1121 CS233 B 線性代數 HW3

1113341 張維家

1. 假設原始圖像其中一點以向量形式表示$a=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$，對應到轉換後的圖像點$b=\begin{bmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{bmatrix}$，則可以將此關係式表示成$b=Ta$，其中$T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$為透視變換矩陣。因為圖像為二維平面，因此$Z=Z'=1$，經過矩陣乘法後可以得到$X'=a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}$，同理可得$Y'$及$Z'$，又$Z'=1$，實際上$X'$和$Y'$轉換後的結果應為$X'=\frac{a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}}{a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}}$和$Y'=\frac{a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}}{a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}}$，令$a_{33}=1$，則可將前述方程式寫作$\begin{cases}X'=a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}-a_{31}XX'-a_{32}YX'\\Y'=a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}-a_{31}XY'-a_{32}YY'\end{cases}$，因為$a_{11}\sim a_{32}$共有八個未知數，需要四組聯立方程組（即為四個點，四組(X,Y)），可以表示成如下方程式：

$$\begin{bmatrix}X_1&Y_1&1&0&0&0&-X_1X'_1&-Y_1X'_1\\0&0&0&X_1&Y_1&1&-X_1Y'_1&-Y_1Y'_1\\X_2&Y_2&1&0&0&0&-X_2X'_2&-Y_2X'_2\\0&0&0&X_2&Y_2&1&-X_2Y'_2&-Y_2Y'_2\\X_3&Y_3&1&0&0&0&-X_3X'_3&-Y_3X'_3\\0&0&0&X_3&Y_3&1&-X_3Y'_3&-Y_3Y'_3\\X_4&Y_4&1&0&0&0&-X_4X'_4&-Y_4X'_4\\0&0&0&X_4&Y_4&1&-X_4Y'_4&-Y_4Y'_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\\a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\\a_{31}\\a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X'_1\\Y'_1\\X'_2\\Y'_2\\X'_3\\Y'_3\\X'_4\\Y'_4\end{bmatrix}$$

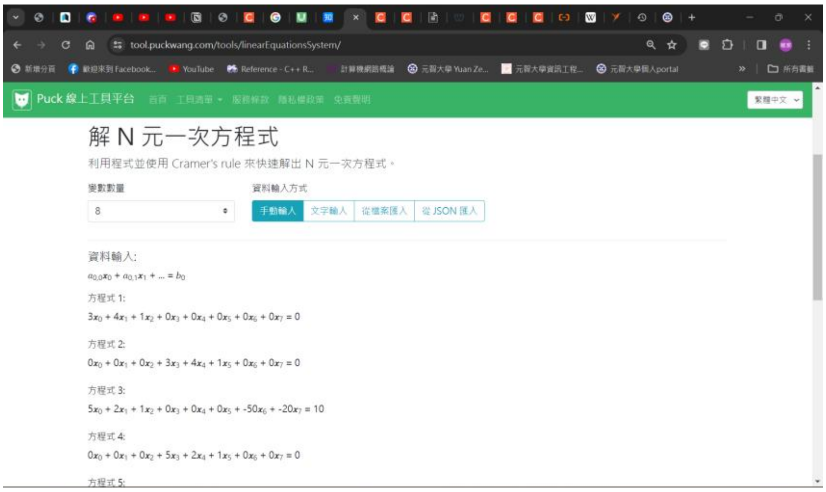
以原始點(3, 4), (5, 2), (7, 8), (2, 9)轉換到(0, 0), (10, 0), (10, 10), (0, 10)為例，代入上述方程式：

$$\begin{bmatrix}3&4&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&3&4&1&0&0\\5&2&1&0&0&0&-50&-20\\0&0&0&5&2&1&0&0\\7&8&1&0&0&0&-70&-80\\0&0&0&7&8&1&-70&-80\\2&9&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&9&1&-20&-90\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\\a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\\a_{31}\\a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\10\\0\\10\\10\\0\\10\end{bmatrix}$$

得解（四捨五入至小數後第二位）:

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\\a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\\a_{31}\\a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5.31\\-1.08\\20.54\\-3.24\\-3.24\\22.70\\-0.30\\-0.19\end{bmatrix}$$

（此部分我使用線上網頁工具解方程組，以下紅框內為網頁內容截圖）



方程式 1:

$3x_0 + 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0$

方程式 2:

$0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0$

方程式 3:

$5x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + -50x_6 + -20x_7 = 10$

方程式 4:

$0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0$

方程式 5:

$7x_0 + 8x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + -70x_6 + -80x_7 = 10$

方程式 6:

$0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 1x_5 + -70x_6 + -80x_7 = 10$

方程式 7:

$2x_0 + 9x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0$

方程式 8:

$0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 1x_5 + -20x_6 + -90x_7 = 10$

解答:

x_0 = -5.405405405405409
x_1 = -1.0810810810810823
x_2 = 20.540540540540555
x_3 = -3.243243243243245
x_4 = -3.2432432432432456
x_5 = 22.70270270270272
x_6 = -0.2972972972972974
x_7 = -0.18918918918918934

2. 假設透視變換矩陣為$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ w_x & w_y & 1 \end{bmatrix}$，$a = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$為原始點，$b = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$，則此透視變換可表示為$b = Ta$。因為原始圖像是二維平面圖像，故$Z = Z' = 1$，而透視變換是先將此二維圖像轉換成三維後，再投影回適當的二維平面，因此根據矩陣乘法$Z' = Xw_x + Yw_y + Z$（X'、Y'同理，最後再將此三點除以Z'，使得$Z' = 1$，即可得到最後轉換後之結果），此處的w_x及w_y就代表透視變換中，原始點(X,Y)對應之三維圖像的 Z 軸轉換係數。

3. 若是進行仿射變換仍會平行，因為仿射變換是在二維平面上操作，屬於一種線性變換，平行線變換後仍會維持平行；透視變換則不一定會維持平行，因為透視變換是針對以三維空間物體為對象所成的圖像進行的轉換，其過程是先將二維座標系的圖像轉換為三維座標系，再將其投影到新的二維座標系，因為牽涉到維度的變換，這個過程不為線性轉換。由於非線性轉換，我們無法確保兩條原本的平行線經過轉換後仍必然為平行線。

4. 不一定可逆，若變換後的圖像是由原圖像正射投影，則複合變換矩陣中含有投影矩陣，此時矩陣不可逆（必有一列為零列，以投影到 xy 平面為例，則矩陣第三列為零列）。答案卡四個角落會形成平行四邊形，代表照片是由正上方拍攝(與答案卡所在桌面平行，只是鏡頭可能經過旋轉)，它無須進行維度轉換，只需要經過仿射變換（旋轉、平移、縮放），並且正射投影到另一個平面上，此時新圖片平面與原圖片平面平行。