Fourier-Synthese

David Gutnikov Lasse Sternemann

Durchführung am 4.11.19

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie der Fourier-Synthese

Mit dem mathematischen Konzept der Fourier-Synthese kann man jede periodische Funktion durch eine Addition von Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k cos(\omega_k t) + B_k sin(\omega_k t)) \qquad mit\ \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \tag{1}$$

Die Unbekannten aus Formel (1) lassen sich wie folgt bestimmen.

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos(w_k t)dt \qquad mit\ A_0 = \frac{1}{T}\int f(t)dt$$
$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin(w_k t)dt \qquad mit\ B_0 = 0$$

Wenn die Funktion eine Symmetrie aufweist, kann die Synthese vereinfacht werden. So muss bei punktsymmetrischen/ungeraden Funktionen der Sinus-Term wegfallen und man setzt B_k gleich Null. Wenn die Funktion achsensymmetrisch/gerade ist, wird der Cosinus weggelassen und demenstprechend A_k gleich Null gesetzt.

2 Fourier-Synthese von $f(x) = |sin(t)|$

Die anzunähernde Funktion ist achsensymmetrisch/gerade und B_k wird daher gleich Null gesetzt. Es wird eine Periode $T = \pi$ gewählt und die Frequenz ω_k entspricht demnach $2k$.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{17}(A_k cos(\omega_k t)) \tag{2}$$

Formel (2) ist die zu bestimmende Funktion. Nun müssen wir noch A_0 bis A_{17} bestimmen.

$$A_0 = \frac{1}{T}\int |sin(t)|dt$$
$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |sin(t)|cos(w_k t)dt$$

Aus den Berechnungen ergibt sich das Frequenzspektrum und die angenäherte Funktion, die in Abbildung (1) und (2) dargestellt sind.

Tabelle 1: Frequenzspektrum

$\frac{\omega_k}{2}$	A_k
0	0,0000
1	2,0000
2	-1,0000
3	0,6667
4	-0,5000
5	0,4000
6	-0,3334
7	0,2857
8	-0,2500
9	0,2223
10	-0,2000
11	0,1818
12	-0,1667
13	0,1538
14	-0,1429
15	0,1334
16	-0,1250
17	0,1176

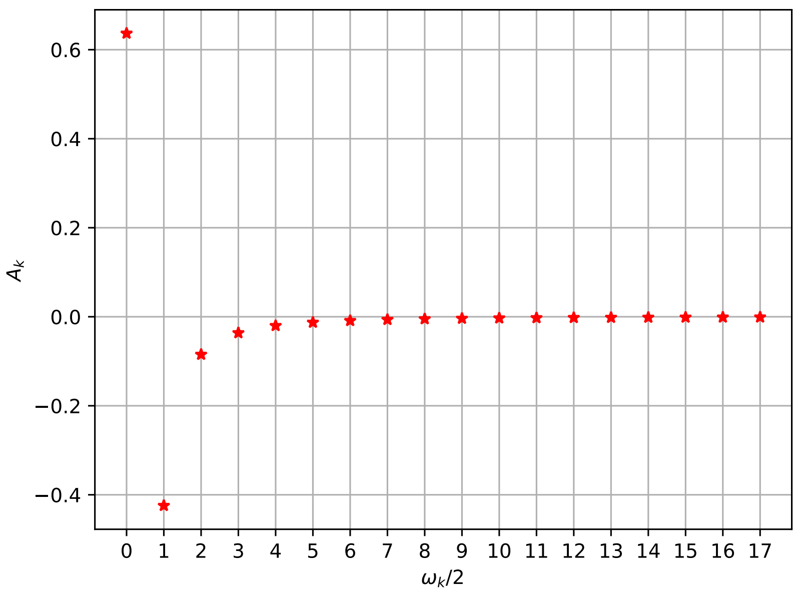

Abbildung 1: Frequenzspektrum der Fourier-Synthese von $f(x) = |sin(x)|$

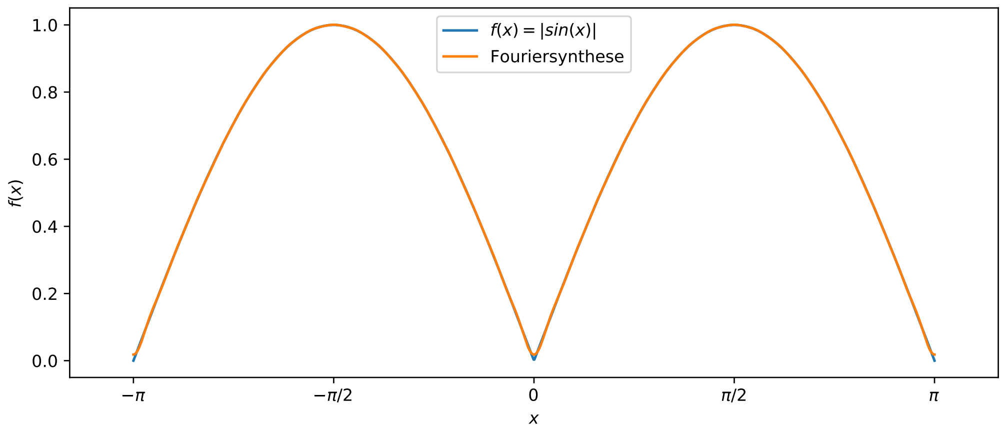

Abbildung 2: Graph der Fourier-Synthese von $f(x) = |sin(x)|$

3 Fourier-Synthese von $f(x) = x$

Die anzunähernde Funktion ist punktsymmetrisch/ungerade und A_k wird daher gleich Null gesetzt. Es wird eine Periode $T = 2\pi$ gewählt und die Frequenz ω_k entspricht demnach k.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{1} 7(B_k sin(\omega_k t)) \tag{3}$$

Formel (3) ist die zu bestimmende Funktion. Nun müssen wir noch B_0 bis B_{17} bestimmen.

$$B_0 = 0$$
$$B_k = \frac{2}{t} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |sin(t)| cos(w_k t) dt$$

Aus den Berechnungen ergibt sich das Frequenzspektrum und die angenäherte Funktion, die in Abbildung (3) und (4) dargestellt sind.

Tabelle 2: Frequenzspektrum

ω_k	B_k
0	0,6366
1	-0,4244
2	-0,0849
3	-0,0364
4	-0,0202
5	-0,0129
6	-0,0089
7	-0,0065
8	-0,0050
9	-0,0039
10	-0,0032
11	-0,0026
12	-0,0022
13	-0,0019
14	-0,0016
15	-0,0014
16	-0,0012
17	-0,0011

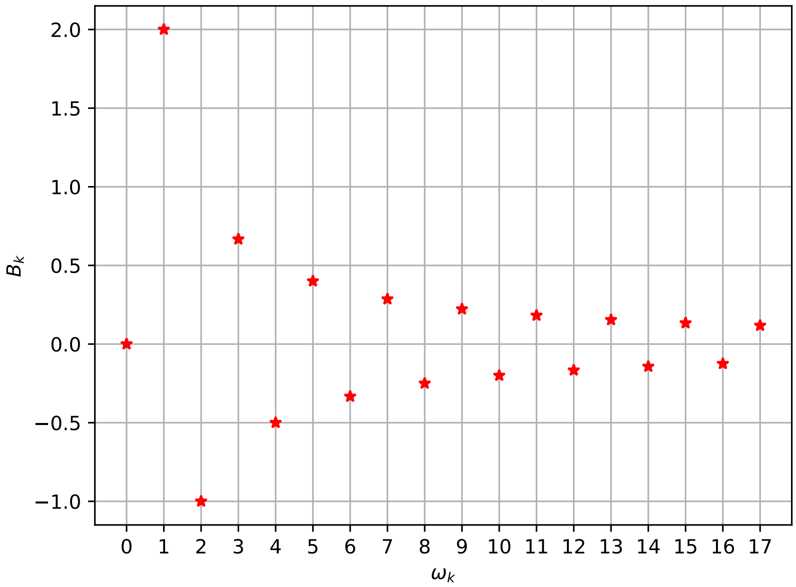

Abbildung 3: Frequenzspektrum der Fourier-Synthese von $f(x) = x$

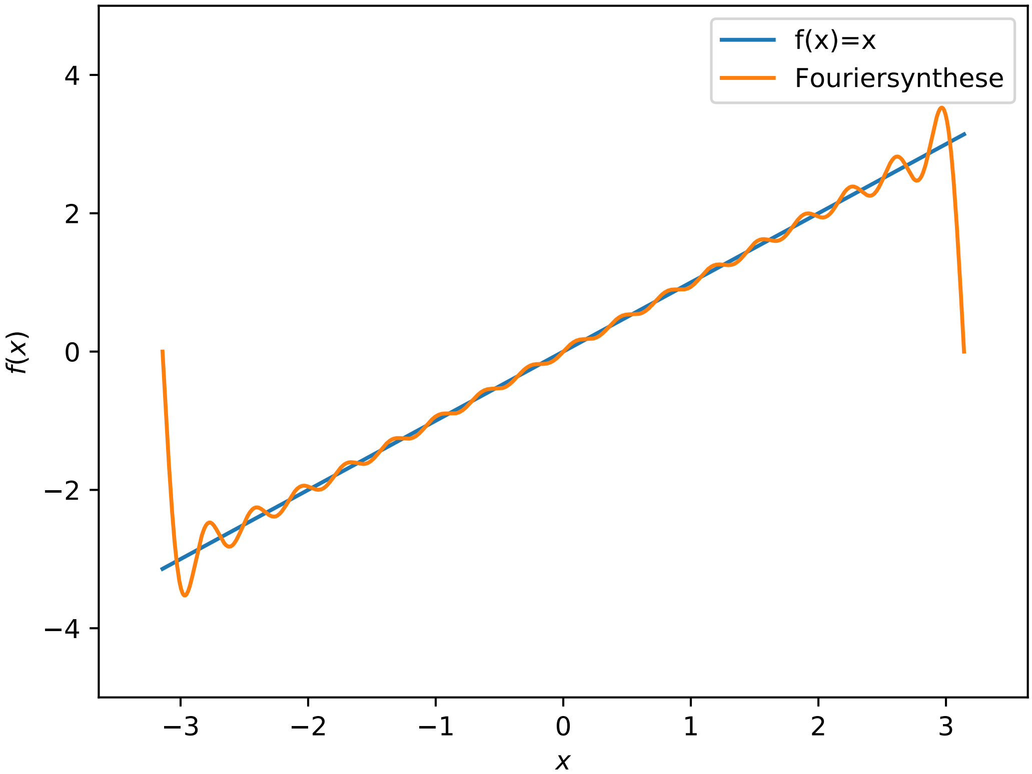

Abbildung 4: Graph der Fourier-Synthese von $f(x) = x$