

Gekoppelte elektrische Schwingungen

David Gutnikov
david.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 14.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise	3
2.2	Frequenzabhängigkeit des Stroms im kapazitiv gekoppelten Schwingkreis .	5
3	Durchführung	7
3.1	Justierung	7
3.2	Energieaustausch	7
3.3	Messung der Fundamentalfrequenzen	8
3.4	Messung des frequenzabhängigen Stromverläufe	8

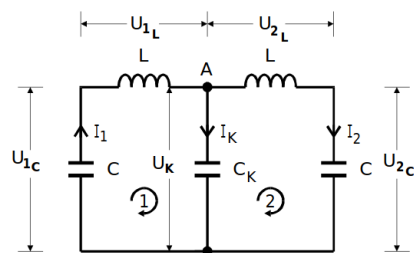
1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das Verhalten von gekoppelten Schwingkreisen genauer untersucht werden. Dazu werden nun elektrische Schwingkreise genutzt, da deren Verhalten weitaus besser zu messen ist, als das eines mechanischen Schwingungssystems.

2 Theorie

2.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Abbildung 1: Das Schaltbild zur Erzeugung einer kapazitiv gekoppelten Schwingung. [1]



Ein kapazitiv gekoppelter Schwingkreis besteht aus zwei einzelnen Schwingkreisen, die über einen Kondensator gekoppelt sind. In diesem Versuch werden dazu zwei LC-Schwingkreise verwendet, die wie in Abbildung 1 zu sehen geschaltet sind. Die Spulen haben hierbei dieselben Induktivitäten und auch die Kapazitäten des linken und rechten Kondensators gleichen sich. Um nun die Differentialgleichungen des Systems zu bestimmen, müssen zunächst die Zeitabhängigkeiten der Ströme und Spannungen betrachtet werden. Eine allgemeine Betrachtung der Ströme, über die Kirchhoffsche Knotenregel, in Punkt A ergibt für die Ströme:

$$I_1 = I_k + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Die allgemeine Betrachtung der Spannungen in den Maschen 1 und 2 über die Kirchhoffsche Maschenregel liefert für beide Maschen:

$$U_C + U_L U_K = 0$$

Durch Einsetzen der Zusammenhänge

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt$$
$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

und unter Berücksichtigung von Beziehung 1 ergibt sich nach einer zeitlichen Ableitung

pro Schwingkreis eine Differentialgleichung.

$$\text{Schwingkreis 1:} \quad L\ddot{I}_1 + \frac{I_1}{C} + \frac{(I_1 - I_2)}{C_k} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Schwingkreis 2:} \quad L\ddot{I}_2 + \frac{I_2}{C} - \frac{(I_1 - I_2)}{C_k} = 0 \quad (3)$$

Um homogene Differentialgleichungen zu erhalten werden nun die Differenz oder Summe der Ströme I_1 und I_2 betrachtet. Dies gelingt durch einfaches Addieren bzw. Subtrahieren der beiden Gleichungen 3. Die sich dadurch ergebenden homogenen Differentialgleichungen

$$\text{Stromsumme :} \quad L \cdot \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} \cdot (I_1 + I_2) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Stromdifferenz :} \quad L \cdot \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right) \cdot (I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

Die Lösung zur Differentialgleichung der Stromsumme entspricht einer harmonischen Schwingung mit der Schwingungsfrequenz:

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1,0} + I_{2,0}) \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \nu^+ = (2\pi \cdot \sqrt{LC})^{-1} \quad (6)$$

Diese Schwingungsfrequenz entspricht der eines einzelnen LC-Kreises und die Amplitude der Stromsumme entspricht der Summe der einzelnen Stromamplituden.

Analog dazu schwingt die Lösung der Stromdifferenz mit der Differenz der einzelnen Stromamplituden und mit folgender Frequenz:

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1,0} - I_{2,0}) \cdot \cos \left[\frac{t}{\sqrt{L \cdot \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right)^{-1}}} \right] \quad (7)$$

$$\nu^- = \left[2\pi \cdot \sqrt{L \cdot \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right)^{-1}} \right]^{-1} \quad (8)$$

Um nun die eigentlich gesuchten Funktionen der einzelnen Ströme zu erhalten, muss der vorherige Trick wieder rückgängig, gemacht werden, also die Lösungen der Schwingungen addiert bzw. subtrahiert werden, sodass sich die Lösungen für die einzelnen Ströme ergeben.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^+t) + \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^-t) \quad (9)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^+t) - \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cdot \cos(2\pi\nu^-t) \quad (10)$$

Eine Betrachtung dieser beiden Differentialgleichungen lässt auf zwei Spezialfälle schließen. Der eine ergibt sich, wenn beide Anfangsamplituden gleich sind. In diesem Fall verschwindet die zweite Fundamentalschwingung nämlich komplett und nur der ν^+ -Anteil schwingt.

Andersherum verschwindet der ν^+ -Anteil und die erste Fundamentalschwingung, wenn die Anfangsamplituden zwar betragsmäßig gleich sind, jedoch entgegengesetzte Vorzeichen haben. Abgesehen von diesen Fundamentalschwingungen kann es auch zu einer Schwebung kommen, wenn zu Beginn nur einer der Schwingkreise schwingt und die Anfangsamplitude der anderen Schwingung demnach gleich null ist. Für diese Schwebungen ergeben sich folgende Schwingungsgleichungen:

$$I_1(t) = I_{1,0} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad \text{bei } I_{2,0} = 0 \quad (11)$$

$$I_2(t) = I_{1,0} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad (12)$$

Bei der Schwebung ändert sich die Amplitude mit der Schwebungsfrequenz

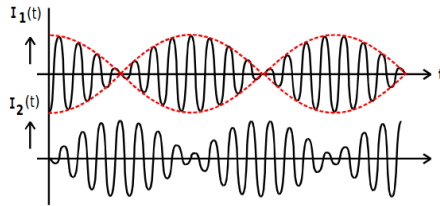
$$\nu_{\text{Schwebung}} = \nu^+ - \nu^- \quad (13)$$

während die eigentliche Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu_{\text{Schwingung}} = \frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-) \quad \text{und bei nahezu gleicher Frequenz} \quad \nu_{\text{Schwingung}} \approx \nu^+ \quad (14)$$

Der Unterschied zwischen diesen zwei Frequenzen ist in Abbildung 2 zu erkennen.

Abbildung 2: Das Schwingverhalten einer Schwebung in der die Schwebungsfrequenz (oben) und die eigentliche Frequenz der Schwingung (unten) zu sehen ist.[1]



2.2 Frequenzabhängigkeit des Stroms im kapazitiv gekoppelten Schwingkreis

Für die in Abbildung 3 zu sehenden Maschen ergeben sich über die Kirchhoffsche Maschenregel folgende Terme:

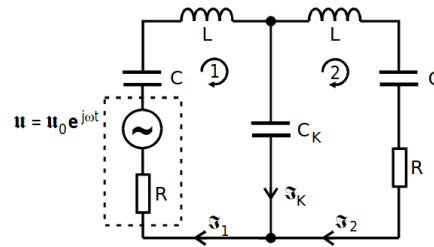
$$\text{Masche 1} = (Z_C + Z_L + Z_{C_k} + Z_R) \cdot I_1 - Z_{C_k} \cdot I_2 = U \quad (15)$$

$$\text{Masche 2} = (Z_C + Z_L + Z_{C_k} + Z_R) \cdot I_2 - Z_{C_k} \cdot I_1 = 0 \quad (16)$$

Dabei stehen die Z s für die Impedanzen der Kondensatoren, Spulen und Widerstände.

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} \quad Z_L = j\omega L \quad Z_{C_k} = -j \frac{1}{\omega C_k} \quad Z_R = R$$

Abbildung 3: Das Schaltbild des kapazitiv gekoppelten Schwingkreis bei äußerer Anregung durch einen Sinusgenerator. Die Widerstände stehen dabei für sämtliche in den Schwingkreisen auftretende Verluste. [1]



Durch Eliminieren von I_1 lässt sich aus 16 folgende Formel für den Betrag von I_2 herleiten:

$$|I_2| = |U| \cdot \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_k^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_k} - \omega C_k Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_k\right)^2}} \quad (17)$$

$$\text{mit} \quad Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k} \right) \quad (18)$$

Bei zwei Resonanzfrequenzen wird I_2 maximal. Die zugehörigen maximalen Ströme lassen sich wie folgt berechnen:

$$|I(\omega^+)| = \frac{1}{R \cdot \sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}}} \quad (19)$$

$$|I(\omega^-)| = \frac{1}{R \cdot \sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC} \cdot \left(1 + \frac{C}{C_k}\right)}} \quad (20)$$

In der Praxis lassen sich beide Ströme durch

$$|I(\omega^+)| \approx |I(\omega^-)| \approx \frac{1}{2R} \quad (21)$$

annähern, da der restliche Teil der Wurzelterme vernachlässigbar klein ist.

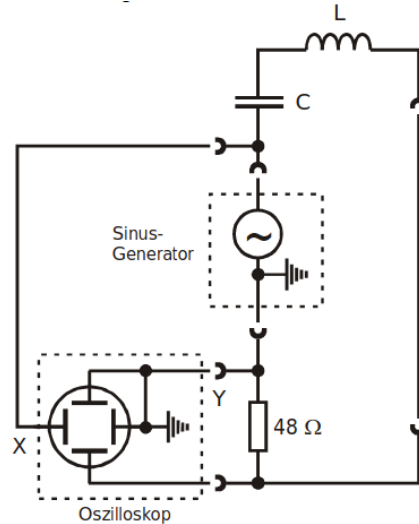
3 Durchführung

3.1 Justierung

Gekoppelte Schwingungen basieren darauf, dass die einzelnen Schwinger untereinander Energie übertragen. Damit dieser Prozess vollständig ablaufen kann müssen die beiden Schwingkreise auf dieselbe Resonanzfrequenz justiert werden. Dazu wird zunächst über Schaltung 4 die Resonanzfrequenz des Schwingkreises mit fester Kapazität bestimmt. Dies

geschieht indem die Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Schwingkreisstrom gemessen wird. Dazu werden die im XY-Betrieb entstehenden Lissajous-Figuren verwendet, da sie verschwinden, wenn die Resonanzfrequenz erreicht ist. Der andere Schwingkreis wird daraufhin mit derselben Schaltung auf die gemessene Resonanzfrequenz justiert, indem dessen Kapazität variiert wird.

Abbildung 4: Das Schaltbild zur Justierung der beiden Schwingkreise.



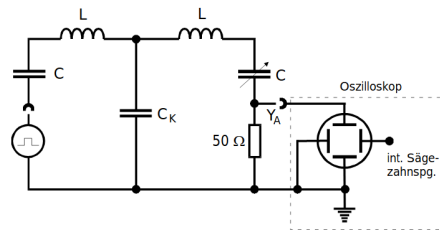
3.2 Energieaustausch

Zunächst soll der Energieaustausch zwischen den beiden Schwingkreisen beobachtet werden. Hierfür wird einer der Schwingkreise durch ein Rechtecksignal extern angeregt und die Spannung des anderen, nicht angeregten Stromkreises am Oszilloskop dargestellt. Das zugehörige Schaltbild findet sich in Abbildung 5. Auf dem Oszilloskopbild kann die Schwebung direkt erkannt werden und das Verhältnis aus Schwebungs- und Schwingungsfrequenz ermittelt werden, indem die Maxima oder Minima der Schwingung innerhalb einer Schwebung abgezählt werden. Dieses Vorgehen wird für verschiedene Kapazitäten des Koppelkondensators C_k wiederholt.

3.3 Messung der Fundamentalfrequenzen

Nun sollen die Fundamentalfrequenzen in Abhängigkeit von verschiedenen Kapazitäten des Koppelkondensators C_k gemessen werden. Dazu wird dieselbe Schaltung genutzt mit dem Unterschied, dass über einen Sinusgenerator angeregt wird. Die Generatorspannung und die des nicht extern angeregten Schwingkreises werden im XX-Betrieb auf das Oszilloskop gegeben und die Frequenz wird wieder über Lissajous-Figuren ermittelt. Sie sind vorhanden, wenn eine Phasenverschiebung von 0 (aufsteigende Gerade auf Oszilloskop) oder π (absteigende Gerade auf Oszilloskop) vorliegt.

Abbildung 5: Das Schaltbild zur Beobachtung des Energieaustauschs zwischen den beiden Schwingkreisen.



3.4 Messung des frequenzabhängigen Stromverläufe

Um den Verlauf der Stromstärken zu messen wird eine Schaltung genutzt, die der in Abbildung 6 ähnelt. Der Unterschied liegt darin, dass kein XY-Schreiber vorhanden ist und die Stromstärke daher anders bestimmt werden muss. Daher wird die an R abfallende Spannung für beide Fundamentalschwingungen über ein Oszilloskop gemessen. Dies erfolgt unter Variation der Kapazität des Koppelkondensators. Die Stromstärke wird später über die gemessenen Spannungen und die Widerstände der Schaltung bestimmt.

Abbildung 6: Das Schaltbild zur Beobachtung des Energieaustauschs zwischen den beiden Schwingkreisen.

