Chap 6. Branch-and-Bound

1. Illustrating Branch-and-Bound
   with the 0-1 Knapsack Problem
2. The Traveling Salesperson Problem

Branch-and-Bound

Branch-and-Bound

- Branch-and-Bound (분기한정법)
  - Similar to backtracking
    - A state space tree is used to solve a problem
  - Differences

    (1) Doesn't limit to any particular way of traversing the tree

    (2) Used only for optimization problems

  - Design strategy
    - Compute a number (bound) at a node to determine whether the node is promising
    - The number is a bound on the value of the solution that could be obtained by expanding beyond the node
    - If that bound is no better than the value of the best solution found so far, the node is nonpromising; otherwise promising.

Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

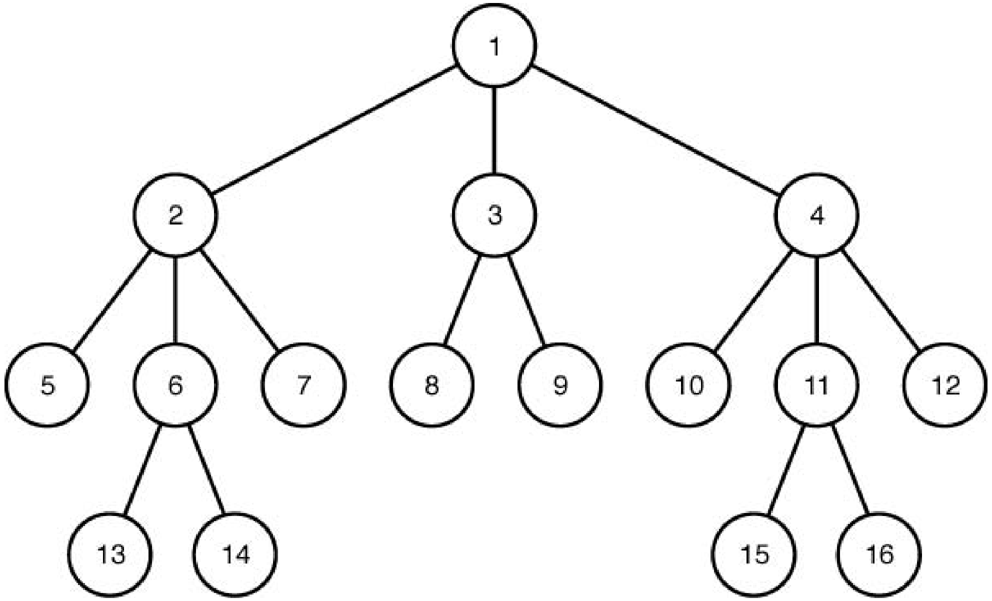
- Breadth-first Search (너비우선검색) 순서

  (1) 뿌리마디를 먼저 검색한다.

  (2) 다음에 수준 1에 있는 모든 마디를 검색한다.
  (왼쪽에서 오른쪽으로)

  (3) 다음에 수준 2에 있는 모든 마디를 검색한다
  (왼쪽에서 오른쪽으로)

  (4) ...



Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- 일반적인 너비 우선 검색 알고리즘
  - 되부름(recursive) 알고리즘을 작성하기는 상당히 복잡하다. **Queue**를 사용

```
void breadth_first_search(tree T) {
    queue_of_node Q;
    node u, v;

    initialize(Q);              // Initialize Q to be empty
    v = root of T;
    visit v;
    enqueue(Q,v);
    while(!empty(Q)) {
       dequeue(Q,v);
       for(each child u of v) {
          visit u;
          enqueue(Q,u);
       }
    }
}
```

Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- Ex 6.1 (Same as Ex 5.6)

  $n = 4,\ W = 16$이고,

i	p_i	w_i	$\frac{p_i}{w_i}$
1	\$40	2	\$20
2	\$30	5	\$6
3	\$50	10	\$5
4	\$10	5	\$2

일 때,

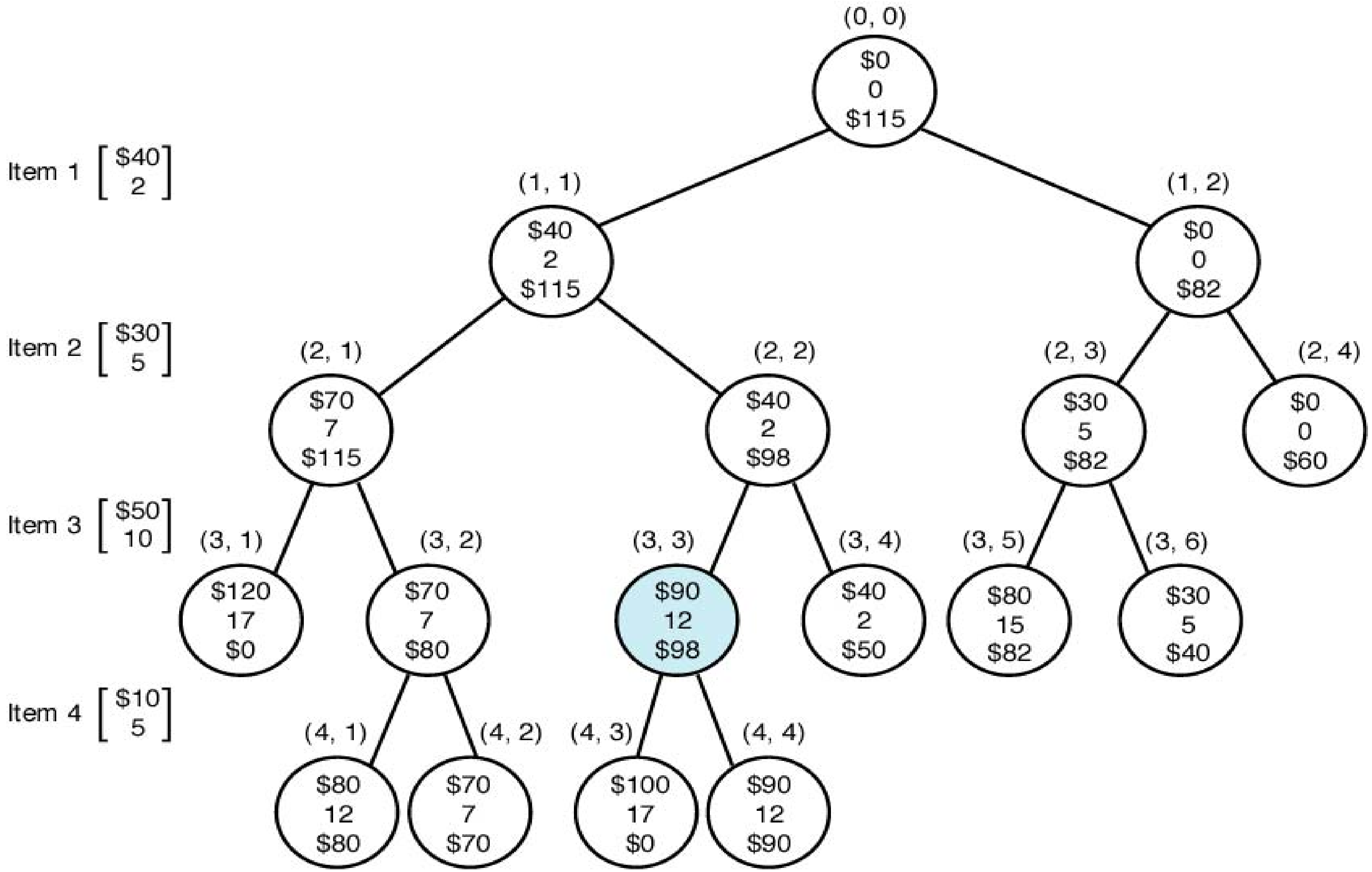
  - Do a breadth-first search (instead of a depth-first search)
  - Let weight & profit be the total weight & total profit up to a node

$$totweight = weight + \sum_{j=i+1}^{k-1} w_j$$

$$bound = \left(profit + \sum_{j=i+1}^{k-1} p_j \right) + (W - totweight) \times \frac{p_k}{w_k}$$

Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- 앞에서와 같은 예를 사용하여 분기한정 가지치기로 너비우선검색을 하여 가지친 상태공간트리를 그려보면 아래와 같다. 검색 마디의 개수는 17이다.



Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

```
void breadth_first_branch_and_bound(state_space_tree T, number& best){
    queue_of_node Q;
    node u, v;

    initialize(Q);                          // Initialize Q to be empty
    v = root of T;                          // Visit root
    enqueue(Q,v);
    best = value(v);

    while(!empty(Q)) {
       dequeue(Q,v);
       for(each child u of v) {             // Visit each child
           if(value(u) is better than best)
               best = value(u);
           if(bound(u) is better than best)
               enqueue(Q,u);
       }
    }
}
```

Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- Algorithm 6.1 : The Breadth-First-Search with Branch-and-Bound Pruning Algorithm for the 0-1 Knapsack Problem
  - Problem : Let *n* items be given, where each item has a *weight* and a *profit*. Let *W* be given. Determine a set of items with maximum total profit, under the constraint that the sum of their weights cannot exceed *W*.
  - Inputs : *n*, *W*, *w[1..n]*, *p[1..n]*. w and p arrays are containing positive integers sorted in nonincreasing order according to the values of *p[i]/w[i]*.
  - Outputs : maxprofit.

```
Struct node {
        int level;
        int profit;
        int weight;
}
```

Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

```
void knapsack2(int n, const int p[], cont int w[], int W,
               int &maxprofit) {
  queue_of_node Q; node u, v;
  initialize(Q);
  v.level =0; v.profit = 0; v.weight = 0; maxprofit = 0;
  enqueue(Q, v);
  while (!empty(Q)) {
     dequeue(Q, v);   u.level = v.level+1;
     u.profit = v.profit + p[u.level];
     u.weight = v.weight + w[u.level];
     if ((u.weight <= W) && (u.profit > maxprofit))
         maxprofit = u.profit;
     if (bound(u)>maxprofit)  enqueue(Q, u);
     u.weight = v.weight;
     u.profit = v.profit;
     if (bound(u)>maxprofit)  enqueue(Q, u);
  }
}
```

Breadth-First Search with Branch-and-Bound Pruning

```
float bound(node u) {
  index j, k;  int totweight;  float result;
  if (u.weight >= W)
     return 0;
  else {
     result = u.profit; j = u.level +1; totweight = u.weight;
     while ((j<=n) && (totweight + w[j] <= W)) {
          totweight = totweight + w[j];
          result = result + p[j];
          j++;
     }
     k = j;
     if (k<= n)
          result = result + (W - totweight)*p[k]/w[k];
     return result;
  }
}
```

Best-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- 최적의 해답에 더 빨리 도달하기위한 전략:
  1. 주어진 마디의 모든 자식마디를 검색한 후,
  2. 유망하면서 확장되지 않은(unexpanded) 마디를 살펴보고,
  3. 그 중에서 가장 좋은(최고의) 한계치(bound)를 가진 마디를 확장

- 최고우선검색(Best-First Search)은
  너비우선검색에 비해서 좋아짐

Best-First Search with Branch-and-Bound Pruning

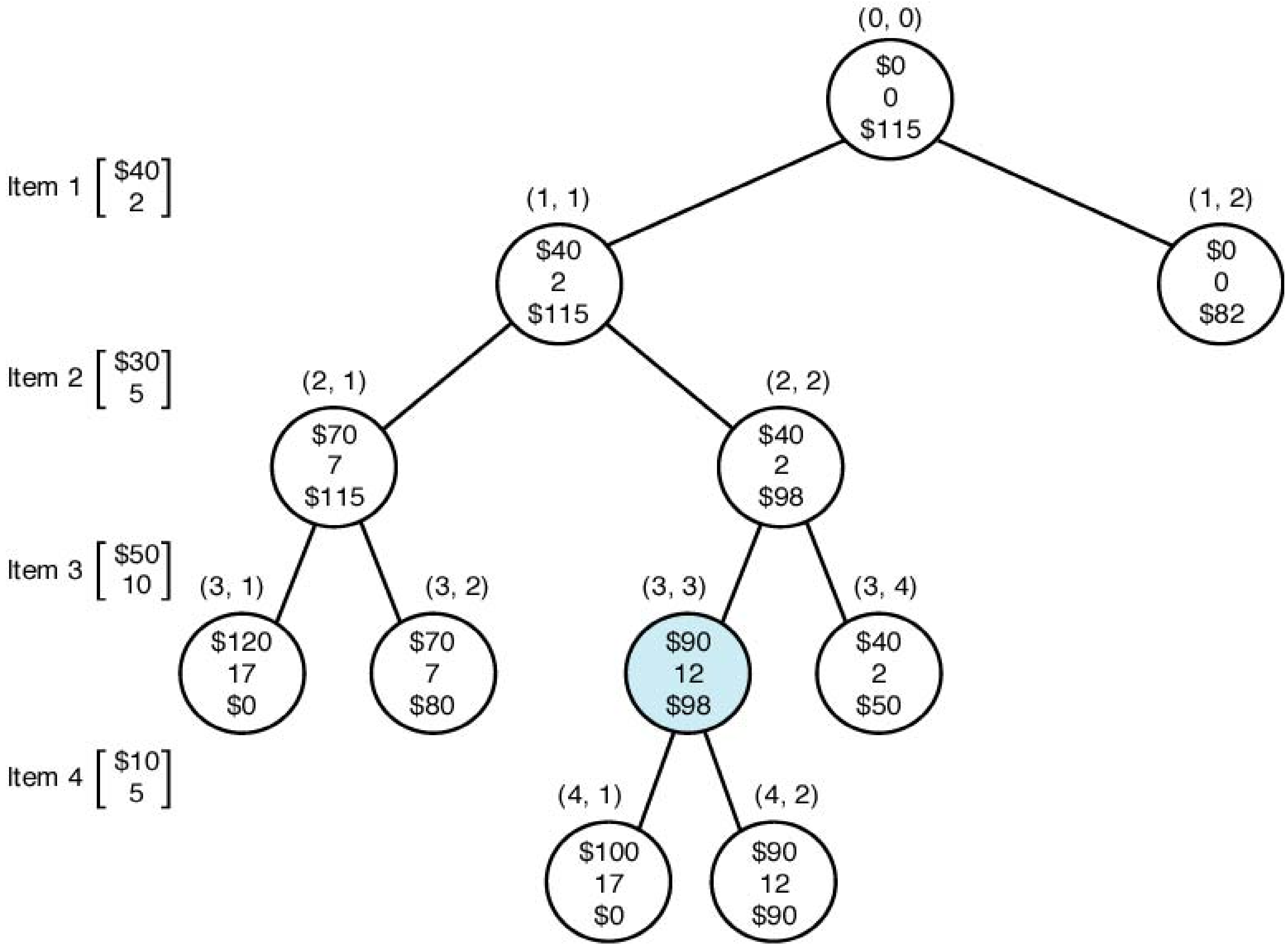
- 최고우선검색 전략
  - 최고의 한계를 가진 마디를 우선적으로 선택하기 위해서 우선순위 대기열(Priority Queue)을 사용
  - 우선순위 대기열은 힙(heap)을 사용하여 효과적으로 구현

- Ex 6.2 (Same as Ex 5.6)

  $n = 4$, $W = 16$

  - 앞에서와 같은 예를 사용하여 분기한정 가지치기로 최고우선검색을 하여 가지친 상태공간트리를 그려보면, 다음 장과 같다.
  - 이때 검색하는 마디의 개수는 11이다.

Best-First Search with Branch-and-Bound Pruning



Best-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- 분기한정 최고우선검색 알고리즘

```
void best_first_branch_and_bound (state_space_tree T,number best) {
   priority_queue_of_node PQ;
   node u,v;
   initialize(PQ);                    // initialize PQ to empty
   v = root of T;
   best = value(v);
   insert(PQ,v);
   while(!empty(PQ)) {                // Remove node with best bound
     remove(PQ,v);
     if(bound(v) is better than best)  // Check if node is still
                                       // promising
         for(each child u of v) {
            if(value(u) is better than best)
                best = value(u);
            if(bound(u) is better than best)
                insert(PQ,u);
         }
   }
}
```

Best-First Search with Branch-and-Bound Pruning

- Algorithm 6.2 : The Best-First-Search with Branch-and-Bound Pruning Algorithm for the 0-1 Knapsack Problem

```
struct node {
     int level;
     int profit;
     int weight;
     float bound;
}
```

```
void knapsack3(int n, const int p[], cont int w[], int W,
               int &maxprofit){
     queue_of_node  PQ;  node u, v;

     initialize(PQ);
     v.level =0;  v.profit = 0;  v.weight = 0;  v.bound = bound(v);
     maxprofit = 0;
     insert (PQ, v);
```

Best-First Search with Branch-and-Bound Pruning

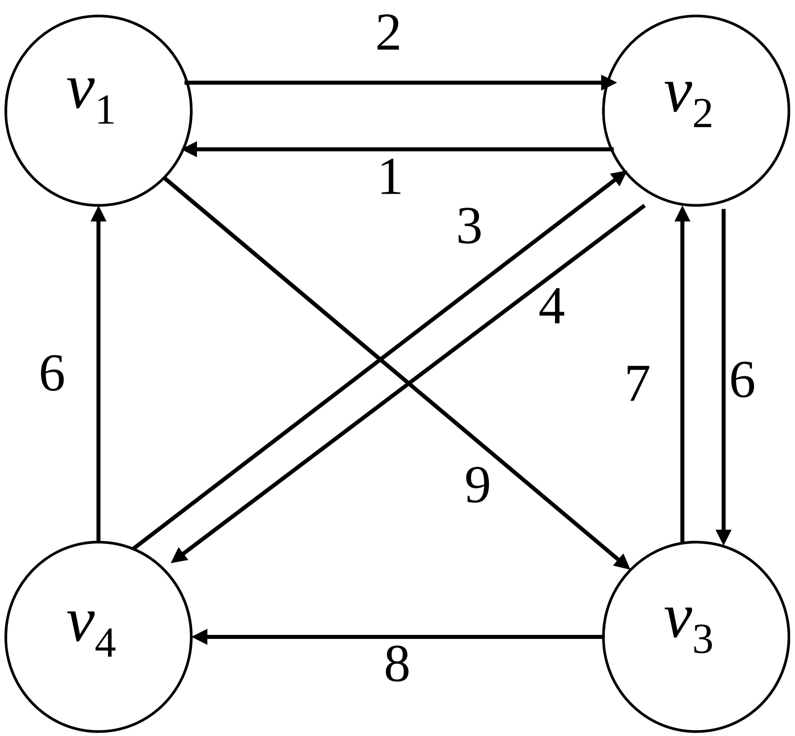
```
    while (!empty(Q)) {                          // Remove nod with
       remove(PQ, v);                            // best bound
       if(v.bound > maxprofit) {  // Check if node is still
           u.level = v.level+1;   // promising.
           u.profit = v.profit + p[u.level];
           u.weight = v.weight + w[u.level];
           if ((u.weight <= W) && (u.profit > maxprofit))
               maxprofit = u.profit;

           u.bound = bound(u);
           if (bound(u) > maxprofit) insert (PQ, u);

           u.weight = v.weight;                  // Set u to the child
           u.profit = v.profit;                  // that does not include
           u.bound = bound(u);                   // the next item.
           if (u.bound > maxprofit) insert (PQ, u);
       }
    }
}
```

The Traveling Salesperson Problem

- The Traveling Salesperson Problem (Review)
  - 외판원의 집이 위치하고 있는 도시에서 출발하여 다른 도시들을 각각 한번씩만 방문하고, 다시 집으로 돌아오는 가장 짧은 일주여행경로(tour)를 결정하는 문제.
  - 이 문제는 음이 아닌 가중치가 있는, 방향성 그래프로 나타낼 수 있다.
  - 그래프 상에서 일주여행경로(tour, Hamiltonian circuits)는 한 정점을 출발하여 다른 모든 정점을 한번씩만 거쳐서 다시 그 정점으로 돌아오는 경로이다.
  - 여러 개의 일주여행경로 중에서 길이가 최소가 되는 경로가 최적일주여행경로(optimal tour)가 된다.
  - 무작정 알고리즘:
    - 가능한 모든 일주여행경로를 다 고려한 후, 그 중에서 가장 짧은 일주여행경로를 선택한다.
    - 가능한 일주여행경로의 총 개수는 $(n - 1)!$

The Traveling Salesperson Problem

- Ex) 가장 최적이 되는 일주여행경로는? (Ref. Section 3.6)



The Traveling Salesperson Problem

- 동적계획법을 이용한 접근방법 (Review)
  - V는 모든 정점의 집합이고, A는 V의 부분집합이라고 하자.
    그리고 $D[v_i][A]$는 A에 속한 각 정점을 정확히 한번씩 만 거쳐서
    v_i에서 v_1로 가는 최단경로의 길이라고 하자.
    그러면 위의 예제에서 $D[v_2][\{v_3, v_4\}]$의 값은?

  - 최적 일주여행경로의 길이:

$$D[v_1][V-\{v_1\}] = min_{2\le j\le n}(W[1][j] + D[v_j][V-\{v_1, v_j\}])$$

일반적으로 표시하면 $i \neq 1$이고, v_i가 A에 속하지 않을 때, 다음과 같이 된다.

$$D[v_i][A] = min_{v_j \in A}(W[i][j] + D[v_j][A-\{v_j\}]) \ \text{if} \ A \neq 0$$

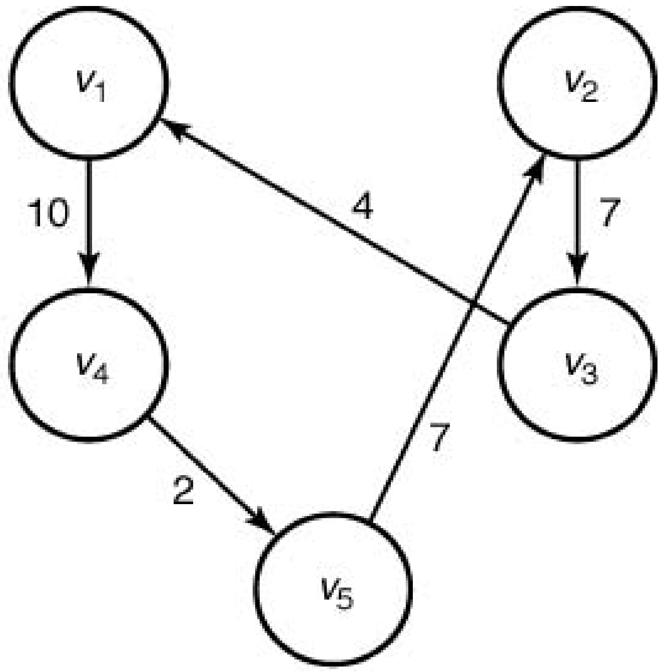
$$D[v_i][0] = W[i][1]$$

The Traveling Salesperson Problem

- 외판원문제: 분기한정법
  - n = 40일 때, 동적계획법 알고리즘은 6년 이상이 걸린다. ($\Theta(n^2 2^n)$)
    그러므로 분기한정법을 시도해 본다.

Ex) 다음 인접행렬로 표현된 그래프를 살펴보시오.

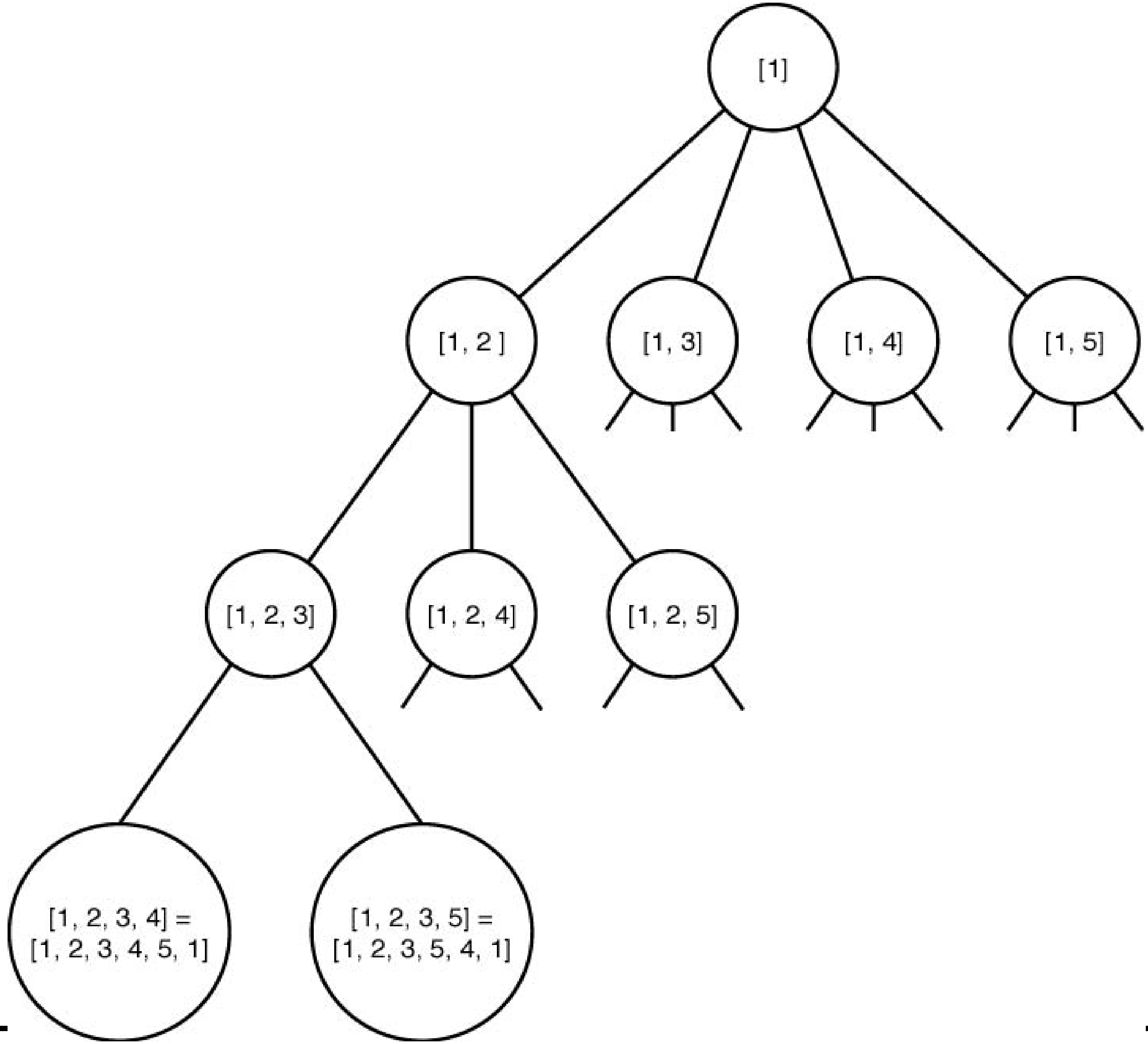
$$\begin{bmatrix} 0 & 14 & 4 & 10 & 20 \\ 14 & 0 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 16 \\ 11 & 7 & 9 & 0 & 2 \\ 18 & 7 & 17 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$



The Traveling Salesperson Problem

- 상태공간트리 구축방법
  - 각 마디는 출발 마디로부터의 일주여행경로를 나타내게 된다.
  - 몇 개 만 예를 들어 보면, 뿌리마디의 여행 경로는 [1]이 되고,
    뿌리마디에서 뻗어 나가는 수준 1에 있는 여행경로는
    각각 [1,2], [1,3], ..., [1,5]가 되고,
    마디 [1,2]에서 뻗어 나가는 수준 2에 있는 마디들의 여행경로는
    각각 [1,2,3],...,[1,2,5]가 되고, 이런 식으로 뻗어 나가서
    잎마디에 도달하게 되면 완전한 일주여행경로를 가지게 된다.
  - 따라서 최적일주여행경로를 구하기 위해서는
    잎마디에 있는 일주여행경로를 모두 검사하여
    그 중에서 가장 길이가 짧은 일주여행경로를 찾으면 된다.
  - 참고: 위 예에서 각 마디에 저장되어 있는 마디가 4개가 되면
    더 이상 뻗어 나갈 필요가 없다.
    왜냐하면, 남은 경로는 더 이상 뻗어 나가지 않고도 알 수 있기 때문이다.

The Traveling Salesperson Problem



The Traveling Salesperson Problem

- Compute the lower bounds

- Lower bounds on the cost of leaving 5 vertices

  - v_1 min(14, 4, 10, 20) = 4
  - v_2 min(14, 7, 8, 7) = 7
  - v_3 min(4, 5, 7, 16) = 4
  - v_4 min(11, 7, 9, 2) = 2
  - v_5 min(18, 7, 17, 4) = 4

  - 4 + 7 + 4 + 2 + 4 = 21

- Suppose we have visited [1,2]

  Make v_2 as a second vertex on the tour

  - v_1 14
  - v_2 min(7, 8, 7) = 7
  - v_3 min(4, 7, 16) = 4
  - v_4 min(11, 9, 2) = 2
  - v_5 min(18, 17, 4) = 4

  - 14 + 7 + 4 + 2 + 4 = 31

The Traveling Salesperson Problem

- 분기한정 최고우선검색
  - 분기한정 가지치기로 최고우선 검색을 사용하기 위해서 각 마디의 한계치를 구할 수 있어야 한다.
  - 이 문제에서는 주어진 마디에서 뻗어 나가서 얻을 수 있는 여행 경로 길이의 하한(최소치)을 구하여 한계치로 한다. 그리고 각 마디를 검색할 때 최소여행경로의 길이보다 한계치가 작은 경우 그 마디는 유망하다고 한다.
  - 최소여행경로의 초기값은 ∞로 놓는다. 따라서 완전한 여행경로를 처음 얻을 때 까지는 한계치가 무조건 최소여행경로의 길이 보다 작게 되므로 모든 마디는 유망하다.
  - 각 마디의 한계치는 어떻게 구하나?

    $[1,\ldots,k]$의 여행경로를 가진 마디의 한계치는 다음과 같이 구한다.

    Let : $A = V -$ ($[1,\ldots,k]$ 경로에 속한 모든 마디의 집합)

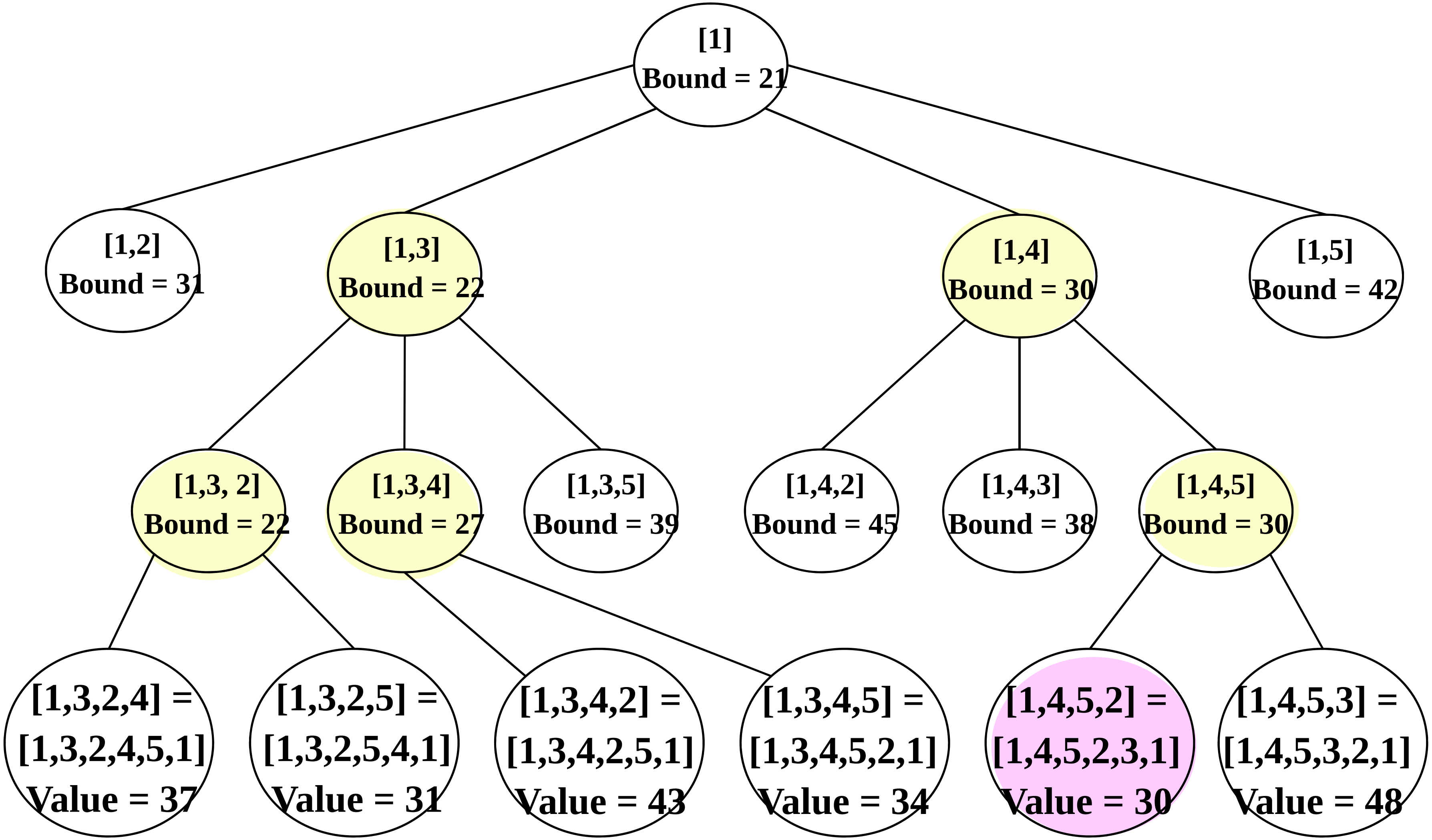
    bound = $[1,\ldots,k]$ 경로 상의 총거리

    + v_k에서 A에 속한 정점으로 가는 이음선의 길이들 중에서 최소치

    + $\Sigma_{i\in A}$(v_i에서 A−{v_i}에 속한 정점으로 가는 이음선의 길이들 중에서 최소치)

The Traveling Salesperson Problem

Ex 6.3 분기한정 가지치기로 최고우선검색을 하여 상태공간트리 구축



The Traveling Salesperson Problem

- Algorithm 6.2 : The Best-First-Search with Branch-and-Bound Pruning Algorithm for the Traveling Salesperson Problem
  - Problem : Algorithm 3.11과 동일
  - Inputs : Algorithm 3.11과 동일
  - Outputs : minlength (the length of optimal tour),
    opttour (the path of optimal tour)

The Traveling Salesperson Problem

```
struct node {
    int level;
    ordered_set path;
    number bound;
}
```

```
void  travel2(int n, const number W[][], ordered_set &opttour,
              number &minlength) {
    priority_queue_of_node PQ;
    node u, v;

    initialize(PQ);
    v.level =0;
    v.path = [1];
    v.bound = bound(v);
    minlength = INFINITE;
    insert(PQ, v);
```

The Traveling Salesperson Problem

```
while (!empty(PQ)) {
  remove(PQ, v);
  if (v.bound < minlength) {
    u.level = v.level + 1;
    for ((all i such that 2≤ i≤ n) && (i is not in v.path)) {
       u.path = v.path;
       put i at the end of u.path;
       if (u.level == n-2) {
          put index of only vertex
          not in u.path at the end of u.path;
          put i at the end of u.path;
          if (length(u)<minlength) {
              minlength = length(u);
              opttour = u.path;
          }
       }
       else {
          u.bound = bound(u);
          if (u.bound < minlength) insert(PQ, u);
       }
    }
  }
}
```

The Traveling Salesperson Problem

- 분석
  - 이 알고리즘은 방문하는 마디의 개수가 더 적다.
  - 그러나 아직도 알고리즘의 시간복잡도는 지수적이거나 그보다 못하다!
  - 즉, $n = 40$이 되면 문제를 풀 수 없는 것과 다름없다고 할 수 있다.

  - 다른 방법이 있을까?
    - 근사(approximation) 알고리즘
      - 최적의 해답을 준다는 보장은 없지만,
        무리없이 최적에 가까운 해답을 주는 알고리즘.