Convocatoria ordinaria. Junio 2024

Álgebra. Grado en Estadística.

Apellidos, Nombre: ____Grupo: ________

1. Responde de forma razonada a las siguientes questiones.

   a. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $m < n$, entonces f no puede ser inyectiva.

   b. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea X un conjunto de elementos de V que son ortogonales dos a dos. Demuestra que el cardinal de X es menor o igual que n.

   c. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con n un entero positivo, de forma que $f(1)$ es no nulo. Sea A la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Demuestra que A tiene inversa a la izquierda.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -2z)$.

   a. Encuentra la matriz asociada a f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$, a la que llamamos A Calcula la forma escalonada reducida por filas de A.

   b. Encuentra el núcleo de f. Demuestra que el núcleo de f es ortogonal al espacio generado por las filas de A respecto al producto escalar usual.

   c. Encuentra P ortogonal de forma que P^tAP sea diagonal. Calcula A^{2024}.

3. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ cosideramos la recta r que pasa por $P = (1,1,1)$ y con vector director $v = (a, 1-a, 2-a)$, y sea π el plano con ecuación cartesiana $x - y + z = 6$ (respecto de el sistema de coordenadas usual).

   a. Encuentra un valor de a para el que r es paralela a π.

   b. Encuentra una recta s que sea perpendicular a π y que pase por P. Escribe las ecuaciones cartesianas de s.

   c. Dependiendo del valor de a, calcula la distancia de r a π.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a. Encuentra la descomposición de rango pleno de A.

   b. Calcula $A^\dagger$, la inversa generalizada de A.

   c. Para $b = (1,1,1,1)$, calcula la solución mínimo cuadrática de norma mínima del sistema $Ax = b$.