Estimation Statique (Cadre Gaussien)

Problème : Estimer un état $x \in \mathbb{R}^n$ sachant un a priori x_b et une mesure $y \in \mathbb{R}^m$.

- **Modèle :** $y = Ax + \epsilon$ avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, R)$.
- **A priori :** $x \sim \mathcal{N}(x_b, B)$. Hypothèse : $x \perp \epsilon$.

1. Fonction de Coût (MAP)

L'estimateur du Maximum A Posteriori minimise l'énergie $J(x)$ (log-vraisemblance négative) :

$$J(x) = \frac{1}{2}(x - x_b)^T B^{-1}(x - x_b) + \frac{1}{2}(y - Ax)^T R^{-1}(y - Ax)$$

Interprétation : Somme pondérée des écarts quadratiques. Les matrices inverses B^{-1} et R^{-1} sont des matrices de **précision**.

2. Résolution (BLUE)

En résolvant $\nabla J(x) = 0$, on obtient la solution analytique. **Forme "Information"** : $\hat{x} = (B^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1}(B^{-1}x_b + A^T R^{-1} y)$

Forme "Gain" (Kalman) :

$$\hat{x} = x_b + K(y - Ax_b) \quad \text{avec} \quad K = BA^T(ABA^T + R)^{-1}$$

3. Covariance a posteriori P_a

Représente l'incertitude restante après fusion.

- $P_a = (I - KA)B$ (Toujours "plus petite" que B et R).

Filtre de Kalman Linéaire

Système : $x_k = Mx_{k-1} + \epsilon^m$ et $y_k = Hx_k + \epsilon^o$.

1. Prédiction (Propagation $k - 1 \to k$)

Transport de la moyenne et diffusion de l'incertitude.

$$\hat{x}_{k|k-1} = M\hat{x}_{k-1|k-1}$$
$$P_{k|k-1} = MP_{k-1|k-1}M^T + Q$$

2. Analyse (Mise à jour à k)

Correction par l'innovation $d_k = y_k - H\hat{x}_{k|k-1}$.

$$\begin{aligned}
S_k &= HP_{k|k-1}H^T + R && \text{(Covariance Innovation)}\\
K_k &= P_{k|k-1}H^T S_k^{-1} && \text{(Gain Optimal)}\\
\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k d_k && \text{(État corrigé)}\\
P_{k|k} &= (I - K_k H)P_{k|k-1} && \text{(Covariance corrigée)}
\end{aligned}$$

Non-Linéaire (EKF et Gauss-Newton)

Problème : Minimiser $J(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_W^2$ où $F(x)$ est le vecteur des résidus non-linéaires.

1. Algorithme de Gauss-Newton (Essentiel)

On remplace la fonction non-linéaire par son approximation tangente (Jacobienne J_F) pour transformer le pb en moindres carrés linéaires itératifs. **Formule d'incrément :** À l'itération i, on résout le système normal linéarisé pour trouver le pas δx :

$$\delta x = -\underbrace{(J_F^T W J_F)^{-1}}_{\text{Covariance approx}} \underbrace{J_F^T W F(x^{(i)})}_{\text{Gradient}}$$

Mise à jour : $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \delta x$.

2. Extended Kalman Filter (EKF)

Système : $x_k = f(x_{k-1}) + \epsilon^m$ et $y_k = h(x_k) + \epsilon^o$. L'EKF applique la linéarisation autour de la trajectoire courante.

A. Linéarisation (Jacobiennes) :

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\hat{x}_{k-1|k-1}} \quad \text{et} \quad H_k = \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{\hat{x}_{k|k-1}}$$

B. Prédiction (État non-linéaire / Covariance linéarisée) :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= f(\hat{x}_{k-1|k-1}) && \text{(Fonction exacte)}\\
P_{k|k-1} &= F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q && \text{(Jacobienne)}
\end{aligned}$$

C. Mise à jour (Innovation non-linéaire / Gain linéarisé) :

$$\begin{aligned}
S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R && \text{(Jacobienne)}\\
K_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} && \text{(Jacobienne)}\\
\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k \underbrace{(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}))}_{\text{Innovation exacte}} &&\\
P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} && \text{(Jacobienne)}
\end{aligned}$$

Note : On propage la moyenne avec le modèle physique (f, h), mais on propage l'incertitude avec le modèle tangent (F_k, H_k).

3. Approche Variationnelle (4D-Var)

Minimisation globale sur une fenêtre de temps $[0, T]$ (Gauss-Newton géant sur la condition initiale x_0) :

$$J(x_0) = \frac{1}{2}\|x_0 - x_b\|_{B^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{T} \frac{1}{2}\|y_k - h_k(M_{0\to k}(x_0))\|_{R^{-1}}^2$$

IV. Outils Mathématiques

Identité de Sherman-Morrison-Woodbury : Permet d'inverser dans l'espace des mesures (m) plutôt que l'état (n).

$$(P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} = P - PH^T(HPH^T + R)^{-1}HP$$

Prouve l'équivalence : Forme Info $(P^{-1} + \dots)^{-1} \Leftrightarrow$ Forme Kalman $(I - KH)P$.