

Magnetfelder und Spulen

David Gutnikov Lasse Sternemann
david.gutnikov@udo.edu lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 07.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
3	Durchführung	5
3.1	Magnetfeldmessung einer Spule	5
3.2	Helmholtz-Spulenpaar	5
3.3	Hysteresekurve	6
4	Auswertung	6
4.1	Allgemeines	6
4.2	Magnetfelder in einfachen Spulen	6
4.2.1	Magnetfeld einer langen Spule	6
4.2.2	Magnetfeld einer kurzen Spule	9
4.3	Magnetfelder von Helmholtzspulen	10
4.3.1	Spulenabstand 10cm	10
4.3.2	Spulenabstand 15cm	12
4.3.3	Spulenabstand 20cm	15
4.4	Hysteresekurve	16
5	Diskussion	18
6	Literaturverzeichnis	20

1 Zielsetzung

Es werden magnetische Flussdichten von Spulen in Abhängigkeit vom Ort gemessen, um sie mit den theoretischen Werten vergleichen zu können. Aus dem gleichen Grund wird analog die magnetische Flussdichte eines Spulenpaares in verschiedenen Abständen zueinander gemessen. Außerdem wird mithilfe der Hysteresekurve eines Toroides mit Eisenkern seine magnetische Flussdichte, Remanenz, Koerzitivkraft und Sättigungsmagnetisierung gemessen.

2 Theoretische Grundlagen

Wird eine Ladung bewegt, so wird ein Magnetfeld erzeugt. Dieses Magnetfeld wird durch Magnetfeldlinien dargestellt, welche im Gegensatz zu den Feldlinien des elektrischen Feldes immer geschlossen sind. Dabei wird der Betrag und die Richtung des Magnetfeldes entweder durch die magnetische Flussdichte \vec{B} oder die magnetische Feldstärke \vec{H} ausgedrückt. Diese beiden Größen sind ohne äußeres Magnetfeld durch die Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, welche sich aus der Vakuum-Permeabilität μ_0 und der relativen Permeabilität in Materie μ_r zusammensetzt, ineinander umwandelbar.

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (1)$$

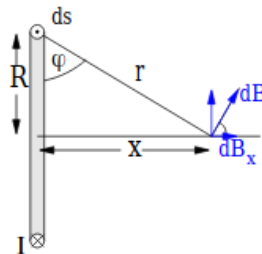
Fließt ein elektrischer Strom in geraden Leiter, so wird ein Magnetfeld um diesen Leiter erzeugt. Dabei gehen die Feldlinien in Kreisen um den Leiter herum. Die magnetische Flussdichte $d\vec{B}$, die von einem stromdurchflossenen Leiter der Länge $d\vec{s}$ im Abstand r erzeugt wird, ist durch das Biot-Savart-Gesetz beschrieben durch:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

Mithilfe des Biot-Savart-Gesetzes lässt sich die magnetische Flussdichte einer Leiterschleife auf der zur Leiterebene orthogonalen Geraden durch den Mittelpunkt bestimmen.

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x \quad (3)$$

Abbildung 1: Die Skizze der magnetischen Flussdichte einer Leiterschleife. [1]



Eine Spule mit der Windungszahl n hätte demnach eine um den Faktor n vergrößerte magn. Flussdichte. Ist diese Spule lang, d.h. ihre Länge L ist viel größer als ihr Radius R , so entsteht im Inneren der Spule ein homogenes Magnetfeld, da die Randeffekte mit steigendem Verhältnis L/R schwächer werden. Außerhalb der Spule ist das Magnetfeld inhomogen. Für die magn. Flussdichte innerhalb der langen stromdurchflossenen Spule (Solenoid) gilt dann:

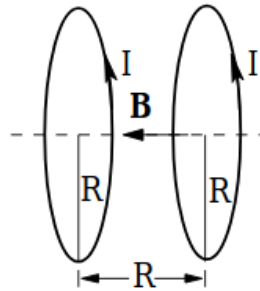
$$B = \mu_0 \mu_r \frac{n}{L} I \quad (4)$$

Werden die beiden Enden eines Solenoides zu einer kreisförmigen Spule (Toroid) des Umfanges $L = 2\pi r_T$ verbunden, so verschwinden die Randeffekte und somit das Magnetfeld außerhalb der Spule. Innerhalb der Spule ist das Magnetfeld homogen und es gilt dafür:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{n}{2\pi r_T} I \quad \text{oder} \quad H = \mu_r \frac{n}{2\pi r_T} I \quad (5)$$

Um ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen wird oft das sogenannte Helmholtz-Spulenpaar verwendet. Es besteht aus zwei Spulen mit gleichem Radius R und gleicher Windungszahl n , die in gleicher Richtung vom Strom I durchflossen werden und wie in 2 im Abstand von R voneinander entfernt sind.

Abbildung 2: Die Skizze eines Helmholtz-Spulenpaares. [1]



Das Magnetfeld auf der Symmetrieachse ergibt sich als Überlagerung der Magnetfelder der beiden Spulen:

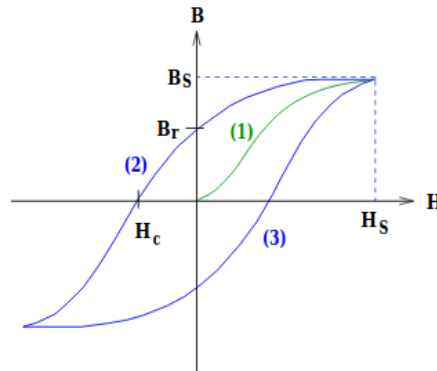
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I n R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Paramagnetische Materialien haben ohne äußeres Magnetfeld kein inneres magnetisches Moment. Erst wenn ein Magnetfeld angelegt wird folgt die Magnetisierung des Stoffes diesem. Diamagnetische Stoffe sind wie die paramagnetischen Stoffe nichtmagnetisch, doch im Gegensatz dazu entwickeln sie unter Einfluss eines äußeren Magnetfeldes ein entgegengesetztes Magnetfeld.

Unmagnetisierte ferromagnetische Materialien bestehen aus kleinen magnetischen Momenten, die ohne äußeres Magnetfeld statistisch / "willkürlich" verteilt sind. Wird jetzt ein äußeres Magnetfeld angelegt, richten sich diese magn. Momente in Richtung der magn. Feldlinien aus und verstärken das ursprüngliche Magnetfeld. Dabei ist die Magnetisierung des Materials irreversibel, weshalb die Magnetisierungskurve (Hysteresekurve) nicht linear

ist. Sie fängt bei unmagnetisiertem Material im Ursprung bei $B(H = 0) = 0$ an und nähert sich mit steigendem angelegtem Magnetfeld an einen Sättigungswert B_r an. Beim verkleinern des äußeren Magnetfeldes bis auf $H = 0$ bleibt die Remanenz $B_r(H = 0) \neq 0$ erhalten. Um diese Restmagnetisierung des Materials aufzuheben wird ein anderes Gegenmagnetfeld angelegt, die Koerzitivkraft H_K . Wird das Gegenfeld stärker, so wird die Magnetisierung negativ, bis sie $-B_r$ erreicht. Hier wird wieder das angelegte Magnetfeld positiver gemacht, was zu einer zum Ursprung punktsymmetrischen Kurve führt. Dabei

Abbildung 3: Die Skizze einer Hysteresekurve. [1]



ist die relative Permeabilität des Materials μ_r abhängig vom angelegten Magnetfeld H und wird deshalb zur differentiellen Permeabilität μ_{diff} :

$$\mu_{\text{diff}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \quad (7)$$

Die magn. Flussdichte einer Spule ist demnach:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (8)$$

3 Durchführung

3.1 Magnetfeldmessung einer Spule

Hierbei werden die Magnetfelder zweier verschiedener stromdurchflossener Spulen ausgemessen. Dazu wird eine longitudinale Hall-Sonde parallel in die Mitte der Spule eingeführt und die magn. Flussdichte abhängig vom Ort, außerhalb und innerhalb in 1cm Schritten gemessen. Bei ausreichend kurzen Spulen reicht es aus nur von einer Seite aus zu messen, doch ist die Spule zu lang kann von zwei Seiten aus gemessen werden, um durchgehend (auch in der Mitte der Spule) Messwerte aufnehmen zu können.

3.2 Helmholtz-Spulenpaar

Hier wird nicht wie bei den klassischen Helmholtzspulen ein Abstand von einem Spulenradius gewählt, sondern es wird der Abstand zwischen den beiden stromdurchflossenen

Spulen variiert. Es werden drei verschiedene Abstände (10cm, 15cm und 20cm) eingestellt und in Abständen von 1cm mit einer transversalen Hall-Sonde ca. 20 Werte der magn. Flussdichte, außerhalb und innerhalb, gemessen. Dabei soll die Hall-Sonde möglichst im rechten Winkel zur Symmetrieachse und damit zum Magnetfeld auf der Symmetrieachse.

3.3 Hysteresekurve

Es ist ein Toroid mit eingebauter Hall-Sonde gegeben, in welchem ein Magnetfeld durch einen angelegten Strom erzeugt wird. Im Anfangszustand sollte der Toroid möglichst entmagnetisiert sein, um die Hysteresekurve annähernd aus dem Ursprung starten zu können. Im Verlauf der Messung wird die Stromstärke in 1A Schritten bis auf 10A hochgedreht. Danach wird die Stromstärke bis -10A runtergestellt und wieder bis 10A gedreht. Dabei entsteht eine Kurve der magn. Flussdichte in Abhängigkeit von der Stromstärke und dadurch der magn. Feldstärke des angelegten Magnetfeldes.

4 Auswertung

4.1 Allgemeines

Im folgenden werden mehrfach Magnetfeldstärken bezüglich ihres Abstands zu einer der Spulenöffnungen angegeben. In diesen Fällen befindet sich die Spulenöffnungen bei $x=0$. Negative Werte befinden sich außerhalb der Spule und positive Werte innerhalb, solange sie nicht die Länge der Spule überschreiten. Der Wert magnetischen Feldkonstante μ_0 wird in den Rechnungen aus der Konstantensammlung des National Institute of Standards and Technology [2] entnommen.

4.2 Magnetfelder in einfachen Spulen

4.2.1 Magnetfeld einer langen Spule

Um einen Vergleichswert zur Magnetfeldstärke in der langen Spule zu haben, wird über Formel 4 ein Theoriewert berechnet. Dazu werden folgende Eigenschaften der Spule und Experimentierbedingungen verwendet:

$$L = 0,155m \quad N = 300 \quad I = 0,68A$$

Somit ergibt sich für das homogene Magnetfeld innerhalb der langen Spule der Referenzwert:

$$B = 1,65mT \quad (9)$$

Dieser wird mit den in Abbildung 4 dargestellten und in Tabelle 1 eingetragenen Messwerten verglichen.

Tabelle 1: In der Tabelle ist die Stärke des Magnetfelds in Abhängigkeit von der Distanz zu einer der Spulenöffnung aufgelistet.

x [m]	B [mT]	x [m]	B [mT]
-0,04	0,088	0,08	1,574
-0,03	0,128	0,09	1,566
-0,02	0,208	0,10	1,552
-0,01	0,377	0,11	1,483
0	0,69	0,12	1,483
0,01	1,08	0,13	1,397
0,02	1,322	0,14	1,217
0,03	1,443	0,15	0,879
0,04	1,506	0,16	0,502
0,05	1,538	0,17	0,272
0,06	1,559	0,18	0,158
0,07	1,569		

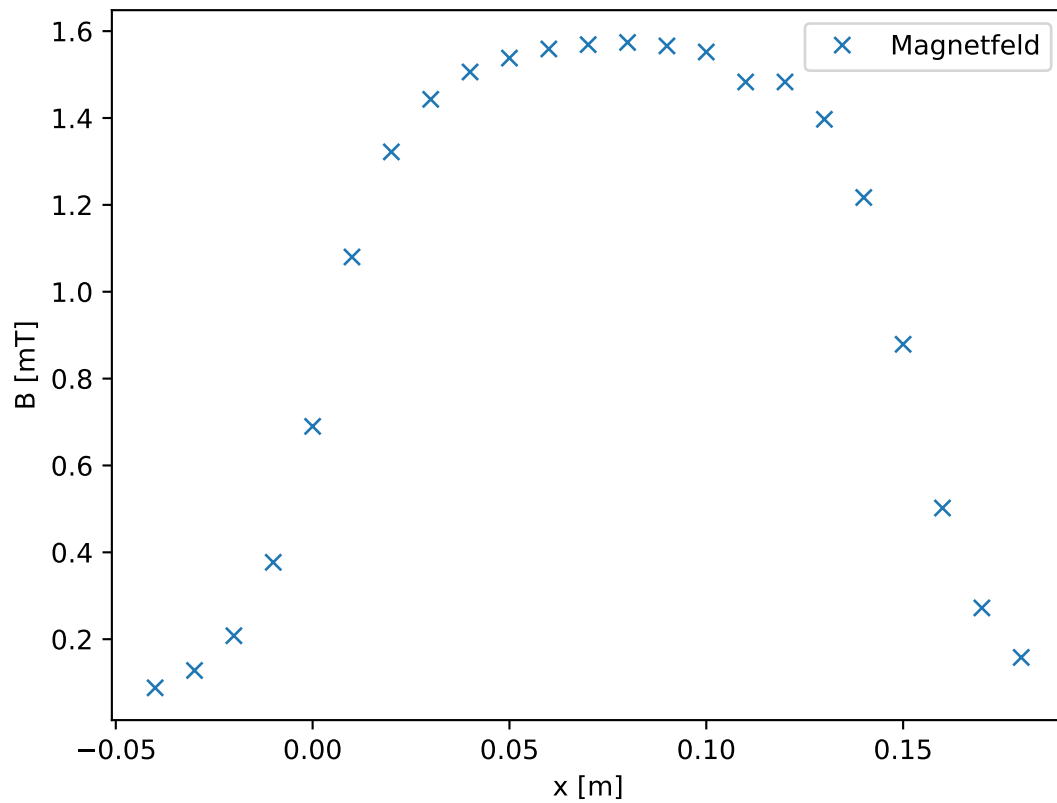


Abbildung 4: In dieser Abbildung sind die Werte aus der obigen Tabelle aufgetragen. Sie zeigen das Magnetfeld abhängig von der Entfernung zur Spulenöffnung, die bei $x=0$ liegt.

4.2.2 Magnetfeld einer kurzen Spule

Auch bei der kurzen Spule wird zuerst über Formel 4 ein theoretischer Referenzwert berechnet.

$$\begin{aligned} L &= 0,09\text{cm} & N &= 3400 & I &= 0,08\text{A} \\ B &= 3,80\text{mT} \end{aligned} \tag{10}$$

Dieser wird später mit den Messwerten aus Tabelle 2 verglichen. Der Verlauf dieser Messwerte ist auch in Abbildung 5 dargestellt.

Tabelle 2: In der Tabelle ist die Stärke des Magnetfelds in Abhängigkeit von der Distanz zu einer der Spulenöffnung aufgelistet.

x [m]	B [mT]
-0,04	0,602
-0,03	0,777
-0,02	0,995
-0,01	1,271
0,00	1,579
0,01	1,885
0,02	2,165
0,03	2,375
0,04	2,5
0,05	2,529
0,06	2,462
0,07	2,299
0,08	2,052
0,09	1,761
0,1	1,444
0,11	1,142

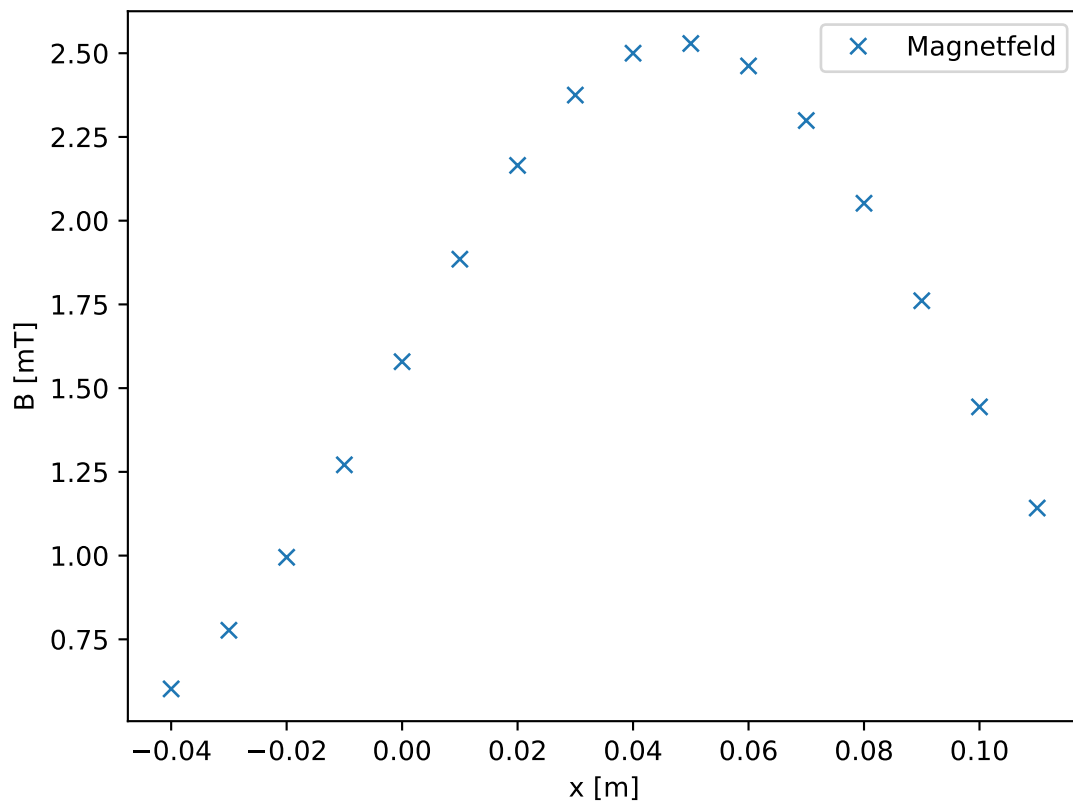


Abbildung 5: In dieser Abbildung sind die Werte aus der obigen Tabelle aufgetragen. Sie zeigen das Magnetfeld abhängig von der Entfernung zur Spulenöffnung, die bei $x=0$ liegt.

4.3 Magnetfelder von Helmholtzspulen

Bei den folgenden Helmholtzspulenpaaren wurde nur der Spulenabstand variiert, demnach haben sie ansonsten die gleichen Eigenschaften und wurden an die gleiche Stromstärke angeschlossen. Die Magnetfeldstärken in der Mitte der Helmholtzspulenpaare werden über Formel 6 berechnet.

$$R = 0,0625m \quad N = 100 \quad I = 1,94A$$

4.3.1 Spulenabstand 10cm

Bei diesem Spulenpaar beträgt der Spulenabstand 0,1m. Mit diesem und den allgemeinen Werten, die für alle Helmholtzspulenpaare gelten, lässt sich folgender Referenzwert für

die Mitte zwischen den zwei Spulen, die bei 5cm liegt, berechnen.

$$B_{\text{Mitte}} = 1,86mT \quad (11)$$

Die gemessenen Magnetfeldstärken 3 werden in Abbildung 6 gegen den Abstand zur Spule angegeben.

Tabelle 3: In der Tabelle ist die Stärke des Magnetfelds in Abhängigkeit von der Distanz zu einer der Spulenöffnung aufgelistet.

x [m]	B [mT]	x [m]	B [mT]
0,01	2,01	0,12	1,267
0,015	1,968	0,13	1,034
0,02	1,947	0,14	0,837
0,025	1,929	0,15	0,674
0,03	1,934	0,16	0,547
0,035	1,943	0,17	0,444
0,04	1,973	0,18	0,362
0,045	2,006	0,19	0,298
0,05	2,051	0,20	0,245
0,11	1,526		

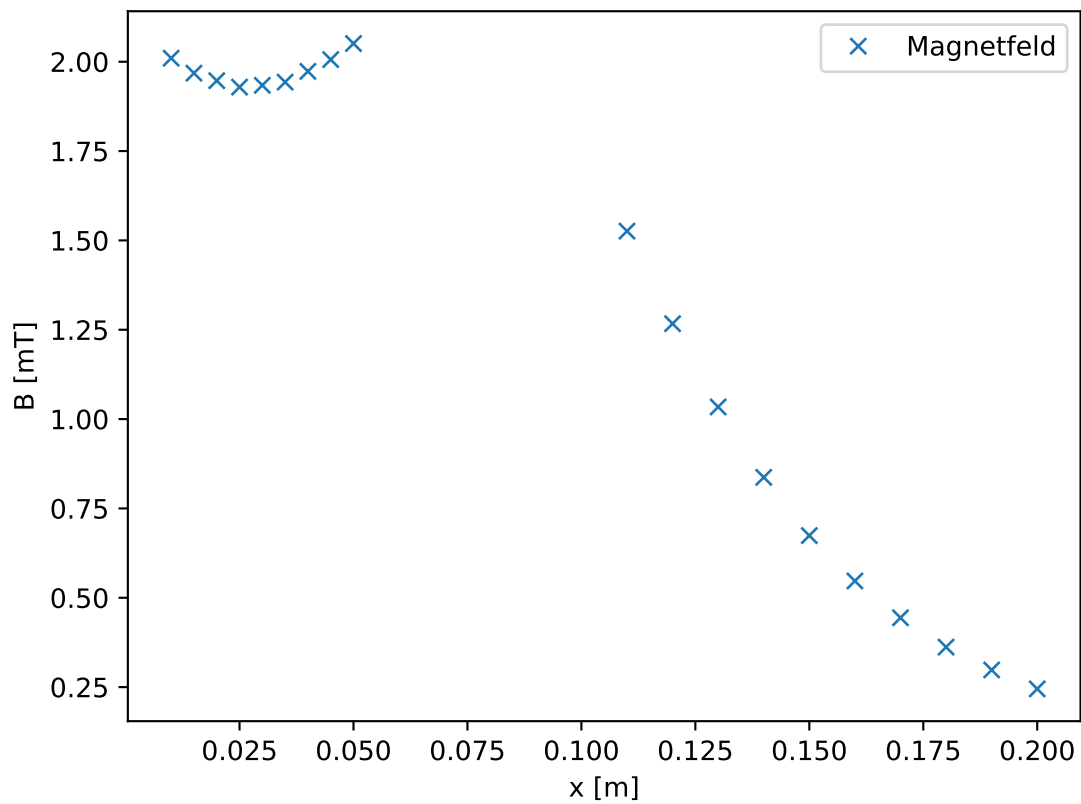


Abbildung 6: In dieser Abbildung sind die Werte aus der obigen Tabelle aufgetragen. Sie zeigen das Magnetfeld abhängig von der Entfernung zur Spulenöffnung, die bei $x=0$ liegt.

4.3.2 Spulenabstand 15cm

Hier wird die Magnetfeldstärke im Mittelpunkt, der bei 7,075,5cm liegt, analog zur ersten Helmholtzspule berechnet. Der Spulenabstand beträgt nun jedoch 0,15m. Die Werte finden sich in Tabelle 4 und der Verlauf der Magnetfeldstärke in Abbildung 7.

$$B_{\text{Mitte}} = 1,02mT \quad (12)$$

Tabelle 4: In der Tabelle ist die Stärke des Magnetfelds in Abhängigkeit von der Distanz zu einer der Spulenöffnung aufgelistet.

x [m]	B [mT]	x [m]	B [mT]
0,01	1,579	0,07	1,207
0,02	1,403	0,075	1,245
0,03	1,261	0,08	1,329
0,035	1,207	0,09	1,489
0,04	1,165	0,10	1,670
0,045	1,131	0,16	1,420
0,05	1,123	0,17	1,173
0,055	1,113	0,18	0,959
0,06	1,137	0,19	0,770
0,065	1,152	0,20	0,618

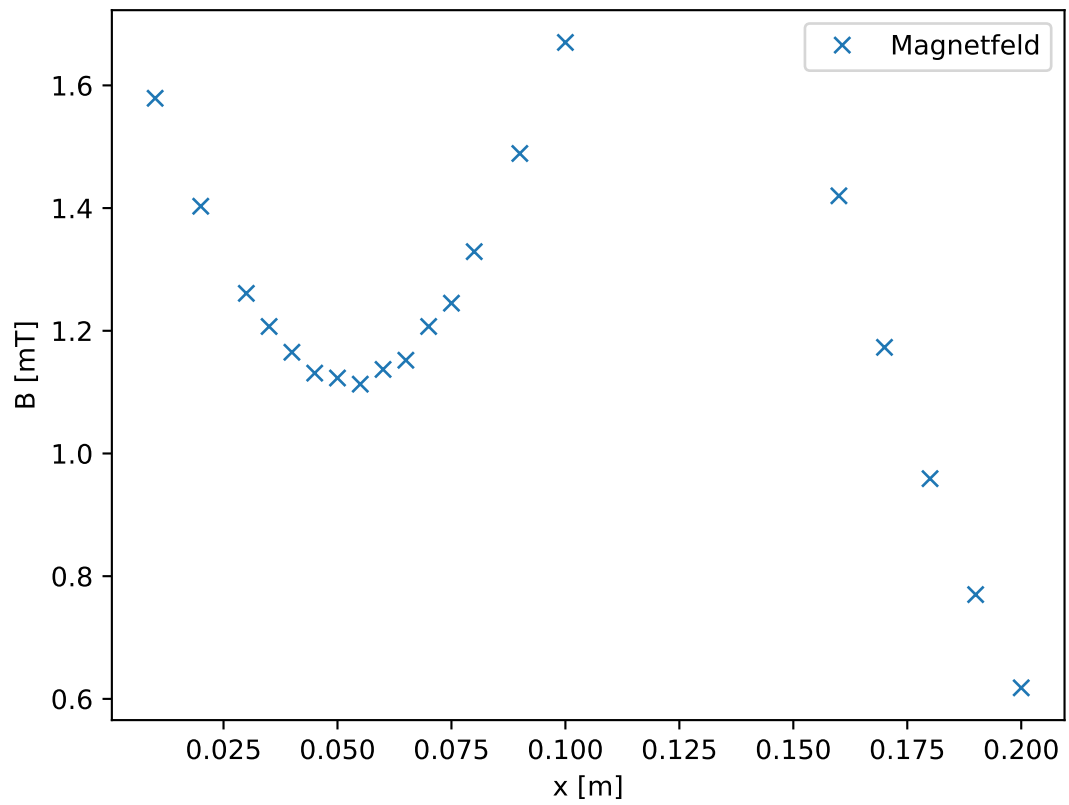


Abbildung 7: In dieser Abbildung sind die Werte aus der obigen Tabelle aufgetragen. Sie zeigen das Magnetfeld abhängig von der Entfernung zur Spulenöffnung, die bei $x=0$ liegt.

4.3.3 Spulenabstand 20cm

Nun beträgt der Spulenabstand 0,2m und die Berechnung erfolgt wieder analog zu den anderen Rechnungen.

$$B_{\text{Mitte}} = 0,58mT \quad (13)$$

Der Verlauf der in Tabelle 5 gegebenen Magnetfeldstärken wird in Abbildung 8 dargestellt.

Tabelle 5: In der Tabelle ist die Stärke des Magnetfelds in Abhängigkeit von der Distanz zu einer der Spulenöffnung aufgelistet.

x [m]	B [mT]	x [m]	B [mT]
0,01	1,458	0,11	0,832
0,02	1,250	0,12	0,965
0,03	1,058	0,13	1,131
0,04	0,906	0,14	1,330
0,05	0,791	0,15	1,534
0,06	0,714	0,21	1,366
0,07	0,672	0,22	1,135
0,08	0,661	0,23	0,917
0,09	0,684	0,24	0,737
0,10	0,742	0,25	0,585

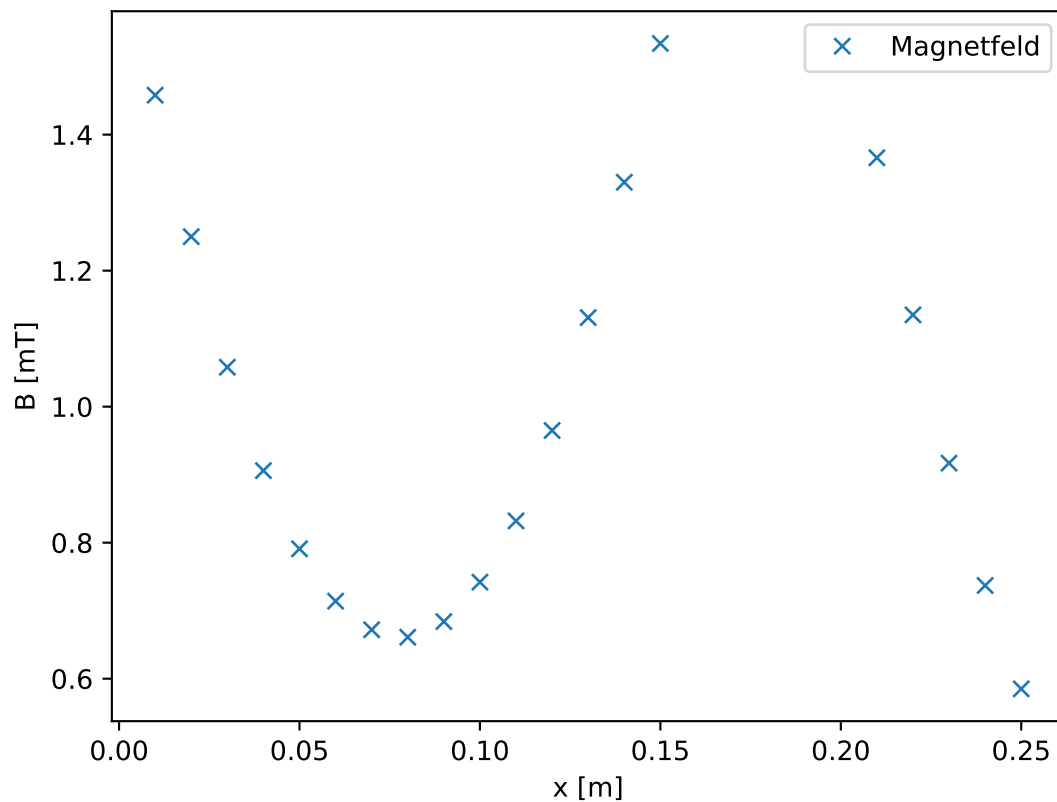


Abbildung 8: In dieser Abbildung sind die Werte aus der obigen Tabelle aufgetragen. Sie zeigen das Magnetfeld abhängig von der Entfernung zur Spulenöffnung, die bei $x=0$ liegt.

4.4 Hysteresekurve

Die durch Auftragen der in Tabelle 6 eingetragenen Werte wird die Hysteresekurve 9 modelliert, indem aus der Stromstärke die Koerzitivfeldstärke über Formel xxx berechnet wird. Sie beinhaltet 5 gesonderte Werte. Die Remanenz, die die Magnetfeldstärke bei nicht vorhandener Stromstärke angibt.

$$B_{R1} = 131 \text{ mT} \quad (14)$$

$$B_{R2} = -133 \text{ mT} \quad (15)$$

Die zwei anderen ausgezeichneten Werte beschreiben die Koerzitivkraft, die dem gegebenen magnetischen Feld so entgegenwirkt, dass die gesamte Magnetfeldstärke null ist. Diese

Punkte liegen bei folgenden Stromstärken.

$$H_{C1} = -465 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (16)$$

$$H_{C2} = 486 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (17)$$

Der letzte Wert ist die Sättigungsmagnetisierung, die bei uns wiefolgt gemessen wird:

$$B_{\text{Sättigung}} = 726 \text{ mT}$$

Tabelle 6: In der Tabelle ist die Stärke des Magnetfelds in Abhängigkeit von der Koerzitivfeldstärke bzw. Stromstärke aufgelistet.

I [A]	H_C [A/m]	B [mT]	I [A]	H_C [A/m]	B [mT]
0	0	3	-6	-4288	-599
1	714	149	-7	-5003	-640
2	1429	350	-8	-5718	-672
3	2144	446	-9	-6432	-702
4	2859	508	-10	-7147	-730
5	3573	560	-9	-6432	-711
6	4288	605	-8	-5718	-693
7	5003	640	-7	-5003	-671
8	5718	670	-6	-4288	-645
9	6432	700	-5	-3573	-617
10	7147	726	-4	-2859	-580
9	6432	709	-3	-2144	-533
8	5717	691	-2	-1429	-467
7	5003	668	-1	-715	-331
6	4288	644	0	0	-133
5	3573	614	0,68	486	0
4	2859	576	1	715	81
3	2144	520	2	1429	258
2	1429	464	3	2144	391
1	715	327	4	2859	489
0	0	131	5	3573	549
-0,65	-465	0	6	4288	595
-1	-715	-70	7	5003	638
-2	-1429	-256	8	5718	696
-3	-2144	-392	9	6432	699
-4	-2859	-490	10	7147	725
-5	-3573	-552			

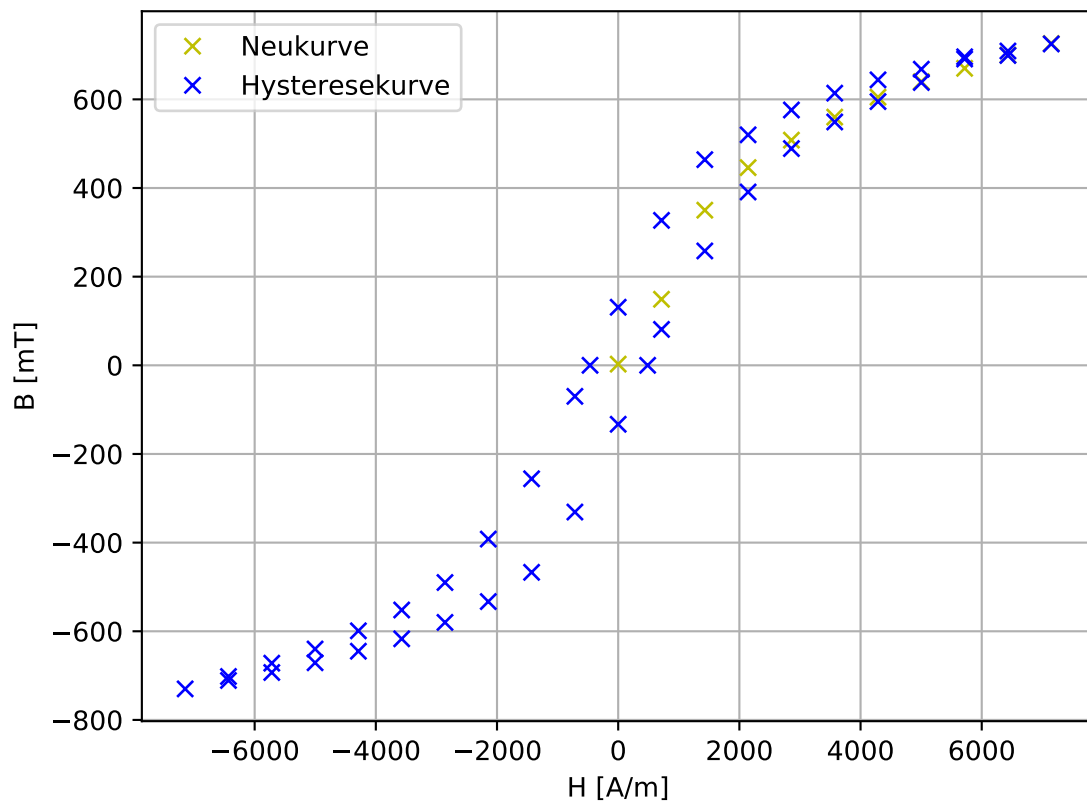


Abbildung 9: In dieser Abbildung sind die Magnetfeldstärken gegen die Koerzitivfeldstärken aufgetragen, sodass sich die Hysteresekurve ergibt.

5 Diskussion

Zur Verifizierung der Messreihen werden die Theoriewerte mit den gemessenen Werten verglichen. Bei den beiden normalen Spulen wird der Theoriewert mit dem Wert in der Mitte der Spule verglichen. So weicht die Magnetfeldstärke der langen Spule, $B_{\text{Messung}} = 1,574 \text{ mT}$, um 4,81 % von dem errechneten Wert 9 ab. Der Wert der kurzen Spule, $B_{\text{Messung}} = 2,529 \text{ mT}$, weicht um 43,45 % vom Theoriewert 10 ab. Während der Wert der langen Spule gut mit dem Theoriewert übereinstimmt, weicht der der kurzen Spule stärker von dessen Theoriewert ab. Dies liegt vermutlich an der Annahme, dass die kurze Spule die Bedingungen für die Annäherung einer langen Spule nicht genügend erfüllt. Die lange Spule hingegen erfüllt die Bedingung hinreichend und die Abweichung zum Theoriewert fällt dementsprechend gering aus. Quantitativ liefern beide Kurven das erwartete Ergebnis. Die lange Spule weist ein Plateau auf, das bei der kurzen Kurve verschwindet und nur noch als Peak zu sehen ist. Bei den Helmholtzspulenpaaren werden

die theoretischen Werte mit den gemessenen Werten in den Zentren der Helmholtzspulenpaaren verglichen.

10cm	$B_{\text{Messung}} = 2,051mT$	$B_{\text{Theorie}} = 1,86mT$	Abweichung : 9,31%
15cm	$B_{\text{Messung}} = 1,245mT$	$B_{\text{Theorie}} = 1,02mT$	Abweichung : 17,83%
20cm	$B_{\text{Messung}} = 0,742mT$	$B_{\text{Theorie}} = 0,58mT$	Abweichung : 21,83%

Unter Rücksichtnahme auf die äußeren Faktoren wie die Magnetfelder der anderen Gruppenexperimente bestätigen auch diese Theoriewerte die Messung. Unterstützt wird dies durch die erwartete Form der Plots in den Graphen 6, 7 und 8. Die Feldstärke wird zu den Spulen maximal und sinkt gegen das Zentrum. Wie zu erwarten sinkt die Kurve stärker bei größeren Spulenabständen. Die letzte Messung liefert die Hysteresekurve, welche ebenfalls der erwarteten Form entspricht. Auch die zu erwartende Symmetrie lässt sich durch die Ähnlichkeit der Remanenzen 15, die um 1,5 % voneinander abweichen und die Ähnlichkeit der Koerzitivfeldstärken 17, die um 4,4 % voneinander abweichen.

6 Literaturverzeichnis

- [1] *Versuchsanleitung V308 - Magnetfelder und Spulen*. TU Dortmund, 2019
- [2] National Institute of Standards and Technology: *Fundamental Physical Constants*
09.Dezember.2019 <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?r>