

V14 - Tomographie mit Gammastrahlung

Michael Gutnikov
michael.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Abgegeben am 10.12.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Gammaquellen	3
2.2	Absorption von Photonen	4
2.3	Intensitätsmessung	5
2.4	Tomographie	7
3	Versuchsaufbau und -durchführung	9
4	Auswertung	10
5	Diskussion	12

1 Ziel

Ziel dieses Versuches ist es die räumliche Zusammensetzung eines Objektes zu bestimmen. Dazu wird die Methodik der Gamma-Tomographie genutzt. Bei dieser werden entlang mehrerer räumlicher Achsen des Objekts Absorptionsmessungen mit Gammastrahlung durchgeführt, die in Kombination auf die räumliche Zusammensetzung schließen lassen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Gammaquellen

Für die notwendigen Absorptionsmessungen muss zunächst Gammastrahlung erzeugt werden. Gammastrahlung beschreibt Photonen mit einer Energie über 200 keV und kann auf verschiedenen Wegen entstehen. Hier soll die Entstehung bei radioaktiven Zerfällen betrachtet werden. Explizit wird der β^- -Zerfall von ^{137}Cs , das in diesem Versuch als Gammaquelle dient, betrachtet. Wie in Abbildung 1 zu sehen, ist für ^{137}Cs neben dem direkten Übergang in den Grundzustand von ^{137}Ba mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,5 % der Übergang in einen angeregten Zustand von ^{137}Ba mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,5 % deutlich wahrscheinlicher. Bei dem Übergang aus dem angeregten Zustand in den Grundzustand $^{137}\text{Ba}^* \rightarrow ^{137}\text{Ba} + \gamma$ wird ein Photon der Energie 661,7 keV ausgesendet. Demnach strahlt eine ^{137}Cs -Quelle mit einer maximalen Intensität bei der angegebenen Energie von 661,7 keV.

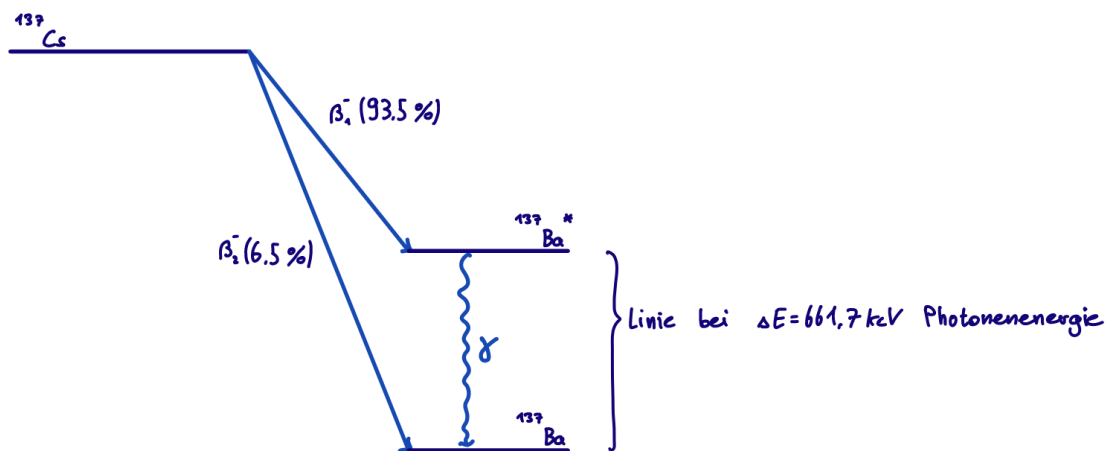


Abbildung 1: Die möglichen β^- -Zerfälle von ^{137}Cs in ^{137}Ba sowie dessen angeregten Zustand $^{137}\text{Ba}^*$ und anschließender Übergang in den Grundzustand von ^{137}Ba unter Aussendung eines Photons. Bearbeitet aus [1]

2.2 Absorption von Photonen

Die Absorption von Photonen wird über die Änderung der Intensität I einer Strahlungsquelle über das **Lambert-Beer'sche-Gesetz** beschrieben

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x), \quad (1)$$

das die Intensität I in einer Entfernung x von einem Ausgangspunkt mit der Ausgangsintensität I_0 in Abhängigkeit der Entfernung und des Absorptionskoeffizientens μ des Ausbreitungsmediums angibt. Der gesamte Absorptionskoeffizient μ ist die Summe der Absorptionskoeffizienten vieler Prozesse

$$\mu = \mu_{PE} + \mu_{CS} + \mu_{PP} + \mu_{RS},$$

wie der Photoemission (PE), der Compton-Streuung (CS), der Paar-Produktion (PP) und der Rayleigh-Streuung (RS). Der gesamte Absorptionskoeffizient μ ist zum einen von der Photonenenergie E und vom Ausbreitungsmedium abhängig. In Abbildung 2 ist der energieabhängige Verlauf des gesamten Absorptionskoeffizientens sowie der der hauptsächlich beitragenden Absorptionskoeffizienten der Paar-Produktion, Photoemission und Compton-Streuung für Germanium dargestellt.

Exemplarisch wird die Absorption von Gammastrahlung aus einer ^{137}Cs -Quelle mit der Aktivität $A_{\text{Quelle}} = 18 \text{ MBq}$ betrachtet, die $D = 3 \text{ cm}$ durch einen Bleiblock und $L - D = 29 \text{ cm}$ durch Luft zurücklegt. Die am Detektor theoretisch zu messende Aktivität ergibt sich zu

$$A_{\text{Detektor}} = A_{\text{Quelle}} \cdot \exp(-\mu_{\text{Luft}}(L - D) - \mu_{\text{Pb}}D) \approx 422\,536 \frac{1}{\text{s}} \approx 0,42 \text{ MBq}.$$

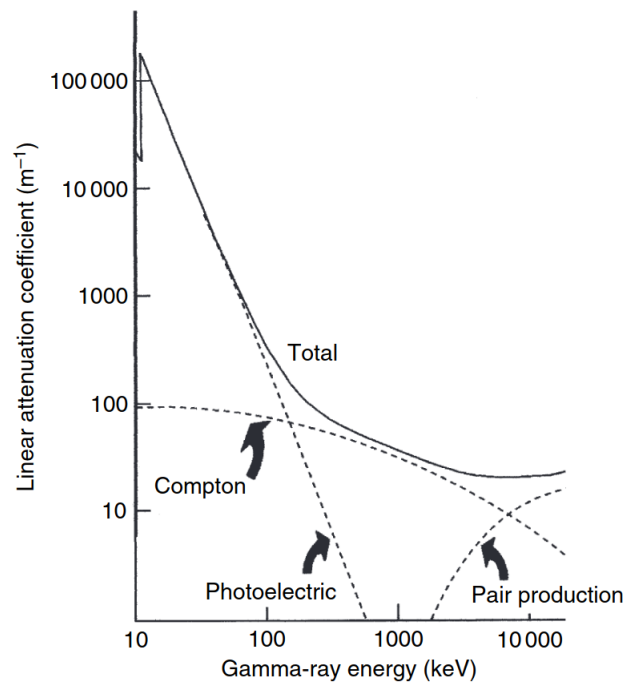


Abbildung 2: Der energieabhängige Verlauf des Absorptionskoeffizientens von Germanium und dessen Bestandteilen der einzelnen Prozesse (PP, PE, CS). Entnommen aus [2]

2.3 Intensitätsmessung

Um die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit der Energie zu messen, wird von einem **Szintillationsdetektor** in Kombination mit einem **Diskriminator** und einem **Vielkanal-Analysator** Gebrauch gemacht.

Szintillationsdetektor

Das Konzept von Szintillatoren beruht darauf, dass einfallende Strahlung hoher Energie Atome des Szintillationsmediums entweder ionisiert oder anregt und diese beim Relaxieren optische Photonen freisetzen. Die Menge an freigesetzten Photonen hängt dabei von der Energie der einfallenden Strahlung ab. Die optischen Photonen des Relaxationsprozesses werden anschließend von Photomultipliern detektiert.

Diskriminatoren

Um nur optische Photonen aus dem Szintillationsdetektor zu detektieren wird ein Diskriminator eingesetzt. Dieser gibt erst ab einem einen Schwellwert übersteigenden Eingangssignal ein Ausgangssignal aus. So kann verhindert werden, dass bereits ein einzelnes spontan emmitiertes Photon einen Ausgangsimpuls am Photomultiplier hervorruft, der fälschlicherweise auf ein optisches Photon des Szintillationsdetektors zurückgeführt werden würde.

Vielkanal-Analysator

Aus dem Photomultiplier erreichen den Vielkanal-Analysator elektrische Signale, deren Stärke proportional zur Energie der Strahlung, die ein Szintillationselektron anregt, angenommen werden kann. Der Vielkanal-Analysator besitzt nun einen digitalen Speicher, der für die verschiedenen Impulstärken verschiedene Speicherplätze besitzt. Die Impulsstärken und zugehörigen Speicherplätze sind Photonenenergien der die Szintillationselektronen anregenden Strahlung zugeordnet. Durch die Einsortierung der eingehenden Impulse in die verschiedenen Speicherplätze, kann so ein Histogramm erstellt werden, dass die energieabhängige Intensität der auf den Detektor treffenden Intensität darstellt.

Repräsentative Messung

Die Intensitätsmessung gibt Counts aus, die der Anzahl an detektierten Photonen entspricht. Damit die Messung als repräsentativ angesehen werden kann, wird eine statistische Unsicherheit von mindestens 3 % gefordert. Unter der Annahme, dass die Zählrate poisson-verteilt ist, kann somit eine minimal benötigte Zahl an Counts N berechnet werden

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\sqrt{N}}{N} \leq 0,03 \quad \rightarrow \quad N \gtrsim 1111,$$

die für die geforderte statistische Unsicherheit erforderlich ist.

2.4 Tomographie

In diesem Versuch soll die Zusammensetzung von neun Würfeln innerhalb einer 3x3-Würfelebene bestimmt werden. Dazu wird der Würfel aus verschiedenen Richtungen bestrahlt und die transmittierte Intensität gemessen. In eine Richtung i ergibt sich diese zu

$$I_i = I_0 \cdot \exp \left(- \sum_j \mu_j d_j \right). \quad (2)$$

wobei I_0 die Grundintensität beschreibt. Die Summe innerhalb der Exponentialfunktion läuft über alle Materialien j , die die Gammastrahlung durchläuft. μ_j beschreibt den Absorptionskoeffizienten des entsprechenden Materials und d_j , die Distanz, die durch jenes Material zurückgelegt wird. Um Rückschlüsse auf die Zusammensetzung des Würfels ziehen zu können, wird der natürliche Logarithmus von Gleichung 2 gebildet

$$- \sum_j \mu_j d_j = \ln \left(\frac{I_j}{I_0} \right) \equiv \tilde{I}_j \quad (3)$$

und zur einfacheren Betrachtung des Gleichungssystems für alle vermessenen Strahlrichtungen als Matrixgleichung formuliert

$$- \underline{\underline{A}} \vec{\mu} = \vec{\tilde{I}}. \quad (4)$$

Die in diesem Versuch zu vermessenden zwölf Bestrahlungsrichtungen sind in Abbildung 3 dargestellt.

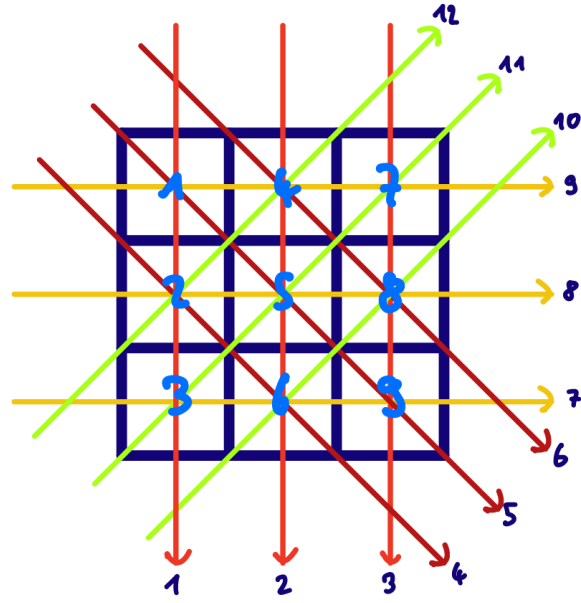


Abbildung 3: Die aus neun gleichförmigen Würfeln bestehende Würfelebene sowie die zwölf vermessenen Bestrahlungsrichtungen.

Unter der Annahme, dass die Würfel möglicherweise alle aus einem anderen Material sind und alle die Kantenlänge d besitzen, lässt sich Gleichung 4 in diesem Fall explizit aufstellen:

$$d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix} \quad (5)$$

3 Versuchsaufbau und -durchführung

Der Aufbau des Versuches ist in Abbildung 4 zu sehen. Ein ^{137}Cs -Strahler sendet aus

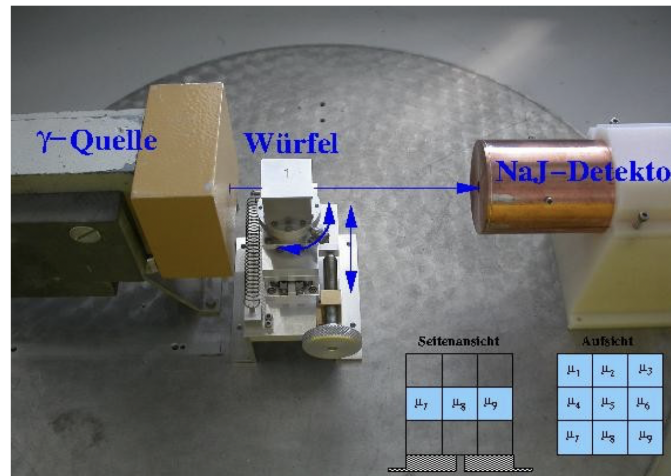


Abbildung 4: Der Aufbau zur Vermessung der Absorptionkoeffizienten unbekannter Materialien. Entnommen aus [3]

einer kleinen Öffnung kollimierte γ -Strahlung aus. Diese passiert eine Halterung in der die zu untersuchenden Würfel eingebaut, bewegt und rotiert werden können. Diese Würfel bestehen aus $3 \times 3 \times 3$ Elementarwürfeln mit je 1 cm Kantenlänge in einer dünnen Aluminiumhülle. Im Rahmen dieses Versuches wird nur die mittlere 3×3 Schicht der Würfel untersucht. Um die übriggebliebene Intensität, nach Durchqueren des Würfels, zu messen, trifft die Strahlung daraufhin auf einen anorganischen Szintillationsdetektor. Dabei werden die Atome des Szintillatormaterials angeregt, welche sich durch Emission eines Photons wieder abregen. Diese Photonen treffen auf einen Photomultiplier, welcher an einen Multichannelanalyzer angeschlossen ist, der die gemessenen Impulse der Größe nach in ein Histogramm einsortiert und dieses auf dem Computer ausgibt. Der gesamte Aufbau ist zusätzlich mit einer Wand aus Blei-Blöcken abgeschirmt.

Nun werden der Reihe nach vier verschiedene Würfel in der Halterung befestigt und nach der in Abbildung 3 gezeigten Projektion bestrahlt. Bei dem ersten Würfel handelt es sich lediglich um eine Hülle aus Aluminium. Die nächsten zwei Würfel sind zusätzlich homogen gefüllt. Diese werden jeweils aus sechs Richtungen (I_1, \dots, I_6) bestrahlt und die entsprechenden Absorptionsspektren aufgenommen. Als letztes wird ein Würfel unbekannter Zusammensetzung untersucht, indem dieser aus allen 12 Richtungen der Projektion aus Abbildung 3 bestrahlt wird.

4 Auswertung

Die im Folgenden genannten Intensitäten ergeben sich aus dem Flächeninhalt des Peaks bei einer Energie von 661,7 eV im Absorptionsspektrum, da es sich dabei um die Energie der verwendeten Cs-Lampe handelt [2].

Die gemessenen Intensitäten für die vier ausgemessenen Würfel sind in Tabelle 1 aufgetragen. Dabei beschreiben die Intensitäten für den ersten Würfel, also nur die Aluminium-Hülle, die Grundintensität I_0 .

Tabelle 1: Messwerte der Absorptionsmessungen für eine Messzeit von jeweils $\Delta t = 300$ s. i beschreibt die in Abbildung 3 gezeigten Bestrahlungsrichtungen.

i	I_0 (Al-Hülle)	I_i (Würfel 2)	I_i (Würfel 3)	I_i (Würfel 4)
1	(56088±279)	(47413±251)	(1800±21)	(46723±254)
2	(55842±282)	(47567±265)	(1033±51)	(184±31)
3	(56650±292)	(47079±268)	(1346±60)	(44259±264)
4	(55866±290)	(47204±266)	(2670±70)	(12147±130)
5	(55383±284)	(44569±252)	(612±13)	(9232±116)
6	(54930±275)	(46910±253)	(2257±60)	(11316±129)
7				(11028±158)
8				(15401±148)
9				(15514±150)
10				(12527±135)
11				(8965±120)
12				(10907±127)

Um die Absorptionskoeffizienten der verschiedenen Würfelmaterialien bestimmen zu können, muss für die drei Messreihen der Intensität I_i das Gleichungssystem 5 gelöst werden. Dabei handelt es sich in der Regel um ein nicht-quadratisches lineares Gleichungssystem. Dieses wird mit der Methode kleinster Quadrate auf eine quadratische Form angenähert und dann nach den Absorptionskoeffizienten μ_j gelöst.

Das Ergebnis dieses Verfahrens für die beiden homogen gefüllten Würfel ist in Tabelle 2 zu sehen. Da es sich dabei eben um homogene Würfel handelt und diese lediglich mit den Projektionen $i = 1, \dots, 6$ vermessen wurden (siehe Tabelle 1), wird die Geometriematrix

aus Gleichung 5 in diesem Fall wie folgt vereinfacht.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Tabelle 2: Berechnete Absorptionskoeffizienten für die neun Teilwürfel der zwei homogenen Würfel.

μ / cm^{-1} (Würfel 2)	Abw. / % (Delrin)	μ / cm^{-1} (Würfel 3)	Abw. / % (Blei)
$(0,055 \pm 0.003)$	52,16	(1.152 ± 0.010)	7,85

Von den uns gegebenen möglichen Materialien, ähnelt Würfel 2 vom Absorptionskoeffizienten her Delrin ($\mu_{\text{Delrin}} = 0.116 \text{ cm}^{-1}$) und Würfel 3 dem von Blei ($\mu_{\text{Blei}} = 1.2497 \text{ cm}^{-1}$). Die Abweichungen der Absorptionskoeffizienten sind ebenfalls in der Tabelle ablesbar.

Da im Falle des letzten Würfels in in allen 12 Orientierungen gemessen wurde ($i = 1, \dots, 12$), die Grundintensität I_0 jedoch lediglich in 6 Richtungen ($i = 1, \dots, 6$) (siehe Tabelle 1) gemessen wurde, wurden die Messwerte für die fehlenden 6 Orientierungen ($i = 6, \dots, 12$) beim leeren Würfel von den ersten 6 übernommen. Diese Einzelmessungen sind daher nicht mehr unabhängig voneinander. Unter Beachtung der Korrelation dieser Einzelmessungen, wurde die Lösung für die Absorptionskoeffizienten mittels der Methode kleinster Quadrate gefunden und ist in Tabelle 3 aufgetragen.

Tabelle 3: Berechnete Absorptionskoeffizienten für den inhomogen gefüllten Würfel.

j	μ_j / cm^{-1} (Würfel 4)	Material	Abweichung / %
1	$(-0,17 \pm 0,08)$	/	/
2	$(-0,28 \pm 0,08)$	/	/
3	$(0,04 \pm 0,08)$	Delrin	68,97
4	$(1,63 \pm 0,10)$	Blei	30,40
5	$(1,64 \pm 0,11)$	Blei	31,56
6	$(1,57 \pm 0,10)$	Blei	25,43
7	$(-0,12 \pm 0,08)$	/	/
8	$(-0,30 \pm 0,08)$	/	/
9	$(0,07 \pm 0,08)$	Delrin	39,91

Den negativen Lösungen für die Absorptionskoeffizienten werden keine Materialien zugeordnet. Auf mögliche Gründe dafür wird in der Diskussion eingegangen. Die Materialien und die Abweichungen für die restlichen Absorptionskoeffizienten sind in Tabelle 3 eingetragen.

5 Diskussion

Die besonders großen Abweichungen beim ersten Würfel, können darauf zurückzuführen sein, dass es sich bei dem Material um keines der uns gegebenen Materialien handelt, sondern um eines mit einem noch geringeren Absorptionskoeffizienten, wie z.B. Holz. Das würde die Vielzahl an Lösungen erklären mit einem $\mu < 0.1 \text{ cm}^{-1}$.

Bei der Messung beim zweiten Würfel konnte mit einer Messzeit von 300s nicht auf eine Intensität von über 10000 Counts gestoßen werden. Deswegen weist diese Messung eine deutlich schlechtere Statistik auf als die Messung davor. Dennoch liegen die Messwerte erstaunlich nahe beieinander und die Abweichung zum Absorptionskoeffizienten von Blei ist nicht allzu hoch.

Beim zusammengesetzten Würfel ist erkenntlich, dass dieser aus zwei verschiedenen Materialien zusammengebaut ist. Die Teilwürfel 4,5,6 und 3,9 bestehen jeweils aus dem selben Material und diese passen in etwa mit den Materialien der homogenen Würfel zusammen. Die teilweise negativen Absorptionskoeffizienten lassen auf Leerstellen im letzten Würfel zurückführen.

Im Allgemeinen konnte der Strahlengang lediglich per Augenmaß justiert werden und die Position des Würfels in dem Strahlengang konnte dementsprechend nicht exakt eingestellt werden, was zu systematischen Abweichungen führen konnte.

Literatur

- [1] Werner Stolz. *Radioaktivität*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2003. DOI: 10.1007/978-3-663-01497-3.
- [2] Gordon R. Gilmore. *Practical Gamma-Ray Spectrometry*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 18. Apr. 2008. DOI: 10.1002/9780470861981.
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V14 - Tomographie mit Gamma-Strahlung*. 2021.