

Das Trägheitsmoment

David Gutnikov
david.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann
lasse.sternemann@udo.edu

Durchführung am 19.11.2019

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Es sollen Trägheitsmomente verschiedener Körper durch Experimente gemessen und durch entsprechende Rechnungen überprüft werden. Dabei wird auch der in den Rechnungen angewandte Satz von Steiner durch die Messungen bestätigt. Die verschiedenen Körper sind dabei allesamt starre Symmetriekörper wie Kugeln und Zylinder oder werden als diese angenähert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment beschreibt das Streben einer Masse sich gegen die Änderung der Winkelgeschwindigkeit zu widersetzen. Damit stellt es das Äquivalent zur trägen Masse dar, welche sich der translativen Beschleunigung entgegensetzt. So gehen in die translative kinetische Energie die Masse und die Geschwindigkeit ein und in die Rotationsenergie das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit.

$$\begin{aligned} E_{\text{trans}} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}J\omega^2 \end{aligned}$$

Standardmäßig betrachtet man das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers. So lässt sich das Trägheitsmoment J für einen Körper aus vielen homogen verteilten Massenpunkten m durch Formel 1 berechnen. Dabei bezeichnet m die Masse der einzelnen Massenpunkte und r deren senkrechten Abstand zur Drehachse.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (1)$$

Um die Berechnung auf für reelle Körper genau möglich zu machen, reduziert man die Größe der Massenpunkte bis sie infinitesimal klein werden und nun anstatt aufzusummieren über sie integrieren werden kann. Daraus ergibt sich Formel 3.

$$J = \int r^2 dm \quad (2)$$

Da die Masse der einzelnen Massenpunkte nicht bekannt ist, werden Trägheitsmomente normalerweise berechnet, indem man die Dichteverteilung des Körpers über das Volumen integriert. Bei den gemessenen Körpern liegen homogene Massenverteilungen vor, sodass sich zur Berechnung derer Trägheitsmomente Formel 2 ergibt.

$$J = \int_V r^2 \rho dV \quad (3)$$

Das Berechnen der Allgemeinen Trägheitsmomente, der für den Versuch nötigen Körper, liefert die Formeln 4 bis 6.

$$J_{Zylisym} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (4)$$

$$J_{Zyliquer} = m\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}l^2\right) \quad (5)$$

$$J_{Kugel} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (6)$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen Vollzylinders, der sich um seine Symmetrieachse

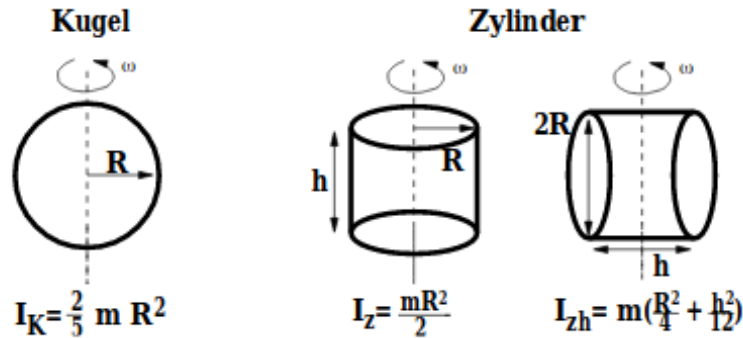


Abbildung 1: In der Abbildung sind die in den Formeln 4 bis 6 stehenden Trägheitsmomente ihren Körpern und Drehachsen zugeordnet. [1, S.2]

dreht, wird durch Formel 4 beschrieben. m steht dabei für dessen Masse und r für den Radius des Vollzylinders. Wenn der selbe Vollzylinder um seine Querachse rotiert, wird sein Trägheitsmoment durch Formel 5 beschrieben und das im Vergleich zu Formel 4 neue l steht für seine Länge. Der letzte Körper ist eine Kugel, die von Natur aus immer um ihre Hauptträgheitsachse rotiert. Ihr Trägheitsmoment wird durch Formel 6 beschrieben, wobei m für ihre Masse und r für ihren Radius steht. Bei dem im Experiment vorliegenden System kommt es zu einer Schwingung mit der in Formel 7 beschriebenen Schwingungsdauer, über die ebenfalls das Trägheitsmoment des Körpers berechnet werden kann, wenn D und T bekannt sind.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (7)$$

2.2 Satz von Steiner

Die obigen Formeln gelten nur für Körper, die um ihre Symmetrieachse rotieren. Körper die um eine Achse außerhalb ihrer Symmetrieachse rotieren, erfahren ein größeres Trägheitsmoment. Wenn die Drehachse parallel zu einer der Symmetrieachsen liegt, lässt sich der Zuwachs des Trägheitsmomentes durch den Satz von Steiner beschreiben.

$$J_{ges} = J_{sym} + ma^2 \quad (8)$$

Dabei wird das Gesamtträgheitsmoment, wie in Formel 8 zu sehen, aus dem Hauptträgheitsmoment des Körpers durch seine Symmetrieachse und dem zweiten Summanden beschrieben. In diesem steht m für die Masse des Körpers und a für den senkrechten Abstand der Drehachse zur Symmetrieachse des Hauptträgheitsmomentes.

2.3 Winkelrichtgröße

Beim Anbringen einer Achse an eine Torsionsfeder und anschließendem Auslenken dieser, tritt eine Kraft auf, die als Drehmoment auf die angebrachte Achse im Abstand r wirkt. Damit lassen sich das Drehmoment (Formel 9) und die Winkelrichtgröße der Torsionsfeder gleichsetzen (Formel 10). Wenn die Kraft senkrecht zum Radius gemessen wird, beträgt der Sinus Eins und fällt weg.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9)$$

$$r \cdot F \cdot \sin(\alpha) = D \cdot \varphi \quad (10)$$

$$M \cdot F = D \cdot \varphi$$

3 Versuchsaufbau

Das für den Versuch grundlegende System besteht aus einer Torsionsfeder, auf der eine Drillachse befestigt ist. Auf dieser Drillachse werden für die Versuche verschiedene Körper oder Querachsen auf die Drillachse gesetzt. Sie sind dann so mit der Torsionsfeder verbunden, dass sie die Feder bei eigener Auslenkung auch auslenken. Wenn die äußere Kraft, die der Auslenkung zu Grunde liegt, wegfällt, beginnt das gesamte System des Testkörpers, der Drillachse und der Torsionsfeder zu schwingen und die Schwingungsparameter können über das Messen der Schwingungsdauer bestimmt werden.

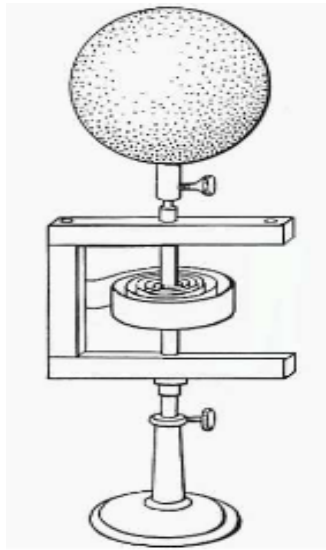


Abbildung 2: Hier ist das System mit einer Kugel als Testkörper zu sehen. Diese ist wie zuvor beschrieben so an der Drillachse befestigt, dass ihr Hauptträgheitsmoment auf der Drehachse des Systems liegt. [1, S.3]

4 Versuchsdurchführung

4.1 Bestimmung der Apparatparameter

Um die späteren Versuche mit Berechnungen zu überprüfen, müssen zuerst die Apparatparameter bestimmt werden. Eines dieser Parameter ist die Winkelrichtgröße der Torsionsfeder. Diese lässt sich berechnen, indem eine Achse senkrecht auf die Achse der Torsionsfeder gesetzt wird und diese dann um einen Winkel ausgelenkt wird. Ein Kraftmesser misst die senkrecht auf die Achse wirkende Kraft bei konstantem Abstand zur Drehachse und variierendem Auslenkwinkel. Die Winkelrichtgröße lässt sich dann durch Umstellen von Formel 10 berechnen. Der zweite Parameter ist das Drehmoment der Drillachse, welches sich über die Bestimmungen verschiedener Trägheitsmomente unter Zuhilfenahme des Satzes von Steiner messen lässt. Dazu werden zwei Gewichte pro Messung um weitere 2,5 cm von der Drillachse entfernt, befestigt und die Schwingungsdauer des Systems bei diesen verschiedenen Abständen gemessen.

4.2 Trägheitsmoment verschiedener Symmetriekörper

Zuerst wird eine homogene Holzkugel, welche unendlich viele, gleiche Trägheitsachsen hat, auf die Drillachse gesetzt und ausgelenkt. Daraufhin werden die zur auftretenden Schwingung gehörigen Schwingungsdauern gemessen, um später mit jener und den Apparatparametern das Trägheitsmoment der Kugel zu bestimmen. Das zweite Trägheitsmoment ist das eines homogen gefüllten Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse. Auch

hier wird das System aus Zylinder und Torsionsfeder ausgelenkt und die Schwingungsdauer gemessen.

4.3 Trägheitsmomente einer Holzpuppe

Es werden zwei verschiedenen Trägheitsmomente bestimmt, indem die Puppe in zwei verschiedenen Positionen auf die Drillachse gesetzt wird und dann die verschiedenen Schwingungsdauern des Systems gemessen werden.. In der ersten Position steht die Puppe senkrecht und hat die Arme angelegt. In der zweiten Position steht sie wieder senkrecht, aber streckt die Arme nun rechtwinklig aus, sodass eine Art T-Pose entsteht. Zur späteren Verifizierung der Messergebnisse werden Kopf, Beine, Arme und Torso als Kugel oder Zylinder angenähert und der Satz von Steiner unter der Annahme verwendet, dass die Drehachse durch die gedachte Symmetrieachse der Puppe führt.

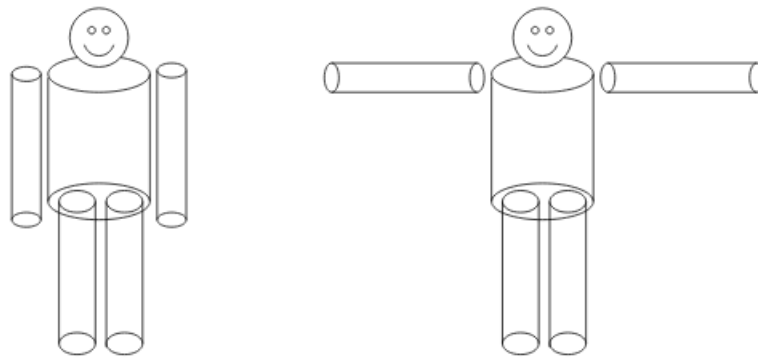


Abbildung 3: Die linke Puppe befindet sich in Position a und die rechte in Position b. [1, S.4]

5 Ergebnisse und Auswertung

5.1 Gerätparameter

Die Winkelrichtgröße lässt sich bestimmen, indem Formel 10 nach D umgestellt wird und α gleich 90 Grad gesetzt wird. Nun wird für jedes Wertepaar die Winkelrichtgröße und daraus der Mittelwert mit zugehörigen Standardabweichung des Mittelwerts bestimmt. Dies führt zu Gleichung 11 für die gemittelte Winkelrichtgröße.

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{MF_i}{\varphi} \right) \cdot \frac{1}{10} \\ \overline{D} &= \overline{D} \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (D_i - \overline{D})^2}{n(n-1)}}\end{aligned}\tag{11}$$

Somit ergibt sich $D = (0,024 \pm 0,001) \text{ N}$.

Tabelle 1: φ ist der Winkel, um den die auf der Torsionsfeder liegende Achse ausgelenkt wird und F ist die Kraft, die bei zugehörigem Winkel senkrecht auf die Achse im Abstand von 20 cm zur Drehachse wirkt.

φ [°]	F [N]
30	0,041
60	0,122
90	0,194
120	0,26
150	0,33
180	0,40
210	0,45
240	0,55
270	0,60
300	0,67

Zum Bestimmen des Trägheitsmomentes der Drillachse wird T^2 gegen a^2 aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt, die zusammen mit den Messwerten in Abbildung 4 zu sehen ist.

Das Gesamtträgheitsmoment I setzt sich aus dem Eigenträgheitsmoment der Drehachse I_D und den Trägheitsmomenten der beiden Zylinder auf der Querachse I_k zusammen. Die zugehörige Formel wird nach I_D umgestellt.

$$I = I_D + 2 \cdot I_k$$

$$I_D = I - 2 \cdot I_k$$

Dabei setzt sich I_k aus dem Hauptträgheitsmoment der Zylinder und einer zusätzlichen Komponente aufgrund der Entfernung zur Drehachse zusammen. Anwenden des Satzes von Steiner und Einsetzen der Trägheitsmomente aus Formel 5 führen zu Formel 12.

$$I_k = I_S + ma^2 \Rightarrow I_k = m \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + ma^2 \quad (12)$$

Mit dem über die Schwingungsdauer bestimmten Gesamtträgheitsmoment des Systems folgt für I_D :

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2 - 2m \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) - 2 \cdot ma^2 \quad (13)$$

Wenn Formel 13 dann nach T^2 umgestellt wird, stellt dies die Geradengleichung der linearen Regression dar.

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m}{D} \cdot a^2 + \frac{4\pi^2}{D} (I_D + 2 \cdot I_S) \quad (14)$$

$$T^2 = m \cdot a^2 + b \quad (15)$$

Tabelle 2: a ist der Abstand der Gewichte von der Drehachse und T die Schwingungsdauer des Systems bei entsprechendem Abstand. Mit diesen Werten und dem Satz von Steiner lässt sich das Trägheitsmoment der Drillachse berechnen.

a [m]	T [s]
0,05060	2,76
0,07500	3,16
0,10600	3,44
0,12500	3,96
0,14970	4,66
0,17500	5,02
0,20045	5,76
0,22500	6,56
0,25070	7,04
0,27500	7,69

Über den y-Achsenabschnitt lässt sich nun das Eigenträgheitsmoment der Drillachse mit Formel 14 bestimmen, wobei die Steigung $m = 715,17$ und der y-Achsenabschnitt $T_0^2 = 5,00$ ist. Formel 15 stellt die Geradengleichung exemplarisch dar.

$$I_D = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2} - 2 \cdot I_S = (30 \pm 4) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

5.2 Trägheitsmomente verschiedener Körper

Tabelle 3: In der Tabelle sind die Messungen der Schwingungsdauern der Schwingungen aufgetragen, die nach dem Auslenken des Systems entstehen. Sie werden benötigt um die Trägheitsmomente zu berechnen

T_{Zyli} [s]	T_{Kugel} [s]
0,97	1,69
0,83	1,83
0,86	1,80
0,92	1,80
0,92	1,72

Das theoretisch berechnete Trägheitsmoment des Zylinders mit einer Masse von 1,1195 kg und einem Radius von 0,035 m beträgt nach Formel 7 $I_{Zyli} = 6,68 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

Das Trägheitsmoment des Zylinders lässt sich bestimmen, indem von dem über Formel 7 berechneten Trägheitsmoment das der Drillachse abgezogen wird. Kombiniert mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

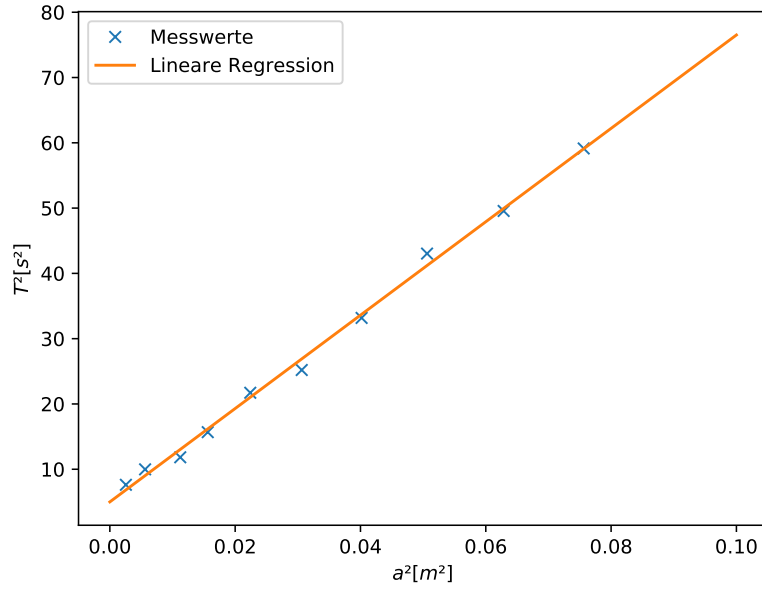


Abbildung 4: Bei Veränderung des Abstandes a wurden immer wieder die entsprechenden T gemessen. Nun werden die Werte quadriert und T^2 gegen a^2 aufgetragen. Die gelbe Ausgleichsgerade stammt aus einer linearen Regression. Deren Steigung ist 715,169 und der y-Achsenabschnitt beträgt 5,00.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{df}{dy_i} \cdot \Delta y_i \right)^2}$$

bei der Δf für den wahrscheinlichsten Fehler der abhängigen Größe steht, N für die Anzahl der einfließenden, fehlerbehafteten Größen und y_i bzw. Δy_i für die fehlerbehaftete Größe und deren Fehler, ergibt sich für das gemessene Trägheitsmoment folgende Formel.

$$I_{Zyli} = \frac{D\bar{T}^2}{4\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{D\bar{T}}{2 \cdot \pi^2} \cdot \Delta\bar{T} \right)^2 + \left(\frac{\bar{T}^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \Delta\bar{D} \right)^2} - I_D \pm \Delta I_D$$

$$I_{Zyli} = (-25 \pm 4) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Das Trägheitsmoment der Kugel, der Masse 1,0376 kg und des Radius' 0,0725 m hat nach Formel 7 das Trägheitsmoment $I_{Kugel} = 1,92 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$.

Experimentell lässt sich dieses Trägheitsmoment analog zu dem des Zylinders bestimmen. Hier wird das Trägheitsmoment der Drillachse vom Trägheitsmoment aus Formel 7

abgezogen.

$$I_{Kugel} = \frac{D\bar{T}^2}{4\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{D\bar{T}}{2 \cdot \pi^2} \cdot \Delta\bar{T}\right)^2 + \left(\frac{\bar{T}^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \Delta\bar{D}\right)^2} - I_D \pm \Delta I_D$$

$$I_{Kugel} = (-11 \pm 5) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

5.3 Trägheitsmomente der Holzpuppe

Zum Bestimmen der Trägheitsmomente der Körperteile werden die Masse, Radien und ggf. Längen derer benötigt.

$$\begin{aligned} m_{Arm} &= 0,0137 \text{ kg} & r_{Arm} &= 0,00705 \text{ m} & l_{Arme} &= 0,135 \text{ m} & a_{Arma} &= 0,0270 \text{ m} & a_{Armb} &= 0,0905 \text{ m} \\ m_{Bein} &= 0,0243 \text{ kg} & r_{Bein} &= 0,00835 \text{ m} & l_{Bein} &= 0,1705 \text{ m} & a_{Bein} &= 0,01 \text{ m} \\ m_{Torso} &= 0,0821 \text{ kg} & r_{Torso} &= 0,02025 \text{ m} & l_{Torso} &= 0,0981 \text{ m} \end{aligned}$$

$$m_{Kopf} = 0,00956 \text{ kg} \quad r_{Kopf} = 0,0152 \text{ m}$$

Die Arme, die Beine und der Torso der Puppe werden als Zylinder, der Kopf als Kugel angenähert. Über die Masse der einzelnen Körperteile, lässt sich das Trägheitsmoment der Holzpuppe in den verschiedenen Positionen über deren Hauptträgheitsmomente und den Satz von Steiner berechnen.

$$\begin{aligned} I_{Posa} &= \frac{2}{5} m_{Kopf} r_{Kopf}^2 + \frac{1}{2} m_{Torso} r_{Torso}^2 + m_{Arm} r_{Arm}^2 \\ &\quad + 2 \cdot m_{Arm} a_{Arme}^2 + m_{Bein} r_{Bein}^2 + 2 \cdot m_{Bein} a_{Beine}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Die a's stehen dabei für den Abstand der Hauptträgheitsachse der Beine und Arme von der Drehachse. Dieser Abstand ändert sich für die Arme von Position a zu Position b. Zudem ändert sich auch die Orientierung der Arme, sodass das Trägheitsmoment in Position b durch Formel 17 beschrieben wird.

$$\begin{aligned} I_{Posb} &= \frac{2}{5} m_{Kopf} r_{Kopf}^2 + \frac{1}{2} m_{Torso} r_{Torso}^2 + m_{Arm} \cdot \left(\frac{r_{Arm}^2}{4} + \frac{l_{Arm}^2}{12} \right) \\ &\quad + 2 \cdot m_{Arm} a_{Arme}^2 + m_{Bein} r_{Bein}^2 + 2 \cdot m_{Bein} a_{Beine}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Aus den beiden Formeln ergeben sich die folgenden zwei Trägheitsmomente.

$$I_{Posa} = 4,49 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

$$I_{Posb} = 2,91 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Tabelle 4: In der Tabelle finden sich die Messwerte der Schwingungsdauer zur Bewegung der Puppe nach der Auslenkung. Dabei steht T_a für Position a, bei der die Puppe aufrecht steht und die Arme angelegt hat. In der zweiten Position, Position b, steht die Puppe wieder aufrecht, aber streckt die Arme nun senkrecht vom Körper.

T_a [s]	T_b [s]
0,55	0,56
0,32	0,56
0,41	0,56
0,46	0,54
0,46	0,56

Nun lässt sich das Trägheitsmoment für beide Positionen analog zum Vorgehen bei den vorherigen Körpern bestimmen.

$$I_{Posi} = \frac{D\overline{T}_i^2}{4\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{D\overline{T}_i}{2 \cdot \pi^2} \cdot \Delta\overline{T}_i\right)^2 + \left(\frac{\overline{T}_i^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \Delta\overline{D}\right)^2} - I_D \pm \Delta I_D$$

$$I_{Posa} = -2,861 \cdot 10^{-3} \pm 4,087 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

$$I_{Posb} = -2,790 \cdot 10^{-3} \pm 3,963 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

6 Diskussion

Wie den errechneten Trägheitsmomenten der verschiedenen Körper klar zu entnehmen ist, scheint das Eigenträgheitsmoment der Drillachse viel zu groß zu sein. Die Versuchsanleitung gibt die Annahme einer masselosen Stange, auf der die beiden Gewichte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse befestigt sind, an. Bei Verwendung dieser Annahme kommt es zu einem zu großen Eigenträgheitsmoment der Drillachse, da die Metallstange, welche ein größeres Trägheitsmoment besitzt als die tatsächliche Drillachse, nicht in die Rechnung miteinbezogen wird. Dies liegt daran, dass die Stange nicht wirklich masselos ist und die meisten Massenpunkte einen größeren Abstand senkrecht zur Drehachse haben, als fast alle Massenpunkte der Drillachse. Da der Abstand quadratisch in das Trägheitsmoment eingeht, vergrößert die Metallstange das Eigenträgheitsmoment der Drillachse stark und verursacht die negativen Trägheitsmomente der Körper. Zusätzlich bringt auch das ungenaue, händische Messen der kurzen Schwingungsdauern eine große Ungenauigkeit in die Messwerte. Der Satz von Steiner konnte aufgrund der extremen Ungenauigkeiten nicht quantitativ belegt werden, doch ist das Trägheitsmoment der Puppe mit angewinkelten Armen (Position A) kleiner als das Trägheitsmoment der Puppe mit ausgestreckten Armen (Position B). Das lässt darauf schließen, dass mit steigendem Abstand des Körpers zur Drehachse auch das Trägheitsmoment größer wird.

7 Literaturverzeichnis

[1] *Versuchsanleitung V101 - Das Trägheitsmoment*. TU Dortmund, 2019