

V406 - Beugung am Spalt

David Gutnikov
david.gutnikov@udo.edu
Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Bearbeitet am 23.06.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Näherungen zur Untersuchung von Beugung am Einzelspalt	3
1.2	Mathematische Beschreibung der Beugung am Einzelspalt	4
1.3	Mathematische Beschreibung der Beugung am Doppelspalt	7
2	Aufbau und Durchführung	9
2.1	Aufbau	9
2.2	Durchführung	9
3	Auswertung	10
4	Diskussion	11
5	Daten	12
6	Literatur	13

1 Theorie

Das Phänomen der Beugung von Licht tritt auf, wenn Licht auf Objekte oder Spalte trifft, deren Ausmaße klein gegen die des einfallenden Lichtstrahls sind. Die zugehörige physikalische Beschreibung ist nicht mit der Beschreibung von Licht als Quantenobjekt möglich. Stattdessen wird auf den Wellencharakter des Lichts zurückgegriffen, der es ermöglicht das Huygensche Prinzip zu nutzen. Dieses beruht darauf, dass eine Wellenfront aus vielen Elementarwellen besteht. Wenn die Wellenfront auf ein Hindernis trifft, laufen nur einzelne Elementarwellen weiter, die untereinander interferieren und so die Beugung erklären.

1.1 Näherungen zur Untersuchung von Beugung am Einzelspalt

Die Beugung von Licht an einem einzelnen Spalt kann über zwei Näherungen beschrieben werden, die sich hinsichtlich

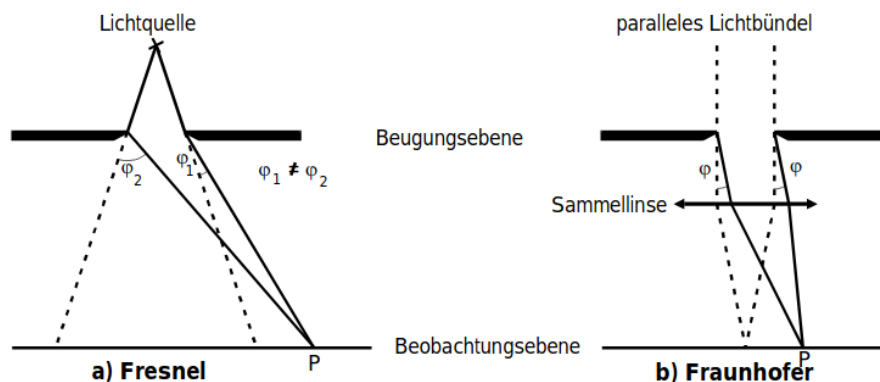


Abbildung 1: In der Abbildung ist auf der linken Seite die Fresnel-Näherung zu sehen und auf der rechten Seite die Fraunhofer-Näherung, bei der eine ebene einfallende Wellenfront angenommen wird und somit die Rechnung stark vereinfacht wird. [1]

Fresnel-Näherung

Bei der Fresnel-Näherung ist der Abstand zwischen Lichtquelle, Spalt und Schirm endlich. Daher ist der einfallende Strahl nicht parallel, sondern läuft, wie in Abbildung 1 a) zu sehen auseinander. Daher werden Strahlen, die auf dem Schirm miteinander interferieren, am Spalt nicht im gleichem Winkel gebeugt.

Fraunhofer-Näherung

Die in Abbildung 1 b) zu sehende Fraunhofer beruht darauf, dass die Lichtquelle ins Unendliche von Spalt und Schirm entfernt wird, sodass der einfallende Lichtstrahl als parallel angenommen werden kann. Nun werden zwei interferierende Strahlen im selben

Winkel gebeugt. Zusätzlich werden die gebeugten Strahlen durch eine Sammellinse auf den Schirm projiziert, sodass auch der Schirm quasi unendlich weit entfernt vom Spalt ist und somit die zweite Bedingung für die Fraunhofer-Näherung erfüllt ist. Da der gemeinsame Beugungswinkel die Rechnung immens vereinfacht, wird für den Versuch die Fraunhofer-Näherung erfüllt.

1.2 Mathematische Beschreibung der Beugung am Einzelspalt

Bei der Beschreibung der Beugung am Einzelspalt wird von einer unendlichen Entfernung zwischen Quelle, Spalt und Schirm ausgegangen, sodass die Fraunhofer-Näherung angewandt werden kann. Dementsprechend trifft eine parallele Wellenfront auf den Spalt. Diese kann über folgende Formel als ebene Welle beschrieben werden, die in z-Richtung läuft:

$$A(z, t) = A_0 \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)}$$

Dabei bezeichnet ω die Frequenz des Lichts, A_0 die Amplitude des Lichts und λ dessen Wellenlänge.

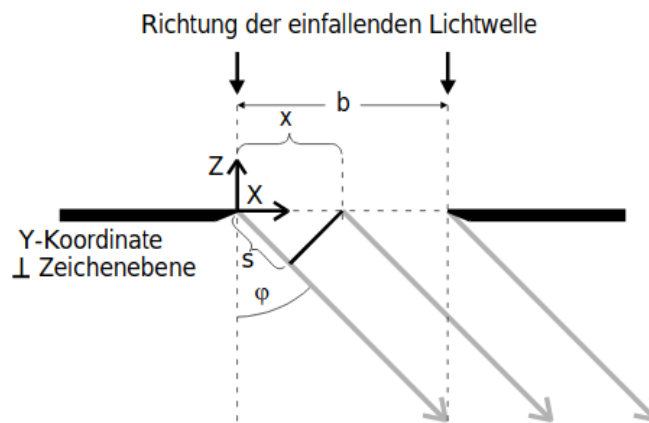


Abbildung 2: In der Abbildung ist Entstehung der Phasendifferenz zwischen zwei Strahlen, die unter dem selben Winkel φ gebeugt werden, dargestellt. [1]

Wie bereits beschrieben entstehen beim Auftreffen der ebenen Welle auf den Spalt viele neue elementare Kugelwellen. In Abhängigkeit vom Beugungswinkel weisen diese einen Phasenunterschied auf. Dies lässt sich bildlich in Abbildung 2 nachvollziehen. Bis die mittlere Kugelwelle entsteht, hat sich die, in einem Abstand x entfernte Kugelwelle, bereits eine gewisse Zeit und demnach Distanz s ausgebreitet. Die beiden Strahlenbündel weisen daher folgenden Phasenunterschied auf:

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin(\varphi)}{\lambda} \quad (1)$$

Um die resultierende Wellenamplitude unter dem Winkel φ zu bestimmen müssen alle unter dem Winkel vom Spalt auslaufenden Strahlenbündel summiert werden. Das Verringern der Distanz x zwischen den Strahlenbündeln auf ein Infimum wandelt die Summe in folgendes Integral über die Spalbreite b um, das die Amplitude B unter Berücksichtigung des Phasenunterschieds zwischen den auslaufenden Strahlenbündeln in Abhängigkeit von der Distanz zum Spalt z , der Zeit t und dem Winkel φ angibt.

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \cdot \int_0^b e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda + \delta}\right)} dx = A_0 \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)} \int_0^b e^{i\left(\frac{2\pi x \sin(\varphi)}{\lambda}\right)} dx \quad (2)$$

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)} \cdot e^{\frac{i\pi b \sin(\varphi)}{\lambda}} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin(\varphi)} \cdot \sin\left(\frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda}\right) \quad (3)$$

Der für die Abhängigkeit vom Winkel φ entscheidende Part ist unabhängig von den zwei Exponentialfunktionen, sodass Gleichung 3 für die Untersuchung der Intensitätsverteilung in Abhängigkeit vom Winkel in folgende Form umgeschrieben werden kann.

$$B(\varphi) = A_0 b \cdot \frac{\sin(\eta)}{\eta} \quad \text{mit} \quad \eta := \frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \quad (4)$$

Die Funktion hat folgende periodische Nulstellen

$$\sin(\varphi) = \pm n \cdot \frac{\lambda}{b}, n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

und ist Abbildung 3 dargestellt.

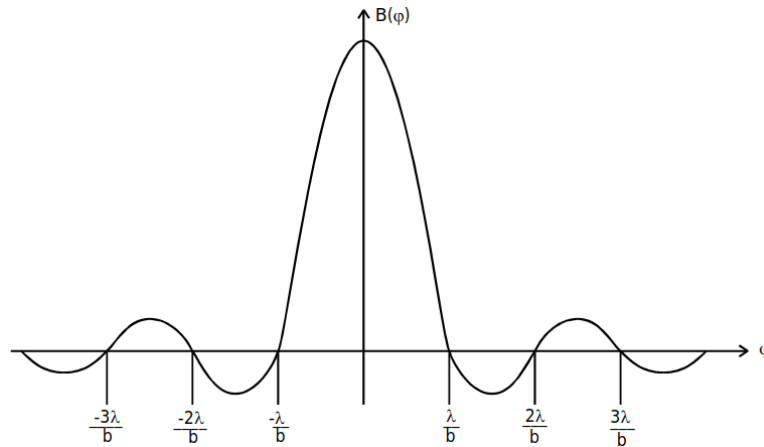


Abbildung 3: In der Grafik ist die Intensitätsverteilung der gebeugten Strahlung in Abhängigkeit vom Beugungswinkel φ dargestellt. Im Experiment wird das Hauptmaximum und die beiden ersten Nebenmaxima bei $\pm \frac{\lambda}{b}$ untersucht. [1]

Die experimentelle Beobachtung des Lichts findet wie üblich über die Messung der Intensität statt. Diese ist das Quadrat der Amplitude, sodass folgender Zusammenhang gilt.

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin(\varphi)} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \right) \quad (6)$$

1.3 Mathematische Beschreibung der Beugung am Doppelspalt

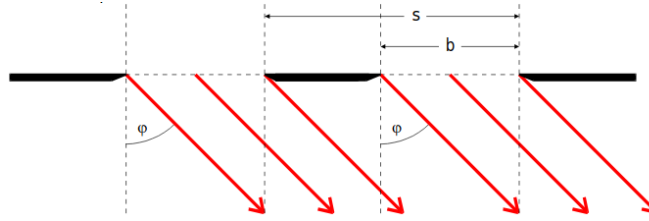


Abbildung 4: In der Abbildung ist der Fall eines Doppelspalts schematisch dargestellt. Die eingezeichneten Strahlen treten im selben Winkel aus dem jeweiligen Spalt aus. s beschreibt die Distanz vom Mittelpunkt eines Spalts zum Nächsten. Diese haben eine Breite b . [1]

Überlagerung zweier Einzelspalte

Die intuitive Methode das Beugungsverhalten eines Doppelspalts zu beschreiben, ist die Überlagerung der Beugungsverteilung zweier Einzelspalte. Unter Annahme der Fraunhofer-Näherung ändert sich das Beugungsverhalten im Vergleich zum Einzelspalt einzig durch das Hinzukommen eines Cosinus-quadrat-Faktors und es ergibt sich folgende Intensitätsverteilung.

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin(\varphi)} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \right) \quad (7)$$

Diese Intensitätsverteilung besitzt Minima 1-ter Ordnung, die den Nulstellen der Amplitudenfunktion 3 des Einzelspalts entsprechen und zusätzlich noch Minima bei den Nullstellen des Cosinus-quadrat-Faktors:

$$\varphi(k) = \arcsin \left(\frac{2k+1}{2s} \right) \cdot \lambda, k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Fouriertransformation der Aperturfunktion

Neben der Bestimmung per Überlagerung zweier Einzelspaltverteilungen, lässt sich die Amplitudenverteilung auch über die Fouriertransformation der Aperturfunktion berechnen. Die Aperturfunktion beschreibt dabei das Beugungsobjekt. Eine unendliche Wand mit einem Spalt der Breite B hat somit folgende Aperturfunktion, da nur am Spalt Licht durch die Wand dringen kann.

$$f(x) = \begin{cases} A_0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fouriertransformation dieser Aperturfunktion liefert folgende Amplitudenfunktion

$$g(\zeta) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{ix\zeta} dx = A_0 \int_0^b e^{ix\zeta} dx = \frac{2A_0}{\zeta} \cdot e^{i\left(\frac{\zeta b}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\zeta b}{2}\right) \quad (9)$$

mit $\zeta := \frac{2\pi \sin(\varphi)}{\lambda}$. Dies entspricht der bereits bestimmten Amplitudenverteilung eines Einzelspalts. Nun kann die Aperturfunktion einfach auf einen Doppelspalt ausgeweitet werden. Dies kann dann zum Beispiel so aussehen, sofern der Abstand der beiden Spalte geringer ist, als die Breite des Strahls:

$$f(x) = \begin{cases} A_0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ A_0 & \text{für } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $b < c < d$. Ein großer Vorteil besteht darin, dass die Fouriertransformation umkehrbar ist und die Aperturfunktion demnach die Fouriertransformierte der Amplitudenverteilung ist. So lassen sich aus der Bestimmung der Amplitudenverteilung die Aperturfunktion und somit die Eigenschaften des Beugungsobjekts bestimmen.

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Aufbau

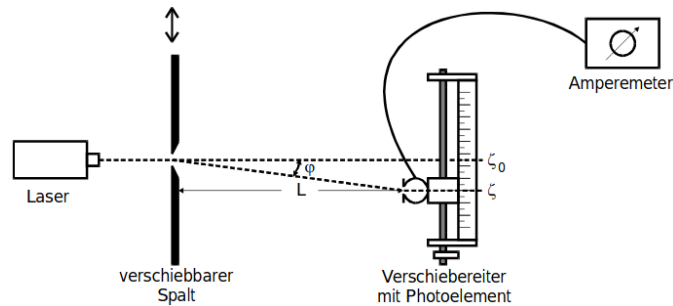


Abbildung 5: In der Abbildung ist der Aufbau zur Untersuchung des Beugungsverhalten zu sehen. Der Laser strahlt auf den Schirm, in dessen Mitte sich ein Einzelspalt findet. In fester Entfernung befindet sich ein Photostrommessgerät auf einem Schieberegler, der auf einer Skala relativ zum Mittelpunkt des Strahls verschoben werden kann. [1]

Wie in Abbildung 5 zu sehen leuchtet ein Laser mit monochromatischem Licht auf eine Wand. Dort wo der Strahl auftrifft, können verschiedene Blenden aufgesetzt werden. Diese ermöglichen das einfache Wechseln von der Bestrahlung eines Einzelspalts, Doppelspalts oder auch Gitter. In einer konstanten Entfernung $L=116,2$ cm befindet sich eine Photodiode, die in der Lage ist die einfallende Intensität über einen Photostrom zu messen. Zudem ist sie auf einer Skala befestigt, die die Positionierung der Photodiode in Relation zum Zentrum des Laserstrahls angibt.

2.2 Durchführung

Aufgrund mangelnder Zeit wird nur das Beugungsbild eines Einzelspalts untersucht.

Untersuchung eines Einzelspalts

Zur Untersuchung des Einzelspalts wird eine Blende in der Wand befestigt, die einen einzelnen Spalt mit der Breite $0,15$ mm enthält. Dieser wird im Zentrum des Laserstrahls positioniert, sodass eine ebene Welle auf ihn trifft. Nun wird das Hauptmaximum in Abständen von $0,3$ mm, sowie die beiden ersten Nebenmaxima in Abständen von $0,5$ mm vermessen. Zusätzlich muss eine Nullmessung des Photostroms durchgeführt werden, um im Nachhinein den Untergrund durch ungewollte Lichtquellen abziehen zu können.

3 Auswertung

Zuerst wurde der Dunkelstrom, d.h. der durch das natürlich vorhandene Licht ausgelöste Strom, gemessen. Für diesen wurde aufgrund des stark abgedunkelten Zimmers ein Strom von $(1 \pm 0,2)$ nA gemessen. Dieser Wert ist um eine bis zwei Zehnerpotenzen kleiner als die Messunsicherheiten der Messwerte für den Strom bei eingeschaltetem Laser. Deswegen würde den Dunkelstrom von den Messwerten abziehen die Messergebnisse nicht beeinflussen.

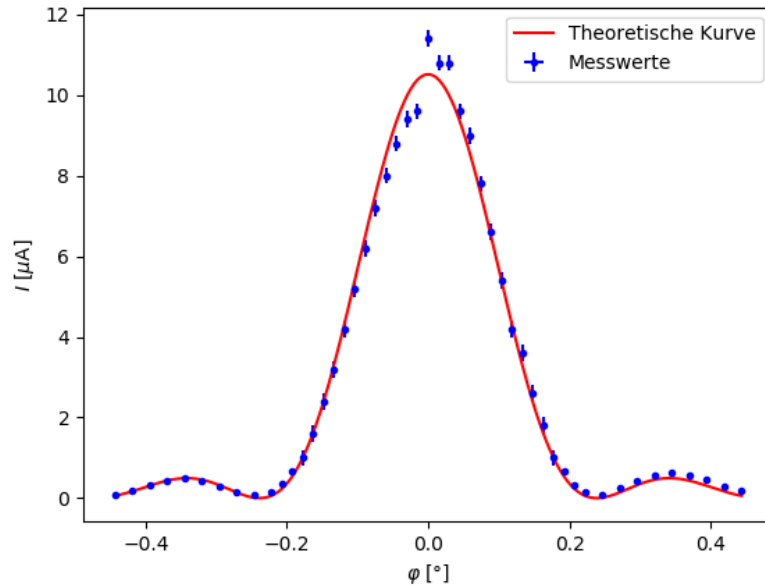


Abbildung 6: Hier ist der Strom gegen den Winkel ϕ aus Abbildung 2 aufgetragen. Die Messwerte dafür befinden sich in Tabelle 1

Es wird eine Ausgleichsrechnung durchgeführt, wobei der Sinus cardinalis $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ an die Messwerte gefittet wird. Dazu wird Gleichung 6 verwendet und ein Faktor k für die Proportionalität zwischen $B(\varphi)$ und $I(\varphi)$ eingeführt. Um Größen zu erhalten, mit denen der Computer besser rechnen kann wird von folgenden Substitutionen Gebrauch gemacht,

$$I_0 = k \cdot A_0^2 \cdot b^2 \quad \text{und} \quad \xi = \frac{b}{\lambda}$$

sodass Gleichung 3 mit ihnen aussieht wie:

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \text{sinc}(\xi \cdot \sin(\varphi))$$

Es ergeben sich für die beiden Parameter $I_0 = 3,24 \pm 0,02$ und $240.1 \pm 2,6$. Mit der Wellenlänge des Lasers $\lambda = 633 \text{ nm}$ ist dann $b = 0,152 \text{ mm}$. Dieser Wert weicht um $a_b = 1,3\%$ vom Literaturwert $b_{\text{lit}} = 0,15 \text{ mm}$ ab.

4 Diskussion

Wir konnten leider wegen dem Zeitmangel keine Werte für den Doppelspalt aufnehmen und mussten uns mit den Messwerten zum Einzelspalt begnügen.

Da die Schrittweite vergleichsweise klein war und das Hauptmaximum mit einer noch kleineren Schrittweite durchgemessen wurde, liegt die theoretische Kurve sehr nah an den Messwerten und ermöglicht eine genaue Bestimmung der Spaltbreite. Diese weicht nur um ca. 1,3% vom Literaturwert ab.

Hinzu kommt auch, dass der Raum in dem der Versuch durchgeführt wurde sehr stark abgedunkelt war, sodass fast kein natürliches Licht an den Detektor kam. Deswegen war der Dunkelstrom so gering, dass er die Messwerte nicht beeinflusst hat.

5 Daten

Tabelle 1: Hier sind die Abstände vom Hauptmaximum a , der Winkel ϕ zwischen der Strecke vom Einzelspalt und einem Punkt auf dem Schirm, der gemessene Strom I und seine Messunsicherheit I_u dargestellt.

a [mm]	ϕ [°]	I [μ A]	I_u [μ A]	a [mm]	ϕ [°]	I [μ A]	I_u [μ A]
-9.00	-0.44	0.10	0.02	0.30	0.01	10.80	0.20
-8.50	-0.42	0.20	0.02	0.60	0.03	10.80	0.20
-8.00	-0.39	0.32	0.02	0.90	0.04	9.60	0.20
-7.50	-0.37	0.44	0.02	1.20	0.06	9.00	0.20
-7.00	-0.35	0.48	0.02	1.50	0.07	7.80	0.20
-6.50	-0.32	0.42	0.02	1.80	0.09	6.60	0.20
-6.00	-0.30	0.30	0.02	2.10	0.10	5.40	0.20
-5.50	-0.27	0.16	0.02	2.40	0.12	4.20	0.20
-5.00	-0.25	0.08	0.02	2.70	0.13	3.60	0.20
-4.50	-0.22	0.16	0.02	3.00	0.15	2.60	0.20
-4.20	-0.21	0.36	0.02	3.30	0.16	1.80	0.20
-3.90	-0.19	0.68	0.02	3.60	0.18	1.00	0.20
-3.60	-0.18	1.00	0.20	3.90	0.19	0.66	0.02
-3.30	-0.16	1.60	0.20	4.20	0.21	0.32	0.02
-3.00	-0.15	2.40	0.20	4.50	0.22	0.16	0.02
-2.70	-0.13	3.20	0.20	5.00	0.25	0.10	0.02
-2.40	-0.12	4.20	0.20	5.50	0.27	0.24	0.02
-2.10	-0.10	5.20	0.20	6.00	0.30	0.42	0.02
-1.80	-0.09	6.20	0.20	6.50	0.32	0.58	0.02
-1.50	-0.07	7.20	0.20	7.00	0.35	0.62	0.02
-1.20	-0.06	8.00	0.20	7.50	0.37	0.58	0.02
-0.90	-0.04	8.80	0.20	8.00	0.39	0.46	0.02
-0.60	-0.03	9.40	0.20	8.50	0.42	0.30	0.02
-0.30	-0.01	9.60	0.20	9.00	0.44	0.18	0.02
0.00	0.00	11.40	0.20				

6 Literatur

[1] *Versuchsanleitung V406 - Beugung am Spalt*. TU Dortmund, 2020