



わたしと心葉先輩の間に、約束はない。  
心葉先輩は最後までそれを、わたしにくれなかった。  
けど、思い出はある！  
澄んだ泉のようにあふれ出し、  
きらきらとこぼれ落ちるほどたくさん、  
心葉先輩はわたしに、  
大切なものや愛おしいものをくれた！  
わたしは物語のページをめくるように、  
それを何度も何度も読み返せる。

## Exercise Thinking

### 卷一 数学分析习题解

作者：latalealice

日期：2025/01/29

# 目 录

第一章 导论 .....	1
第二章 函数 .....	2
2.1 函数 .....	2
2.2 四类具有特殊性质的函数 .....	10

# 第一章 导论

此 PDF 为习题解答

## 第二章 函数

### 2.1 函数

#### 例题 2.1.1

设  $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$ , 求  $f(0), f(2), f(-2), f(1), f(\frac{1}{2})$ .

答:

$$f(0) = \frac{|0-2|}{0+1} = 2$$

$$f(2) = \frac{|2-2|}{2+1} = 0$$

$$f(-2) = \frac{|-2-2|}{-2+1} = -4$$

$$f(1) = \frac{|1-2|}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{|\frac{1}{2}-2|}{\frac{1}{2}+1} = 1$$

#### 例题 2.1.2

设  $\varphi(x) = 2^{x-2}$ , 求  $\varphi(2), \varphi(-2), \varphi(\frac{5}{2}), \varphi(a) - \varphi(b), \varphi(a)\varphi(b), \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$ .

答:

$$\varphi(2) = 2^{2-2} = 1$$

$$\varphi(-2) = 2^{-2-2} = \frac{1}{16}$$

$$\varphi(\frac{5}{2}) = 2^{\frac{5}{2}-2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = 2^{a-2} - 2^{b-2} = \frac{2^a - 2^b}{4}$$

$$\varphi(a)\varphi(b) = 2^{a-2} \times 2^{b-2} = \frac{2^{a+b}}{16}$$

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} = \frac{2^{a-2}}{2^{b-2}} = 2^{a-b}$$

#### 例题 2.1.3

设  $F(x) = x^2 - 3x + 7$ , 求  $F(2+h), \frac{F(2+h)-F(2)}{h}$ .

答:

$$F(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) + 7 = h^2 + h + 5$$

$$F(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 7 = 5$$

$$\frac{F(2+h)-F(2)}{h} = \frac{h^2+h+5-5}{h} = h+1$$

### 例题 2.1.4

设  $\psi(t) = ta^t (a > 0)$ , 求  $\psi(0), \psi(1), \psi(t+1), \psi(t+1) + 1, \psi(\frac{1}{t}), \frac{1}{\psi(t)}$ .

答:

$$\psi(0) = 0 \times a^0 = 0$$

$$\psi(1) = 1 \times a^1 = a$$

$$\psi(t+1) = (t+1)a^{t+1}$$

$$\psi(t+1) + 1 = (t+1)a^{t+1} + 1$$

$$\psi(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}a^{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{1}{\psi(t)} = \frac{1}{ta^t} = \frac{1}{t}a^{-t}$$

### 例题 2.1.5

确定下列函数的定义域:

$$(1)y = \sqrt{3x+4}; (2)y = \sqrt{2+x-x^2};$$

$$(3)y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; (4)y = \arcsin(2x+1);$$

$$(5)y = \frac{1}{|x|-x}; (6)y = \ln(2x+1) + \sqrt{4-3x};$$

$$(7)y = \ln(\sin \frac{\pi}{x}); (8)y = x^3 + e^{x-1} + \frac{1}{x-4} \ln x;$$

$$(9)y = \frac{1}{e^x - e^{-x}}; (10)y = \sqrt{\cos x};$$

答:

(1)

$$3x+4 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

$$\{x|x \geq -\frac{4}{3}\}$$

(2)

$$2+x-x^2 \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$\{x|-1 \leq x \leq 2\}$$

(3)

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0$$

$$(1-x)(1+x) \geq 0 \wedge 1+x \neq 0$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\{x|-1 < x \leq 1\}$$

(4)

$$-1 \leq 2x+1 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$\{x|-1 \leq x \leq 0\}$$

(5)

$$|x|-x \neq 0$$

$$x < 0$$

$$\{x|x < 0\}$$

(6)

$$2x+1 > 0 \wedge 4-3x \geq 0$$

$$-\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}$$

$$\{x|-\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}\}$$

(7)

$$\sin \frac{\pi}{x} > 0 \wedge x \neq 0$$

$$0+2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi+2k\pi \vee -2\pi-2k\pi < \frac{\pi}{x} < -\pi-2k\pi (k \in \mathbb{N})$$

$$\left\{x \middle| \frac{1}{1+2k} < x < \frac{1}{2k} \vee -\frac{1}{1+2k} < x < -\frac{1}{2+2k}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

(8)

$$x > 0 \wedge x - 4 \neq 0$$

$$\{x|x > 0\} \setminus \{4\}$$

(9)

$$e^x - e^{-x} \neq 0$$

$$e^{2x} - 1 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(10)

$$\cos x \geq 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$$

$$\{x | -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$$

### 例题 2.1.6

正方形的周长集合 $L$ 与其面积集合 $A$ 之间的对应是否为函数?三角形的周长集合 $l$ 与其面积集合 $S$ 之间的对应是否为函数?

答:

正方形的边长为 $\frac{l}{4}$ ,则面积为 $A = \frac{l^2}{16}$ ,周长集合的元素在面积集合里都有唯一一个元素与之对应,所以这样的对应是函数.

不失一般性地设三角形的三个边长为 $a, b, c$ ,则有 $a + b + c = l, \frac{a+b+c}{2} = p$ .依海伦公式有 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{l}{2}(\frac{l}{2}-a)(\frac{l}{2}-b)(a+b-\frac{l}{2})}$ .

从公式可得:当 $c$ 取值唯一时, $a, b$ 取值不唯一.通过改变 $a, b$ 的取值,相同的 $l$ 对应不同的 $S$ ,所以这样的对应不是函数.

### 例题 2.1.7

下列函数是否相等,为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x}{x}; \varphi(x) = 1$$

$$(2) f(x) = 2 \lg x; \varphi(x) = \lg x^2$$

$$(3) f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}; \varphi(x) = x-3$$

$$(4) f(x) = \frac{\pi}{2}x; \varphi(x) = x(\arcsin x + \arccos x)$$

答:

写出各个函数的定义域即可判别,

(1)

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}$$

(2)

$$\{x|x > 0\}; \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(3)

$$\mathbb{R} \setminus \{-3\}; \mathbb{R}$$

(4)

$$\mathbb{R}; \{x|-1 \leq x \leq 1\}$$

### 例题 2.1.8

证明:若 $\varphi(x) = \ln x$ ,则 $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \varphi[x(x+1)]$ .

证:

$$\begin{aligned} & \varphi(x) + \varphi(x+1) \\ &= \ln x + \ln(x+1) \\ &= \ln[x(x+1)] \\ &= \varphi[x(x+1)] \end{aligned}$$



### 例题 2.1.9

证明:若  $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ ,  $a > 0$ , 则  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ .

证:

$$\begin{aligned} & f(x+y) + f(x-y) \\ &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-x+y}) \\ &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y} + a^{x-y} + a^{-x+y}) \\ & \quad 2f(x)f(y) \\ &= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y}) \\ &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{x-y} + a^{-x+y} + a^{-x-y}) \end{aligned}$$

即

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

### 例题 2.1.10

证明:若  $\varphi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ , 则  $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ .

证:

先计算左边式子

$$\begin{aligned} & \varphi(a) + \varphi(b) \\ &= \ln \frac{1-a}{1+a} + \ln \frac{1-b}{1+b} \\ &= \ln \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} \\ &= \ln \frac{1+ab-(a+b)}{1+ab+(a+b)} \end{aligned}$$

同样右式

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) \\ &= \ln \frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}} \\ &= \ln \frac{1+ab-(a+b)}{1+ab+(a+b)} \end{aligned}$$

即

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

### 例题 2.1.11

设一等边三角形面积为1,取三角形各边中点互相连接得到一个小三角形,继续以此方法取三角形.....如此无限重复,求这些三角形的数列.

答:

可以通过考察其面积 $S$ 与边长 $l$ 之间的函数关系来简化对于等边三角形的面积计算.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

$$S_n = S_1 q^{n-1}, S_1 = 1$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4} = q$$

$$S_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

### 例题 2.1.12

写出下列无理数的有理数不足近似数列与过剩近似值数列,使其精确到1, 0.1, 0.01, ....

$$\pi = 3.141592653\cdots, e = 2.718281828\cdots$$

答:

- $\pi = 3.141592653\cdots$ 的近似数列  
不足近似数列

$$\pi_1 = 3$$

$$\pi_2 = 3.1$$

$$\pi_3 = 3.14$$

$$\pi_4 = 3.141$$

$$\pi_5 = 3.1415$$

$$\pi_6 = 3.14159$$

...

过剩近似数列

$$\pi_1 = 4$$

$$\pi_2 = 3.2$$

$$\pi_3 = 3.15$$

$$\pi_4 = 3.142$$

$$\pi_5 = 3.1416$$

$$\pi_6 = 3.14160$$

...

•  $e = 2.718281828\dots$ 的近似数列

不足近似数列

$$e_1 = 2$$

$$e_2 = 2.7$$

$$e_3 = 2.71$$

$$e_4 = 2.718$$

$$e_5 = 2.7182$$

$$e_6 = 2.71828$$

...

过剩近似数列

$$e_1 = 3$$

$$e_2 = 2.8$$

$$e_3 = 2.72$$

$$e_4 = 2.719$$

$$e_5 = 2.7183$$

$$e_6 = 2.71829$$

...

### 例题 2.1.13

证明:若  $f(x) = ax + b$ , 且  $\{x_n\}$  为等差数列, 则  $\{f(x_n)\}$  也是等差数列.

答:

$$\begin{aligned}\because x_n &= x_1 + d(n-1) \\ f(x) &= ax + b \\ \therefore f(x_{n+1}) - f(x_n) &= a(x_{n+1} - x_n) = ad \\ f(x_n) &= f(x_1) + ad(n-1) = ax_1 + b + ad(n-1)\end{aligned}$$

### 例题 2.1.14

证明:若  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $a_n > 0$ , 则  $\{\ln a_n\}$  是等差数列.

答:

$$\begin{aligned}\because a_n &= a_1 q^{n-1}, q > 0 \\ \therefore \ln a_{n+1} - \ln a_n &= \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln q\end{aligned}$$

## 2.2 四类具有特殊性质的函数

### 例题 2.2.1

证明:若函数  $f(x)$  与  $\varphi(x)$  在数集  $A$  有界, 则函数  $f(x) + \varphi(x)$ ,  $f(x) - \varphi(x)$ ,  $f(x)\varphi(x)$  在数集  $A$  有界.

答:

$$\begin{aligned}\because \forall x \in A, \exists M > 0, |f(x)|, |\varphi(x)| &< M \\ \therefore |f(x) + \varphi(x)| &\leq |f(x)| + |\varphi(x)| < 2M \\ |f(x) - \varphi(x)| &\leq |f(x)| + |-\varphi(x)| < 2M \\ |f(x)\varphi(x)| &= |f(x)||\varphi(x)| < M^2\end{aligned}$$

### 例题 2.2.2

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同定义域,证明:

- 1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数,则 $f(x)g(x)$ 也为偶函数;
- 2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数,则 $f(x)g(x)$ 为偶函数;
- 3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一个为奇函数,一个为偶函数,则 $f(x)g(x)$ 为奇函数.

答:

1)

$$\because f(x) = f(-x), g(x) = g(-x)$$

$$\therefore f(x)g(x) = f(-x)g(-x)$$

2)

$$\because f(x) = -f(-x), g(x) = -g(-x)$$

$$\therefore f(x)g(x) = f(-x)g(-x)$$

3)

$$\because f(x) = -f(-x), g(x) = g(-x)$$

$$\therefore f(x)g(x) = -f(-x)g(-x)$$

### 例题 2.2.3

证明:若函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ ,则 $F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数; $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数,并写出函数 $f(x) = a^x$ 与 $f(x) = (1+x)^n$ 的 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ .

答:

$$F_1(-x) = f(-x) + f(x) = F_1(x)$$

$$F_2(-x) = f(-x) - f(x) = -F_2(x)$$

$$f(x) = a^x$$

$$F_1(x) = a^x + a^{-x}$$

$$F_2(x) = a^x - a^{-x}$$

$$f(x) = (1+x)^n$$

$$F_1(x) = (1+x)^n + (1-x)^n$$

$$F_2(x) = (1+x)^n - (1-x)^n$$

### 例题 2.2.4

指出下列函数哪些是奇函数?哪些是偶函数?

$$1)x + 3x^3 + x^5; 2)x^2 - 3x^4 + x^6; 3)x + \sin x;$$

$$4)x \sin \frac{1}{x}; 5)x^2 \sin \frac{1}{x}; 6)\ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$7)\ln \frac{1-x}{1+x}; 8)2^{x^2-1}; 9)\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

答:

$$-x + 3(-x)^3 + (-x)^5 = -(x + 3x^3 + x^5)$$

$$(-x)^2 - 3(-x)^4 + (-x)^6 = x^2 - 3x^4 + x^6$$

$$-x + \sin(-x) = -(x + \sin x)$$

$$-x \sin \frac{1}{-x} = x \sin \frac{1}{x}$$

$$(-x)^2 \sin \frac{1}{-x} = -x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = -\ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$2^{(-x)^2-1} = 2^{x^2-1}$$

$$\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

### 例题 2.2.5

证明:函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 无界.

答:

有下确界 $y = 1$

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall 0 < x < 1, f(x) \geq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon+1}, f(x_\varepsilon) = \varepsilon + 1 > 1$$

$$\forall a > 0, \exists x_a = \frac{1}{a+1}, f(x_a) = a + 1 > a$$

### 例题 2.2.6

判断下列函数哪些是周期函数,若有最小正周期,指出其最小正周期.

$$1)y = \sin^2 x; 2)y = \sin x^2; 3)y = \sin(\omega x + \varphi)(\omega > 0);$$

$$4)y = \cos 5\pi x; 5)y = \sqrt{\tan x}; 6)y = D(x);$$

$$7)y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x; 8)y = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{5}.$$

答:

1)

$$\sin^2(x + k\pi) = (-1)^{2k} \sin^2 x, l = \pi$$

2)

$$\sin(x + l)^2 = \sin x^2, 2lx + l^2 = 2k\pi, l = 0$$

3)

$$\sin(\omega(x + l) + \varphi) = \sin(\omega x + \varphi), \omega l = 2k\pi, l = \frac{2\pi}{\omega}$$

4)

$$l = \frac{2}{5}$$

5)

$$l = \pi$$

6)

$$l = \frac{p}{q}$$

7)

$$\sin(x + l) + \frac{1}{2} \sin 2(x + l) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x, l = 2\pi$$

8)

$$\sin \frac{x+l}{2} + \sin \frac{x+l}{5} = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{5}, l = 20\pi$$

### 例题 2.2.7

证明:若函数 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数,则函数 $F(x) = f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$  ( $a > 0$ )为周期的周期函数.

答:

$$\begin{aligned}\because f(x+T) &= f(x) \\ \therefore F\left(x+\frac{T}{a}\right) &= f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right) = f(ax) = F(x)\end{aligned}$$

### 例题 2.2.8

证明:函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 单调 $\iff \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ , 有

$$[f(x_3) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_1)] \geq 0.$$

答:

$$\begin{aligned}\because x_3 &> x_2 > x_1 \\ \therefore f(x_3) &\geq f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_3) \leq f(x_2) \leq f(x_1)) \\ f(x_3) - f(x_2) &\geq 0, f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad (f(x_3) - f(x_2) \leq 0, f(x_2) - f(x_1) \leq 0) \\ [f(x_3) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_1)] &\geq 0\end{aligned}$$

### 例题 2.2.9

列举符合下列条件的函数:

- 1) 在 $\mathbb{R}$ 严格减少的奇函数;
- 2) 在 $\mathbb{R}$ 单调减少的偶函数;
- 3) 在 $\mathbb{R}$ 是偶函数、周期函数,且不存在单调区间;
- 4) 在 $\mathbb{R}$ 是奇函数、偶函数、单调函数、周期函数.

答:

$$\begin{aligned}y &= -x \\ y &= 1\end{aligned}$$



$$y = D(x)$$

$$y = 0$$

### 例题 2.2.10

证明:在 $\mathbb{R}$ 不存在严格增加的偶函数.

答:

$$\because f(x) = f(-x)$$

$$\therefore \forall x_2 < 0 < x_1, x_1 = -x_2, f(x_1) = f(x_2)$$

### 例题 2.2.11

列表对比下列的定义及其否定叙述:

- 1)  $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是偶函数;
- 2)  $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是周期函数;
- 3)  $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是严格增加函数;
- 4)  $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是单调减少函数.

答:

定义	否定
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$	$\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq f(-x_0)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists l > 0, f(x+l) = f(x)$	$\forall l > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0+l) \neq f(x_0)$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$

**例题 2.2.12**

证明:  $f(x) = x^2 - x$  在  $\mathbb{R}$  不是偶函数, 不是周期函数, 不是严格增加函数, 也不是单调减少函数.

答:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \neq f(-1) = 2 \\ \text{if } f(x+l) &= f(x) \\ (x+l)^2 - (x+l) &= x^2 - x \\ l^2 + (2x-1)l &= 0 \\ \text{only trivial solution } l &= 0 \\ f(1) &= 0 < f(-1) = 2 \\ f(1) &= 0 < f(2) = 2 \end{aligned}$$

**例题 2.2.13**

证明: 在区间  $(-l, l)$  有定义的任意函数  $f(x)$  都能表示为奇函数与偶函数之和.

答:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

**例题 2.2.14**

证明: 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  都是定义在  $A$  的周期函数, 周期分别是  $T_1$  与  $T_2$ , 且  $\frac{T_1}{T_2} = a$ , 而  $a$  是有理数, 则  $f(x) + g(x)$  与  $f(x)g(x)$  都是  $A$  的周期函数.

答:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}_+ \\ f(x) + g(x) &= f(x + qT_1) + g(x + pT_2) = f(x + T) + g(x + T) \\ f(x)g(x) &= f(x + qT_1)g(x + pT_2) = f(x + T)g(x + T) \\ T &= qT_1 = pT_2 \end{aligned}$$