

Biegung elastischer Stäbe

David Gutnikov Lasse Sternemann
david.gutnikov@edu.udo lasse.sternemann@edu.udo

Durchführung am 26.11.19

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theorie	2
2.1 Elastizitätsmodul	2
2.2 Biegung eines einseitig eingespannten Stabes	2
2.3 Biegung eines zweiseitig eingespannten Stabes	3
3 Versuchsdurchführung	3
4 Auswertung	5
4.1 Eckiger Stab	5
4.2 Runder Stab	6

1 Zielsetzung

Es sollen für verschiedene Stäbe die Proportionalitätskoeffizienten (Elastizitätsmodul) zwischen ausreichend kleinen Auslenkungen des Stabes und der auf ihn ausgeübten Spannung bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Elastizitätsmodul

Wenn Kräfte auf einen elastischen Körper wirken, verformt sich dieser, wie in Abbildung 1 zu sehen ist. Meistens werden diese Kräfte pro Fläche angegeben, was als Spannung bezeichnet wird. Diese Spannungen haben einen linearen Zusammenhang zu den durch sie verursachten, relativen Auslenkungen am Körper (Auslenkung relativ zur Länge des Körpers), sofern sie ausreichend klein sind. Der Proportionalitätskoeffizient dieser Abhängigkeit ist der Elastizitätsmodul. Jedes Material besitzt ein eigenes Elastizitätsmodul, welches als Materialkonstante in verschiedenen Fachbereichen Anwendung findet.

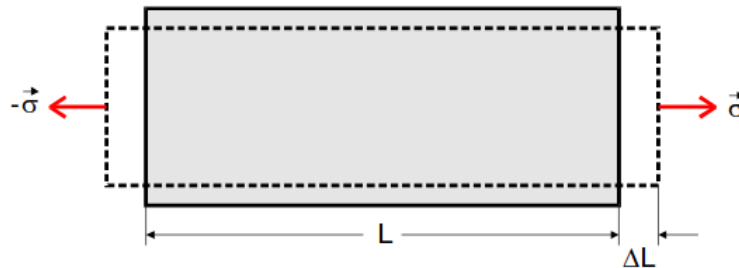


Abbildung 1: Der Körper wird durch σ verformt und erfährt eine Ausdehnung von ΔL .

Die Formel bzw. das „Hook’sche Gesetz“ sieht wie folgt aus mit der Auslenkung ΔL und der Länge des Körpers L :

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

2.2 Biegung eines einseitig eingespannten Stabes

Wie in Abbildung 3 zu sehen ist, wird der Stab durch die senkrecht zu ihm angreifende Kraft F um D ausgelenkt. Die Auslenkung kommt zustande, indem der Stab sich durch das äußere Drehmoment biegt, bis die inneren Normalspannungen ein Kräftegleichgewicht erzeugen und der Stab in der zugehörigen Auslenkung verbleibt. Diese Auslenkung hängt vom Abstand zum Befestigungspunkt x , dem Elastizitätsmodul des Körpermaterials E , dem Flächenträgheitsmoment I und der Länge des Körper sL , sowie der angreifenden Kraft F ab. Dieser Zusammenhang ist in Formel (1) dargestellt:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (1)$$

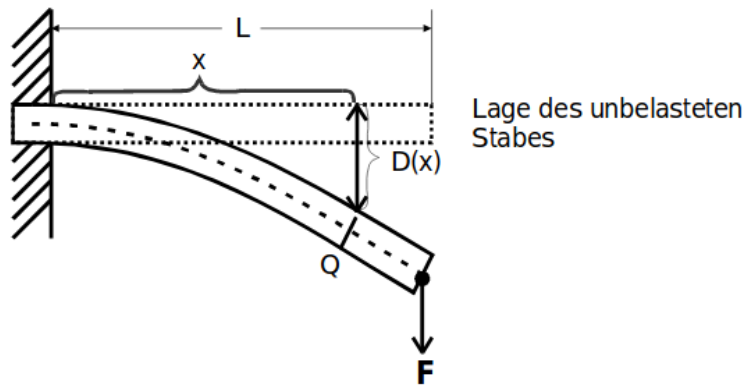


Abbildung 2: Der Stab wird einseitig eingespannt und an einer Seite ein Gewicht angehängt.

2.3 Biegung eines zweiseitig eingespannten Stabes

Wie in 2 zu sehen ist, wird in der Mitte zwischen den Auflagepunkten eine senkrechte Kraft an den Stab angelegt. Die anliegende Kraft wird auf die beiden Auflagepunkte übertragen und erzeugt auch hier nach dem obigen Prinzip eine Auslenkung. Diese ist von den selben Größen wie Formel (1) abhängig, unterscheidet sich jedoch um den Faktor $1/24$. Demnach ergibt sich für die zweiseitige Auflage Formel (2):

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot (3L^2x - 4x^3) \quad (2)$$

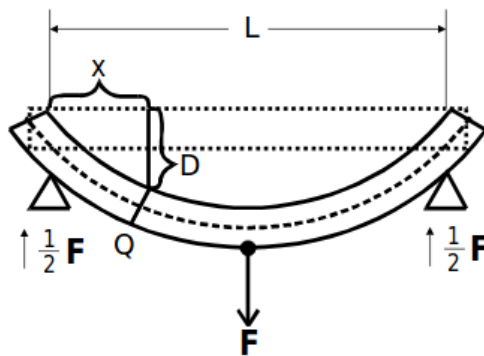


Abbildung 3: Der Stab wird einseitig eingespannt und an einer Seite ein Gewicht angehängt.

3 Versuchsdurchführung

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls der Stabmaterialien werden Gewichte an dem Stab angebracht und daraufhin dessen Auslenkung abhängig von der Entfernung zum Angriffspunkt des Gewichts gemessen. Es werden zwei Stäbe verwendet, von denen einer einen runden Querschnitt und der andere einen

rechteckigen hat. Beide Stäbe werden in zwei Positionen eingespannt und gemessen. Zum einen werden sie nur an einem Auflagepunkt eingespannt und das Gewicht möglichst weit davon entfernt angebracht. Dieser Aufbau ist in Abbildung 3 zu sehen. Bei dem zweiten, in Abbildung ?? zu sehenden Aufbau, liegt der Stab auf zwei Auflagepunkten und das Gewicht greift in der Mitte der beiden Auflagepunkte an.

Zur Messung der Auslenkung werden Messuhren wie in Abbildung 4 verwendet. Diese bestehen aus einem, an einer Feder befestigten, Messtaster und einer runden Skala. Wenn der Messtaster eingedrückt wird, wird die Distanz auf der Rundskala, die von 0,01 bis 10 Millimeter geht, angezeigt. Mit diesen Messuhren wird vor Beginn der Messung der Auslenkung des Stabes über den unausgelenkten Stab gefahren, um die Auslenkung in der Ruhelage zu messen. Dies ist notwendig, da die Stäbe bereits sehr oft ausgelenkt worden sind und nie wieder in die ehemalige gerade Form zurückgekehrt sind. Nachdem auf diese Weise, die Ruheauslenkung festgestellt worden ist, wird das Gewicht angehängen und erneut mit den Messuhren über den Stab gefahren. Dabei werden in Abständen von 3 cm die relativen Auslenkungen gemessen. Im Nachhinein werden die Ruheauslenkungen von den relativen Auslenkungen abgezogen, um die tatsächliche Auslenkung des Stabes zu messen. Da die Messuhr bei zweiseitiger Einspannung in der Mitte blockiert wird, muss in diesem Fall mit zwei verschiedenen Messuhren gemessen werden. Dies kann zu unterschieden in den Messergebnissen führen, da bei unserem Experiment besonders eine der Uhren sehr unzuverlässige Werte lieferte.

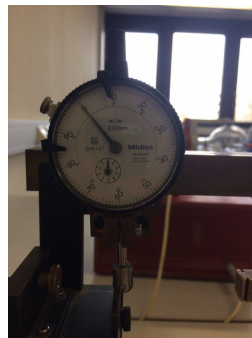


Abbildung 4: Zu sehen ist eine der mechanischen Messuhren, die zur Bestimmung der Auslenkung genutzt worden ist. Sie ist auf 0,01mm genau und kann Längen bis zu 10mm messen.

4 Auswertung

Für das Experiment wurde ein Stab mit rechteckiger Querschnittfläche der Länge $l_e =$, der langen Seite der Grundfläche $b =$, der kurzen Seite der Grundfläche $a =$ und der Masse $m_e =$ und ein runder Stab mit der Länge $l_r =$, dem Radius $r =$ und der Masse $m_r =$ verwendet. Zum späteren Ermitteln des Elastizitätsmoduls müssen zunächst die Flächenträgheitsmomente der Stäbe berechnet werden. Dies erfolgt über die unten folgenden Formeln.

$$I_e = \frac{ab^3}{12} = 1,6645 \cdot 10^{-9} m^4 \quad I_r = \frac{\pi p \cdot r^4}{4} = 2,94375 \cdot 10^{-10} m^4 \quad (3)$$

Um mit den Messwerten die Elastizitätsmodule zu bestimmen wird von einer linearen Regression gebrauch gemacht. Aus ihrer Steigung lässt sich nach Formel x das Elastizitätsmodul bestimmen.

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot (3L^2x - 4x^3) \quad (4)$$

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (5)$$

$$y = m \quad \cdot x \quad + b \quad (6)$$

4.1 Eckiger Stab

Um später einen Referenzwert zum gemessenen Elastizitätsmodul zu haben, wird die Dichte des Körpers mit Formel x berechnet.

$$\rho = \frac{m_e}{abl_e} = 7,055 \frac{g}{cm^3} \quad (7)$$

Auch wenn sich die Dichte des Stabes um circa 21 Prozent von der Literaturdichte von Kupfer ($8,92 \text{ g/cm}^3$) unterscheidet, lässt sich aufgrund der markanten Farbe des Stabes vermuten, dass es sich um einen Kupferstab handelt.

Durch Umstellen von Gleichung x lässt sich das Elastizitätsmodul einfach berechnen. Der Fehler des Elastizitätsmoduls stammt aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung des Fehlers der Steigung aus der linearen Regression.

$$\Delta E = \frac{mg}{m^2 I n} \cdot \Delta m \text{ mit } n = 2 \text{ bzw. } 48 \quad (8)$$

$$E_1 = \frac{mg}{2mI} = 96,3950 \pm 5,9635 \text{ GPa mit } \Delta a = \pm 5,9636 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$$

Auch hier lässt sich das Elastizitätsmodul durch Umstellen von Gleichung x nach E berechnen. Diese mal stammt der Fehler aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung des gemittelten Fehlers der Steigungen aus den zwei linearen Regression, die aufgrund der unterschiedlichen Uhren durchgeführt worden sind.

$$\Delta a = (\Delta a_1 + \Delta a_2) \cdot \frac{1}{2} = 2,0632 \cdot 10^{-4}$$

$$E_2 = \frac{mg}{2mI} = 76,8383 \pm 4,1913 \text{ GPa mit } \Delta a = \pm 2,0632 \cdot 10^{-4}$$

Beim Vergleich der beiden Elastizitätsmodule fällt auf, dass E_2 um 20,3 Prozent von E_1 abweicht. Währenddessen beträgt der Literaturwert $E_{Cu, Lit}$ xxx. E_1 weicht davon um xxx Prozent ab und E_2 um xxx Prozent.

Tabelle 1: Messwerte des eckigen, einseitig eingespannten Stabes. x ist der Abstand vom Einspannpunkt, $D_0(x)$ ist die Auslenkung ohne Krafteinwirkung, $D_a(x)$ ist die Auslenkung mit Krafteinwirkung, $D(x)$ ist die tatsächliche Auslenkung, also die Differenz von D_a und D_0 .

x [m]	$D_0(x)$ [$10^{-3}m$]	$D_a(x)$ [$10^{-3}m$]	$D(x)$ [$10^{-3}m$]
0.03	0.07	0.17	0.10
0.06	0.09	0.39	0.30
0.09	0.11	0.57	0.46
0.12	0.15	0.86	0.75
0.15	0.17	1.20	1.03
0.18	0.22	1.63	1.47
0.21	0.24	1.97	1.73
0.24	0.10	2.40	2.30
0.27	0.09	2.80	2.71
0.30	-0.05	3.26	3.31
0.33	-0.11	3.74	3.85
0.36	-0.21	4.23	4.44
0.39	-0.25	4.77	5.02
0.42	-0.31	5.33	5.64
0.45	-0.33	5.89	6.22

4.2 Runder Stab

Der Elastizitätsmodul des Materials wird nun analog zum eckigen Stab bei einseitiger Aufhängung bestimmt und es ergibt sich wieder mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$E_1 = 308,3912 \pm 2,2898 \text{ GPa mit } \Delta a = \pm 4,8454 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$$

Auch hier wird das Elastizitätsmodul analog zum Vorgang beim eckigen Stab bei zweiseitiger Auflage bestimmt.

$$\Delta a = (\Delta a_1 + \Delta a_2) \cdot \frac{1}{2} = 1,5896 \cdot 10^{-4}$$

$$E_2 = \frac{mg}{2mI} = 268,9202 \pm 6,9952 \text{ GPa mit } \Delta a = \pm 1,5896 \cdot 10^{-4}$$

Zunächst wird die Abweichung der im Experiment bestimmten Elastizitätsmodule berechnet. E_2 weicht um 12,7 Prozent von E_1 ab. Von dem Literaturwert, der xxx beträgt, weicht E_1 um xxx Prozent ab und E_2 um xxx Prozent ab.

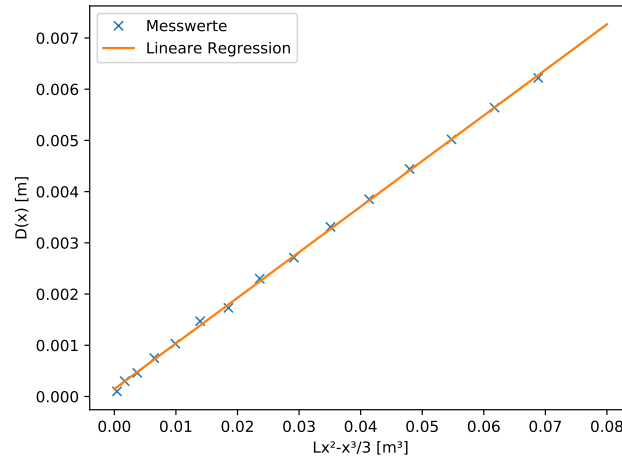


Abbildung 5: In der Grafik sind die Auslenkungen D gegen $Lx^2-x^3/3$ aufgetragen. Durch diese Wertepaare wurde zudem per linearer Regression eine Ausgleichsgerade gelegt. Deren Steigung beträgt 0,08901088 und deren y-Achsenabschnitt 0,00014607.

Tabelle 2: Messwerte des eckigen, zweiseitig eingespannten Stabes. x ist der Abstand vom rechten Einspannpunkt, $D_0(x)$ ist die Auslenkung ohne Krafteinwirkung, $D_a(x)$ ist die Auslenkung mit Krafteinwirkung, $D(x)$ ist die tatsächliche Auslenkung, also die Differenz von D_a und D_0 , x_{rel} ist der Abstand zum jeweils näheren Einspannpunkt.

x [m]	$D_0(x)$ [$10^{-3}m$]	$D_a(x)$ [$10^{-3}m$]	$D(x)$ [$10^{-3}m$]	x_{rel} [m]
0.03	0.05	0.17	0.12	0.03
0.06	0.10	0.31	0.21	0.06
0.09	0.16	0.46	0.30	0.09
0.12	0.25	0.63	0.38	0.12
0.15	0.29	0.63	0.38	0.15
0.18	0.40	0.94	0.54	0.18
0.21	0.38	0.96	0.56	0.21
0.24	0.41	1.02	0.61	0.24
0.30	-0.04	0.74	0.78	0.24
0.33	-0.15	0.62	0.77	0.21
0.36	-0.26	0.45	0.71	0.18
0.39	-0.36	0.28	0.64	0.15
0.42	-0.45	0.10	0.55	0.12
0.45	-0.56	-0.12	0.44	0.09
0.48	-0.65	-0.33	0.32	0.06
0.51	-0.77	-0.55	0.22	0.03
0.54	-0.92	-0.70	0.22	0.01

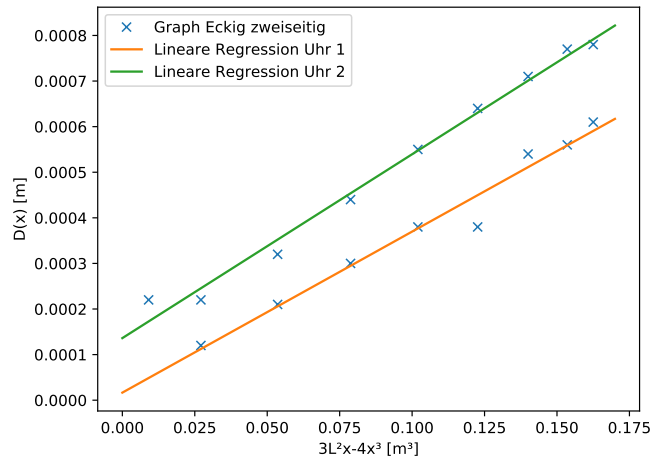


Abbildung 6: In der Grafik sind die Auslenkungen D gegen $Lx^2 - x^3/3$ aufgetragen. Durch diese Wertepaare wurde zudem per linearer Regression zwei Ausgleichsgerade gelegt. Es wurden zwei Ausgleichsgeraden generiert, da die zwei Uhren stark unterschiedlich gemessen haben. Die Gerade von Uhr 1 hat die Steigung $3,53205921 \cdot 10^{-3}$ und den y-Achsenabschnitt $1,65755043 \cdot 10^{-5}$, die von Uhr 2 die Steigung $4,03285 \cdot 10^{-3}$ und den y-Achsenabschnitt $0,13614 \cdot 10^{-3}$.

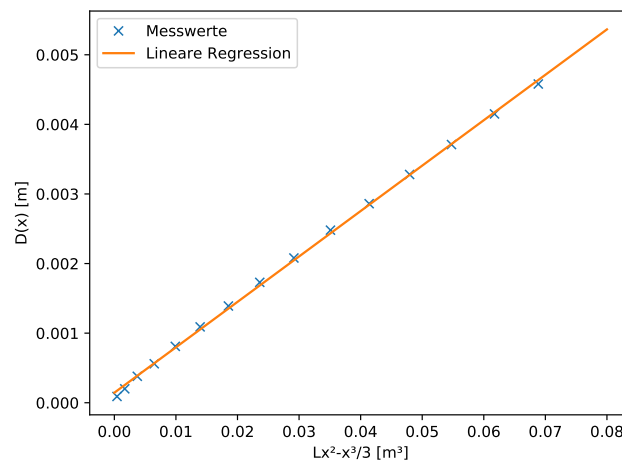


Abbildung 7: In der Grafik sind die Auslenkungen D gegen $Lx^2 - x^3/3$ aufgetragen. Durch diese Wertepaare wurde zudem per linearer Regression eine Ausgleichsgerade gelegt. Deren Steigung beträgt $0,06525698$ und deren y-Achsenabschnitt $0,00014415$.

Wieder wird über das Volumen und die Masse des Stabes die Dichte zur Identifizierung des Materials berechnet.

$$\rho = \frac{m_r}{np \cdot \pi r^2 l_r} = 10,0157 \frac{g}{cm^3}$$

Auch hier scheint die graue Farbe bereits Rückschluss auf das Metall Eisen ziehen lassen. Da die gemessene Dichte auch nur 22,6 Prozent von der Literaturdichte (7,85 g/cm³) abweicht, gehen wir von einem eisernen Stab aus.

Tabelle 3: Messwerte des runden, einseitig eingespannten Stabes wie in Tabelle 1.

x [m]	$D_0(x)$ [$10^{-3}m$]	$D_a(x)$ [$10^{-3}m$]	$D(x)$ [$10^{-3}m$]
0.03	-0.01	0.08	0.09
0.06	-0.14	0.06	0.20
0.09	-0.28	0.10	0.38
0.12	-0.39	0.17	0.56
0.15	-0.52	0.29	0.81
0.18	-0.60	0.49	1.09
0.21	-0.76	0.63	1.39
0.24	-0.84	0.89	1.73
0.27	-0.93	1.15	2.08
0.30	-1.05	1.43	2.48
0.33	-1.13	1.73	2.86
0.36	-1.22	2.06	3.28
0.39	-1.31	2.42	3.71
0.42	-1.34	2.81	4.15
0.45	-1.37	3.21	4.58

Tabelle 4: Messwerte des runden, zweiseitig eingespannten Stabes wie in Tabelle 2.

x [m]	$D_0(x)$ [$10^{-3}m$]	$D_a(x)$ [$10^{-3}m$]	$D(x)$ [$10^{-3}m$]	x_{rel} [m]
0.03	0.28	0.40	0.12	0.03
0.06	0.41	0.65	0.24	0.06
0.09	0.42	0.85	0.43	0.09
0.12	0.41	0.97	0.56	0.12
0.15	0.37	1.05	0.68	0.15
0.18	0.26	1.12	0.86	0.18
0.21	0.24	1.08	0.84	0.21
0.24	0.19	1.07	0.88	0.24
0.30	0.70	1.81	1.11	0.25
0.33	0.61	1.68	1.07	0.22
0.36	0.55	1.52	0.97	0.19
0.39	0.49	1.34	0.85	0.16
0.42	0.42	1.16	0.74	0.13
0.45	0.34	0.96	0.62	0.10
0.48	0.25	0.75	0.50	0.07
0.51	0.16	0.50	0.34	0.04
0.54	0.04	0.29	0.25	0.01

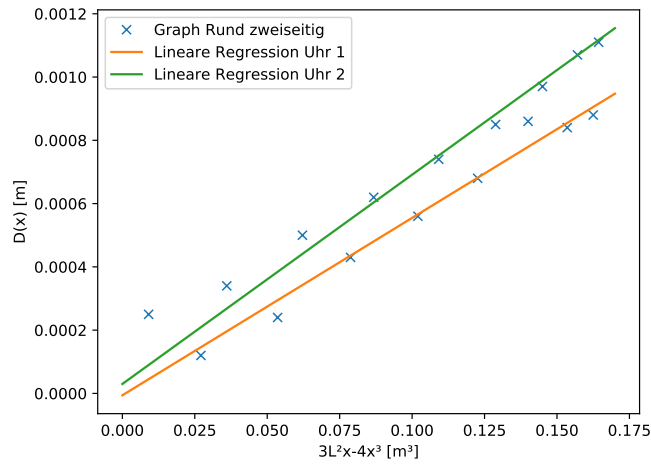


Abbildung 8: In der Grafik sind die Auslenkungen D gegen $Lx^2-x^3/3$ aufgetragen. Durch diese Wertepaare wurde zudem per linearer Regression zwei Ausgleichsgerade gelegt. Es wurden zwei Ausgleichsgeraden generiert, da die zwei Uhren stark unterschiedlich gemessen haben. Die Gerade von Uhr 1 hat die Steigung $5,60760 \cdot 10^{-3}$ und den y-Achsenabschnitt $-5,94841 \cdot 10^{-6}$, die von Uhr 2 die Steigung $6,61459 \cdot 10^{-3}$ und den y-Achsenabschnitt $2,98337 \cdot 10^{-5}$.