

Convocatoria ordinaria. Junio 2024

Álgebra. Grado en Estadística.

Apellidos, Nombre: _____ Grupo: _____

1. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones.

- Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $m < n$, entonces f no puede ser inyectiva.
- Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea X un conjunto de elementos de V que son ortogonales dos a dos. Demuestra que el cardinal de X es menor o igual que n .
- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con n un entero positivo, de forma que $f(1)$ es no nulo. Sea A la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de \mathbb{R} y \mathbb{R}^n . Demuestra que A tiene inversa a la izquierda.

2. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-x + y, x - y, -2z)$.

- Encuentra la matriz asociada a f respecto de la base usual de \mathbb{R}^3 , a la que llamamos A . Calcula la forma escalonada reducida por filas de A .
- Encuentra el núcleo de f . Demuestra que el núcleo de f es ortogonal al espacio generado por las filas de A respecto al producto escalar usual.
- Encuentra P ortogonal de forma que $P^t A P$ sea diagonal. Calcula A^{2024} .

3. En el espacio afín \mathbb{R}^3 consideramos la recta r que pasa por $P = (1, 1, 1)$ y con vector director $v = (a, 1 - a, 2 - a)$, y sea π el plano con ecuación cartesiana $x - y + z = 6$ (respecto de el sistema de coordenadas usual).

- Encuentra un valor de a para el que r es paralela a π .
- Encuentra una recta s que sea perpendicular a π y que pase por P . Escribe las ecuaciones cartesianas de s .
- Dependiendo del valor de a , calcula la distancia de r a π .

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Encuentra la descomposición de rango pleno de A .
- Calcula A^\dagger , la inversa generalizada de A .
- Para $b = (1, 1, 1, 1)$, calcula la solución mínimo cuadrática de norma mínima del sistema $Ax = b$.