

Der Compton-Effekt

Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Bearbeitet am 01.05.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Compton-Effekt	3
2.2	Röntgenstrahlung	4
2.3	Bragg-Reflexion	5
2.4	Geiger-Müller-Zählrohr	6
3	Durchführung	6
3.1	Aufnahme des Röntgenspektrums	6
3.2	Bestimmung der Wellenlängenabhängigkeit der Transmission	6
3.3	Bestimmung der Compton-Wellenlänge	7
4	Auswertung	8
4.1	Röntgenspektrum	8
4.2	Wellenlängenabhängigkeit der Transmission	10
4.3	Bestimmung der Compton-Wellenlänge	11
5	Diskussion	12
6	Literaturverzeichnis	14

1 Zielsetzung

Im Experiment zum Compton-Effekt soll die Compton-Wellenlänge über die Differenz von ungestreuten Photonen und um 90° gestreuten Compton-Photonen bestimmt werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Compton-Effekt

Wenn ein Photon auf ein freies Elektron trifft, findet ein quasi elastischer Stoß statt. Dabei wird ein Teil des Impulses sowie ein Teil der Energie des Photons an das Elektron übertragen. Aufgrund des Energieverlustes des Photons vergrößert sich dessen Wellenlänge. Dies ist in Gleichung 1 zu sehen.

$$E_{\text{Photon}} = \frac{hc}{\lambda} \quad (1)$$

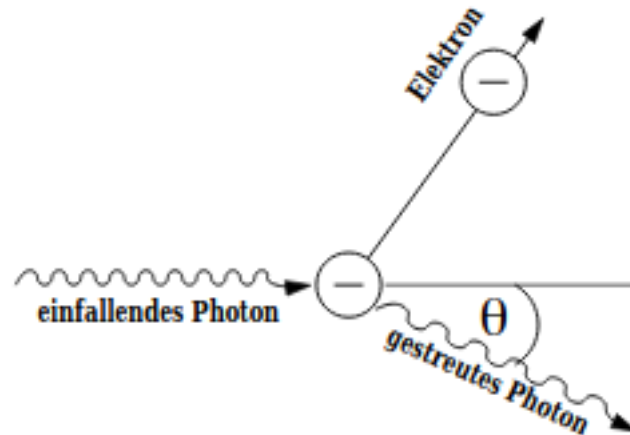
Die Differenz der Wellenlängen des Photons vor λ_1 und nach dem Stoß λ_2 lässt sich über die beim elastischen Stoß geltenden Impuls- und Energierhaltung nach Gleichung 2 berechnen.

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{h}{c \cdot m_e} \cdot (1 - \cos(\theta)) = \lambda_C \cdot (1 - \cos(\theta)) \quad (2)$$

Dabei bezeichnet λ_C die Compton Wellenlänge, die eine konstante ist. Aus der Gleichung lässt sich erkennen, dass die Wellenlängendifferenz und somit die vom Photon abgegebene Energie vom Streuwinkel θ abhängt. Die Wellenlängendifferenz wird für einen Streuwinkel von π , was einer Reflexion entspricht, maximal. Für einen gegen Null laufenden Streuwinkel geht auch die Wellenlängendifferenz gegen Null und die Compton-Streuung tritt quasi nicht mehr auf.

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\max} &= 2 \cdot \lambda_C && \text{bei} && \theta = \pi \\ \Delta\lambda_{\min} &\rightarrow 0 && \text{für} && \theta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbildung 1: In der Abbildung ist der Compton Effekt skizziert. Der eingezeichnete Winkel θ ist der Streuwinkel des Photons.[1]



Dieser Effekt kann bei freien Elektronen für Photonen aller Energien auftreten. Jedoch ist die Wellenlänge sichtbaren Lichts so viel größer als die Compton-Wellenlänge (Faktor 10^5), dass nach der Streuung quasi kein Wellenlängenunterschied zu messen wäre. Zudem tritt der Compton-Effekt auch bei in Festkörpern befindlichen Elektronen statt, wenn die Photonenenergie ausreicht, um diese zu lösen. Dies ist bei Röntgen- oder γ -Strahlung der Fall. Die Photonen des sichtbaren Spektrums haben dafür zu wenig Energie.

2.2 Röntgenstrahlung

Die für den Versuch verwendete Röntgenstrahlung wird in einer Röntgenröhre erzeugt. Dazu werden zunächst Elektronen über eine Heizspannung aus einem Glühdraht hinausgelöst und dann durch eine Spannung beschleunigt. Die so beschleunigten Elektronen treffen auf eine Anode und es wird Röntgenstrahlung ausgesendet. Das ausgesendete Spektrum setzt sich aus charakteristischen Peaks und einem kontinuierlichen Bremsspektrum zusammen.

Bremsspektrum

Das kontinuierliche Bremsspektrum entsteht, wenn die Elektronen sich dem Kern eines Kathodenatoms nähern und dabei durch dessen elektrisches Feld abgebremst werden. Da den Elektronen hierbei eine Beschleunigung widerfährt, verlieren sie ihre kinetische Energie und senden diese als Röntgenphoton aus. Die kleinste Wellenlänge entspricht dabei der Bremsstrahlung der schnellsten Elektronen und hängt von der Beschleunigungsspannung ab.

Charakteristische Strahlung

Zu der Bremsstrahlung kommen noch Peaks, die vom Anodenmaterial abhängen. Sie entstehen, wenn ein Elektron des Atoms des Kathodenmaterials auf ein höheres Energieniveau angeregt wird und dann wieder auf ein niedrigeres Energieniveau zurückspringt. Dabei wird exakt die Energiedifferenz zwischen den beiden Energieniveaus als Röntgenquant abgestrahlt und es entsteht ein Peak im Spektrum.

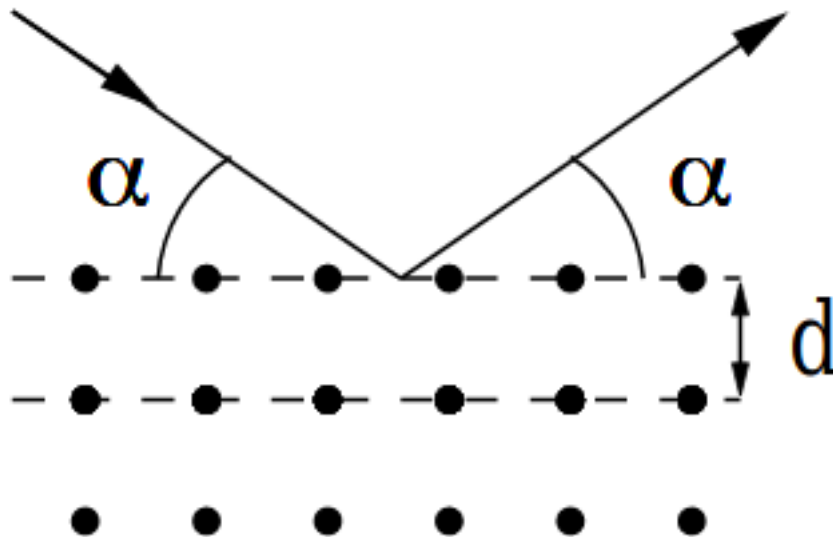
2.3 Bragg-Reflexion

Um im Experiment die Wellenlänge der Röntgenstrahlung zu bestimmen wird von der Bragg-Reflexion Gebrauch gemacht. Bei dieser fällt Röntgenstrahlung auf ein Material mit Gitterstruktur und wird dabei an den einzelnen Atomen gebeugt. Die Röntgenstrahlung interferiert nun mit sich selbst innerhalb des Gitters. Die zugehörige konstruktive Interferenz findet sich beim Bragg-Winkel α , der über Formel 3 mit der Wellenlänge der einfallenden Röntgenstrahlung verknüpft ist. Die notwendige Gitterstruktur ist zum Beispiel in Kristallen gegeben.

$$2 \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{hc}{E} \quad (3)$$

Der Abstand zwischen den Atomen im Gitter fließt über die Gitterkonstante d in die Formel ein.

Abbildung 2: In der Abbildung ist die Bragg-Reflexion skizziert. Der Winkel α ist der Bragg-Winkel und d die Gitterkonstante.[1]



2.4 Geiger-Müller-Zählrohr

Zur Messung der Impulsrate wird ein Geiger-Müller-Zählrohr genutzt. Dieses besteht aus einem mit gefülltem Zylinder, dessen Wand eine große Kathode ist. Im Zentrum des Zylinders befindet sich eine Stabanode. Wenn nun ionisierende Strahlung in den Zylinder strahlt, treffen die Photonen auf Gasatome und ionisieren diese. Die dabei frei werdenden Elektronen treffen auf den Anodenmantel und werden als einzelner Impuls registriert. Jedes ionisierte Gasatom wandert zur Stabanode, um neutral geladen zu werden und so wieder ionisierbar zu sein. Daraus folgt das Problem der Totzeit. Es tritt auf, wenn die Intensität der Strahlung so hoch ist, dass alle Atome ionisiert sind und so nicht die gesamten Impulse gemessen werden. So würde die gemessene Impulsrate trotz kontinuierlich steigender Strahlungsintensität gegen einen Grenzwert laufen. Dieser Effekt wird über die Totzeitkorrektur 4 behoben. Dabei beschreibt I die korrigierte Impulsrate, N die Impulsrate und τ die Totzeit.

$$I = \frac{N}{1 - \tau \cdot N} \quad (4)$$

3 Durchführung

3.1 Aufnahme des Röntgenspektrums

Um die für den Compton-Effekt notwendige Röntgenstrahlung zu erzeugen, wird eine Kupfer-Röntgenröhre benutzt, die wie bereits beschrieben ein ganzes Spektrum an Röntgenstrahlung aussendet. In diesem Fall verwendet die Röntgenröhre eine Kupferanode zur Röntgenerzeugung und beschleunigt die Elektronen fortlaufend mit 35kV. Um das Spektrum der erzeugten Röntgenstrahlung darzustellen, wird ein Lithiumfluoridkristall in einem Winkel in den Röntgenstrahl gestellt. Das Geiger-Müller-Zählrohr wird im doppelten Winkel des Kristalls zu diesem ausgerichtet. So wird die Bragg-Reflexion ausgenutzt und das Geiger-Müller-Zählrohr misst nur die Impulsrate eines speziellen Braggwinkels, dem über Formel 3 eine Wellenlänge des Röntgenspektrums zugeordnet werden kann. Die Messreihe wird in $0,1^\circ$ Schritten von 8° bis 25° aufgenommen und soll so das gesamte Bremsspektrum, sowie die charakteristischen Peaks aufnehmen.

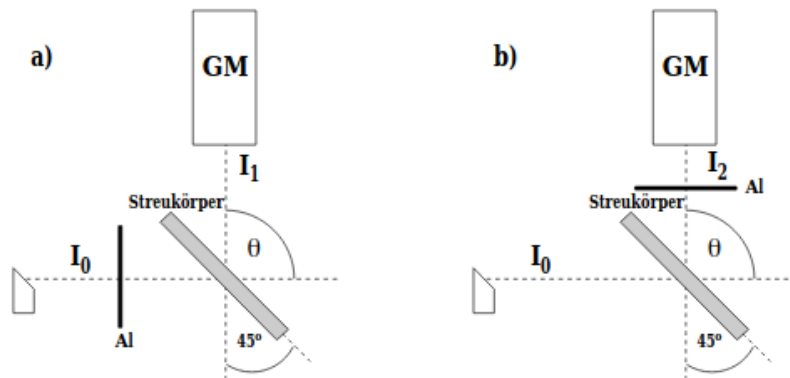
3.2 Bestimmung der Wellenlängenabhängigkeit der Transmission

Für die spätere Bestimmung der Compton-Wellenlänge muss zunächst die Abhängigkeit der Transmission von der Wellenlänge bestimmt werden. Dazu wird dem Aufbau zur Aufnahme des Röntgenspektrums ein Aluminium-Absorber hinzugefügt, der zunächst vor der Blende der Röntgenröhre platziert wird. Dann wird wieder der Anstellwinkel des Kristalls zum Röntgenstrahl von 7° bis 10° in $0,1^\circ$ Schritten variiert und dabei die Impulsrate der Bragg reflektierten Strahlung gemessen. Dieselbe Messung wird ohne eingesetzten Aluminium-Absorber wiederholt, um in der Auswertung die Transmission des Aluminium- Absorbers zu bestimmen.

3.3 Bestimmung der Compton-Wellenlänge

Bei der Messung der Impulsrate der Compton-gestreuten Photonen werden nur die um 90° gestreuten Photonen gemessen, indem das Geiger-Müller-Zählrohr in eben jenen 90° Grad zum Röntgenstrahl platziert wird. Zunächst muss die Grundimpulsrate I_0 der Compton-gestreuten Photonen aus der Röntgenröhre gemessen werden. Dazu wird ohne Einsatz eines Absorbers die an einem Plexiglas gestreute Röntgenstrahlung gemessen. Der Plexiglas-Streuer wird dazu in einem 45° Winkel in dem Röntgenstrahl platziert und es wird eine Impulsrate aufgenommen. Daraufhin wird der Aluminium-Absorber vor die Blende gesetzt und bei restlich gleich bleibendem Aufbau wieder eine Impulsrate I_1 gemessen. Zuletzt wird der Aluminium-Absorber zwischen das Geiger-Müller-Zählrohr und den Plexiglas-Streuer gesetzt und wieder bei restlich gleich bleibendem eine Impulsrate I_2 gemessen.

Abbildung 3: In der Abbildung ist der Aufbau zur Messung der Impulsraten der gestreuten Strahlung zu sehen. Während in Teil a) der Aufbau zur Messung von I_1 und in Teil b) der zu I_2 dargestellt ist, entspricht der Aufbau zur Messung I_0 beiden gezeigten bei Entfernung des Aluminium-Absorbers.[1]



4 Auswertung

In der gesamten Auswertung werden Ungenauigkeiten von Werten, die von fehlerbehafteten Größen abhängig sind, über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung für n fehlerbehaftete Größen x_i berechnet.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad (5)$$

4.1 Röntgenspektrum

Zunächst werden die zur K_α und zur K_β gehörigen Wellenlängen über die literarischen Werte der zugehörigen Energien [2] berechnet, indem Formel 1 nach der Wellenlänge umgestellt wird.

$$\lambda = \frac{hc}{E_{K_\alpha}} \approx 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad \text{mit } E_{K_\alpha} = 8038 \text{ eV} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_{K_\beta}} \approx 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad \text{mit } E_{K_\beta} = 8905 \text{ eV} \quad (7)$$

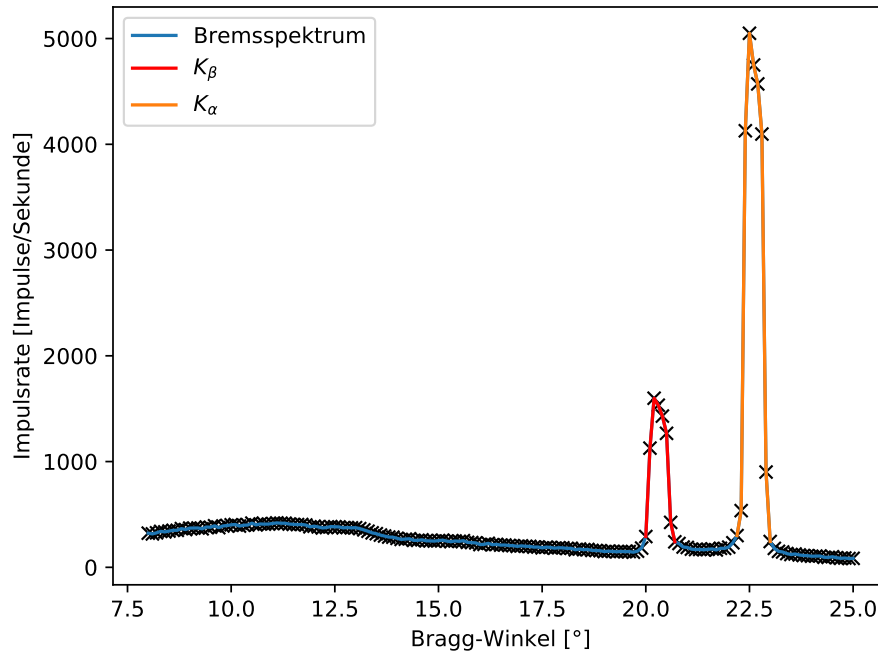
Zudem werden die Bragg-Winkel ausgerechnet, bei denen die zu der K_α und zur K_β gehörigen Wellenlängen bragg reflektiert werden, sodass die Linien später einfacher im Diagramm identifiziert und verglichen werden können. Dazu wird die Bragg-Bedingung 3 bei $n=1$ nach α umgestellt. Bei Verwendung eines Lithiumfluoridkristalls beträgt der Netzebenenabstand $d = 201,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ und es ergeben sich folgende Winkel:

$$\alpha_{K_\alpha} = \sin^{-1} \left(\frac{hc}{2d \cdot 8038 \cdot \text{eV}} \right) \approx 23^\circ \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{hc}{E} \quad (8)$$

$$\alpha_{K_\beta} = \sin^{-1} \left(\frac{hc}{2d \cdot 8905 \cdot \text{eV}} \right) \approx 21^\circ \quad (9)$$

Das experimentell gemessene Spektrum wird dargestellt, indem die Impulsrate gegen den Bragg-Winkel α aufgetragen werden. Die zugehörige Messreihe findet sich im Anhang.

Abbildung 4: In der Abbildung ist das Strahlungsspektrum der Kupfer-Röntgenröhre zu sehen. Die Impulsrate wird gegen den Bragg-Winkel aufgetragen, der in Verbindung zur Wellenlänge steht. Neben dem kontinuierlichen Bremspektrum, das über das gesamte Winkelintervall geht, sind auch die beiden charakteristischen Peaks K_β bei $20,2^\circ$ und K_α bei $22,5^\circ$ gut zu erkennen.



Über eine Scipy-Funktion wurden die Maxima der charakteristischen Strahlung wie folgt bestimmt.

$$\alpha_{K_\alpha} = 22,5^\circ \qquad \alpha_{K_\beta} = 20,2^\circ \qquad (10)$$

Zum Vergleich mit den Literaturenergien wird diese aus den ermittelten Winkel über die nach E umgestellte Formel 3 berechnet.

$$E = \frac{hc}{2 \cdot d \cdot \sin(\alpha)} \quad \text{mit} \quad d = 201,4 \cdot 10^{(-12)} \text{ m} \qquad (11)$$

$$E_{K_\alpha} = 8043 \text{ eV} \qquad (12)$$

$$E_{K_\beta} = 8914 \text{ eV}$$

4.2 Wellenlängenabhängigkeit der Transmission

Nun wird die Transmission des Aluminiumabsorbers gegen die Wellenlänge aufgetragen. Dazu müssen zum einen die Impulsraten N_1 und N_0 über die Totzeitkorrektur 4 in die korrigierte Impulsrate und der Winkel über die umgestellte Bragg-Bedingung 13 in die Wellenlänge umgerechnet werden. Zuletzt muss die Transmission aus dem Quotienten von I_1 und I_0 berechnet werden.

$$\lambda = 2dn \cdot \sin(\alpha) \quad \text{mit} \quad d = 201,4 \cdot 10^{(-12)} \text{ m}, \quad n = 1 \quad (13)$$

$$T = \frac{I_1}{I_0} \quad (14)$$

Die gemessenen und korrigierten Werte finden sich im Anhang 1 und werden nun in einem Diagramm aufgetragen. Zudem wird eine Ausgleichgerade durch die Werte gelegt, die auf folgender Geradengleichung beruht:

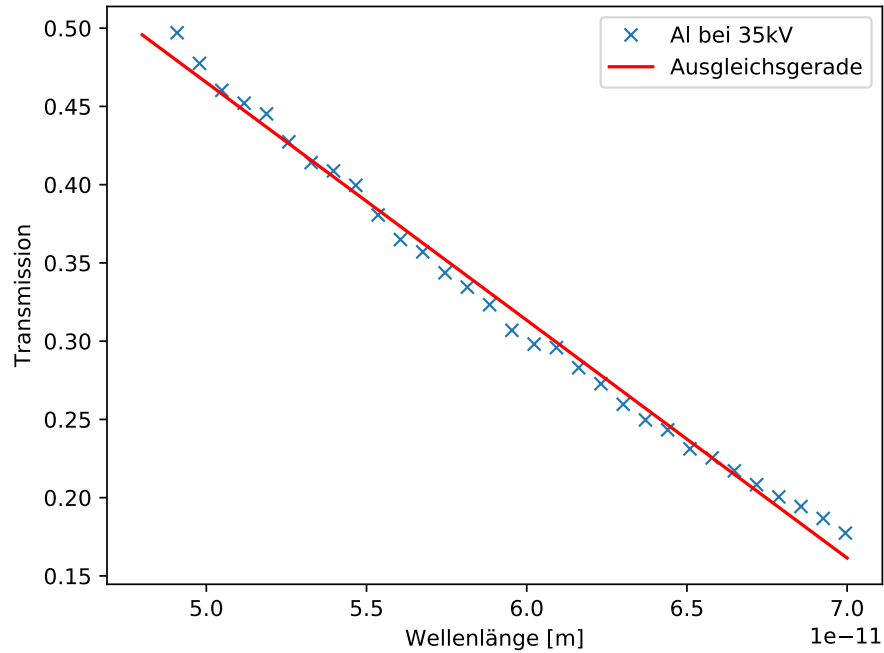
$$T(\lambda) = m \cdot \lambda + b \quad (15)$$

mit folgenden Parametern, deren Abweichung der Covarianzmatrix der linearen Regression entspringt.

$$m = (-1,519 \pm 0.024) \cdot 10^{(-10)} \frac{1}{\text{m}} \quad (16)$$

$$b = 1.225 \pm 0.014 \quad (17)$$

Abbildung 5: In der Abbildung ist die Wellenlängenabhängigkeit der Transmission des Aluminiumabsorbers zu sehen. Um den linearen Zusammenhang in der Auswertung besser nutzen zu können, wird zudem eine lineare Regression mit angegebenen Parametern 15 über die Messwerte gelegt.



4.3 Bestimmung der Compton-Wellenlänge

Mit den nun bereitstehenden Grundlagen wird die Compton-Wellenlänge bestimmt. Indem die Impulse von nicht gestreuten $I_{\text{ungestreut}}$ und compton-gestreuten I_{gestreut} Photonen über Formel 14 in die entsprechende Transmission des Aluminiumabsorbers umgerechnet werden. Dabei bezeichnet I_{norm} die Impulse bei gleichem Streuwinkel ohne Aluminiumabsorber. Da die Anzahl der Impulse poisson-verteilt ist, kann der entsprechende Fehler über die Wurzel des Wertes berechnet werden.

$$\Delta I = \sqrt{I}$$

$$\begin{aligned} I_{\text{norm}} &= (2730 \pm 50) \text{ Impulse} \\ I_{\text{ungestreut}} &= (1180 \pm 34) \text{ Impulse} \\ I_{\text{gestreut}} &= (1024 \pm 32) \text{ Impulse} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\text{ungestreut}} &= \frac{I_{\text{ungestreut}}}{I_{\text{norm}}} = 0,432 \pm 0,015 \\
T_{\text{gestreut}} &= \frac{I_{\text{gestreut}}}{I_{\text{norm}}} = 0,375 \pm 0,014
\end{aligned} \tag{18}$$

Der zugehörige Fehler ergibt sich nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wie folgt:

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I_{\text{norm}}}\right)^2 + \left(\frac{I \cdot \Delta I_{\text{norm}}}{I_{\text{norm}}^2}\right)^2}$$

Die den Transmissionen zugehörigen Wellenlängen werden durch Umstellen von 15 nach λ und Einsetzen von $T_{\text{ungestreut}}$ und T_{gestreut} 18 ermittelt. Auch deren Fehler ergibt sich aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung.

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda &= \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{m}\right)^2 + \left(-\frac{T-b}{m^2} \cdot \Delta m\right)^2} \\
\lambda &= \frac{T-1,22}{-15 \cdot 10^{(-9)}} m \\
\lambda_{\text{ungestreut}} &= (52,2 \pm 1,6) \cdot 10^{(-12)} m \\
\lambda_{\text{gestreut}} &= (55,9 \pm 1,6) \cdot 10^{(-12)} m
\end{aligned} \tag{19}$$

Da der Streuwinkel bei dem Messaufbau 90° beträgt, entspricht die Compton-Wellenlänge λ_c der Differenz von $\lambda_{\text{gestreut}}$ und $\lambda_{\text{ungestreut}}$.

$$\Delta \lambda = \lambda_{\text{gestreut}} - \lambda_{\text{ungestreut}} = \lambda_c \cdot (1 - \cos(\theta))$$

$$\lambda_c = \lambda_{\text{gestreut}} - \lambda_{\text{ungestreut}} = (3,8 \pm 1,1) \cdot 10^{(-12)} m \quad \text{mit} \quad \theta = 90^\circ \tag{20}$$

5 Diskussion

Zunächst ist die Aufnahme des Röntgenspektrums der Kupfer-Röntgenröhre als gelungen zu bezeichnen. Im Spektrum ist die kontinuierliche Bremsstrahlung klar neben den charakteristischen Peaks zu erkennen. Die Energien der gemessenen Peaks 12 weichen zudem nur geringfügig von den Literaturwerten [2] ab, die K_α -Energie um 0,07 % , die K_β -Energie um 0,1 %. Die anschließende Bestimmung der Compton-Wellenlänge ergibt eine Wellenlänge 20, die um $(35 \pm 15)\%$ von dem theoretisch berechneten Wert 2 abweicht. Diese Ungenauigkeit könnte auf eine ungenaue Bestimmung der Transmission in Abhängigkeit von der Wellenlänge zurückgeführt werden. Jedoch wurde bei dieser Messung die Totzeitkorrektur durchgeführt und es ergab sich auch ein deutlicher linearer Zusammenhang. Die Frage, ob bei der Messung zur Bestimmung der Compton-Wellenlänge eine

Totzeitkorrektur hätte durchgeführt werden müssen, kann mit nein beantwortet werden. Dies ist damit zu begründen, dass im gewählten Messbereich von 7° bis 10° nur kleine Zählraten auftreten und die Totzeitkorrektur nur für hohe Zählraten notwendig ist 2.4. Letztendlich ist der Fehler vermutlich darauf zurückzuführen, dass die hochenergetische Röntgenstrahlung auch am Aluminiumabsorber Compton streut und dabei womöglich Photonen in das Geiger-Müller-Zählrohr gestreut werden.

6 Literaturverzeichnis

- [1] *Versuchsanleitung V603 - Compton-Effekt*. TU Dortmund, 2020
- [2] PHYWE Systeme GmbH & Co. KG: *Charakteristische Röntgenstrahlung von Kupfer*
03.Mai.2020 http://www.phywe-ru.com/index.php/fuseaction/download/lrn_file/versuchsanleitungen/P2540101/d/p2540101d.pdf

Tabelle 1: In der Tabelle sind zum einen die primären Messdaten wie der Bragg-Winkel und die zugehörigen Zählraten mit N_1 und ohne Aluminiumabsorber N_2 . Zusätzlich sind auch die daraus berechneten Größen aufgelistet. Die Wellenlänge wird aus dem Bragg-Winkel berechnet 13, die korrigierten Impulsraten I_0 und I_1 aus den Impulsraten 4 und die Transmission T wiederum aus eben diesen korrigierten Impulsraten 14.

Bragg-Winkel [°]	Wellenlänge [pm]	N_0 [Imp/s]	I_0 [Imp/s]	N_1 [Imp/s]	I_1 [Imp/s]	T
7.0	49,1	226.0	230,7	113,5	114,7	0,50
7.1	49,8	232.0	237,0	112,0	113,1	0,48
7.2	50,5	240.5	245,8	112,0	113,1	0,46
7.3	51,2	248.0	253,7	113,5	114,7	0,45
7.4	51,9	255.0	261,0	115,0	116,2	0,45
7.5	52,6	262.0	268,3	113,5	114,7	0,43
7.6	53,3	269.0	275,7	113,0	114,2	0,41
7.7	54,0	276.0	283,0	114,5	115,7	0,41
7.8	54,7	281.0	288,3	114,0	115,2	0,40
7.9	55,4	289.5	297,2	112,0	113,1	0,38
8.0	56,1	295.0	303,0	109,5	110,6	0,36
8.1	56,8	300.0	308,3	109,0	110,1	0,36
8.2	57,5	308.5	317,3	108,0	109,1	0,34
8.3	58,2	311.0	320,0	106,0	107,0	0,33
8.4	58,9	317.0	326,3	104,5	105,5	0,32
8.5	59,6	324.0	333,7	101,5	102,4	0,31
8.6	60,3	328.5	338,5	100,0	101,0	0,30
8.7	61,0	332.5	342,8	100,5	101,4	0,30
8.8	61,7	337.0	347,5	97,5	98,4	0,28
8.9	62,4	340.5	351,3	95,0	95,8	0,27
9.0	63,1	348.0	359,3	92,5	93,3	0,26
9.1	63,7	350.0	361,4	98,5	90,2	0,25
9.2	64,4	353.0	364,6	88,0	88,7	0,24
9.3	65,1	356.5	368,3	84,5	85,1	0,23
9.4	65,8	359.0	371,0	83,0	83,6	0,23
9.5	66,5	363.5	375,8	81,0	81,6	0,22
9.6	67,2	367.0	379,5	78,5	79,1	0,21
9.7	67,9	369.0	381,7	76,0	76,5	0,20
9.8	68,6	370.5	383,3	74,0	74,5	0,19
9.9	69,3	375.0	388,1	72,0	72,5	0,19
10.0	70,0	375.5	388,6	68,5	68,9	0,18