



ExerciseThinking

卷一 数学分析习题解

作者：latalealice

日期：2025/04/17

目 录

| | |
|-----------------------|----|
| 第一章 函数 | 2 |
| 1.1 函数 | 2 |
| 1.1.1 | 2 |
| 1.1.2 | 2 |
| 1.1.3 | 2 |
| 1.1.4 | 2 |
| 1.1.5 | 3 |
| 1.1.6 | 4 |
| 1.1.7 | 4 |
| 1.1.8 | 5 |
| 1.1.9 | 5 |
| 1.1.10 | 5 |
| 1.1.11 | 6 |
| 1.1.12 | 6 |
| 1.1.13 | 7 |
| 1.1.14 | 7 |
| 1.2 四类具有特殊性质的函数 | 7 |
| 1.2.1 | 7 |
| 1.2.2 | 8 |
| 1.2.3 | 8 |
| 1.2.4 | 8 |
| 1.2.5 | 9 |
| 1.2.6 | 9 |
| 1.2.7 | 10 |
| 1.2.8 | 10 |
| 1.2.9 | 10 |
| 1.2.10 | 10 |
| 1.2.11 | 11 |
| 1.2.12 | 11 |
| 1.2.13 | 11 |
| 1.2.14 | 11 |

此 PDF 为习题解答

第一章 函数

1.1 函数

1.1.1

例：设 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(0), f(2), f(-2), f(1), f(\frac{1}{2})$.

答：

$$f(0) = \frac{|0-2|}{0+1} = 2$$

$$f(2) = \frac{|2-2|}{2+1} = 0$$

$$f(-2) = \frac{|-2-2|}{-2+1} = -4$$

$$f(1) = \frac{|1-2|}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{|\frac{1}{2}-2|}{\frac{1}{2}+1} = 1$$

1.1.2

例：设 $\varphi(x) = 2^{x-2}$, 求 $\varphi(2), \varphi(-2), \varphi(\frac{5}{2}), \varphi(a) - \varphi(b), \varphi(a)\varphi(b), \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$.

答：

$$\varphi(2) = 2^{2-2} = 1$$

$$\varphi(-2) = 2^{-2-2} = \frac{1}{16}$$

$$\varphi(\frac{5}{2}) = 2^{\frac{5}{2}-2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = 2^{a-2} - 2^{b-2} = \frac{2^a - 2^b}{4}$$

$$\varphi(a)\varphi(b) = 2^{a-2} \times 2^{b-2} = \frac{2^{a+b}}{16}$$

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} = \frac{2^{a-2}}{2^{b-2}} = 2^{a-b}$$

1.1.3

例：设 $F(x) = x^2 - 3x + 7$, 求 $F(2+h), \frac{F(2+h)-F(2)}{h}$.

答：

$$F(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) + 7 = h^2 + h + 5$$

$$F(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 7 = 5$$

$$\frac{F(2+h)-F(2)}{h} = \frac{h^2+h+5-5}{h} = h + 1$$

1.1.4

例：设 $\psi(t) = ta^t (a > 0)$, 求 $\psi(0), \psi(1), \psi(t+1), \psi(t+1) + 1, \psi(\frac{1}{t}), \frac{1}{\psi(t)}$.

答：

$$\psi(0) = 0 \times a^0 = 0$$

$$\psi(1) = 1 \times a^1 = a$$

$$\psi(t+1) = (t+1)a^{t+1}$$

$$\psi(t+1) + 1 = (t+1)a^{t+1} + 1$$

$$\psi(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}a^{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{1}{\psi(t)} = \frac{1}{ta^t} = \frac{1}{t}a^{-t}$$

1.1.5

例：确定下列函数的定义域：

$$(1)y = \sqrt{3x+4}; (2)y = \sqrt{2+x-x^2};$$

$$(3)y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; (4)y = \arcsin(2x+1);$$

$$(5)y = \frac{1}{|x|-x}; (6)y = \ln(2x+1) + \sqrt{4-3x};$$

$$(7)y = \ln\left(\sin \frac{\pi}{x}\right); (8)y = x^3 + e^{x-1} + \frac{1}{x-4} \ln x;$$

$$(9)y = \frac{1}{e^x - e^{-x}}; (10)y = \sqrt{\cos x};$$

答：

(1)

$$3x+4 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

$$\{x|x \geq -\frac{4}{3}\}$$

(2)

$$2+x-x^2 \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$\{x|-1 \leq x \leq 2\}$$

(3)

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0$$

$$(1-x)(1+x) \geq 0 \wedge 1+x \neq 0$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\{x|-1 < x \leq 1\}$$

(4)

$$-1 \leq 2x+1 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$\{x|-1 \leq x \leq 0\}$$

(5)

$$|x|-x \neq 0$$

$$x < 0$$

$$\{x|x < 0\}$$

(6)

$$2x+1 > 0 \wedge 4-3x \geq 0$$

$$-\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}$$

$$\{x | -\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}\}$$

(7)

$$\sin \frac{\pi}{x} > 0 \wedge x \neq 0$$

$$0 + 2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi + 2k\pi \vee -2\pi - 2k\pi < \frac{\pi}{x} < -\pi - 2k\pi (k \in \mathbb{N})$$

$$\{x | \frac{1}{1+2k} < x < \frac{1}{2k} \vee -\frac{1}{1+2k} < x < -\frac{1}{2+2k}, k \in \mathbb{N}\}$$

(8)

$$x > 0 \wedge x - 4 \neq 0$$

$$\{x | x > 0\} \setminus \{4\}$$

(9)

$$e^x - e^{-x} \neq 0$$

$$e^{2x} - 1 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(10)

$$\cos x \geq 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$$

$$\{x | -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$$

1.1.6

例：正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否为函数？三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否为函数？

答：

正方形的边长为 $\frac{l}{4}$ ，则面积为 $A = \frac{l^2}{16}$ ，周长集合的元素在面积集合里都有唯一一个元素与之对应，所以这样的对应是函数。

不失一般性地设三角形的三个边长为 a, b, c ，则有 $a + b + c = l$ ， $\frac{a+b+c}{2} = p$ 。依海伦公式有 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{l}{2}(\frac{l}{2}-a)(\frac{l}{2}-b)(a+b-\frac{l}{2})}$ 。

从公式可得：当 c 取值唯一时， a, b 取值不唯一。通过改变 a, b 的取值，相同的 l 对应不同的 S ，所以这样的对应不是函数。

1.1.7

例：下列函数是否相等，为什么？

$$(1) f(x) = \frac{x}{x}; \varphi(x) = 1$$

$$(2) f(x) = 2 \lg x; \varphi(x) = \lg x^2$$

$$(3) f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}; \varphi(x) = x-3$$

$$(4) f(x) = \frac{\pi}{2}x; \varphi(x) = x(\arcsin x + \arccos x)$$

答：

写出各个函数的定义域即可判别，

(1)

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}$$

(2)

$$\{x|x>0\}; \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(3)

$$\mathbb{R} \setminus \{-3\}; \mathbb{R}$$

(4)

$$\mathbb{R}; \{x|-1 \leq x \leq 1\}$$

1.1.8

例: 证明:若 $\varphi(x) = \ln x$, 则 $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \varphi[x(x+1)]$.

证:

$$\begin{aligned} & \varphi(x) + \varphi(x+1) \\ &= \ln x + \ln(x+1) \\ &= \ln[x(x+1)] \\ &= \varphi[x(x+1)] \end{aligned}$$

1.1.9

例: 证明:若 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $a > 0$, 则 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

证:

$$\begin{aligned} & f(x+y) + f(x-y) \\ &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-x+y}) \\ &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y} + a^{x-y} + a^{-x+y}) \\ & \quad 2f(x)f(y) \\ &= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y}) \\ &= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{x-y} + a^{-x+y} + a^{-x-y}) \end{aligned}$$

即

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1.1.10

例: 证明:若 $\varphi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则 $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证:

先计算左边式子

$$\begin{aligned} & \varphi(a) + \varphi(b) \\ &= \ln \frac{1-a}{1+a} + \ln \frac{1-b}{1+b} \\ &= \ln \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} \\ &= \ln \frac{1+ab-(a+b)}{1+ab+(a+b)} \end{aligned}$$

同样右式

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) \\ &= \ln \frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}} \\ &= \ln \frac{1+ab-(a+b)}{1+ab+(a+b)} \end{aligned}$$

即

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

1.1.11

例：设一等边三角形面积为1,取三角形各边中点互相连接得到一个小三角形,继续以此方法取三角形.....如此无限重复,求这些三角形的数列.

答:

可以通过考察其面积 S 与边长 l 之间的函数关系来简化对于等边三角形的面积计算.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \\ S_n &= S_1 q^{n-1}, S_1 = 1 \\ \frac{S_2}{S_1} &= \frac{1}{4} = q \\ S_n &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

1.1.12

例：写出下列无理数的有理数不足近似数列与过剩近似值数列,使其精确到 1, 0.1, 0.01, ...

$$\pi = 3.141592653\cdots, e = 2.718281828\cdots$$

答:

- $\pi = 3.141592653\cdots$ 的近似数列
不足近似数列

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 3 \\ \pi_2 &= 3.1 \\ \pi_3 &= 3.14 \\ \pi_4 &= 3.141 \\ \pi_5 &= 3.1415 \\ \pi_6 &= 3.14159 \\ &\dots \end{aligned}$$

过剩近似数列

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 4 \\ \pi_2 &= 3.2 \\ \pi_3 &= 3.15 \\ \pi_4 &= 3.142 \\ \pi_5 &= 3.1416 \\ \pi_6 &= 3.14160 \end{aligned}$$

...

• $e = 2.718281828\cdots$ 的近似数列
不足近似数列

$$e_1 = 2$$

$$e_2 = 2.7$$

$$e_3 = 2.71$$

$$e_4 = 2.718$$

$$e_5 = 2.7182$$

$$e_6 = 2.71828$$

...

过剩近似数列

$$e_1 = 3$$

$$e_2 = 2.8$$

$$e_3 = 2.72$$

$$e_4 = 2.719$$

$$e_5 = 2.7183$$

$$e_6 = 2.71829$$

...

1.1.13

例: 证明: 若 $f(x) = ax + b$, 且 $\{x_n\}$ 为等差数列, 则 $\{f(x_n)\}$ 也是等差数列.

答:

$$\because x_n = x_1 + d(n-1)$$

$$f(x) = ax + b$$

$$\therefore f(x_{n+1}) - f(x_n) = a(x_{n+1} - x_n) = ad$$

$$f(x_n) = f(x_1) + ad(n-1) = ax_1 + b + ad(n-1)$$

1.1.14

例: 证明: 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_n > 0$, 则 $\{\ln a_n\}$ 是等差数列.

答:

$$\because a_n = a_1 q^{n-1}, q > 0$$

$$\therefore \ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln q$$

1.2 四类具有特殊性质的函数

1.2.1

例: 证明: 若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 有界, 则函数 $f(x) + \varphi(x)$, $f(x) - \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 有界.

答:

$$\because \forall x \in A, \exists M > 0, |f(x)|, |\varphi(x)| < M$$

$$\begin{aligned}\therefore |f(x) + \varphi(x)| &\leq |f(x)| + |\varphi(x)| < 2M \\ |f(x) - \varphi(x)| &\leq |f(x)| + |-\varphi(x)| < 2M \\ |f(x)\varphi(x)| &= |f(x)||\varphi(x)| < M^2\end{aligned}$$

1.2.2

例：设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同定义域,证明:

- 1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数,则 $f(x)g(x)$ 也为偶函数;
- 2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数,则 $f(x)g(x)$ 为偶函数;
- 3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一个为奇函数,一个为偶函数,则 $f(x)g(x)$ 为奇函数.

答:

1)

$$\begin{aligned}\because f(x) &= f(-x), g(x) = g(-x) \\ \therefore f(x)g(x) &= f(-x)g(-x)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\because f(x) &= -f(-x), g(x) = -g(-x) \\ \therefore f(x)g(x) &= f(-x)g(-x)\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\because f(x) &= -f(-x), g(x) = g(-x) \\ \therefore f(x)g(x) &= -f(-x)g(-x)\end{aligned}$$

1.2.3

例：证明:若函数 $f(x)$ 的定义域是 \mathbb{R} ,则 $F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数; $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数,并写出函数 $f(x) = a^x$ 与 $f(x) = (1+x)^n$ 的 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$.

答:

$$\begin{aligned}F_1(-x) &= f(-x) + f(x) = F_1(x) \\ F_2(-x) &= f(-x) - f(x) = -F_2(x)\end{aligned}$$

$$f(x) = a^x$$

$$F_1(x) = a^x + a^{-x}$$

$$F_2(x) = a^x - a^{-x}$$

$$f(x) = (1+x)^n$$

$$F_1(x) = (1+x)^n + (1-x)^n$$

$$F_2(x) = (1+x)^n - (1-x)^n$$

1.2.4

例：指出下列函数哪些是奇函数?哪些是偶函数?

$$1)x + 3x^3 + x^5; 2)x^2 - 3x^4 + x^6; 3)x + \sin x;$$

$$4)x \sin \frac{1}{x}; 5)x^2 \sin \frac{1}{x}; 6)\ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$7)\ln \frac{1-x}{1+x}; 8)2^{x^2-1}; 9)\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

答:

$$-x + 3(-x)^3 + (-x)^5 = -(x + 3x^3 + x^5)$$

$$(-x)^2 - 3(-x)^4 + (-x)^6 = x^2 - 3x^4 + x^6$$

$$-x + \sin(-x) = -(x + \sin x)$$

$$-x \sin \frac{1}{-x} = x \sin \frac{1}{x}$$

$$(-x)^2 \sin \frac{1}{-x} = -x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = -\ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$2^{(-x)^2-1} = 2^{x^2-1}$$

$$\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

1.2.5

例: 证明:函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 无界.

答:

有下确界 $y = 1$

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall 0 < x < 1, f(x) \geq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon+1}, f(x_\varepsilon) = \varepsilon + 1 > 1$$

$$\forall a > 0, \exists x_a = \frac{1}{a+1}, f(x_a) = a + 1 > a$$

1.2.6

例: 判断下列函数哪些是周期函数,若有最小正周期,指出其最小正周期.

$$1)y = \sin^2 x; 2)y = \sin x^2; 3)y = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0);$$

$$4)y = \cos 5\pi x; 5)y = \sqrt{\tan x}; 6)y = D(x);$$

$$7)y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x; 8)y = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{5}.$$

答:

1)

$$\sin^2(x + k\pi) = (-1)^{2k} \sin^2 x, l = \pi$$

2)

$$\sin(x + l)^2 = \sin x^2, 2lx + l^2 = 2k\pi, l = 0$$

3)

$$\sin(\omega(x + l) + \varphi) = \sin(\omega x + \varphi), \omega l = 2k\pi, l = \frac{2\pi}{\omega}$$

4)

$$l = \frac{2}{5}$$

5)

$$l = \pi$$

6)

$$l = \frac{p}{q}$$

7)

$$\sin(x+l) + \frac{1}{2}\sin 2(x+l) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x, l = 2\pi$$

8)

$$\sin \frac{x+l}{2} + \sin \frac{x+l}{5} = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{5}, l = 20\pi$$

1.2.7

例：证明:若函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,则函数 $F(x) = f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ ($a > 0$) 为周期的周期函数.

答:

$$\begin{aligned} & \because f(x+T) = f(x) \\ & \therefore F\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax) = F(x) \end{aligned}$$

1.2.8

例：证明:函数 $f(x)$ 在区间 I 单调 $\iff \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$[f(x_3) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_1)] \geq 0.$$

答:

$$\begin{aligned} & \because x_3 > x_2 > x_1 \\ & \therefore f(x_3) \geq f(x_2) \geq f(x_1) \text{ (} f(x_3) \leq f(x_2) \leq f(x_1) \text{)} \\ & f(x_3) - f(x_2) \geq 0, f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \text{ (} f(x_3) - f(x_2) \leq 0, f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \text{)} \\ & [f(x_3) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_1)] \geq 0 \end{aligned}$$

1.2.9

例：列举符合下列条件的函数:

- 1) 在 \mathbb{R} 严格减少的奇函数;
- 2) 在 \mathbb{R} 单调减少的偶函数;
- 3) 在 \mathbb{R} 是偶函数、周期函数,且不存在单调区间;
- 4) 在 \mathbb{R} 是奇函数、偶函数、单调函数、周期函数.

答:

$$y = -x$$

$$y = 1$$

$$y = D(x)$$

$$y = 0$$

1.2.10

例：证明:在 \mathbb{R} 不存在严格增加的偶函数.

答:

$$\begin{aligned} & \because f(x) = f(-x) \\ & \therefore \forall x_2 < 0 < x_1, x_1 = -x_2, f(x_1) = f(x_2) \end{aligned}$$

1.2.11

例: 列表对比下列的定义及其否定叙述:

- 1) $f(x)$ 在 \mathbb{R} 是偶函数;
- 2) $f(x)$ 在 \mathbb{R} 是周期函数;
- 3) $f(x)$ 在 \mathbb{R} 是严格增加函数;
- 4) $f(x)$ 在 \mathbb{R} 是单调减少函数.

答:

| 定义 | 否定 |
|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$ | $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq f(-x_0)$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}, \exists l > 0, f(x+l) = f(x)$ | $\forall l > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0+l) \neq f(x_0)$ |
| $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$ | $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$ |
| $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$ | $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$ |

1.2.12

例: 证明: $f(x) = x^2 - x$ 在 \mathbb{R} 不是偶函数,不是周期函数,不是严格增加函数,也不是单调减少函数.

答:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \neq f(-1) = 2 \\ \text{if } f(x+l) &= f(x) \\ (x+l)^2 - (x+l) &= x^2 - x \\ l^2 + (2x-1)l &= 0 \\ \text{only trivial solution } l &= 0 \\ f(1) &= 0 < f(-1) = 2 \\ f(1) &= 0 < f(2) = 2 \end{aligned}$$

1.2.13

例: 证明:在区间 $(-l, l)$ 有定义的任意函数 $f(x)$ 都能表示为奇函数与偶函数之和.

答:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

1.2.14

例: 证明:若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 A 的周期函数,周期分别是 T_1 与 T_2 , 且 $\frac{T_1}{T_2} = a$, 而 a 是有理数, 则 $f(x) + g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 都是 A 的周期函数.

答:

$$\frac{T_1}{T_2} = a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}_+$$

$$f(x) + g(x) = f(x + qT_1) + g(x + pT_2) = f(x + T) + g(x + T)$$

$$f(x)g(x) = f(x + qT_1)g(x + pT_2) = f(x + T)g(x + T)$$

$$T = qT_1 = pT_2$$