

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

David Gutnikov
david.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 21.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Gedämpfte Schwingung in einem RLC-Schwingkreis	3
2.2	Erzwungene Schwingungen in einem RLC-Schwingkreis	5
3	Durchführung	7
3.1	Frequenzabhängigkeit der Amplitude bei einer gedämpften Schwingung . .	7
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstands beim aperiodischen Grenzfall . .	8
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung in einem Serienresonanz- kreis	8
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erregerspannung und Kondensatorspannung in einem Serienresonanzkreis	9
4	Auswertung	9
4.1	Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude	9
4.2	Widerstand für aperiodischen Grenzfall	11
4.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	12
5	Diskussion	15
6	Literaturverzeichnis	15

1 Zielsetzung

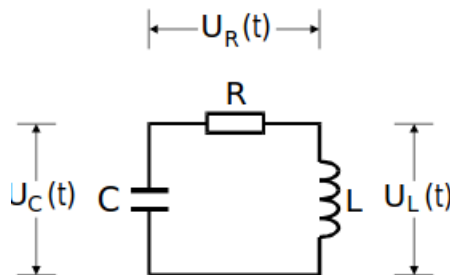
Der Versuch beschäftigt sich mit der genaueren Betrachtung eines LC-Schwingkreises und den ihm stattfindenden Schwingungen. Dazu wird zuerst der effektive Dämpfungswiderstand der gedämpften Schwingung des Schwingkreises über die Zeitabhängigkeit der Amplitude ermittelt. Zusätzlich soll auch der Dämpfungswiderstand ermittelt werden, der bei der Schwingung den aperiodischen Grenzfall hervorruft. Es werden auch zwei Frequenzabhängigkeiten eines Serienresonanzkreises untersucht. Zum einen die Frequenzabhängigkeit der Spannung, die am Kondensator entsteht und die des Phasemunterschieds, der zwischen der anregenden Spannung und der am Kondensator auftritt.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingung in einem RLC-Schwingkreis

In einem LC-Schwingkreis kommt es zu einer Schwingung des Stroms, wenn die Energie durch das System schwingt und entweder im Kondensator oder in der Spule gespeichert wird. Dabei handelt es sich um eine ungedämpfte Schwingung, da hier in der Theorie keine Energie verloren geht. In der Praxis hingegen geht auch in einem LC-Schwingkreis Energie über Eigenwiderstände der Bauteile verloren, sodass die Schwingung mit der Zeit an Energie verliert, sofern keine neue hinzugefügt wird. Die gesamten Eigenwiderstände können als einzelner Widerstand angesehen werden, sodass nun ein RLC-Schwingkreis vorliegt, in dem eine gedämpfte Schwingung ablaufen kann.

Abbildung 1: Das Schaltbild eines RLC-Schwingkreises. [1]



Um das Schwingungsverhalten des RLC-Schwingkreises mathematisch beschreiben zu können, müssen die Abhängigkeiten der Spannungen betrachtet werden. Diese Betrachtung liefert über die Kirchhoffsche Maschenregel folgende Bedingung für die Spannungen an Widerstand, Spule und Kondensator:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

Durch Einsetzen der bekannten Formeln für die Spannungen an den einzelnen Bauteilen und der Definition des Stroms,

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \quad U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad U_L(t) = L \cdot \dot{I} \quad I = \dot{Q} \quad (2)$$

ergibt sich die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung.

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \quad (3)$$

Das Lösen dieser Differentialgleichung über den Schwingungsansatz

$$I(t) = e^{i\omega t}$$

ergibt folgende Formel für die Schwingfrequenz ω :

$$\omega_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4)$$

Da die Wurzel zu zwei unterschiedlichen Frequenzen führt, wird die Lösung der Differentialgleichung durch eine Kombination von E-Funktionen beschrieben.

$$I(t) = A_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{i\omega_2 t} \quad (5)$$

$$\text{wird mit} \quad 2\pi\mu := \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad 2\pi\nu' := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6)$$

$$\text{zu} \quad I(t) = e^{2\pi\mu t} \cdot (A_1 \cdot e^{i2\pi\nu' t} + A_2 \cdot e^{-i2\pi\nu' t}) \quad (7)$$

Dabei müssen 3 Fälle für den Wurzelterm betrachtet werden. Der erste liegt darin, dass der Term innerhalb der Wurzel positiv und diese dementsprechend reell ist. In diesem Fall lässt sich die Formel für den Strom 7 umschreiben zu:

$$I(t) = A_0 \cdot e^{-i2\pi\nu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (8)$$

Dies beschreibt eine gedämpfte Schwingung mit der Schwingungsdauer T und der Abklingzeit T_{ex} .

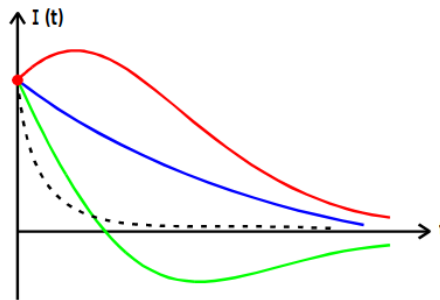
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R} \quad (9)$$

Der zweite Fall liegt vor, wenn der Term in der Wurzel negativ und diese imaginär ist. In diesem Fall ist in der Formel für den Strom kein schwingungserzeugender Teil mehr und der Strom,

$$I(t) \propto e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) \cdot t}, \quad (10)$$

geht, wie in Abbildung 2 zu sehen, mit der Zeit gegen 0. Dies wird Kriechfall genannt.

Abbildung 2: Mögliche Stromverläufe für den Kriechfall einer gedämpften Schwingung. Die schwarze gestrichelte Linie beschreibt den aperiodischen Grenzfall. [1]



Der letzte zu betrachtende Fall liegt beim verschwinden der Wurzel vor, also wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$$

gilt. Dann lässt sich der Strom wie folgt darstellen

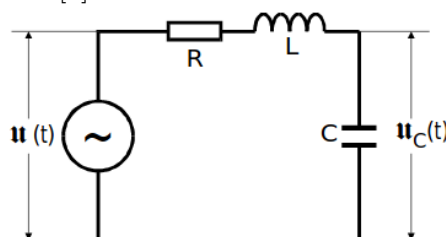
$$I(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}. \quad (11)$$

Dabei fällt der Strom schneller als bei allen anderen Kriechfällen und hat auch keinen Nulldurchgang. Dieser Einzelfall ist in der technischen Anwendung besonders wichtig und heißt aperiodischer Grenzfall.

2.2 Erzwungene Schwingungen in einem RLC-Schwingkreis

Das Verhalten eines von außen, periodisch angeregten Schwingkreises kann durch die Ansteuerung des bekannten Schwingkreises durch eine externe Spannung, z.B. über einen Sinusgenerator ??, untersucht werden.

Abbildung 3: Das Schaltbild des durch einen Sinusgenerator angeregten RLC-Schwingkreises. [1]



Die äußere Anregung erzeugt eine Inhomogenität in der zugehörigen Differentialgleichung.

$$LC\ddot{U}_C(t) + RC\dot{U}_C(t) + U_C(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (12)$$

Diese Gleichung lässt sich nach

$$U(\omega) \quad \text{mit} \quad U_C(\omega, t) = U(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

auffösen:

$$U(t) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (13)$$

Da $U(t)$ komplex ist, hat die Spannung eine Phase, die sich durch das Verhältnis von Realteil und Imaginärteil bestimmen lässt.

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (14)$$

Das Betrachten dieser Beziehung liefert Schlüsse auf den Zusammenhang zwischen Frequenzen und Phasenverschiebungen. So gilt,

$$\phi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \omega_1 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}, \quad (15)$$

$$\phi_2 = \frac{3\pi}{4} \quad \omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (16)$$

Daraus kann direkt die Differenz von ω_1 und ω_2 abgelesen werden.

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} \quad (17)$$

Der Betrag der Gleichungen $U(t)$ 13 und U_C muss gleich sein, sodass man nun die gewünschte Frequenzabhängigkeit der Resonanzspannung U_C angeben kann:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (18)$$

Eine Untersuchung des Grenzverhaltens der Gleichung zeigt, dass die Spannung U_C für gegen ∞ gehende Frequenzen gegen Null und für gegen Null gehende Frequenzen gegen die Erregerspannung U_0 geht. Eine ganz besondere Frequenz ist die Resonanzfrequenz,

$$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}, \quad (19)$$

bei der die Resonanz eintritt und die Spannung U_C sogar die Erregerspannung U_0 übersteigt und gegen einen Maximalwert läuft. Wenn sich die Subtrahenden in der Wurzel wie folgt verhalten,

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

läuft die Resonanzfrequenz gegen die Frequenz des unangeregten Schwingkreises

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

und die Spannung U_C nimmt das q -fache der Erregerspannung U_0 an. q beschreibt dabei die Güte des Schwingkreises und ist definiert als:

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (20)$$

Ähnlich der Güte beschreibt auch die Breite der durch U_C beschriebenen Resonanzkurve die Qualität des Systems und der Resonanz. Die Breite lässt sich durch die Frequenzen ω_+ und ω_- bestimmen. Dies rührt aus der Gleichung

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{U_0}{C \cdot \sqrt{\omega_{\pm}^2 R^2 + \left(\omega_{\pm}^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}}$$

und der Tatsache $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$,

sodass sich für die Breite

$$\omega_+ - \omega_- \propto \frac{R}{L} \quad (21)$$

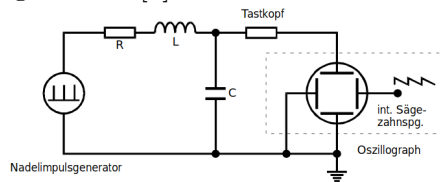
ergibt. Diese gleicht nun im Fall einer Schwachen Dämpfung der Differenz von ω_1 und ω_2 17.

3 Durchführung

3.1 Frequenzabhängigkeit der Amplitude bei einer gedämpften Schwingung

Zunächst soll der effektive Dämpfungswiderstand des Schwingkreises bestimmt werden. Dazu wird die in Abbildung xxx zu sehende Schaltung verwendet. Jedoch wird kein Nadelimpuls, sondern eine Rechtecksspannung angelegt. Die entstehende gedämpfte Schwingung kann auf dem Oszilloskop beobachtet werden. Zur Bestimmung des Dämpfungswiderstands muss die Abhängigkeit der Amplitude von der Zeit ermittelt werden. Dazu wird der zeitliche Abstand zwischen Extrema der Schwingung am Oszilloskop abgelesen.

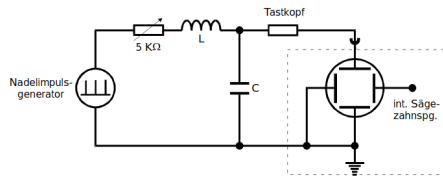
Abbildung 4: Das Schaltbild zur Messung der Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung. Der Nadelimpuls wird jedoch durch eine Rechtecksspannung ersetzt. [1]



3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands beim aperiodischen Grenzfall

Nun soll der Dämpfungswiderstand ermittelt werden, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt. Dieser liegt, wie bereits erklärt vor, wenn der Strom ohne Nulldurchgang, auch Überschwingung genannt, gegen Null geht. Dazu wird an sich dieselbe Schaltung wie zuvor genutzt, jedoch der Widerstand durch einen variablen Widerstand ersetzt, der zunächst auf seinen maximalen Wert eingestellt ist. Nun wird dieser Widerstand verringer bis oben beschriebenes Verhalten eintritt und der Dämpfungswiderstand des aperiodischen Grenzfalls so gefunden wurde.

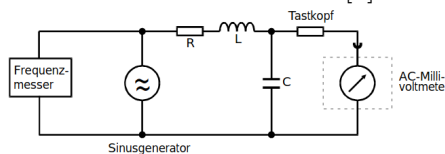
Abbildung 5: Das Schaltbild zur Messung des Dämpfungswiderstands beim aperiodischen Grenzfall. Der Nadelimpuls wird wieder durch eine Rechtecksspannung ersetzt. [1]



3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung in einem Serienresonanzkreis

Zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung eines Serienresonanzkreises wird zunächst Schaltung 6 aufgebaut und die Erregerspannung in Abhängigkeit der Frequenz gemessen werden. Nachdem dies geschehen ist, wird nun ganz simpel die Anregungsfrequenz variiert und gleichzeitig die Kondensatorspannung abgelesen. Dies geschieht um den Bereich der Resonanzfrequenz in kleineren Intervallen, da dieser Bereich einer genaueren Betrachtung unterzogen werden soll. Die bereits gemessene Erregerspannung wird nun benötigt, da sie womöglich nicht konstant ist. Daher wird der Quotient aus Kondensatorspannung und Erregerspannung gebildet.

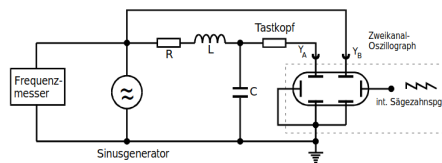
Abbildung 6: Das Schaltbild zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung eines Serienresonanzkreises. [1]



3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erregerspannung und Kondensatorspannung in einem Serienresonanzkreis

Um die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erregerspannung und Kondensatorspannung in einem Serienresonanzkreis zu ermitteln, werden beide Spannungen, wie in Abbildung ?? zu sehen, an ein Oszilloskop angeschlossen und dieses dann im XX-Betrieb verwendet. So lässt sich der Phasenunterschied der beiden Spannungen leicht ermitteln, indem der Abstand zwischen den Nulldurchgängen der beiden Spannungen am Oszilloskop abgelesen wird.

Abbildung 7: Das Schaltbild zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Kondensatorspannung und Erregerspannung eines Serienresonanzkreises. [1]



4 Auswertung

Die notierten Werte sind

$$L = (10,11 \pm 0,03)\text{mH} \quad (22)$$

$$C = (2,093 \pm 0,003)\text{nF} \quad (23)$$

$$R_1 = (48,1 \pm 0,1)\Omega \quad (24)$$

$$R_2 = (509,5 \pm 0,5)\Omega \quad (25)$$

Diese Werte sind die Kenngrößen des Schwingkreises und werden in weiteren Rechnungen verwendet.

4.1 Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude

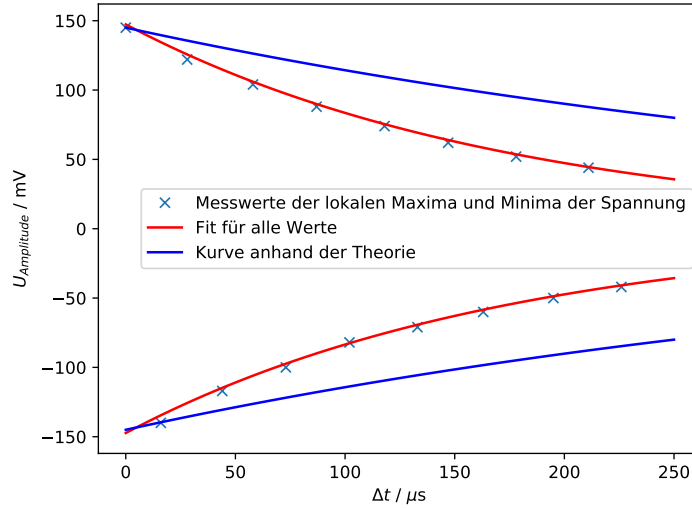
Es wird die Zeitabhängigkeit der Spannungsamplitude untersucht. Dazu wird der Verlauf der Amplitude mit einer Theoriekurve verglichen.

Tabelle 1: Die Werte der Amplituden in einer Schwingung.

$t/\mu\text{s}$	$U_{\text{Amplitude}}/\text{mV}$
0	145
16	-140
28	122
44	-117
58	104
73	-100
87	88
102	-82
118	74
133	-71
147	62
163	-60
178	52
195	-50
211	44
226	-42

Dabei sind die positiven Werte jeweils die Werte Spannungsmaxima und die negativen Werte sind den Spannungsminima zugehörig.

Abbildung 8: Die gefitteten Messwerte und die Theoriekurve zu den Messwerten aus 1.



Aus den Parametern A_0 und μ der Fit-Funktion

$$A = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t}$$

werden der effektiven Dämpfungswiderstand und R_{eff} und die Abklingzeit T_{ex} berechnet mit (10):

$$R_{\text{eff}} = (114,8 \pm 2,4) \, \Omega \quad (26)$$

$$T_{\text{ex}} = (176 \pm 4) \, \mu\text{s} \quad (27)$$

Der Widerstand in der benutzten Schaltung $R_1 = (48,1 \pm 0,1) \, \Omega$ weicht um $66,7 \, \Omega$ von dem berechnete effektiven Dämpfungswiderstand ab. Das kann an dem nicht miteinbezogenen Innenwiderstand des Generators von $50 \, \Omega$ liegen.

4.2 Widerstand für aperiodischen Grenzfall

Wie schon in der Durchführung erläutert variiert man den Dämpfungswiderstand in der Schaltung bis es gerade keinen Nulldurchgang der Spannung gibt. Dieser Wert ist dann der Widerstand für den der aperiodische Grenzfall vorliegt.

$$R_{\text{ap}} = 3470 \, \Omega$$

Mit

$$\frac{R_{\text{ap}}^2}{2L^2} = \frac{1}{LC}$$

berechnet man den Theoriewert des Widerstandes welcher bei

$$R_{ap_t} = 4396 \, \Omega$$

liegt. Es wird die Abweichung vom Theoriewert folgendermaßen bestimmt

$$a_{R_{ap}} = \frac{|R_{ap_t} - R_{ap}|}{R_{ap_t}} = 21,06\% \quad (28)$$

Der Messwert scheint nicht zu weit vom Theoriewert abzuweichen. Mögliche Fehlerquellen könnten das ungenaue Ablesen und der nicht akkurat einstellbare Drehknopf des variierbaren Widerstandes sein.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

In 2 stehen die Messwerte der Frequenz f , der Kondensatorspannung U_C und der Erregerspannung U_0 .

Tabelle 2: Die Messwerte der Spannungen, ihrer Phase, Frequenz aufgetragen.

f/kHz	U_C/mV	U_0/mV	$\varphi/\mu\text{s}$
10	121	430	-
15	134	430	1,7
18	148	430	2
20	162	425	2,1
22	180	425	2,4
24	200	425	2,7
26	230	420	3
28	275	410	3,5
30	330	400	4,5
32	390	395	6
34	410	390	7,9
36	350	395	9,5
38	275	410	10
40	215	415	10,5
42	170	420	10,5
44	145	420	10
46	115	425	10
48	97	425	10
50	87	425	9,7
55	75	425	9
57.5	55	427	8,5

Aus 10 kann die Resonanzfrequenz bestimmt und dann mit dem Theoriewert verglichen werden.

Abbildung 9: Die Messwerte halblogarithmisch für das Spannungsverhältnis aus 2 gegen die Frequenz aufgetragen.

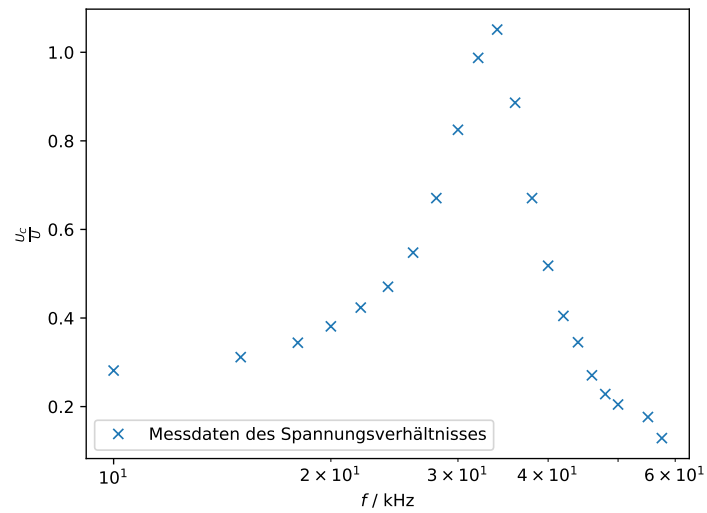
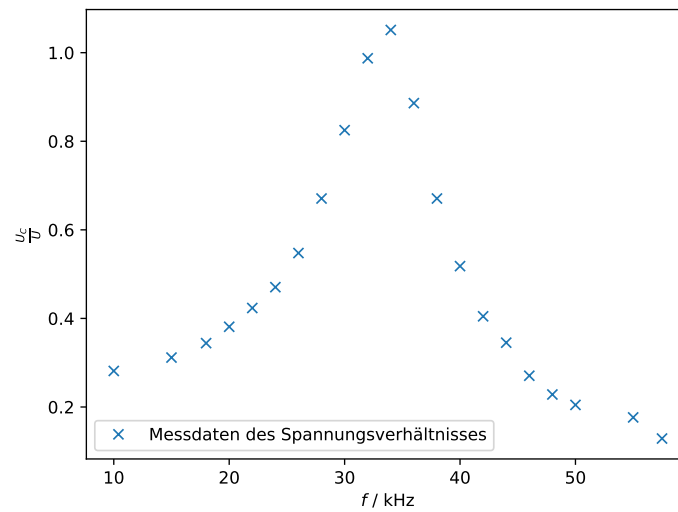


Abbildung 10: Die Messwerte linear für das Spannungsverhältnis aus 2 gegen die Frequenz aufgetragen.



Aus 10 ist eine Resonanzfrequenz von ca. $f_{\text{res}} = 35 \text{ kHz}$ ablesbar, welche analog zu (28) mit dem Theoriewert von $f_{\text{res}} = 34,59 \text{ kHz}$ verglichen wird:

$$a_{f_{\text{res}}} = 11,72\%$$

Die Güte wird einfach an 10 abgelesen und mit (20) wird der theoretische Wert berechnet:

$$q = 1,08 \quad (29)$$

$$q_{\text{theorie}} = 19,14 \quad (30)$$

$$a_q = 94,38\% \quad (31)$$

Es scheint, dass es einen systematischen Fehler in unserer Berechnung gibt und der Theoriewert um eine Zehnerpotenz zu groß ist. Die theoretische Breite der Resonanzkurve wird nach (17) bestimmt und die experimentell bestimmte Breite wird aus 10 abgelesen:

$$\nu_1 - \nu_2 = 9 \text{ kHz} \quad (32)$$

$$(\nu_1 - \nu_2)_{\text{Theorie}} = 1,807 \text{ kHz} \quad (33)$$

$$a_\nu = 398\% \quad (34)$$

Auch hier gibt es augenscheinlich eine sehr große Abweichung, welcher wahrscheinlich einem Fehler in der Berechnung zuzuschulden ist.

Abbildung 11: Die Messwerte halblogarithmisch für die Phase aus 2 gegen die Frequenz aufgetragen.

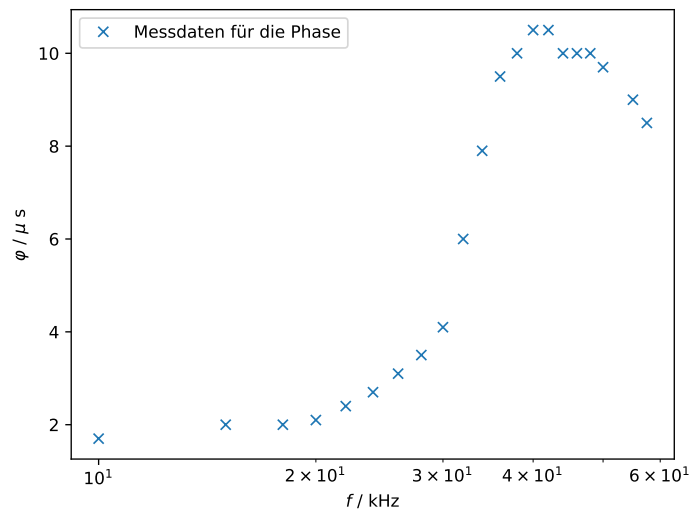
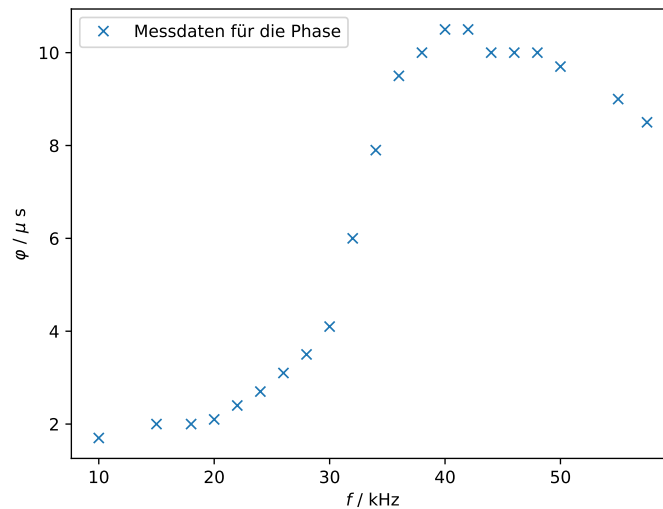


Abbildung 12: Die Messwerte linear für die Phase aus 2 gegen die Frequenz aufgetragen.



Hier ist aus ??eine Resonanzfrequenz von ca. $f_{\text{res}} = 34 \text{ kHz}$ abzulesen, die vom zuvor berechneten Theoriewert von $f_{\text{res}} = 34,59 \text{ kHz}$ um $a_{\text{res}} = 1,72\%$ abweicht. Mit (4) werden $\nu_{1, \text{theo}}$ und $\nu_{2, \text{theo}}$ berechnet. Also die Frequenzen für die die Phase zwischen Erregerspannung und Kondensatorspannung $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ beträgt.

$$\nu_{1, \text{theo}} = 34.98 \text{ kHz} \quad (35)$$

$$\nu_{2, \text{theo}} = 34.422 \text{ kHz} \quad (36)$$

5 Diskussion

Von der Form her sehen die einzelnen Graphen so aus wie es erwartet wird. Die Werte für den effektiven Dämpfungswiderstand und den Grenzwiderstand für den aperiodischen Grenzfall liegen im Toleranzbereich, wenn man den Innenwiderstand des Generators mit einbezieht. Doch die Werte für die Güte und die Breite der Resonanzkurve weichen sehr stark von ihren jeweiligen Theoriewerten ab, was möglicherweise zum Teil einem nicht so genauen Ablesen der Werte und einem systematischen Fehler in der Rechnung, welcher auch nach wiederholtem Prüfen nicht behoben werden konnte, zu verschulden ist.

6 Literaturverzeichnis

[1] *Versuchsanleitung V354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. TU Dortmund, 2019