

Wärmeleitfähigkeit

David Gutnikov Lasse Sternemann
david.gutnikov@udo.edu lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 10.12.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
3	Versuchsdurchführung	4
3.1	Statische Methode	4
3.2	Dynamische Methode	4
4	Auswertung	4
4.1	Statische Methode	5
4.2	Dynamische Methode	9
4.2.1	Aluminium	9
4.2.2	Messing	14
4.2.3	Edelstahl	18
4.3	Diskussion	22
4.4	Anhang	22
4.5	Literaturverzeichnis	22

1 Zielsetzung

Mithilfe dieses Versuch sollen die Wärmeleitfähigkeiten für verschiedene Materialien bestimmt werden.

2 Theoretische Grundlagen

Wärme kann innerhalb eines Körpers durch Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung transportiert werden. Dabei wird Wärmeleitung durch frei bewegliche Elektronen oder Gitterschwingungen, den Phononen, des Materials betrieben. In Metallen, welche in diesem Versuch betrachtet, werden geschieht dies hauptsächlich durch die freien Elektronen. Damit Wärmeleitung stattfindet muss ein Temperaturgradient in dem Körper vorhanden sein. Es herrscht ein Temperaturgefälle von einem zum anderen Ende eines Stabes der Dichte ρ , der Länge l , der Querschnittsfläche A und der spezifischen Wärmekapazität c vor. Für die Wärmemenge dQ , die im Zeitraum dt durch A fließt, gilt folgende Formel:

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt = j_w A dt \quad (1)$$

Wobei κ die gesuchte Wärmeleitfähigkeit des Materials und j_w die Wärmestromdichte ist. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (2) für lineare Wärmeströme,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial j_w}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ergibt sich beim Einsetzen von j_w die Wärmeleitungsgleichung (3):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

Werden lange Stäbe, um die es sich in diesem Versuch handelt, mit einer Periode T_p erhitzt und gekühlt, so sieht die Lösung von (3), also die sich ergebende Temperaturwelle wie folgt aus:

$$T(x, t) = T_{\max} e^{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \quad (4)$$

3 Versuchsdurchführung

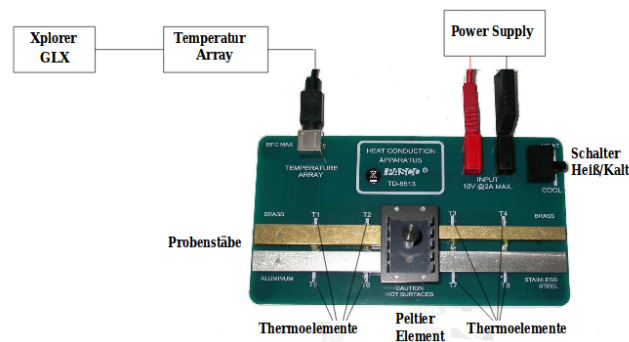
Es werden vier Stäbe gleicher Maße, davon einer aus Aluminium, Edelstahl und zwei aus Messing, auf einer Platine 3.2 eingespannt, sodass sie mithilfe eines Peltierelementes gleichzeitig an einem Ende erwärmt und gekühlt werden können. Es sind je zwei Thermoelemente zu Temperaturmessung in gleichem Abstand an den Stäben angebracht. Die Thermoelemente sind mit einem Gerät verbunden, welches die gemessenen Daten in bestimmten Zeitabständen aufnimmt. Die Stäbe müssen während den Messungen immer mit einer Wärmeisolierung bedeckt sein, damit die Werte nicht durch äußere Einflüsse verfälscht werden. Nach den Messungen soll die Wärmeisolierung entfernt werden, um die Stäbe wieder schneller auf Zimmertemperatur runter zu kühlen.

3.1 Statische Methode

Hierbei werden die Stäbe so lange erwärmt bis Thermoelement 7 eine Temperatur von ca. 45° anzeigt. Die Spannung am Peltierelement beträgt 5V bei maximalem Strom und die Temperaturwerte an den Thermoelementen werden mit einer Abtastrate von 5 Sekunden abgenommen.

3.2 Dynamische Methode

Diese Messungen werden so lange ausgeführt bis eins der Thermoelemente 80° anzeigt, dabei beträgt die Spannung am Peltierelement 8V bei maximalem Strom. Bei der ersten Messreihe wird das Peltierelement mit einer Periode von 80 Sekunden umgestellt, sodass die Stäbe abwechselnd erwärmt und gekühlt werden. Für die zweite Messreihe werden die Perioden auf 200 Sekunden verlängert. Dabei wird eine Abtastrate der Messwerte von 2 Sekunden genommen.



4 Auswertung

In der Auswertungen wird zur Berechnung von Mittelwerten der Mittelwertssatz (5) verwendet. Die zugehörige Standardabweichung wird mit Formel (6) berechnet und für

Werte die von fehlerbehafteten Größen abhängen, wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung (7) verwendet.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (5)$$

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (6)$$

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{df}{dy_i} \cdot \Delta y_i \right)^2} \quad (7)$$

4.1 Statische Methode

Wie in Grafik 1 zu sehen ist, steigen die äußeren Temperaturen von Aluminium und den beiden Messingplatten zu Beginn sehr stark an. Ab einer Dauer von etwa 150s schwächt der Temperaturanstieg hingegen ab und die Temperatur scheint gegen einen Maximalwert zu laufen, der mit der durchgeführten Messung jedoch nicht erreicht wurde. Aluminium scheint dabei am wärmsten zu werden und auch den stärksten Temperaturanstieg zu haben. Bei den beiden Messingplatten ist zu Beginn ein beinahe gleicher Anstieg der Temperatur zu erkennen. Nach ca. 160s trennen sich jedoch die Kurven und der breitere Stab läuft gegen eine leicht höhere Temperatur. Im Vergleich zu den anderen 3 Stäben wirkt der Temperaturanstieg des Edelstahlstabs beinahe linear und zugleich sehr schwach. Dies zeigt sich auch an den Temperaturen, die die Platten nach 700s inne haben 1. Nach diesen Werten hat die Aluminiumplatte die beste Wärmeleitung, die breite Messingplatte die zweitbeste, die dünne Messingplatte die drittbeste und die Edelstahlplatte die schlechteste.

Tabelle 1: In der Tabelle sind die Temperaturen der einzelnen Messplatten zum Zeitpunkt $t=700s$ angegeben.

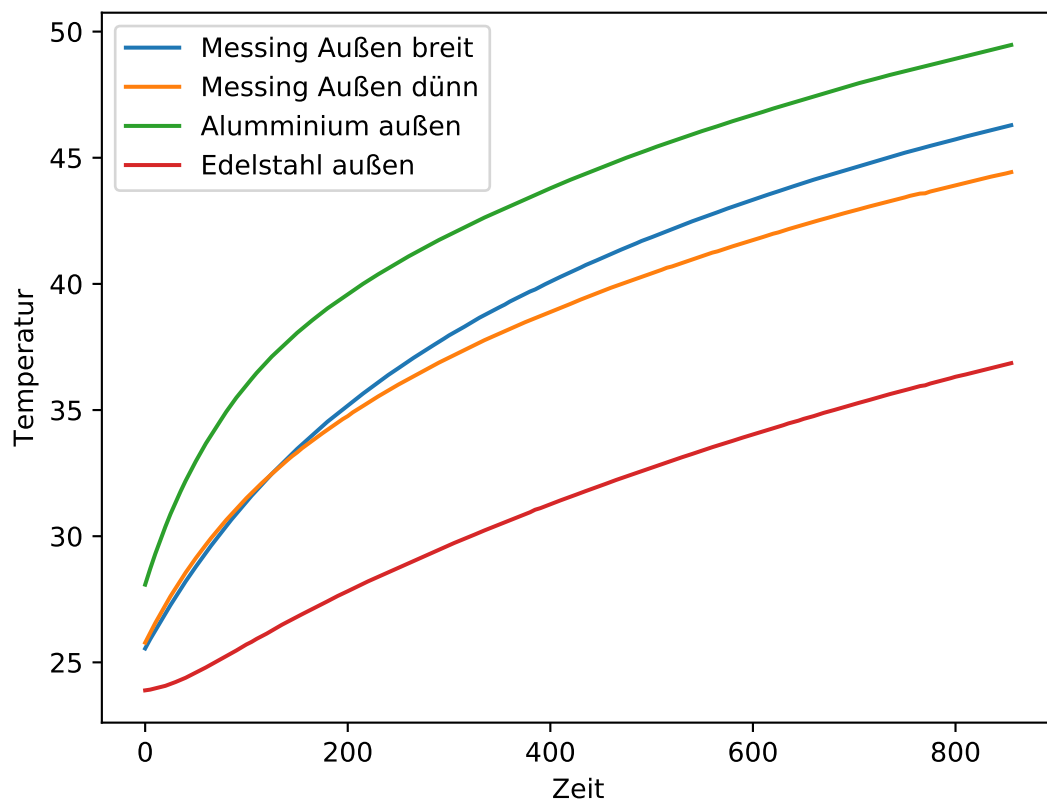
Messplate	$T_{700s}[^{\circ}C]$
Aluminium	47,90
Edelstahl	35.24
Messing (dünn)	42.91
Messing (breit)	44.62

Nun kann nach Umstellen von Gleichung (1) der Wärmestrom in den Platten wie folgt berechnet werden:

$$\frac{dQ}{dT} = -\kappa \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Dabei steht κ für die Wärmeleitfähigkeit des Materials, A für dessen Querschnittsfläche, ∂T für die Temperaturdifferenz zwischen den zwei Punkten und ∂x für den Abstand der

Abbildung 1: In der Grafik sind die Temperaturverläufe der 4 verschiedenen Messplatten zu sehen.



zwei Punkte, der bei diesem Experiment immer 3cm beträgt.

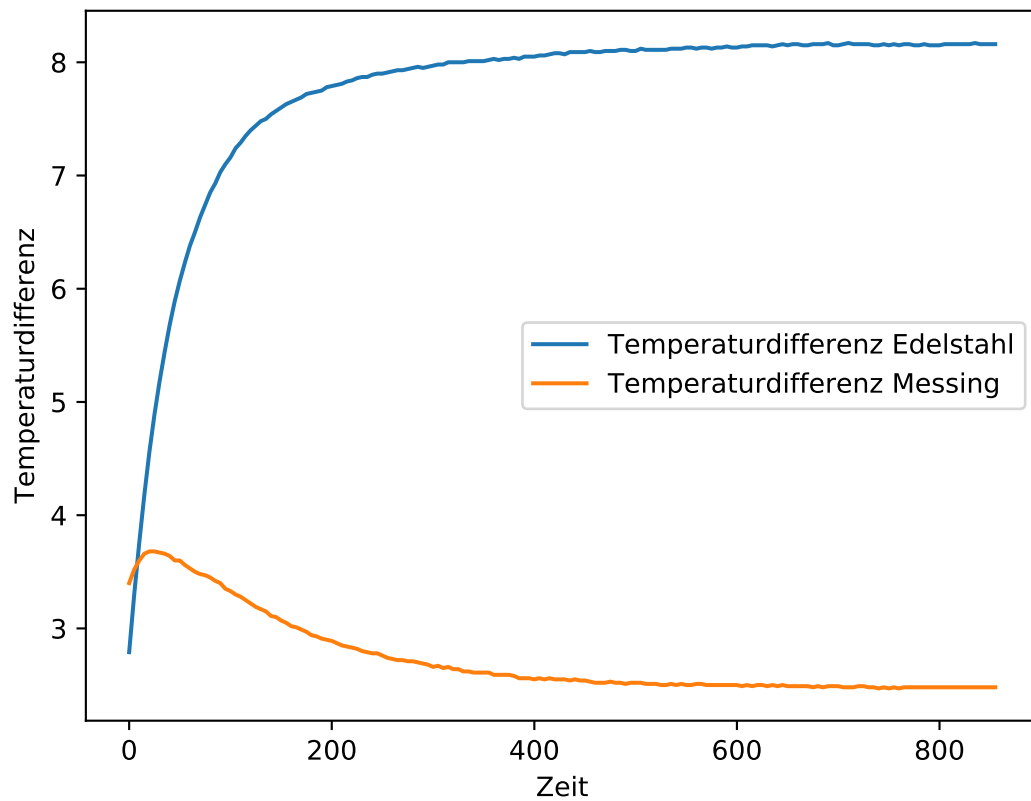
$$\begin{aligned}
 A_{\text{Aluminium}} &= 4,8 \cdot 10^{-5} m^2 & \kappa_{\text{Aluminium}} &= 220 \frac{W}{mK} \\
 A_{\text{Edelstahl}} &= 4,8 \cdot 10^{-5} m^2 & \kappa_{\text{Edelstahl}} &= 21 \frac{W}{mK} \\
 A_{\text{Messing breit}} &= 4,8 \cdot 10^{-5} m^2 & \kappa_{\text{Messing}} &= 105 \frac{W}{mK} \\
 A_{\text{Messing dünn}} &= 2,8 \cdot 10^{-5} m^2 & \kappa_{\text{Messing}} &= 105 \frac{W}{mK}
 \end{aligned}$$

Mit den oben gegebenen Rahmenwerten und den Messwerten lassen sich folgende Wärmeströme berechnen.

Tabelle 2: Der Wärmestrom in den verschiedenen Metallplatten zu 5 verschiedenen Zeitpunkten

Platte	t [s]	T_{diff}	Wärmestrom $\frac{dQ}{dT}$ [$W \cdot 10^{-4}$]
Aluminium	145	1,60	-66,00
	295	1,34	-78,81
	445	1,30	-81,23
	595	1,29	-81,86
	745	1,29	-81,86
Edelstahl	145	7,60	-1,33
	295	7,97	-1,26
	445	8,09	-1,25
	595	8,13	-1,24
	745	8,15	-1,24
Messing breit	145	3,07	- 16,42
	295	2,66	- 18,95
	445	2,54	- 19,85
	595	2,50	- 20,16
	745	2,47	- 20,40
Messing dünn	145	3,28	- 8,96
	295	2,99	- 9,83
	445	2,95	- 9,97
	595	2,98	- 9,87
	745	3,01	- 9,77

Abbildung 2: In der Grafik sind die Verläufe der Temperaturdifferenz zwischen dem inneren und äußeren Messpunkt von Edelstahl und Messing zu sehen.



Beim Vergleich der beiden Graphen aus Abbildung 2 fällt auf, dass die Temperaturdifferenz auf der Edelstahlplatte immer größer wird und dann nach ca 170s beginnt gegen einen Wert um die 8 °C zu laufen. Auch die Temperaturdifferenz auf der Aluminiumplatte läuft gegen einen Wert. Hier sinkt die Temperaturdifferenz jedoch und läuft gegen eine Temperaturdifferenz zwischen 3 und 2 °C. Auffällig ist, dass die Temperaturdifferenz auf der Edelstahlplatte weitaus schneller steigt, als die auf der Aluminiumplatte sinkt. Das Verhalten der beiden Kurven deutet auf die im Vergleich zum Aluminium schlechte Wärmeleitfähigkeit des Edelstahls hin.

4.2 Dynamische Methode

Um die Amplitude und Phasenverschiebung zwischen den beiden Temperaturverläufen zu finden, werden zwei verschiedene Methoden verwendet. Zur Bestimmung der Phasendifferenz werden die Zeitpunkte ausgelesen, bei denen die Kurven ihre Minima haben. Die Phasendifferenz ergibt sich dann über den Zeitunterschied. Zur Bestimmung der Amplitude muss zuerst der Untergrund abgezogen werden. Dazu wird dieser mit einem Polynom 4. Grades modelliert. Nun kann die Temperaturwelle erneut, nun jedoch ohne Untergrund gezeichnet werden. In dieser Grafik sieht man nun deutlich die Amplitude und kann diese berechnen, indem man die Differenz der gemittelten Maxima sowie Minima berechnet und diese dann durch 2 teilt. Bei späteren Berechnungen werden folgende Werte und $x = 0,03\text{m}$ verwendet:

$$\begin{array}{ll} \rho_{\text{Aluminium}} = 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & c_{\text{Aluminium}} = 830 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \\ \rho_{\text{Edelstahl}} = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & c_{\text{Edelstahl}} = 400 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \\ \rho_{\text{Messing}} = 8520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & c_{\text{Messing}} = 385 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \end{array}$$

Die Phasendifferenzen finden sich in Tabelle 6 und zu den Werten wird die Standardabweichung des Mittelwerts berechnet (6).

4.2.1 Aluminium

Über das beschriebene Vorgehen ergibt sich hier für die Phasendifferenz:

$$\Delta t = (5,25 \pm 0,17)\text{s}$$

Nach Ausfiltern des Untergrunds ergeben sich die zwei neuen Grafiken, aus denen die Amplituden bestimmt werden.

Es ergeben sich folgende gemittelte Minima und Maxima:

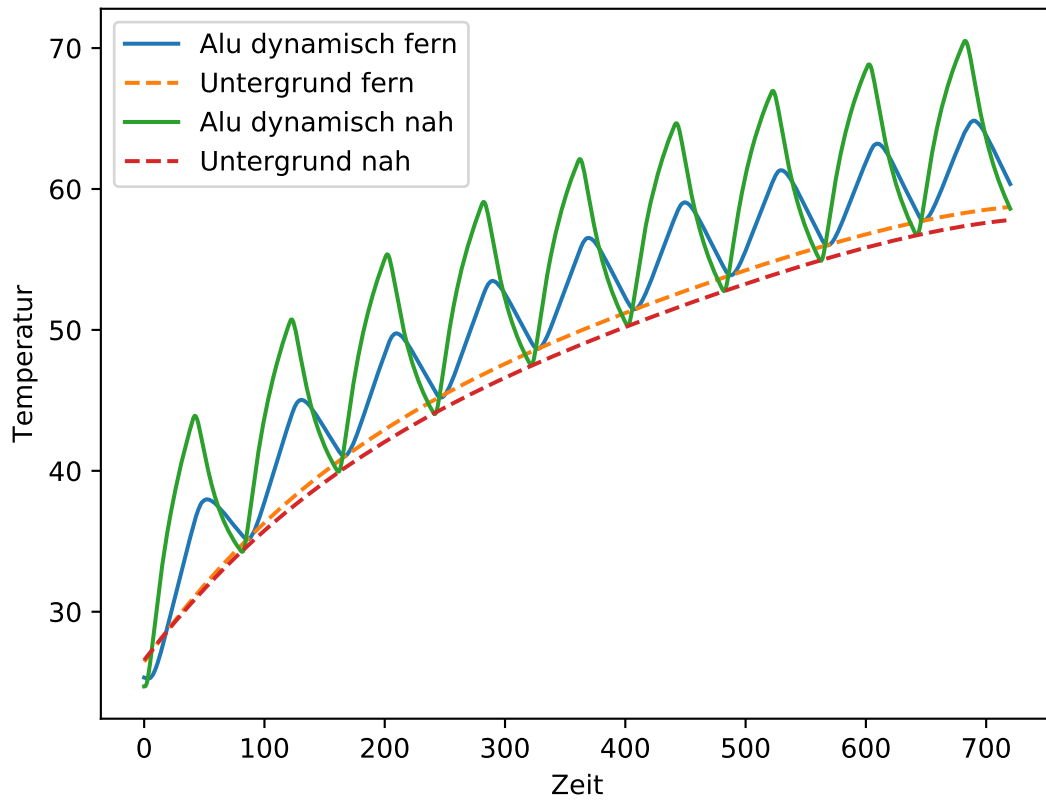
Nun wird die Amplitude aus den gemittelten Extrema berechnet. Der Fehler ergibt sich aus den vorherigen Fehlern der Extrema.

$$\begin{array}{l} A_f = (6,4 \pm 0,3)^\circ\text{C} \\ A_n = (13,2 \pm 0,6)^\circ\text{C} \end{array}$$

Nun muss nur noch die Wärmeleitfähigkeit über Formel (3) und der Fehler über folgende Fehlerfortpflanzung berechnet werden.

$$\Delta \kappa = \sqrt{\left(\frac{\rho c x^2}{2 \Delta t A_f \ln^2\left(\frac{A_n}{A_f}\right)} \cdot \Delta A_f\right)^2 + \left(\frac{-\rho c x^2}{2 \Delta t A_n \ln^2\left(\frac{A_n}{A_f}\right)} \cdot \Delta A_n\right)^2 + \left(\frac{-\rho c x^2}{2 \Delta t^2 \ln\left(\frac{A_n}{A_f}\right)} \cdot \Delta(\Delta t)\right)^2}$$

Abbildung 3: In der Grafik sind die Temperaturwellen und der durch die Minima modellierte Untergrund dargestellt.



So ergibt sich:

$$\kappa = (275 \pm 27) \frac{W}{mK}$$

Dieser berechnete Wert weicht zum Literaturwert[2] von $220 \frac{W}{mK}$ um 20 % ab.

Abbildung 4: In der Grafik ist die Wellenfunktion am fernen Messpunkt zu sehen, nachdem der Untergund abgezogen wurde.

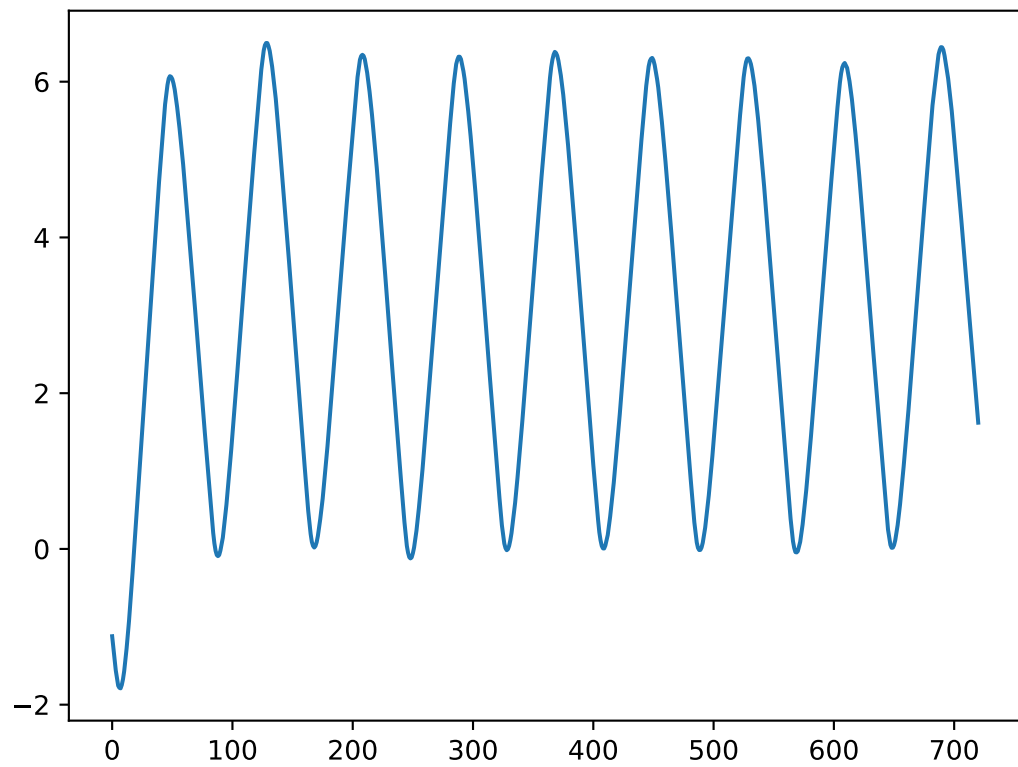


Abbildung 5: In der Grafik ist die Wellenfunktion am nahen Messpunkt zu sehen, nachdem der Untergund abgezogen wurde.

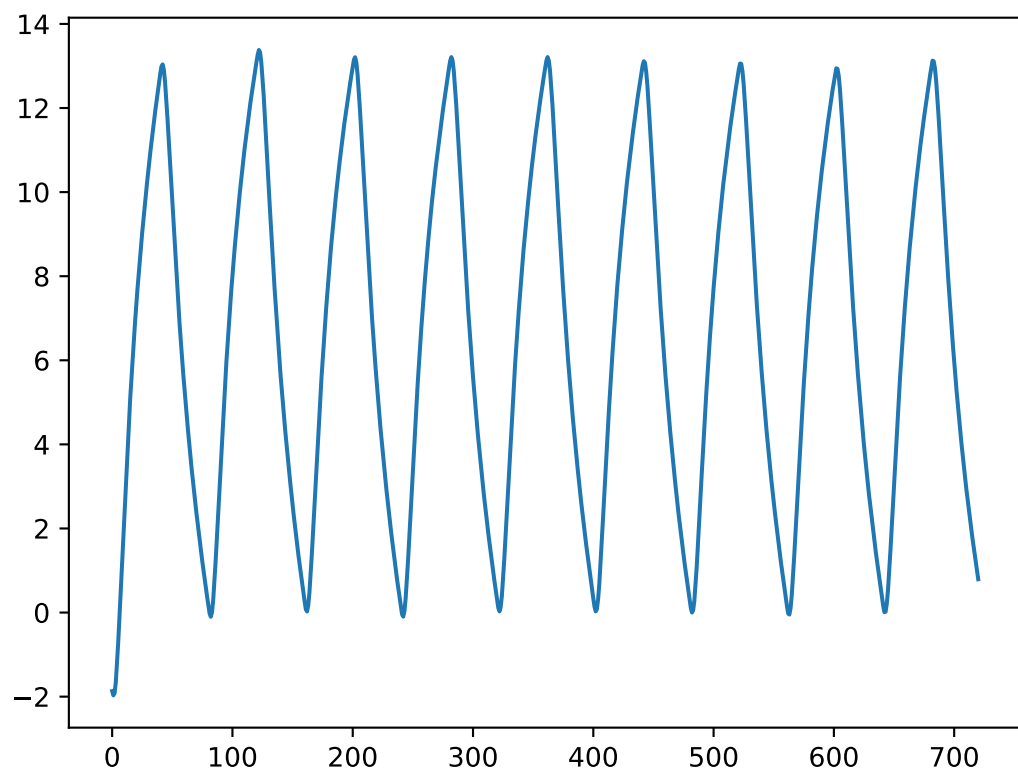


Tabelle 3: Die Maxima und Minima der Welle am nahen und fernen Messpunkt für Aluminium

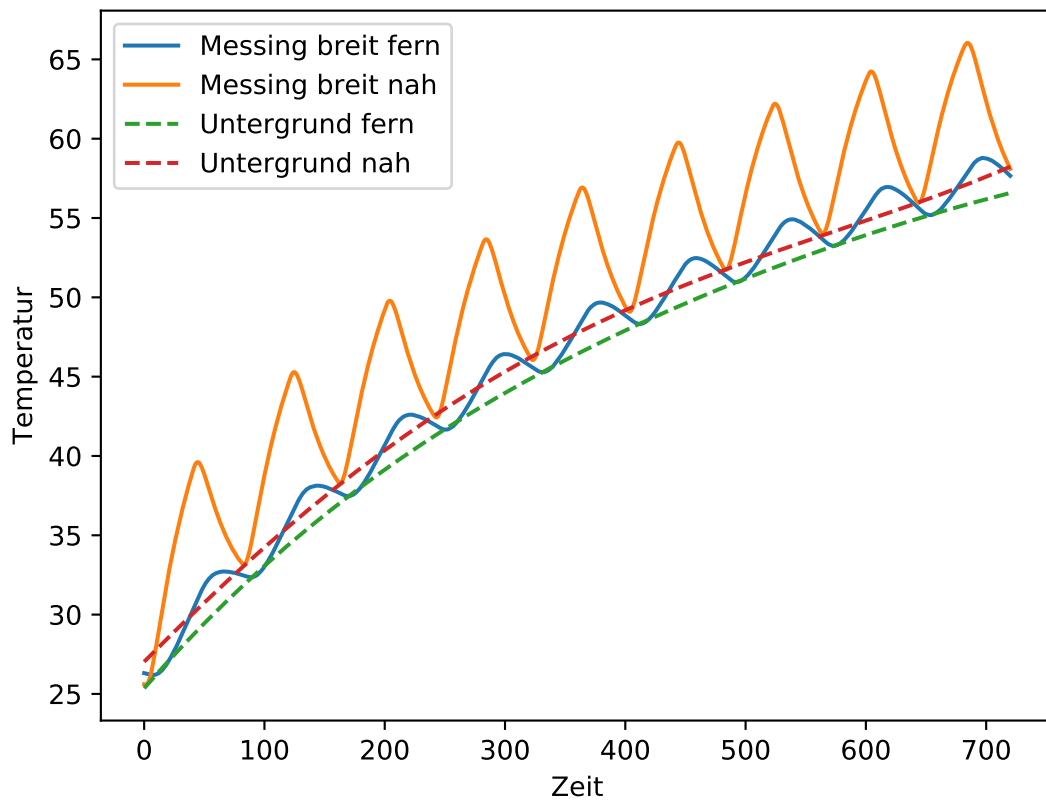
Extrema	$Maxima_{\text{Nah}}$	$Minima_{\text{Nah}}$	$Maxima_{\text{Fern}}$	$Minima_{\text{Fern}}$
Extrema	13,04	0,1	6,50	0,09
	13,38	-0,03	6,35	0,12
	13,21	0,10	6,32	0,02
	13,21	-0,03	6,38	0,01
	13,21	-0,03	6,31	-
	13,11	-0,0006	6,30	-
	13,06	0,05	6,24	-
	12,94	-	-	-
	13,13	-	-	-
$\overline{Extremum}$	13,14	0,024	6,34	0,06
$\Delta Extremum$	$\pm 0,05$	$\pm 0,02$	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$

4.2.2 Messing

Über das beschriebene Vorgehen ergibt sich hier für die Phasendifferenz:

$$\Delta t = (7,9 \pm 0,5)s$$

Abbildung 6: In der Grafik sind die Temperaturwellen und der durch die Minima modellierte Untergrund dargestellt.

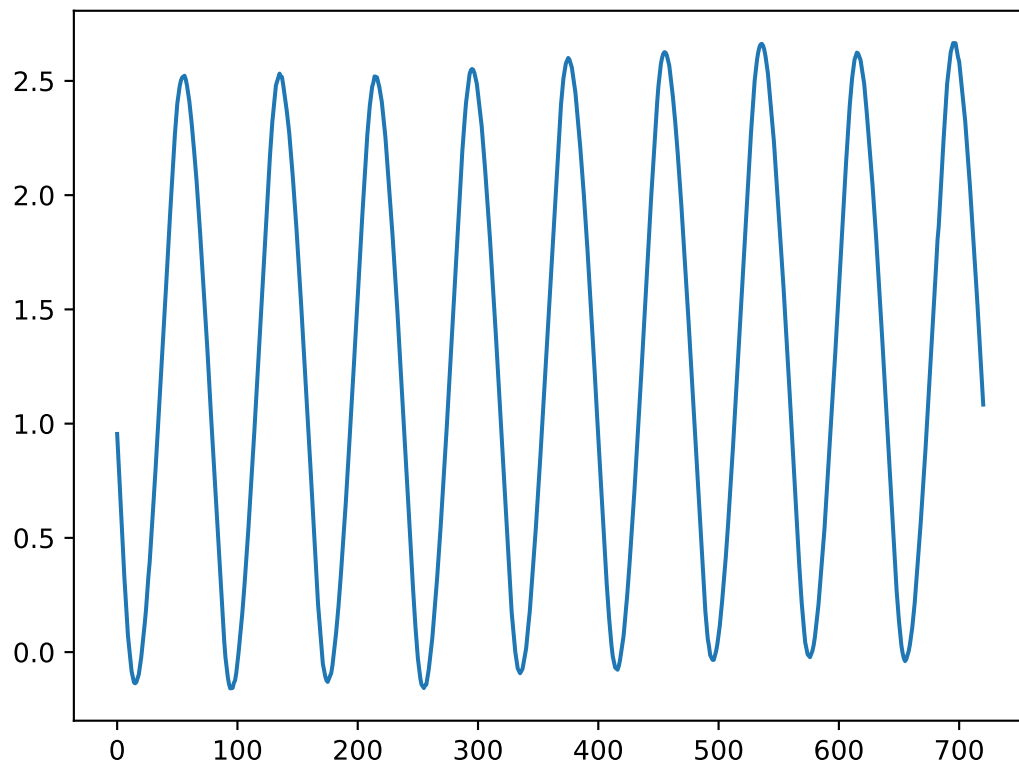


Nach Ausfiltern des Untergrunds ergeben sich wieder die zwei neuen Grafiken, aus denen die Amplituden bestimmt werden.

Es ergeben sich folgende gemittelte Minima und Maxima:

Nun wird die Amplitude wieder aus den gemittelten Extrema berechnet. Der Fehler

Abbildung 7: In der Grafik ist die Wellenfunktion am fernen Messpunkt zu sehen, nachdem der Untergrund abgezogen wurde.



ergibt sich aus den vorherigen Fehlern der Extrema.

$$A_f = (1,33 \pm 0,04)^\circ C$$

$$A_n = (4,64 \pm 0,12)^\circ C$$

Zuletzt muss wieder die Wärmeleitfähigkeit über Formel (3) und der Fehler über dieselbe Fehlerfortpflanzung berechnet werden. So ergibt sich:

$$\kappa = (152 \pm 21) \frac{W}{mK}$$

Der berechnete Wert weicht zum Literaturwert[3] von $105 \frac{W}{mK}$ um 30,92 % ab.

Abbildung 8: In der Grafik ist die Wellenfunktion am nahen Messpunkt zu sehen, nachdem der Untergund abgezogen wurde.

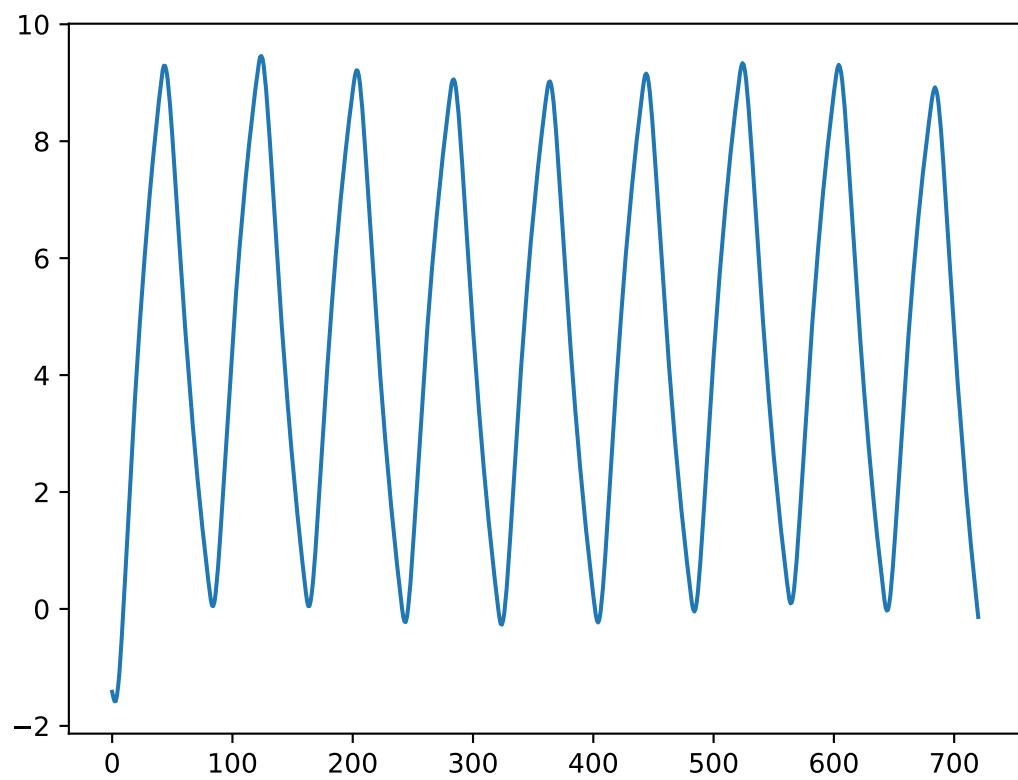


Tabelle 4: Die Maxima und Minima der Welle am nahen und fernen Messpunkt für
Messing

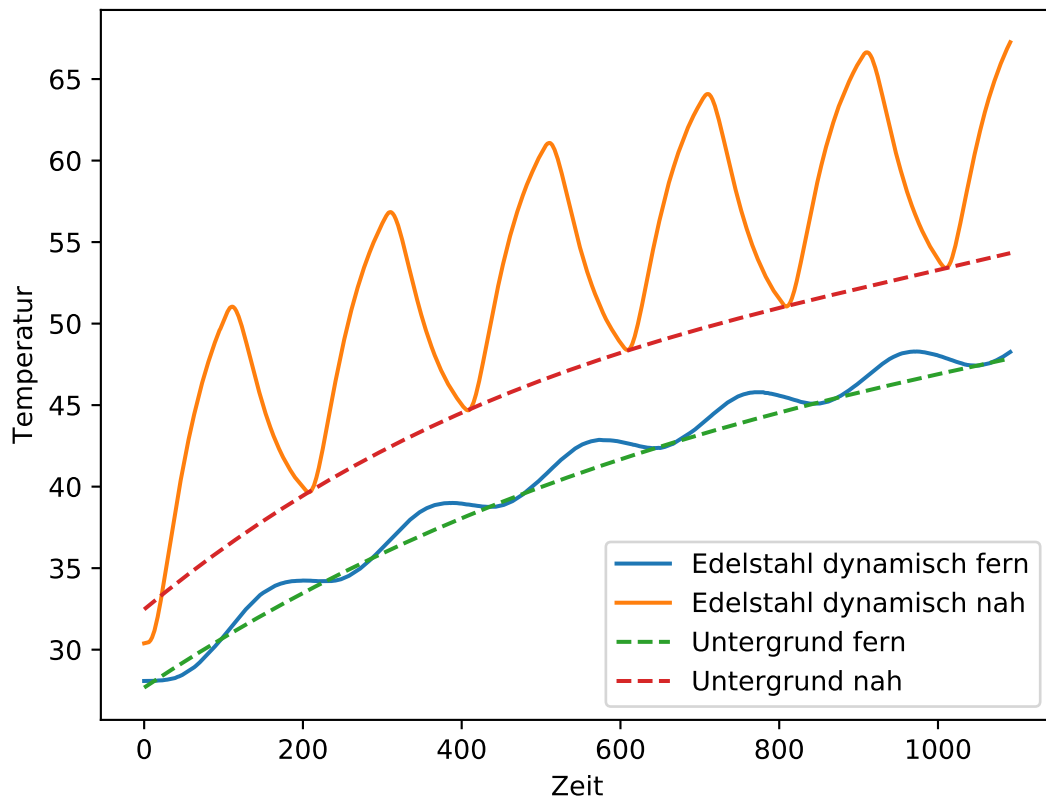
Extrema	$Maxima_{\text{Nah}}$	$Minima_{\text{Nah}}$	$Maxima_{\text{Fern}}$	$Minima_{\text{Fern}}$
Extrema	9,29	-0,05	2,52	0,16
	9,46	-0,05	2,53	0,13
	9,21	0,23	2,52	0,16
	9,06	0,27	2,55	0,09
	9,02	0,23	2,60	0,08
	9,16	0,04	2,63	0,03
	9,34	-0,09	2,66	0,02
	9,31	-	2,62	0,04
	8,92	-	-	-
$\overline{Extremum}$	9,20	0,08	2,58	0,09
$\Delta Extremum$	$\pm 0,06$	$\pm 0,06$	$\pm 0,02$	$\pm 0,02$

4.2.3 Edelstahl

Wieder das beschriebene Vorgehen angewandt, ergibt sich hier für die Phasendifferenz:

$$\Delta t = (31 \pm 4)s$$

Abbildung 9: In der Grafik sind die Temperaturwellen und der durch die Minima modellierte Untergrund dargestellt.



Die Graphen zur Bestimmung der Amplituden werden analog zu den vorherigen Fällen gebildet.

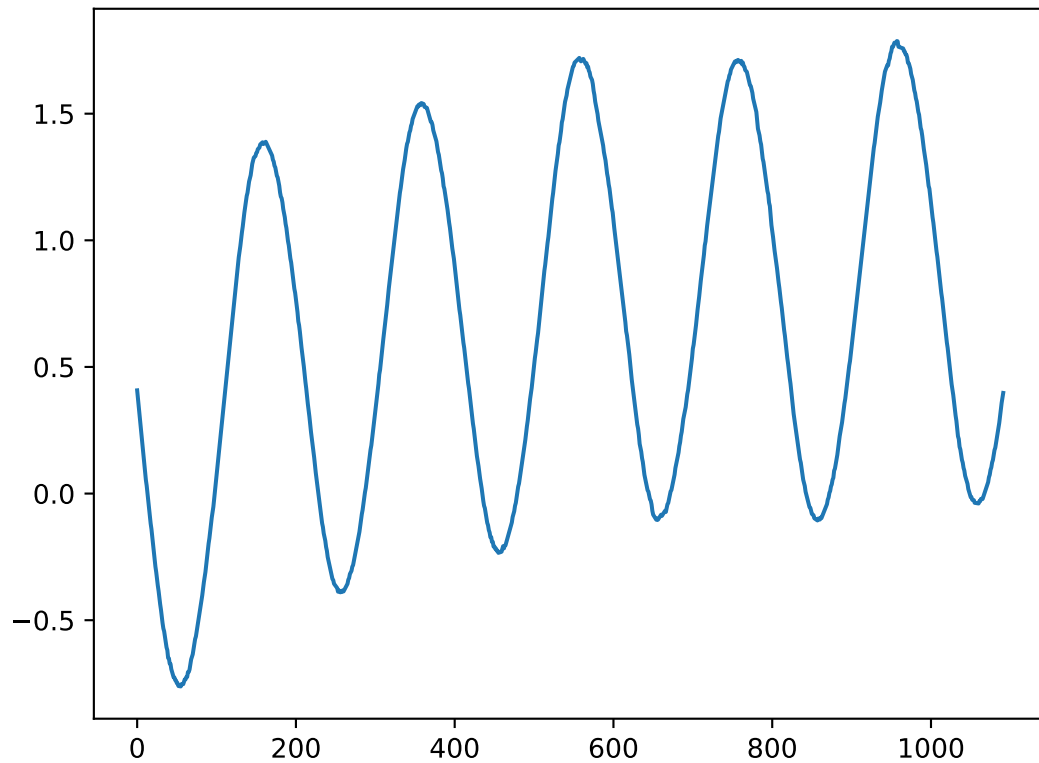
Es ergeben sich folgende gemittelte Minima und Maxima:

Die Amplitude und ihr Fehler ergeben sich ebenfalls wie bei den anderen Fällen.

$$A_f = (0,91 \pm 0,05)^\circ\text{C}$$

$$A_n = (7,20 \pm 0,05)^\circ\text{C}$$

Abbildung 10: In der Grafik ist die Wellenfunktion am fernen Messpunkt zu sehen, nachdem der Untergund abgezogen wurde.



Wieder muss nur noch die Wärmeleitfähigkeit über Formel (3) und der Fehler über die bekannte Fehlerfortpflanzung berechnet werden. So ergibt sich:

$$\kappa = (22,5 \pm 2,4) \frac{W}{mK}$$

Dieser berechnete Wert weicht zum Literaturwert [2] von $21 \frac{W}{mK}$ um 7,14 % ab.

Abbildung 11: In der Grafik ist die Wellenfunktion am nahen Messpunkt zu sehen, nachdem der Untergund abgezogen wurde.

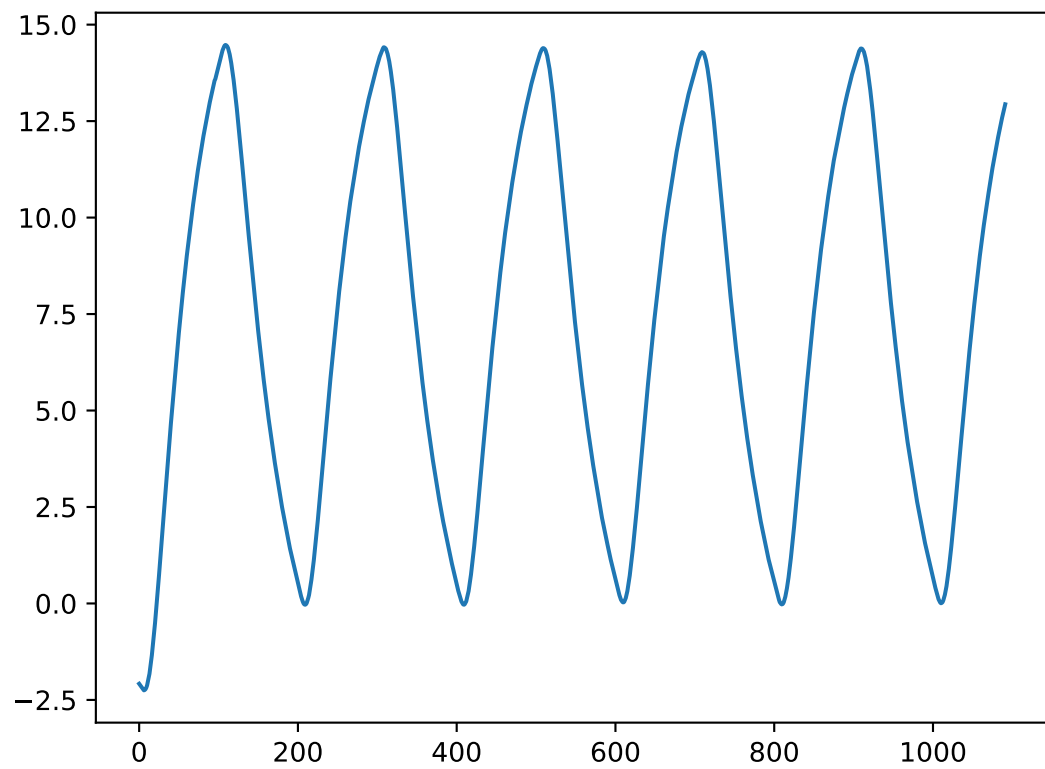


Tabelle 5: Die Maxima und Minima der Welle am nahen und fernen Messpunkt für Edelstahl

Extrema	$Maxima_{\text{Nah}}$	$Minima_{\text{Nah}}$	$Maxima_{\text{Fern}}$	$Minima_{\text{Fern}}$
Extrema	14,47	0,03	1,72	0,04
	14,41	0,03	1,71	0,11
	14,39	-0,03	1,79	0,10
	14,29	0,02	-	-
	14,38	-0,01	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	-
$\overline{Extremum}$	14,390	0,012	1,740	0,083
$\Delta Extremum$	$\pm 0,030$	$\pm 0,013$	$\pm 0,024$	$\pm 0,022$

4.3 Diskussion

Beim Vergleich der bestimmten Wärmeleitfähigkeiten mit den Literaturwerten fällt auf, dass die Messung gut genug war, um sie durch die Literaturwerte zu verifizieren. Besonders der gemessene Wert von Edelstahl weicht nur sehr gering vom Literaturwert ab. Auch die gemessenen Graphen geben das zu erwartende Bild wieder. So zeigt sich beim Vergleich der Temperaturen bei der statischen Methode, dass die Materialien abhängig von ihrer Wärmeleitfähigkeit unterschiedlich schnell und stark die Temperatur leiten. Auch die Graphen zur Temperaturdifferenz bestätigen die Literaturwerte der Wärmeleitfähigkeiten, da sie zeigen, dass Materialien mit einer hohen Wärmeleitfähigkeit die Temperaturdifferenz schnell ausgleichen können, während diese bei Materialien mit geringer Wärmeleitfähigkeit, in diesem Fall Edelstahl, nicht in der Lage sind die Temperaturdifferenz überhaupt auszugleichen.

4.4 Anhang

Tabelle 6: Die einzelnen Phasendifferenzen, sowie die Gemittelte.

Phasendifferenz	Aluminium	Edelstahl	Messing breit
Δt	5	21	6
	5	28	7
	5	32	7
	5	36	7
	5	38	9
	5	-	9
	6	-	9
	6	-	9
$\overline{\Delta t}$	5,25	31	7,875

4.5 Literaturverzeichnis

- [1] *Versuchsanleitung V204 - Wärmeleitung von Metallen.* TU Dortmund, 2019
- [2] H. Recknagel, E. Sprenger, K. Albers: *Recknagel - Taschenbuch für Heizung + Klimatechnik. 77. Ausgabe*
- [3] P. Kurzweil, B. Frenzel, F. Gebhard: *Physik Formelsammlung. 4. Auflage*