

# **Gekoppelte elektrische Schwingungen**

David Gutnikov  
david.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann  
lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 14.01.2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise . . . . .	3
2.2	Frequenzabhängigkeit des Stroms im kapazitiv gekoppelten Schwingkreis .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
3.1	Justierung . . . . .	7
3.2	Energieaustausch . . . . .	7
3.3	Messung der Fundamentalfrequenzen . . . . .	8
3.4	Messung des frequenzabhängigen Stromverläufe . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1	Resonanzfrequenz aus Justierung . . . . .	9
4.2	Frequenzverhältnis von Schwebung und Überlagerungsschwingung . . . .	9
4.3	Bestimmung der Fundamentalfrequenzen . . . . .	10
4.4	Abhängigkeit des Stromes von den Fundamentalfrequenzen . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>13</b>

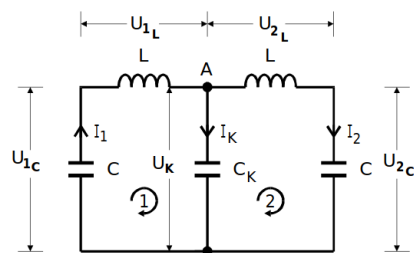
# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das Verhalten von gekoppelten Schwingkreisen genauer untersucht werden. Dazu werden nun elektrische Schwingkreise genutzt, da deren Verhalten weitaus besser zu messen ist, als das eines mechanischen Schwingungssystems.

## 2 Theorie

### 2.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Abbildung 1: Das Schaltbild zur Erzeugung einer kapazitiv gekoppelten Schwingung. [1]



Ein kapazitiv gekoppelter Schwingkreis besteht aus zwei einzelnen Schwingkreisen, die über einen Kondensator gekoppelt sind. In diesem Versuch werden dazu zwei LC-Schwingkreise verwendet, die wie in Abbildung 1 zu sehen geschaltet sind. Die Spulen haben hierbei dieselben Induktivitäten und auch die Kapazitäten des linken und rechten Kondensators gleichen sich. Um nun die Differentialgleichungen des Systems zu bestimmen, müssen zunächst die Zeitabhängigkeiten der Ströme und Spannungen betrachtet werden. Eine allgemeine Betrachtung der Ströme, über die Kirchhoffsche Knotenregel, in Punkt A ergibt für die Ströme:

$$I_1 = I_k + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Die allgemeine Betrachtung der Spannungen in den Maschen 1 und 2 über die Kirchhoffsche Maschenregel liefert für beide Maschen:

$$U_C + U_L U_K = 0$$

Durch Einsetzen der Zusammenhänge

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt$$

$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

und unter Berücksichtigung von Beziehung 1 ergibt sich nach einer zeitlichen Ableitung

pro Schwingkreis eine Differentialgleichung.

$$\text{Schwingkreis 1:} \quad L\ddot{I}_1 + \frac{I_1}{C} + \frac{(I_1 - I_2)}{C_k} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Schwingkreis 2:} \quad L\ddot{I}_2 + \frac{I_2}{C} - \frac{(I_1 - I_2)}{C_k} = 0 \quad (3)$$

Um homogene Differentialgleichungen zu erhalten werden nun die Differenz oder Summe der Ströme  $I_1$  und  $I_2$  betrachtet. Dies gelingt durch einfaches Addieren bzw. Subtrahieren der beiden Gleichungen 3. Die sich dadurch ergebenden homogenen Differentialgleichungen

$$\text{Stromsumme :} \quad L \cdot \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} \cdot (I_1 + I_2) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Stromdifferenz :} \quad L \cdot \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \left( \frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right) \cdot (I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

Die Lösung zur Differentialgleichung der Stromsumme entspricht einer harmonischen Schwingung mit der Schwingungsfrequenz:

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1,0} + I_{2,0}) \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (6)$$

$$\nu^+ = (2\pi \cdot \sqrt{LC})^{-1} \quad (7)$$

Diese Schwingungsfrequenz entspricht der eines einzelnen LC-Kreises und die Amplitude der Stromsumme entspricht der Summe der einzelnen Stromamplituden.

Analog dazu schwingt die Lösung der Stromdifferenz mit der Differenz der einzelnen Stromamplituden und mit folgender Frequenz:

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1,0} - I_{2,0}) \cdot \cos\left[\frac{t}{\sqrt{L \cdot \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}}}\right] \quad (8)$$

$$\nu^- = \left[ 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}} \right]^{-1} \quad (9)$$

Um nun die eigentlich gesuchten Funktionen der einzelnen Ströme zu erhalten, muss der vorherige Trick wieder rückgängig, gemacht werden, also die Lösungen der Schwingungen addiert bzw. subtrahiert werden, sodass sich die Lösungen für die einzelnen Ströme ergeben.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^+t) + \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^-t) \quad (10)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^+t) - \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^-t) \quad (11)$$

Eine Betrachtung dieser beiden Differentialgleichungen lässt auf zwei Spezialfälle schließen. Der eine ergibt sich, wenn beide Anfangsamplituden gleich sind. In diesem Fall verschwindet die zweite Fundamentalschwingung nämlich komplett und nur der  $\nu^+$ -Anteil schwingt. Andersherum verschwindet der  $\nu^+$ -Anteil und die erste Fundamentalschwingung, wenn die Anfangsamplituden zwar betragsmäßig gleich sind, jedoch entgegengesetzte Vorzeichen haben. Abgesehen von diesen Fundamentalschwingungen kann es auch zu einer Schwebung kommen, wenn zu Beginn nur einer der Schwingkreise schwingt und die Anfangsamplitude der anderen Schwingung demnach gleich null ist. Für diese Schwebungen ergeben sich folgende Schwingungsgleichungen:

$$I_1(t) = I_{1,0} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad \text{bei } I_{2,0} = 0 \quad (12)$$

$$I_2(t) = I_{1,0} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad (13)$$

Bei der Schwebung ändert sich die Amplitude mit der Schwebungsfrequenz

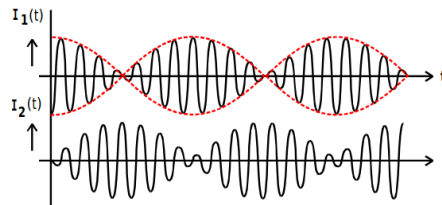
$$\nu_{\text{Schwebung}} = \nu^+ - \nu^- \quad (14)$$

während die eigentliche Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu_{\text{Schwingung}} = \frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-) \quad \text{und bei nahezu gleicher Frequenz} \quad \nu_{\text{Schwingung}} \approx \nu^+ \quad (15)$$

Der Unterschied zwischen diesen zwei Frequenzen ist in Abbildung 2 zu erkennen.

Abbildung 2: Das Schwingverhalten einer Schwebung in der die Schwebungsfrequenz (oben) und die eigentliche Frequenz der Schwingung (unten) zu sehen ist.[1]



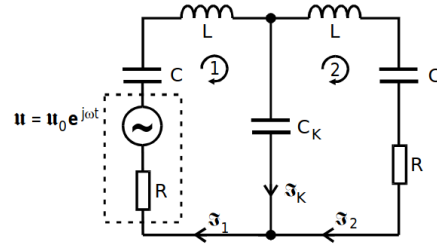
## 2.2 Frequenzabhängigkeit des Stroms im kapazitiv gekoppelten Schwingkreis

Für die in Abbildung 3 zu sehenden Maschen ergeben sich über die Kirchhoffsche Maschenregel folgende Terme:

$$\text{Masche 1} = (Z_C + Z_L + Z_{C_k} + Z_R) \cdot I_1 - Z_{C_k} \cdot I_2 = U \quad (16)$$

$$\text{Masche 2} = (Z_C + Z_L + Z_{C_k} + Z_R) \cdot I_2 - Z_{C_k} \cdot I_1 = 0 \quad (17)$$

Abbildung 3: Das Schaltbild des kapazitiv gekoppelten Schwingkreis bei äußerer Anregung durch einen Sinusgenerator. Die Widerstände stehen dabei für sämtliche in den Schwingkreisen auftretende Verluste. [1]



Dabei stehen die  $Z$ s für die Impedanzen der Kondensatoren, Spulen und Widerstände.

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} \quad Z_L = j\omega L \quad Z_{C_k} = -j \frac{1}{\omega C_k} \quad Z_R = R$$

Durch Eliminieren von  $I_1$  lässt sich aus 17 folgende Formel für den Betrag von  $I_2$  herleiten:

$$|I_2| = |U| \cdot \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_k^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left( \frac{1}{\omega C_k} - \omega C_k Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_k \right)^2}} \quad (18)$$

$$\text{mit} \quad Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_k} \right) \quad (19)$$

Bei zwei Resonanzfrequenzen wird  $I_2$  maximal. Die zugehörigen maximalen Ströme lassen sich wie folgt berechnen:

$$|I(\omega^+)| = |U| \cdot \frac{1}{R \cdot \sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}}} \quad (20)$$

$$|I(\omega^-)| = |U| \cdot \frac{1}{R \cdot \sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC} \cdot \left( 1 + \frac{C}{C_k} \right)}} \quad (21)$$

In der Praxis lassen sich beide Ströme durch

$$|I(\omega^+)| \approx |I(\omega^-)| \approx \frac{1}{2R} \quad (22)$$

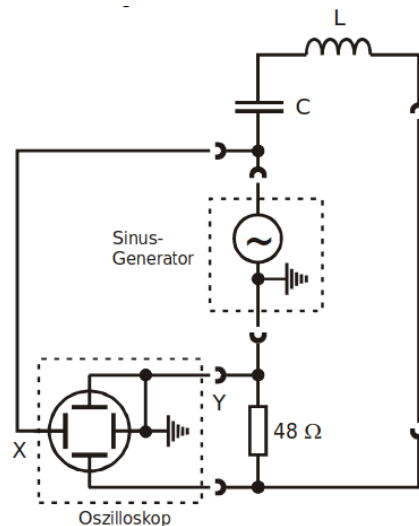
annähern, da der restliche Teil der Wurzelterme vernachlässigbar klein ist.

## 3 Durchführung

### 3.1 Justierung

Gekoppelte Schwingungen basieren darauf, dass die einzelnen Schwinger untereinander Energie übertragen. Damit dieser Prozess vollständig ablaufen kann müssen die beiden Schwingkreise auf dieselbe Resonanzfrequenz justiert werden. Dazu wird zunächst über Schaltung 4 die Resonanzfrequenz des Schwingkreises mit fester Kapazität bestimmt. Dies geschieht indem die Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Schwingkreisstrom gemessen wird. Dazu werden die im XY-Betrieb entstehenden Lissajous-Figuren verwendet, da sie verschwinden, wenn die Resonanzfrequenz erreicht ist. Der andere Schwingkreis wird daraufhin mit derselben Schaltung auf die gemessene Resonanzfrequenz justiert, indem dessen Kapazität variiert wird bis auch hier die Lissajous-Figur zu einer Geraden wird.

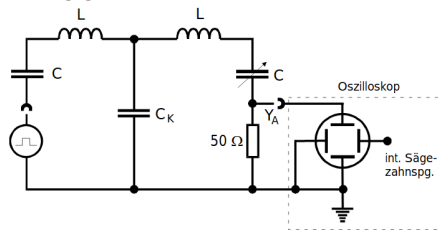
Abbildung 4: Das Schaltbild zur Justierung der beiden Schwingkreise. [1]



### 3.2 Energieaustausch

Zunächst soll der Energieaustausch zwischen den beiden Schwingkreisen beobachtet werden. Hierfür wird einer der Schwingkreise durch ein Rechtecksignal extern angeregt und die Spannung des anderen, nicht angeregten Stromkreises am Oszilloskop dargestellt. Das zugehörige Schaltbild findet sich in Abbildung 5. Auf dem Oszilloskopbild kann die Schwebung direkt erkannt werden und das Verhältnis aus Schwebungs- und Schwingungsfrequenz ermittelt werden, indem die Maxima oder Minima der Schwingung innerhalb einer Schwebung abgezählt werden. Dieses Vorgehen wird für verschiedene Kapazitäten des Koppelkondensators  $C_k$  wiederholt.

Abbildung 5: Das Schaltbild zur Beobachtung des Energieaustauschs zwischen den beiden Schwingkreisen. [1]



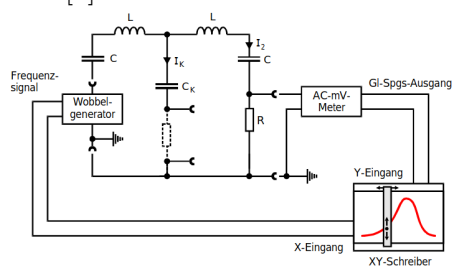
### 3.3 Messung der Fundamentalfrequenzen

Nun sollen die Fundamentalfrequenzen in Abhängigkeit von verschiedenen Kapazitäten des Koppelkondensators  $C_K$  gemessen werden. Dazu wird dieselbe Schaltung genutzt mit dem Unterschied, dass über einen Sinusgenerator angeregt wird. Die Generatorspannung und die des nicht extern angeregten Schwingkreises werden im XX-Betrieb auf das Oszilloskop gegeben und die Frequenz wird wieder über Lissajous-Figuren ermittelt. Sie sind vorhanden, wenn eine Phasenverschiebung von 0 (aufsteigende Gerade auf Oszilloskop) oder  $\pi$  (absteigende Gerade auf Oszilloskop) vorliegt.

### 3.4 Messung des frequenzabhängigen Stromverläufe

Um den Verlauf der Stromstärken zu messen wird eine Schaltung genutzt, die der in Abbildung 8 ähnelt. Der Unterschied liegt darin, dass kein XY-Schreiber vorhanden ist und die Stromstärke daher anders bestimmt werden muss. Daher wird die an R abfallende Spannung für beide Fundamentalschwingungen über ein Oszilloskop gemessen. Dies erfolgt unter Variation der Kapazität des Koppelkondensators. Die Stromstärke wird später über die gemessenen Spannungen und die Widerstände der Schaltung bestimmt.

Abbildung 6: Das Schaltbild zur Beobachtung des Energieaustauschs zwischen den beiden Schwingkreisen. [1]





## 4 Auswertung

Hier wird die zweite Schaltung benutzt und für die einzelnen Messreihen verkabelt. Diese hat folgende Kenngrößen:

Tabelle 1: Die Werte des Schwingkreises für die Induktivität, die Kapazität der Spule und die Kapazität des Kondensators.

$$\begin{aligned} L &= 23,954 \cdot 10^{-3} \text{H} \\ C_{\text{Sp}} &= 0,028 \cdot 10^{-9} \text{F} \\ C &= 0,7932 \cdot 10^{-9} \text{F} \end{aligned}$$

Die Kapazität des Koppelkondensators  $C_K$  ist auf die Werte 0,997 nF, 2,19 nF, 2,86 nF, 4,74 nF, 6,86 nF, 8,18 nF, 9,99 nF, 12,0 nF mit einer Ungenauigkeit von 3% einstellbar. Im Folgenden werden die Unsicherheiten mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt bei  $S$  fehlerbehafteten Größen  $x_n$ .

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{n=1}^S \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \sigma_{x_n} \right)^2} \quad (23)$$

### 4.1 Resonanzfrequenz aus Justierung

Wie schon in der Durchführung der Justierung erwähnt, wird zuerst die Resonanzfrequenz eines Stromkreises mithilfe einer Lissajous-Figur bestimmt und dann die Kapazität am anderen Stromkreis so verändert, dass dieser die gleiche Resonanzfrequenz hat wie der vorherige. Die so bestimmte Resonanzfrequenz des ersten Schwingkreises ist:

$$\nu_{\text{res}} = 35,8 \text{kHz} \quad (24)$$

### 4.2 Frequenzverhältnis von Schwebung und Überlagerungsschwingung

Das Frequenzverhältnis von Schwebung und Überlagerungsschwingung wird über die Anzahl der Maxima in einer Schwebungsperiode ermittelt. Dies wird mit dem Theoriewert verglichen, welcher wie folgt berechnet wird:

$$n_t = \frac{\nu_t^- + \nu_t^+}{2(\nu_t^- - \nu_t^+)} \quad (25)$$

Wobei die beiden Frequenzen der Fundamentalschwingungen  $\nu_t^+$  und  $\nu_t^-$  mit (7) und (9) berechnet werden. Die Abweichung des Frequenzverhältnisses vom theoretischen Wert  $a$  wird berechnet durch:

$$a = \frac{|n - n_t|}{n_t} \quad (26)$$

Tabelle 2: Die Kopplungskapazitäten, die theoretischen Frequenzen der Fundamentalschwingungen, das theoretische Frequenzverhältnis, das experimentell bestimmte Frequenzverhältnis und die Abweichung des Wertes vom Theoriewert.

$C_k/\text{nF}$	$\nu_t^+/\text{kHz}$	$\nu_t^+/\text{kHz}$	$n_t$	$n$	$a/\%$
2,19	35,88	46,55	3,86	3	22,37
2,86	35,88	44,33	4,75	4	15,81
4,74	35,88	41,22	7,22	7	3,08
6,86	35,88	39,76	9,76	9	7,82
8,18	35,88	39,08	11,73	11	6,19
9,99	35,88	38,52	14,09	13	7,75
12,0	35,88	38,10	16,71	16	4,30

### 4.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen

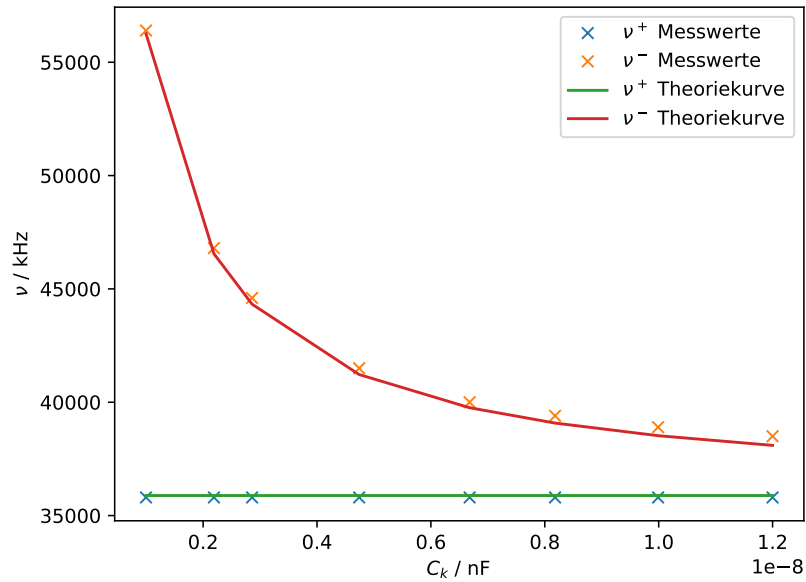
Wie schon in der Durchführung erläutert werden die Fundamentalfrequenzen für die variierte Kopplungskapazität mithilfe von Lissajous-Figuren ermittelt. Die Abweichungen von den Theoriewerten werden berechnet mit:

$$a_\nu = \frac{|\nu - \nu_t|}{\nu_t} \quad (27)$$

Tabelle 3: Die theoretischen und gemessenen Werte für die Fundamentalfrequenzen und ihre Abweichungen.

$C_k/\text{nF}$	$\nu_t^+/\text{kHz}$	$\nu^+/\text{kHz}$	$a_{\nu^+}/\%$	$\nu_t^-/\text{kHz}$	$\nu^-/\text{kHz}$	$a_{\nu^-}/\%$
0,997	35,88	35,8	0,24	56,26	56,4	0,25
2,19	35,88	35,8	0,24	46,55	46,8	0,53
2,86	35,88	35,8	0,24	44,33	44,6	0,62
4,74	35,88	35,8	0,24	41,22	41,5	0,67
6,86	35,88	35,8	0,24	39,76	40,0	0,61
8,18	35,88	35,8	0,24	39,08	39,4	0,82
9,99	35,88	35,8	0,24	38,52	38,9	0,97
12,0	35,88	35,8	0,24	38,10	38,5	1,06

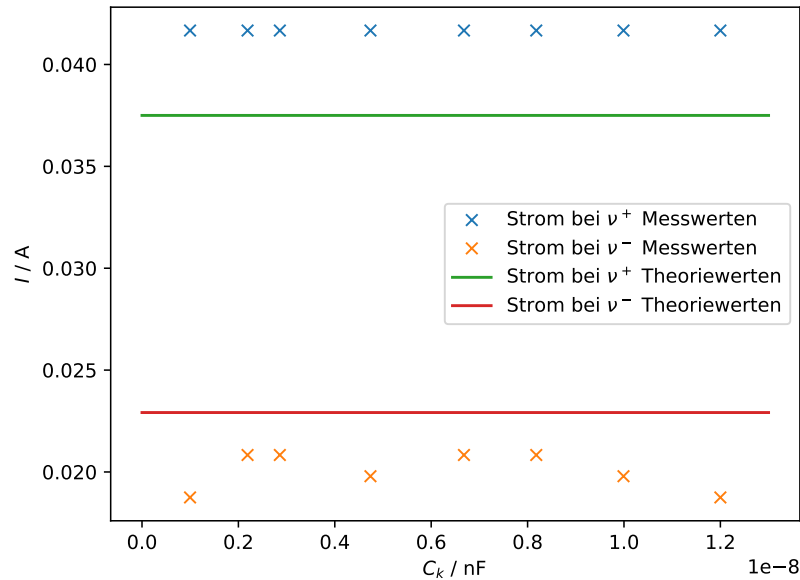
Abbildung 7: Die experimentellen und theoretischen Werte der Fundamentalfrequenzen gegen die Kopplungskapazitäten aufgetragen.



#### 4.4 Abhängigkeit des Stromes von den Fundamentalfrequenzen

Bei den Fundamentalfrequenzen  $\omega^+ = \nu^+ \cdot 2\pi$  und  $\omega^- = \nu^- \cdot 2\pi$  gilt für die beiden Ströme 21 in den beiden Schwingungskreisen siehe 8.

Abbildung 8: Die Ströme bei den Fundamentalfrequenzen gegen die Kopplungskapazitäten aufgetragen.



## 5 Diskussion

Die vergleichsweise großen Abweichungen der beiden ersten Werte bei dem Frequenzverhältnis von Schwebung und Überlagerungsschwingung liegt daran, dass es Ableseschwierigkeiten bei der Anzahl der Maxima bei kleinem Frequenzverhältnis gibt, weil versucht wurde die nächsten ganzzahligen Werte abzulesen. Wie erwartet ist die Resonanzfrequenz  $\nu^+$  unabhängig von der Kopplungskapazität, da über sie keine Energie übertragen wird und deshalb die zwei Schwingkreise als einer angesehen werden. Die Abweichungen der Frequenz bei gegenphasiger Schwingung ist kleiner als 1%, was auf eine ziemlich genaue Messung deutet. Der Vergleich der gemessenen und theoretischen Stromverläufe liefert ebenfalls ein zufriedenstellendes Ergebnis, da die Messwerte nur eine geringe Abweichung von zu einer Konstanten aufweisen und diese auch nahe des y-Wertes der Theoriegeraden liegt. Vorhandene Abweichungen entstehen durch den Dämpfungseffekt der Spule.

## 6 Literaturverzeichnis

- [1] *Versuchsanleitung V355 - Gekoppelte elektrische Schwingungen*. TU Dortmund, 2019