

Brückenschaltungen

David Gutnikov
david.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 03.12.2019

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theoretische Grundlagen	2
2.1 Allgemeine Brückenschaltung	2
2.1.1 Knotenregel	2
2.1.2 Maschenregel	3
2.2 Brückenschaltung mit komplexen Widerständen	3
2.3 Wheatstonesche Brücke	4
2.4 Kapazitätsmessbrücke	4
2.5 Induktivitätsmessbrücke	5
2.6 Maxwell-Brücke	7
2.7 Wien-Robinson-Brücke	7

1 Zielsetzung

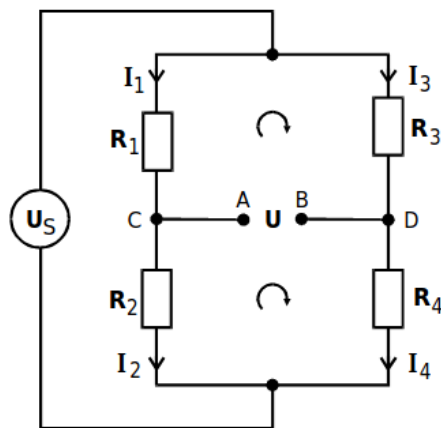
Mithilfe von verschiedenen Brückenschaltungen sollen elektrische Widerstände und die damit verbundenen physikalischen Größen, wie z.B. die Kapazität eines Kondensators oder die Induktivität einer Spule, möglichst genau gemessen werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Allgemeine Brückenschaltung

Brückenschaltungen bestehen aus vier oder mehr Widerständen, die wie in Abbildung 1 parallel und dann in Reihe geschaltet sind.

Abbildung 1: Die Abbildung einer einfachen Brückenschaltung.



Hierbei wird die Spannung zwischen den Punkten A und B, als Brückenspannung U bezeichnet. Diese Spannung lässt sich mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze durch die bekannten Größen der Widerstände und der Speisespannung U_S darstellen. Die Kirchhoffschen Gesetze lauten:

2.1.1 Knotenregel

In jedem Knotenpunkt in dem sich elektrische Ströme verzweigen, ist die Summe der hineinfließenden und der herausfließenden Ströme gleich.

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

Abbildung 2: Das Beispiel eines Verzweigungspunktes el. Ströme.

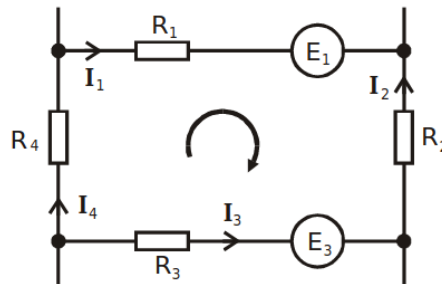


2.1.2 Maschenregel

Alle Teilspannungen einer Masche eines elektrischen Netzwerkes summieren sich zu null. Dabei legt man eine Zählrichtung fest (meistens im Uhrzeigersinn). Zeigt der Strom an den Teilspannungen in Zählrichtung, so wird diese positiv gezählt ($I_k > 0$), zeigt er in die entgegengesetzte Richtung, kriegt die Teilspannung ein negatives Vorzeichen ($I_k < 0$).

$$\sum_k E_k = \sum_k I_k \cdot R_k \quad (2)$$

Abbildung 3: Das Beispiel einer Masche in einem Stromnetzwerk.



Somit sähe die Brückenspannung wie folgt aus:

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (3)$$

Da hier jedoch die Nullmethode angewendet wird muss $U = 0$ sein. Das wird durch folgendes Verhältnis erreicht wie in (3) leicht zu erkennen ist:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (4)$$

Da diese Abgleichbedingung nur von den Verhältnissen der Widerstände abhängt wird diese Brückenschaltung „abgeglichene Brücke“ genannt und es ist möglich eine Widerstandsmessung durchzuführen mit drei bekannten Widerständen.

2.2 Brückenschaltung mit komplexen Widerständen

Es ist auch möglich Kapazitäten und Induktivitäten in eine Brückenschaltung mit einzubauen, dabei ist es sinnvoll komplexe Widerstände zu benutzen, welche allgemein wie

folgt aussehen:

$$R_Z = X + iY \quad (5)$$

Damit würde eine Brückenschaltung mit vier komplexen Widerständen folgende Abgleichbedingung nach (10) haben:

$$R_{Z1}R_{Z4} = R_{Z2}R_{Z3} \quad (6)$$

$$(X_1 + iY_1)(X_4 + iY_4) = (X_2 + iY_2)(X_3 + iY_3) \quad (7)$$

Durch das Gleichstellen der Real- und Imaginärteile entstehen zwei Bedingungen:

$$X_1X_4 - Y_1Y_4 = X_2X_3 - Y_2Y_3 \quad (8)$$

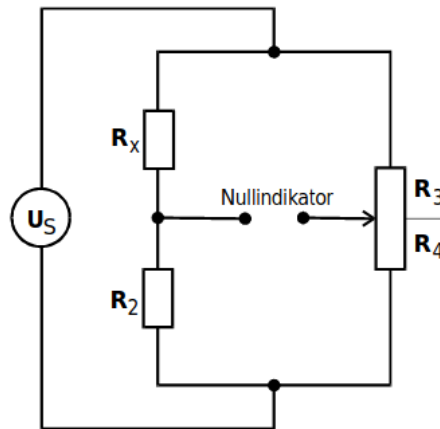
$$X_1Y_4 + X_4Y_1 = X_2Y_3 + X_3Y_2 \quad (9)$$

Beide Bedingungen müssen also bei einer Wechselstrombrücke erfüllt sein. Die Brückenspannung muss im Betrag verschwinden, dabei muss noch die Phase ausgeglichen werden. Deshalb muss jede Wechselstrombrücke zwei unabhängige, veränderliche Stellglieder haben.

2.3 Wheatstonesche Brücke

Mit der Wheatstoneschen Brücke werden Widerstände gemessen. Sie ist in Abbildung 6 dargestellt. Der gesuchte Widerstand R_X wird durch Formel (10) berechnet:

Abbildung 4: Die Wheatstonesche Brücke zur Widerstandsmessung.



$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (10)$$

2.4 Kapazitätsmessbrücke

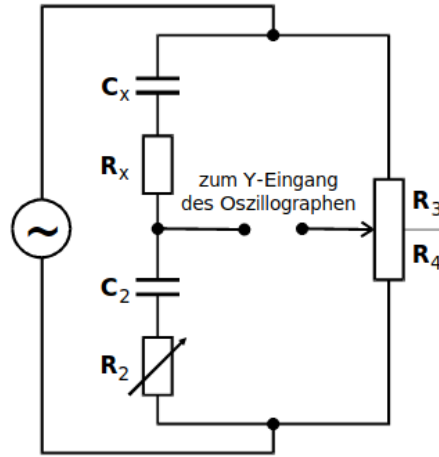
Da es keine idealen Kondensatoren in der Realität gibt, d.h. jeder reale Kondensator wandelt einen kleinen Teil der el. Energie in Wärme um, werden Kondensatoren durch

Ersatzschaltbilder, als ein in Reihe geschalteter Widerstand R und idealer Kondensator mit der Kapazität C dargestellt. Somit sieht der komplexe Widerstand des realen Kondensators wie folgt aus:

$$R_C = R - i \frac{1}{\omega C} \quad (11)$$

Es gibt also zwei Unbekannte, den Widerstand R_X und die Kapazität C_X . Deshalb werden auch zwei Abstimmfreiheitsgrade gebraucht, um der Phasenverschiebung aufgrund von R_X entgegenzuwirken. Hier wird dazu der Widerstand R_2 verändert. Es gelten für diese

Abbildung 5: Die Kapazitätsmessbrücke.



Schaltung nach (5)

$$\begin{array}{llll} X_1 = R_X, & X_2 = R_2, & X_3 = R_3, & X_4 = R_4 \\ Y_1 = -\frac{1}{\omega C_X}, & Y_2 = -\frac{1}{\omega C_2}, & Y_3 = 0, & Y_4 = 0 \end{array}$$

Das wird in (8) und (9) eingesetzt und nach den gesuchten Größen umgestellt:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (12)$$

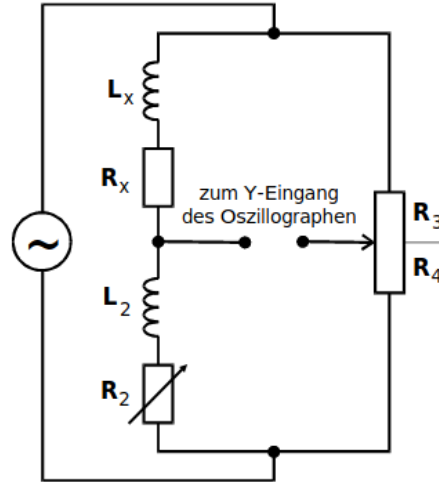
2.5 Induktivitätsmessbrücke

Auch hier gibt es keine ideale Spule in der Realität. An jeder realen Spule existiert ein Spannungsabfall, deshalb wird hier genauso wie bei den Kondensatoren verfahren und die Spulen werden, als ein in Reihe geschalteter Widerstand R und ideale Spule mit Induktivität L dargestellt.

$$R_C = R - i\omega L \quad (13)$$

Es gibt wieder zwei Unbekannte, den Widerstand R_X und die Induktivität L_X . Deshalb werden auch zwei Abstimmfreiheitsgrade gebraucht, um der Phasenverschiebung aufgrund

Abbildung 6: Die Induktivitätsmessbrücke.



von R_X entgegenzuwirken. Hier wird wie bei der Kapazitätsmessung der Widerstand R_2 verändert. Es gelten für diese Schaltung nach (5)

$$\begin{array}{llll} X_1 = R_X, & X_2 = R_2, & X_3 = R_3, & X_4 = R_4 \\ Y_1 = i\omega L_X, & Y_2 = i\omega L_2, & Y_3 = 0, & Y_4 = 0 \end{array}$$

Nach dem gleichen Muster wie bei der Kapazitätsmessbrücke wird auch hier verfahren und es kommen ähnliche Formeln als Ergebnisse heraus:

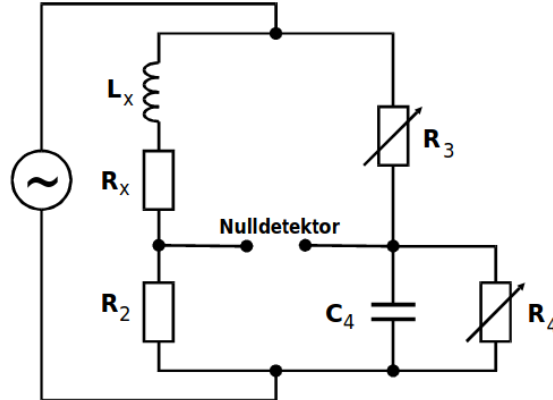
$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad L_X = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (14)$$

Allerdings sollten die Verluste an der Spule mit der Induktivität L_2 bei dieser Methode sehr klein sein, was im Gegensatz zu einem verlustarmen Kondensator schwierig zu realisieren ist. Deshalb wird die Spule in einer anderen Schaltung durch einen Kondensator ersetzt. Diese Schaltung für die Induktionsmessung wird Maxwell-Brücke genannt.

2.6 Maxwell-Brücke

Auch hier sind die Widerstände R_3 und R_4 veränderbar. Und die zwei Abgleichbedingungen

Abbildung 7: Die Maxwell-Brücke zur Induktivitätsmessung.



gen, welche man nach dem gleichen Vorgehen wie davor kriegt, lauten

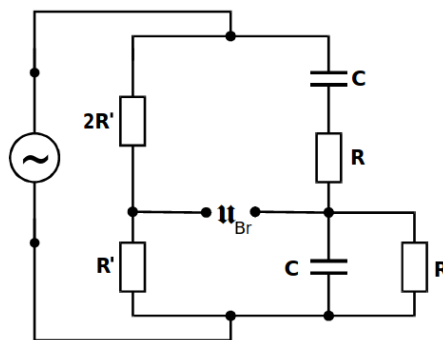
$$R_X = R_2 \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad L_X = R_2 R_3 C_4 \quad (15)$$

Die bisher vorgestellten Brückenschaltungen waren frequenzunabhängig. Nur für die praktischen Zwecke war es günstig keine zu hohe Frequenz zu wählen, da sonst der Einfluss der Streukapazitäten zu sehr in die Messung eingehen würde und keine zu niedrigen Frequenzen zu wählen, da es ein paar Einschwingvorgänge braucht bevor sich eine für die Messung brauchbare stationäre Brückenspannung einpendelt.

2.7 Wien-Robinson-Brücke

Diese Brücke besitzt keine variierbaren Elemente zum Abgleich. Stattdessen wird die Speisespannung verändert, so dass sich eine möglichst kleine Brückenspannung ergibt.

Abbildung 8: Die Wien-Robinson-Brücke zum Frequenzfiltern.



Durch ähnliche Überlegungen wie bei den vorherigen Brückenschaltungen erschließt sich ein Verhältnis von Brückenspannung U_{Br} zur Speisespannung U_S :

$$\left(\frac{U_{Br}}{U_S}\right)^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9\left((1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2\right)} \quad (16)$$

Es ist deutlich, dass dieser Ausdruck wenn gilt

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Zur besseren Einsehbarkeit wird das folgende Verhältnis eingeführt

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Mit den beiden oberen Formeln wird (16) zu

$$\left(\frac{U_{Br}}{U_S}\right)^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \quad (17)$$

Es wird klar, dass die Wien-Robinson-Brücke als Frequenzfilter fungiert, welcher die Frequenz ω_0 aus dem Frequenzspektrum filtert und die umliegenden Frequenzen stark abschwächt.