligningene (h)

```
##### Oblig 4   #####
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as plticker

U0 = 150
m = 23
x0 = 2
alfa = 39.48

n = 10000              # tidssteg
T = 10                # tid [sek]
dt = T/n              # âĹĘt, ett tidssteg
a = np.zeros(n)
v = np.zeros(n)       # Array for fart
```

```
x = np.zeros(n)      # Array for x posisjon
t = np.zeros(n)

def F(x,v):
    return -(U0*x/(x0*abs(x)) + alfa*v)

def run_euler(ix,iv):
    x[0] = ix
    v[0] = iv

    for i in range(n-1):
        if abs(x[i]) > x0:
            a[i] = 0
        else:
            a[i] = float(F(x[i],v[i]))/m
        v[i+1] = v[i] + dt*a[i]
        x[i+1] = x[i] + dt*v[i+1]
        t[i+1] = t[i] + dt

    plt.figure(figsize = (10,5))
    ax1 = plt.subplot(211)
    plt.title(r'Posisjon og hastighet til partikkelen ($v_{0}$: %0.1f, $x_{0}$: %0.1f)' %(iv,ix))
    plt.plot(t,v)
    plt.ylabel('Hastighet')
    loc = plticker.MultipleLocator(base=1.0) # this locator puts ticks at regular intervals
    ax1.xaxis.set_major_locator(loc)

    ax2 = plt.subplot(212)
    plt.plot(t,x)
    plt.xlabel('tid')
    plt.ylabel('Posisjon')
    loc = plticker.MultipleLocator(base=1.0) # this locator puts ticks at regular intervals
    ax2.xaxis.set_major_locator(loc)
    plt.show() # avtagget for linjene 58-70.
    return x
```

2) Numerisk løsning for $v_0 = 8.0$ og $x = -5$ (i), og $v_0 = 10.0$ (j)

```
# KjÃÿrer for v0 = 8, x = -5
run_euler(-5,8)

# KjÃÿrer for v0 = 10, x = -5
run_euler(-5,10)
```

3) Maksimal initialverdi $\mathbf{v}_0(k)$

```python
# k, finne max v0 slik at partikkelen blir fanget
# sier at ix fortsatt er −5
# MÃě ligge mellom 8 og 10, gÃěr ut av fella ved 10.

iv = np.linspace(8,10,100)
ix = −5

for i in range(100):
    iv_max = iv[i]
    run_euler(ix,iv[i])
    if x[−1] > 0.2:
        break
print(r'Den stÃÿrste verdien til v0 er {:0.2f}.'.format(iv_max))
```