



StudyThinking

卷一

数学分析笔记

作者：缤纷之翼

日期：2024年07月13日

目 录

第一章 导论	1
第一节 重新学习数学	1
第二节 常用符号与不等式	1
1 集合符号	1
2 数集符号	2
3 逻辑符号	3
4 其他符号	3
5 几个有用的不等式	4
第二章 函数	4
第一节 函数概念	4
1 函数例子	4

第一章 导论

第一节 重新学习数学

中学时“谨遵”高斯的教诲，认为“rather less, but better”，总是希望用更简洁明了更书写快速的办法来解答问题，以此为基础的学习逻辑用在高等数学上虽然看起来赏心悦目，实则不得要领。我的大学数学的学习相当糟糕，我不禁怀疑自己的数学能力是否只是应试教育题海战术堆积出来的苦力结果，而非一看教材就无师自通的天赋结果。答案当然是肯定的。进入大学后的数学学习，我不仅练习题目数量减少，就连教材也不愿意多看，考试前也只是把平时老是布置的作业拿出来装模作样看一遍。但数学的成绩不会骗人。

除去自我能力的提高，理论知识的学习也有其他莫大的益处，可以让人短暂遗忘现实的苦痛。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

第二节 常用符号与不等式

1 集合符号

• 集合与元素

符号“ \in ”表示属于；符号“ \notin ”表示不属于；符号“ $P(x)$ ”表示元素 x 具有性质 P 。

$x \in A \Leftrightarrow$ 元素 x 属于 A ； $x \notin A \Leftrightarrow$ 元素 x 不属于 A ； $\{x | x \in A, P(x)\} \Leftrightarrow$ 集合 A 中具有 P 性质的全体元素 x 。

• 集合与集合

符号“ \subset ”表示包含；符号“ $=$ ”表示相等；符号“ \emptyset ”表示空集；符号“ \cup ”表示并或和；符号“ \cap ”表示交或乘；符号“ \setminus ”表示差。

设 A 与 B 是两个集合：

$B \subset A \Leftrightarrow$ B 的任意元素 x 都是 A 的元素，或 B 是 A 的子集，或 B 被 A 包含。

$B \subset A$ ，且 $B \neq A \Leftrightarrow$ B 是 A 的真子集。

$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\} \Leftrightarrow$ B 关于 A 的差集。

若 $B \subset A$ ， $C_A B = \{x | x \in A, x \notin B\} \Leftrightarrow$ A 中子集 B 的补集。

$A \cup B \Leftrightarrow$ A 与 B 的并集，即 $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ 。

$A \cap B \Leftrightarrow$ A 与 B 的交集，即 $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ 。

设 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 是一列无限多个集合。

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} = \{x | \exists k \in \mathbb{N}_+, x \in A_k\} \quad (1.1)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = \{x | \forall k \in \mathbb{N}_+, x \in A_k\} \quad (1.2)$$

2 数集符号

本笔记所说的数均为实数。全体实数，实数集记为 \mathbb{R} 。实数集 \mathbb{R} 中的数与数轴上的点一一对应，所以 \mathbb{R} 也称为实直线，数 a 也常说成点 a 。 \mathbb{R} 有一些常用重要的子集：

\mathbb{N}_+ 表示正整数集； \mathbb{N} 表示自然数集； \mathbb{Z} 表示整数集； \mathbb{Q} 表示有理数集，有 $\mathbb{N}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 。

\mathbb{R}_+ 表示正实数集， \mathbb{R}_- 表示负实数集，有 $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ 。

- 区间

$-\infty$ 表示比一切实数小， $+\infty$ 表示比一切实数大。对于任意实数 x 都有 $-\infty < x < +\infty$ 。无穷开区间 $(-\infty, +\infty)$ 也表示实数集。

符号	定义	名称
(a, b)	$\{x a < x < b\}$	开区间
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间
$(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$	半开区间
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$	半开区间
$(a, +\infty)$	$\{x x > a\}$	开区间
$[a, +\infty)$	$\{x x \geq a\}$	闭区间
$(-\infty, a)$	$\{x x < a\}$	开区间
$(-\infty, a]$	$\{x x \leq a\}$	闭区间

- 邻域

设 $a \in \mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$

数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 记为 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$, 称为 a 的 δ 邻域。对于某个确定的邻域半径 δ , 不需要标注 δ , 直接表述为 $U(a)$, 简称 a 的邻域。

数集 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 记为 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即 $\mathring{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, 称为 a 的 δ 去心邻域。对于某个确定的邻域半径 δ , 不需要标注 δ , 直接表述为 $\mathring{U}(a)$, 简称 a 的去心邻域。

3 逻辑符号

- 连词符号

符号 \Rightarrow 表示从左往右可以推得。例如 n 是整数 $\Rightarrow n$ 是有理数。

$A \Rightarrow B$: 若 A 成立则 B 成立; 称 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件。

符号 \Leftrightarrow 表示左右两边等价。例如 $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$ 。

$A \Leftrightarrow B$: 若 A 成立则 B 成立, 同时若 B 成立则 A 成立; 称 A 是 B 的充分必要条件。

- 量词符号

符号 \forall 表示任意; 符号 \exists 表示存在。数集 A 的上下界和有界定义可以写成:

数集 A 有上界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$;

数集 A 有下界 $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq m$;

数集 A 有界 $\Leftrightarrow \exists a > 0, \forall x \in A, |x| \leq a$;

数集 A 无上界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M$;

4 其他符号

符号 \max 表示最大; 符号 \min 表示最小。例如:

$$\max\{1, 2, 3\} = 3$$

$$\min\{1, 2, 3\} = 1$$

符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。例如:

$$[\pi] = 3$$

$$[-1.1] = -2$$

符号 $n!$ 表示不超过 n 的所有正整数乘积。例如:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

值得注意的是, $0!$ 的值被规定为 1。

符号 $n!!$ 表示不超过 n 且与 n 有相同奇偶性的正整数乘积。例如:

$$5!! = 5 \times 3 \times 1$$

$$6!! = 6 \times 4 \times 2$$

符号 C_n^m 表示从 n 个不同元素去中 m 个元素的组合数。例如:

$$C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2}$$
$$C_n^m = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$$

假设有 n 个表面印刷编号不一致, 其他性质都一致的小球放在一个不透明箱子里, 每次从箱子中依次不放回取出一个小球, 那么第1次取出小球的编号有 n 种可能, 第2次有 $n-1$ 种可能……第 m 次有 $n-m+1$ 可能, 有序抽取的可能事件数即为 $n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)$ 。在抽取 m 个小球后, 把 m 个编号作为一个集合来看, 会有多种有序抽取结果形成相同的集合。现在考虑

m 次有序抽取会形成多少种相同集合数, 第1次被抽中的小球有 m 种可能, 第2次有 $m - 1$ 种可能……第 m 次有1种可能, 即会有 $m \times (m - 1) \times \dots \times 1$ 次的有序抽取会出现相同的无序结果。那么从装有 n 个小球的箱子里无序取出 m 个小球的可能事件数即为 $C_n^m = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m}$ 。

有公式:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \quad (1.3)$$

5 几个有用的不等式

第二章 函数

第一节 函数概念

1 函数例子

- 物体在真空中距离地面高度为 h 时, 做自由落体运动, 其下落时间 t 与下落距离 s 相互联系, 在区间 $[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$ 内对于任意一个的 t 来说, 都有一个与其对应的 s , 使得 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 其数学表述为:

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right], s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.1)$$

其中 g 为重力加速度。

只需要依次求加速度对时间积分和速度对时间积分即可, 此处省略了矢量符号的书写:

$$v = \int g \, dt = gt \quad (2.2)$$

$$s = \int v \, dt = \int gt \, dt = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.3)$$

- 球的半径 r 与其体积 V 相互联系, 在区间 $[0, +\infty]$ 内对于任意一个的 r 来说, 都有一个与其对应的 V , 使得 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 其数学表述为:

$$\forall r \in [0, +\infty], V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (2.4)$$

其中 π 为圆周率。

我们考虑将球切成一个个薄厚相同的圆，圆的半径为 R ,其圆心距离球的球心距离为 x , 利用毕达哥拉斯定理我们有 $R = \sqrt{r^2 - x^2}$, 那么求圆面积 $S = \pi R^2$ 对距离 x 的积分则有:

$$\begin{aligned}
V &= 2 \int_0^r S \, dx \\
&= 2 \int_0^r \pi(r^2 - x^2) \, dx \\
&= 2\pi r^2 \int_0^r dx - 2 \int_0^r \pi x^2 \, dx \\
&= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned} \tag{2.5}$$