

Télécommunications

**Département sciences du numérique
Première année**

Transmissions sur fréquence porteuse (modulations linéaires)

Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe..... Diapo 3
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes... Diapo 12
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale..... Diapo 21
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance..... Diapo 34
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

Télécommunications

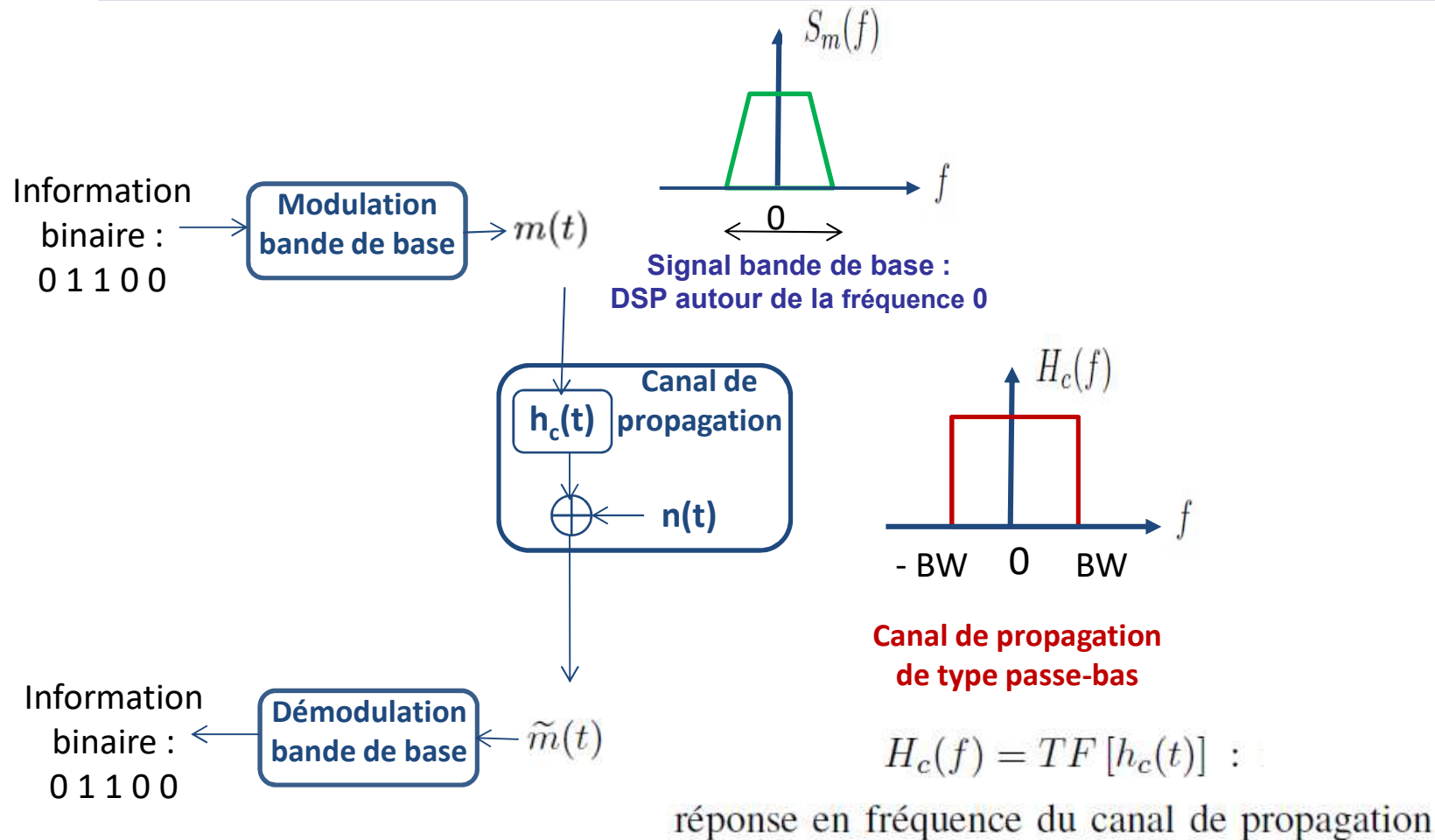
**Département sciences du numérique
Première année**

Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe**
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes**
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale**
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :**
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

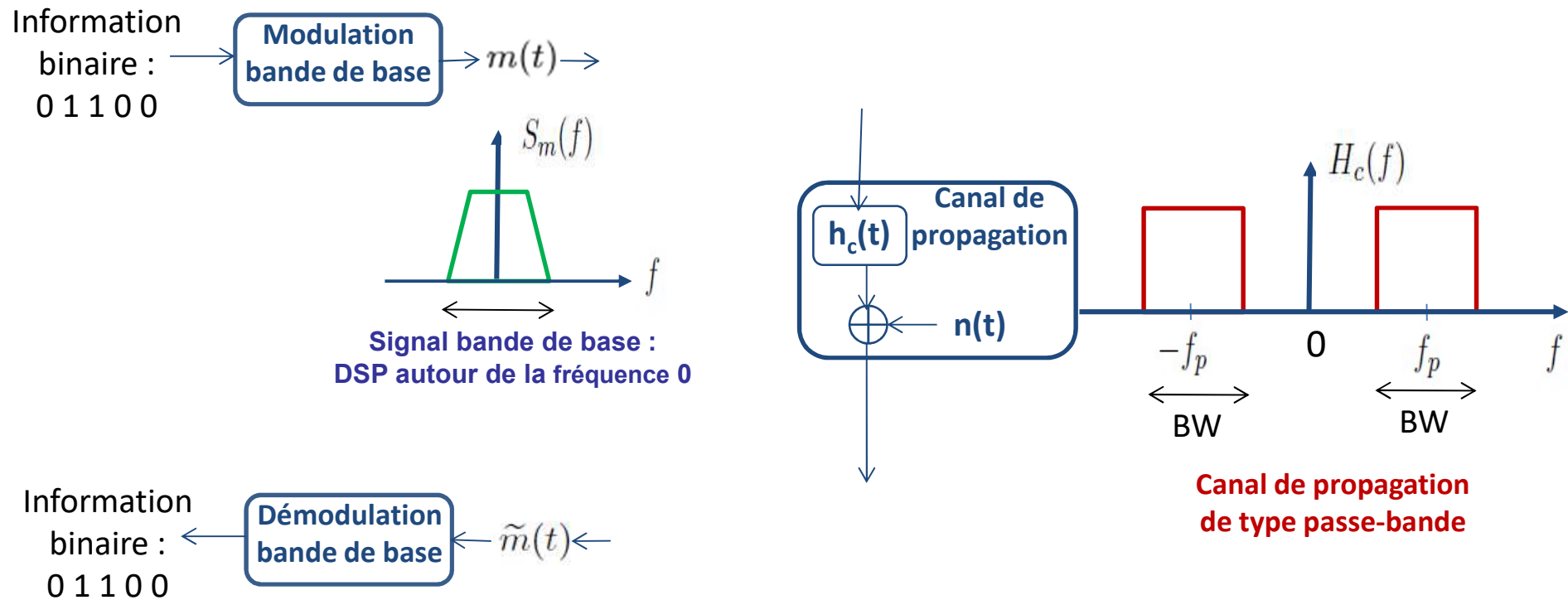
Modulations numériques sur fréquence porteuse

Transmissions en bande de base



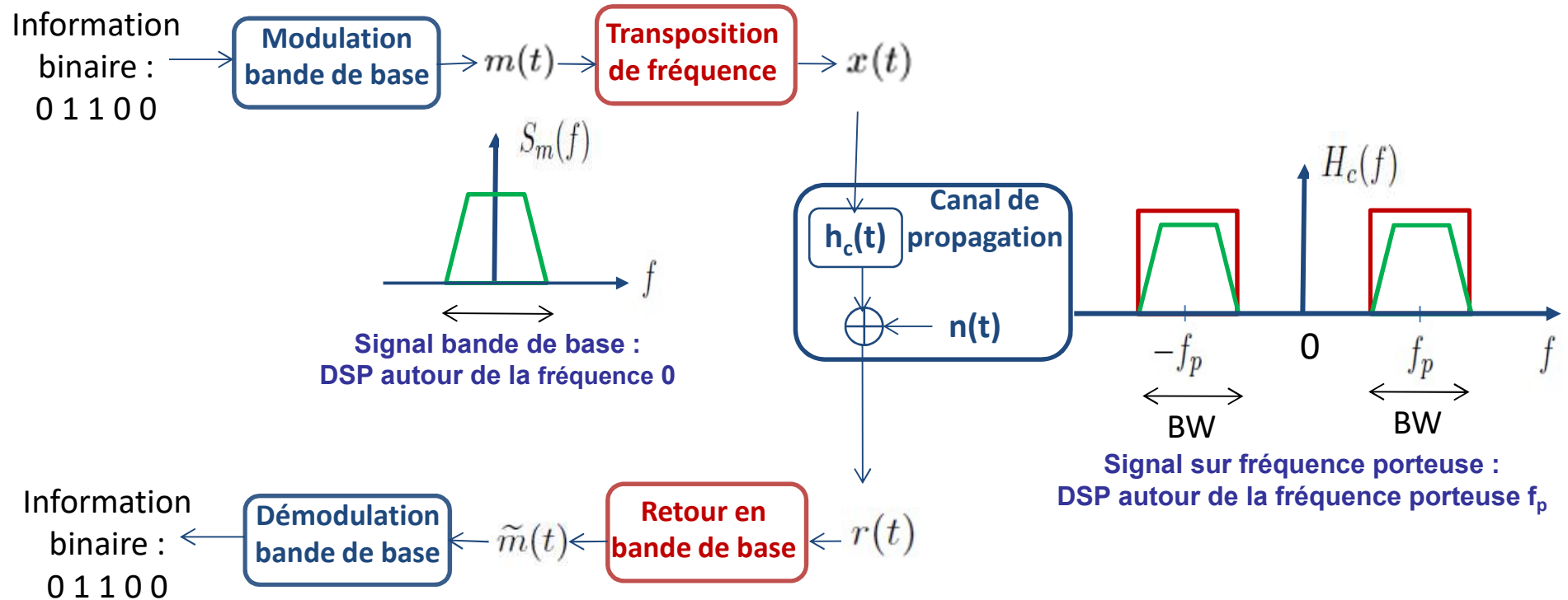
Modulations numériques sur fréquence porteuse

Transmissions sur fréquence porteuse



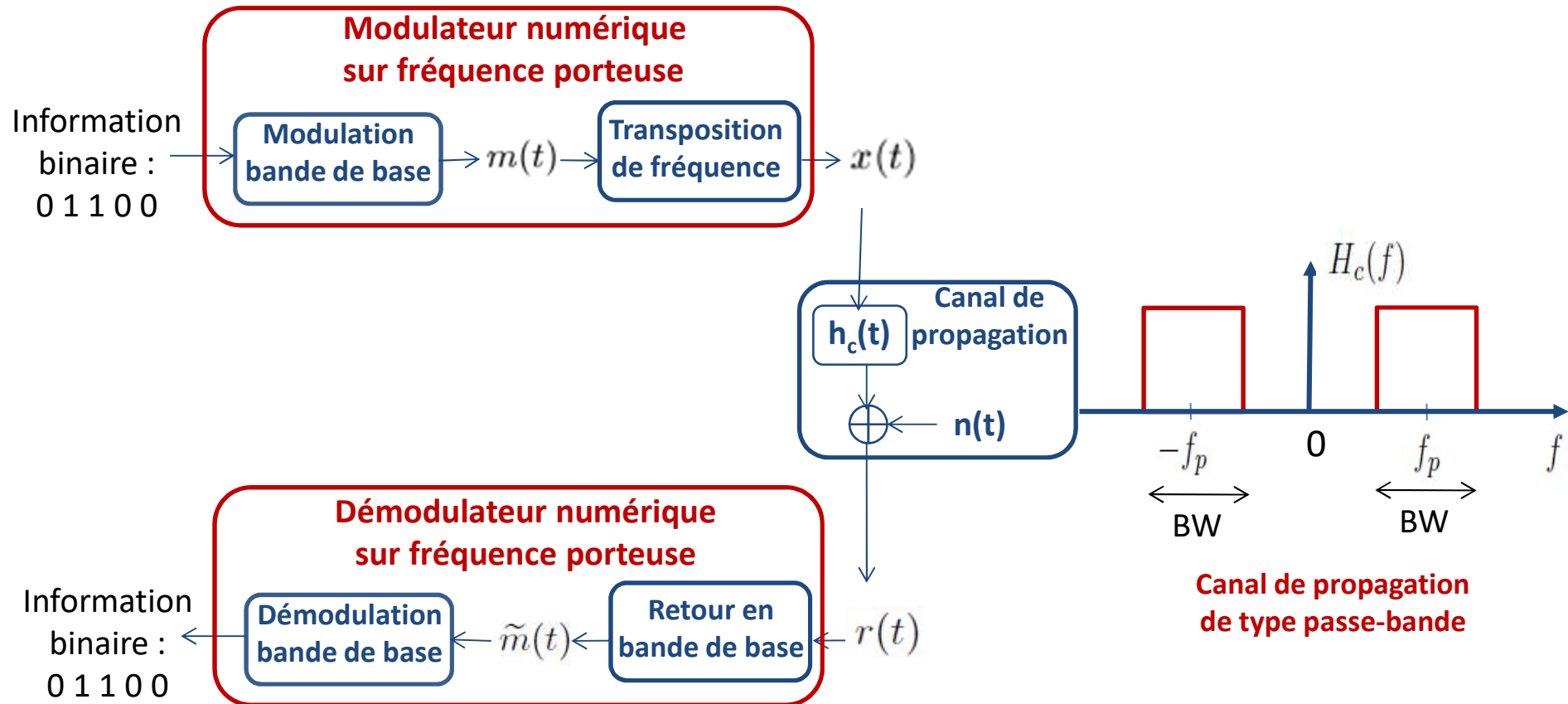
Modulations numériques sur fréquence porteuse

Transmissions sur fréquence porteuse



Modulations numériques sur fréquence porteuse

Transmissions sur fréquence porteuse



Modulations numériques sur fréquence porteuse

Classification des modulations sur fréquence porteuse

→ Modulation d'amplitude

$$x(t) = Am(t) \cos(2\pi f_p t)$$

Modulation d'amplitude sans porteuse

$$x(t) = (A + m(t)) \cos(2\pi f_p t), \quad A \geq |m(t)|_{\max}$$

Modulation d'amplitude avec porteuse

→ Modulation de phase

$$x(t) = A \cos(2\pi f_p t + k_p m(t))$$

→ Modulation de fréquence

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_i(t)}{dt} = f_p + k_f m(t) \quad (\text{fréquence instantannée})$$

$$x(t) = A \cos \left(\underbrace{2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du}_{\Phi_i(t)} \right)$$

$m(t)$: message à transmettre = signal modulant

$\cos(2\pi f_p t)$: cosinus porteur

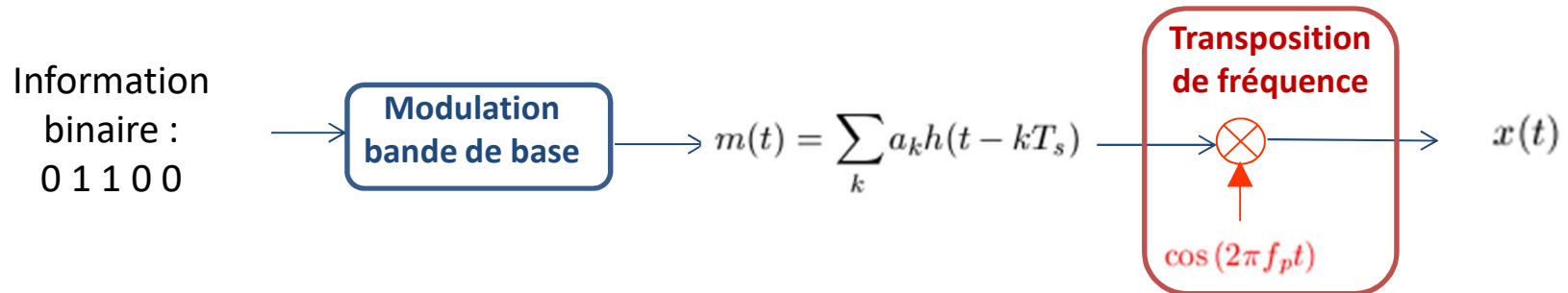
f_p : fréquence porteuse

$x(t)$: signal modulé sur porteuse

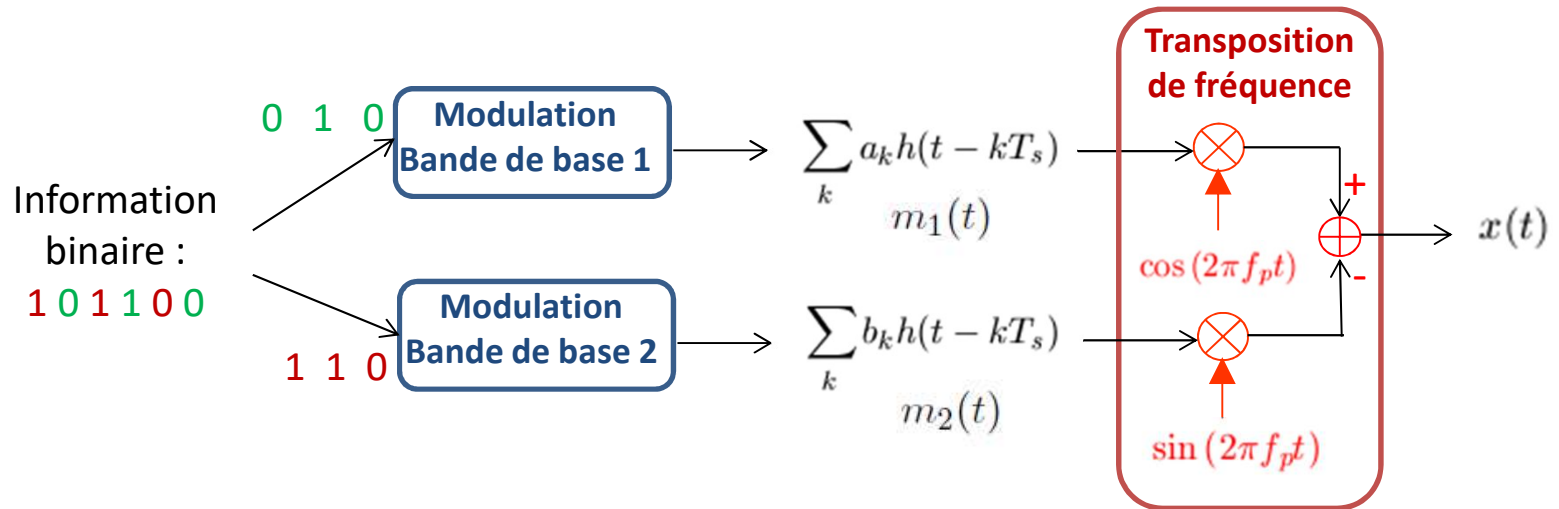
Modulations numériques sur fréquence porteuse

Classification des modulations sur fréquence porteuse

Modulation mono-dimensionnelle



ou bi-dimensionnelle

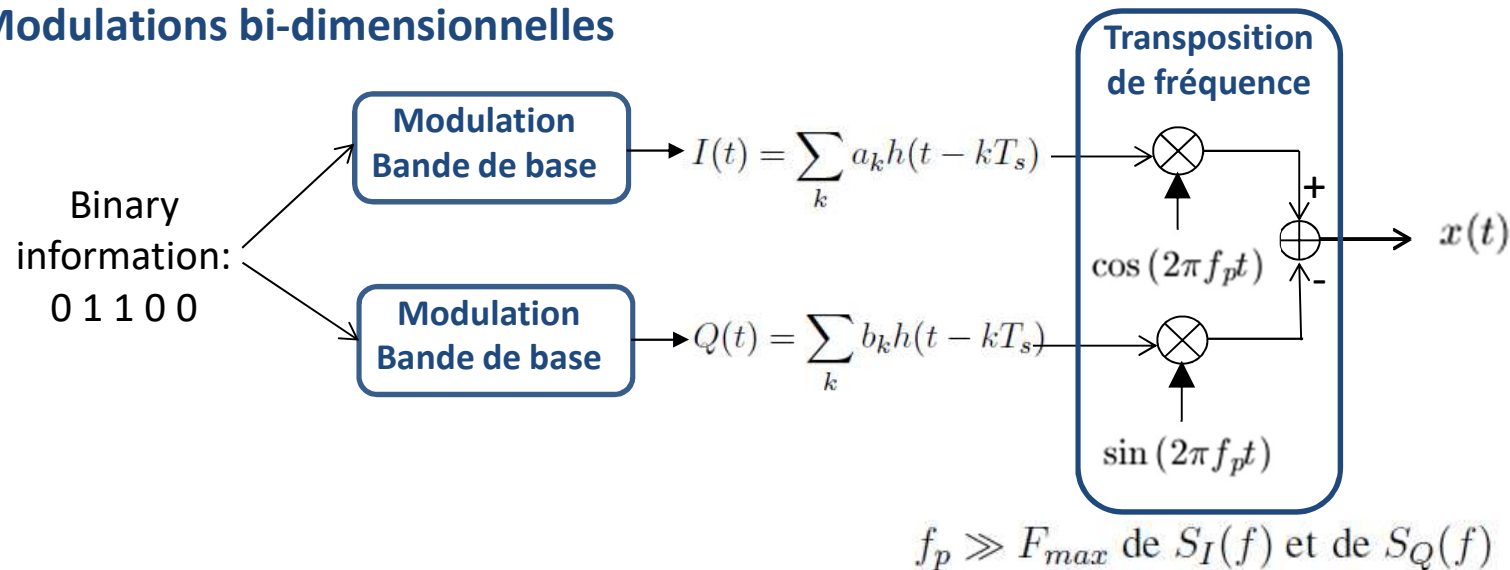


$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{m_1(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{m_2(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

Modulations numériques sur fréquence porteuse

Enveloppe complexe associée au signal modulé

Modulations bi-dimensionnelles



$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{I(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{Q(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

Composante en phase

Composante en Quadrature

$$x(t) = \Re \left[\underbrace{(I(t) + jQ(t))}_{x_e(t)} e^{j2\pi f_p t} \right]$$

$$x_e(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s) \quad (d_k = a_k + jb_k)$$

Enveloppe complexe associée à $x(t)$

Modulations numériques sur fréquence porteuse

Classification des transmissions sur fréquence porteuse

Modulation linéaires

$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{m_1(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{m_2(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

$$x(t) = \Re \left[\boxed{(m_1(t) + jm_2(t))} e^{j2\pi f_p t} \right]$$

L'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse dépend linéairement de l'information à transmettre

ou non linéaires (modulations de fréquence)

$$x(t) = A \cos \left(2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \right)$$

$$x(t) = \Re \left[\boxed{A e^{j2\pi k_f \int_0^t m(u) du}} e^{j2\pi f_p t} \right]$$

Ce n'est pas le cas ici

Accès Wooclap pour les questions



 [Copier le lien de participation](#)



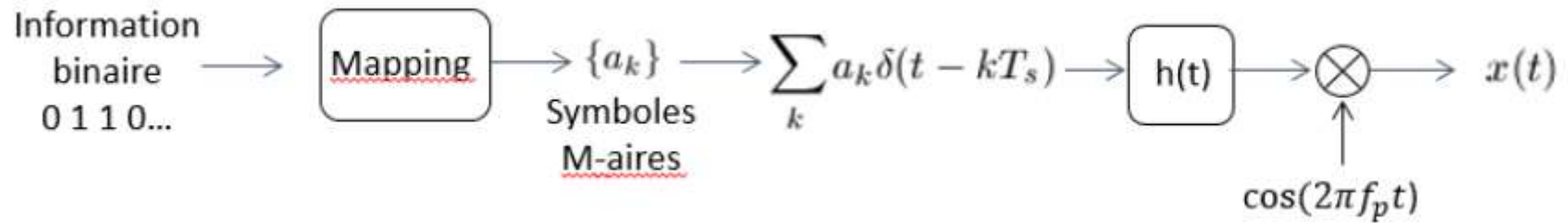
- 1 Allez sur wooclap.com
- 2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement
PORTEUSE



- 1 Envoyez **@PORTEUSE** au **06 44 60 96 62**
- 2 Envoyez votre message au même numéro

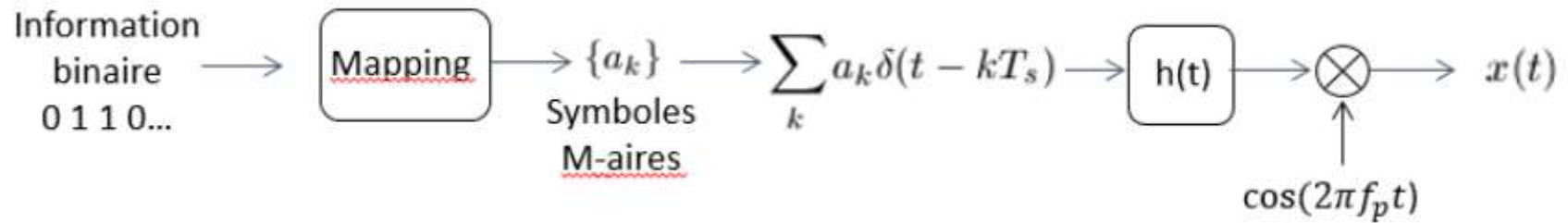
QUESTION 1



Cette chaine représente t-elle une transmission :

- ① En bande de base
- ② Sur fréquence porteuse

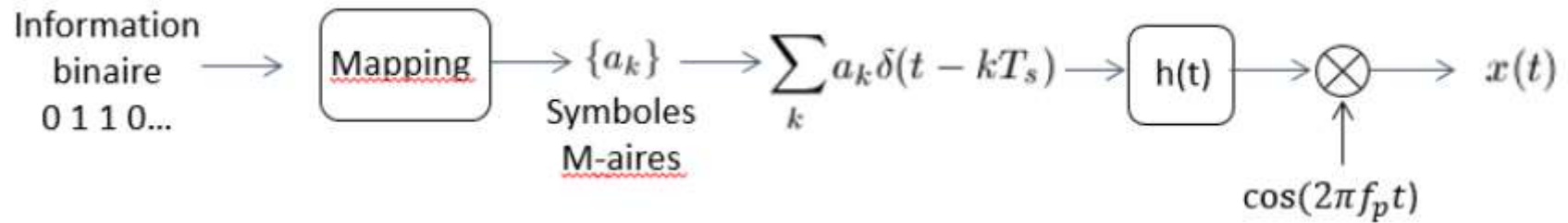
QUESTION 2



Le signal transmis avec cette chaine est un signal :

- ① Modulé en amplitude
- ② Modulé en phase
- ③ Modulé en fréquence

QUESTION 3



La modulation utilisée ici est une modulation :

- ① Linéaire
- ② Non linéaire

Télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

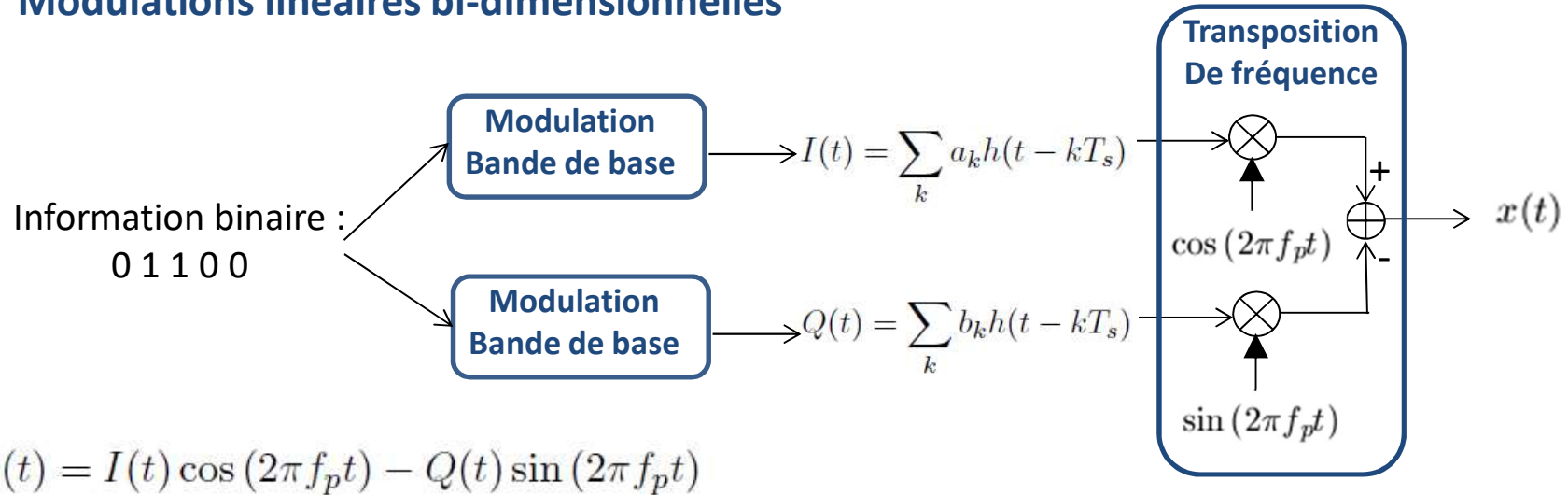
Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- **Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes**
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

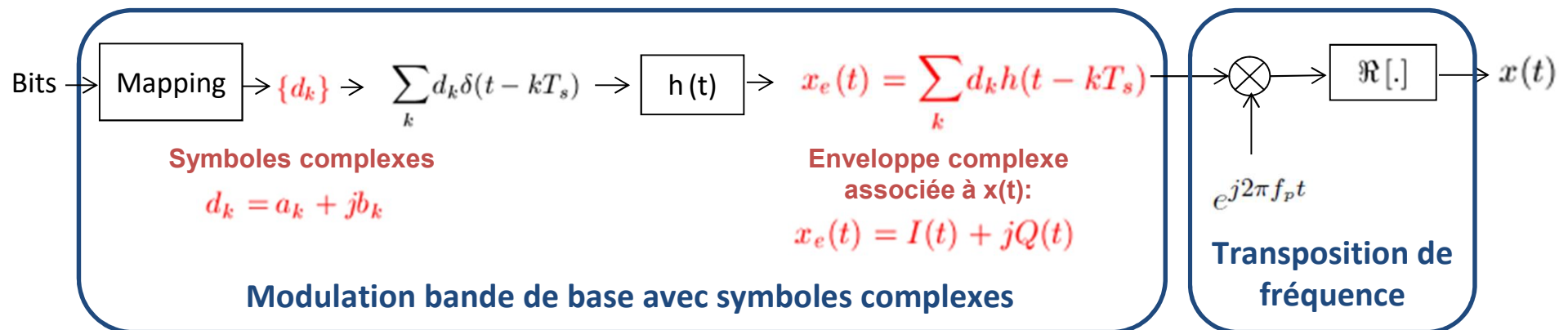
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Représentation équivalente du modulateur

Modulations linéaires bi-dimensionnelles

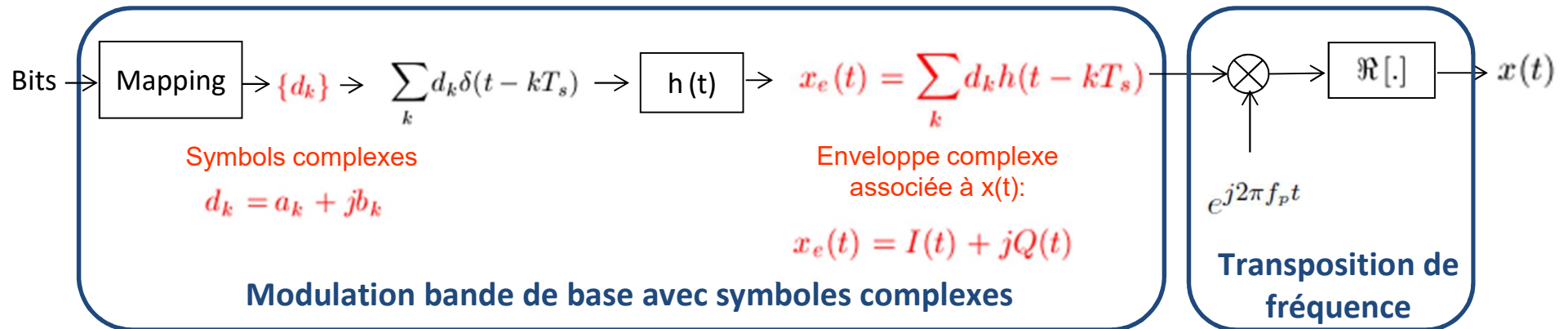


$$x(t) = \Re \left[(I(t) + jQ(t)) e^{j2\pi f_p t} \right] = \Re \left[x_e(t) e^{j2\pi f_p t} \right] \quad \text{avec} \quad x_e(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s) \quad (d_k = a_k + jb_k)$$



Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Modulations ASK, PSK, QAM



$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{I(t) : \text{voie en phase}} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{Q(t) : \text{voie en quadrature}} \sin(2\pi f_p t)$$

Modulations mono-dimensionnelle

$$d_k = a_k \in \{\pm 1, \dots, \pm(M-1)\} \quad \text{M-ASK (Amplitude Shift Keying)}$$

Modulations bi-dimensionnelles

M-QAM (Quadrature Amplitude Modulation) carrée

$$a_k, b_k \text{ symboles } \sqrt{M}\text{-aires indépendants} \in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$$

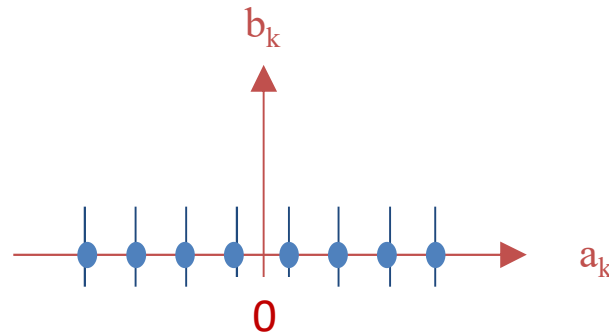
M-PSK (Phase Shift Keying)

$$d_k \in \{e^{j(\frac{2\pi}{M}l + \frac{\pi}{M})}\}, l = 0, \dots, M-1$$

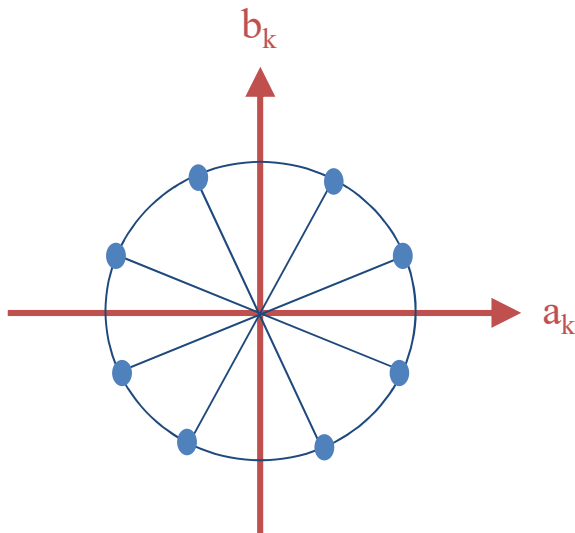
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Notion de Constellation

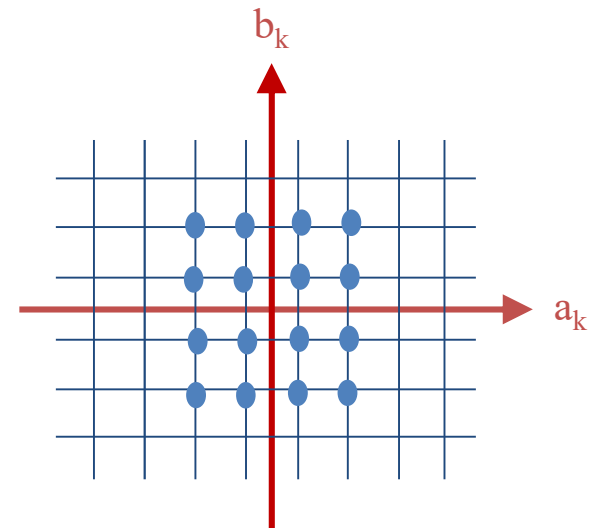
Représentation des symboles d_k possibles dans le plan (a_k, b_k)



Constellations ASK



Constellations PSK

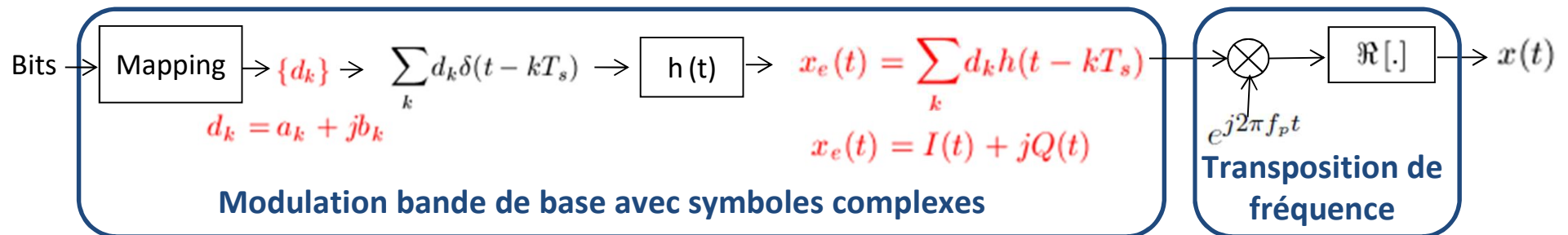


Constellations QAM

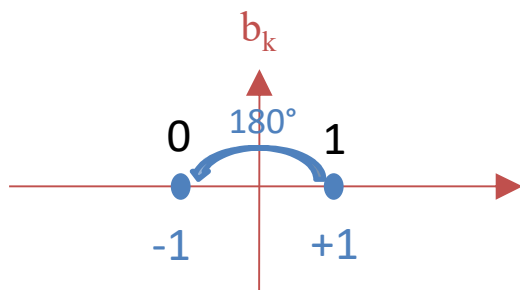
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Exemples

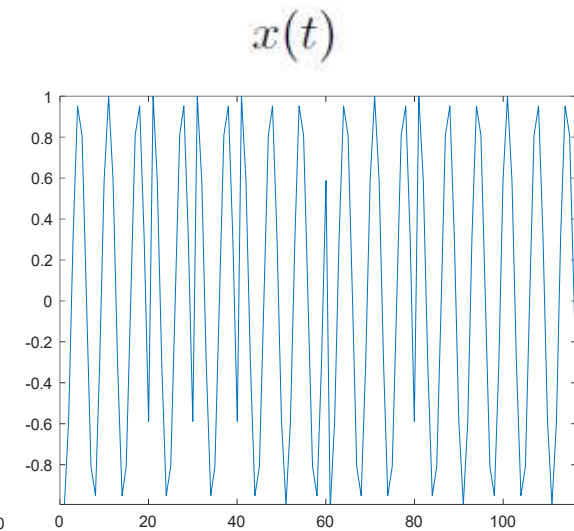
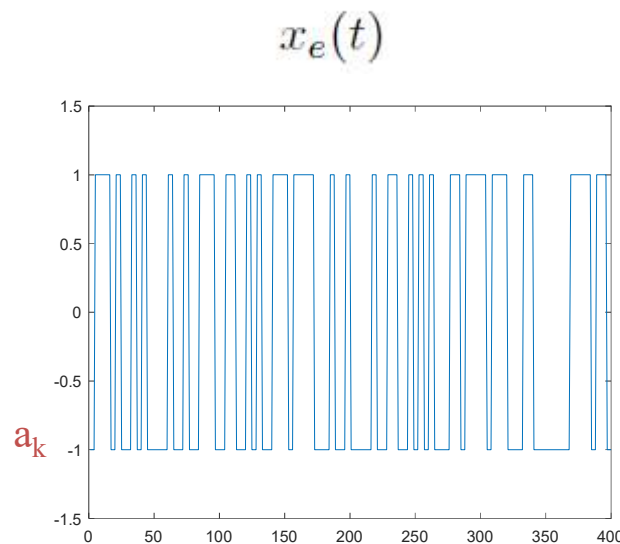
→ **Modulations linéaires mono-dimensionnelle : 2-ASK ou BPSK**



Bits	a_k	d_k
0	-1	$-1 = e^{j\pi}$
1	+1	$+1 = e^0$



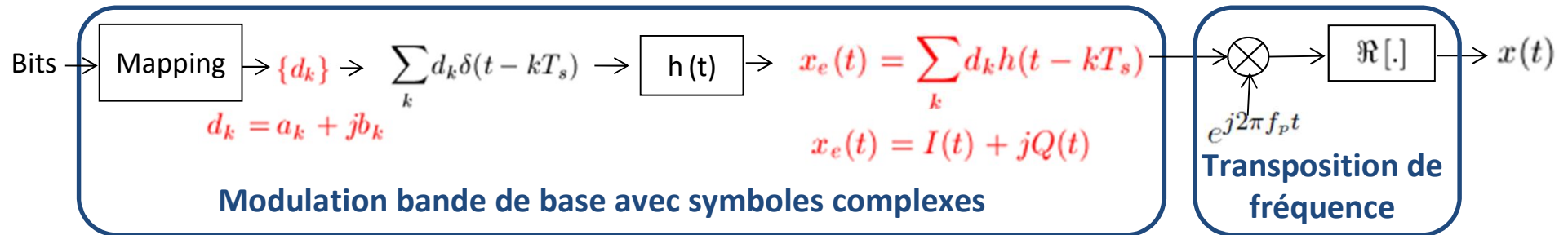
Constellation BPSK



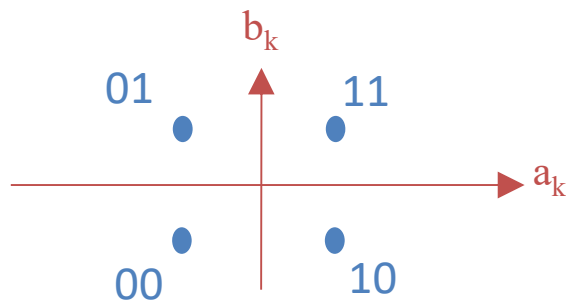
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Exemples

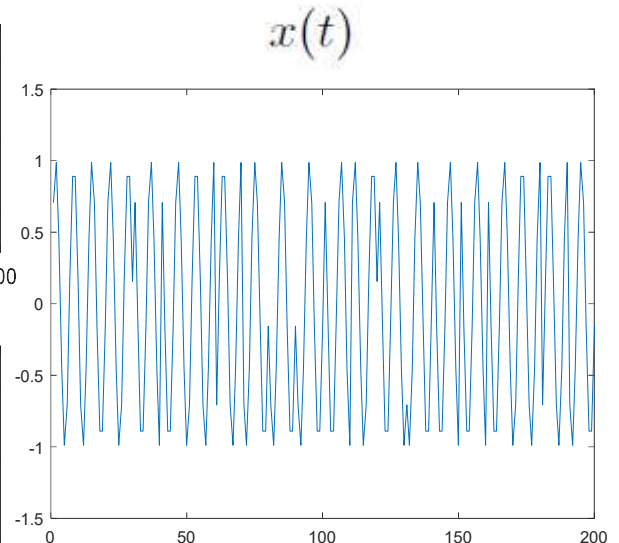
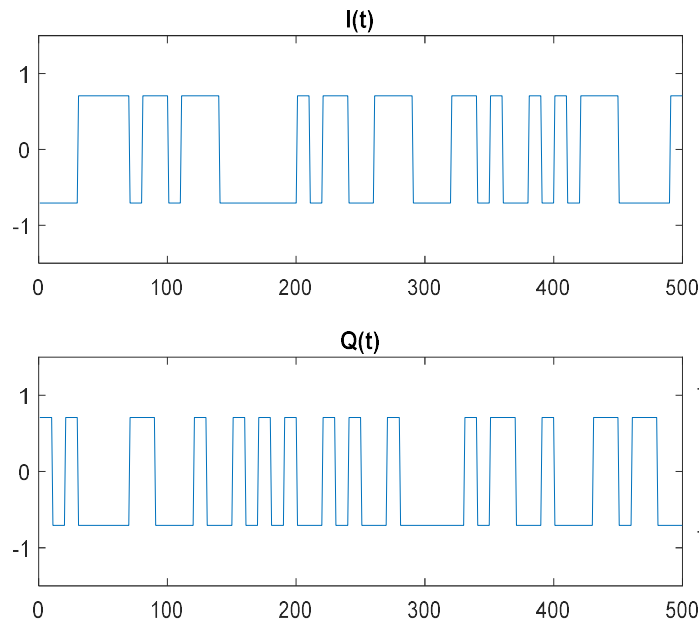
→ **Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 4-PSK ou 4-QAM ou QPSK (DVB-S)**



Bits	a_k	b_k	d_k
00	-1	-1	$-1-j=e^{j5\pi/4}$
01	-1	+1	$-1-j=e^{j3\pi/4}$
11	+1	+1	$-1-j=e^{j\pi/4}$
10	+1	-1	$-1-j=e^{j7\pi/4}$



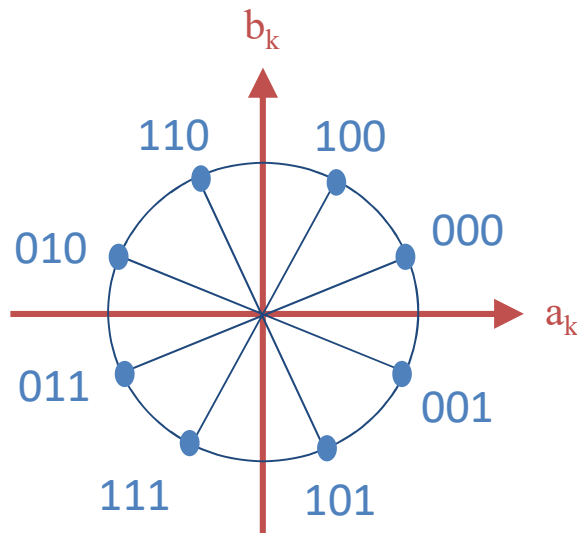
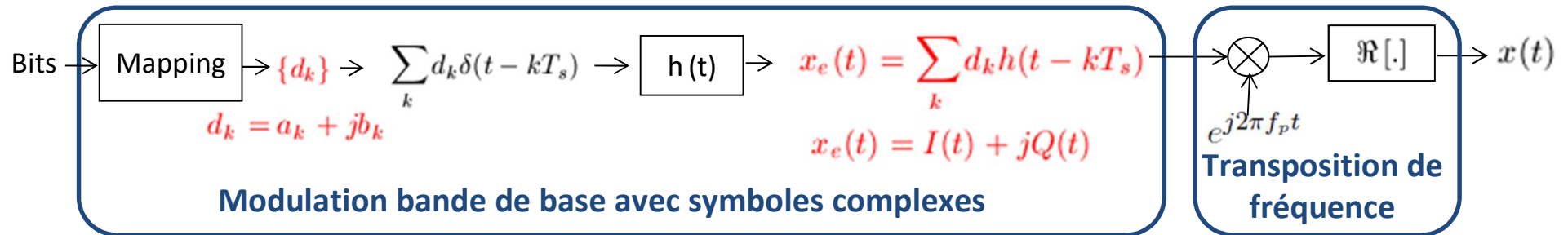
Constellation QPSK



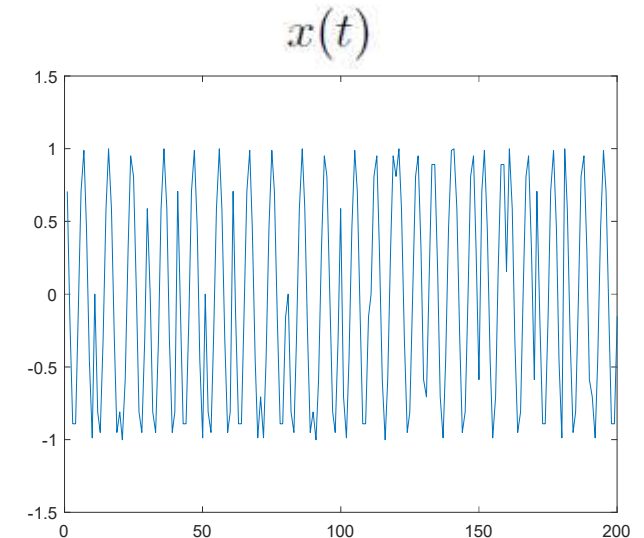
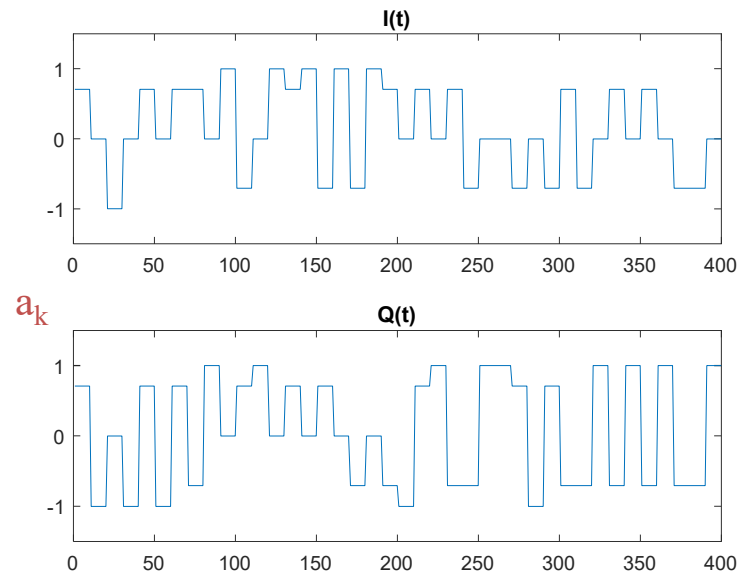
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Exemples

→ **Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 8-PSK (DVB-S2)**



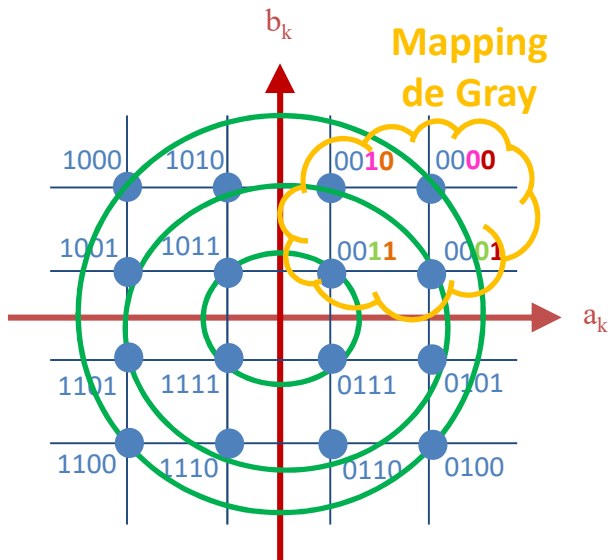
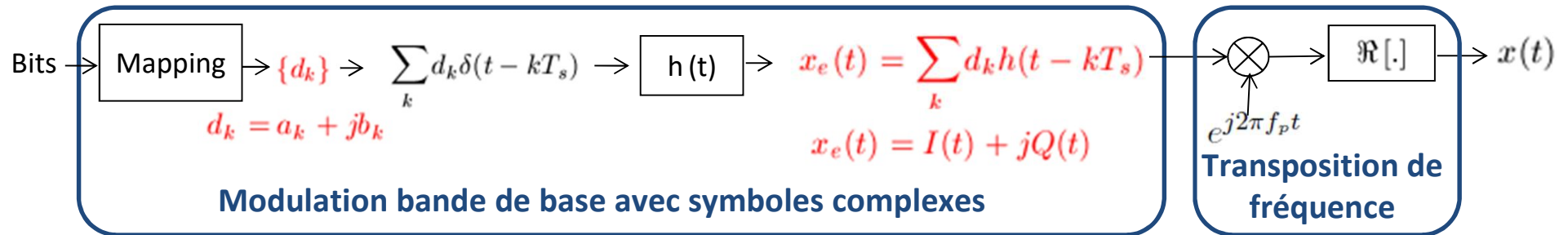
Constellation 8-PSK



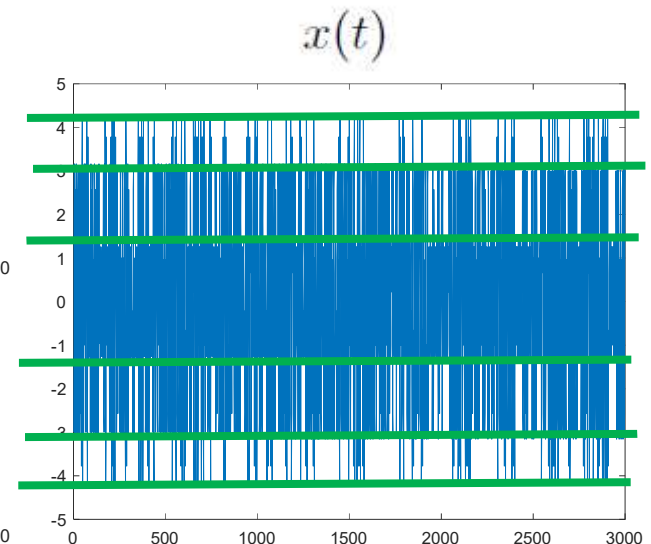
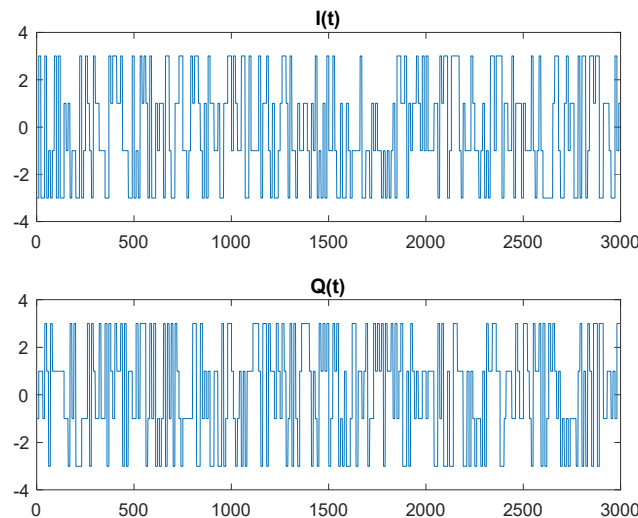
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Exemples

→ **Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 16-QAM (DVB-C)**



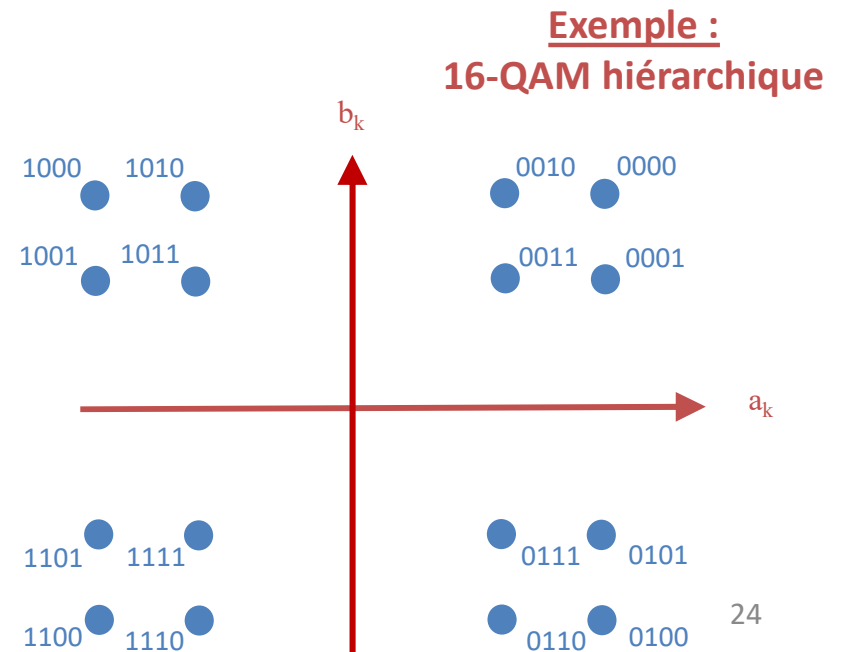
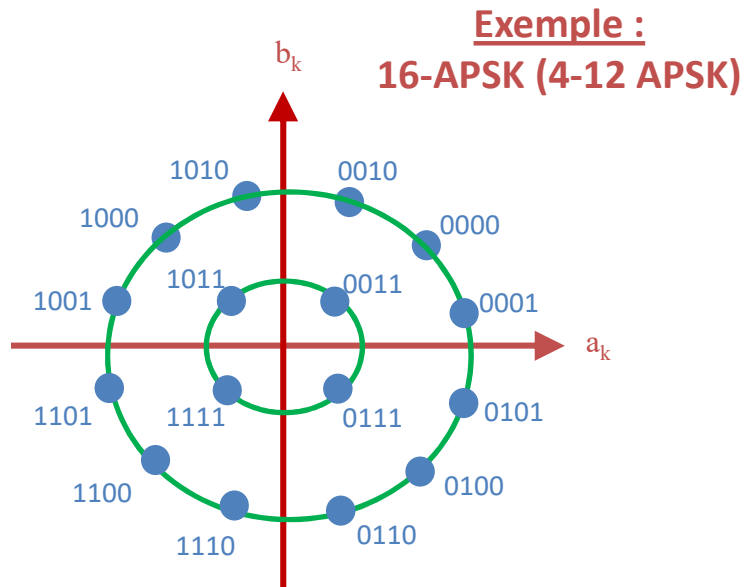
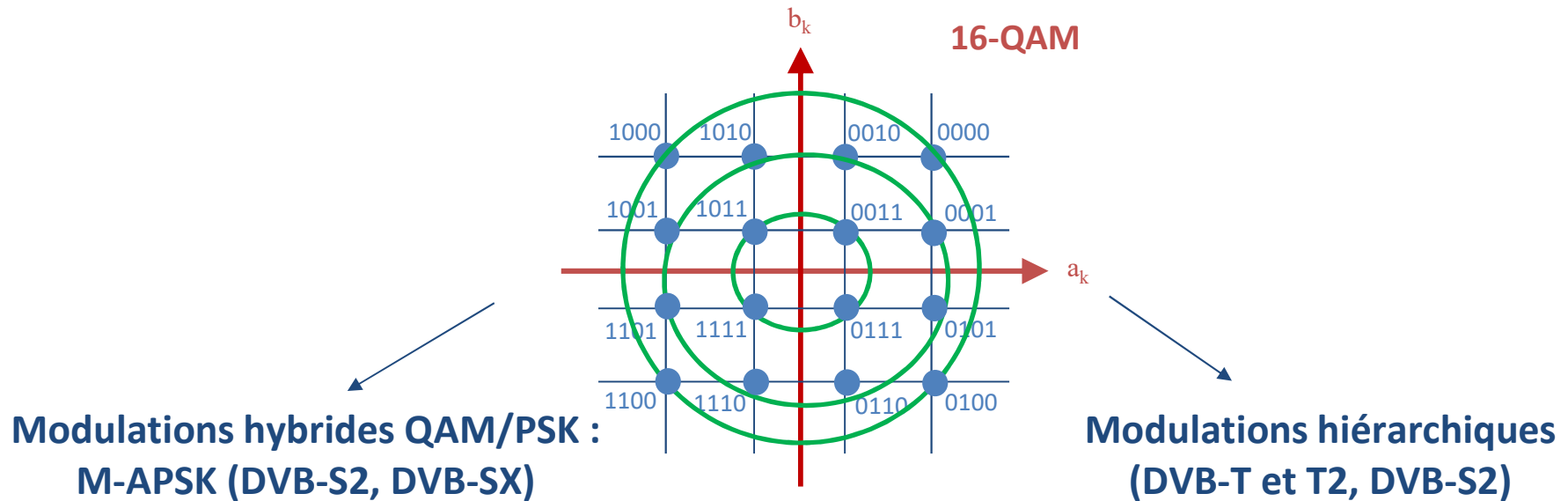
Constellation 16-QAM



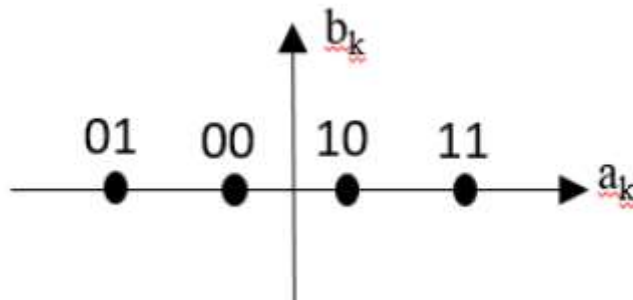
(Enveloppe non constante)

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Exemples



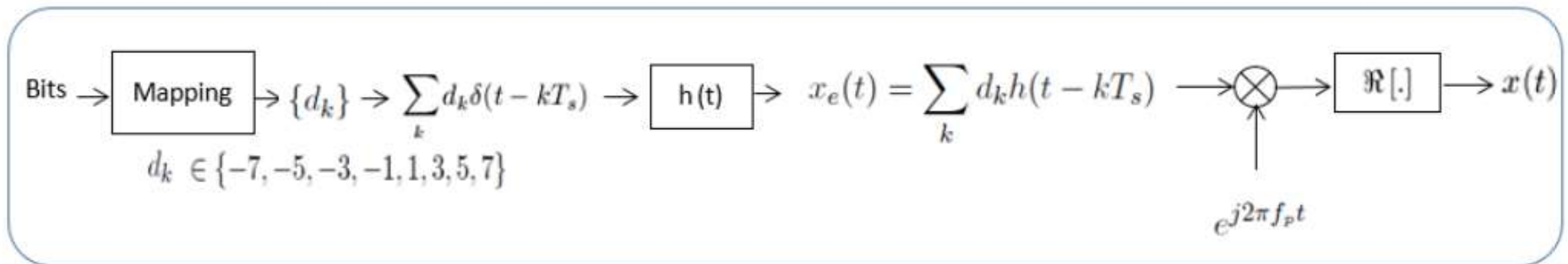
QUESTION 4



Cette constellation est associée à une modulation :

- ① 4-ASK
- ② 4-PSK
- ③ 4-QAM

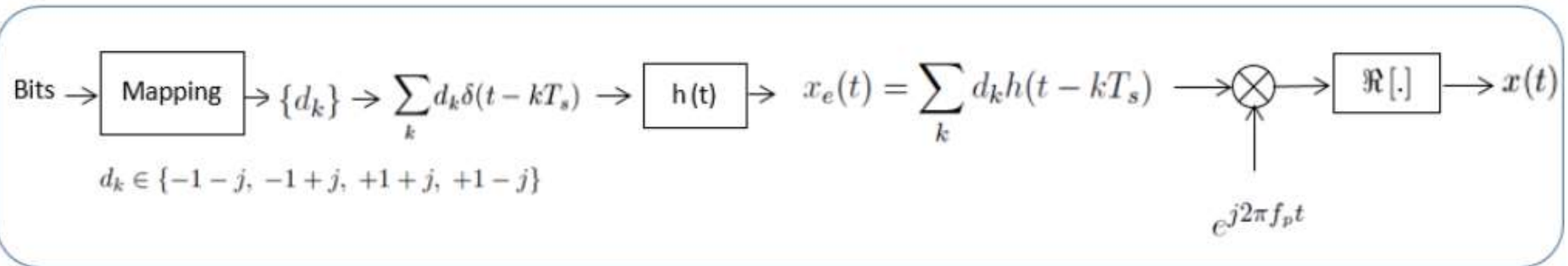
QUESTION 5



Ce modulateur va générer un signal modulé en :

- ① 8-PAM
- ② 8-ASK
- ③ 8-PSK

QUESTION 6



Ce modulateur va générer un signal modulé en :

① 4-PAM

④ 4-PSK

② 4-ASK

⑤ 8-ASK

③ 4-QAM

⑥ 8-PAM

Télécommunications

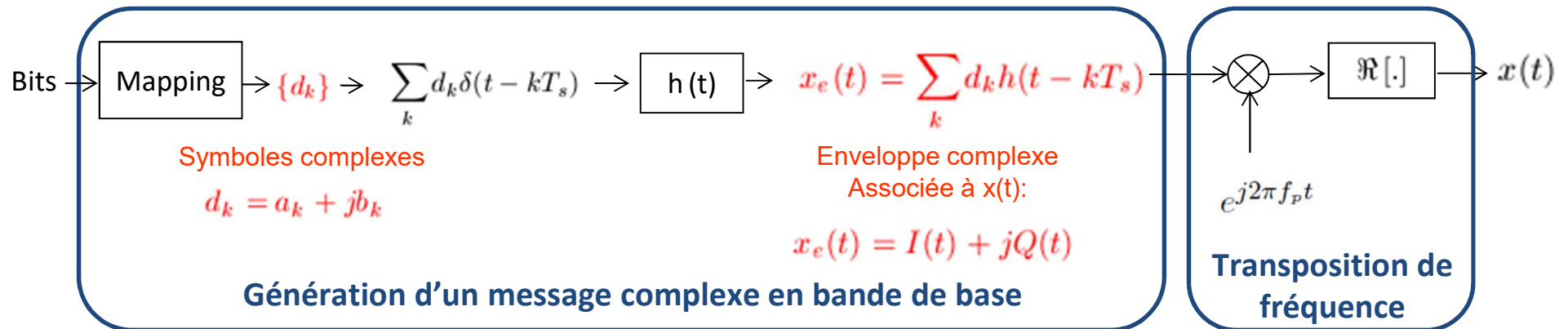
**Département sciences du numérique
Première année**

Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale**
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

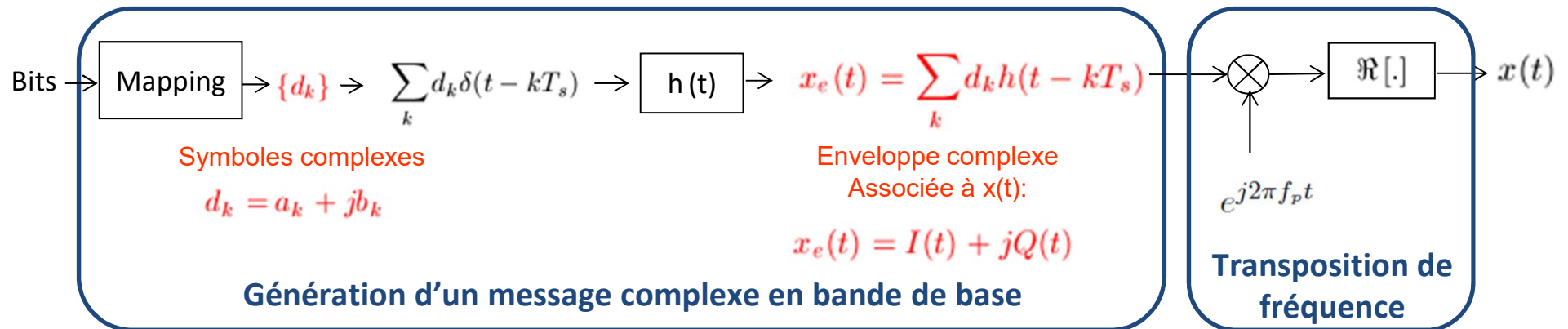
Comparaison en termes d'efficacité spectrale



$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale



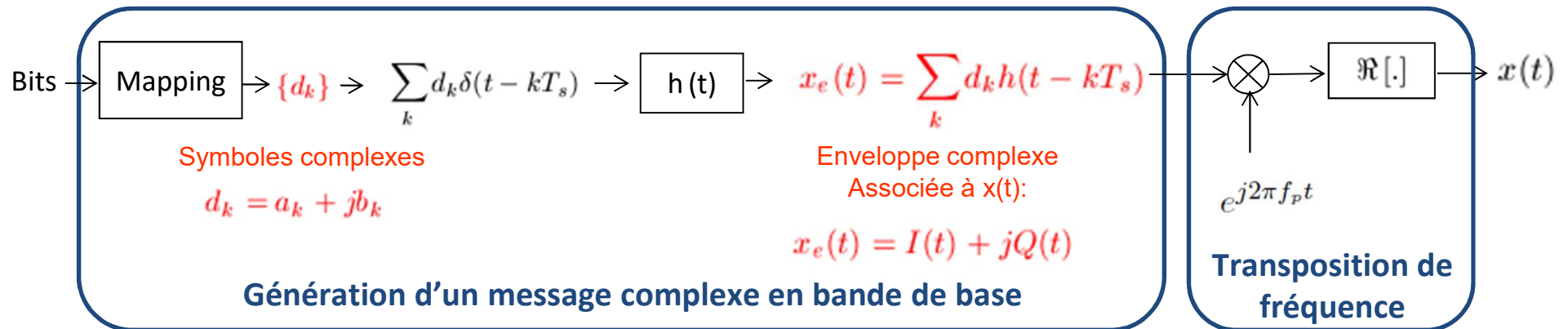
$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$



$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale



$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$

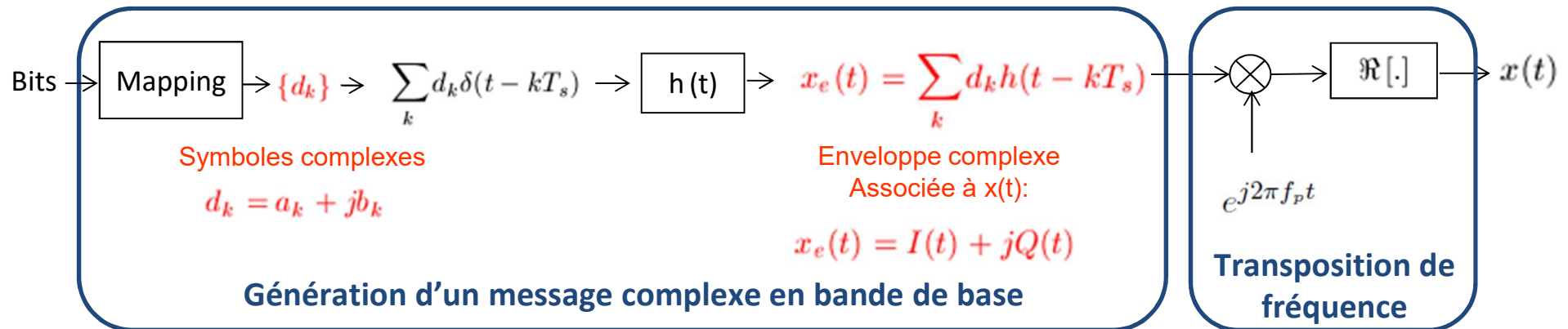


$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$x(t) = \Re \left[x_e(t) e^{j2\pi f_p t} \right] \rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2} \Re \left[R_{x_e}(\tau) e^{j2\pi f_p \tau} \right]$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale



$$x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$



$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$x(t) = \Re \left[x_e(t) e^{j2\pi f_p t} \right] \rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2} \Re \left[R_{x_e}(\tau) e^{j2\pi f_p \tau} \right]$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p))$$

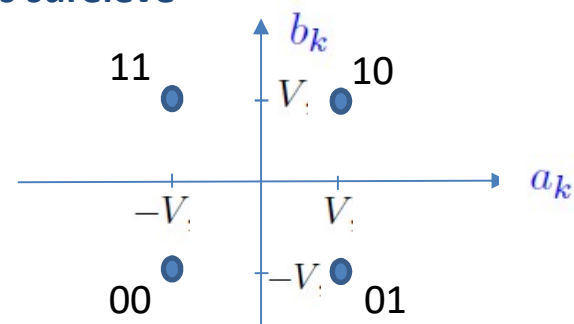
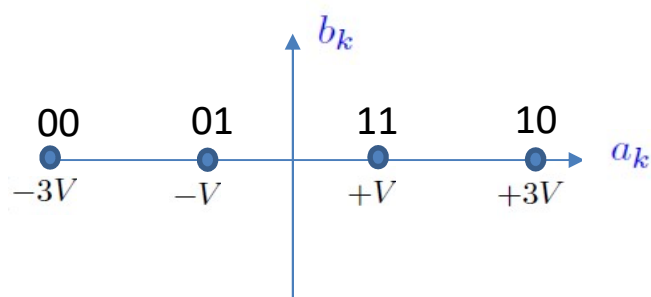


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé

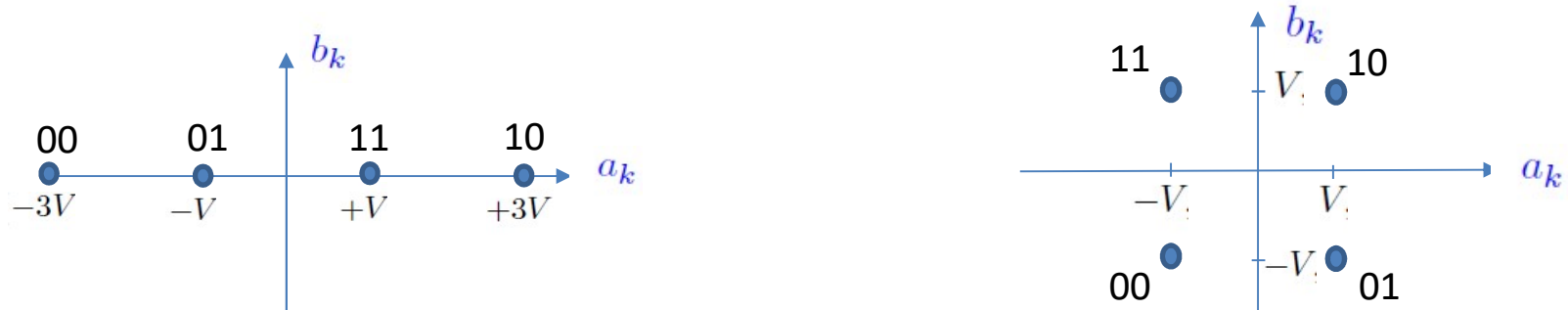


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



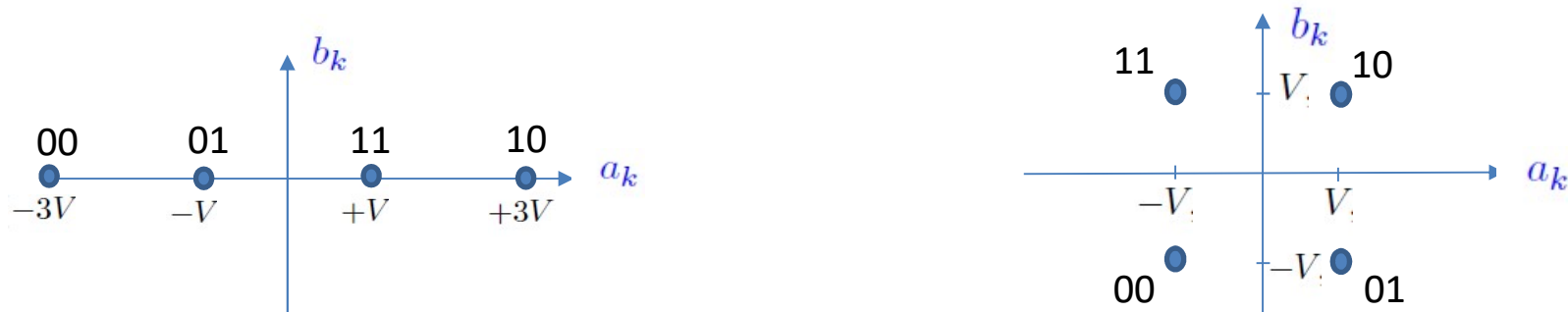
$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

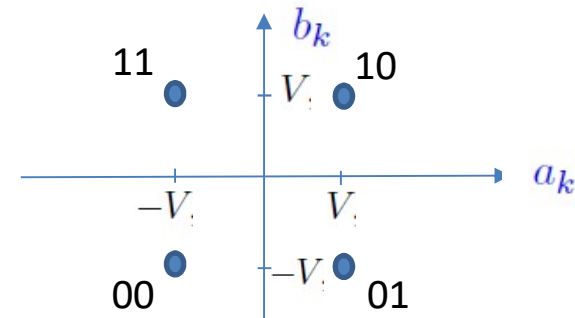
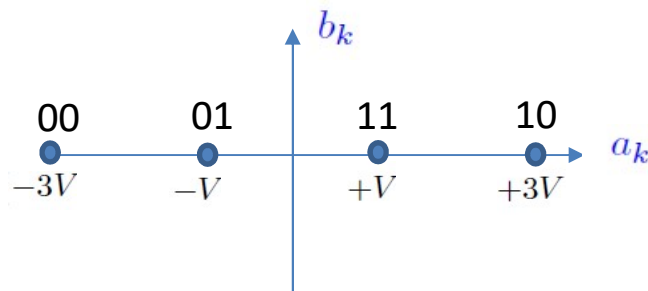
$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

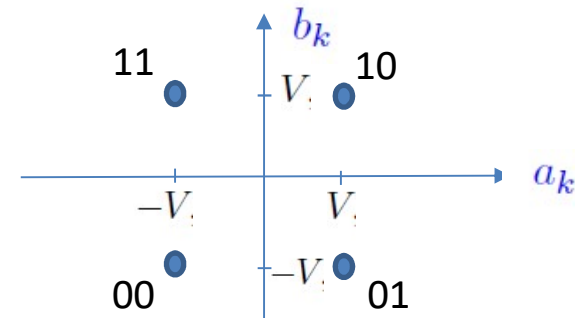
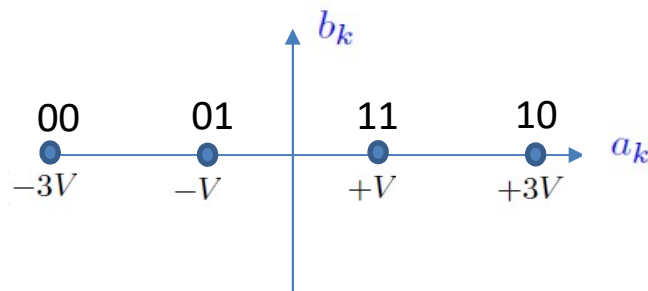
=0 car symboles indépendants =0 car symboles à moyenne nulle

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

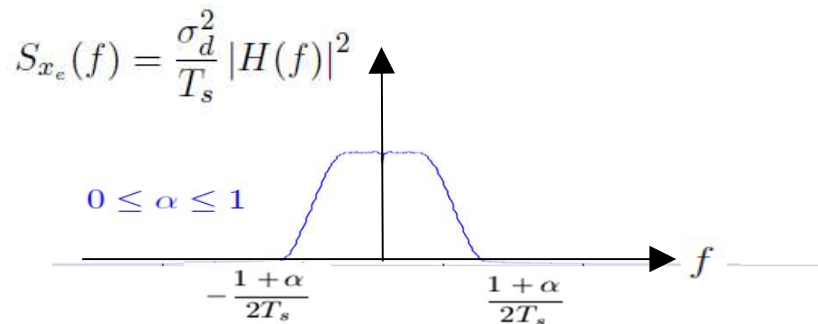
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants =0 car symboles à moyenne nulle

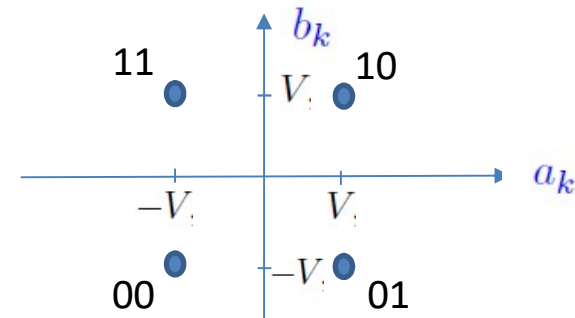
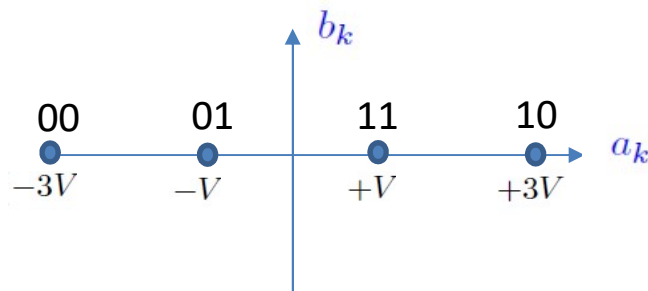


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

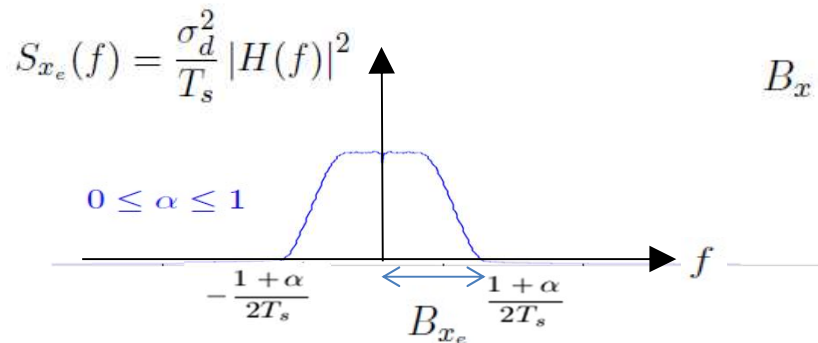
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants =0 car symboles à moyenne nulle



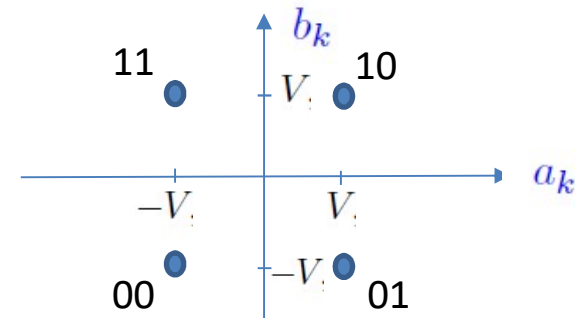
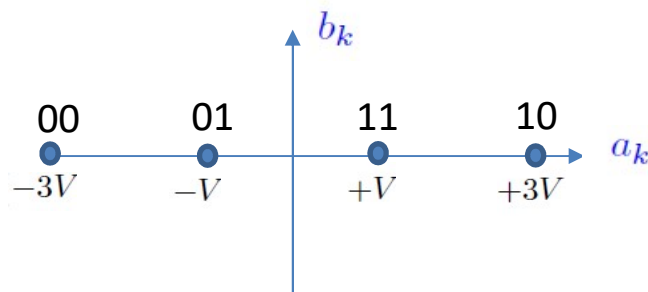
$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+\alpha}{\log_2(M)T_b} = \frac{1+\alpha}{\log_2(M)} R_b$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

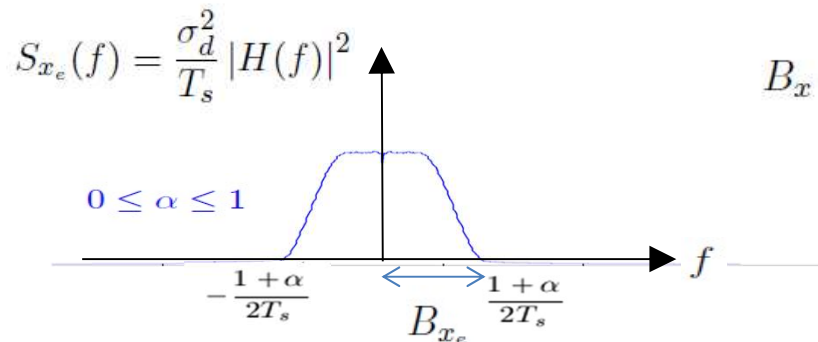
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[R_d(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants =0 car symboles à moyenne nulle



$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+\alpha}{\log_2(M)T_b} = \frac{1+\alpha}{\log_2(M)} R_b$$

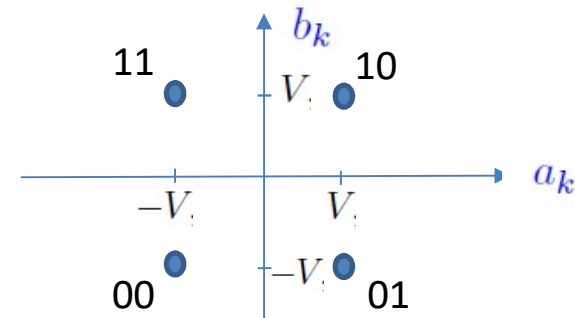
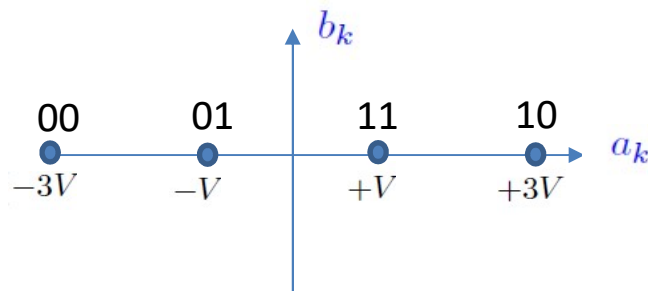
$$\eta = \frac{R_b}{B_x} = \frac{\log_2(M)}{1+\alpha}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Exemple

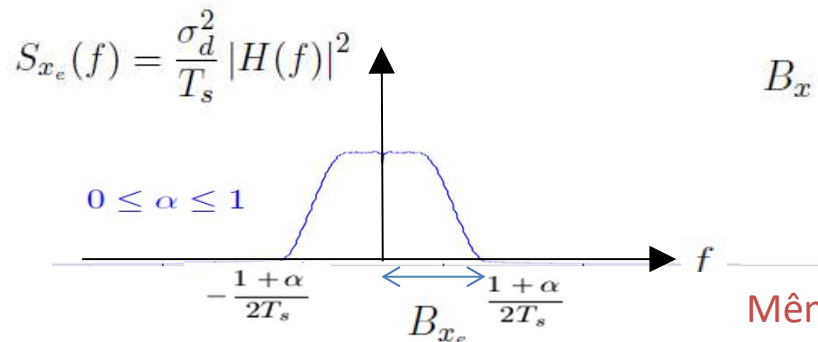
Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow B_x = 2B_{x_e}$$

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re [R_d(k) e^{j2\pi f k T_s}] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

=0 car symboles indépendants =0 car symboles à moyenne nulle



$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+\alpha}{\log_2(M)T_b} = \frac{1+\alpha}{\log_2(M)} R_b$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_x} = \frac{\log_2(M)}{1+\alpha}$$

Même filtre de mise en forme, Même nombre de symboles
=> Même efficacité spectrale

Télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

Télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Transmissions sur fréquence porteuse

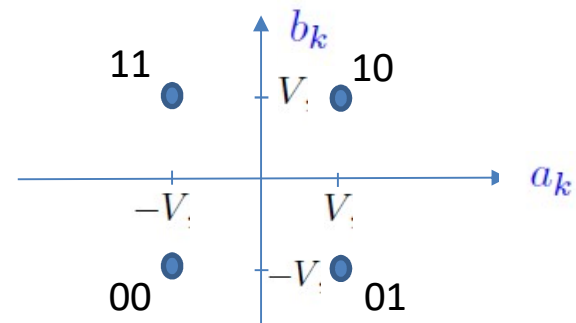
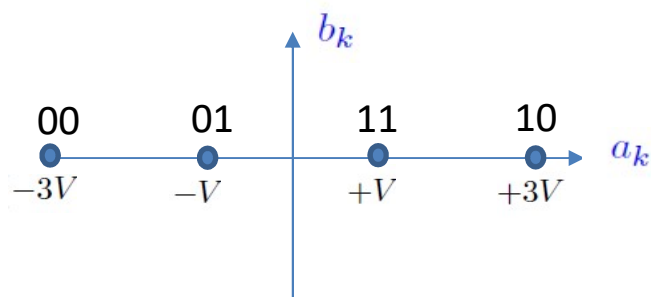
- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé

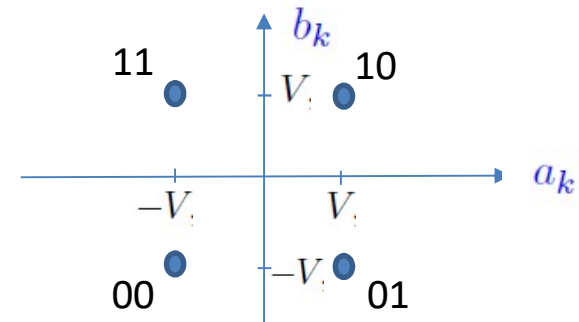
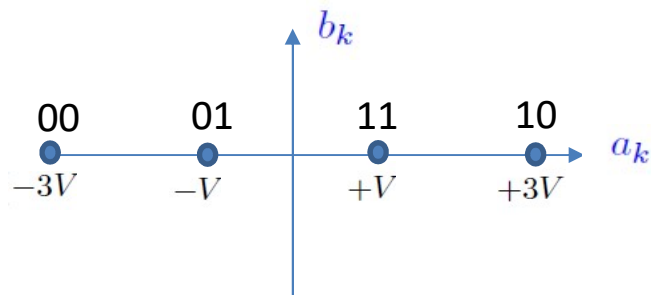


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



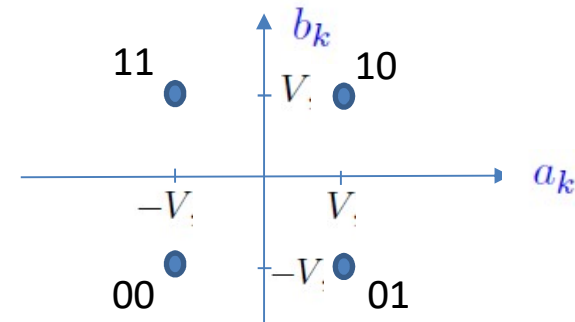
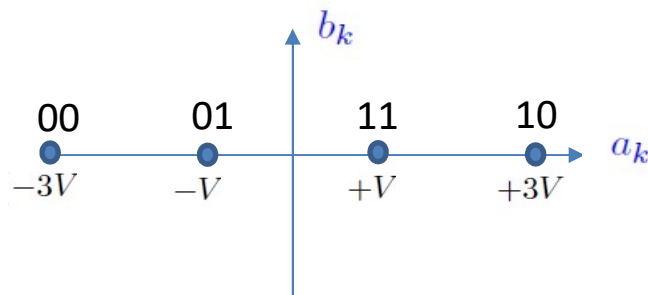
$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

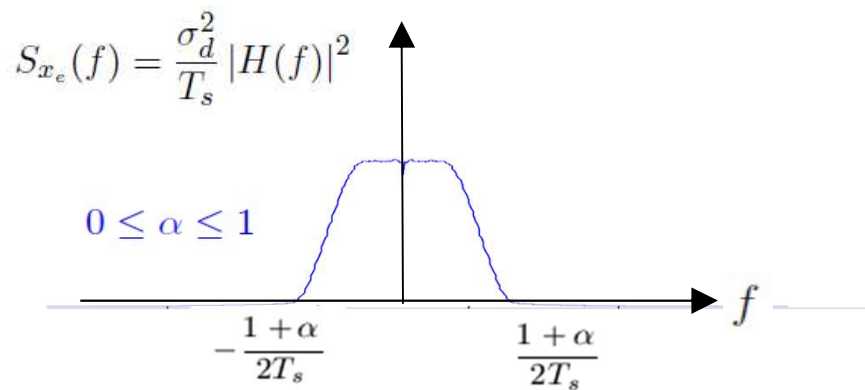
Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$

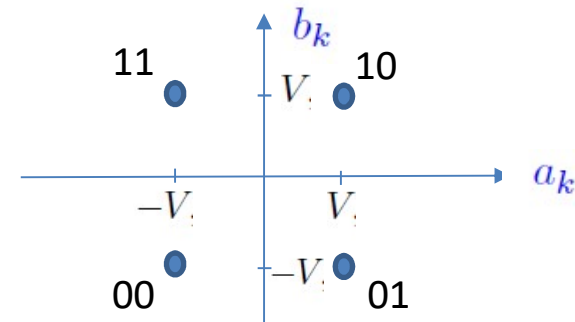
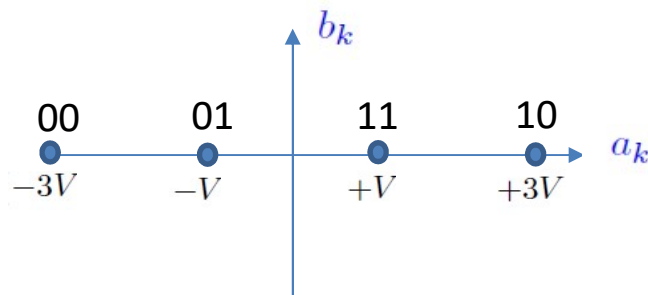


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

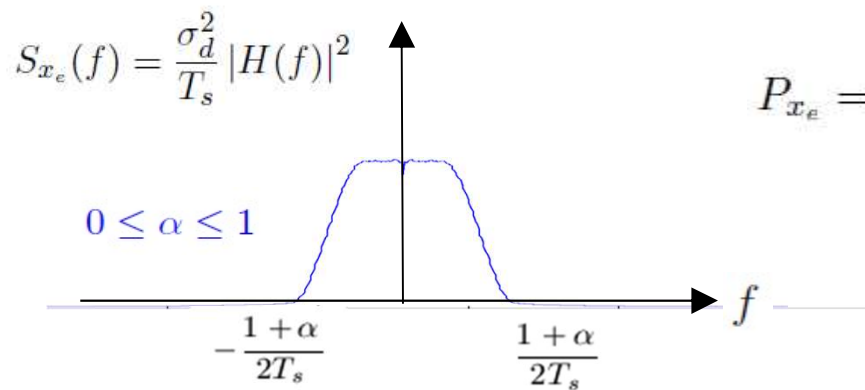
Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$



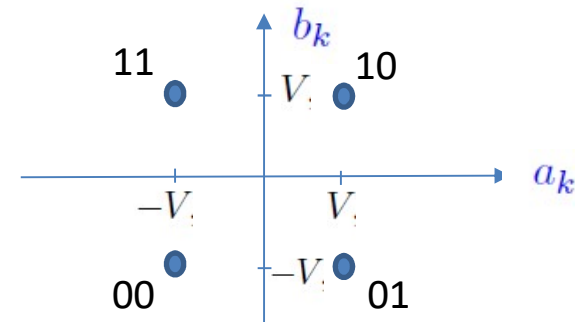
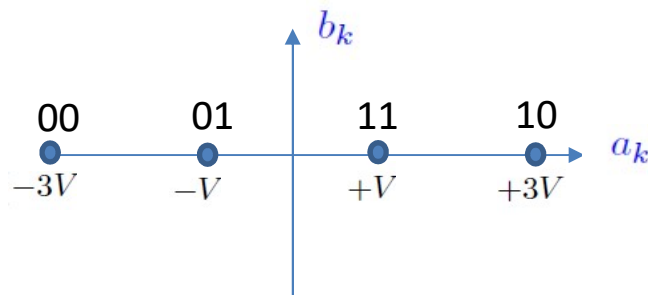
$$P_{x_e} = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \times T_s = \sigma_d^2$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

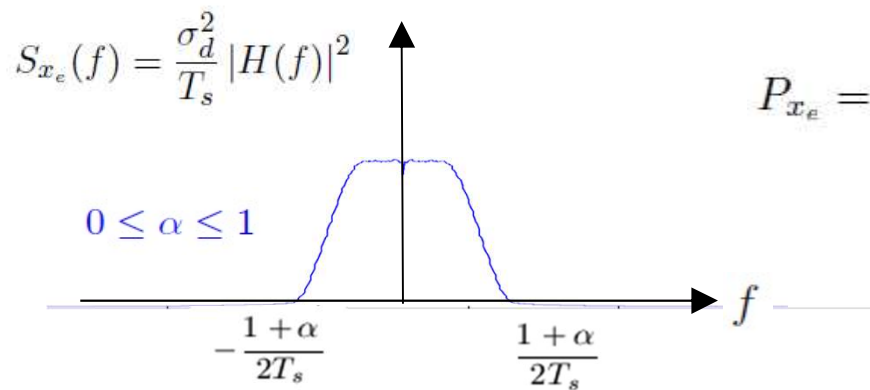
Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$



$$P_{x_e} = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \times T_s = \sigma_d^2$$

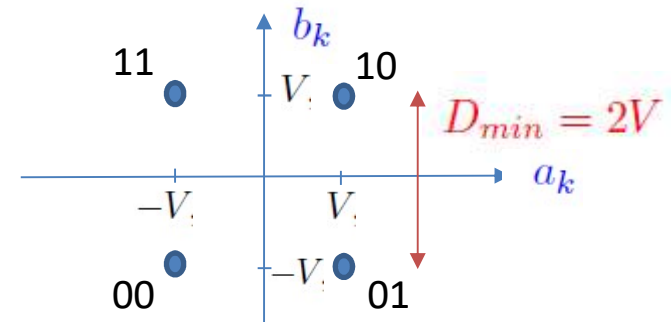
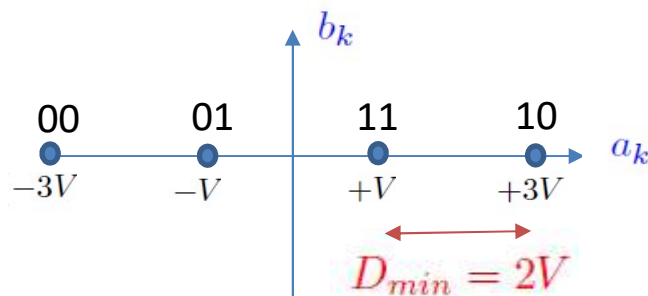
$$\Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

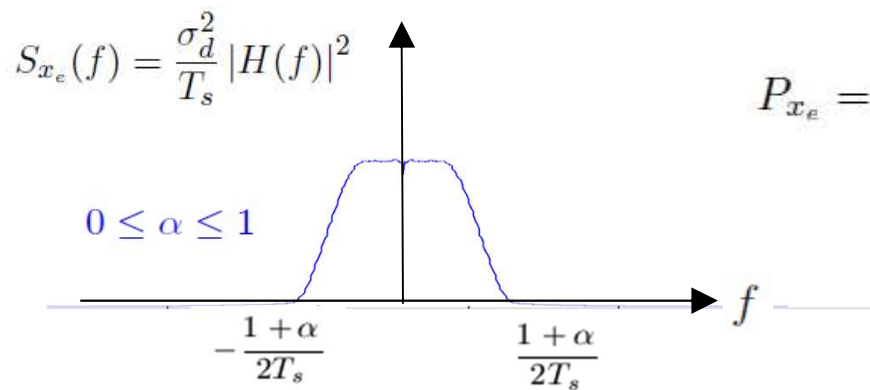
Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé



$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p)) \Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2}$$



$$P_{x_e} = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2}{T_s} \times T_s = \sigma_d^2$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2}$$

$$\sigma_d^2 = 5V^2 \text{ (4-ASK)}$$

$$\sigma_d^2 = 2V^2 \text{ (QPSK)}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

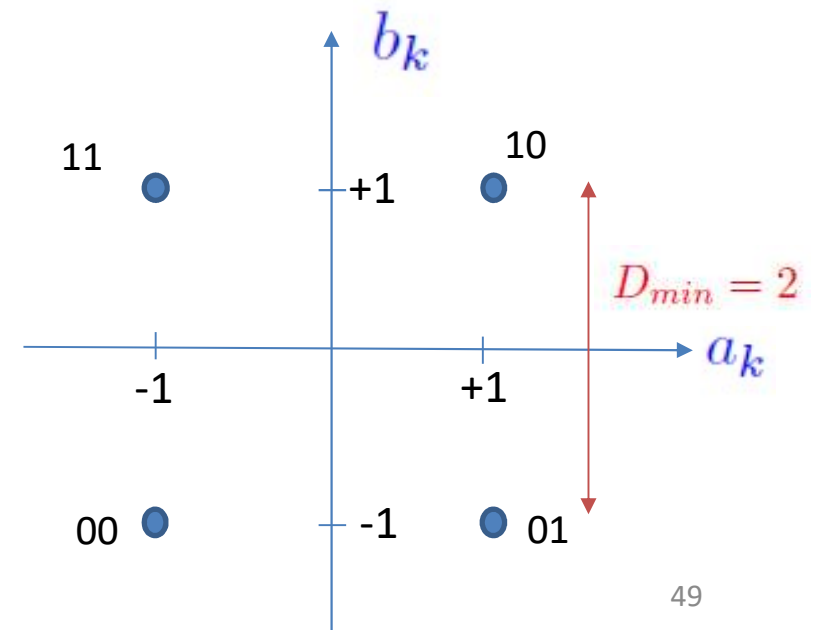
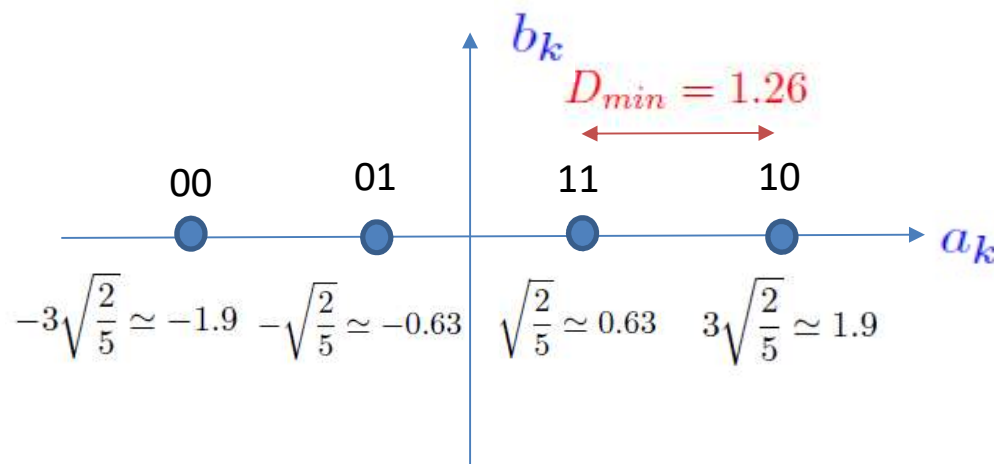
Comparaison en termes d'efficacité en puissance

Exemple

Modulation mono-dimensionnelle (4-ASK), Modulation bi-dimensionnelle (QPSK),
filtre de mise en racine de cosinus surélevé

$$P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2} \begin{cases} \sigma_d^2 = 5V^2 \text{ (4-ASK)} \\ \sigma_d^2 = 2V^2 \text{ (QPSK)} \end{cases}$$

$$P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2} = 1 \text{ pour } V = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ (4-ASK)}, V = 1 \text{ (QPSK)}$$



Télécommunications

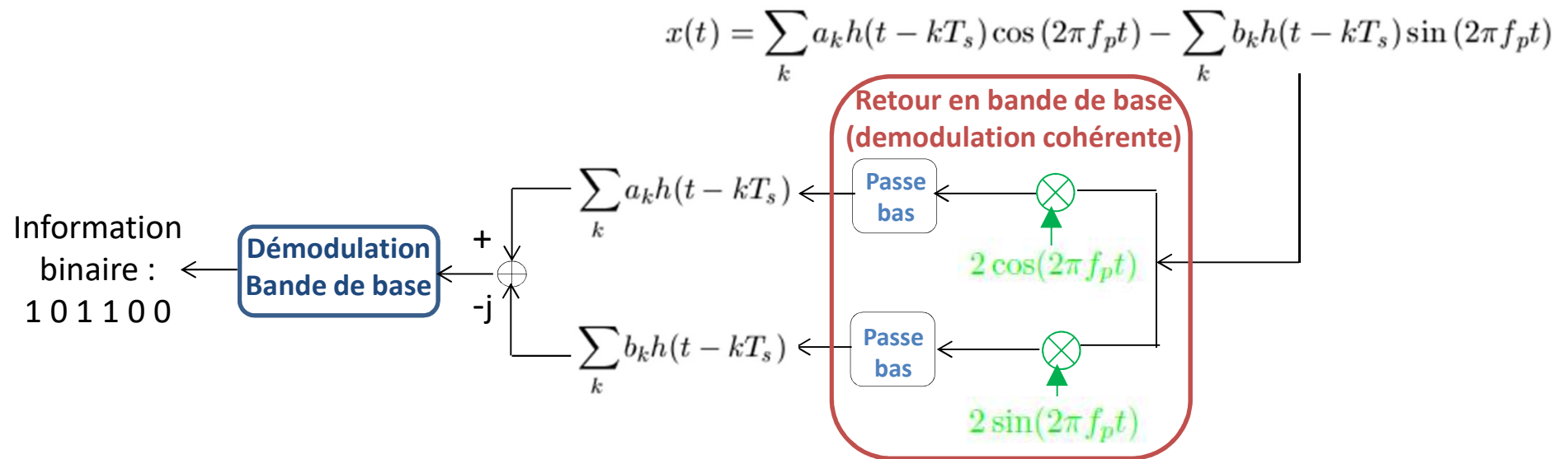
Département sciences du numérique
Première année

Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

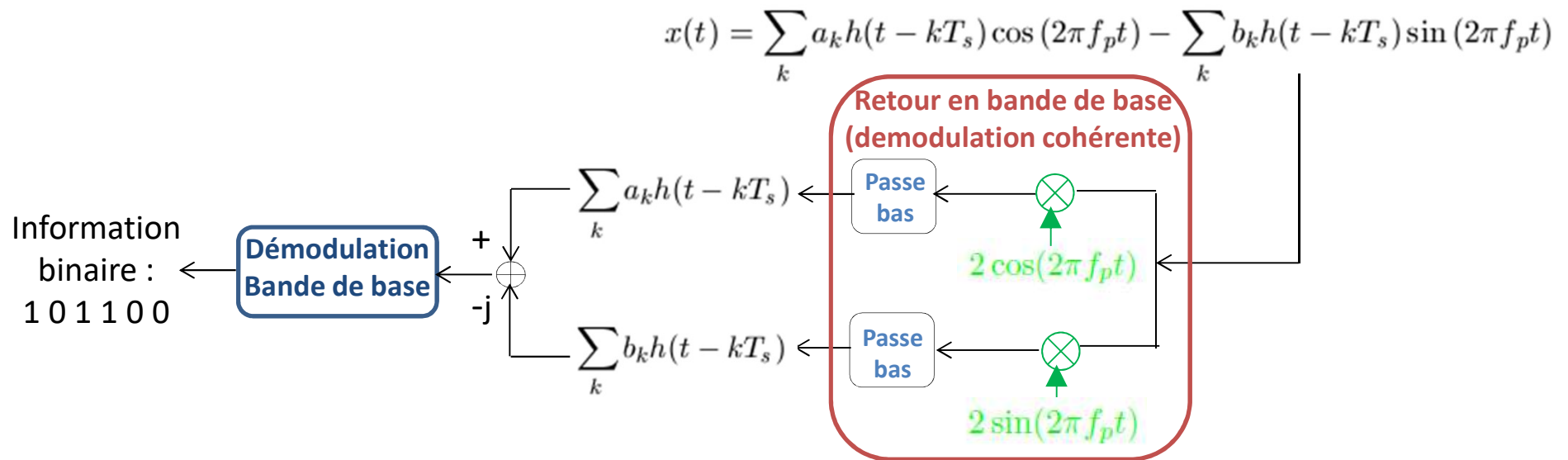
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Démodulation cohérente



Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

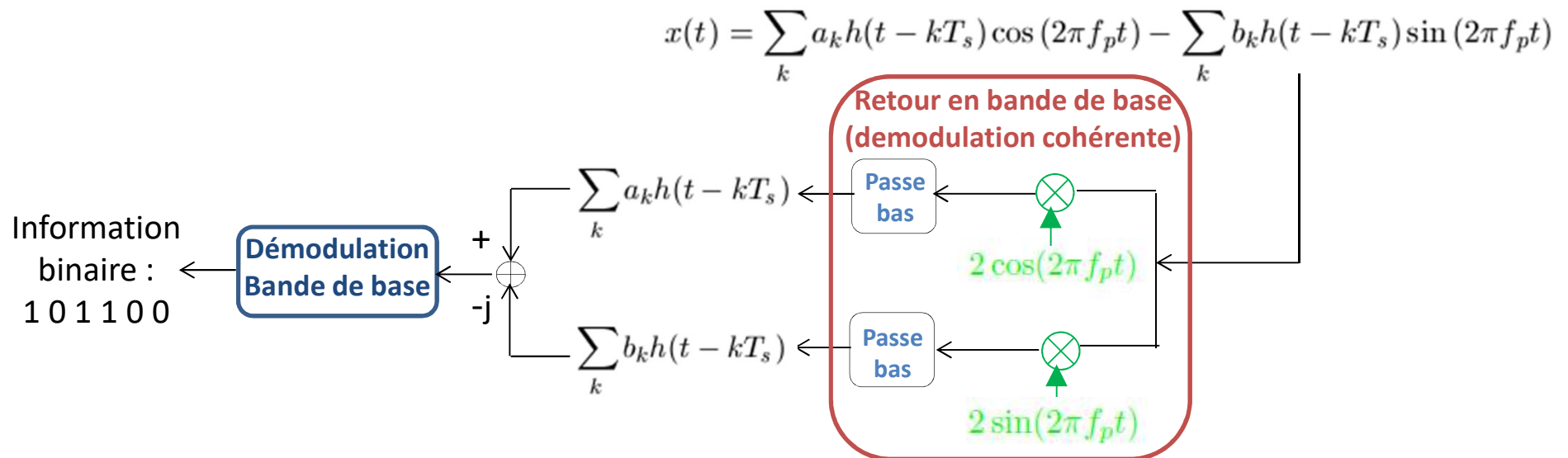
Démodulation cohérente



$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \cos(2\pi f_p t)) \\
 = & \sum_k a_k h(t - kT_s) + \sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t) \\
 & \left(\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \sin(2\pi f_p t)) \\
 = & \sum_k a_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) + \sum_k b_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)
 \end{aligned}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

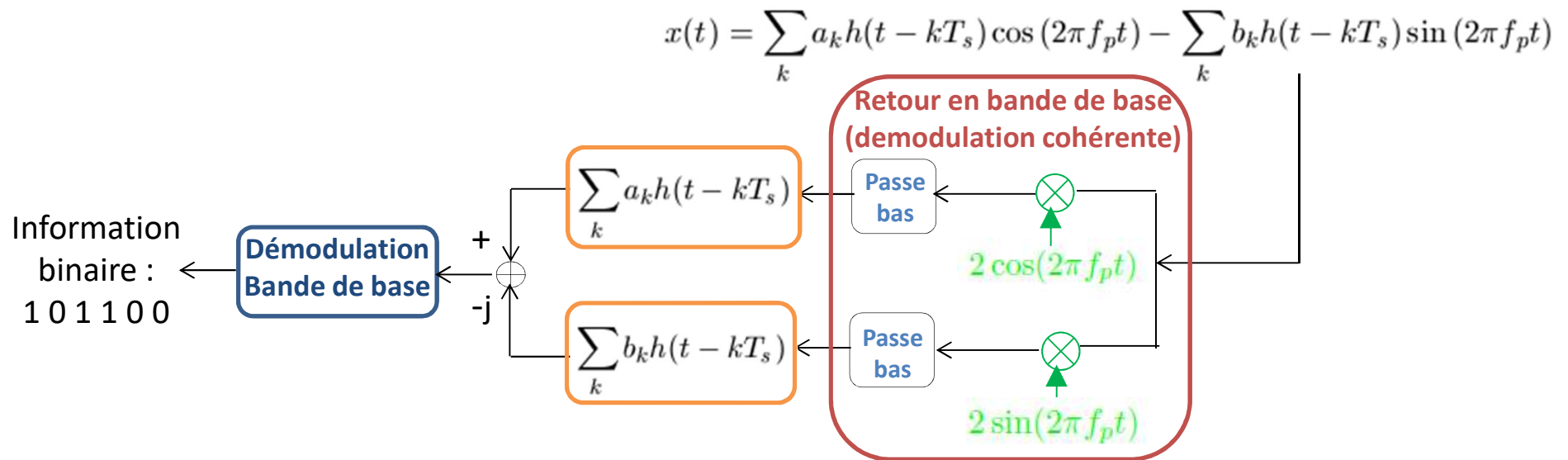
Démodulation cohérente



$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \cos(2\pi f_p t)) \\
 = & \sum_k a_k h(t - kT_s) + \cancel{\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)} - \cancel{\sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)} \\
 & \text{Filtrés par le passe-bas} \\
 & \left(\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \sin(2\pi f_p t)) \\
 = & \cancel{\sum_k a_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)} - \sum_k b_k h(t - kT_s) + \cancel{\sum_k b_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)} \\
 & \text{Filtrés par le passe-bas}
 \end{aligned}$$

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Démodulation cohérente



Voies orthogonales

$$= \left(\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t) - \sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t) \right) \times (2 \cos(2\pi f_p t))$$

$$= \sum_k a_k h(t - kT_s) + \cancel{\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)} - \cancel{\sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)}$$

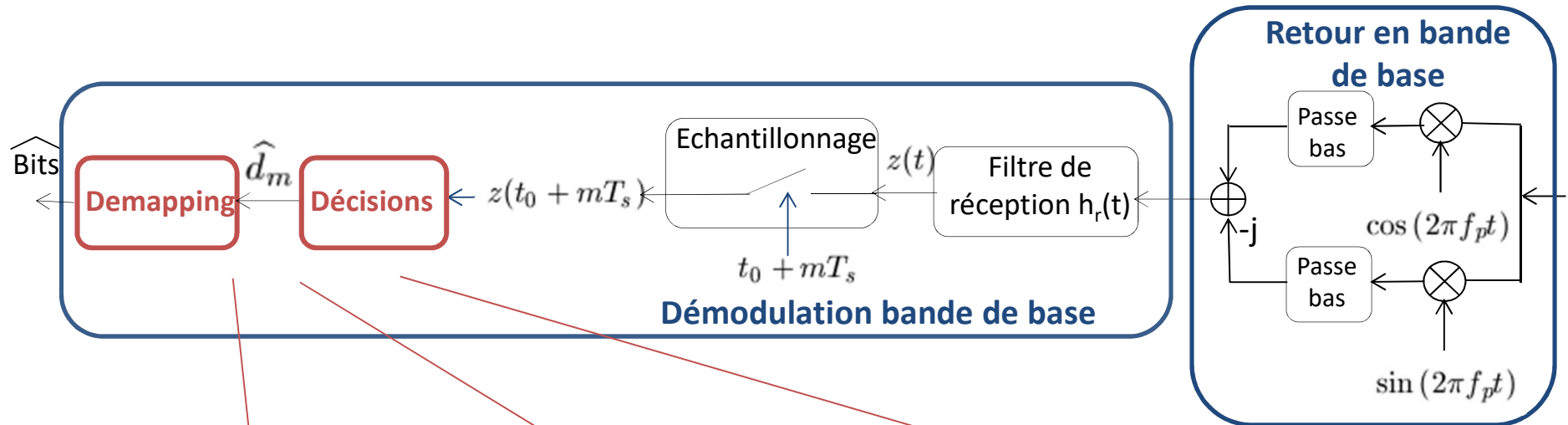
Filtrés par le passe-bas

$$= \cancel{\sum_k a_k h(t - kT_s) \sin(4\pi f_p t)} - \sum_k b_k h(t - kT_s) + \cancel{\sum_k b_k h(t - kT_s) \cos(4\pi f_p t)}$$

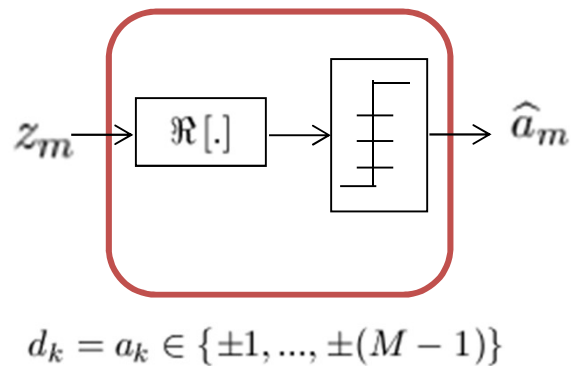
Filtrés par le passe-bas

Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

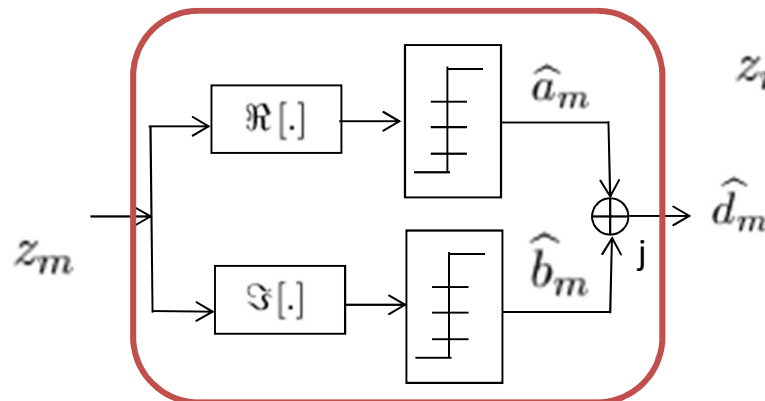
Décisions et demapping



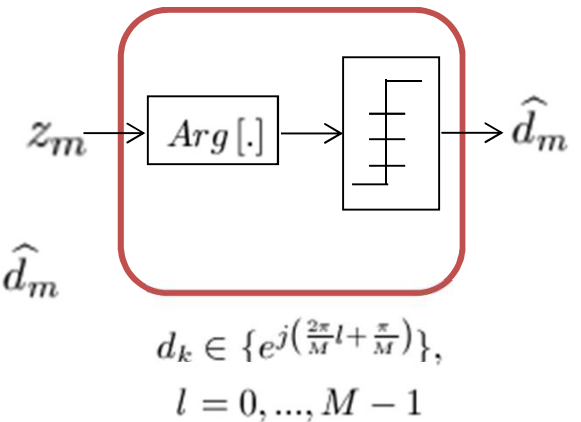
M-ASK



M-QAM



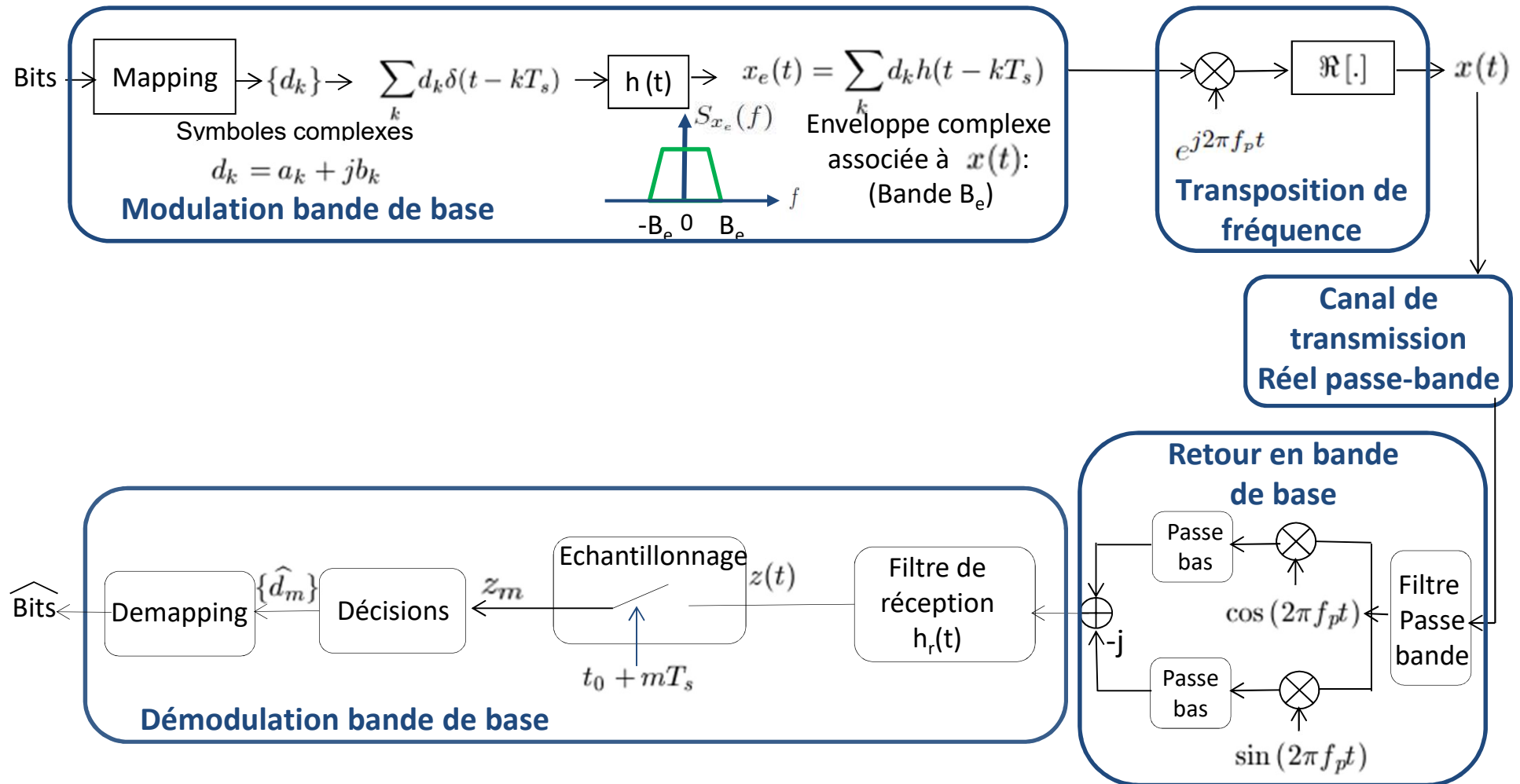
M-PSK



a_k, b_k symboles \sqrt{M} -aires indépendants $\in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$

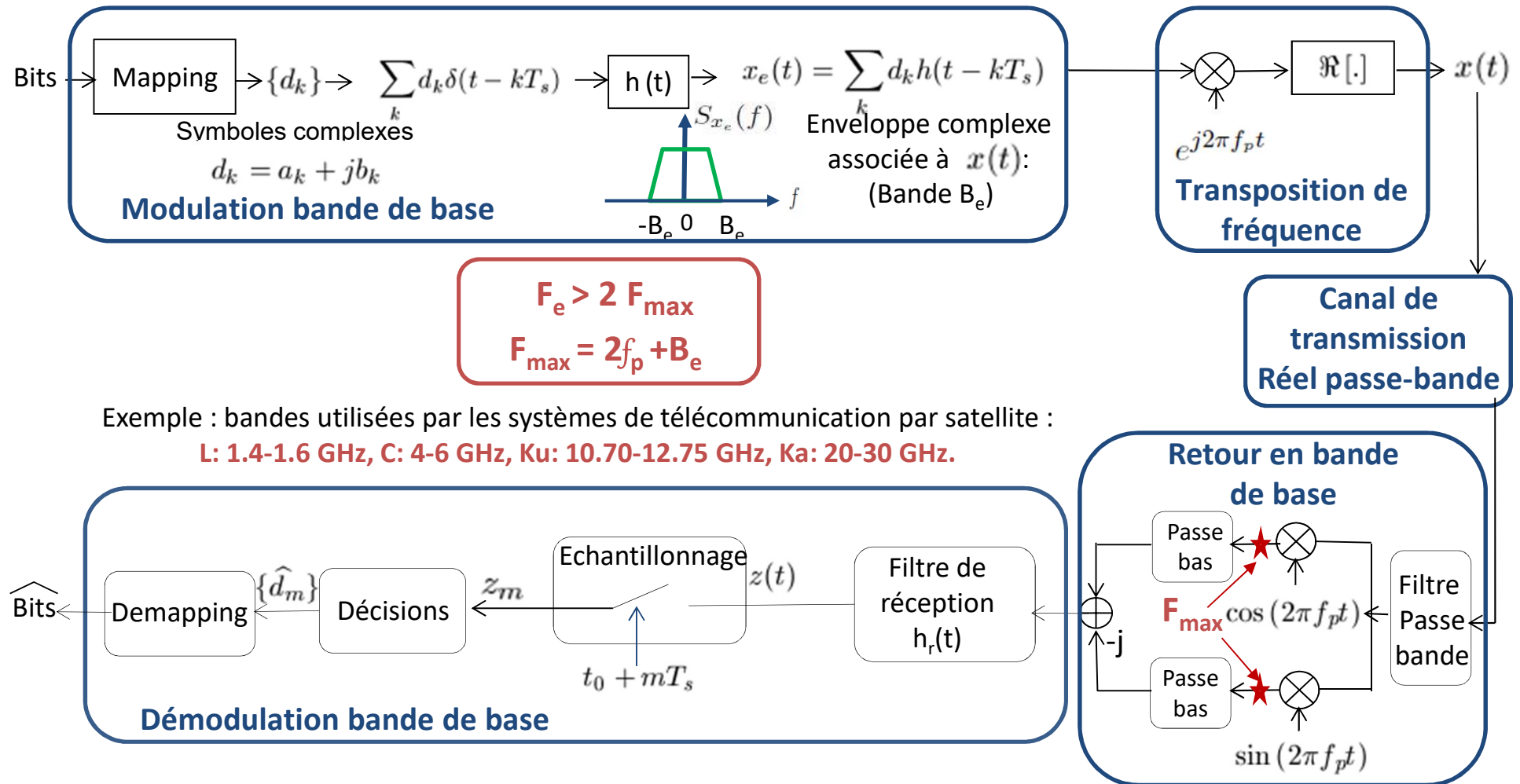
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Chaîne de transmission complète



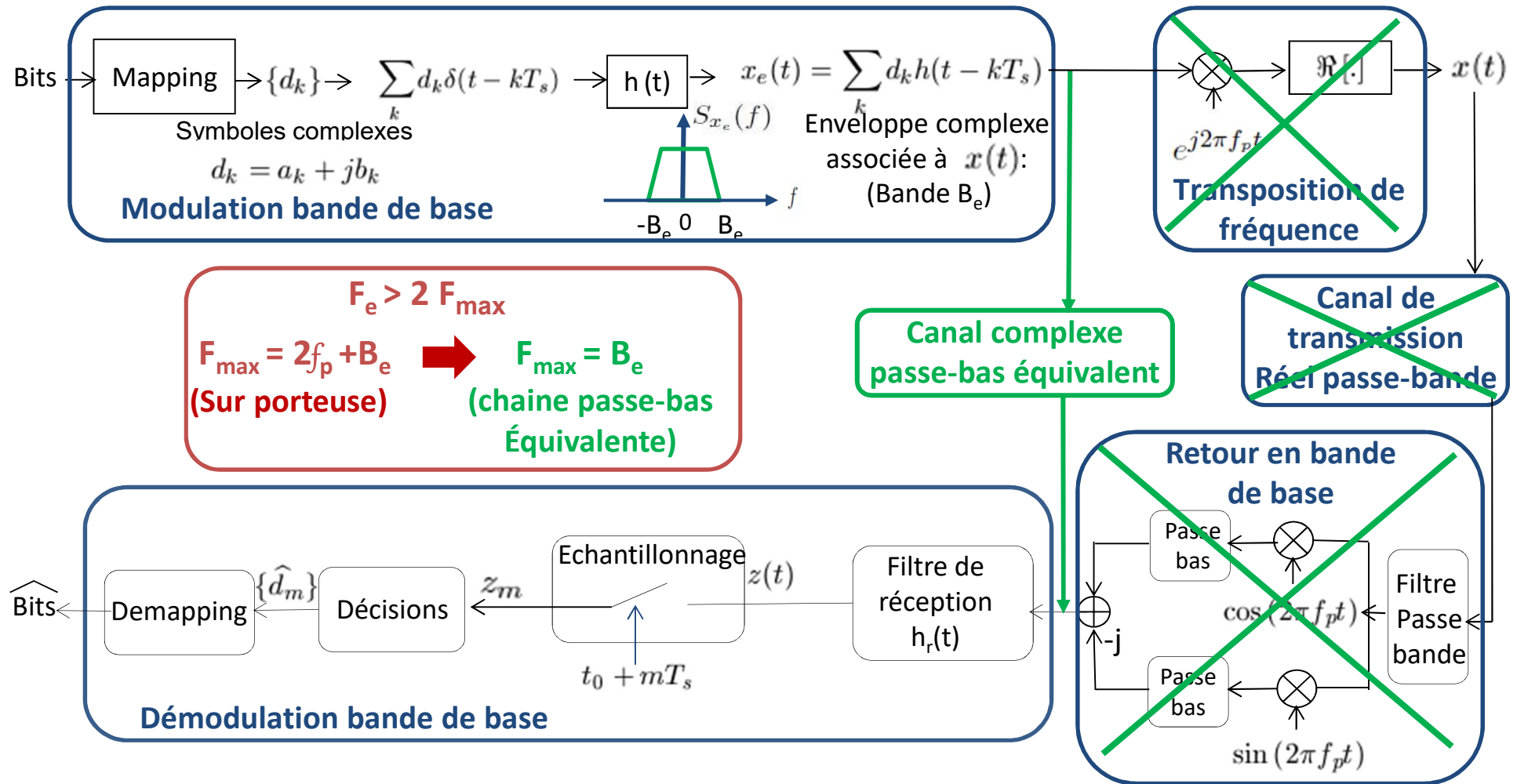
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Chaîne de transmission complète



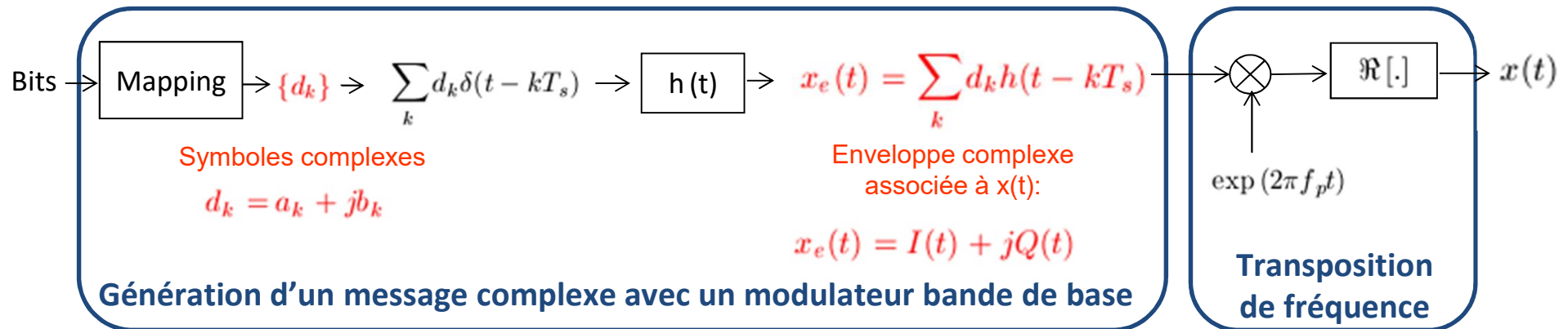
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Chaine de transmission complète => Chaine passe-bas équivalente

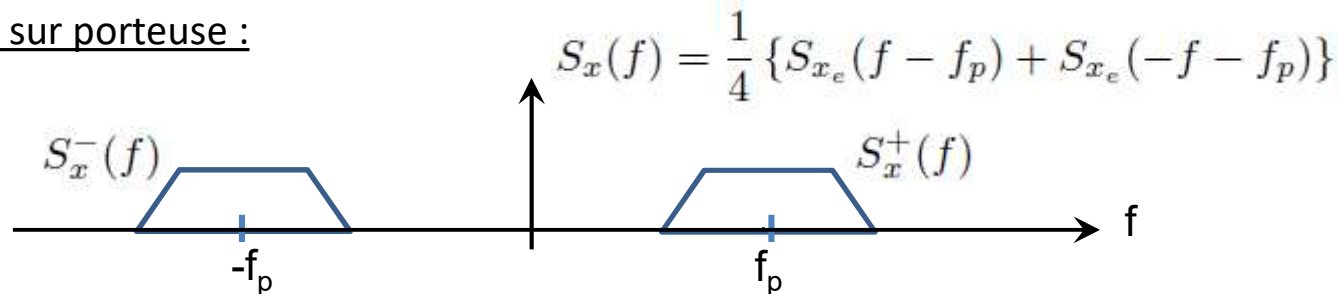


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

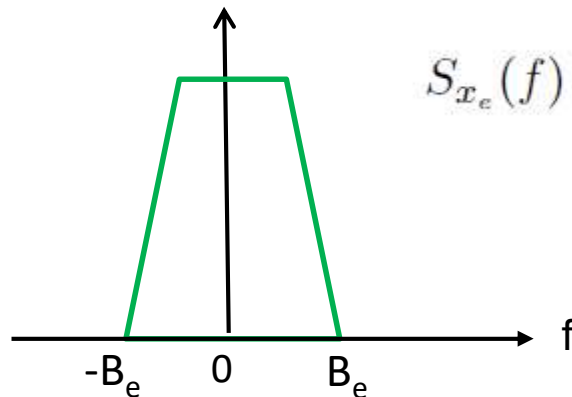
Vers la chaîne passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au signal modulé



→ DSP du signal sur porteuse :



→ DSP de l'enveloppe complexe correspondante :

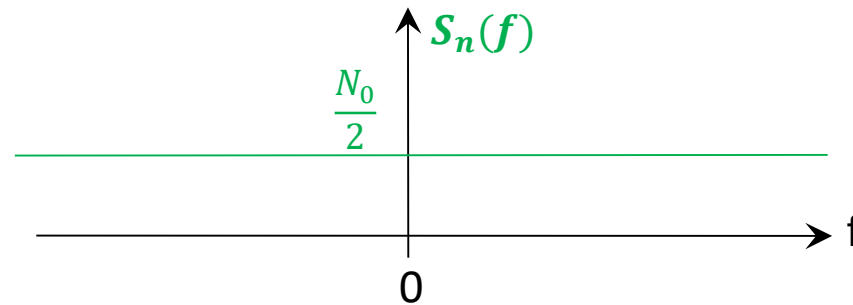
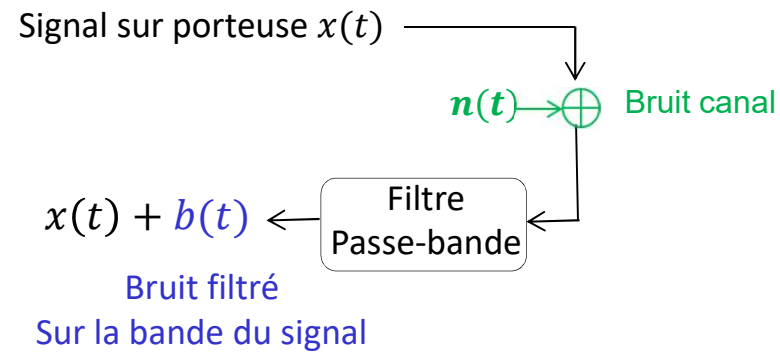


$$S_{x_e}(f) = 4S_x(f + f_p)U(f + f_p) = 4S_x^+(f + f_p)$$

(ou $X_e(f) = 2X_e^+(f + f_p)$ pour les signaux déterministes)

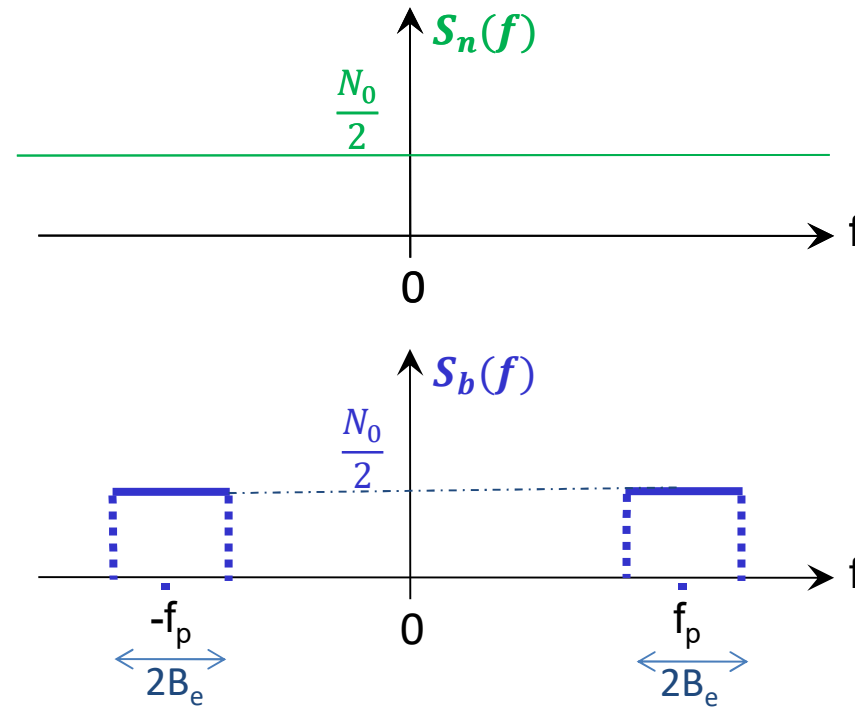
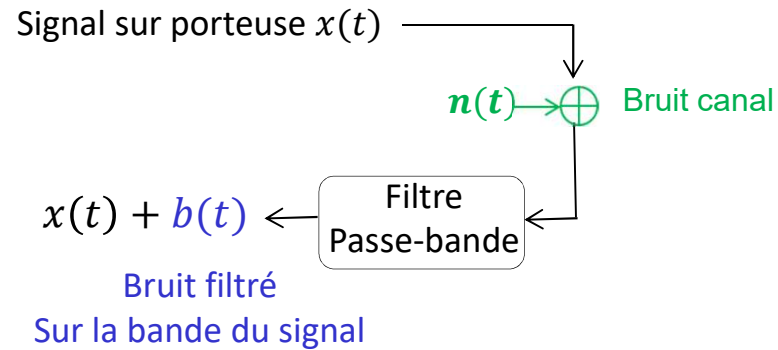
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Vers la chaine passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au bruit



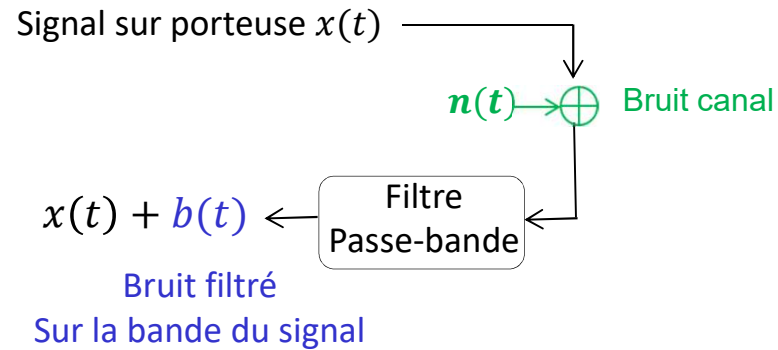
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Vers la chaine passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au bruit

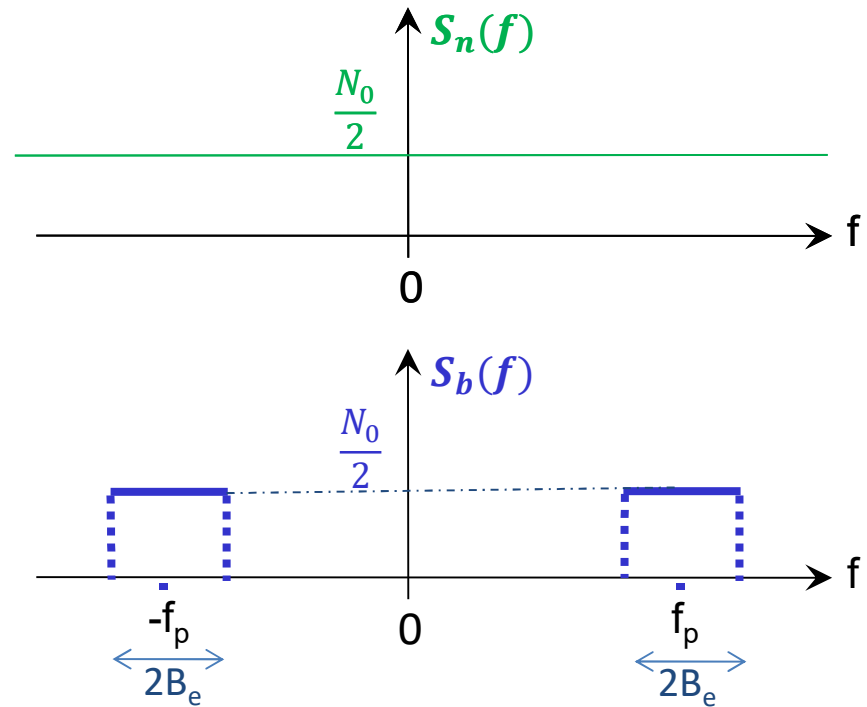


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Vers la chaine passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au bruit

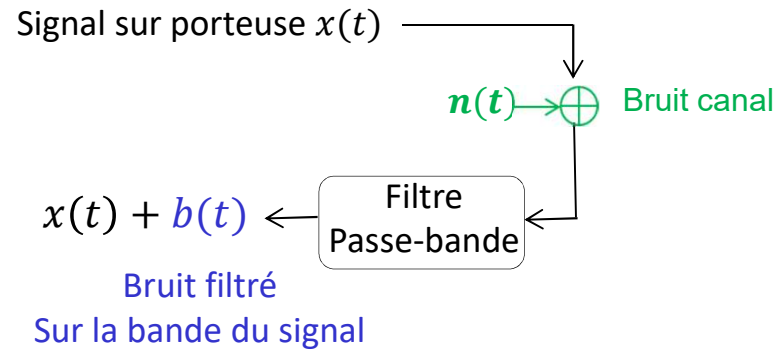


$$S_b(f) = \frac{1}{4} (S_{b_e}(f - f_p) + S_{b_e}(-f - f_p))$$



Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

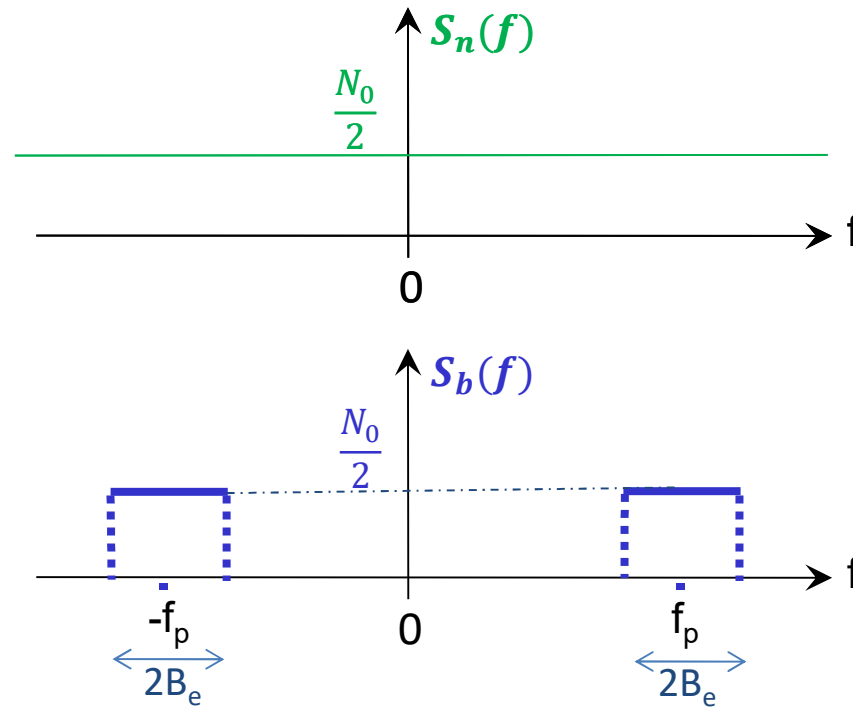
Vers la chaine passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au bruit



$$S_b(f) = \frac{1}{4} (S_{b_e}(f - f_p) + S_{b_e}(-f - f_p))$$

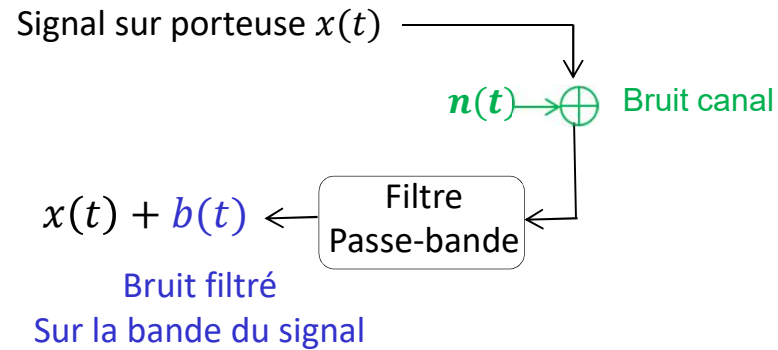


$$S_{b_e}(f) = 4S_b(f + f_p)U(f + f_p) = 4S_b^+(f + f_p)$$



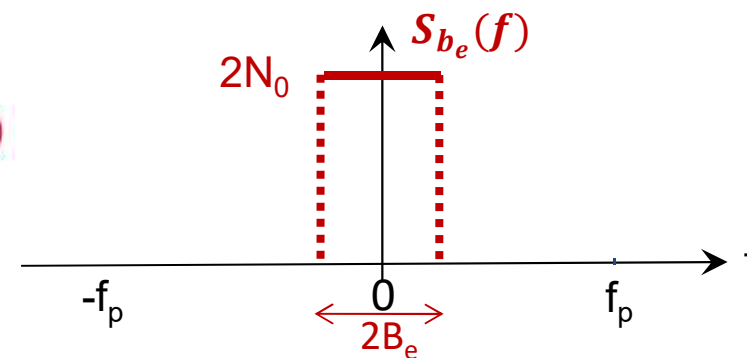
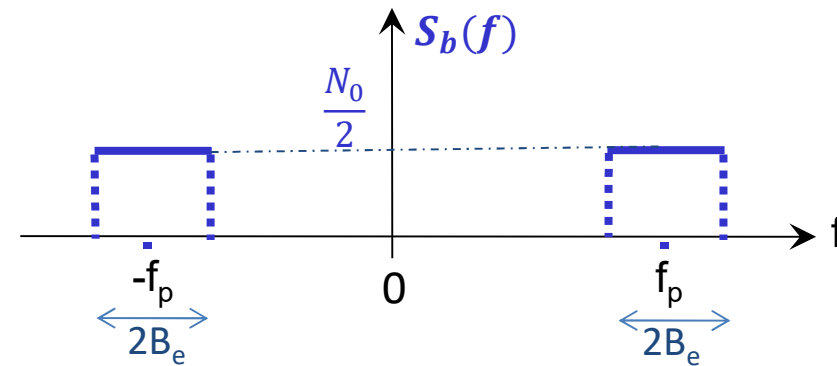
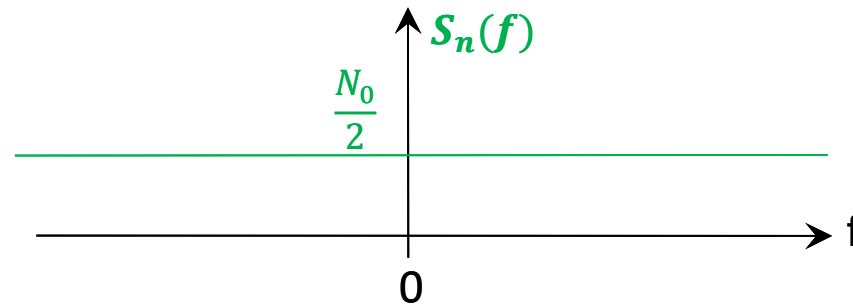
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Vers la chaine passe-bas équivalente : enveloppe complexe associée au bruit



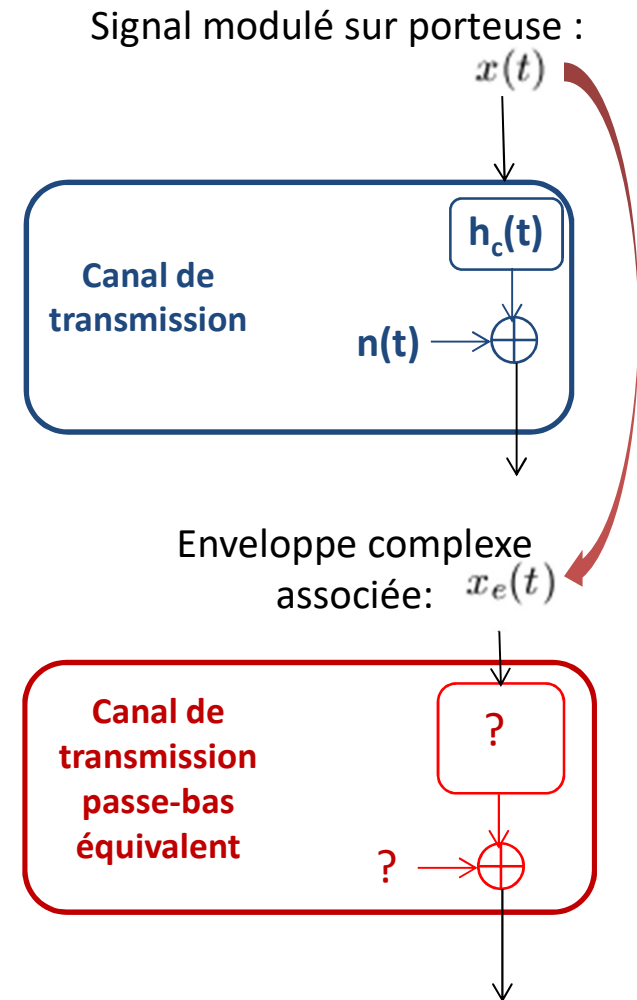
$$S_b(f) = \frac{1}{4} (S_{b_e}(f - f_p) + S_{b_e}(-f - f_p))$$

$$S_{b_e}(f) = 4S_b(f + f_p)U(f + f_p) = 4S_b^+(f + f_p)$$



Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

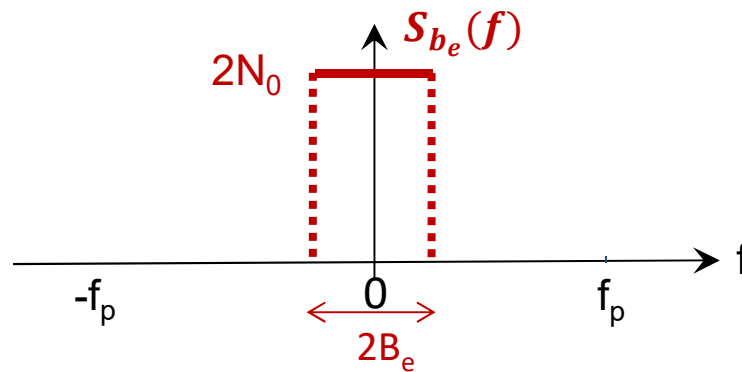
Vers la chaine passe-bas équivalente : canal passe-bas équivalent



Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

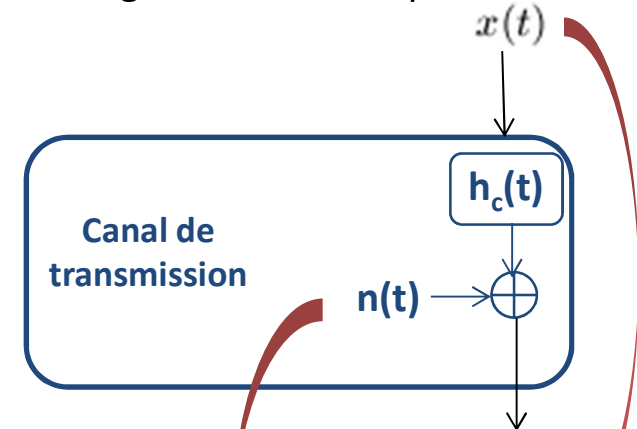
Vers la chaine passe-bas équivalente : canal passe-bas équivalent

$b_e(t) = I_b(t) + jQ_b(t)$: enveloppe complexe associée à $b(t)$

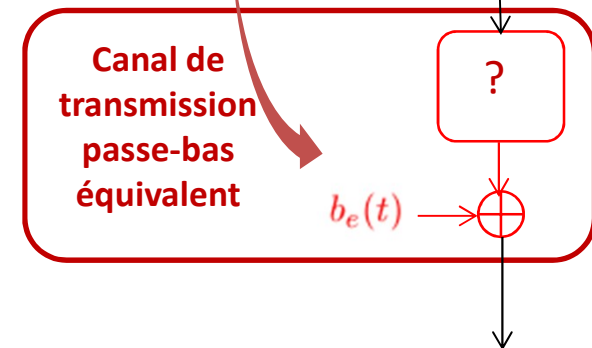


$S_{I_b}(f) = S_{Q_b}(f) = N_0$ sur la bande de $b_e(t)$

Signal modulé sur porteuse :



Enveloppe complexe associée: $x_e(t)$

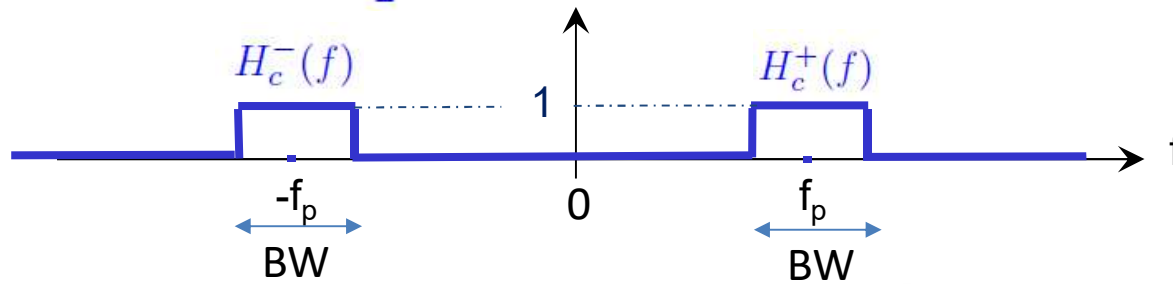


Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

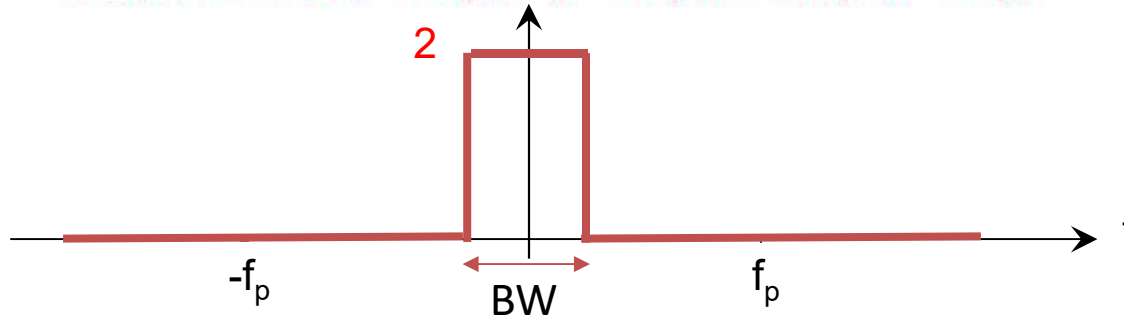
Vers la chaine passe-bas équivalente : canal passe-bas équivalent

Filtre canal passe-bas équivalent

$$H_c(f) = \frac{1}{2} (H_{c_e}(f + f_p) + H_{c_e}(f - f_p))$$



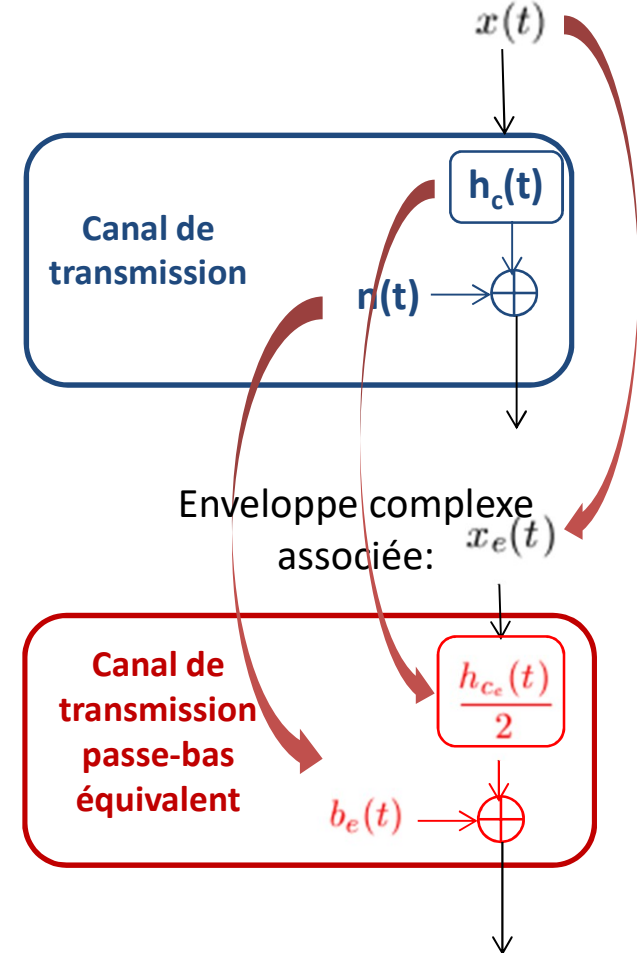
$$H_{c_e}(f) = 2H_c(f + f_p)U(f + f_p) = 2H_c^+(f + f_p)$$



(Remarque : le canal est supposé idéal sur sa bande passante dans la figure)

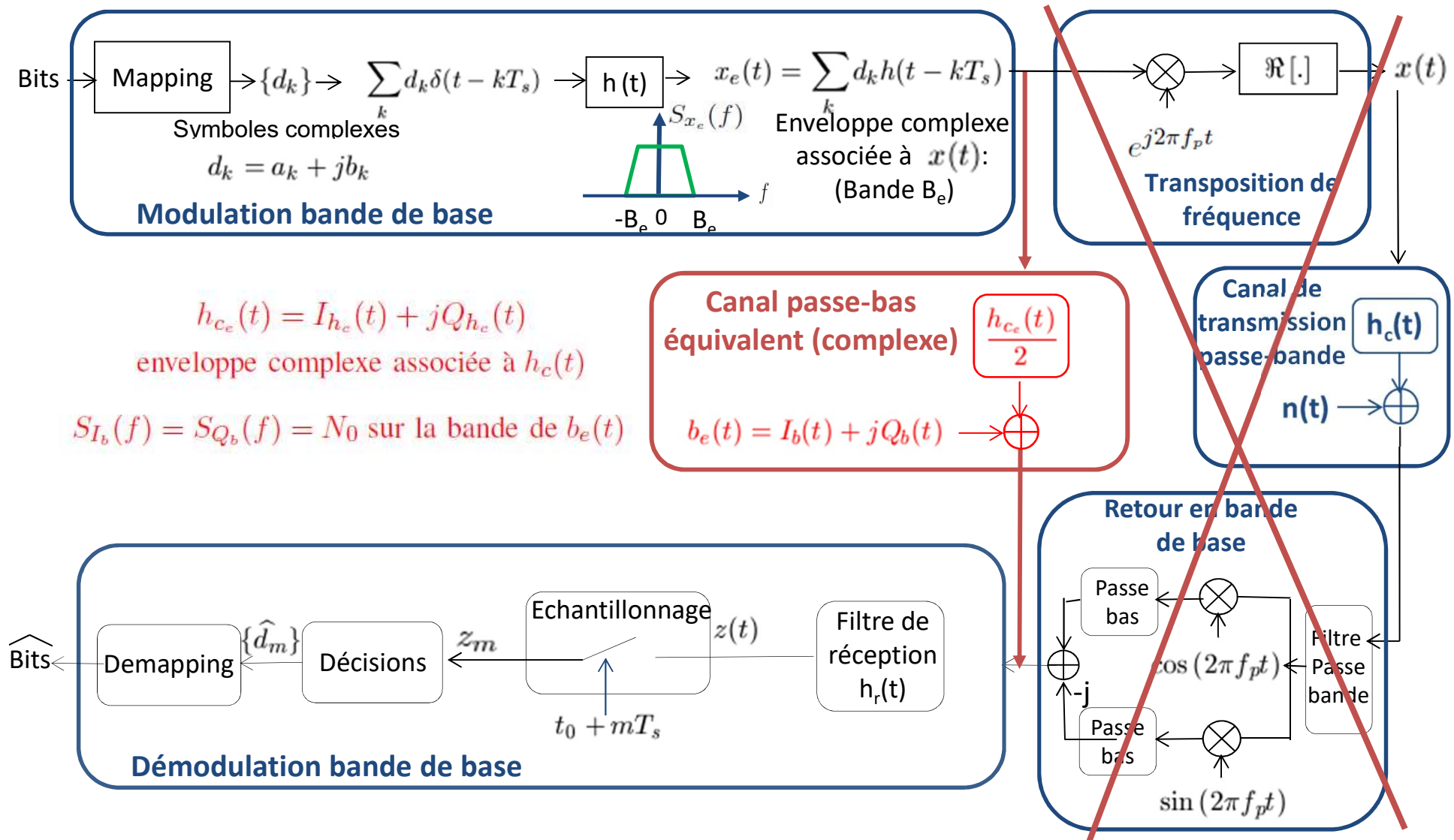
$$h_{c_e}(t) = I_{h_e}(t) + jQ_{h_e}(t) : \text{enveloppe complexe associée à } h_c(t)$$

Signal modulé sur porteuse :



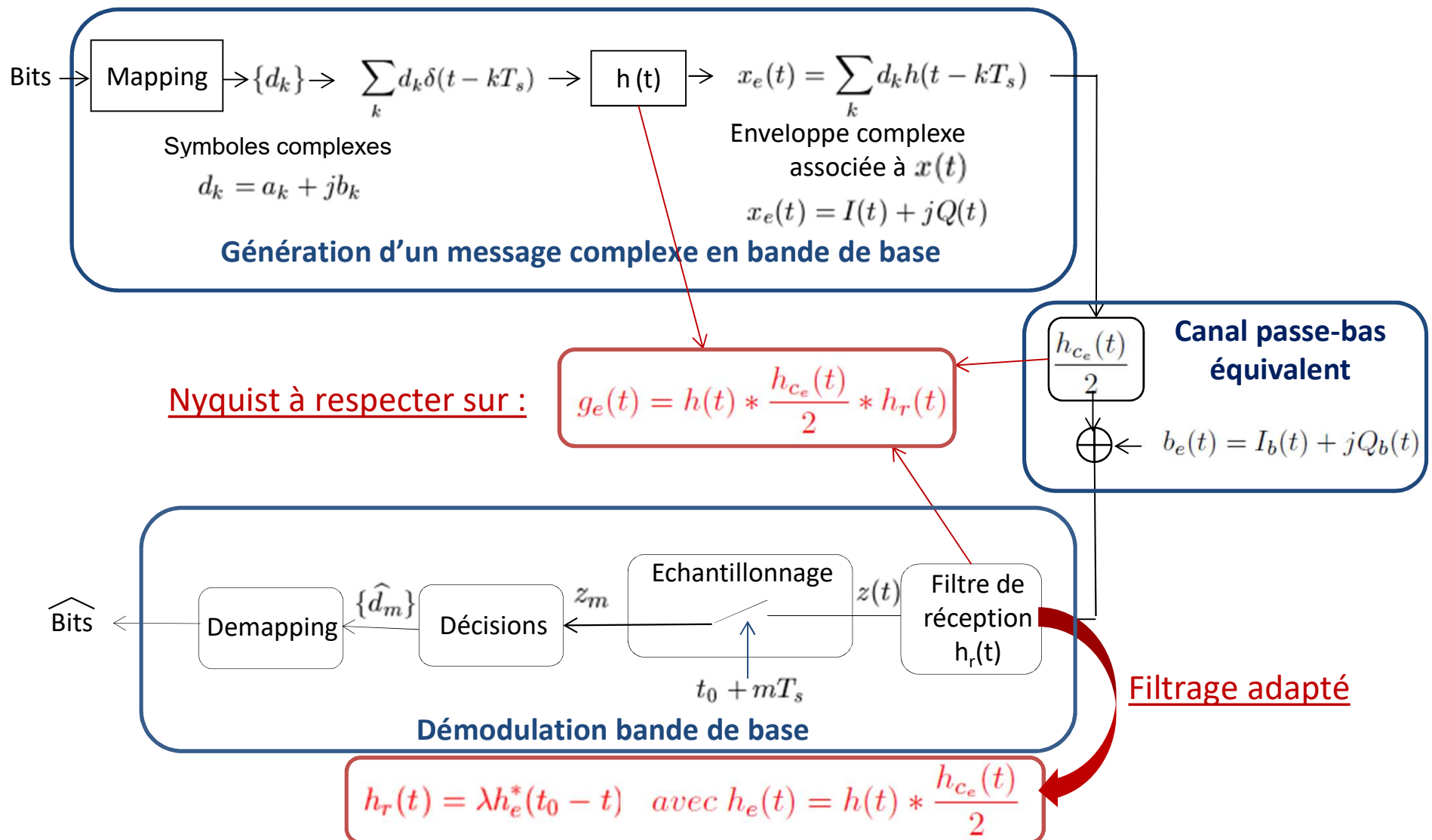
Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Chaine de transmission complète => Chaine passe-bas équivalente



Modulations numériques linéaires sur fréquence porteuse

Chaine passe-bas équivalente : Critères de Nyquist et filtrage adapté



Les calculs de TEB en bande de base peuvent être ré-utilisés

Télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

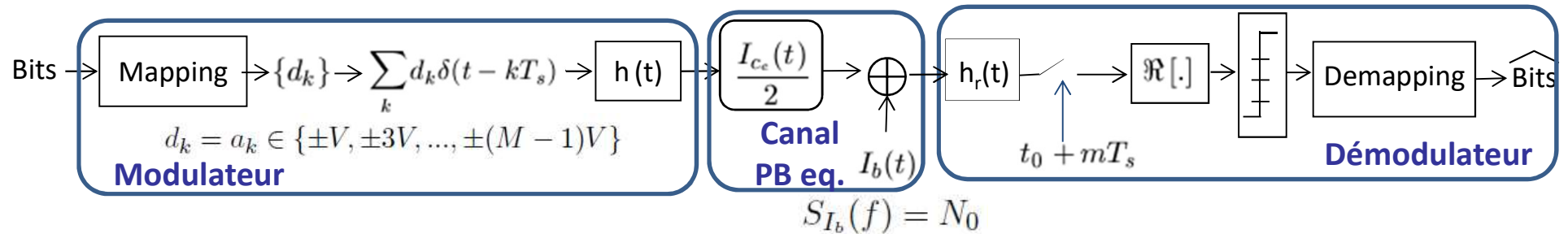
Transmissions sur fréquence porteuse

- 1- Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe
- 2- Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes
- 3- Comparaison en termes d'efficacité spectrale
- 4- Comparaison en termes d'efficacité en puissance :
 - Exemple,
 - Chaîne passe bas-équivalente
 - Calcul de TEBs

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**

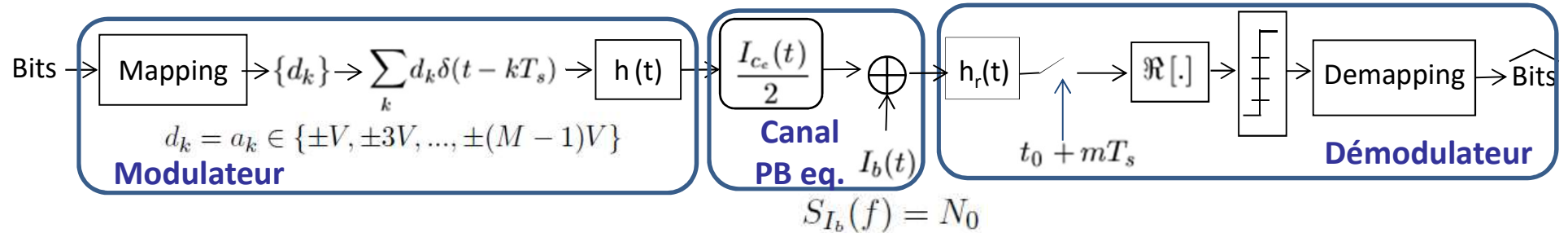


$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



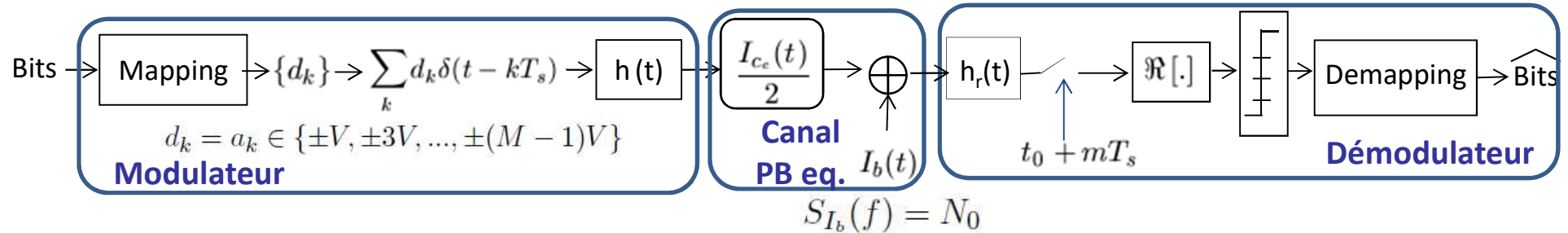
$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

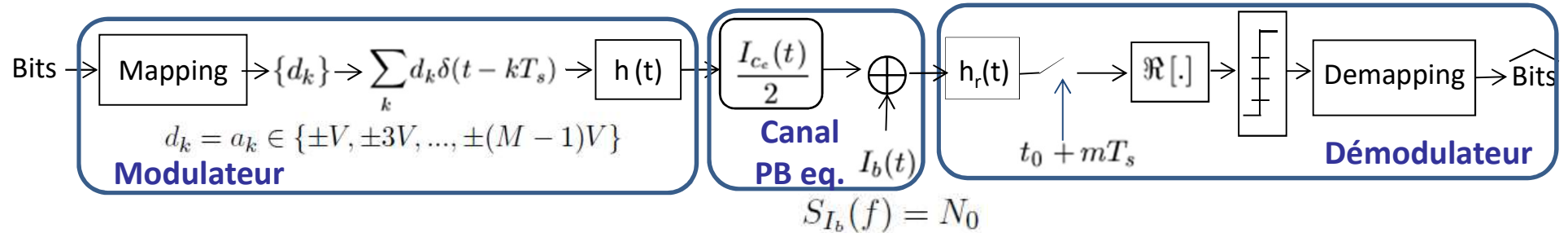
$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{c_e}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{c_e}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

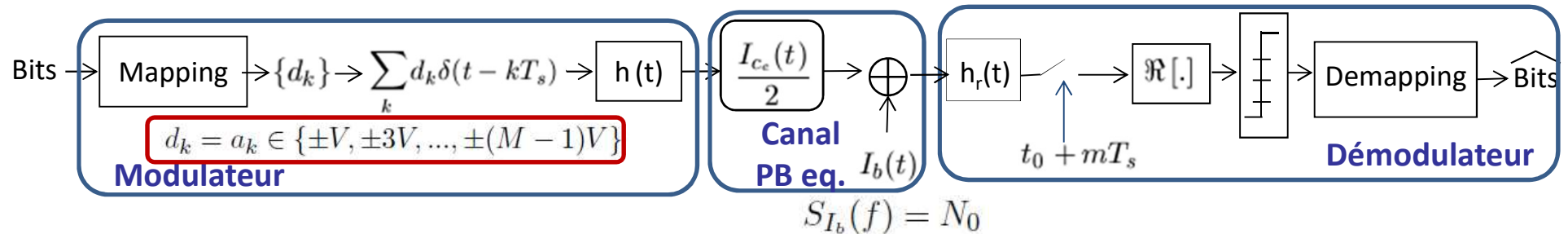
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{M} \times \{1^2 + (3)^2 + \dots + (M-1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{M} \frac{M(M^2-1)}{6} = \frac{V^2(M^2-1)}{3}$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-ASK**



$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

Attention : $E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$

(Forme d'onde à l'entrée du récepteur : $h_e(t) = h(t) * \frac{h_{ce}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f)$)

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{M} \times \{1^2 + (3)^2 + \dots + (M-1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{M} \frac{M(M^2-1)}{6} = \frac{V^2(M^2-1)}{3}$$

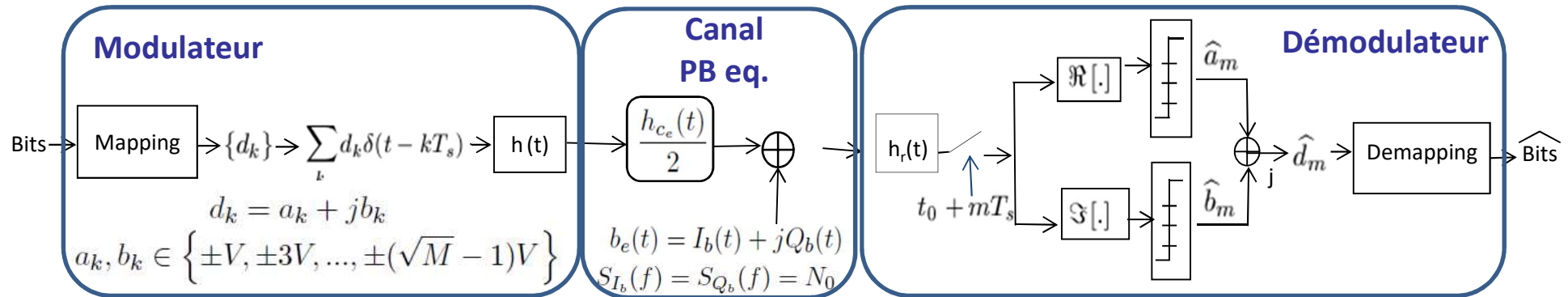


$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$)



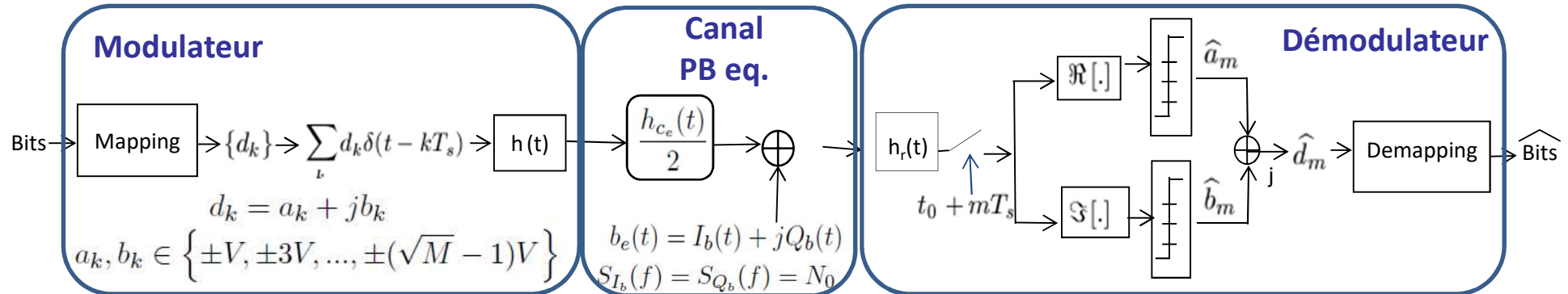
$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$)



$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{2\sigma_a^2}{2\log_2(M)} g(t_0) = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

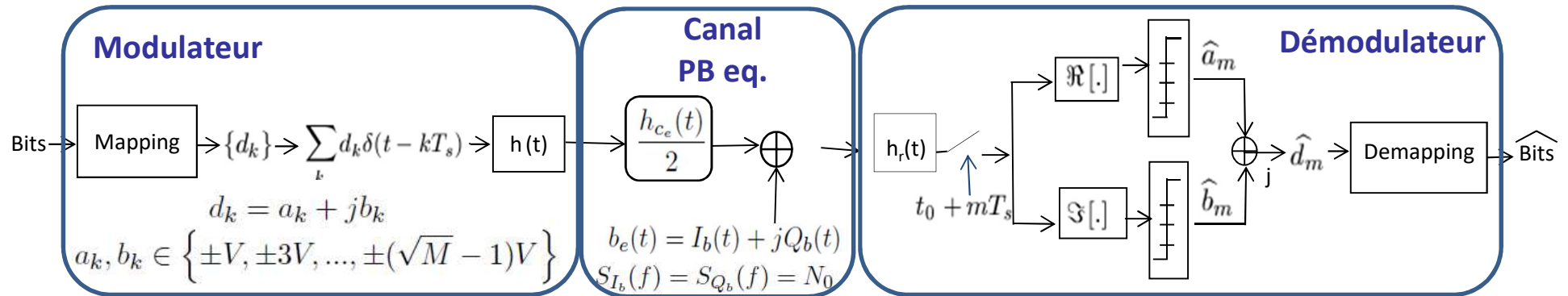
$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{c_e}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$)



$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$\text{Attention : } E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{2\sigma_a^2}{2\log_2(M)} g(t_0) = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$$

$$(\text{Forme d'onde à l'entrée du récepteur : } h_e(t) = h(t) * \frac{h_{c_e}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f))$$

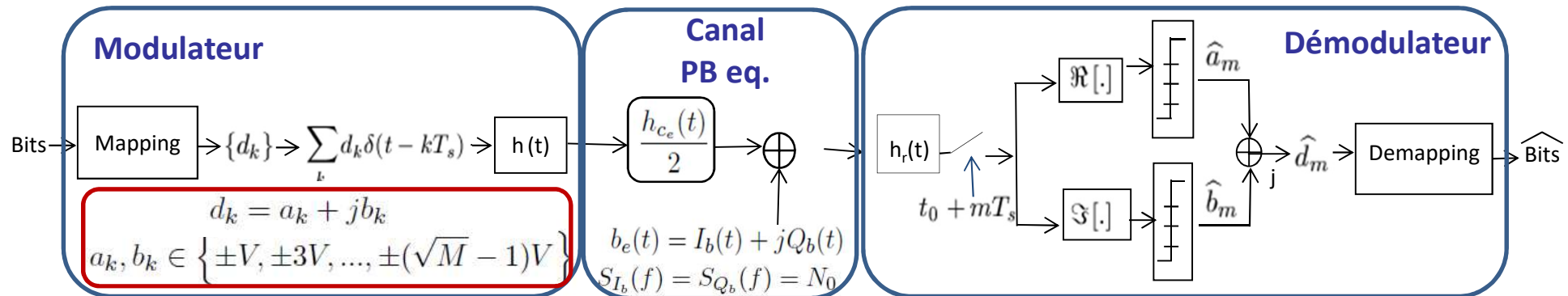
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{\sqrt{M}} \times \{1^2 + (3)^2 + \dots + (\sqrt{M} - 1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{\sqrt{M}} \frac{\sqrt{M}(\sqrt{M}^2 - 1)}{6} = \frac{V^2(M - 1)}{3}$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-QAM** (carrée, $M > 2$)



$$TES = TES_I + TES_Q - TES_I TES_Q$$

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right) \text{ si critère de Nyquist respecté.}$$

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0) \text{ si filtrage adapté}$$

Attention : $E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{2\sigma_a^2}{2\log_2(M)} g(t_0) = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0) \text{ si filtrage adapté.}$

(Forme d'onde à l'entrée du récepteur : $h_e(t) = h(t) * \frac{h_{ce}(t)}{2} \xrightarrow{TF} H_e(f)$)

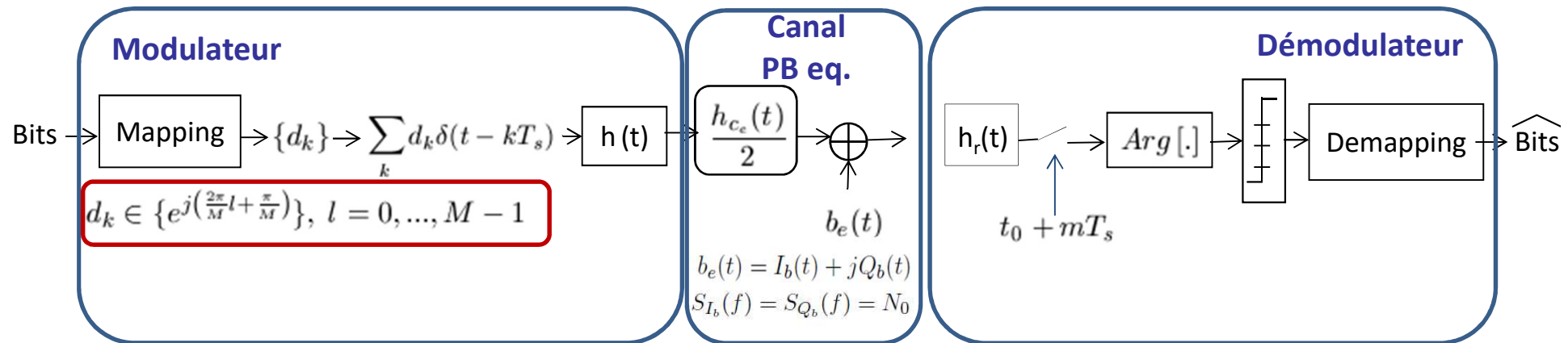
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

➔
$$TES \simeq 2TES_I = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}}\right) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2(M)}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

Chaine passe-bas équivalente à la modulation **M-PSK**



$$TES = 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right)$$

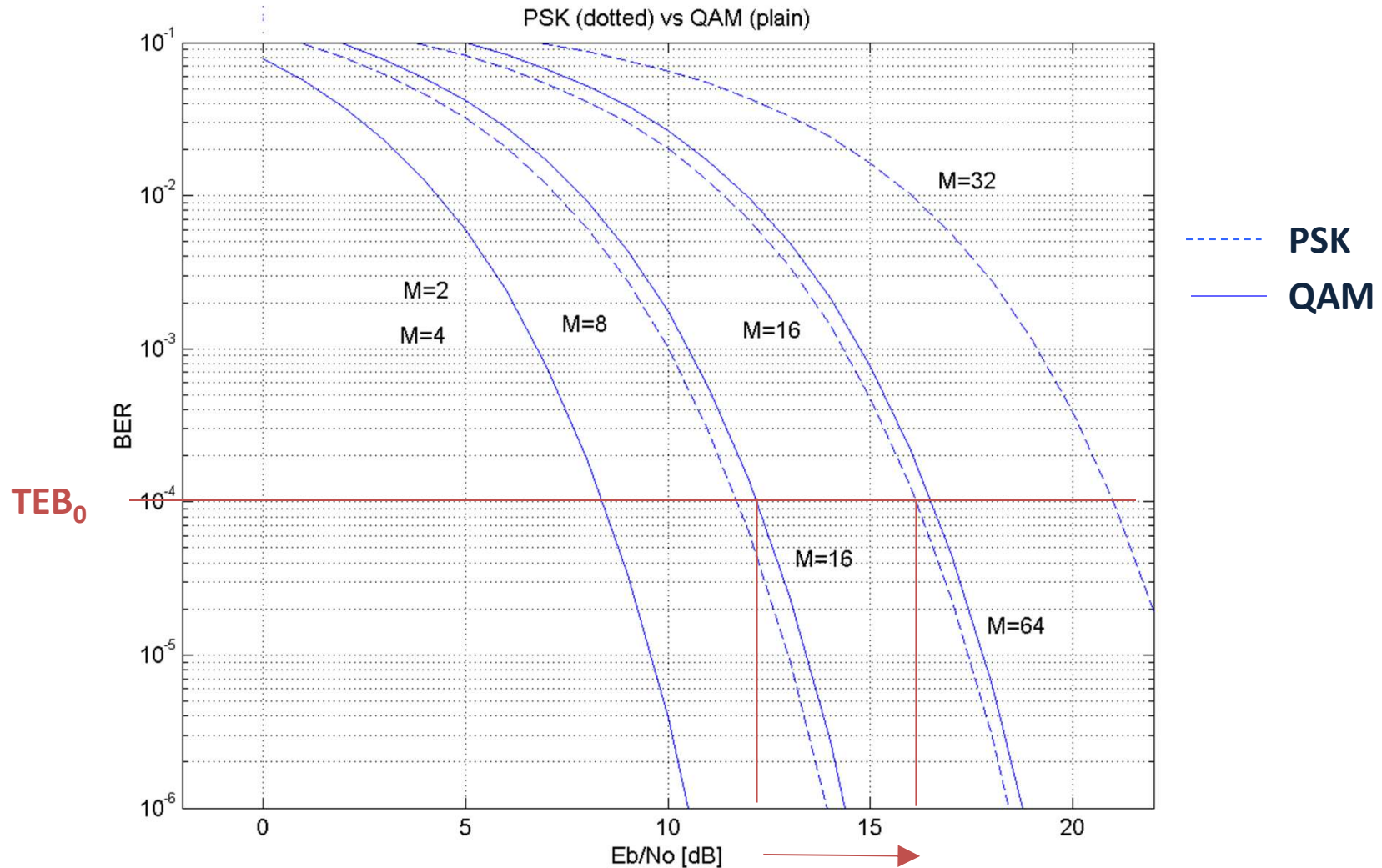
(Symboles supposés indépendants et équiprobables)

(Critère de Nyquist + Filtrage adapté)

Modulation Linéaire sur fréquence porteuse

Performances des modulations sur porteuse

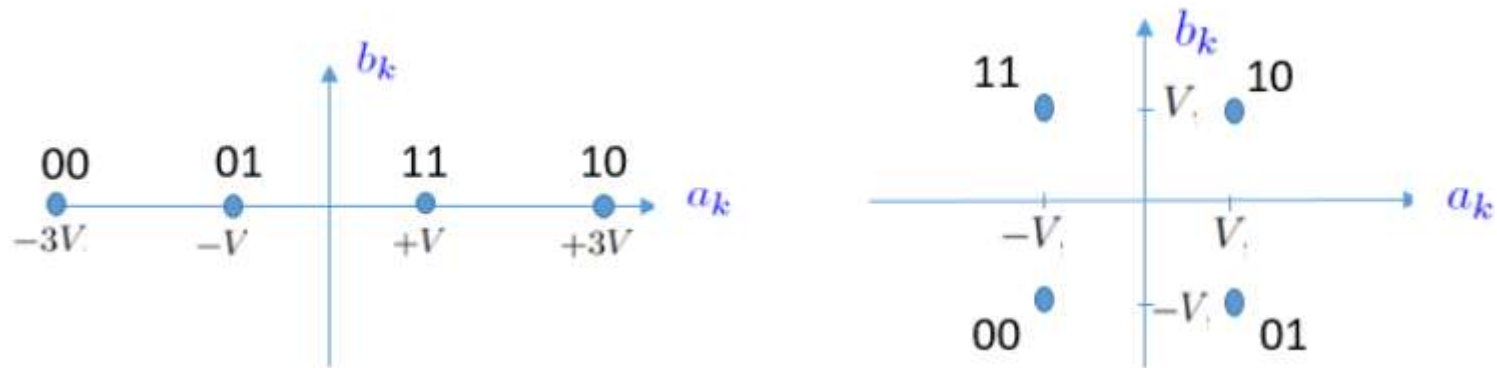
Comparaison PSK/QAM en termes d'efficacité en puissance



Pour un ordre M donné :

➤ efficacité en puissance pour PSK
Même efficacité spectrale

QUESTION 7



Parmi ces deux modulations, laquelle va donner la transmission la plus efficace spectralement ?

- ① Celle de gauche
- ② Celle de droite
- ③ Aucune des deux (elles donneront la même efficacité spectrale)
- ④ Pas assez d'éléments pour répondre à la question

QUESTION 8

Pour un même filtre de mise en forme, classer les modulations suivantes par ordre d'efficacité spectrale croissante.

① 16-QAM

② 8-PSK

③ BPSK

④ QPSK

QUESTION 9

Pour une chaîne de transmission optimisée (Nyquist, Filtrage adapté, Mapping de Gray, instants d'échantillonnage et seuils de décision optimaux), parmi les modulations suivantes quelle sera la plus efficace en puissance.

① QPSK

② 16-QAM

③ 64-QAM