StudyThinking

卷一 数学分析笔记

作者：latalealice

日期：2024/07/18

目　录

第一章 导论

模版参考 https://github.com/IxionWheel/LessElegantNote
感谢 IxionWheel 的大力支持

1.1 重新学习数学

中学时谨遵高斯的教诲,认为“rather less, but letter”,以此为基础的学习逻辑用在高等数学上虽然看起来赏心悦目,实则不得要领.我的大学数学的学习相当糟糕,我不禁怀疑自己的数学能力是否只是应试教育题海战术堆积出来的苦力结果,而非一看教材就无师自通的天赋结果.答案当然是肯定的.进入大学后的数学学习,我不仅练习题目数量减少,就连教材也不愿意多看,考试前也只是把平时老是布置的作业拿出来装模作样看一遍.但数学的成绩不会骗人.

除去自我能力的提高,理论知识的学习也有其他莫大的益处,可以让人短暂遗忘现实的苦痛.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

1.2 常用符号与不等式

1.2.1 集合符号

- 集合与元素

  符号$\in$表示属于;符号$\notin$表示不属于;符号$P(x)$表示元素x具有性质P.

  $x \in A$$\Longleftrightarrow$元素$x$属于$A$;$x \notin A$$\Longleftrightarrow$元素$x$不属于$A$;$\{x|x \in A, P(x)\}$$\Longleftrightarrow$集合$A$中具有$P$性质的全体元素$x$.

- 集合与集合

  符号$\subset$表示包含;符号$=$表示相等;符号$\varnothing$表示空集;符号$\cup$表示并或和;符号$\cap$表示交或乘;符号$\setminus$表示差;符号$\wedge$表示且;符号$\vee$表示或.

  设A与B是两个集合:

  $B \subset A$$\Longleftrightarrow$$B$的任意元素$x$都是$A$的元素,或$B$是$A$的子集,或$B$被$A$包含.

  $B \subset A$,且$B \neq A$$\Longleftrightarrow$$B$是$A$的真子集.

  $A \setminus B$=$\{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$\Longleftrightarrow$$B$关于$A$的差集.

  若$B \subset A$,$C_A B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$\Longleftrightarrow$A 中子集 B 的补集.

  $A \cup B$$\Longleftrightarrow$$A$与$B$的并集,即$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$.

  $A \cap B$$\Longleftrightarrow$$A$与$B$的交集,即$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$.

  设$A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} = \{x|\exists k \in \mathbb{N}_+, x \in A_k\} \tag{1.1}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = \{x|\forall k \in \mathbb{N}_+, x \in A_k\} \tag{1.2}$$

1.2.2 数集符号

本笔记所说的数均为实数.全体实数,实数集记为$\mathbb{R}$.实数集$\mathbb{R}$中的数与数轴上的点一一对应,所以$\mathbb{R}$也称为实直线,数a也常说成点a.$\mathbb{R}$有一些常用重要的子集:

$\mathbb{N}_+$表示正整数集;$\mathbb{N}$表示自然数集;$\mathbb{Z}$表示整数集;$\mathbb{Q}$表示有理数集,有$\mathbb{N}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+$表示正实数集,$\mathbb{R}_-$表示负实数集,有$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

- 区间

$-\infty$表示比一切实数小,$+\infty$表示比一切实数大.对于任意实数x都有$-\infty < x < +\infty$.无穷开区间$(-\infty, +\infty)$也表示实数集.

符号	定义	名称
(a,b)	$\{x\|a < x < b\}$	开区间
$[a,b]$	$\{x\|a \le x \le b\}$	闭区间
$(a,b]$	$\{x\|a < x \le b\}$	半开区间
$[a,b)$	$\{x\|a \le x < b\}$	半开区间
$(a,+\infty)$	$\{x\|x > a\}$	开区间
$[a,+\infty)$	$\{x\|x \ge a\}$	闭区间
$(-\infty,a)$	$\{x\|x < a\}$	开区间
$(-\infty,a]$	$\{x\|x \le a\}$	闭区间

- 邻域

设$a \in \mathbb{R}$,$\forall \delta > 0$

数集$\{x|\ |x-a| < \delta\}$记为$U(a,\delta)$,即$U(a,\delta) = \{x|\ |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$,称为$a$的$\delta$邻域.对于某个确定的邻域半径$\delta$,不需要标注$\delta$,直接表述为$U(a)$,简称$a$的邻域.

数集$\{x|0 < |x-a| < \delta\}$记为$\mathring{U}(a,\delta)$,即$\mathring{U}(a,\delta) = \{x|0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$,称为$a$的$\delta$去心邻域.对于某个确定的邻域半径$\delta$,不需要标注$\delta$,直接表述为$\mathring{U}(a)$,简称$a$的去心邻域.

1.2.3 逻辑符号

- 连词符号

  符号$\Longrightarrow$表示从左往右可以推得.例如n是整数$\Longrightarrow n$是有理数.

  $A\Longrightarrow B$:若A成立则B成立;称A是B的充分条件,B是A的必要条件.

  符号$\Longleftrightarrow$表示左右两边等价.例如$A\subset B\Longleftrightarrow\forall x\in A,x\in B$.

  $A\Longleftrightarrow B$:若A成立则B成立,同时若B成立则A成立;称A是B的充分必要条件.

- 量词符号

  符号$\forall$表示任意;符号$\exists$表示存在.数集A的上下界和有界定义可以写成:

$$\text{数集 A 有上界}\Longleftrightarrow\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in A,x\leq M;$$
$$\text{数集 A 有下界}\Longleftrightarrow\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in A,x\geq m;$$
$$\text{数集 A 有界}\Longleftrightarrow\exists a>0,\forall x\in A,|x|\leq a;$$
$$\text{数集 A 无上界}\Longleftrightarrow\forall M\in\mathbb{R},\exists x\in A,x>M;$$

1.2.4 其他符号

符号max表示最大;符号min表示最小.例如:

$$\max\{1,2,3\}=3$$
$$\min\{1,2,3\}=1$$

符号$[a]$表示不超过a的最大整数.例如:

$$[\pi]=3$$
$$[-1.1]=-2$$

符号$n!$表示不超过 n 的所有正整数乘积.例如:

$$5!=5\times4\times3\times2\times1$$

值得注意的是,0!的值被规定为 1.

符号$n!!$表示不超过 n 且与 n 有相同奇偶性的正整数乘积.例如:

$$5!!=5\times3\times1$$
$$6!!=6\times4\times2$$

符号C_n^m表示从 n 个不同元素去中 m 个元素的组合数.例如:

$$C_4^2=\frac{4\times3}{1\times2}$$
$$C_n^m=\frac{n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)}{1\times2\times...\times m}=\frac{n!}{m!\times(n-m)!}$$

假设有n个表面印刷编号不一致,其他性质都一致的小球放在一个不透明箱子里,每次从箱子中依次不放回取出一个小球,那么第1次取出小球的编号有n种可能,第2次有$n-1$种可能……第m次有$n-m+1$可能,有序抽取的可能事件数即为$n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)$.在抽取$m$个小球后,把 m 个编号作为一个集合来看,会有多种有序抽取结果形成相同的集合.现在考虑m次有序抽取会形成多少种相同集合数,第1次被抽中的小球有m种可能,第2次有$m-1$种可能……第m次有 1 种可能,即会有$m\times(m-1)\times...\times1$次的有序抽取会出现相同的无序

结果.那么从装有n个小球的箱子里无序取出m个小球的可能事件数即为$C_n^m = \frac{n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)}{1\times2\times...\times m}$.

有公式:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \tag{1.3}$$

1.2.5 几个有用的不等式

- $\forall n\in\mathbb{N}_+ \wedge n\geq 2, \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

  证明:

  设 A=$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{2n-1}{2n}$,考虑到 $n^2+2n < n^2+2n+1 = n(n+2) < (n+1)^2 \Longleftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$,将$A$中的每个分数以此不等式放大:

$$\begin{aligned} A &< \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times...\times\frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times...\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{A(2n+1)} \end{aligned}$$

  即

$$A^2 < \frac{1}{2n+1}$$

  即

$$A < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

- $\forall x\in\mathbb{R}\wedge x > -1, \forall n\in\mathbb{N}_+\wedge n > 1, (1+x)^n \geq 1+nx$（伯努利不等式）.

  证明:

  当x=0 时,对于$\forall n > 1$都有$(1+x)^n = 1+nx$.

  当$n=2$时,$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$,显然成立.

  设当$n=k$时不等式成立,那么当$n=k+1$时,

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &> (1+kx)(1+x) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &> 1+(k+1)x \end{aligned}$$

  综上所述,不等式成立.

- 若$x_i > 0, i=1,2,...,n$且$x_1x_2...x_n = 1$,则有

$$x_1+x_2+...+x_n \geq n$$

  当且仅当$x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$时,取等号.

  证明:

  当$n=1, x_1=1$,不等式成立;当$n=2, x_1=\frac{1}{x_2}, x_1+\frac{1}{x_1}\geq 2$,不等式成立.

  设当$n=k$时不等式成立,当$n=k+1$时:

  1°:$x_1 = x_2 = ... = x_{k+1} = 1$,$x_1+x_2+...+x_{k+1} = k+1$,不等式成立.

2°:x_i不全为1,不失一般性地设$x_1 < 1, x_2 > 1, y = x_1 x_2$,即有$y + x_3 + ... + x_{k+1} \geq k$,

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} \\ = y + x_3 + ... + x_{k+1} - y + x_1 + x_2 \\ \geq k - y + x_1 + x_2 \\ = k + x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1 + 1 \\ = k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ \geq k + 1 \end{gathered}$$

综上所述,不等式成立.当且仅当$x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$时,取等号.

- 若$\forall x_i > 0, i = 1, 2, ..., n$.设

$$T_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
$$J_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$
$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

有不等式

$$T_n \leq J_n \leq S_n$$

同时有

$$T_n = J_n = S_n \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$$

证明:

已知$\frac{x_1}{J_n} \cdot \frac{x_2}{J_n} \cdot ... \cdot \frac{x_n}{J_n} = 1$,有

$$\frac{x_1}{J_n} + \frac{x_2}{J_n} + ... + \frac{x_n}{J_n} \geq n$$
$$x_1 + \frac{x_2}{+} ... + x_n \geq n J_n$$
$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = S_n \geq J_n$$

当且仅当$\frac{x_1}{J_n} = \frac{x_2}{J_n} = ... = \frac{x_n}{J_n} \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$时取等号.

对上述结果的x_i取倒数有

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} ... \frac{1}{x_n}}$$
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = J_n \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = T_n$$

当且仅当$\frac{x_1}{J_n} = \frac{x_2}{J_n} = ... = \frac{x_n}{J_n} \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$时取等号.

$$T_n \leq J_n \leq S_n$$
$$T_n = J_n = S_n \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$$

- 若$\forall n \in \mathbb{N}_+ \wedge n > 2$,

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$$

证明:

先证$n^n < (n!)^2$