

El título

El Autor

14 de enero de 2025

Este fichero es un ejemplo «sencillo» (“sencillo”) de documento en \LaTeX en el que se muestra el uso de algunas herramientas y paquetes útiles para la escritura de documentos matemáticos.

1. Definición

Sea I un intervalo y sean $a, b \in I$ con $a < b$. Si $x \in [a, b]$, x se puede escribir como *combinación convexa* de a y b :

$$x = \frac{b-x}{b-a} \cdot a + \frac{x-a}{b-a} b.$$

Otras fórmulas

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Definición 1.1. Sea I un intervalo y sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. La función f es *convexa* si para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ y cualquier $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

2. La función f es *cóncava* (resp. estrictamente cóncava) si $-f$ es convexa (resp. estrictamente cóncava).

Ejemplo 1.2. La función $f(x) = x^2$ es convexa en todo \mathbb{R} . En efecto, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f((1-t)a + tb) &= (1-t)^2 a^2 + t^2 b^2 + 2t(1-t)ab, \\ (1-t)f(a) + tf(b) &= (1-t)a^2 + tb^2. \end{aligned}$$

Para ver cuál es mayor, calculamos la diferencia:

$$\begin{aligned} &(1-t)f(a) + tf(b) - (f((1-t)a + tb)) \\ &= (1-t)a^2 + tb^2 - ((1-t)^2 a^2 + t^2 b^2 + 2t(1-t)ab) \\ &= t(1-t)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

El paquete `witharrows` añade dos entornos: `WithArrows` y `DispWithArrows` que funcionan como `aligned` y `align`:

$$\begin{aligned} A &= ((a+b)+1)^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b) + 1 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b + 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{desarrollamos} \\ \downarrow \end{array}$$

1.1. El conjunto de las funciones convexas

Veamos algunas propiedades del conjunto de las funciones convexas (ver definición 1.1).

Proposición 1.3. Sean $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones convexas y sea $\alpha > 0$. Entonces

1. $f + g$ es convexa,
2. αf es convexa, y
3. $\max\{f, g\}$ es convexa.

Demostración. 1. Sean $a, b \in I$, y sea $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}(f + g)((1 - t)a + tb) &= f((1 - t)a + tb) + g((1 - t)a + tb) \\ &\leq (1 - t)f(a) + tf(b) + (1 - t)g(a) + tg(b) \\ &= (1 - t)(f + g)(a) + t(f + g)(b).\end{aligned}\tag{1.1}$$

2. Sean $a, b \in I$, y sea $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}(\alpha f)((1 - t)a + tb) &= \alpha f((1 - t)a + tb) \\ &\leq \alpha(1 - t)f(a) + \alpha tf(b) \\ &= (1 - t)(\alpha f)(a) + t(\alpha f)(b).\end{aligned}\tag{1.2}$$

3. Sean $a, b \in I$, y sea $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}\max\{f, g\}((1 - t)a + tb) &= \max\{f((1 - t)a + tb), g((1 - t)a + tb)\} \\ &\leq \max\{(1 - t)f(a) + tf(b), (1 - t)g(a) + tg(b)\} \\ &= (1 - t)\max\{f, g\}(a) + t\max\{f, g\}(b). \quad \square\end{aligned}$$

2. Segunda sección

Teorema 2.1 (O. Stolz). Sea I un intervalo abierto y sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.

1. La función f tiene derivadas laterales en todos los puntos. En particular, f es continua.
2. f'_+ y f'_- son funciones crecientes.

3. Tercera sección

Teorema 3.1 (de la función inversa). Sean $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase C^1 . Supongamos que existe $a \in A$ tal que

$$\text{determinante}(J_f(a)) = \det \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_N f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_N(a) & \dots & D_N f_N(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces existe un entorno abierto U de a contenido en A tal que $V := f(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^N , f es un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre V , y para cada $x \in U$ se verifica

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_N f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_N(x) & \dots & D_N f_N(x) \end{pmatrix}^{-1}.$$

Teorema 3.2 (de la convergencia monótona). Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $\{f_n\}$ es una sucesión monótona de funciones integrables en Ω verificando que la sucesión de sus integrales $\{\int_{\Omega} f_n d\mu\}$ está acotada, entonces $\{f_n\}$ converge c.p.d. a una función f integrable en Ω y

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

4. Miscelánea

4.1. Unidades

El paquete `siunitx` permite escribir unidades del Sistema Internacional de forma sencilla. Por ejemplo, la velocidad de la luz en el vacío es $300\,000\text{ km s}^{-1}$. Otra forma de escribirlo es $3 \times 10^5\text{ km s}^{-1}$. Con `num` podemos formatar los números, por ejemplo

$$\pi \approx 3.141\,592\,653\,589\,793$$

$$e^{15} \approx 3\,269\,017.372\,472\,110\,7 \approx 3.269\,017\,372\,472\,110\,7 \times 10^6$$

Además de escribir unidades, `siunitx` permite escribir ángulos, por ejemplo, $30^{\circ}15'20''$ o 30.25° , números complejos $2 + 3i$ en forma cartesiana o polar $3\angle 60^{\circ}$. Además de esto añade un tipo nueva de columna en los entornos tabulados para alinear números, parte entera y decimal.

4.2. Física y Química

Algunos paquetes para Física:

1. `revtex`
2. `tikz-feynman`
3. `siunitx`
4. `struct`

Algunos paquetes para Química:

1. `chemfig`
2. `mhchem`
3. `chemformula`
4. `chemmacros`
5. `substances`
6. `elements`
7. `carbohydrates`

Hay muchos paquetes que simplifican la escritura de fórmulas químicas. Por ejemplo, con `chemfig` se pueden escribir fórmulas químicas de forma sencilla. Por ejemplo, la molécula de agua se puede escribir como H_2O .



Fórmula Química	Nombre
H ₂ O	Water molecule
NaCl	Sodium chloride
C ₆ H ₁₂ O ₆	Glucose
¹⁴ C	Carbon-14 isotope
Na ⁺	Sodium ion
H ₂ O ₂	Hydrogen Peroxide

Tabla 1: Tabla de fórmulas químicas y sus nombres

4.3. Código

4.3.1. Ejemplo de código en Python

Ejemplo de código en Python

```
def suma(a, b):
    return a + b
resultado = suma(3, 5)
print("El resultado de la suma es: {resultado}")
```

4.3.2. Ejemplo de código en L^AT_EX

```
\begin{table}[h!]
  \centering
  \begin{tabular}{|c|c|}
    \hline
    Fórmula Química & Nombre \\
    \hline
    \ce{H2O} & Water molecule \\
    \ce{NaCl} & Sodium chloride \\
    \ce{C6H12O6} & Glucose \\
    \ce{^{14}C} & Carbon-14 isotope \\
    \ce{Na^{+}} & Sodium ion \\
    \ce{H2O_{2}} & Hydrogen Peroxide \\
    \hline
  \end{tabular}
  \caption{Tabla de fórmulas químicas y sus nombres}
  \label{tab:quimica}
\end{table}
```