Analisi 1

Mattia Marini

12.09.22

Indice

Teoremi e Assiomi

Formule

Incomprensioni

Definizioni

1 Introduzione

Romeo Brunetti(progesssore): *romeo.brunetti@unitn.it*
Valentino Abram(esercitatore): *valentino.abram@unitn.it*

1.1 Argomenti corso

- Continuità
- Derivabilità
- Integrabilità

1.2 Argomenti esercitazioni

- Esercizi per casa
- Esercizi Ddi autovalutazione

1.3 Moodle

Tutto ciò che viene affrontato sta sul sito **moodle**. Ci si arriva da esse3

1.4 Libri di testo

- Canuto e Tabacco - Pearson - Analisi 1

1.5 Esami

- Solo scritti
- 2 esami preliminari (5 novembre, 21 dicembre) + 5 scritti annuali
- Se si passa primo preliminare non si passa NON si può fare il secondo
- Se entrambi i preliminari vanno bene si può decidere di accettare un voto che è media pesata fra questi due anziche fare i 5 esami canonici
- 15 domande a risposta multipla con 2 ore di tempo
- Ogni esercizio vale 2 punti, **risposta errata = -0.4**
- Portare **carta di identità**
- Scrivere nome cognome e matricola su foglio di bella
- Sono concessi **talvolta** i formulari: 1 foglio A4 con tips

2 Insiemistica

Per dare una definizione di insieme rigorosa serve matematica molto complessa. Noi useremo definizione ”ingenua”

2 definizioni di insieme
- Per elenco: enumero nomi oggetti
- Per proprietà: es. tutti gli studenti unitn mancini

Per elenco:

$$A = \{b, \beta, A, Brunetti\}$$

$\boxed{\text{OSS: le ripetizioni non contano: } \{a, a, a, b, b, b\} = \{a, b\}}$

Per proprietà:

$$A = \{\text{tutti gli studenti mancini}\}$$

2.1 Simboli

2.1.1 Appartiene

A sinistra va l'elemento, a destra l'insieme

$$\underbrace{b}_{elemento} \in \underbrace{A}_{insieme}$$

2.1.2 Contenuto

B è contenuto o uguale a A

$$B \subseteq B$$

2.1.3 Strettamente contenuto

A è contenuto ma diverso da B

$$A \subsetneq B$$

2.1.4 Unione

$$A \cup B = \left\{ x \underbrace{:}_{\text{tale che}} \quad x \in A \underbrace{\text{ oppure }}_{V} x \in B \right\}$$

2.1.5 Intersezione

$$A \cap B \{x : \quad x \in A \text{ e } x \in B\}$$

2.1.6 Differenza

$$A \setminus B \{x : \quad x \in a \text{ e } x \notin B\}$$

2.1.7 Differenza simmetrica

$$\begin{aligned} A \triangle B &= A \cup B \\ &= \{x : \quad x \in A \text{ XOR } \} \\ &= \{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \end{aligned}$$

2.2 Insieme delle parti

Dato un insieme A si indica con P(A) l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A (compresi l'insieme vuoto e A stesso)

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$P(A) = \{\{1, 2, 3\}, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

OSS: L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme

OSS: Se un elemento di un insieme è un insieme, questo va trattato come insieme

2.3 Prodotto cartesiano

Si dice prodotto cartesiano e di indica con $A \times B$ l'insieme delle coppie (a,b) in cui $a \in A$ e $b \in B$ ordinate

Esempio:

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 4\}$$
$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

2.4 Funzioni fra insiemi

Consiste di 3 elementi:

- Insieme di partenza A
- Insieme di arrivo B
- Legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza A associ un unico elemento dell'insieme di arrivo B

$$f : A \to B \quad \underbrace{f\left(\underbrace{a}_{\text{elemento di A}}\right)}_{\text{Elemento di B}}$$

NB: Affinchè f possa essere definita una funzione, devono essere collegati tutti gli elementi di A e lo stesso elemento in A non può collegarne due diversi in B

2.5 Proprietà delle funzioni

2.5.1 Iniettive

$f : A \to B$ è iniettiva se ad ogni coppia di elementi distinti di A associo una coppia di elementi distinti di B

$$a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Stringi stringi *non esistono elementi distinti che "puntano" allo stesso*

2.5.2 Surgettive

$f : A \to B$ è surgettina se ad ogni elemento di B ne è associato almento uno in A

$$\forall b \in B \; \exists \; a \in A : f(a) = b$$

Stringi stringi *ogni elemento di B deve essere puntato da almeno un elemento di A*

2.5.3 Bigettive

$f : A \to B$ è bigettiva (o corrispondenza biunivoca) se è sia surgettina che iniettiva
NB: Se f è bigettiva allora $|A| = |B|$

2.5.4 Invertibili

$f : A \to B$ è invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

oppure

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

$$\boxed{\text{NB: } f : A \to B \text{ è invertibile se e solo se f è bigettiva}}$$

2.6 Insiemi numerici

- $\mathbb{N}$ numeri naturali $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathbb{Z}$ numeri interi $\{0, +1, -1, +2, -2\}$
- $\mathbb{Q}$ numeri razionali $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right\}$ $\quad \frac{m}{q} \quad$ con $q \neq 0$
- $\mathbb{R}$ numeri reali $\left\{\sqrt{2}, \right\}$
- $\mathbb{C}$ numeri complessi

2.7 Esempi funzioni

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n + 3$$

Iniettiva ma non biettiva(0,1,2 non vengono usati)

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = n + 3$$

Iniettiva biettiva e dunque invertibile

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n^2$$

Iniettiva ma non suriettiva

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = n^2$$

2.8 Immagine e controimmagine

L'i mmagine di un un sottoinsieme C di A è l'insieme dei punti di B collegati da una funzione $f A \to B$

$$I_B = \{f(a) : a \in A\}$$

La controimmagine di un sottoinsieme D di B è l'insieme dei punti di A le cui frecce arrivano in D

$$I_A^{-1} = \{a \in A : f(a) \in B\}$$

2.9 Esteremi superiori ed inferiori di un insieme

Definizione 1: *Estremi superiori e inferiori*

Sia $A \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0$ L'estremo superiore di A si indica con supA e vale:

- $+\infty$ se A non è limitato superiormente
- Il minimo dei maggioranti di A se è limitato superiormente

NB: supA e infA esistono sempre! Esempi:

- $(3, 7]$ sup=7 inf=3 min non esiste max=7 i

Incomprensione - 09:43:11

Teorema 1: *Esistenza estremo superiore*

Se $A \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$ allora supA esiste.

Dimostrazione:

- Se A non è limitato superiormente allora per definizione supA= $+\infty$
- Se A è superiormente limitato l'insieme B dei suoi maggioranti non è vuoto
- Visto che B è "tutto a destra" di a allora esiste un elemento C separatore (assioma di continuità)
- $$a \leq c \forall a \in A \quad \text{(c è maggiorante)} \ \to c \in B$$
  $$c \leq b \forall b \in B \text{ (c è minorante di B)}$$

2.10 Caratterizzare i sup e gli inf

- supA $= +\infty$ se $\exists a \in A$ t.c. $a \geq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$
- infA $= -\infty$ se $\exists a \in A$ t.c. $a \leq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$

- supA = L $\in \mathbb{R}$ se:
  - a è maggiorante
  - $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \epsilon$
    (se sposto di una quantità infinitesimale L verso A , trovo un elemento di A che è maggiore di L)

Esempi:

- $A = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$
  - infA=minA=0
  - supA=maxA=4

Definizione 2: *Grafico di una funzione*

Si dice grafico di f è il sottoinsieme del prodotto $A \times B$

$$graf(f) = \{(a,b) \in A \times B : f(a) = b\} \quad \text{per proprietà}$$

$$graf(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \quad \text{per elenco}$$

2.11 Intervalli

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Limitato con massimo e minimo

$$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

Limitato con minimo ma senza massimo

$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

Limitato ma senza massimo e minimo

3 Principio di induzione

Principio che non si può dimostrare e necessita di due ingredienti

- Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$
- P_n = affermazione che contenga al suo interno un paramentro$n \in \mathbb{N}$ che sia vera o falsa

Esempi:

- $n^2 = n + 6$ →vera solo per $n = 3$
- $2^n \geq n + 6$ →vera per $n \geq 4$ →necessita principio di induzione

- Se A contene n elementi allora $P(a)$ contiene 2^n elementi

Principio di induzione consiste in due passi fondamentali:

- *Passo base*Supponiamo che l'affermazione P_0 sia vera
- *Passo intuitivo*Per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera
- Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

NB: il punto di partenza **conta**

- *Passo base* Supponiamo che l'affermazione P_{2022} sia vera
- *Passo intuitivo* Per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera
- Allora P_n è vera $\forall n \in [2022, \infty]$. Devo controllare manualmente che sia vera anche per $[0, 2022]$

NB: la dimostrazione procede come cascata del domino

- *Passo base* Supponiamo che l'affermazione P_{2022} sia vera
- *Passo intuitivo* Per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera $\forall n \geq 1$
- Dimostrazione non procede perchè paso base non vale per n=0

3.1 Dimostrazione 1

Dimostrazione che $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

- *Passo base* Verifico che P_0 è vera $\rightarrow$basta sostituire $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Visto che P_n è vera per *hp* scrivo che

$$\underbrace{[0 + 1 + 2 + 3 \ldots + n] + (n+1)}_{\text{somma dei primi n+1 numeri}} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

- Raccolgo a destra e ottengo

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

In alternativa posso usare il metodo di gauss per verificare questa hp. (Divido i numeri da 0 a n in due e li sovrappongo al contrario)

3.2 Dimostrazione 2

Dimostrazione che $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- *Passo base* $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0$
- $$\underbrace{\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots n^2\right]}_{\text{Ho dimostrato quanto vale in passo base}} (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$f(n) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^2$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$
$$(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) = (n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

- Applico algebra e dimostro che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.3 Dimostrazione 3

Dimostrazione che $\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

- *Passo base* $1 = \frac{a-1}{a-1}$
- $$\left[1 + a + a^2 \dots a^{k+1}\right] = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + (a)^{n+1}$$

3.4 Dimostrazione 4

Dimostrazione che $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- *Passo base verificato* $2^0 \geq 0$
- $$2^{n+1} \geq n + 1 \to 2 \cdot \underbrace{2^n}_{\geq n} \geq n + 1$$
$$2 \cdot 2^n \geq 2n \text{ dato che } 2^n \geq n \text{ per hp}$$

- Verifico che $2n \geq n + 1 \forall \mathbb{N} \in [1, \infty]$ i

3.5 Disuguaglianza di bernulli

Formula 1: *Disuguaglianza di Bernoulli*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x > -1$$

- *Passo base verificato*
- *Passo induttivo*

$$\underbrace{(1+x)^{n+1}}_{(1+x)^n(1+x)} \geq 1 + x\,(n+1)$$

4 Proprietà dei numeri reali

- Proprietà algebriche
- Proprietà ordinamento
- Assioma di continuità

4.1 Proprietà algebriche somma

- Proprietà commutativa $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- Proprietà associativa $(a+b)+c=a+(b+c)\,\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
- Esistenza elemento neutro $\exists 0 \in \mathbb{R}$ t.c $a+0=a$
- Esistenza elemento opposto $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$ t.c.$a+b=0$

4.2 Proprietà algebriche prodotto

- Prorpietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a \forall a,b \in \mathbb{R}$
- Proprietà associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
- Esistenza elemento neutro $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.c $a \cdot 1 = a$
- Esistenza elemento opposto $\forall a \in \{\mathbb{R} - \{0\}\} \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 0$
- Proprietà distributiva $a\,(b+c) = ab + bc$

4.3 Proprietà ordinamento

- Riflessiva se $x \leq x$
- Antisimmetrica se $x \leq y$ e $x \geq y$ alora $x = y$
- Transitiva se $x \leq y$ e $y \leq z$ alora $x \leq z$
- se $y \leq x$ allora $zy \leq zx \quad \forall z \in \mathbb{R}^+$

4.4 Assioma di continuità

Assioma 2: *Assioma di continuità*

Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti dei numeri reali. Supponiamo che ogni elemento di A sia minore o uguale a B. Per quando i due insiemi siano vicini esiste almeno un numero reale che stia fra a e b ossia:

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$$

Se C appartiene sia ad A che a B questo elemento è unico NB: l'assioma di continuità vale per i numeri reali $\mathbb{R}$ ma non vale per i razionali $\mathbb{R}$ ad esempio con i due insiemi seguenti

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 e x^2 < 2\right\} \tag{1}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 e x^2 > 2\right\} \tag{2}$$

Unico elemento separatore è $\sqrt{2}$, numero che è reale

NB: c può essere unico nel caso di insiemi che hanno come intersezione c stesso ma anche in insiemi con intersezione vuota: es R^- e R^+

Definizione 3: *Densità degli insiemi*

Siano A e B insiemi non vuoti. Si dice che A è denso in B se per ogni elemento $b_1, b_2 \in B$ esiste un elemento in A tale che $b_1 \leq a \leq b_2$

Definizione 4: *Maggiorante e minorante*

Si dice che un numero k reale è un maggiorante del sottoinsieme A se $k \geq a \forall a \in A$
Si dice che un numero k reale è un minorante del sottoinsieme A se $k \leq a \forall a \in A$

NB: maggioranti e minoranti non devono esistere necessariamente ad esempio in $\mathbb{R}^+$ o in $\mathbb{N}$ non esiste maggiorante

NB: se esistono, maggioranti e minoranti non sono unici

Definizione 5: *Insiemi limitati superiormente/inferiormente*

Dato un insieme A non vuoto questo di dice limitato superiormente su esiste un suo maggiorante
Dato un insieme A non vuoto questo di dice limitato inferiormente se esiste un suo minorante
Dato un insieme A non vuoto questo di dice limitato se esiste un suo maggiorante e un suo minorante

$$A \in \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \text{ è limitato se e solo se } \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a| \leq k \forall a \in A$$

Definizione 6: *Massimo/minimo insieme*

Sia $A \in \mathbb{R}$ non vuoto si dice che $M \in \mathbb{R}$ è massimo di A e si indica con $M = max\left(A\right)$ se:

- $a \leq M \quad \forall a \in A$ ossia M è un maggiorante
- $M \in A$

NB: se un insieme ha massimo o minimo, questi sono necessariemente unici

5 Polinomi

$P\left(x\right)$ nella variabile x di grado k è un oggetto del tipo

$$p\left(x\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$$

5.1 Operazioni polinomi

5.1.1 Somma Polinomi

Considero $P\left(x\right)$ e $Q\left(x\right)$, rispettivamente di grado n e m con $n \leq$

- Completo $P\left(x\right)$ i modo tale che abbia esponenti fino a m

$$P\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k$$

- Somma è uguale a:

$$\left(p + q\right)\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k + b_k\right) x^k$$

$$Q\left(x\right) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

5.1.2 Moltiplicazione

Dato un polinomio $P\left(x\right)$ e un fattore $k \in \mathbb{R}$

5.1.3 Moltiplicazione fra polinmoni

Praticamente applico proprietà distributiva

5.2 Divisione fra polinomi

Dato $P(x)$ e $Q(x)$ con $Q(x) \neq 0$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

> **Teorema 3:** *Divisione fra polinomi*
>
> Dati due polinomi $P_1(x), P_2(x)$ di grado n e m con $n \geq m$ esistono 2 polinomi $Q(x)\, e R(x)$ tali che
> $$P_1(x) = P_2(x)\, Q(x) + R(x)$$
> Il grado di R è strettamente minore del grado di P_2

5.2.1 Algoritmo standard divisione

- Scrivo polinomio completo ($12x^3 + 0x^2 + x + 6$)
- Divido grado massimo di $(P(x))$ per grado massimo di $Q(x)$
- Moltiplico risultato ottenuto e sottraggo con ultimo polinomio ottenuto a sx

Tabella 1: Divisione fra polinomi

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x + 3 & x^3 + 3x \\
\hline
x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0 & \underbrace{x^2}_{\text{Step 1}} \; \underbrace{-1}_{\text{Step 2}} \\
0 + 0 - x^3 + 0 + x - 3 & \\
0 + 0 - x^3 + 0 + -3x + 0 & \\
\underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 4x + 3}_{\text{Resto } R(0)} &
\end{array}$$

5.2.2 Algoritmo di ruffini

Algoritmo utilizzabile solo se il divisore è di grado 1, nella forma $D(x) = ax+c$ con $a = 1$

- Scrivo polinomio da dividere completo in alto
- Scrivo opposto termine noto divisore in basso a sinistra
- Riporto il primo termine del polinomio da dividere
- Moltiplico fila in basso per termine a sinistra
- Sommo fila 1 con fila due
- Resto è cella in basso a destra

Tabella 2: Teorema di ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ \underbrace{1}_{\text{opposto termine noto divisore}} & & 1 & 1 & 5 \\ \hline & \underbrace{1}_{\text{riporto}} & 1 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\frac{x^3+4x+1}{(x-1)} = \left(x^2+x+5\right) + \frac{6}{(x-1)}$$

Teoremi utili:

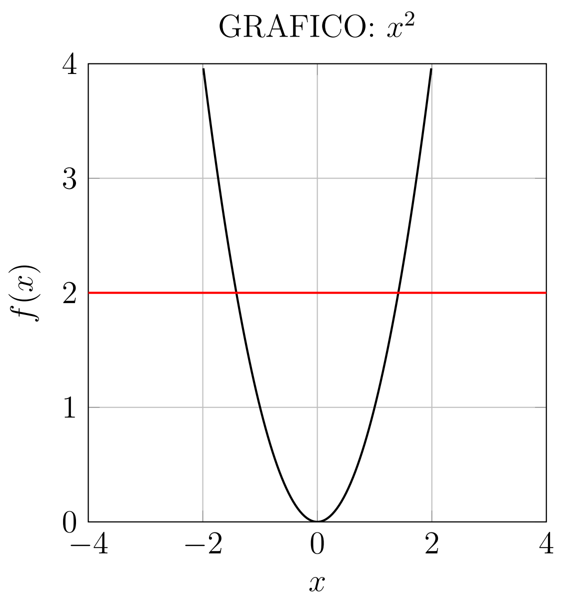
Teorema 4: *Divisione per polinomio di grado 1*

Dati due polinomi $P(x)$ e $Q(x) = x - c$ condizione necessaria e sufficiente affinchè $P(x)$ sia divisibile per $Q(x)$ è che $P(c) = 0$, in quanto posso scrivere $P(x)$ come $(x-c)\cdot(\dots)$

Definizione 7: *Radice di un polinomio*

Definizione: Se a e tale per cui $P(a) = 0$, a viene detto **radice** del polinomio $P(x)$

Esempio 2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- Non è iniettiva
- Non è surgettiva

5.3 Dimostrazione teorema fondamentale dell'algebra

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n, questo ammette al massimo n radici distinte

- Passo base: $n = 0$ quindi $P(x) = k$ con $k \neq 0$
- Passo induttivo: Supponiamo che il polinomio $P(x)$ di grado $(n+1)$ sia divisibile per $(x-a)$. $P(x)$ sarà del tipo:

$$P(x) = \underbrace{(x-a)}_{\text{Soluzione 1}} \underbrace{Q(x)}_{\text{Grado n per hp}}$$

- $P(x)$ ha dunque n+1 soluzioni

5.4 Polinomio irreducibile

Teorema 5: *Irriducibilità dei polinomi*

Un polinomio P a coefficienti reali di grado $x \geq 1$ è detto irriducibile se non esiste un polinomio D di grado n con $0 < m < n$ che divida esattamente P

NB: nei numeri reali i soli polinomi irreducibili sono quelli di grado 1 o di grado 2 con Δ negativo

NB: se i coefficienti del polinomio $p(x)$ sono numeri interi, le sue radici vanno cercate fra i sottomultipli interi del termine noto di $P(x)$.

6 Funzioni e grafici

6.1 Grafico di una funzione

NB: Cartesio era un bastardo e bullizzava Fermat

6.2 Definizione operative

6.2.1 Iniettività

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha al massimo una soluzione
- In modo equivalente , f è iniettiva se il suo grafico incontra ogni retta parallela all'asse delle x al più in un punto

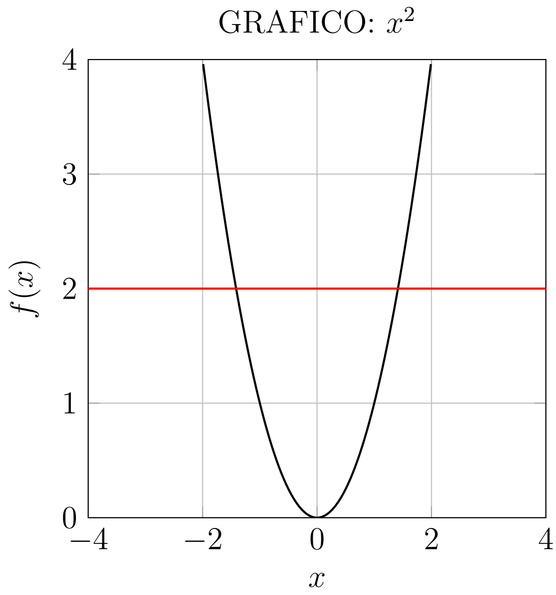
6.2.2 Surgettività

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione
- In modo equivalente, f è surgettiva se ogni retta parallela all'asse delle x incontra il suo grafico in almeno un punto

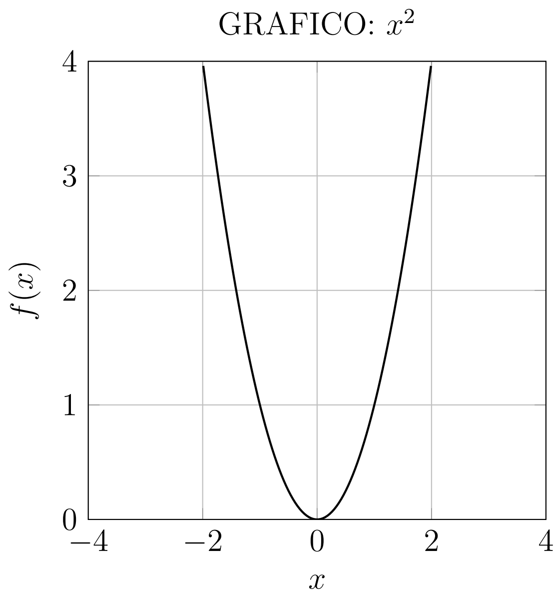
6.2.3 Esempi

Esempio 2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



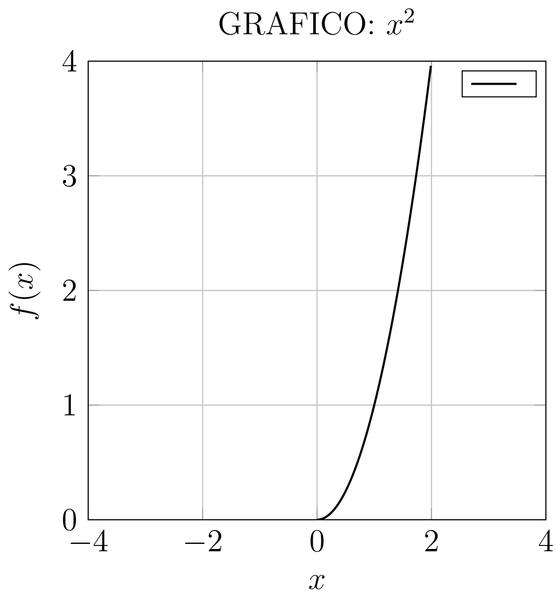
- Non è iniettiva
- Non è surgettiva

Esempio 2 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$



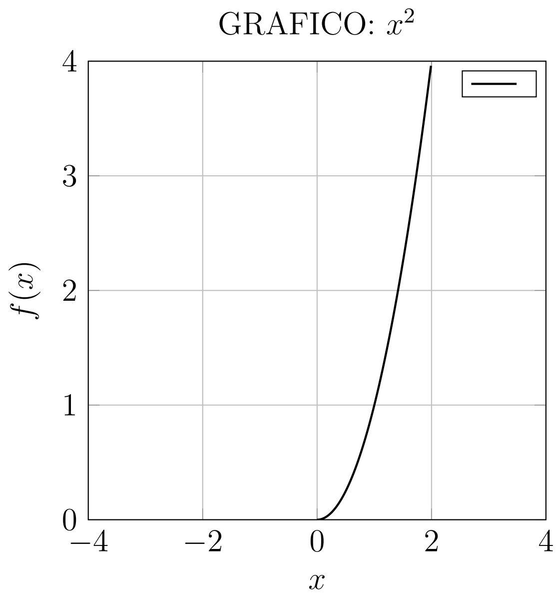
- Non è iniettiva
- E' suriettiva

Esempio 3: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$



- E' iniettiva
- Non è surgettiva

Esempio 3: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

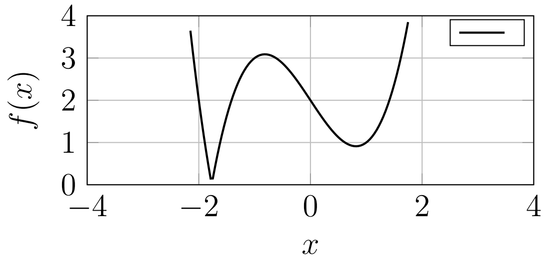


- E' iniettiva
- E' surgettiva

6.3 Operazioni sui grafici

- $f(x) \rightarrow f(x) + x$ traslazione in verticale (se c è positivo verso l'alto)
- $f(x) \rightarrow f(x+c)$ traslazione in orizzontale (se c è positivo verso sinistra)
- $f(x) \rightarrow -f(x)$ diventa speculare rispetto ad asse x
- $f(x) \rightarrow f(-x)$ diventa speculare rispetto all'asse y
- $f(x) \rightarrow |f(x)|$ ogni parte negativa diventa ribaltata verso l'alto
- $f(x) \rightarrow f(|x|)$ la parte del grafico con $x \geq 0$ viene riflessa rispetto all'asse y

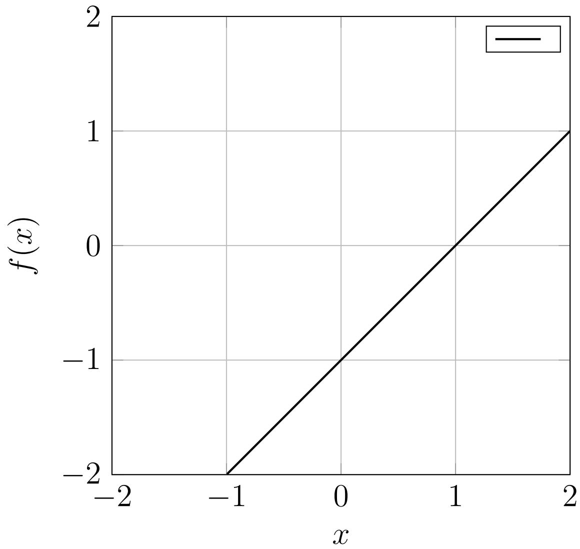
GRAFICO:

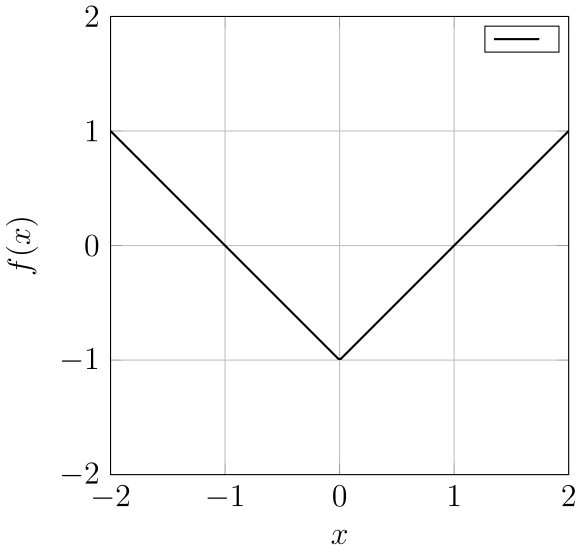


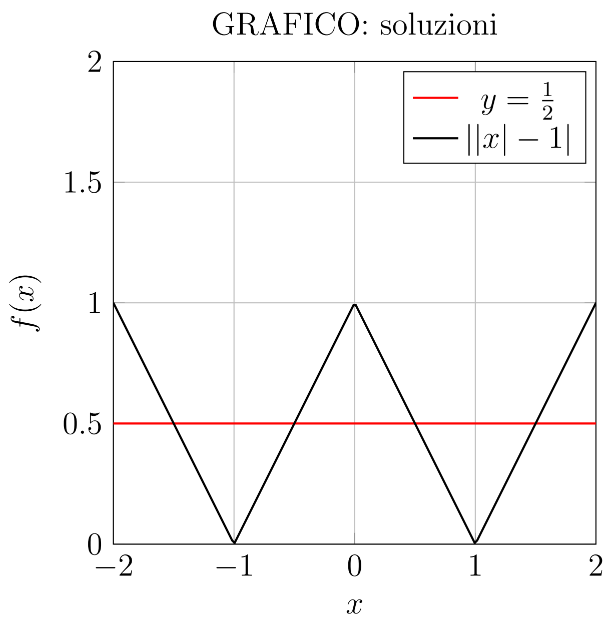
6.4 Risoluzione di equazioni per via grafica

Esempio 1:

$$||x| - 1| = \frac{1}{2}$$





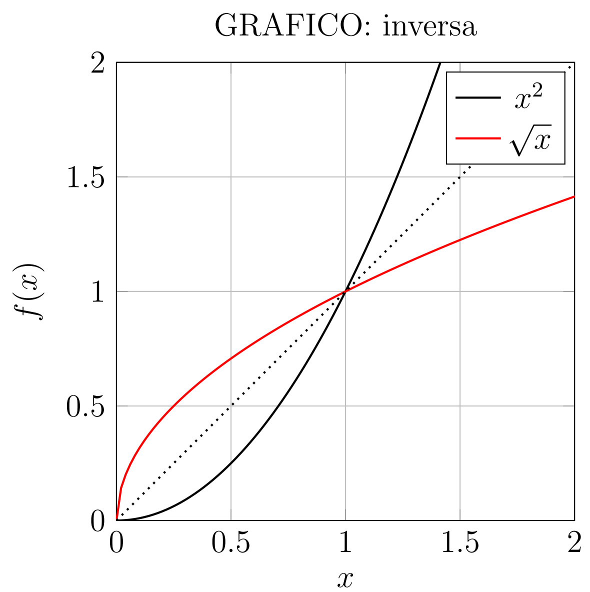


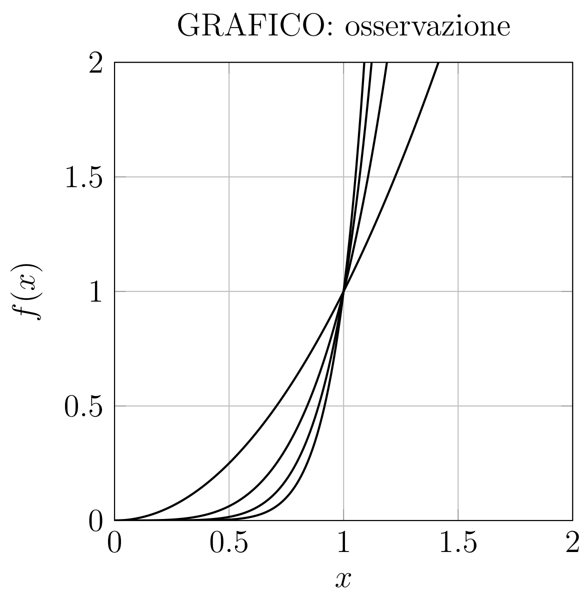
Esercizio: determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ quali sono le soluzioni dell'equazione

$$\left|(x+3)^3 - 2\right| = \lambda$$

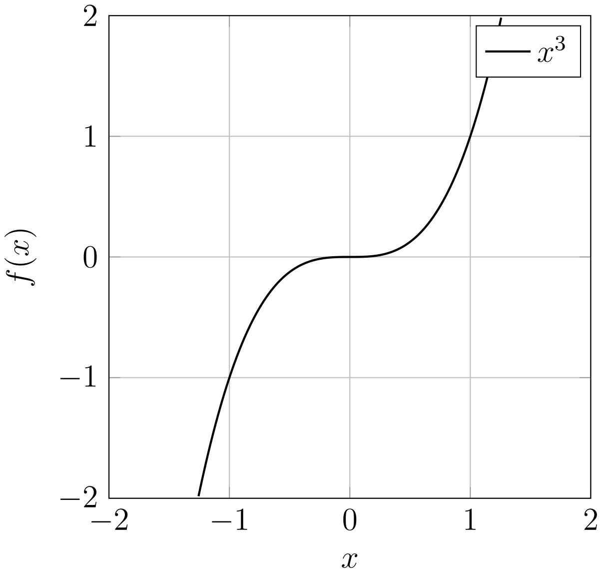
7 Potenze, esponenziali, funzioni trigonometriche

7.1 Potenze pari



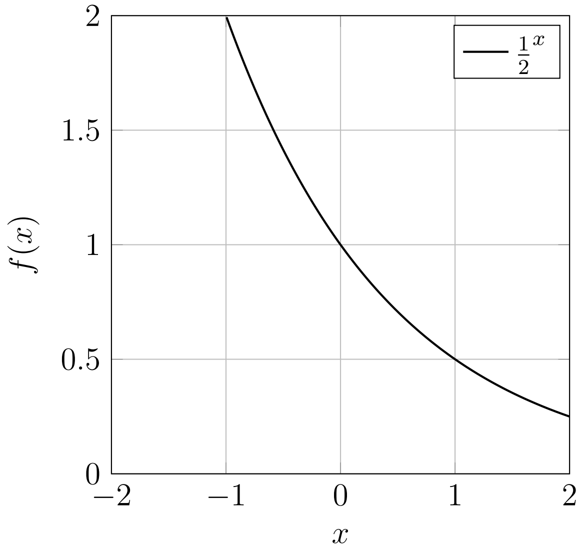


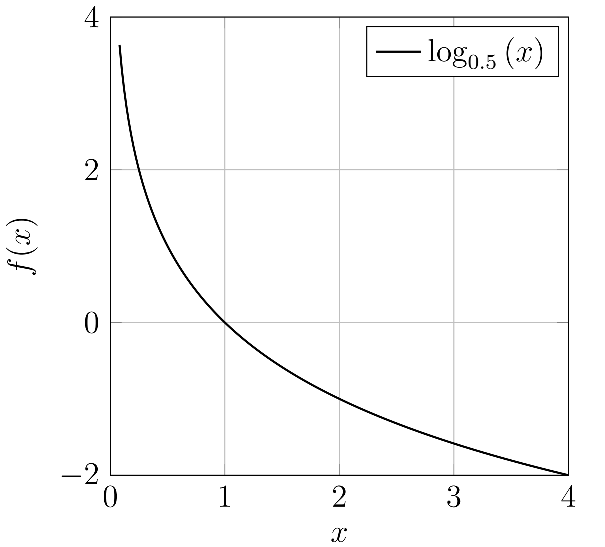
7.2 Potenze dispari



OSS: se una funzione $f(x)$ è iniettiva e $a = b$ allora $f(a) = f(b)$. Se $a > b$ allora $f(x) > f(b)$ se f è crescente

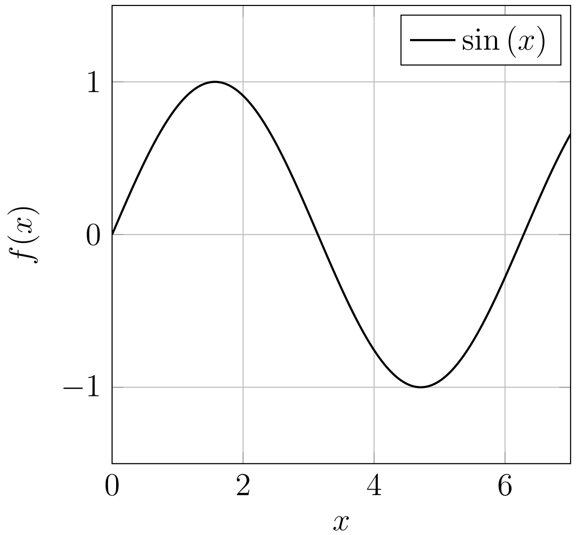
7.3 Esponenziale e logaritmo

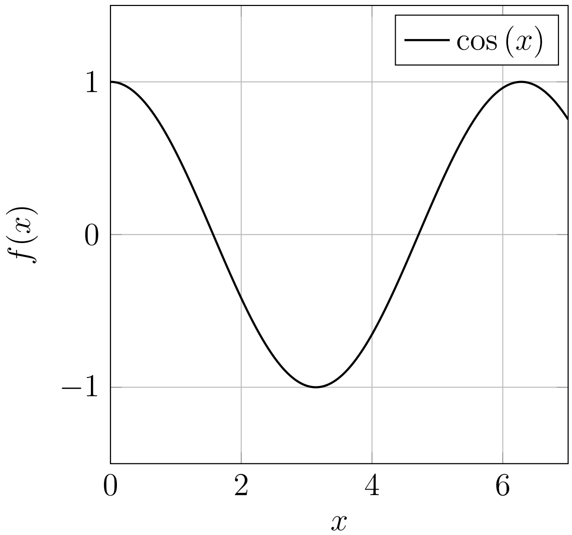


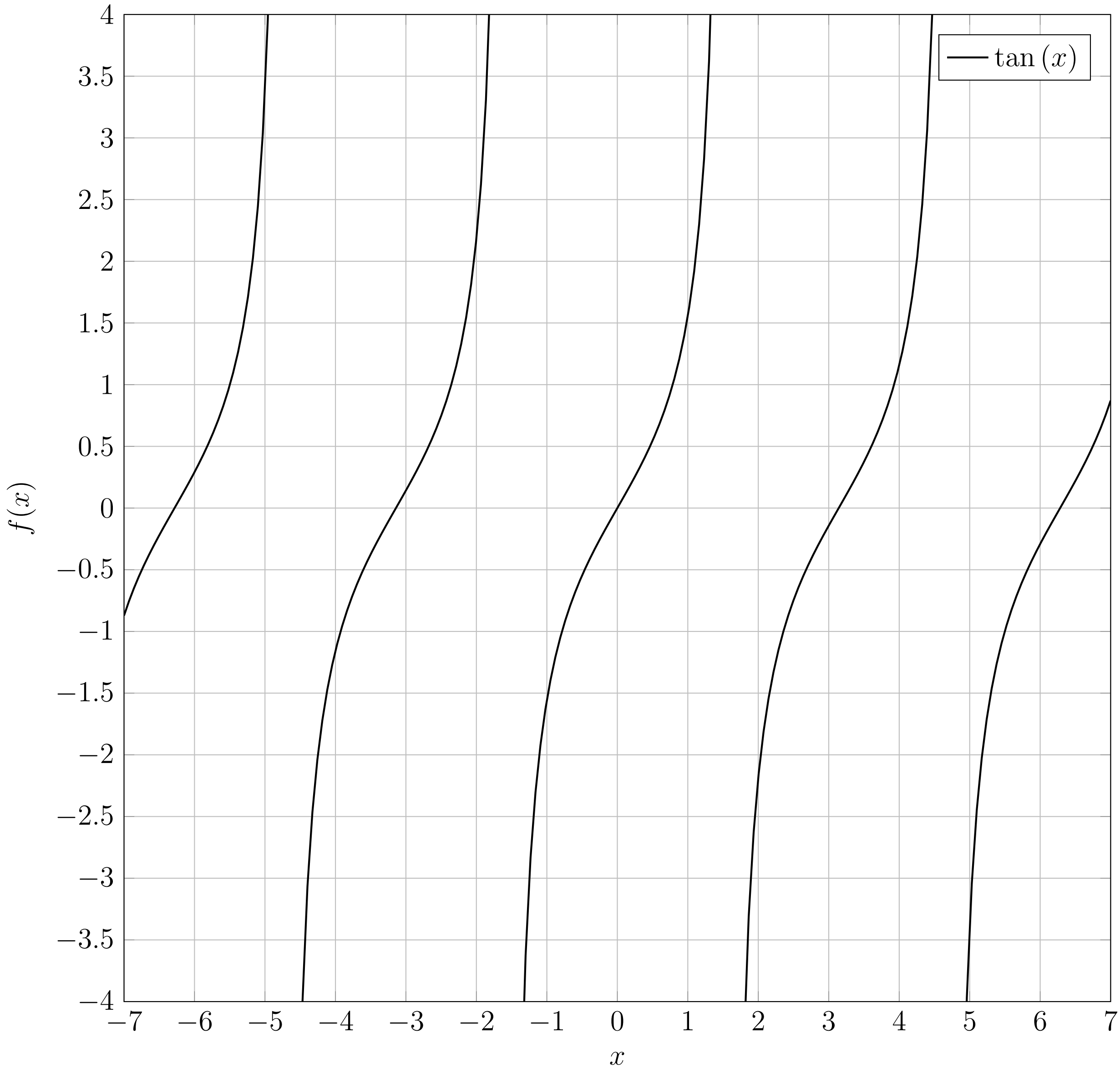


$$e^x + e^y = e^{x+y} \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

7.4 Funzioni trigonometriche







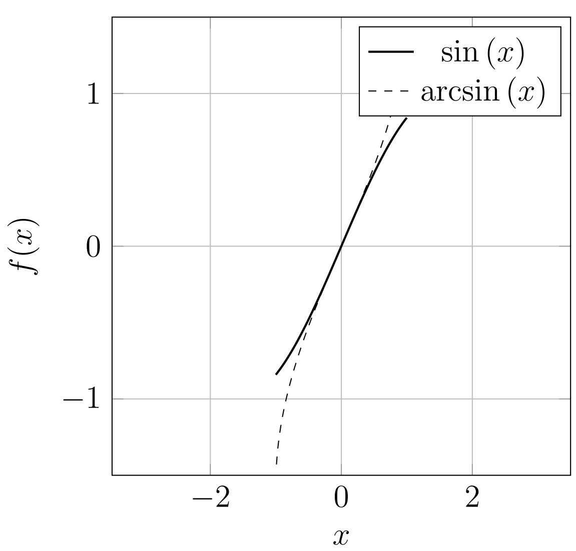
7.4.1 Inverto il seno

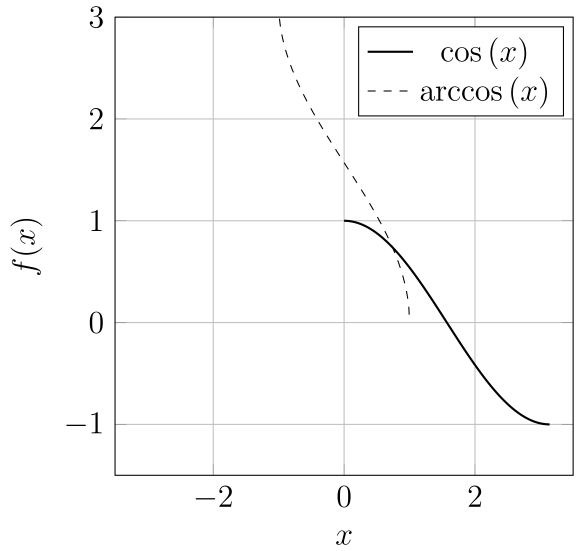
Il seno non è ne iniettivo ne surgettivo a meno che non lo consideri come:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

Il coseno non è ne iniettivo ne survettivo a meno che non lo si consideri come:

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$$



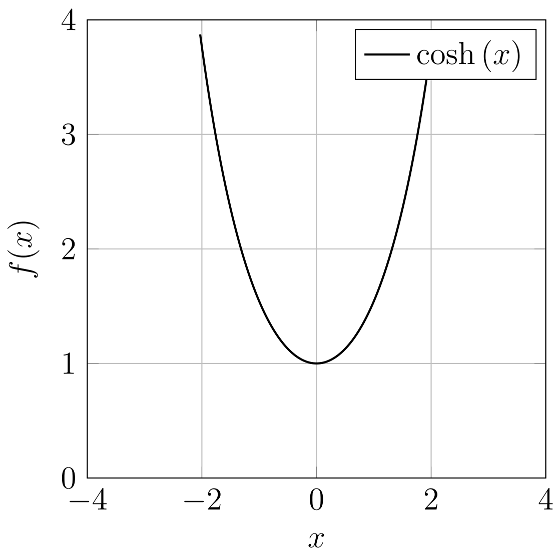


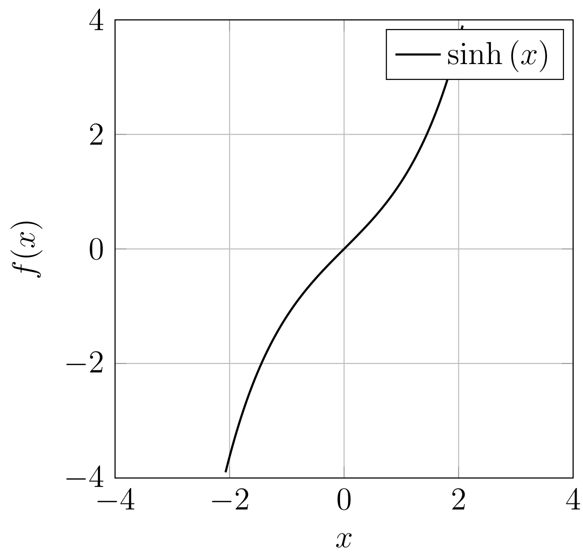
7.5 Funzioni iperboliche

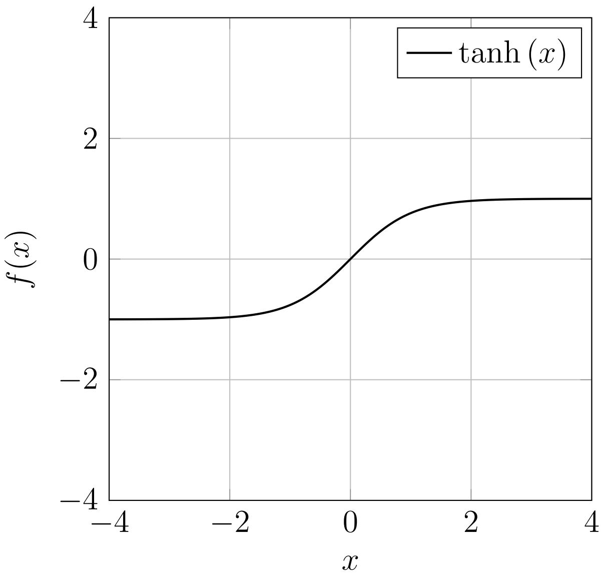
$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \to pari$$

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to dispari$$

$$\tanh = \frac{\sinh}{\cosh} \to dispari$$







7.6 Formule trigonometria iperbolica

Queste formule sono molto simili alle formule della trigonometria tradizionale

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

Formula fondamentale della trigonometria

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^2 + e^{2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^2 + e^{2x} + 2}{4}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

8 Esercizi

8.1 Esercizio 1

Teorema 6: *Insiemi limitati*

Se un insieme $S \neq \emptyset$ è limitato superiormente/inferiormente esso ammette estremo superiore/inferiore

Dato un un insieme S limitato inferiormente ma non superiormente e un insieme L costituito da tutti i minoranti di S allora

$$\sup L \text{ esiste e } \sup L = \ \inf A$$

- L'insieme S denota tutti i maggioranti di L

$$y \geq x \quad \forall y \in S, x \in L$$

- Vito che L ammette maggioranti, esso è limitato superiormente e per il teorema 8.1 ammette estremo superiore $\sup L = \beta$
- Visto che l'insieme S denota i maggioranti di L, allora

$$\text{se } x < \beta \rightarrow \text{ x non è maggiorante } \rightarrow x \notin S$$

al contrario, tuttavia

$$\text{se } x \in S \rightarrow x \geq \beta \rightarrow \beta \text{ è minorante di } S$$

- Se prendo $\epsilon > \beta$ so che questa non appartiene a L in quanto è più grande di un suo maggiorante, dunque

$$\text{se } \epsilon > \beta \rightarrow \epsilon \notin L \rightarrow \text{ non è minorante di S}$$

- Dunque β:
  1. E minorante di S
  2. Se $\epsilon > \beta \rightarrow \epsilon$ non è minorante di S

β è dunque estremo inferiore di S

$$\text{supL} = \text{ infS } = \beta$$

8.2 Esercizio 2

Dato l'insieme

$$A = \left\{ a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

si determini limite superiore, inferiore, massimo e minimo se presenti.

- Scrivo qualche termine

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, a_4 = \frac{1}{17}$$

- Osservo che

$$|a_n| > |a_n + 1| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $|a_n| = \left|\frac{\cos(\pi n)}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$ in quanto $\cos(\pi n)$ è sempre uguale a ± 1
- Risolvo disequazione $\rightarrow$è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

- Visto che la successione decresce in valore assoluto posso affermare che

Estremo superiore	1
Estremo inferiore	$-\frac{1}{2}$
Massimo	1
Minimo	$-\frac{1}{2}$

8.3 Esercizio 3

Dato l'insieme

$$A = \left\{ a_n = \frac{N^2 - 5}{n^2 + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

si determini limite superiore, inferiore, massimo e minimo se presenti.

- Scrivo qualche termine

$$a_0 = \frac{5}{2}, a_1 = -\frac{4}{3}, a - 2 = -\frac{1}{6}, a_3 = \frac{4}{11}$$

- Noto che termini sono crescenti e lo verifico risolvendo la disequazione:

$$\frac{(n+1)^2 - 5}{(n+1)^2 + 2} > \frac{n^2 - 5}{n^2 + 2}$$

$$\frac{14n + 7}{(n^2 + 2)\left((n+1)^2 + 2\right)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Noto che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5}{n^2+2} = 1$ dunque è probabile che 1 costituisca l'estremo superiore. Verifico che ciò è vero nel seguente modo:
  - Ricordo definizione estremo: β è estremo superiore se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \text{ t.c. } x > \beta - \varepsilon$$

  - Se la disequazione seguente ha soluzione per almeno un $n \in \mathbb{N}$, allora vuol dire che esiste un $n \in A$ t.c. $a_n > \beta - \varepsilon$

$$1 - \varepsilon < \frac{n^2 - 5}{n^2 + 2}$$

$$n > (\text{ int }) \sqrt{\frac{7}{\varepsilon} - 2} + 1$$

  - La disequazione ha soluzioni per ogni valore positivo di ε e β è un <u>estremo superiore</u>

Estremo superiore	1
Estremo inferiore	$-\frac{5}{2}$
Massimo	no
Minimo	$-\frac{5}{2}$

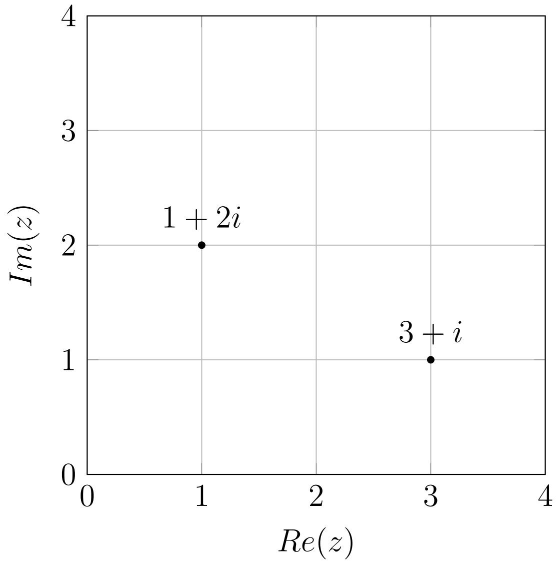
9 Numeri complessi

9.1 Forma cartesiana

Un numero completto è un oggetto del tipo

$$\underbrace{a}_{\text{Parte reale}} + \underbrace{b}_{\text{Parte immaginaria}} i$$

dove a e b sono numeri reali e i è un numero tale che $i^2 = -1$



- L'asse y è detta asse immaginaria
- Un numero con parte i mmaginaria nulla è detto puro

9.2 Somme e differenze

Dati $z = a + bi, \quad w = c + di \quad \in \mathbb{C}$ la loro somma è data da:

$$(a + c) + (b + d)\, i$$

9.3 Prodotto

Si usa la proprietà distributiva per il fatto che $i^2 = -1$

$$z * w = (a + bi)\,(c + di) = ac + adi + bci + bd \underbrace{i^2}_{=-1}$$

9.4 Reciproco

Dato un numero $z \in \mathbb{C}$, al fine di calcolarne il reciproco $\frac{1}{z}$ posso razionalizzare, in modo da ottenere un numero in forma cartesiana

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

9.5 Divisione

Per effettuare una divisione fra numeri complessi trovo il reciproco del divisore e effettuo la divisione

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(ca+bd)}{a^2+b^2} + \frac{ad-^3}{a^2+b^2}i$$

9.6 Definizioni

Definizione 8: *Numeri coniugati*

Dato $z = a + bi$ si dice coniugato di z e si indica con $\overline{z}$ un numero uguale a

$$a - bi$$

- $z * \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ quindi ho come conseqguenza che $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
-

Definizione 9: *Modulo numero complesso*

Dato $z = a + bi$ si dice il modulo di z il numero

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

10 Rappresentazione trigonometrica

Posso rappresentare il numero complesso $z = a + bi$ tramite coordinate polari, ossia angolo e distanza dall'origine

Ad esempio, per un $z \in \mathbb{C}$ che dista ρ dall'origine e con l'asse x crea un angolo di θ so che questo numero avra coordinate cartesiane

$$\rho\cos\theta + \rho\sin\theta$$

Se invece ho un $z \in \mathbb{C}$ di coordinate polari $\rho\cos\theta + \rho\sin\theta$ la rappresentazione cartesiana è

$$\begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{c}\right) & \text{se } -\frac{\pi}{2}\theta\frac{\pi}{2} \\ \arctan\left(\frac{b}{c}\right) + \pi & \text{se } \theta < -\frac{\pi}{2} \text{ o } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

10.1 Argomento di un numero complesso

L'argomento di un numero complesso è l'angolo che questo formerebbe con l'asse x se rappresentato in coordinate polari

10.1.1 Prodotto in forma trigonometrica

$$z = \rho\left(\cos\theta + \sin\theta\right) \qquad w = r\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$
$$zw = \cos\left(\theta + \alpha\right) + \sin\left(\theta + \alpha\right)$$

10.1.2 reciproco in forma trigonometrica

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\rho\left(\cos\left(-\theta\right) + \sin\left(-\theta\right)\right)}{\rho^2} =$$

10.1.3 Divisione in forma trigonometrica

$$\frac{z}{w} = z * \frac{1}{w} = \ldots = \frac{\rho}{r}\left[\cos\left(\theta - \alpha\right) + i\sin\left(\theta - \alpha\right)\right]$$

10.2 Forma esponenziale

Un numero complesso di coordinate polari (ρ, θ) è espresso nel seguente modo:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Formula di passaggio fra forma trigonometrica e esponenziale:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

10.3 Potenza di un numero complesso

Se $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

$$z^n = \rho^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)$$

Se $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Dimostrazione per induzione

$$z^{n+1} = z \cdot z^n = z\left(\rho^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)\right) = \rho^{n+1}\left\{\cos\left[\left(n+1\right)\theta\right] + i\sin\left[\left(n+1\right)\theta\right]\right\}$$

10.3.1 Esempio potenza

$$\left(1+i\right)^6$$

- Metodo 1 - faccio binomio di Newtoon - roba da matti

- Metodo 2 - passo a forma esponenziale $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^6 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^6 e^{i\frac{\pi}{4}6} = 8e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8i$$

$$(1+i)^{6000} = 2^{3000}e^{i\frac{\pi}{4}6000} = 2^{3000}$$

10.4 Radici dei numeri complessi

Definizione 10: *Radici dei numeri complessi*

Dato un numero complesso $a \in \mathbb{C}$, le radici complesse n-esimi sono tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = a$

NB: se $a \neq 0$ esistono sempre n numeri complessi z che verificano l'equazione $z^n = a$. Questi numeri coincidono con i vertici di un poligono regolare di n lati con centro nell'origine

Supponiamo che $a = re^{i\phi}$ e $z = \rho e^{i\theta}$.

$$z^n = a \to \rho^n e^{in\theta} = re^{i\phi}$$

Per soddisfare uguaglianza devo avere:

- Stesso modulo $\rho^n = r$
- Stesso argomento $n\theta = \phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ossia rispettivamente

- $\rho = \sqrt[n]{r}$
- $\theta = \frac{\phi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}$

NB: ottengo valori diversi solo per $k \in [0, n-1]$

Incomprensione - 11.22.37

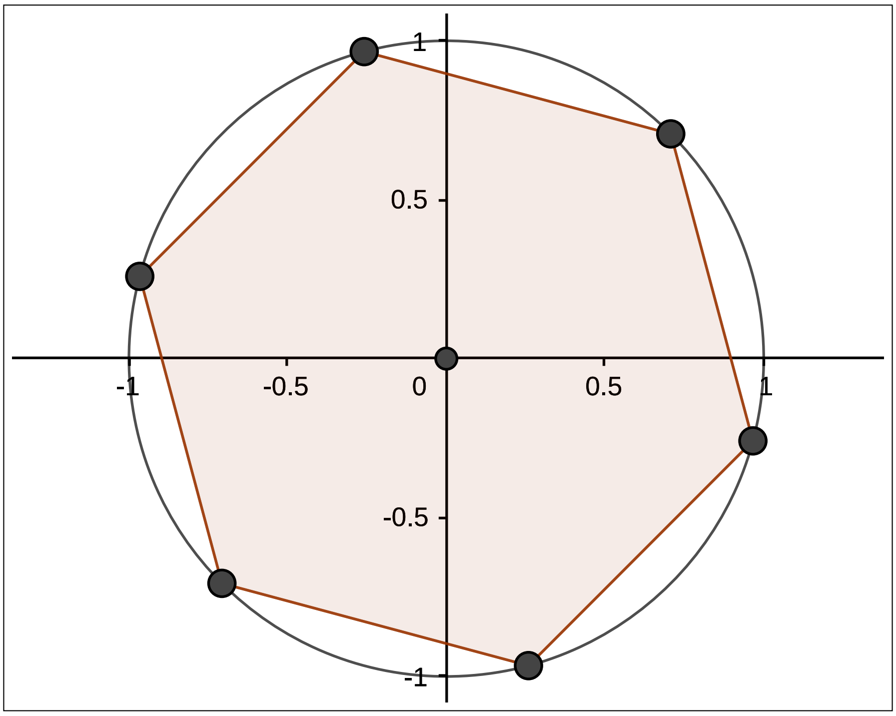
Esercizio *Trova le radici seste di $-i$*

- Ciò corrisponde a risolvere l'equazione

$$z^n = -i$$

- $-i = 1e^{\frac{3}{2}\pi}$
- Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ 6\phi = \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \end{cases}$$



11 Il teorema fondamentale dell'algebra

Per polinomi a coefficienti reali $P(x)$ sapevamo che:

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} \ldots + c_1 x^1 + c_0 \quad c_n \in \mathbb{R}$ polinomio di grado n a coefficienti reali. Ha al massimo n soluzioni.

Definizione 11: *Radice di un polinomio*

Dato un polinomio a coefficienti complessi$\alpha \in \mathbb{C}$ si dice radice di $P(z)$ se $P(\alpha) = 0$

Definizione 12: *Molteplicità radice*

Si diche che $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $P(x)$ di molteplicità $\mu \in \mathbb{N}$ se é è divisibile per $(x - \alpha)^{\mu}$

Per un polinomio a coefficienti complessi devi ridefinire il teorema fondamentale dell'algebra:

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} \ldots + c_1 x^1 + c_0 \quad c_n \in \mathbb{C}$ polinomio di grano n a coefficienti complessi. Ha esattamente n soluzioni

quindi

Teorema 7: *Teorema fondamentale dell'algebra*

Ogni polinimio $p(x)$ di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse eventualmente contando le rispettive molteplicità

Ogni polinomio a coefficienti complessi può essere scritto come prodotto di fattori di grado 1

$$P(z) = a_k x^k \dots a_1 x + a_0 = a_n (z - \alpha_1)^{\mu_1} (z - \alpha_2)^{\mu_2}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono radici $\in \mathbb{C}$ di $P(z)$

Teorema 8: *Radici complesse coniugate*

Sia $P(z)$ polinomio a coefficienti reali. Se $z \in \mathbb{C}$ è radice di $P(z)$ allora anche $\overline{z}$ è radice di $P(z)$

- Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di P anche $\overline{\alpha}$ è radice di P
- Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di P con moltepicità $\mu \in \mathbb{N}$ allora $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ è radice di P con molteplicità μ

Dimostrazione:

- $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad P(\alpha) = 0$ per hp.
- $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$ i

Incomprensione - 09:48:11

Ogni polinomio reale di grado n è prodotto di fattori di grado 1 e di fattori irreducibili di grado 2

- I fattori di grado dure rappresentano coppie di radici complesse coniugate eventualmente con molteplicità

Incomprensione - 10:00:29

12 Successione numeri reali

12.1 Frequenza variabili

Definizione 13: *Freqentemente*

Si dice che una variabile P_n + vera (o falsa) frequentemente se + vera per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$

Definizione 14: *Definitivamente*

Si dice che una variabile P_n è definitivamente se

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \quad P_n \text{ vera } \forall n \geq n_0$$

NB: se una variabile è vera definitivamente lo è anche frequentemente. Ma non vale il contrario:

$$(-2)^2 \geq 7$$

- Vera frequentemente
- Falsa frequentemente
- Non è ne vera ne falsa definitivamente

12.2 Succesione di numeri naturali

Definizione 15: *Successione di numeri naturali*

E una funzione in cui l'insieme iniziale sono i numeri naturali e l'insieme finale sono i nueri reali

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

il termine n-esimo della succesione si indica con f_n

NB: la seguente non è una successione:

$$a_n = \frac{1}{n - 2022}$$

in quanto per $n = 2022$ risulta $\frac{1}{0}$ che non è definito, per questo usiamo una definizione più accomodante

Definizione 16: *Successione di numeri reali accomodante*

Consideriamo succeesione di numeri reali quelle che sono vere almento definitivamente, ossia che siano definite da un determinato indice n_0 in poi

Esempi:

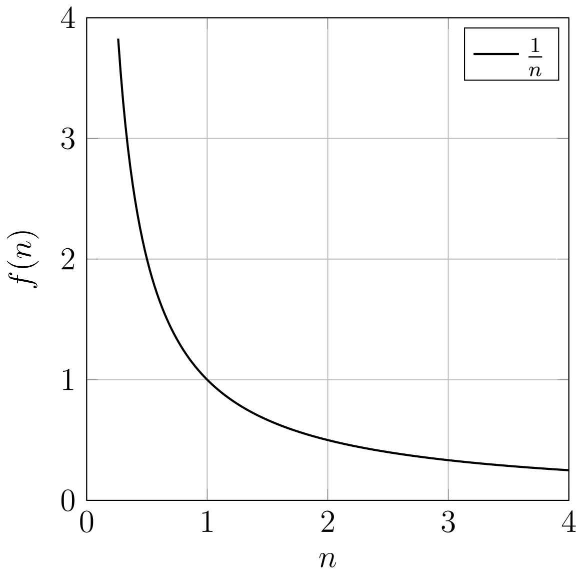
- $a_n = \frac{1}{n+5}$ vera in senso classico
- $b_n = \frac{1}{n-5}$ vera in senso accomodante per $n \geq 6$
- $c_n = \sqrt{n - 2022}$ vera in senso accomodante per $n \geq 2022$
- $b_n = \sqrt{2022 - n}$ non è una successione $\to \nexists n_0$ t.c. b_n vera $\forall n \geq n_0$

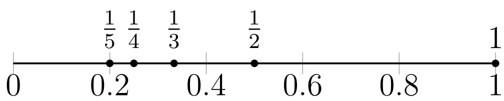
12.3 Rappresentazione di successioni

Posso rappresentare successioni come normali funzioni, quindi traite grafico

- Tramite grafico $(n, f(n))$

$$f(n) = a_n = \frac{1}{n}$$



- Sulla retta dei numeri reali: 

- Rapppresentazione dinamica: i mmagino di accendere una lampadina ogni tot secondi e in corrispondenza dell'accensione segno il valore della funzione

12.4 Limite di una successione

Una successione ha 4 possibilità:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ ossia $a_n \to l$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = l^+$ ossia ha $a_n \geq l$ definitivamente
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = l^-$ ossia $a_n \leq l$ definitivamente
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ oscillando intorno al valore
- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ossia $a_n \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ossia $a_n \to -\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n$ NON esiste ossia a_n non ha limite

Definizione formale di limite

Definizione 17: *Limite infinito*

Si diche che $a_n \to +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a_m \text{ t.c. } a_m \geq M$$

ossia $a_m \geq M$ definitivamente

Si dice che $a_n \to -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a_m \leq M$$

ossia $a_m \geq M$

Definizione 18: *Limite se tenda a numero finito*

Si dice che $a_n \to l \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon \geq 0 \quad l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon$$

ossia

$$|a_n - l| \leq \epsilon \quad \underline{\text{definitivamente}}$$

12.4.1 Errori comuni

- Se $a_n \to \infty$ allora è definitivamente crescente. NO: potrei avere una successione che somma 2 e scende di 1 all'infinito
- Se $a_n \to 0$ allora tende o a 0^+ o a 0^-. NO: vedi $\frac{(-1)^n}{n}$
- Se a_n non è limitata superiormente allora $a_n \to \infty$. NO: vedi $(-2)^n$

12.5 Esempi

Esempio 1

$$a_n = n^2$$

Dimostriamo che $a_n \to \infty$ 2 casi:

- Se $M \leq 0 \to n^2 \geq M$ sempre
- Se $M \geq 0 \to n^2 \geq M \Leftrightarrow n \geq \sqrt{M}$

Esempio 2

$$a_n = \sqrt{n}$$

Dimostriamo che $a_n \to \infty$ 2 casi:

- Se $M \leq 0 \to \sqrt{n} \geq M$ sempre
- Se $M \geq 0 \to \sqrt{n} \geq M \Leftrightarrow n \geq M^2$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^a = \infty \quad \forall a \geq 0}$$

Esemipio 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = o^+$$

Devo verificare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad 0 < \frac{1}{n} \geq \epsilon$$

- $a < \frac{1}{n}$ definitivamente in quanto n è naturale
- $\frac{1}{n} \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq n$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \leq 0$$

Teorema 9: *Permanenza del segno*

Se $a_n \to l > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente
Se $a_n \to l < 0$ allora $a_n < 0$ definitivamente

Dimostrazione

12.6 Unicità del limite

Una successione ha sempre solo uno dei comportamenti descritti in subsec 12.4 Dimostrazione

- Supponiamo che uno stesso limite tenda a due cose diverse $a_n \to l_1$ e $a_n \to l_2$ con $l_1 \neq l_2$
- Per la definizione di limite il valore del limite deve ricadere in un intorno di l_1 e l_2. Se questi due intervalli sono sufficientemente piccoli e dunque non hanno punti in comune dovrei avere un punto che sta in due parti contemporaneamente. Ne concludiamo che l'ipotesi sia falsa

12.7 Teoremi sui limiti

Teorema 10: *Teorema del confronto a 2*

Siano a_n e b_n succesioni. Supponiamo che $a_n \geq b_n$ almeno definitivamente

- Se $b_n \to \infty$ allora $a_n \to \infty$
- Se $a_n \to -\infty$ allora $b_n \to -\infty$

Teorema 11: *Teorema del confronto a 3 (dei due carabinieri)*

Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ almeno definitivamente. Supponiamo che $a_n \to l \in \mathbb{R}$ e $c_n \to l \in \mathbb{R}$ allora $b_n \to l \in \mathbb{R}$

12.8 Errori comuni

- Supponiamo che a $a_n > b_n$ e $a_n \to l_1, b_n \to l_2$. Allora
$$l_1 > l_2$$
- Falso in quanto al limite non si conserva l'uguale. Vedi ad esempio:
$$a_n = \frac{2}{n} \quad b_n = \frac{1}{n}$$
nonostante i termini di a_n siano sempre il doppio di quelli di b_n il loro limite è lo stesso e vale 0. Posso in caso affermare che se $a_n > b_n$ allora $l_1 \geq l_2$

12.9 Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Teorema 12: *Somma, prodotto e divisione limiti*

Siano a_n e b_n successioni reali.

$$a_n \to l_1 \in \mathbb{R} \text{ e } b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$$

allora

$$a_n + b_n \to l_1 + l_2 \qquad a_n - b_n \to l_1 - l_2$$

$$a_n b_n \to l_1 l_2 \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \to l_1^{l_2}$$

A meno che non si cada in uno di questi 7 casi speciali:

$$+\infty - \infty \quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$0^0 \quad (+\infty)^0 \quad 1^{\pm\infty}$$

NB: nel caso della successione di tipo $\frac{a_n}{b_n}$ devo stare attento al modo in cui b_n tende a zero: può tendere a $a^+, 0^-$ o a 0

12.10 Forma indeterminata

Esempio 1

$$a_n = \underbrace{n^3}_{+\infty} + \underbrace{n^2}_{+\infty} \to +\infty$$

Esempio 2

$$a_n = \underbrace{n^3}_{+\infty} - \underbrace{n^2}_{+\infty} = \underbrace{n^2}_{\infty} \underbrace{(n-1)}_{+\infty - 1} \to +\infty$$

Esempio 3

$$a_n = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{0} \to +\infty$$

Esempio 4

$$a_n = 2^n$$

Dimostro con disuguaglianza di Bernoulli(sub 3.5):

$$2^n \geq n + 1$$

dunque visto che $n+1 \to \infty$ allora anche $2^n \to \infty$ per teorema del confronto a 2(teo 12.7)

Esempio 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(2^n + n!)}{n^2+3} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

in quanto al numeratore ho valoni finiti e al demonimatore valori infiniti. Posso applicare teorema dei dure carabinieri:

- $0 \leq \arctan(2^n + n!) \leq \pi$
- Diviso per n^2+3
$$0 \leq \frac{\arctan(s^n + n!)}{\underbrace{n^2+3}_{\to 0}} \leq \frac{\pi}{\underbrace{n^2+3}_{\to 0}}$$
- Il mio limite deve essere compreso fra 0 e 0, quindi è $= 0$ per il teorema del confronto a tre (teo 12.7)

Esempio 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n + 10^{23}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}(1 - n^{-6})}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - n^{-6}\right) \to 0$$

12.11 Implicazione i mportante disuquaglianza di bernoulli

Dimostro che

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$$

- Noto che
$$a^n = (1 + (a-1))^n$$
- questa quantità per il teorema di bernoulli è maggiore di:
$$(1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$$
- Se $a > 1$ $\lim_{n\to\infty} n(a-1) = +\infty$

Se invece ho $a \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} a^n \qquad \text{con } a \in (0,1)$$

Visto che $a \in (a,1)$ posso supporre che $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \to 0$$

13 Fattoriali e combinatoria

Definizione 19: *Fattoriale di un numero*

Il fattoriale di un numero è definito nel seguente modo:

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

in numeri $n!$ rapprentenza il numero di modi in cui posso ordinare n oggetti

Per scegliere n persone posso pensare che

- La prima persona la posso scieglere in n modi
- La seconda in $n-1$
- La terza in $n-2$
- ...la k esima in $n-k+1$

quindi

n	n-1	n-2	...	n-k+1

Definizione 20: *Coefficiente binomiale*

Dati 2 interi $n, k \quad 0 \leq k \leq n$, ponto

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Immagino di avere un esercito di n soldati e ne devo estrarre k. Non conta l'ordine con cui gli estraggo

- Il primo soldato lo posso scegliere in n modi
- Il secondo in $n-1$
- Il terzo in $n-2$
- ...il k esimo in $n-k+1$
- Devo poi dividere per il le permutazioni possibili visto che l'ordine non conta

$$\text{numero modi di estrarre } = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Perchè diviso? Pensa al fatto che ogni squadra estratta può essere disposta in $k!$ modi, quindi $k!$ modi vanno considerati come la stessa squadra

13.1 Proprietà dei fattoriali

- Scontate:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)} = n \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)\,1!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

- Simmetrica: prendere k persona da squadra di n è la stessa cosa che lasciarne fuori $n-k$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Generazione ricorsiva binomiale:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,\underbrace{(n-k)}_{(n-k)(n-k-1)!}!} + \frac{n!}{\underbrace{(k+1)}_{(k+1)k!}\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\frac{k+1+n-k}{(n-k)\,(k+1)}
\end{aligned}$$

A livello combinatorio

- Prendo un gruppo di n persone e tengo separatamente 1
- Per formare un gruppo grande $k+1$ posso:
  1. Creare un gruppo grande n e poi aggiungerci il nuovo arrivato
  2. Creare un gruppo grande $n+1$ che non contenga il nuovo arrivato
- Nel primo caso posso creare $\binom{n}{k}$ gruppi
- nel secondo caso posso create $\binom{n}{k+1}$ gruppi

13.2 Il triangolo di tartaglia

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Ogni valore è dato dalla somma dei valori dei termini sopra di esso a sinistra e a destra

Il coefficiente alla riga n nella posizione k è dato da

$$\binom{n}{k}$$

visto che il coefficiente nella posizione $n+1, k+1$ è uguale al coefficiente nella posizione n, k e $n, k+1$ noto che questo triangolo verifica la generazione ricorsiva binomiale:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Nello sviluppo di un binomio del tipo $(x+y)^n$ il monomio $x^k y^{n-k}$ ha coefficiente $\binom{n}{k}$ ossia:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

La somma dei coefficienti alla riga n è uguale a

$$2^n$$

Dimostrazione:

- Applico sviluppo del binomio $(x+y)^n$ con $x = y = 1$
- In questo caso so che

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

14 3 criteri: rapporto, radice, rapporto-radice

14.1 Criterio della radice

- Sia a_n una successione tale che $a_n \geq 0$ definitavente
- Supponiamo che se $\sqrt[n]{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora ho 3 possibilità:
  - se $l > 1$, allora $a_n \to +\infty$
  - se $l < 1$, allora $a_n \to 0$
  - se $l = 1$ il criterio non fornisce informazioni

14.2 Criterio del rapporto

- Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente
- Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora ho 3 possibilità
  - se $l > 1$, allora $a_n \to +\infty$
  - se $l < 1$, allora $a_n \to 0$
  - se $l = 1$ il criterio non fornisce informazioni

14.3 Criterio rapporto $\rightarrow$ radice

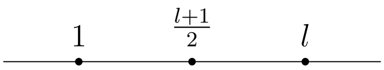
- Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente
- Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$$

  ossia $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ tendono allo stesso $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

14.4 Dimostrazioni

14.4.1 Dimostrazione criterio radice

- Prendo punto a metà fra 1 e l 

- Visto che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ necessariamente

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$$

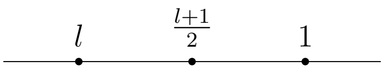
- Ho quantità positive sia a sinistra che a destra, posso elevare alla n da entrambe le parti, ottenendo:

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

- Se $l > 1$ $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \rightarrow \infty$

---

se invece $l < 1$ agisco nello stesso modo:

- Prendo punto a metà fra l e 1 

- Visto che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ necessariamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$$

- Ho quantità positive sia a sinistra che a destra, posso elevare alla n da entrambe le parti, ottenendo:

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

- Se $l < 1$ $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \rightarrow 0$
- Siccome $a_n \geq 0$ per ipotesi allora

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

  ossia $a_n \rightarrow 0$ per teorema del confronto a tre

14.5 Numero di nepero

Il numero di nepero è definito dal seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

14.6 Esempio forme indeterminate

Esempio 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

Esempio 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n^2}}{n!}=+\infty$$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!}$$

Esempio 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=$$

Criterio rapporto radice

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

15 Limiti di funzioni

Definizione 21: *Limite di funzione*

Data una funzione $f: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}$ abbiamo tre tipologie di limite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Primo tipo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{ non esiste} \end{cases}$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \geq M \forall x \geq k$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = + - \infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \forall x \geq k$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon \quad \forall x \geq k$$

ossia

$$|f(x) - l| \leq \epsilon$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l^+$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l < f(x) \leq l + \epsilon \quad \forall x \geq k$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l^-$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l - \epsilon \leq f(x) \leq l \quad \forall x \geq k$$

Secondo tipo: molto simile a primo, semplicemnte speculare

Terzo tipo:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \text{ non esiste} \end{cases}$$

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \epsilon \text{ se } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

15.1 Continuità

Definizione 22: *Continuità*

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in A$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

OSS:

- Si dice che f è continua in A se essa è continua in ogni punto di A
- Le funzioni elementari sono sempre comtinue sul loro dominio
- Se faccio operazioni algebriche su funzioni continue ottengo funzioni continue
- La composizione di funzioni continue è continua

15.2 Limiti notevoli

Limiti "nonni"

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4}$$

Limiti "di seconda generazione"

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$$

15.3 Cambio di variabile

Esempio 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

pongo $y = x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

Esempio 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)}$$

pongo $y = \sin(x)$; se $x \to 0 \Rightarrow \sin(x) \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin()-1}}{\sin(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(x)}$$

pongo $y = \sin(x)$; se $x \to \pi \Rightarrow \sin(x) \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}$$

Esempio 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

moltiplico e divido per $1+\cos(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{c^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{2}$$

Limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

pongo $x = \log(y+1)$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}}}_{\text{limite notevole}}$$

Limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

pongo $a^x = x\log(a)$

$$\frac{e^{x\log(a)}}{x}.$$

15.4 Ordini di infiniti

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{(\log(x))^a}{x^b} = 0 \quad \forall e > 0, b > 0}$$

dimostro facendo cambiodi variabile (im pongo $y = \log(x)$)

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0}$$

pongo $y = \frac{1}{y}$

15.5 Dimostrazioe $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

- Sappaimo che vale la seguente disuguaglianza:
$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$
- Divido per $\sin(x)$
$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

15.6 Altri esempi

Esempio 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x)+1-1)}{x^2}$$
- Moltiplico e divito per $\cos(x) - 1$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1} \cdot \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$
- Ottengo due limiti notevoli

Esempio 2

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

- Ricordo che $A^B = e^{B\log A}$
- $$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log(\cos(x))}$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(x)} - \cos(x) + \arctan(2x)}{x}$$

- Sommo e sottraggo 1
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(x)} - 1 + 1 - \cos(x) + \arctan(2x)}{x}$$
- Quindi ottengo limiti notevoli:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(x)} - 1}{x} + \frac{1-\cos(x)}{x} + \frac{\arctan(2x)}{x}$$
- Moltiplico e divido numeratori e demonimatori per ottenere limiti notevoli

Esempio 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+2^x)}{x}$$

- Se $x \to +\infty$ l'uno diventa insignificante. Quindi:
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+2^x)}{x} = \frac{\log(2^x)}{x} = \frac{x\log(x)}{x} = \log(2)$$
- Rigorosamente potrei raccogliere a fattor comune il 2^x

15.7 Dimostrare non esistenza di un limite

Definizione 23: *Sottosuccessione*

Data una successione a_n una sottosuccessione è composta da tuttti i termini con indice crescente selezionati secondo una data regola

Teorema 13: *Essitenza di un limite di una successione*

Sia a_n una successione di numeri reali e sia a_{kn} la regola che descrive come scelgo la sottosuccessione. Supponiamo che $a_n \to l \in \mathbb{R}$ allora

$$a_{kn} \to l$$

se a_n non ha limite non posso dire nulla riguardo a a_{nk}

Esempio: se voglio dimostrare che una successione non ha limite posso cercare due sottosuccessioni che non convergano verso lo stesso limite

$$e_n = (-)^n \to \text{ non ha limite}$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \to_1, 1, 1, 1, 1 \to 1$$
$$a_{2n+1} = (1)^{2n+1} = -1, -1, -1, -1, -1, \to -1$$

per questo motivo visto che $l_1 \neq l_2$, a_n non ha limite

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_{2n} = \sin(n\pi) = 0, 0, 0, 0, 0 \to$$

16 Numero di nepero

Per dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge al numero di nepero servono dei prerequisiti e dei teoremi

Definizione 24: *Crescenza/decrescenza di una successione*

Una successione a_n si dice:

- Debolmente crescente se $\quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Strettamente crescente se $\quad a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La stessa cosa vale per la decrescenza

OSS: una funzione è debolmente crescente se e solo se per ogni $m > n$ anche $a_m \geq a_n$
Consideriamo la successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Teorema 14: *Limiti succesioni crescenti*

Sia a_n una successione debolmente crescente. Allora abbiamo 2 possibili limiti:

- $a_n \to l \in \mathbb{R}$
- $a_n \to +\infty$

In ogni caso il limite della successione è il $sup\,(a_n)$

Teorema 15: *Corollario al teorema precedente*

Sia a_n una successione

- Debolemnte crescente
- Limitata superiormente

Allora

$$a_n \to l \in \mathbb{R}$$

NB: non necessariamente $l = k$

16.1 Dimostrazione definizione numero di nepero

La dimostrazione si basa su 3 proprietà della succession e_n

- E' sempre $\geq 2 \forall n$
- E' debolmente crescente
- E' $\leq 3 \forall n$

se so che e_n è limitata e crescente allora posso affermare che

$$e_n \to l \in [2, 3]$$

$$\boxed{\text{Dimostro un passo alla volta}}$$

E' sempre $\geq 2 \forall n$

- Uso disuguaglianza di Bernoulli ossia

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

- Pongo $x = \frac{1}{n}$ ossia

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} \geq 2$$

E' debolmente crescente

-

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

- $$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$
- Moltiplico e divido per n e per $n-1$ il membro di destra
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1}$$
ottengo quindi
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n-1}{n}$$
$$\frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \geq \frac{n-1}{n}$$
- Noto la somma per differenza al numeratore del primo menmbro
$$\frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}$$
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$
- Pongo x $= -\frac{1}{n^2}$ e moltiplicando e dividendo per n a destra ottengo che
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n} = (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\boxed{\text{La crescenza è quindi stata verificata per la disuguaglanza di bernoulli}}$$

E' $\leq 3 \forall n$

- Utilizzo binomio di Newtoon:
$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
- Pongo $x = 1$ e $y = \frac{1}{n}$:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$
- Sviluppando la sommatoria mi accordo di alcune cose:
$$\binom{n}{0}\frac{1}{n^0}\binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2}\dots$$
$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}\dots$$

- Noto che la quantità $\frac{n(n-1)}{n^2}$ è maggiorata da 1. Posso affermare quindi che l'uguaglianza è maggiorata dalla seguente:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

- Visto che si può dimostrare per induzione che $n! \geq 2^n \forall n \in \mathbb{N}$ quest'ultima somma sarà a sua volta maggiorata dalla seguente:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n}$$

- Si può dimostrare poi per induzione che $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$, quindi nel nostro caso sappiamo che:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

- Quindi $a_n \leq 3$

Ho dimostrato dunque che

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = l \in (2, 3)$$

17 O-piccolo

Definizione 25: *O-piccolo definizione 1*

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è o-piccolo per $x \to x_0$ se esiste una funzione $\omega : Aro\mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x)\,\omega(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0} \omega = 0$$

Si scrive che $f(x) = o(g(x))$

Definizione 26: *O-piccolo definizione 2*

Supponiamo di poter dividere per $g(x)$. Assumiamo quindi $g(x) \neq 0$ tranne tuttalpiù in x_0 allora $f(x) = o(g(x))$ se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

17.1 Proprietà o-piccolo

Somma e differenza di o piccoli

$$o(g) + o(g) = o(g) \quad x \to x_0$$

$$o(g) - o(g) = o(g) \quad x \to x_0$$

Dimostrazione:

Date due funzioni $f_1(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$ e $f_2(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$

- $f_2(x) = g(x)\,\omega_2(x)$
- $f_1(x) + f_2(x) = g(x)\left(\underbrace{\omega_1(x) + \omega_2(x)}_{\omega_3 \to 0}\right)$

Moltiplicazione per scalare

$$ko(g) = o(g) \quad x \to x_0$$

- $f_1(x) = g(x)\,\omega_1(x)$
- $kf_1(x) = g(x) \cdot k\omega(x) = g(x)\,\omega(x)$

Prodotto di o-piccoli

$$o(g)\,o(g) = o\left(g^2\right) \quad x \to x_0$$

- $o(g)\,o(g) = f(x)\,f(x)\,\omega(x)\,\omega(x) = (f(x))^2\,\omega(x)^2$
- $= g^2\omega(x) = o(g^2)$

Transitività o-piccolo

$$\begin{gathered} f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0 \\ g(x) = o(h(x)) \quad x \to x_0 \\ \text{allora} \\ f(x) = o(h(x)) \quad x \to x_0 \end{gathered}$$

Prodotto per scalare dell'argomento

$$\begin{gathered} \text{se } f(x) = o(g(x)) \quad x \to 0 \\ \text{allora} \\ f(kx) = o(g(kx)) \end{gathered}$$

17.2 Sviluppi al primo ordine

Mentre faccio un limite per $x \to 0$ posso usare gli sviluppi al primo ordine per rendre tutto molto più semblice:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + o(x) & e^x &= 1 + x + o(x) \\ \cos(x) &= 1 + o(x) & \log(1+x) &= x + o(x) \\ \cos(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) & \arctan(x) &= x + o(x) \\ \tan(x) &= x + o(x) & \arcsin(x) &= x + o(x) \end{aligned}$$

Posso dimostrarli tutti isolando il $o(x)$ e facendo il limite per $x \to 0$ di $\frac{f(x)}{f(x)}$

18 Derivate

Definizione 27: *Derivata con rapporto incrementale*

In un punto x_0 di una funzione la derivata è definita tramite il rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f(x)$ è derivabile in x_0 se il limite esiste ed è finito

Definizione 28: *Derivata con o piccolo*

Dire che esiste la derivata $f'(x_0)$ è equivalente a dire che è siddisfatta la seguente relazione:

$$f(x_0 + g) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h) \qquad \text{con } h \to 0$$

Dimostrazione fra le due definzioni:

- Supponiamo vera la relazione con l'o piccolo e inseriamola all'interno del rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \frac{f'(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0)\, h + o(h)}{h} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\to 0} = f'(x_0)$$

- Viceversa: supponiamo vero il limite del rapporto incrementale. Dimostro che

$$o(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h$$

- Calcolo $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)}$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Quindi le due relazioni sono reciprocamente implicate

18.1 Regole derivazione

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g)\, g'$$

18.1.1 Dimostrazione regole di derivazione

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

- Per definizione la derivata è il limite del rapporto incrementale:

$$f'(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

- Aggiungo e sottraggo $f(x_0+g)\,g(o)$

$$\frac{f(x_0+h) \underbrace{- f(x_0+h)g(x_0) + g(x_0+h)g(x_0)} - f(x_0)}{h}$$

- Raccolgo primo con secondo e terzo con quarto:

$$f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- tutto questo è uguale a:

$$f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)$$

  Questo in quanto f è continua

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g)\,g'}$$

- i

18.2 Derivate elementari

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + (\tan x)^2 \qquad (\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

18.2.1 Dimostrazione di derivate elemenrari tramite o-piccolo

$$\boxed{d\left[e^x\right] = e^x}$$

- $f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h$
- Applico sviluppi al primo ordine:

$$e^{x_0}e^h = e^{x_0}(1+h+o(h)) = e^x + e^{x_0}h + e^{x_0}o(h)$$

- Noto che

$$\underbrace{e^x}_{f(x_0)} + \underbrace{e^{x_0}}_{f'(x_0)} h + \underbrace{e^{x_0}o(h)}_{=o(h)}$$

$$\boxed{d\left[\sin\left(x\right)\right]}$$

- $f\left(x_0+h\right)=\sin\left(x_0+h\right)$
- Applico formula somma di seni:

$$\sin\left(x_0+h\right)=\sin\left(x_0\right)\cos\left(h\right)+\cos\left(x_0\right)\sin\left(h\right)$$

- Applico sviluppo al primo ordine di $\sin\left(h\right)$ e $\cos\left(h\right)$

$$\sin\left(x_0\right)\left(1+o\left(h\right)\right)+\cos\left(x_0\right)\left(h+o\left(h\right)\right)$$

$$\boxed{d\left[\log\left(x_0+h\right)\right]}$$

- $f\left(x_0+h\right)=\log\left(x_0+h\right)$
- Raccolgo x_0 :

$$\log\left(x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right)$$

- Proprietà dei logaritmi:

$$\log\left(x_0\right)+\log\left(1+\frac{1}{x_0}\right)$$

- Sviluppo al primo ordine di $\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$:

$$\log\left(x_0\right)+\frac{h}{x_0}+o\left(\frac{h}{x_0}\right)$$

- Per proprietà degli o piccoli $o\left(\frac{h}{x_0}\right)=o\left(h\right)$

$$\underbrace{\log\left(x_0\right)}_{f(x_0)}+\underbrace{\frac{1}{x_0}}_{f'(x_0)}h+o\left(h\right)$$

19 De l'Hopital e Taylor: pilastri della matematica

19.1 De l'hopital

19.2 Esempi limiti

$$\frac{x-\sin\left(x\right)+x^5}{x^3}$$

Applico de l'Hopital derivando 3 volte

$$\frac{x-\sin(x)+x^5}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)+x^5}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+5x^4}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+20x^3}{6x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+60x^2)}{6}$$

19.3 Taylor

Teorema 16: *Formula di taylor*

Sia f unf funzione e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi esiste un polinomio di grado $\leq n$, $P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad x \to 0$$

Il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla seguente formulari:

$$P_n(x) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(0)}{k!}x^k$$

19.3.1 Dimostrazione

Teorema necessario ai fini della Dimostrazione:

Teorema 17: *Teorema derivate di primo e secondo ordine*

Sia ϕ una funzione per cui

$$\phi(0) = \phi'(0) + \phi''(0) + \ldots + \phi^n(0) = 0$$

Allora

$$\phi(x) = o(x^n) \quad x \to 0$$

Dimostrazione:

- Applico definizione quasi equivalente per il caso $n = 3$ (eivto di fare infinite derivate):
$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{x^3} \underbrace{=}_{\text{de l'hopital}} \frac{\phi'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\phi'''(x)}{6} = 0$$

19.4 Tabella sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

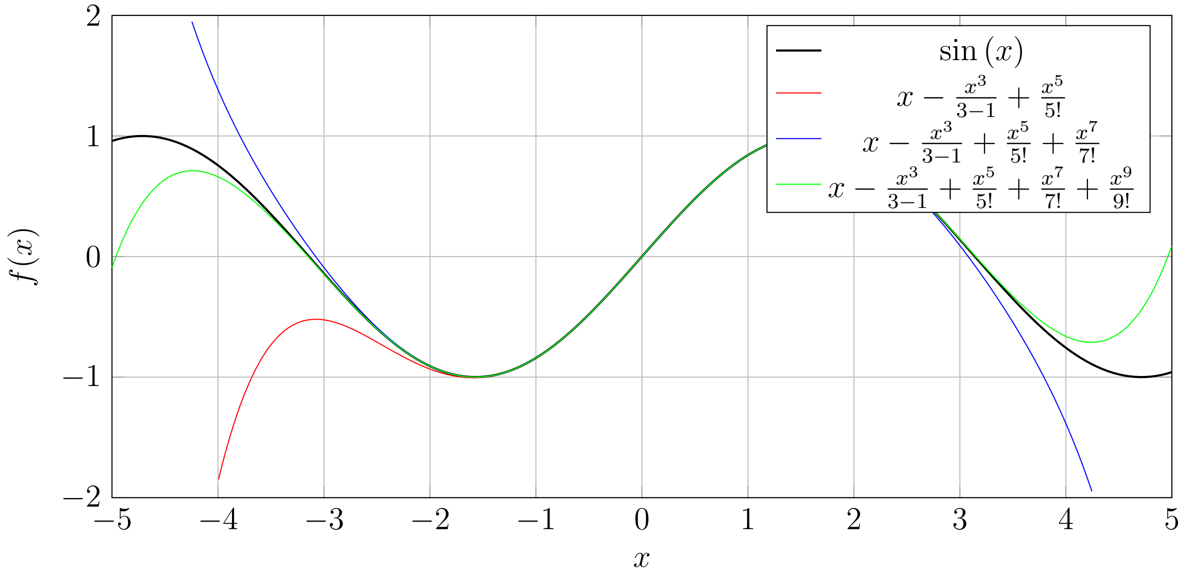
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots \qquad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots$$

Questi sviluppi si possono dimostrare applicando la definizione e calcolando la derivata, trovando la regola che detta quando questa si annulla

GRAFICO: Approssimazione seno con taylor



19.5 Sviluppo con Taylor $\neq 0$

Definizione 29: *Taylor con centro in x_0*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

NB: questa formula è equivalente alla formula di Taylor per $x \to 0$ applicata su una funzione traslata orizzontalmente verso destra di x_0

Incomprensione - 10:45:02

Come cazzo si dimostra?

- Calcolando la derivata in x_0 ottengo l'approssimazione locale in x_0
- Moltiplicando la derivata per $(x - x_0)$ traslo il polinomio ottenuto verso destra di x_0

20 Teoremi continuoità e derivabilità

Teorema 18: *Esistenza degli zeri*

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a)\cdot f(b)<0$ (ossia che che a e b hanno segno discorde). Allora

$$\exists c\in(a,b)\ \text{ t.c. }\ f(c)=0$$

NB: posso applicare una variante del teorema. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e $f(a)<\lambda$ e $f(b)>\lambda$ o viceversa, allora

$$\exists x_0 \text{ t.c. }\ f(x_0)=\lambda$$

Posso generalizzare ulteriormente tramite il teorema dei valori intermedi:

Teorema 19: *Teorema dei valore intermedi*

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Sia

$$L=sup\left\{f(x):x\in(a,b)\right\}\ \text{ e } l=\infty\left\{f(x):x\in(a,b)\right\}$$

Sia $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che $l<\lambda<L$. Allora

$$\exists c\in(a,b)\ \text{ t.c. }\ f(c)=\lambda$$

Questo equivale a dire che una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ assume tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo. NB: da questo teorema posso ricavare il fatto generale che se:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

oppure viceversa, allora $f(x)$ è surgettiva

20.1 Teoremi studio locale funzione

Teorema 20: *Criterio di monotonia 1*

Sia $f:A\to\mathbb{R}$ e $x_0\in A$. Supponiamo che $f'(x)>0$. Allora esiste $\delta>0$ tale che:

- $f(x)>f(x_0)\quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$
- $f(x)<f(x_0)\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$

NB: l'affermazione si limita allo studio locale di una funzione. La funzione è quindi crescente ma solo localmente

Definizione 30: *Punto stazionario*

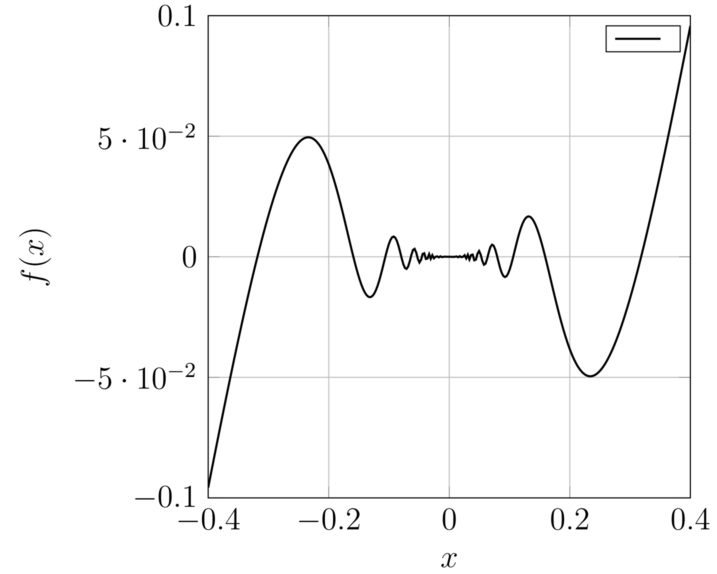
Sia f derivabile in x_0. Se $f'(x_0)$ allora il punto x_0 è detto punto stazionario

NB: ho 5 possibili punti stazionari:

- Punto di massimo
- Punto di minimo
- Flesso a tangenza orizzontale ascendente
- Flesso a tangenza orizzontale discendente
- Funzioni patologiche che oscillano in a fucked-up fashion

Esempio di quest'ultimo caso:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$



Questa funzione oscilla sempre più avvicinandosi all'origine, ma la derivate in 0 esiste ed è nulla

Teorema 21: *Criterio delle derivate successive*

Immagino di cercare la prima derivata che non si annulla in un punto x_0. Supponiamo che questa derivata sia di ordine k:

$$f'\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)=f'''\left(x_0\right)=f^{(k-1)}\left(x_0\right)=0$$

ho 4 opzioni:

- k
  - è pari
    - $f^k(x_0) > 0$ — x_0 è minimo locale
    - $f^k(x_0) < 0$ — x_0 è minimo locale
  - è dispari
    - $f^k(x_0) > 0$ — x_0 è flesso a tg. orizzontale ascendente
    - $f^k(x_0) < 0$ — x_0 è flesso a tg. orizzontale discendente

Dimostrazione: la dimostrazione è interesante e usa lo sviluppo di Taylor

- Calcolo sviluppo di Taylor in x_0 in modo tale da approssimare concavità della funzione (vedi *sezione 19.5*)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

- Per un valore di h molto piccolo posso calcolare il polinomio in $x_0 + h$, visto che non mi distaccherei troppo dall'intorno in cui il polinomio è approssimato bene:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots + \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k + o\left(h^k\right)$$

- Noto che per ipotesi le derivate di ordine $1, \ldots, k-1$ sono tutte nulle, quindi lo sviluppo di Taylor è il seguente:

$$f(x_0 + h) = \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k + o\left(h^k\right)$$

- Dividendo per h^k elimino l'o-piccolo per definizione e ottengo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

- Noto che ho a destra la derivata *k-esima* di f. Riprendendo le affermazioni riguardo segno della derivata e parità di k posso osservare che, ad esempio, se $f(x_0 + h) > f(x_0)$ x_0 è un punto di minimo locale. Le stesse affermazioni si possono fare per i flessi e i massimi

Teorema 22: *Teorema di Weierstrass*

Sia $f : [a, b]$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Allora esistono almeno un massimo e un minimo assoluto in $[a, b]$

Varianti Weierstrass:

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica. Allora esistono MAX e MIN
- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

  allora esiste MIN/MAX (rispettivamente per $+\infty/-\infty$)

Teorema 23: *Teorema di Rolle*

Sian $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)
- $f(a) = f(b)$

allora

$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f'(x_0) = 0$$

Teorema 24: *Teorema di Cauchy*

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f e g sono continue in $[a, b]$
- f e g sono derivabili in (a, b)

Allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(x) - g(a))\, f_0(x_0)$$

se inoltre

- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo per $g_0(x_0)$ ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

NB: se penso a teorema di Lagrange, noto che il rapporto fra le derivate è esattamente il rapporto fra i Δy che la funzione assume agli estremi:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Facendo il rapporto $b - a$ si annulla e ottengo esattamente quanto espresso da teorema di Cauchy

Dimostrazione:

- Uso rolle su una nuova funzione definita nel seguente modo:

  $$\phi(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$$

- Noto che
  - ϕ è continua in $[a, b]$ in quanto *combinazione lineare* di funzioni derivabili
  - ϕ è derivabile in (a, b) in quanto *combinazione lineare* di funzioni derivabili
  - $\phi(a) = \phi(b)$. Basta verificare inserendo a e b
- La funzione soddisma le ipotesi del teorema di Rolle ossia:

  $$\phi'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x) = 0$$

  ottengo quindi l'ipotesi 1 del teorema

Teorema 25: *Teorema di Lagrange*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

Allora $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c.

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Dimostrazione:

- Uso teorema di Cauchy con $g(x) = x$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Teorema 26: *Teorema monotonia 2*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo

- f continuo in $[a, b]$
- f derivabile in (a, b)

allora

- Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente
- Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è debolmente crescente
- Se f è strettamente crescente allora $f_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Se f è debolmente crescente allora $f_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione:

- Per ipotesi f è debolmente crescente. Prendo $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Se f è crescente allora il denominatore del rapporto incrementale è <u>positivo</u>. Il limite per $h \to o^+$ è quindi positivo.

- Per ipotesi $f_0(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Applico Lagrande a $[c, d] \subseteq [a, b]$ e ottengo:

$$f(d) - f(c) = f'(x_0)(d - c)$$

- Siccome $f'(x) > 0$ per ipotesi e $(d - c) > 0$ allora $f(d) - f(c) > 0$
- Vista l'arbitrarietà nella scelta di d e c posso affermare che f è crescente

Teorema 27: *Teorema monotonia 3*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)
- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Non esiste alcun intervallo contenuto in (a, b) in cui f' è sempre $= 0$. E' possibile tuttavia che $f'(x) = 0$ in punti isolati (*sporadicamente*)

allora

$$f \text{ è strettamente crescente in } (a, b)$$

Dimostrazione:

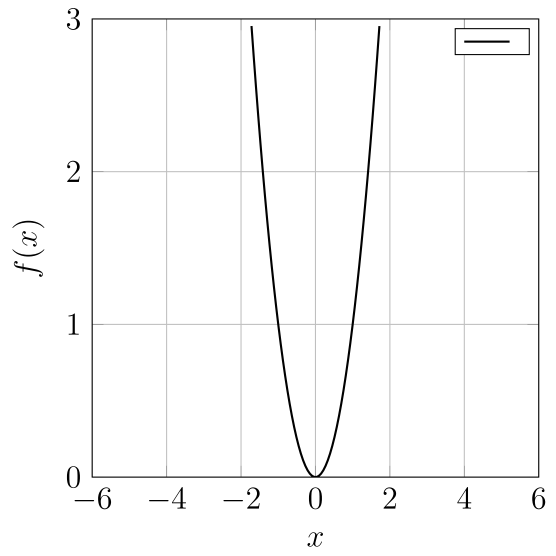
- Per ipotesi f è debolmente crescente: se non fosse strettamente crescente vorrebbe dire che c'è un intervallo in cui f è costante. Questo però viola la condizione 4 per cui f è strettamente crescente

Definizione 31: *Lipschizzianità*

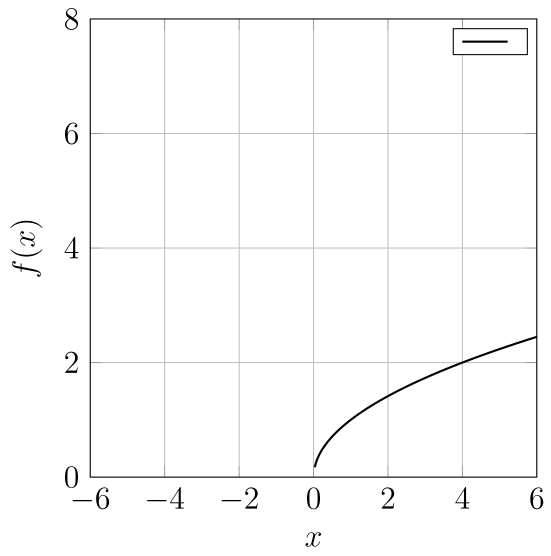
Sia $A \in \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. si dice che f è lipschizziana in A se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x, y \in A$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

Esempi:



No, se $x \to \infty$ la pendenza è infinita. Sì se considero intervallo $[-1, 1]$



No, se $x \to 0$ la pensenza è infinita. Si se considero intervallo $[1, +\infty)$

Teorema 28: *Continuità e lipschizianità*

Sia $f A \to \mathbb{R}$ lipschizziana. Allora

$$f \text{ continua in } A$$

Teorema 29: *Continuità e lipschizianità 2*

Sia $F : A \to \mathbb{R}$ con A convesso. Allora

$$f \text{ è lipschizziana in } A \Leftrightarrow |f'(x)| \text{ è limitato}$$

in più, in quest'ultimo caso si ha che

$$L = sup\left(|f'(x)| : x \in [0,1]\right)$$

NB:

Posso sfruttare quest'ultimo teorema per ottenere importanti disuguaglianze.

Se trovo la minima costante di lipschiz posso applicare la definizione per ottenere la disuguaglianza

20.2 Proprietà sviluppi taylor

20.2.1 Somma

Dati due due sviluppi di taylor

$$f(x) = P_1(x) + o(x^n) \quad g(x) = P_2(x) + o(x^n)$$

allora lo sviluppo della somma di $f(x)$ e $g(x)$ è

$$P_1(x) + P_2(x) + o(x^n)$$

20.2.2 Prodotto

Dati due due sviluppi di taylor

$$f(x) = P_1(x) + o(x^n) \quad g(x) = P_2(x) + o(x^n)$$

allora lo sviluppo del prodotto di $f(x)$ e $g(x)$ è

$$P_1(x) \cdot P_2(x) + o(x^n)$$

NB: quando si moltiplica P_1 con P_2 tutti i termini di grado $> n$ vengono inglobati all'interno di $o(x^n)$, non serve quindi calcolarli

20.3 Composta

Dati due due sviluppi di taylor

$$f(x) = P_1(x) + o(x^n) \quad g(x) = P_2(x) + o(x^n)$$

allora lo sviluppo della funzione composta $f(g(x))$

$$P_1(x) \cdot P_2(x) + o(x^n)$$

20.3.1 Esempi di sviluppi

Esempio 1

$$\cos x + 2\sin x$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \\
\cos x + 2\sin x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 2x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right) \\
&= 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Esempio 2

$$\arctan x + \sinh x$$

$$\begin{aligned}
\arctan x \cdot \sinh x &= \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

NB: se venisse chiesto (come è purtroppo già accaduto) di dire quanto vale, ad esempio $f^{(4)}(0)$ non è conveniente derivare, ci si incasina. Bisogna invece

- Calcolare lo sviluppo di Taylor con $n = 4$
- Realizzare che il coefficiente del termine di grado 4 è uguale a $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$

21 Convessità

Definizione 32: *Convessità/concavità sottoinsiemi*

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ allora

$$[x, y] \subseteq A$$

NB: ciò accade per 3 tipi di insieme:

- $A \cong \mathbb{R}$
- Ogni semiretta: $(-\infty, a) \quad (-\infty, a] \quad [a, +\infty) \quad (a, +\infty)$
- Gli intervalli: $(a, b) \quad [a, b) \quad (a, b] \quad [a, b]$

Definizione 33: *Convessità geometrica*

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punto P, Q nel grafico di f tutto il segmento PQ sta sopra il grafico

Definizione 34: *Convessità algebrica*

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice convesso se $\forall a, b \in A \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda a + (1 - \lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$$

Interpretazione geometrica:

- la quantità $\lambda a + (1 - \lambda) b$ con $\lambda \in [0, 1]$ posso esprimere ogni punto compreso fra a e b :
  - $\lambda = \frac{1}{2} \quad \to \quad \frac{a+b}{2}$
  - $\lambda = 1 \quad \to a$
  - $\lambda = 0 \quad \to b$
-
- Allo stesso modo la quantià $\lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$ esprime un punto compreso fra $f(a)$ e $f(b)$
- Per ogni valore di λ ottengo a sinistra $f(c)$ mentre a destra ottengo $g(c)$ dove g è la retta passante per $a(f(a)), (b, f(b))$ con $c \in [a, b]$

21.1 Convessità e derivata

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Sappiamo che $f''(x)$ esiste $\forall x \in A$. Posso affermare con certezza che:

- se $f''(x) > 0 \forall x \in A \to f$ è strettamente crescente
- se $f''(x) \geq 0 \forall x \in A \to f$ è debolmente crescente
- f è debolmente crescente $\Rightarrow f''(x) \geq 0 \forall x \in A$

NB: è falso affermare che

- se f è strettamente crescente $\Rightarrow f''(x) > 0$

basti pensare alla funzione x^4.Pur essento strettamente concava la sua derivata si annulla in 0

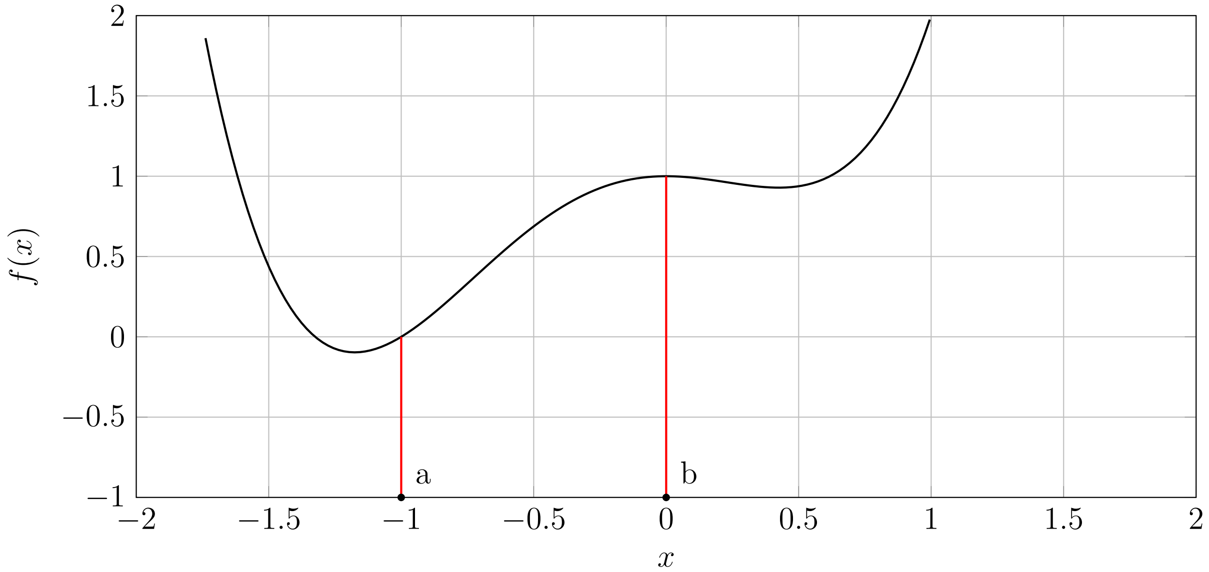
22 Teoria di integrazione

22.1 Come si indicano

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

- $[a, b]$ zona di integrazione, cioè l'insieme in cui integriamo
- $f : [a, b]$ la funzione che si integra (integranda)
- dx simbolo che indica la variabile di integrazione
- la funzione f è liminata in $[a, b]$

22.2 Significato geometrico



Come in figura, l'integrale rappresenta l'area sottesa al grafico della funzione fra a e b. In questo caso è:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

22.3 Definizione formale

- Caso banale →funzioni costanti
- Caso semi-banale →funzioni a gradino
- Caso generale

Caso 1:

$$f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in [a, b]$$

In questo caso l'area è chiaramente l'area del rettangolo contenuto sotto $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\,\lambda$$

Caso 2:

La funzione è costante su determinati sotto intervalli di $[a, b]$

L'area in questo caso è chiaramente la somma dell'area di ogni rettangolo creato da ogni sotto intervallo costante di $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} (b-a)\,\lambda_k$$

Caso 3

La funzione non è ne costante ne a scalini ma <u>limitata</u>

In questo caso procedo nel seguente modo:

- Provo ad approssimare l'area del grafico sotteso alla funzione tramite funzione a scalini
- Considero rispettivamente la funzione a gradini che stima l'area dal sopra e dal sotto
- Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Si dice integrale superiore di f in $[a,b]$

  $$I^{+}(f,[a,b])=inf\left\{\int_a^b p(x)\ dx : p:[a,b]\to\mathbb{R}\text{ f. a gradino t.c. } p(x)\geq f(x)\right\}$$

  Analogamente si definisce l'integrale inferiore:

  $$I^{-}(f,[a,b])=sup\left\{\int_a^b p(x)\ dx : p:[a,b]\to\mathbb{R}\text{ f. a gradino t.c. } p(x)\leq f(x)\right\}$$

  Fatto generale molto intuitivo:

  $$I^{+}(f,[a,b])\geq I^{-}(f,[a,b])$$

- Se accade che $I^{+}(f,[a,b])=I^{-}(f,[a,b])$ allora si dice che $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b]$ e il valore ottenuto si indica con in simbolo

  $$\int_a^b f(x)\ dx$$

22.4 Teoremi integrabilità

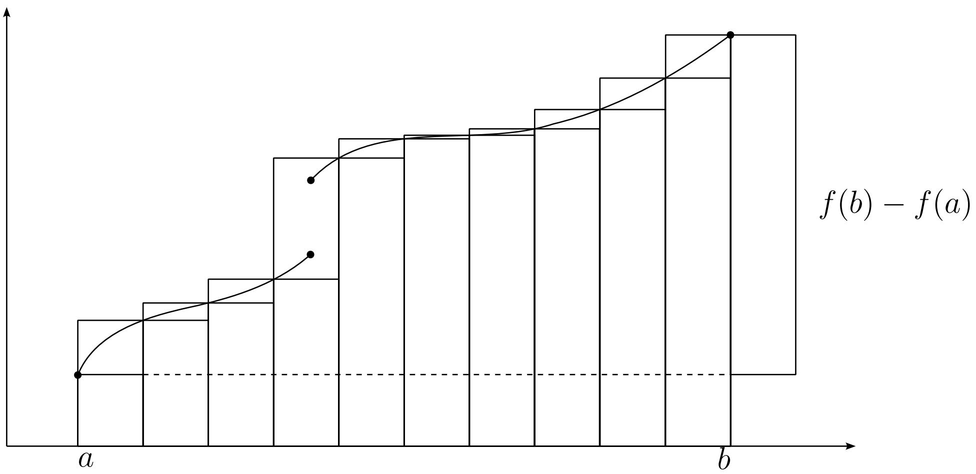
Teorema 30: *Integritabilità funzione*

I seguenti tipi di funzione sono integrabili:

- Tutte le funzioni monotone (anche non continue)
- Tutte le funzioni continue
- Tutte le funzione che hanno un numero finito di punti di discontinuità nei quali i limini destro e sinistro esistono

Dimostrazione per funzioni monotone:

- Se per un dato $\epsilon<0$ trovo una somma di Riemann superiore e una inferiore la cui differenza è $<\epsilon$ sono a cavallo
- Divido il grafico di $f(x)$ in n parti uguali e creo somma di Riemann dall'alto:
  - La somma di Riemann superiore prenderà come altezza di ogni intervallo il valore della funzione di destra
  - La somma di Riemann inferiore prenderà come altezza di ogni intervallo il valore della funzione di sinistra



22.5 Proprietà integrali

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \text{ con } c \in [a,b]$$

$$\text{Se } f(x) \geq g(x)\,\forall x \in [a,b] \text{ allora } \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$$

23 Calcolo di integrali e integrazione impropria

23.1 Teoremi e definizioni

Definizione 35: *Primitiva di una funzione*

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si dice primitiva di f una qualunque funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in $[a,b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Definizione 36: *Funzione integrale*

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si dife funzione integrale la funzione:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

NB: la funzione integrale gode delle seguenti proprietà:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \Phi(b) = [\Phi(x)]_a^b$$
$$\int_c^d f(x)\ dx = \Phi(d) - \Phi(c)$$

Teorema 31: *Teorema della media integrale*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a)$$

Teorema 32: *Teorema fondamentale del calcolo integrale*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia Φ la sua funzione integrale. Allora

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

ossia Φ è primitiva di f

Dimostrazione:

- Calcolo il rapporto incrementale di Φ per $h > 0$

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,dt - \int_a^x f(t)\ dt\right]$$

- Noto che per addizione di integrali posso riscrivere il membro di destra come

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

- Per il teorema dei valori intermedi so che esiste un punto $\in [x, x+h]$ tale che $f(c) = \int_x^{x+h} f(x)\ dx$ quindi:

$$\frac{1}{h} \cdot h \cdot f(c)$$

- Noto che se $h \to 0$ allora $c \to x$, per cui $f(c) \to f(x)$. Questa affermazione posso farla in quanto $f(x)$ è continua

- Se applico il limite per $h \to 0$ al rapporto incrementale ottengo che

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

  ho quindi dimostrato che Φ è derivabile e che $\Phi'(x) = f(x)$ ossia che Φ è una primitiva di f

23.2 Integrazione di funzioni razionali

Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$\frac{P(x)}{q(x)}$$

Per integrare una cosa di questo tipo devo seguire 4 passaggi:

- Divisione
- Fattorizzazione del denominatore
- Risolvere sistema lineare
- Integrazione

23.2.0 Divisione

Se il grado di P è $<$ del grado di Q si passa al punto 2, altrimenti divido $P(x)$ per $Q(x)$ ottenendo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

nota che avendo diviso, la funzione $\frac{R(x)}{P(x)}$ ha il grado del numeratore $<$ del grado del denominatore

Fattorizzazione: Scomporre il numeratore in prodotto di polinomi di primo e secondo grado con i termini di secondo grado che non sono ulteriormente scomponibili. Esempio bello:

$$x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = \left(x^2 + 1 + \sqrt{2}x\right)\left(x^2 + 1 - \sqrt{2}x\right)$$

23.2.0 Fattorizzazione e sistema lineare

L'obbiettivo è riscrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali. In generale posso avere i seguenti casi:

- Al denominatore ho solo termini di grado 1. La somma sarà del tipo
$$\frac{A}{P_1(x)} + \frac{B}{P_2(x)}$$
- Al denominatore ho dei termini di grado 2 non scomponibili. In questo caso, al di sopra di questi termini dovro avere un polinomio generico di grado 1:
$$\frac{A}{P_1(x)} + \frac{Bx+C}{P_2(x)}$$
- Se ho fattori con molteplicità > 1 devo seguire un metodo particolare spiegato dopo. In generale, ottengo qualcosa del tipo:
$$\frac{A}{P_1(x)} + \frac{Bx+C}{P_2(x)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{Fx^{n-1}\ldots + Mx + N}{\left(P_1(x)\right)^2\left(P_2(x)\right)^3}\right]$$

23.2.0 Esempio caso 1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Devo cercare A e B in modo tale che venga soddisfatta l'uguaglianza fra i numeratori dei polinomi:

$$x = A(x+1) + B(x-1)$$

Svolgo i conti a destra e raccolgo:

$$A(x+1) + B(x-1) = Ax + A + Bx - B = (A+B)x + A - B$$

quindi ottengo il seguente sistema lineare eguagliando i coefficienti:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

23.2.0 Esempio caso 2

Se al denominatore ho fattori di grado $\neq 1$, dovrò trovare il valore di 3 costanti A, B, C. Es:

$$\frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

eseguendo i conti e raccogliendo:

$$\frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

e ottengo il sistema lineare a 3 incognite:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A-B+C=0 \\ A-C=3 \end{cases} \rightarrow A = \frac{5}{3} \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{4}{3}$$

Quindi, in generale, dove al denominatore ho un polinomio di grado 1 sopra avrò una costante, mentre se al denominatore ho un polinomio di grado 2, al numeratore ho un polinomio generico di grado 1:

$$\frac{x^3+5}{(2x+1)(x-3)(x-8)(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-8} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{x^2+x+1}$$

quindi ottengo un sistema in tante incognite quanto è il grado del denominatore

---

23.2.0 Esempio caso 3

Se i fattori al denominatore hanno molteplicità > 1 procedo nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{(x+1)^4(x+5)^2(x+7)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x+7} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left[\frac{Fx^7+Gx^6+Hx^5+Jx^4+Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(x+1)^3(x+5)(x^2+1)^2}\right]$$

Ossia:

- Scrivo fattorizzazione del denominatore e la scrivo come somma, ignorando la molteplicità di ogni termine (occhio però a non trascurare il fatto che al numeratore del termini di secondo grado andrà un polinomio di primo)
- A questo aggiungo la derivata di un polinomio in cui ho:
  - Al denominatore il prodotto dei polinomi che avevo originariamente al denominatore abbassati di un grado
  - Al numeratore la somma di $n-1$ polinomi generici di grado $0, \ldots, n-1$ dove n è il grado del denominatore

23.2.0 Integrazione

Svolti i passaggi spiegati precedentemente posso ritrovarmi 3 tipi di funzioni da integrare:

- Funzioni del tipo $\frac{k}{ax+c}$, integrate, diventano semplici logaritmi
- Funzioni del tipo $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ dove p_1 è di grado 1 e P_2 è grado 2 non scomponibile, integrate, diventano arcotangenti. Devo usare completamento del quadrato al denominatore

23.3 Trucchetti integrazione

23.3.0 Integrazione radici di polinomi di secondo grado

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}}$$

Metodo trigonometrico

- Sostituzione $x = \sin(y)$
- Uso formule trigonometriche tenendo conto che $1 - \sin^2(y) = \cos^2 y$

Metodo della sostituzione

- Scrivo come somma per differenza
- Sostuisco l'intera radice con uno dei due termini $= y$ e l'altro rimane invariato. Es $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x+1)(x-1)} = y(x-1)$ i

Più in generale, se ho un polinomio con due radici reali λ, ρ, allora posso applicare la sostituzione:

$$\sqrt{\text{ polinomio }} = y\,(x-\lambda) \text{ oppure } \sqrt{\text{ polinomio }} = y\,(x-\rho)$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+1}}$$

Metodo trigonometrico

- Sostituzione $x = \sinh y$
- Uso formule trigonometriche tenendo conto che $\sinh^2 + 1 = \cosh^2$
- Posso integrare $\sinh^2 y$ in 3 modi:
  - Scrivendo esplicitamente il sinh tramite esponenziale
  - Scrivendo la formula di duplicazione $\sinh(2x)$
  - Utilizzo la formula per parti in maniera ciclica

Metodo della sostituzione

- Sostituzione $\sqrt{x^2+1} = y + x$
- Noto che così facendo x^2 sparisce e dunque posso ricavare x in funzione di y

Nota che se il coefficiente di x^2 non è 1, la sostituzione da fare è diversa, ad esempio

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \to \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + y$$

in modo tale che eseguendo il quadrato si elimini il termine di secondo grado

23.3.0 Sostituzioni parametriche

Possa "convertire" un seno o un cosno in un polinomio tramite le formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2y}{y^2+1} \qquad \cos x = \frac{1-y^2}{y^2+1}$$

ponendo

$$y = \tan\frac{x}{2}$$

Inserendo $\tan\frac{x}{2}$ all'interno delle due formule parametriche si può verificare che l'uguaglianza è verivicata. L'integrale di $\frac{1}{\sin(x)}$ può essere risolto in due modi:

- Formule parametriche
- Moltiplicando e dividendo per seno, ricordando che $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ e ponendo $y = \cos x$

NB: i casi in cui le sostituzioni parametriche semplificano il tutto sono molto rari, quindi generalmente queste si usano come ultima spiaggia

---

$$\boxed{\frac{1}{\cos^3(x)\sin^3(x)}}$$

- Sostituzioni parametriche (troopo complicati i conti)
- Uso formula di duplicazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.
  - Se la potenza ottenuta è dispari moltiplico e diviso per $\sin(2x)$, ottenento potenza pari al denominatore
  - La riscrivo usando che $\sin^2(2x) = 1 - \cos^2(2x)$
  - Integro funzione razionale con molteplicità
- Scrivo $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

23.4 Integrali imporpri

Ho due tipi di integrali impropri:

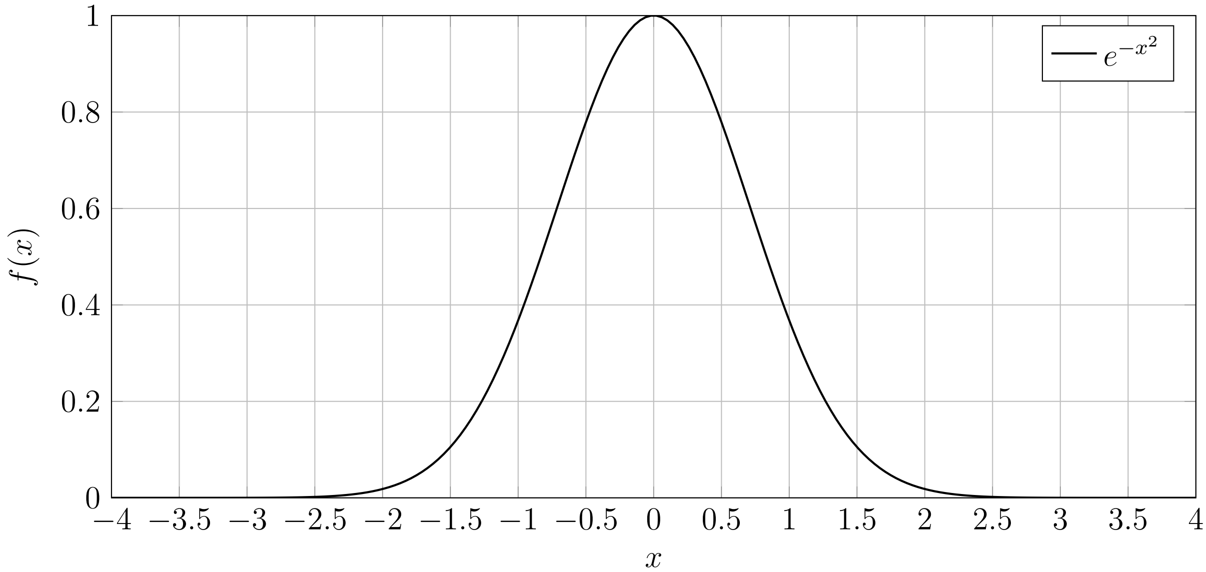
- Integrali calcolati su intervallo non limitato:

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx \qquad \int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx$$

- Integrali calcolati su intervallo limitato $[a, b]$in cui la funzione non è limitata in $x = a$ o $x = b$

Se l'integrale non ricade in nessuna di queste due categorie, posso ricondurlo ad una di esse spezzandolo in più parti.

23.4.0 Esempio 1

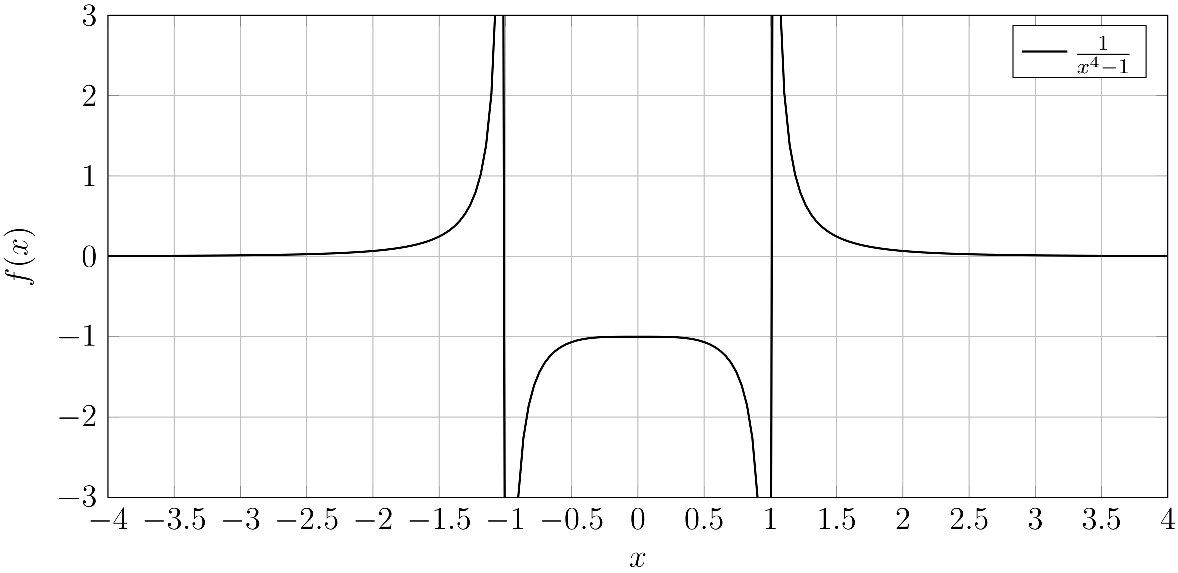


Per calcolare l'integrale seguente posso spezzarlo in due parti

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2}\,dx + \int_{a}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

in questo caso a deve essere necessariamente 0 in quanto in 0 la funzione <u>non</u> è definita

23.4.0 Esempio 2



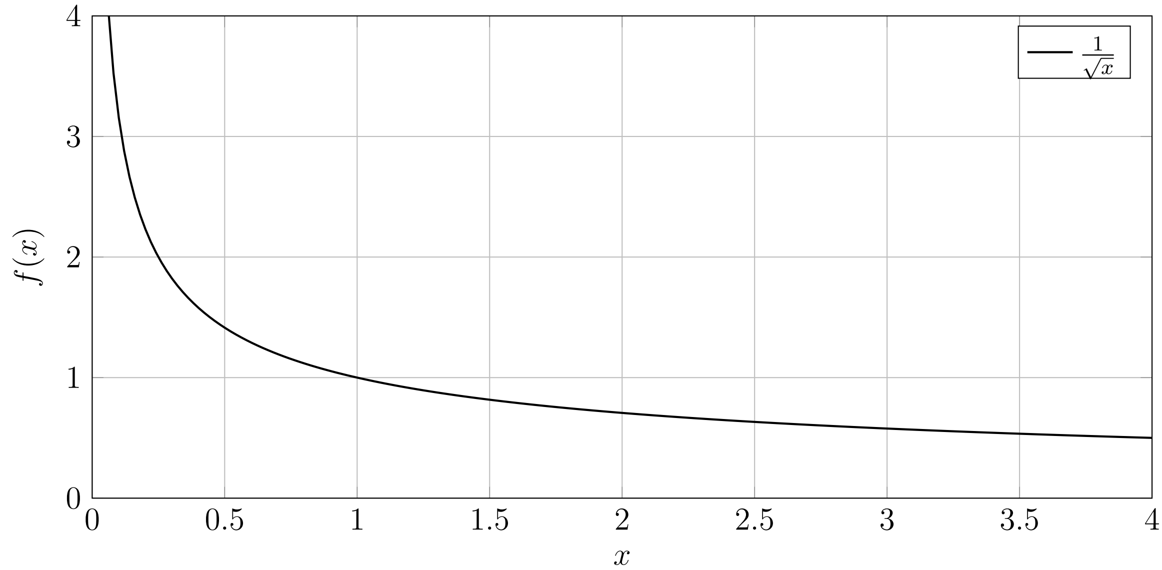
Per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx$$

devo spezzarlo nei punti $(-\infty,-3)\,,(-3,-1)\,,(-1,0)\,,(0,1)\,,(1,3)\,,(3,+\infty)$:

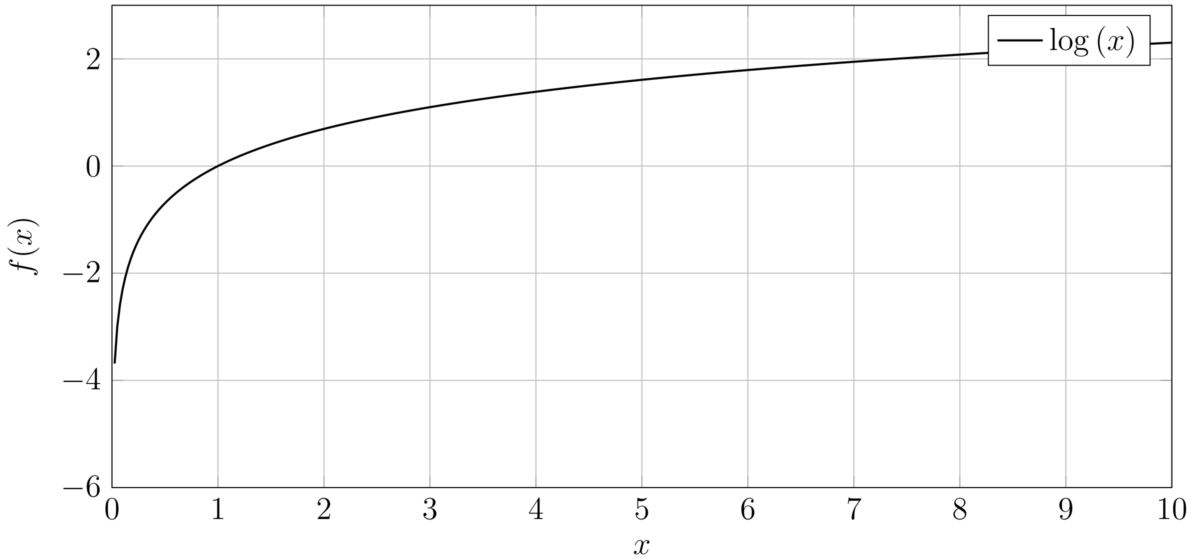
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int_{-\infty}^{-3} dx + \int_{-3}^{1} dx + \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx + \int_{1}^{3} dx + \int_{3}^{+\infty} dx$$

23.4.0 Esempio 3



$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \lim_{a\to 0}\int_a^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$

23.4.0 Esempio 4



$$\int_0^5 \log(x)\ dx = \lim_{a\to 0}\int_a^5 \log(x)\ dx$$

NB: un integrale improprio, essendo per definizione un limite, può non esistere. Ad esempio $\int_0^{+\infty} \sin(x)\ dx$ non esiste in quanto oscilla infinitamente

23.5 Teorema del confronto

Spesso, vogliamo determinare se un integrale improprio corverga o meno, ma non sappiamo calcolarne una primitiva. In questi casi torna utile il teorema del comfronto. L'idea è la seguente

- Determino se funzioni campione delle quali so calcolare la primitiva convergono o meno
- Utilizzo queste funzioni, confrontandole con quella di cui devo determinare la convergenza

In particolare, le funzione "campione" che useremo saranno funzioni del tipo

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

in particolare queste funzioni vengono dette gli infiniti campione.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

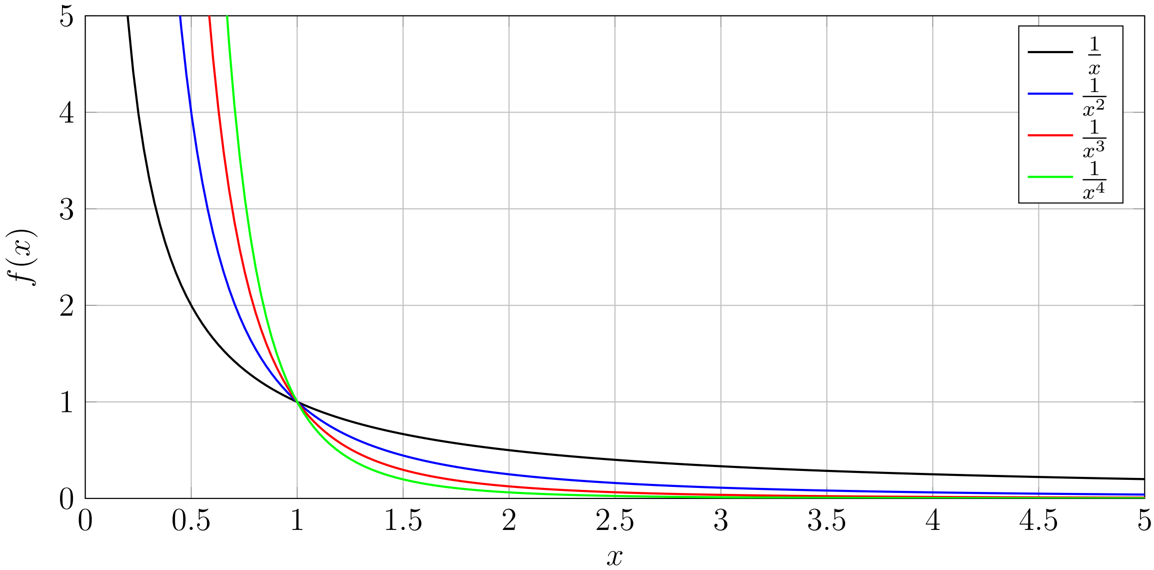
- Converge se $\alpha > 1$
- Diverge se $\alpha \leq 1$

Se invece considero l'integrale sull'intervallo $(0, 1)$ ho che:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

- Converge se $\alpha < 1$
- Diverge se $\alpha \geq 1$

Ciò risulta chiaro se osserviami i grafici delle funzioni



Teorema 33: *Criterio del confronto*

Sia $f(x)$ una funzione integranda, della quale voglio determinare l'ipotetica convergenza, su intervallo limitato o non. Sia $g(x)$ un infinito campione del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$. Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ almeno in un intorno del problema (estremi intervallo integrazione, $+\infty, -\infty$), allora:

$$\text{se } \int_E g(x)\ dx \text{ converge } \Rightarrow \int_E f(x)\ dx \text{ converge}$$

$$\text{se } \int_E f(x)\ dx \text{ diverge } \Rightarrow \int_E g(x)\ dx \text{ diverge}$$

Teorema 34: *Teorema del confronto asintotico*

Supponiamo che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$. Allora se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0, \infty$$

allora l'integrale delle due funzioni si comporta nello stesso modo (convergenza/divergenza è uguale)

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- Se $\int_E g(x)\ dx$ converge allora $\int_E f(x)\ dx$ converge
- Altrimenti non so dire nulla

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

- Se $\int_E g(x)\ dx$ diverge allora $\int_E f(x)\ dx$ diverge
- Altrimenti non so dire nulla

23.5.0 Assoluta integrabilità

Questo teorema può essere utile per applicare il teorema del confronto su funzioni che non sono sempre ≥ 0 o ≤ 0.

Teorema 35: *Assoluta integrabilità*

$$\text{Se } \int_E |f(x)|\ dx \text{ converge } \Rightarrow \int_E f(x)\ dx \text{ converge}$$

$$\text{Se } \int_E |f(x)|\ dx \text{ diverge } \rightarrow \text{ non posso affermare nulla}$$

Ad esempio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3}\ dx$$

non posso utilizzare il teorema del confronto asistotico perchè il seno non è sempre positivo. Posso tuttavia analizzare la funzione

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^3}\, dx$$

- Considero che la funzione integranda è maggiorata dalla funzione $\frac{2}{x^3}$

$$\frac{|\sin(x^2)|}{x^3} \leq \frac{2}{x^3}$$

- Siccome la funzione $\frac{2}{x^3}$ converge, allora anche $\frac{|\sin(x^2)|}{x^3}$ converge.
- Se $\frac{|\sin(x^2)|}{x^3}$ converge, per il teorema della assoluta integrabilità, anche $\frac{\sin(x^2)}{x^3}$

23.6 Trucco dell'integrazione per parti

Se devo decretare la convergenza/divergenza di un integrale improprio posso utilizzare il metodo dell'integrazione per parti. Consideriamo il seguente esempio:

23.6.0 Esempio 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

non posso applicare il teorema del confronto in quanto ogni funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \geq 1$ è definitivamente minore di $\frac{\sin x}{x}$ e converge. Contrariamente, $\frac{1}{x}$ è definitivamente maggiore, però diverge per $x \to \infty$ e non posso dunque affermare nulla. Se integro per parti tuttavia:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{x}(-\cos x) - \int -\frac{1}{x^2}(-\cos x)$$

applicando il limite posso decretare che l'integrale converge

23.6.0 Esempio 2

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx$$

stranamente, questo integrale converge ad un numero reale. Non posso applicare assoluta integrabilità perchè, chiaramente, l'integrale del suo valore assoluto diverge. Provo moltiplicando e dividendo per x (in modo da ottenere la derivata della composta), per poi integrare per parti:

$$\int \cos\left(x^2\right) = \int \frac{1}{x} x \cos\left(x^2\right) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\left(x^2\right)\right) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{2}\sin\left(x^2\right)$$

Visto che ogni membro converge, posso affermare che $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx$ converge

24 Equazioni differenziali

24.1 Definizioni

Definizione 37: *Equazione differenziale*

Con il termine equazione differenziale si intende una relazione tra una funzione incognita e le sue derivate. Posso interpretarla come una funzione di più variabili:

$$F\left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)\right) = 0$$

dove $t, u(t), \ldots, u^{(k)}(t)$ sono le incognite dell'equazione differenziale

La soluzione di un'equazione differenziale è un'equazione che risolve l'uguaglianza specificata

- **Ordine**: l'ordine di un'equazione differenziale è uguale al massimo ordine di derivazione presente nell'equazione
- **Eq diff. in forma normale**: una eq. diff. si dice in forma normale se si può "isolare" la derivata di ordine massimo:
$$u^{(k)} = \Phi\left(u^{(k-1)}, \ldots, u(t), t\right)$$
- **Eq. diff. autonoma**: se la incognita t compare solo come incognita della funzione incognita (e non compe coefficiente):
$$u^{(k)} + u^{(k-1)} + \ldots + u' + u = 0$$
- **Eq. diff. a variabili separabili**: se è del primo ordine, scritta in forma normale e si può scrivere nella seguente forma:
$$u' = f(t)\, g(u)$$
- **Eq. diff. lineare**: se la funzione u e le sue derivate non sono presenti all'interno di funzioni. Ha forma del tipo:
$$a_k(t)\, u^{(k)} + a_{k-1}(t)\, u^{(k-1)} + \ldots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u = f(t)$$
  - $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_k(t)$ sono detti coefficienti
  - $f(t)$ è detto termine noto
  - Se $f(t) = 0$ l'equazione lineare si dice omogenea
  - Se $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_k(t)$ sono costanti l'equazione è detta a coefficienti costanti

24.1.0 Esempio 1

$$f'(x) = f(x)$$

Quale equazione ha la derivata uguale alla equazione stessa? Esattamente l'esponenziale. Più precisamente le soluzioni di questa equazione sono infinite ed identificate dalla seguente funzione:

$$ke^x$$

24.1.0 Esempio 2

$$f'(x) = -f(x)^2$$

una qualsiasi soluzione del seguente tipo risolve la seguente eguaglianza:

$$f(x) = \frac{1}{t+c}$$

24.1.0 Esempio 3

$$f''(x) = -f(x)$$

noto che una soluzione è $n(x) = \cos(x)$. La famiglia delle soluzioni è $n(x) = c\cos(t), c \in \mathbb{R}$. Ancora più in generale, ogni funzione del tipo:

$$f(x) = c_1 \cos t(x) + c_2 \cos(x)$$

soddisfa l'eguaglianza. Nota che il numero di parametri che ottengo dipende dall'ordine dell'equazione

24.2 Problemi di Cauchy

Negli esempi precedenti ho ottenuto le cosiddette soluzioni generali delle equazioni differenziali. Se impongo un'ulteriore condizione sulla condizione generale ottengo il valore della costante (o delle costanti) in corrispondenza del quale è risolto il problema di Cauchy.

24.2.0 Esempio 1

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

- Condizione dell'equazione differenziale: ce^t
- Condizione iniziale: $u(0) = ce^0 \to c = 5$

Quindi la soluzione è $5e^t$

24.2.0 Esempio 2

$$\begin{cases} u' = -u^2 \\ u(5) = 7 \end{cases}$$

- Soluzione dell'equazione differenziale: $\frac{1}{t+c}$
- Condizione iniziale: $u(5) = 7$

Nota che le condizioni delle equazioni differenziali ordinarie devono essere tante quanto è l'ordine dell'equazione differenziale: ottengo infatti un sistema in cui devo trovare il valore a tutte le costanti ottenute trovando la soluzione generale

24.2.0 Esempio 3

$$\begin{cases} u'' + 3u' = u^2 + t^2 \\ u(5) = 7 \\ u'(5) = 22 \end{cases}$$

è un problema di Cauchy.

$$\begin{cases} u'' + 3u' = u^2 + t^2 \\ u(5) = 7 \\ u'(6) = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' + 3u' = u^2 + t^2 \\ u(5) = 7 \\ u''(5) = 22 \end{cases}$$

non sono problemi di Cauchy. Più in generale

Definizione 38: *Problema di Cauchy*

Data un'equazione differenziale ordinaria di ornine n, un problema di Cauchy associato deve:

- Specificare le condizioni iniziali in uno stesso punto
- Specificare le condizioni iniziali per le derivate di ordine $0, 1, \ldots, n-1$

Teorema 36: *Teorema di esistenza*

Consideriamo il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria. Defininiamo la funzione:

$$u^{(k)} = \Phi\left(u, u', u'', \ldots, u^{(k-1)}, t\right)$$

Se Φ è continua in ogni variabile allora esiste sempre almeno una soluzione

la funzione Φ è una funzione a più variabili. La sua continuità o la sua derivabilità si decreta "congelando" tutte le variabili meno che una e studiandone continuità/derivabilità

Teorema 37: *Teorema di unicità*

Consideriamo il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria. Defininiamo la funzione:

$$u^{(k)} = \Phi\left(u, u', u'', \ldots, u^{(k-1)}, t\right)$$

Se Φ è derivabile in tutte le variabili, allora la soluzione è unica

il cosiddetto "pennello" di Peano è un problema di Cauchy che presenta infinite soluzioni:

$$\begin{cases} u' = 3\left|u\right|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione $3\left|u\right|^{\frac{2}{3}}$ non è derivabile, quindi la soluzione non è unica. Nota che sia $u = 0$ che $u = t^3$ sono soluzioni del problema. Il problema presenta più di una soluzione

24.3 Edo a variabili separabili

$$u' = f(t)\, g(u)$$

Per trovare la soluzione ci sono 3 passaggi:

- Separazione
- Integrazione
- Ricavare

Esempio:

$$u' = t^3 u^2$$

- Separo le variabili: metto tutto ciò che dipende da u a sinistra e tutto ciò che dipende da t a destra, usando questo trucchetto bovino:

$$\frac{du}{dt} = t^3 u^2 \to \frac{du}{u^2} = t_3 dt$$

- Integro da entrambe le parti:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t_3 dt \to -\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c$$

- Ricavo u in funzione di t:

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 + c} \quad c \in \mathbb{R}$$

Se all'edo è associato un problema di Cauchy è necessario studiare la soluzione: il dominio della soluzione varia in base al valore di c trovato. Per questa ragione devo restringere il dominio della funzione trovata.

Devo restringere il dominio della funzione trovata al massimo insieme di definizione che contiene il punto indicato nella condizione iniziale

24.4 Tempo di vita ed esempi

Definizione 39: *Tempo di vita*

Trovata la funzione $u(t)$ soluzione di un problema di Cauchy, si dice tempo di vita l'estremo superiore dell massimo insieme di definizione contenente il punto t_0 che esprime la condizione di essistenza.

- Se $T = +\infty$ si dice che $f(t)$ ha esistenza globale nel futuro
- Se $T < +\infty$ ci sono due casi:
  - Se $\lim_{x \to T^-} f(t) = \pm\infty \to$ blow up
  - Se non c'è blow up ma $u(t)$ esce dal dominio di una o più funzioni presenti nell'equazione differenziale $\to$ break down. In genere (ma non sempre) questo si dtraduce nella seguente condizione

$$\lim_{x \to T^-} f'(t) = \pm\infty$$

24.4.0 Esempio Cauchy 1

$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = -5 \end{cases}$$

L'edo ha soluzione

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 + c}$$

- Determino c :

  $$u(0) = -\frac{4}{c} \to c = \frac{4}{5}$$

  quindi il problema di Cauchy ha soluzione $u(t) = -\frac{4}{t^4 + \frac{4}{5}}$

- Il massimo dominio di definizione contentente 0 è $\mathbb{R}$, quindi $u(t)$ ha esistenza globale sia nel passato che nel futuro

24.4.0 Esempio Cauchy 2

$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

L'edo ha soluzione

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 + c}$$

- Determino c :

  $$u(0) = -\frac{4}{c} = 0$$

  Cosa faccio? Non posso risolvere l'equazione ottenuta.

In questo caso il problema di Cauchy ha una soluzione. Tale soluzione si ottiene risolvendo la condizione iniziale:

$$u(t) = 0$$

in questo modo soddisfo sia la condizione iniziale $u(0) = 0$ e l'equazione differenziale in quanto $u' = t^3 u^2$

24.4.0 Esempio Cauchy 3

$$\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione differenzile è:

$$u(t) = \pm\sqrt{\frac{3}{c - 2t^3}}$$

Devo sceglere la radice positiva in quanto la condizione iniziale impone $u(0) = 5$.Impongo la condizione iniziale e ottengo

$$\sqrt{\frac{3}{c}} \to c = \frac{3}{25}$$

Quindi il problema di Cauchy ha soluzione

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{\frac{3}{25} - 2t^3}} = \sqrt{\frac{75}{3 - 50t^3}}$$

Posso procedere ora studiando la soluzione:

$$3 - 50t^3 > 0 \to t < \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$$

La funzione è quindi definita su $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{50}}\right)$. Posso dunque affermare che il tempo di vita della funzione è $T = \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$. Visto che $\lim_{t \to \sqrt[3]{\frac{3}{50}}^-} u(t) = +\infty$ la funzione ha un blow up

24.4.0 Esempio Cauchy 4 parametrico

$$\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

Per quali valori di α ho esistenza globale nel futuro?

Eseguo tutti i passi fatti per trovare le soluzioni del problema di Cauchy rispetto al parametro α e ottengo:

$$u(t) = \pm\sqrt{\frac{3}{-2t^3 + \frac{3}{\alpha^2}}}$$

24.4.0 Esempio Cauchy 4

$$\begin{cases} u' = u\sin(t) \\ u(0) = -2 \end{cases}$$

- Separo:

$$\frac{du}{u} = \sin(t)\,dt$$

- Integro:
$$\int \frac{du}{u} = \int \sin(t)\,dt \to \log|u| = -\cos t\,(t) + c$$
- Ricavo (tolgo il valore assoluto introducento $\pm$):
$$u(t) = \pm e^{-\cos(t)+c} = ce^{-\cos(t)}$$
- Determino c
$$u(0) = -2 \to c = -2e$$

La soluzione al problema di Cauchy è quindi:
$$u(t) = -2e \cdot e^{-\cos(t)}$$

24.4.0 Esempio 6 Cauchy

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 4 \end{cases}$$

- Separo:
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u} \to udu = -dt$$
- Integro e ricavo:
$$u(t) = \pm\sqrt{c-2t}$$
- Determino c
$$u(0) = \pm\sqrt{c} = 4 \to c = 14c = 14$$

La soluzione al problema di Cauchy è quindi:
$$u(t) = \sqrt{16-2t}$$

Studio la soluzione

- La soluzione è definita se $16 - 2t \geq 0 \to t \leq 8$
- L'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy è $(-\infty, 8)$
- Il tempo di vita è $T = 8$
- Visto che $\lim_{t\to T^-} u(t) = 0$, non c'è blow-up, ma c'è break-down, infatti $-\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sqrt{16-2t}}$ ha dominio $(-\infty, 8]$, mentre la funzione soluzione, ossia $\sqrt{16-2t}$ ha dominio $(-\infty, 8)$, ossia esce da dominio di definizione. Posso anche verificare con la derivata in questo caso:
$$\lim_{t\to 8^-} u(t) = -\infty$$

24.5 Equazioni differenziali lineari

Fatto generale importante: se tutti i coefficienti dell'equazione sono funzioni continuo in un intervallo (a, b), allora esiste una soluzione almeno nell'intervallo (a, b)

Teorema 38: *Spazio soluzioni equazione differenziale lineare*

L'insieme di tutte le soluzione di una equazione differenziale lineare di ordine n omogenea ($f(t) = 0$) è uno spazio vettoriale di ordine n. La soluzione dell'equzione si può dunque esprimere come combinazione lineare fra gli elementi di una sua qualsiasi base

Stringi stringe questo equivale a dire che mi ritrovero tante costanti $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_k$ quante l'ordine della suddetta equazione

Teorema 39: *Soluzione equazioni differenziali non omogenee*

Una equazione differenziale lineare non omogenea ha una soluzione che si può scrivere nella seguente forma:

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \ldots + c_n u_n(t) + \overline{u}(t)$$

dove

- $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ solo gli elementi di una base qualsiasi dell'insieme soluzione dell'equazione omogenea associata (ottenuta mettengo $f(t) = 0$)
- $\overline{u}(t)$ è una soluzione qualsiasi del sistema non omogeneo

La funzione $\overline{u}(t)$ può essere trovata adoperando alcuni stratagemmi. In reltà però non abbiamo un metodo che ci garantisca di trovarla. Dobbiamo tendenzialmente procedere "a tentoni"

25 Tecniche risolutive equazioni differenziali

25.1 Edo lineari di primo ordine

25.1.0 Equazioni a variabili separabili

La risoluzione di equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee è immediata e si vede ad occhio:

$$au' + bu = 0 \to u' = -\frac{b}{a}u$$

l'esponenziale fornisce una soluzione a questa equazione, in particolare

$$ce^{-\frac{b}{a}t}$$

è la famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale

25.1.0 Equazioni lineari non omogenee di primo ordine

Per risolvere un'equazione lineare non necessariamente autonoma del primo ordine con la seguente forma

$$u'(t) + a(t)\,u(t) = b(t)$$

posso utilizzare la tecnica del fattore integrante

- Trovo una primitiva qualsiasi si $a(t)$

$$A'(t) = a(t)$$

- Moltiplico entrambi i membri dell'equazione per $e^{A(t)}$
- Ottengo la derivata di un prodotto di funzioni a sinistra

$$u'(t)\,e^{A(t)} + a(t)\,u(t)\,e^{A(t)} = b(t)\,e^{A(t)}$$

$$d\left[ue^{A(t)}\right] = b(t)\,e^{A(t)}$$

- Integro da entrambe le parti e ricavo $u(t)$

25.2 Edo lineari di secondo ordine

- Scrivo polinomio associato a equazione lineare
- Trovo zeri del polinomio associato
- Seguo le soluzioni in base ai seguenti casi in base delta del polinomio

In particolare, avrò 3 casi a seconda del Δ del polinomio

- $\Delta > 0$
  - Ho due radici reali distinte: $\lambda, \mu \quad \lambda \neq \mu$
  - La base dell'insieme soluzione è costituita da

$$e^{\lambda t}, \quad e^{\mu t}$$

  - La funzione soluzione è quindi costituita da:

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0$
  - Ho una radice con molteplicità doppia λ
  - La base dell'insieme soluzione è costituita da:

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}$$

  - La funzione soluzione è quindi costituita da:

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}$$

- $\Delta < 0$
  - Il polinomio ha due radici complesse coniugate di forma $\alpha \pm i\beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - La base dell'insieme soluzione è costituita da:

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

  - La funzione soluzione è quindi costituita da:

$$c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

25.2 Esempi equazioni lineari

25.2.0 Esempio 1

$$u'' + 3u' - 4u = 0$$

ha polinomio associato

$$x^2 + 3x - 4 \rightarrow (x+4)(x-1)$$

quindi ho base

$$e^{-4t}, e^t$$

25.2.0 Esempio 2

$$u'' - 6u + 9u = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0$$

che ha quindi base

$$e^{3t}, te^{3t}$$

25.2.0 Esempio 3

$$u'' + 8u + 17u = 0 \rightarrow x^2 + 8x + 17 = 0$$

trova radici

$$x_{1/2} - 4 \pm \sqrt{16 - 17} = -4 \pm i$$

quindi ho radici complesse con $\alpha = -4$ e $\beta = 1$. La base sarà:

$$e^{-4t}\cos(t), e^{-4t}\sin(t)$$

25.2.0 Esempio 4

$$u'' - 4u' = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4)$$

Quindi ho base associata

$$e^{0t} = 1, e^{4t}$$

25.2.0 Esempio 5

$$u'' - 4u = 0 \to x^2 - 4 = 0 \to (x-2)(x+2) = 0$$

Quindi ho base associata

$$e^{2t}, e^{-2t}$$

NB: se la base è del tipo $e^{\alpha t}, e^{-\alpha t}$, allora un'altra base può essere ottenuta dividendo i componenti della base per 2:

$$\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh(2t), \quad \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh(2t)$$

25.2.0 Esempio 6

$$u'' + 4u = 0 \to x^2 + 4 = 0$$

il polinomio associato ha due radici complesse coniugate $x_{1/2} = \pm 2i$. Quindi $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ e la base sarà

$$e^{0t}\cos(2t) = \cos(2t), e^{0t}\sin(2t) = \sin(2t)$$

25.3 Equazioni lineari omogenee di ordine m

Generalizzando quanto detto nella *sezione 25.1* e *25.2* posso ragionare cercando gli elementi della base della famiglia delle soluzioni seguendo le seguenti regole.

> Innanzitutto, per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado n ha sempre n radici complesse

- Una radice reale λ di molteplicità 1 produce un elemento di forma

$$e^{\lambda t}$$

- Una radice reale λ di molteplicità m produce m elementi della seguente forma:

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

- Una coppia di radici complesse coniugate di forma $\alpha \pm i\beta$ con molteplicità 1 produce 2 elemendi di base:

$$e^{\alpha t}\cos(\beta), \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

- Una coppia di radici complesse coniugare di forma $\alpha \pm i\beta$ con molteplicità m produce $2m$ elementi di base con forma:

$$e^{\alpha t}\cos(\beta), e^{\alpha t}\sin(\beta t), te^{\alpha t}\cos(\beta), te^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta), t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

25.4 Equazioni lineari non omogenee

25.4.0 Tipo esponenziale

Per risolvere equazioni differenziali non omogenee del tipo

$$au'' + bu' + cu = e^{\lambda_1 t}$$

bisogna procedere a tentoni, prendendo come funzione (che tipo di funzioni, tramite loro combinazioni lineari, possono darmi una funzione del tipo $\lambda_0 e^{\lambda_1 t}$):

$$\overline{u}(t) = \lambda e^{\lambda_1 t}$$

- Prendo funzione $\overline{u}(t)$ del tipo $\lambda e^{\lambda_1 t}$
- Vedo se esiste un valore di λ che soddisfi l'equazione
- Ho due casi:
  - Se $\overline{u}(t)$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata (ossia $au'' + bu' + cu = 0$). Allora posso trovare un valore di λ che risolva l'equazione
  - Se $\overline{u}(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata allora è impossibile trovare un valore di λ che soddisfi l'equazione. Devo provare con $\overline{u}(t) = \lambda t e^{\lambda_1 t}$
  - Se non funziona nemmeno con questo devo provare con $\overline{u}(t) = \lambda t^2 e^{\lambda_1 t}$ e così via per ogni potenza di t

25.4.0 Tipo trigonometrico

Per risolvere equazioni differenziali non omogenee del tipo

$$au'' + bu' + cu = \sin(at) \qquad au'' + bu' + cu = \cos(at)$$

devo procedere a tentoni prendendo come funzione $\overline{u}$

$$\overline{u}(t) = \lambda \cos(at) + \mu \sin(at)$$

Alla fine otterrò una somma di seni e coseni sia a destra che a sinistra. Posso trovare i valori di λ e μ risolvendo un sistema

NB: se la funzione $\overline{u}(t)$ è soluzione del sistema omogeneo associato, devo provare moltiplicando per le potenze di t, come in *sottosezione 25.4*

25.4.0 Tipo polinomiale

Per risolvere equazioni differenziali non omogenee del tipo

$$au'' + bu' + cu = p(t)$$

devo procedere a tentoni prendendo come funzione $\overline{u}$

$$\overline{u}(t) = k_1 t^n + k_2 t^{n-1} + \ldots + k_{n-1} t + k_n$$

ossia il polinomio generico completo di grado n, dove n è il grado del polinomio $p(t)$

NB: questo tentativo non funziona quando 0 è tra le radici del polinomio dell'omogenea associata

---

Se il termine noto dell'equazione differenziale è dato dalla somma di diversi tipi(esponenziale, trigonometrico, polinomiale) la soluzione sarà data dalla somma delle soluzioni. Es

Esempio:

$$u'' + 3u' - 4u = \cos(2t) + t^3 + e^{5t} + e^{-4}t$$

risolvo le equazioni differenziali non omogenee:

$$\begin{aligned} u'' + 3u' - 4u &= \cos(2t) \\ u'' + 3u' - 4u &= t^3 \\ u'' + 3u' - 4u &= e^{5t} \\ u'' + 3u' - 4u &= e^{-4t} \end{aligned}$$

la soluzione dell'equazione differenziale originaria è data dalla somma delle soluzioni trovate, per via della linearità

25.5 Metodo di variazione delle costanti

Per risolvere equazioni diff. lineari non omogenee posso utilizzare anche questo metodo oltre che il medoto "a tentoni" spiegato in *sezione 25.4*. Esempio:

$$u'' - 3u' + 2u = t$$

25.5.0 Risoluzione tramite metodo "a tentoni"

- Trovo basi soluzione omogenea
  - $x^2 - 3x + 2 = 0 \to (x-1)(x-1) = 0$
  - Trovo $\lambda = 2$ e $\mu = 1$
  - La base è $e^t, \quad e^{2t}$
- Trovo soluzione particolare
  - Provo con polinomio completo di primo grado $\overline{u}(t) = at - b$
  - $0 - 3a + 2at + 2b = t$
  - Ottengo sistema

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases}$$

25.5.0 Risoluzione tramite metodo di variazione delle costanti

Noi sappiamo quali sono le soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Il metodo della variazione di costanti cerca una soluzione al sistema non omogeneo variando i coefficienti della base ottenuta, rendendoli funzioni di t. Se le basi sono

$$u(t) = ae^t + be^{2t}$$

allora la funzione diventerà

$$\overline{u}(t) = a(t)e^t + b(t)e^{2t}$$

Quindi il procedimento sarà il seguente

- Trovo $\overline{u}(t)$
- Calcolo la derivata prima $\overline{u}'(t)$
- Impongo che la somma dei termini contenenti le derivate di $a'(t)$ e $b'(t)$ si annullino
- Calcolo la derivata seconda $\overline{u}''(t)$ (ricorda di aver imposto che la somma di alcuni termini sia 0, risparmiando alcuni conti)
- Alla fine inserisco le funzioni $\overline{u}(t), \overline{u}'(t), \overline{u}''(t)$ nell'equazione diff.
- Tutti i termini contenenti i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ si devono cancellare, in quanto sono soluzioni dell'equazione omogenea
- Ciò che rimane è un'equazione del tipo

  $$a'(t)e^t + 2b'(t)e^{2t} = t$$

  che metterò a sistema con l'equazione trovata ottenuta dal calcolo della derivata, imponendo che la somma dei termino conententi le derivate $a'(t)$ e $b'(t)$ si annullasse
- Risolvo il sistema e trovo $a'(t)$ e $b'(t)$
- Integro per trovate $a(t)$ e $b(t)$

26 Altri metodi risolutivi equazioni diff particolari

26.0.0 Tecnica della riduzione di ordine

Un'equazione in cui manca il termine u, che contiene quindi solo le sue derivate, posso eseguire una sotituzione e ridurre l'ordine della edo. Esempio:

$$u'' = \frac{t}{t^2+1}u'$$

se sostituisco $u' = v(t)$ ottengo un'equazione del primo ordine:

$$v'(t) = \frac{t}{t^2+1}v(t)$$

risolveno l'equazione diff. trovo la famiglia delle soluzioni $v(t)$ e posso trovare $u(t)$ integrando. In questo caso trovo che

$$v(t) = \frac{2}{2-\log(t^2+1)}$$

Nota bene che la funzione non è definita per $t = \pm\sqrt{e^2-1}$. Se avessi un problema di Cauchy dovrei restringere la soluzione a uno di questi tre intervalli: $\left(-\infty, -\sqrt{e^2-1}\right)$, $\left(-\sqrt{e^2-1}, \sqrt{e^2-1}\right)$, $\left(\sqrt{e^2-1}, \infty\right)$

$$u(t) = \int_0^t v(s)\ ds = \int_0^t \frac{2}{2-\log(s^2+1)}\ ds$$

26.0.0 Metodo di d'Alembert

Vediamo un esempio applicato alle equazioni di Legiam

$$\left(1-t^2\right)u''-2tu'+\left(n\left(n+1\right)-\frac{m}{1-t^2}\right)u=0$$

con $n=1$ e $m=0$ ottengo:

$$\left(1-t^2\right)u''-2tu'+2u=0 \qquad \text{con } t\in(-1,1)$$

Noto che $u\left(t\right)=t$ è soluzione

$$0-2t+2t=0$$

26.0.0 Cambiamento di variabili

Ci sono delle equazioni conosciute (ad esempio quelle di eulero) del secondo ordine che si studiano per tempi positivi ad esempio:

$$t^2u''+btu'+cu=g\left(t\right) \qquad \text{con } t>0$$

il trucco sta nel cambiare variabile con $t=e^s$. Se u è soluzione allora

$$e^{2s}u''\left(e^s\right)+be^su'\left(e^s\right)+cu\left(e^s\right)=g\left(e^s\right)$$

26.0 Bestiario delle edo di primo ordine

26.0.0 Equazioni differenziali esatte

Si chiamano così per via di qualche cosa a me oscura che ha a che vedere con il differenziale. Faccio finta di aver capito

$$u'\left(t\right)=-\frac{P\left(t,u\right)}{Q\left(t,u\right)}$$

La soluzione in forma implicita di questo tipo di edo è data dalle soluzioni di :

$$F\left(t,u\right)=\int_{t_0}^{t}P\left(s,u\right)\;ds+\int_{u_0}^{u}Q\left(t_0,s\right)\;ds=0$$

Esempio:

$$\begin{cases} u'\left(t\right)=-\dfrac{t+u}{t-3u} \\ u\left(0\right)=1 \end{cases}$$

- Calcolo $F\left(t,u\right)$:

$$F\left(t,u\right)=\int_0^t\left(s+u\right)\;ds+\int_1^u\left(0-3s\right)\;ds$$

- Eseguo gli integrali. Tieno ben presente che u va trattata <u>come una costante</u> quando integri

$$\int_0^t s\;ds+\int_0^t u\;ds+\int_1^u -3s\;ds=\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t+\left[us\right]_0^t-\left[-\frac{3}{2}\right]_1^u$$

$$\frac{t^2}{2}+ut-\frac{3}{2}u^2+\frac{3}{2}$$

- Impongo $F(t,u) = 0$

$$u_{1/2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 3(t^2+3)}}{3}$$

- Visto che $u_{1/2}(0) = \pm 1$ devo scegliere la soluzione con il $+$ visto che in caso contrario non soddisferebbe la condizione iniziale

26.0.0 Equazione di bernoulli

$$u'(t) = P(t)\,u + Q(t)\,u^{\alpha} \quad \alpha \neq 0, 1$$

notiamo che una soluzione banale di questa equazione è $u = 0$. Per trovare le altre soluzioni l'idea è la seguente:

- Moltiplico ambo i membro dell'equazione per $u^{-\alpha}$ e ottengo

$$u^{-\alpha} u'(t) = P(t)\,u^{1-\alpha} + Q(t)$$

- Definisco una funzione ausiliaria $\phi = u^{1-\alpha}$. Noto che quando derivo la funzione ϕ ottengo:

$$\phi'(t) = (1-\alpha)\,u^{-\alpha} u'(t) \quad \to \quad \frac{\phi'(t)}{(1-\alpha)} = u^{-\alpha} u'(t)$$

- Sostituisco $\phi(t)$ nel membro destro dell'equazione originaria, e $\phi'(t)$ nel membro sisnistro

$$\frac{\phi'(t)}{1-\alpha} = P(t)\,\phi(t) + Q(t)$$

- Ottengo quindi un'equazione lineare che posso risolvere tramite il metodo del fattore integrante

$$\phi'(t) = (1-\alpha)\,P(t)\,\phi(t) + (1-\alpha)\,Q(t)$$