Analisi 1

Mattia Marini

12.09.22

Indice

Teoremi e Assiomi

Formule

Incomprensioni

Definizioni

1 Introduzione

Romeo Brunetti(progesssore): *romeo.brunetti@unitn.it*
Valentino Abram(esercitatore): *valentino.abram@unitn.it*

1.1 Argomenti corso

- Continuità
- Derivabilità
- Integrabilità

1.2 Argomenti esercitazioni

- Esercizi per casa
- Esercizi Ddi autovalutazione

1.3 Moodle

Tutto ciò che viene affrontato sta sul sito **moodle**. Ci si arriva da esse3

1.4 Libri di testo

- Canuto e Tabacco - Pearson - Analisi 1

1.5 Esami

- Solo scritti
- 2 esami preliminari (5 novembre, 21 dicembre) + 5 scritti annuali
- Se si passa primo preliminare non si passa NON si può fare il secondo
- Se entrambi i preliminari vanno bene si può decidere di accettare un voto che è media pesata fra questi due anziche fare i 5 esami canonici
- 15 domande a risposta multipla con 2 ore di tempo
- Ogni esercizio vale 2 punti, **risposta errata = -0.4**
- Portare **carta di identità**
- Scrivere nome cognome e matricola su foglio di bella
- Sono concessi **talvolta** i formulari: 1 foglio A4 con tips

2 Insiemistica

Per dare una definizione di insieme rigorosa serve matematica molto complessa. Noi useremo definizione "ingenua"

2 definizioni di insieme
- Per elenco: enumero nomi oggetti
- Per proprietà: es. tutti gli studenti unitn mancini

Per elenco:

$$A = \{b, \beta, A, Brunetti\}$$

$$\boxed{\text{OSS: le ripetizioni non contano: } \{a, a, a, b, b, b\} = \{a, b\}}$$

Per proprietà:

$$A = \{\text{tutti gli studenti mancini}\}$$

2.1 Simboli

2.1.1 Appartiene

A sinistra va l'elemento, a destra l'insieme

$$\underbrace{b}_{elemento} \in \underbrace{A}_{insieme}$$

2.1.2 Contenuto

B è contenuto o uguale a A

$$B \subseteq B$$

2.1.3 Strettamente contenuto

A è contenuto ma diverso da B

$$A \subsetneq B$$

2.1.4 Unione

$$A \cup B = \left\{ x \underbrace{:}_{\text{tale che}} \quad x \in A \underbrace{\text{oppure}}_{V} x \in B \right\}$$

2.1.5 Intersezione

$$A \cap B \{x : \quad x \in A \text{ e } x \in B\}$$

2.1.6 Differenza

$$A \setminus B \{x : \quad x \in a \text{ e } x \notin B\}$$

2.1.7 Differenza simmetrica

$$\begin{aligned} A \triangle B &= A \cup B \\ &= \{x : \quad x \in A \text{ XOR } \} \\ &= \{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \end{aligned}$$

2.2 Insieme delle parti

Dato un insieme A si indica con P(A) l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A (compresi l'insieme vuoto e A stesso)

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$P(A) = \{\{1, 2, 3\}, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

OSS: L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme

OSS: Se un elemento di un insieme è un insieme, questo va trattato come insieme

2.3 Prodotto cartesiano

Si dice prodotto cartesiano e di indica con $A \times B$ l'insieme delle coppie (a,b) in cui $a \in A$ e $b \in B$ ordinate

Esempio:

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 4\}$$
$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

2.4 Funzioni fra insiemi

Consiste di 3 elementi:

- Insieme di partenza A
- Insieme di arrivo B
- Legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza A associ un unico elemento dell'insieme di arrivo B

$$f : A \to B \quad \underbrace{f\left(\underbrace{a}_{\text{elemento di A}}\right)}_{\text{Elemento di B}}$$

NB: Affinchè f possa essere definita una funzione, devono essere collegati tutti gli elementi di A e lo stesso elemento in A non può collegarne due diversi in B

2.5 Proprietà delle funzioni

2.5.1 Iniettive

$f : A \to B$ è iniettiva se ad ogni coppia di elementi distinti di A associo una coppia di elementi distinti di B

$$a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Stringi stringi *non esistono elementi distinti che "puntano" allo stesso*

2.5.2 Surgettive

$f : A \to B$ è surgettina se ad ogni elemento di B ne è associato almento uno in A

$$\forall b \in B \,\exists\, a \in A : f(a) = b$$

Stringi stringi *ogni elemento di B deve essere puntato da almeno un elemento di A*

2.5.3 Bigettive

$f : A \to B$ è bigettiva (o corrispondenza biunivoca) se è sia surgettina che iniettiva
NB: Se f è bigettiva allora $|A| = |B|$

2.5.4 Invertibili

$f : A \to B$ è invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

oppure

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

$$\boxed{\text{NB: } f : A \to B \text{ è invertibile se e solo se f è bigettiva}}$$

2.6 Insiemi numerici

- $\mathbb{N}$ numeri naturali $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathbb{Z}$ numeri interi $\{0, +1, -1, +2, -2\}$
- $\mathbb{Q}$ numeri razionali $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right\}$ $\frac{m}{q}$ con $q \neq 0$
- $\mathbb{R}$ numeri reali $\left\{\sqrt{2}, \right\}$
- $\mathbb{C}$ numeri complessi

2.7 Esempi funzioni

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n + 3$$

Iniettiva ma non biettiva(0,1,2 non vengono usati)

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = n + 3$$

Iniettiva biettiva e dunque invertibile

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n^2$$

Iniettiva ma non suriettiva

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = n^2$$

2.8 Immagine e controimmagine

L'i mmagine di un un sottoinsieme C di A è l'insieme dei punti di B collegati da una funzione $fA \to B$

$$I_B = \{f(a) : a \in A\}$$

La controimmagine di un sottoinsieme D di B è l'insieme dei punti di A le cui frecce arrivano in D

$$I_A^{-1} = \{a \in A : f(a) \in B\}$$

2.9 Esteremi superiori ed inferiori di un insieme

Definizione 1: *Estremi superiori e inferiori*

Sia $A \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0$ L'estremo superiore di A si indica con supA e vale:

- $+\infty$ se A non è limitato superiormente
- Il minimo dei maggioranti di A se è limitato superiormente

NB: supA e infA esistono sempre! Esempi:

- $(3, 7]$ sup=7 inf=3 min non esiste max=7 i

Incomprensione - 09:43:11

Teorema 1: *Esistenza estremo superiore*

Se $A \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$ allora supA esiste.

Dimostrazione:

- Se A non è limitato superiormente allora per definizione supA= $+\infty$
- Se A è superiormente limitato l'insieme B dei suoi maggioranti non è vuoto
- Visto che B è "tutto a destra" di a allora esiste un elemento C separatore (assioma di continuità)
-
$$a \leq c \forall a \in A \quad \text{(c è maggiorante)} \ \to c \in B$$
$$c \leq b \forall b \in B \text{ (c è minorante di B)}$$

2.10 Caratterizzare i sup e gli inf

- supA $= +\infty$ se $\exists a \in A$ t.c. $a \geq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$
- infA $= -\infty$ se $\exists a \in A$ t.c. $a \leq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$

- supA = L $\in \mathbb{R}$ se:
  - a è maggiorante
  - $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \epsilon$
    (se sposto di una quantità infinitesimale L verso A , trovo un elemento di A che è maggiore di L)

Esempi:

- $A = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$
  - infA=minA=0
  - supA=maxA=4

Definizione 2: *Grafico di una funzione*

Si dice grafico di f è il sottoinsieme del prodotto $A \times B$

$$graf\,(f) = \{(a,b) \in A \times B : f\,(a) = b\} \qquad \text{per proprietà}$$

$$graf\,(f) = \{(a, f\,(a)) : a \in A\} \qquad \text{per elenco}$$

2.11 Intervalli

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Limitato con massimo e minimo

$$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

Limitato con minimo ma senza massimo

$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

Limitato ma senza massimo e minimo

3 Principio di induzione

Principio che non si può dimostrare e necessita di due ingredienti

- Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$
- P_n = affermazione che contenga al suo interno un paramentro$n \in \mathbb{N}$ che sia vera o falsa

Esempi:

- $n^2 = n + 6$ →vera solo per $n = 3$
- $2^n \geq n + 6$ →vera per $n \geq 4$ →necessita principio di induzione

- Se A contene n elementi allora $P(a)$ contiene 2^n elementi

Principio di induzione consiste in due passi fondamentali:

- *Passo base*Supponiamo che l'affermazione P_0 sia vera
- *Passo intuitivo*Per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera
- Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

NB: il punto di partenza **conta**

- *Passo base* Supponiamo che l'affermazione P_{2022} sia vera
- *Passo intuitivo* Per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera
- Allora P_n è vera $\forall n \in [2022, \infty]$. Devo controllare manualmente che sia vera anche per $[0, 2022]$

NB: la dimostrazione procede come cascata del domino

- *Passo base* Supponiamo che l'affermazione P_{2022} sia vera
- *Passo intuitivo* Per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera $\forall n \geq 1$
- Dimostrazione non procede perchè paso base non vale per n=0

3.1 Dimostrazione 1

Dimostrazione che $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

- *Passo base* Verifico che P_0 è vera $\rightarrow$basta sostituire $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Visto che P_n è vera per *hp* scrivo che

$$\underbrace{[0+1+2+3\ldots+n]+(n+1)}_{\text{somma dei primi n+1 numeri}} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

- Raccolgo a destra e ottengo

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

In alternativa posso usare il metodo di gauss per verificare questa hp. (Divido i numeri da 0 a n in due e li sovrappongo al contrario)

3.2 Dimostrazione 2

Dimostrazione che $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- *Passo base* $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0$
-
$$\underbrace{\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots n^2\right]}_{\text{Ho dimostrato quanto vale in passo base}} (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\ f(n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ f(n+1) &= f(n) + (n+1)^2 \\ \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\ (n+1)\left(2n^2+7n+6\right) &= (n+1)\left(2n^2+7n+6\right) \end{aligned}$$

- Applico algebra e dimostro che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.3 Dimostrazione 3

Dimostrazione che $\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

- *Passo base* $1 = \frac{a-1}{a-1}$
-
$$\left[1 + a + a^2 \ldots a^{k+1}\right] = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + (a)^{n+1}$$

3.4 Dimostrazione 4

Dimostrazione che $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- *Passo base verificato* $2^0 \geq 0$
-
$$2^{n+1} \geq n+1 \to 2 \cdot \underbrace{2^n}_{\geq n} \geq n+1$$

$$2 \cdot 2^n \geq 2n \text{ dato che } 2^n \geq n \text{ per hp}$$

- Verifico che $2n \geq n + 1 \forall \mathbb{N} \in [1, \infty]$ i

3.5 Disuguaglianza di bernulli

Formula 1: *Disuguaglianza di Bernoulli*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x > -1$$

- *Passo base verificato*
- *Passo induttivo*

$$\underbrace{(1+x)^{n+1}}_{(1+x)^n(1+x)} \geq 1+x\,(n+1)$$

4 Proprietà dei numeri reali

- Proprietà algebriche
- Proprietà ordinamento
- Assioma di continuità

4.1 Proprietà algebriche somma

- Proprietà commutativa $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- Proprietà associativa $(a+b)+c=a+(b+c)\,\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
- Esistenza elemento neutro $\exists 0 \in \mathbb{R}$ t.c $a+0=a$
- Esistenza elemento opposto $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$ t.c.$a+b=0$

4.2 Proprietà algebriche prodotto

- Prorpietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a \forall a,b \in \mathbb{R}$
- Proprietà associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
- Esistenza elemento neutro $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.c $a \cdot 1 = a$
- Esistenza elemento opposto $\forall a \in \{\mathbb{R}-\{0\}\} \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 0$
- Proprietà distributiva $a\,(b+c)=ab+bc$

4.3 Proprietà ordinamento

- Riflessiva se $x \leq x$
- Antisimmetrica se $x \leq y$ e $x \geq y$ alora $x=y$
- Transitiva se $x \leq y$ e $y \leq z$ alora $x \leq z$
- se $y \leq x$ allora $zy \leq zx \quad \forall z \in \mathbb{R}^+$

4.4 Assioma di continuità

Assioma 2: *Assioma di continuità*

Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti dei numeri reali. Supponiamo che ogni elemento di A sia minore o uguale a B. Per quando i due insiemi siano vicini esiste almeno un numero reale che stia fra a e b ossia:

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$$

Se C appartiene sia ad A che a B questo elemento è unico NB: l'assioma di continuità vale per i numeri reali $\mathbb{R}$ ma non vale per i razionali $\mathbb{R}$ ad esempio con i due insiemi seguenti

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0ex^2 < 2\right\} \tag{1}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0ex^2 > 2\right\} \tag{2}$$

Unico elemento separatore è $\sqrt{2}$, numero che è reale

NB: c può essere unico nel caso di insiemi che hanno come intersezione c stesso ma anche in insiemi con intersezione vuota: es R^- e R^+

Definizione 3: *Densità degli insiemi*

Siano A e B insiemi non vuoti. Si dice che A è denso in B se per ogni elemento $b_1, b_2 \in B$ esiste un elemento in A tale che $b_1 \leq a \leq b_2$

Definizione 4: *Maggiorante e minorante*

Si dice che un numero k reale è un maggiorante del sottoinsieme A se $k \geq a \forall a \in A$
Si dice che un numero k reale è un minorante del sottoinsieme A se $k \leq a \forall a \in A$

NB: maggioranti e minoranti non devono esistere necessariamente ad esempio in $\mathbb{R}^+$ o in $\mathbb{N}$ non esiste maggiorante

NB: se esistono, maggioranti e minoranti non sono unici

Definizione 5: *Insiemi limitati superiormente/inferiormente*

Dato un insieme A non vuoto questo di dice limitato superiormente su esiste un suo maggiorante
Dato un insieme A non vuoto questo di dice limitato inferiormente se esiste un suo minorante
Dato un insieme A non vuoto questo di dice limitato se esiste un suo maggiorante e un suo minorante

$$A \in \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \text{ è limitato se e solo se } \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a| \leq k \forall a \in A$$

Definizione 6: *Massimo/minimo insieme*

Sia $A \in \mathbb{R}$ non vuoto si dice che $M \in \mathbb{R}$ è massimo di A e si indica con $M = max\left(A\right)$ se:

- $a \leq M \quad \forall a \in A$ ossia M è un maggiorante
- $M \in A$

NB: se un insieme ha massimo o minimo, questi sono necessariemente unici

5 Polinomi

$P\left(x\right)$ nella variabile x di grado k è un oggetto del tipo

$$p\left(x\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$$

5.1 Operazioni polinomi

5.1.1 Somma Polinomi

Considero $P\left(x\right)$ e $Q\left(x\right)$, rispettivamente di grado n e m con $n \leq$

- Completo $P\left(x\right)$ i modo tale che abbia esponenti fino a m

$$P\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k$$

- Somma è uguale a:

$$\left(p+q\right)\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k + b_k\right) x^k$$

$$Q\left(x\right) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

5.1.2 Moltiplicazione

Dato un polinomio $P\left(x\right)$ e un fattore $k \in \mathbb{R}$

5.1.3 Moltiplicazione fra polinmoni

Praticamente applico proprietà distributiva

5.2 Divisione fra polinomi

Dato $P(x)$ e $Q(x)$ con $Q(x) \neq 0$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Teorema 3: *Divisione fra polinomi*

Dati due polinomi $P_1(x), P_2(x)$ di grado n e m con $n \geq m$ esistono 2 polinomi $Q(x) eR(x)$ tali che

$$P_1(x) = P_2(x)\, Q(x) + R(x)$$

Il grado di R è strettamente minore del grado di P_2

5.2.1 Algoritmo standard divisione

- Scrivo polinomio completo ($12x^3 + 0x^2 + x + 6$)
- Divido grado massimo di $(P(x))$ per grado massimo di $Q(x)$
- Moltiplico risultato ottenuto e sottraggo con ultimo polinomio ottenuto a sx

Tabella 1: Divisione fra polinomi

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0x^4+2x^3+0x^2+x+3 & x^3+3x \\ \hline
x^5+0x^4+3x^3+0x^2+0 & \underbrace{x^2}_{\text{Step 1}} \; \underbrace{-1}_{\text{Step 2}} \\
0+0-x^3+0+x-3 & \\
0+0-x^3+0+-3x+0 & \\
\underbrace{\underline{0+0+0+0+4x+3}}_{\text{Resto } R(0)} &
\end{array}
$$

5.2.2 Algoritmo di ruffini

Algoritmo utilizzabile solo se il divisore è di grado 1, nella forma $D(x) = ax + c$ con $a = 1$

- Scrivo polinomio da dividere completo in alto
- Scrivo opposto termine noto divisore in basso a sinistra
- Riporto il primo termine del polinomio da dividere
- Moltiplico fila in basso per termine a sinistra
- Sommo fila 1 con fila due
- Resto è cella in basso a destra

Tabella 2: Teorema di ruffini

	1	0	4	1
$\underbrace{1}_{\text{opposto termine noto divisore}}$		1	1	5
	$\underbrace{1}_{\text{riporto}}$	1	5	6

$$\frac{x^3+4x+1}{(x-1)} = \left(x^2+x+5\right) + \frac{6}{(x-1)}$$

Teoremi utili:

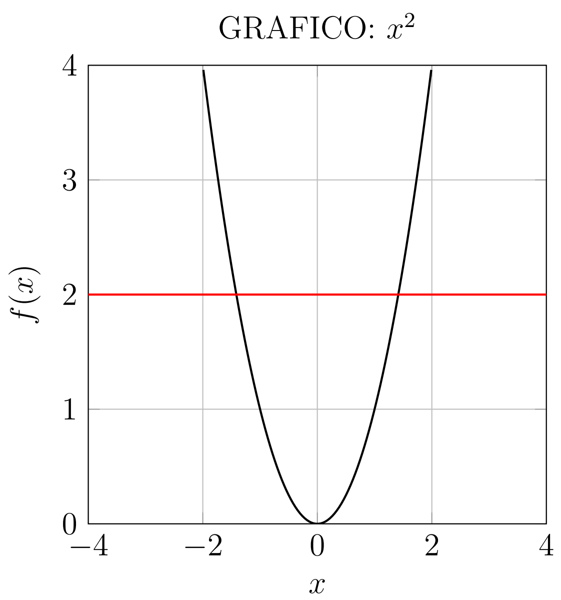
Teorema 4: *Divisione per polinomio di grado 1*

Dati due polinomi $P(x)$ e $Q(x) = x - c$ condizione necessaria e sufficiente affinchè $P(x)$ sia divisibile per $Q(x)$ è che $P(c) = 0$, in quanto posso scrivere $P(x)$ come $(x-c)\cdot(\ldots)$

Definizione 7: *Radice di un polinomio*

Definizione: Se a e tale per cui $P(a) = 0$, a viene detto **radice** del polinomio $P(x)$

Esempio 2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- Non è iniettiva
- Non è surgettiva

5.3 Dimostrazione teorema fondamentale dell'algebra

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n, questo ammette al massimo n radici distinte

- Passo base: $n = 0$ quindi $P(x) = k$ con $k \neq 0$
- Passo induttivo: Supponiamo che il polinomio $P(x)$ di grado $(n+1)$ sia divisibile per $(x-a)$. $P(x)$ sarà del tipo:

$$P(x) = \underbrace{(x-a)}_{\text{Soluzione 1}} \underbrace{Q(x)}_{\text{Grado n per hp}}$$

- $P(x)$ ha dunque n+1 soluzioni

5.4 Polinomio irreducibile

Teorema 5: *Irriducibilità dei polinomi*

Un polinomio P a coefficienti reali di grado $x \geq 1$ è detto irriducibile se non esiste un polinomio D di grado n con $0 < m < n$ che divida esattamente P

NB: nei numeri reali i soli polinomi irreducibili sono quelli di grado 1 o di grado 2 con Δ negativo

NB: se i coefficienti del polinomio $p(x)$ sono numeri interi, le sue radici vanno cercate fra i sottomultipli interi del termine noto di $P(x)$.

6 Funzioni e grafici

6.1 Grafico di una funzione

NB: Cartesio era un bastardo e bullizzava Fermat

6.2 Definizione operative

6.2.1 Iniettività

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha al massimo una soluzione
- In modo equivalente , f è iniettiva se il suo grafico incontra ogni retta parallela all'asse delle x al più in un punto

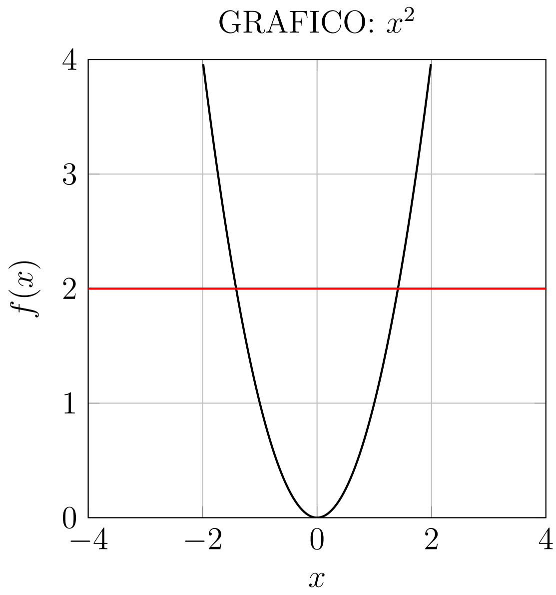
6.2.2 Surgettività

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione
- In modo equivalente, f è surgettiva se ogni retta parallela all'asse delle x incontra il suo grafico in almeno un punto

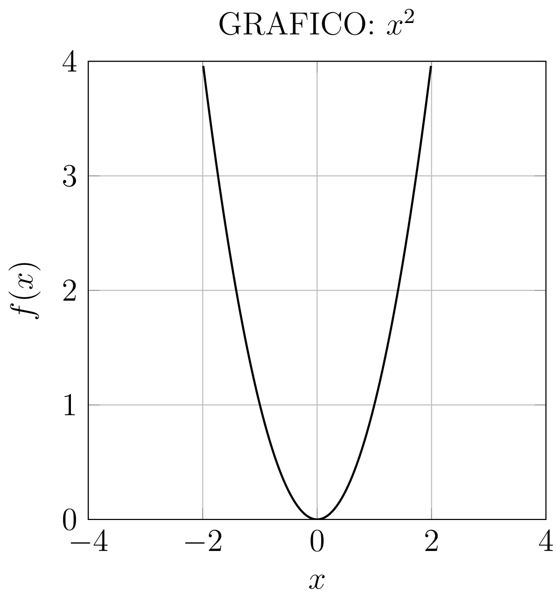
6.2.3 Esempi

Esempio 2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



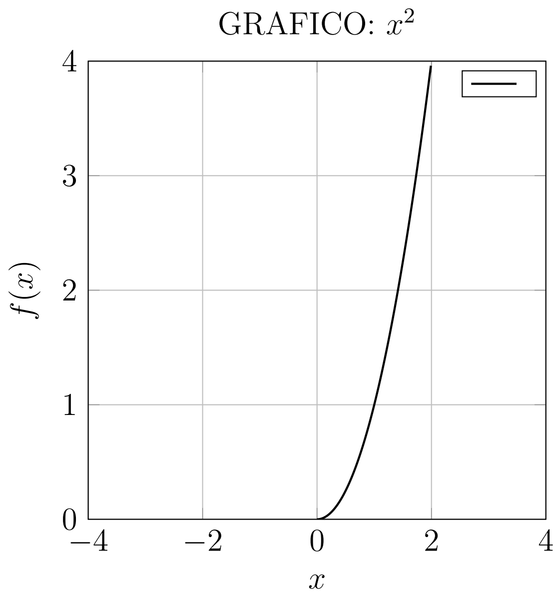
- Non è iniettiva
- Non è surgettiva

Esempio 2 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$



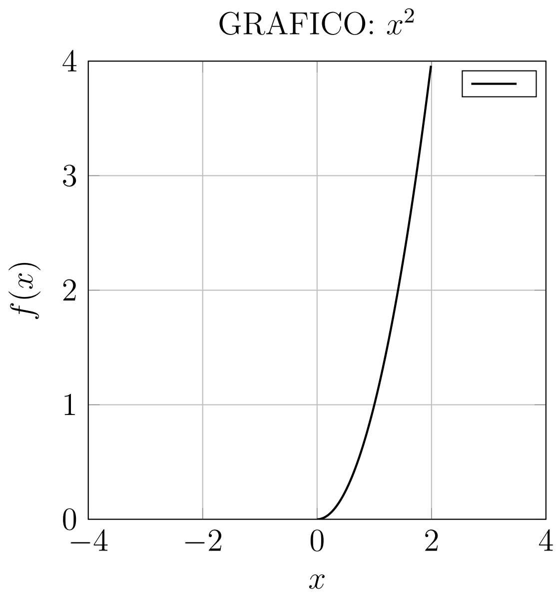
- Non è iniettiva
- E' suriettiva

Esempio 3: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$



- E' iniettiva
- Non è surgettiva

Esempio 3: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

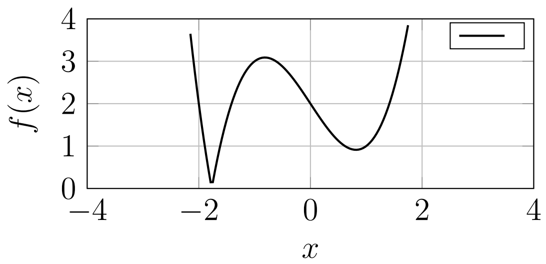


- E' iniettiva
- E' surgettiva

6.3 Operazioni sui grafici

- $f(x) \to f(x) + x$ traslazione in verticale (se c è positivo verso l'alto)
- $f(x) \to f(x + c)$ traslazione in orizzontale (se c è positivo verso sinistra)
- $f(x) \to -f(x)$ diventa speculare rispetto ad asse x
- $f(x) \to f(-x)$ diventa speculare rispetto all'asse y
- $f(x) \to |f(x)|$ ogni parte negativa diventa ribaltata verso l'alto
- $f(x) \to f(|x|)$ la parte del grafico con $x \geq 0$ viene riflessa rispetto all'asse y

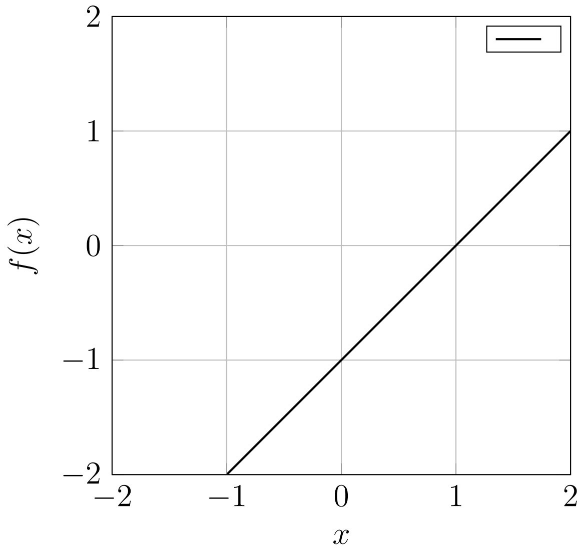
GRAFICO:

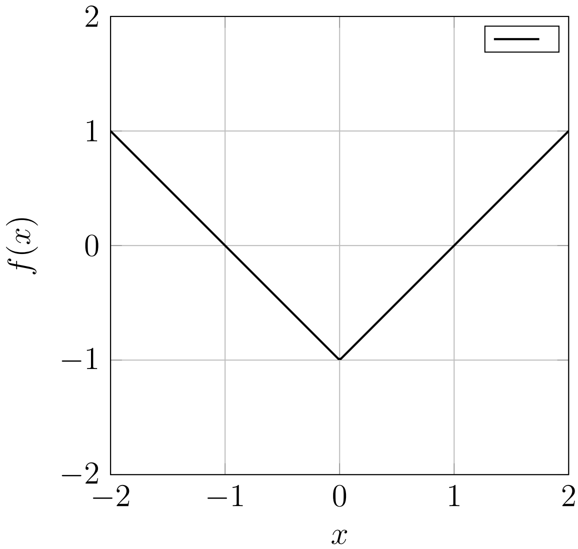


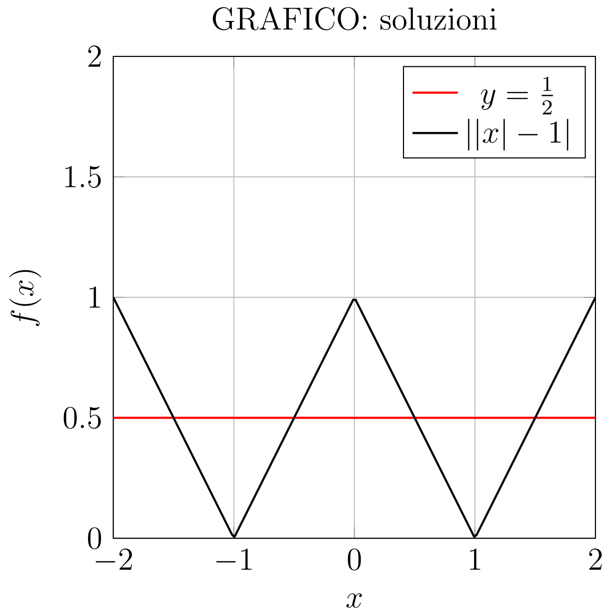
6.4 Risoluzione di equazioni per via grafica

Esempio 1:

$$||x| - 1| = \frac{1}{2}$$





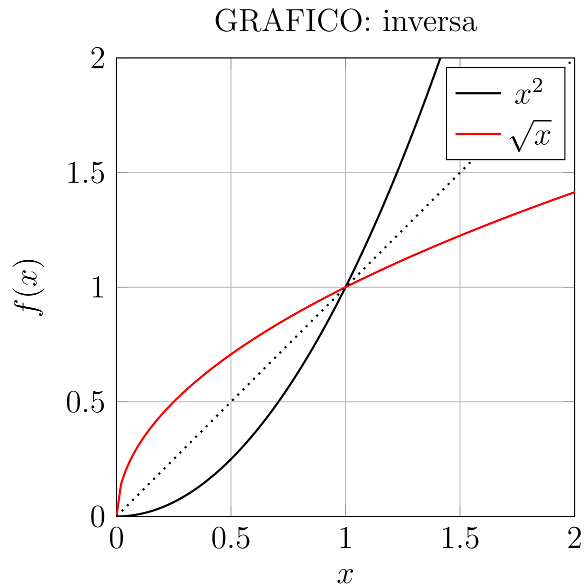


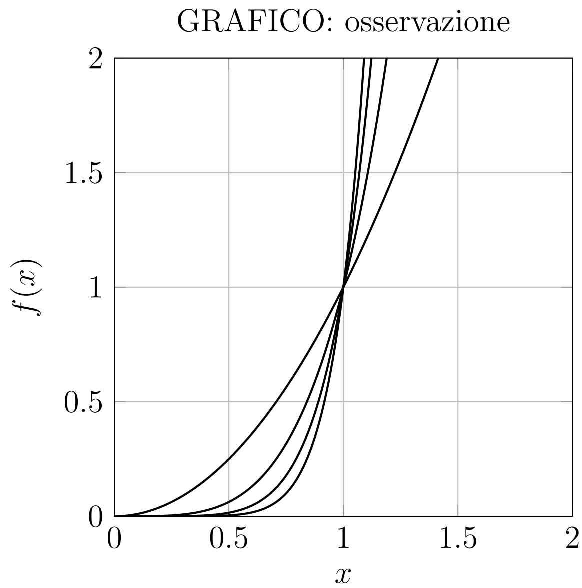
Esercizio: determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ quali sono le soluzioni dell'equazione

$$\left|(x+3)^3 - 2\right| = \lambda$$

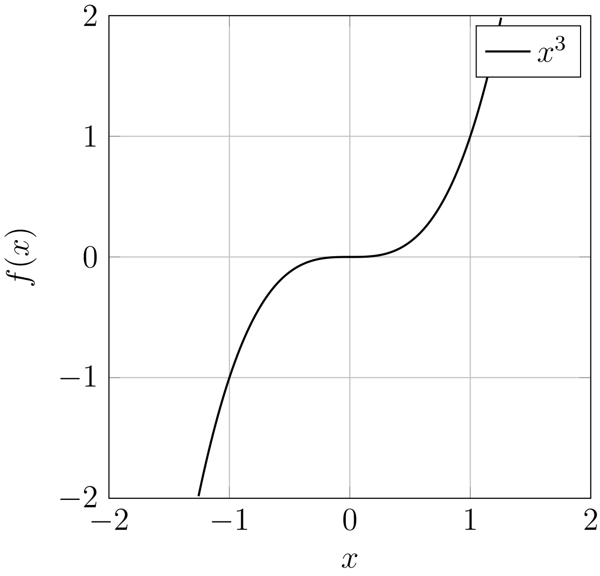
7 Potenze, esponenziali, funzioni trigonometriche

7.1 Potenze pari



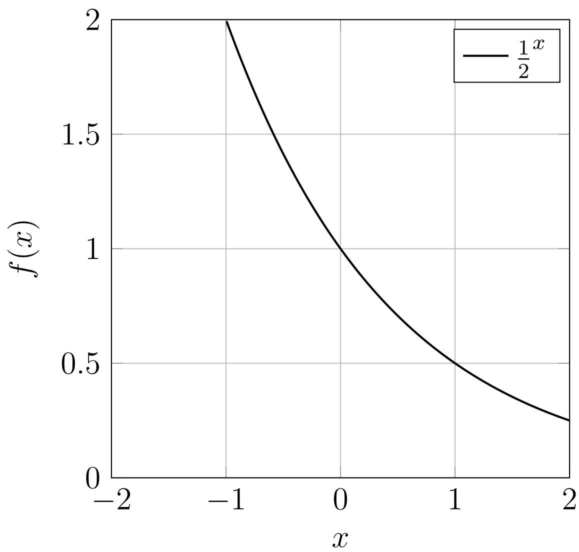


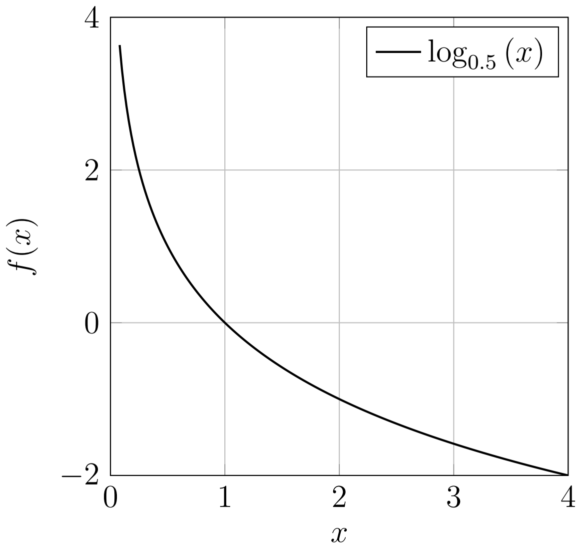
7.2 Potenze dispari



OSS: se una funzione $f(x)$ è iniettiva e $a = b$ allora $f(a) = f(b)$. Se $a > b$ allora $f(x) > f(b)$ se f è crescente

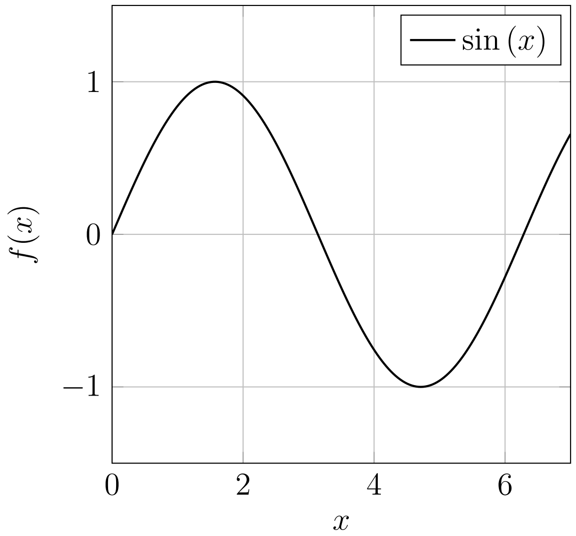
7.3 Esponenziale e logaritmo

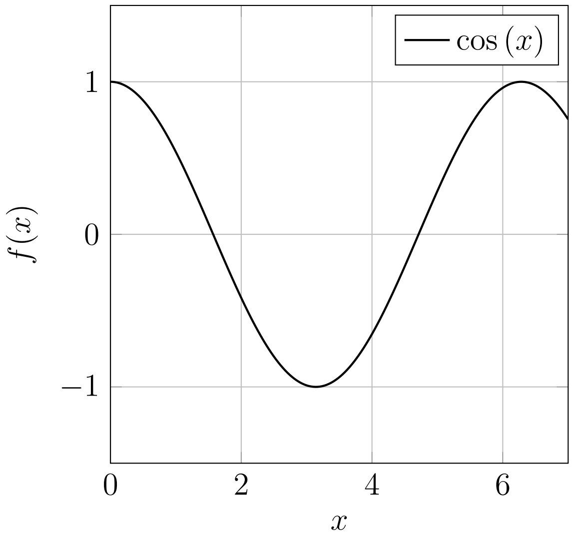


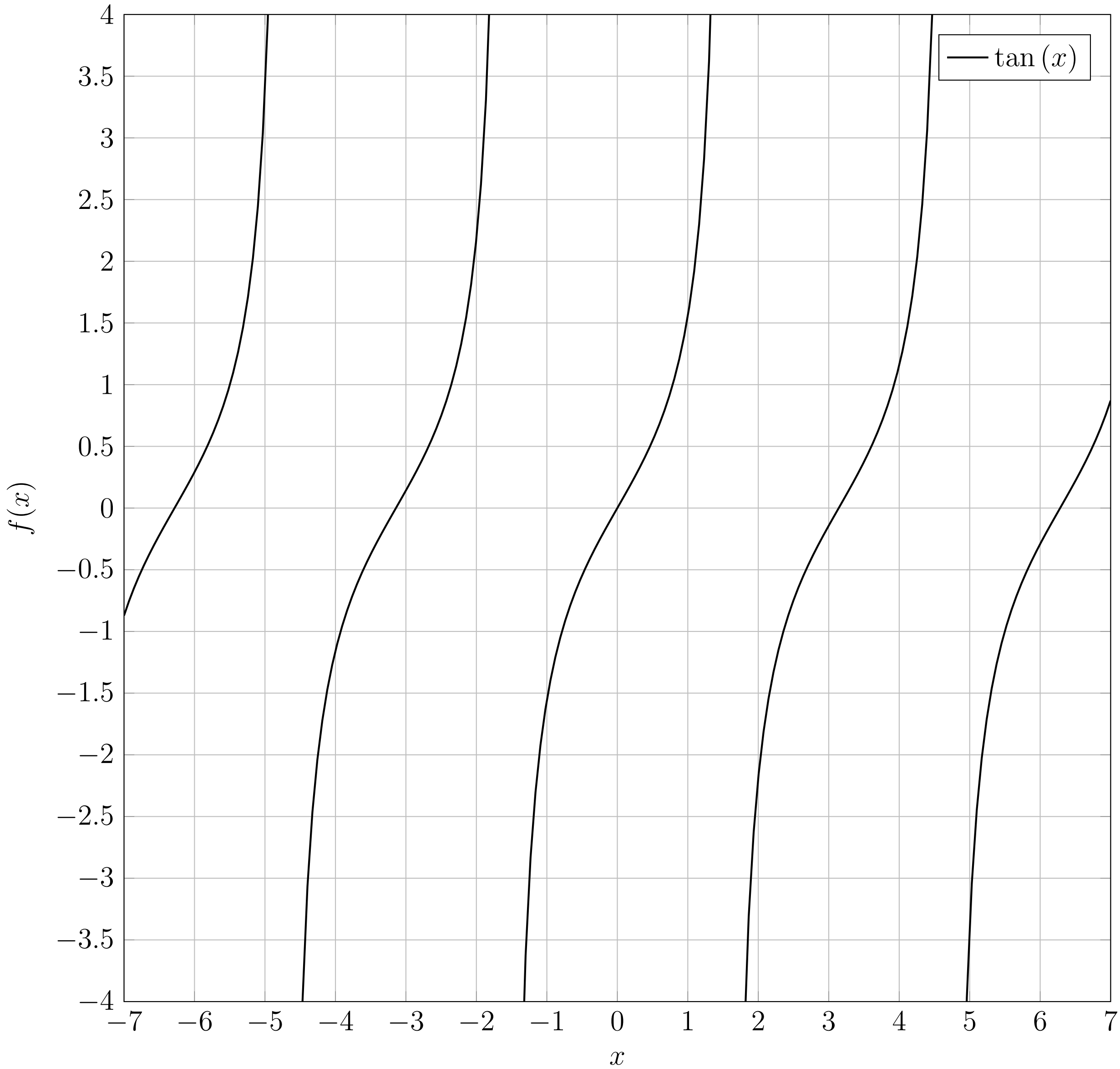


$$e^x + e^y = e^{x+y} \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

7.4 Funzioni trigonometriche







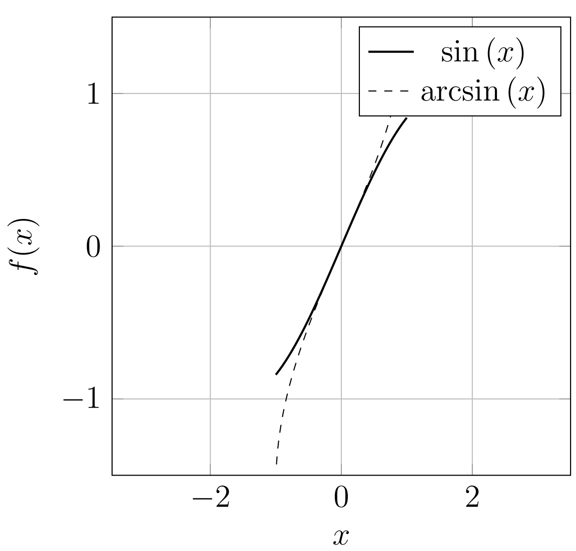
7.4.1 Inverto il seno

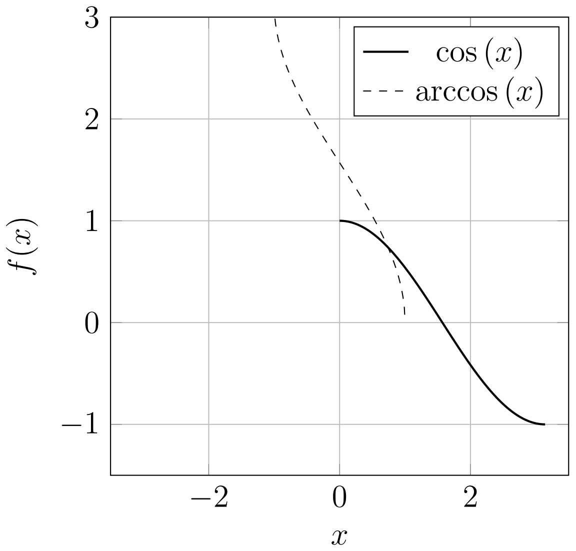
Il seno non è ne iniettivo ne surgettivo a meno che non lo consideri come:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

Il coseno non è ne iniettivo ne survettivo a meno che non lo si consideri come:

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$$



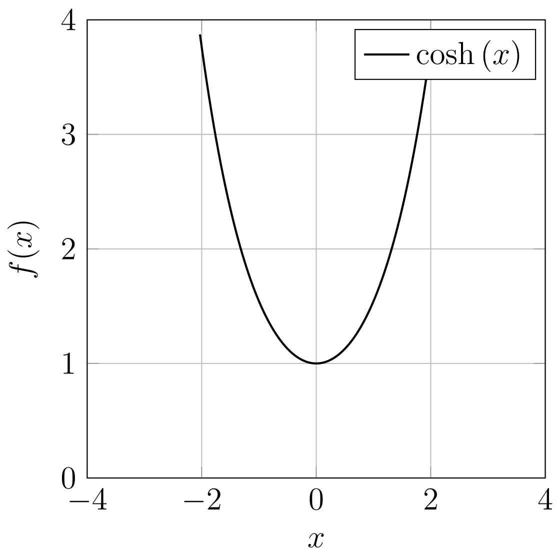


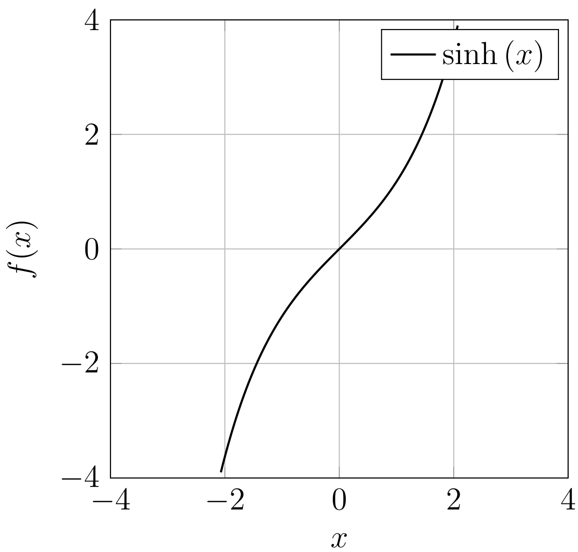
7.5 Funzioni iperboliche

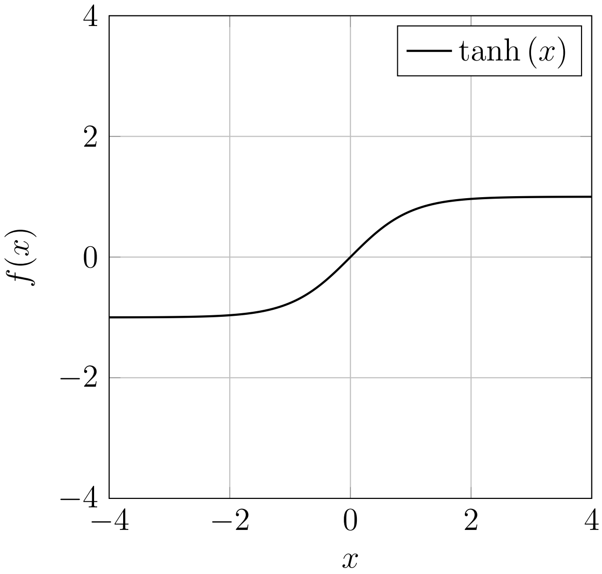
$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \to pari$$

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to dispari$$

$$\tanh = \frac{\sinh}{\cosh} \to dispari$$







7.6 Formule trigonometria iperbolica

Queste formule sono molto simili alle formule della trigonometria tradizionale

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^{x})^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^{x} - e^{-x})(e^{x} + e^{-x})}{2} = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

Formula fondamentale della trigonometria

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^2 + e^{2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^2 + e^{2x} + 2}{4}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

8 Esercizi

8.1 Esercizio 1

Teorema 6: *Insiemi limitati*

Se un insieme $S \neq \emptyset$ è limitato superiormente/inferiormente esso ammette estremo superiore/inferiore

Dato un un insieme S limitato inferiormente ma non superiormente e un insieme L costituito da tutti i minoranti di S allora

$$\sup L \text{ esiste e } \sup L = \inf A$$

- L'insieme S denota tutti i maggioranti di L
$$y \geq x \quad \forall y \in S, x \in L$$
- Vito che L ammette maggioranti, esso è limitato superiormente e per il teorema 8.1 ammette estremo superiore sup$L$=β
- Visto che l'insieme S denota i maggioranti di L, allora
$$\text{se } x < \beta \rightarrow \text{ x non è maggiorante } \rightarrow x \notin S$$
al contrario, tuttavia
$$\text{se } x \in S \rightarrow x \geq \beta \rightarrow \beta \text{ è minorante di } S$$
- Se prendo $\epsilon > \beta$ so che questa non appartiene a L in quanto è più grande di un suo maggiorante, dunque
$$\text{se } \epsilon > \beta \rightarrow \epsilon \notin L \rightarrow \text{ non è minorante di S}$$
- Dunque β:
  1. E minorante di S
  2. Se $\epsilon > \beta \rightarrow \epsilon$ non è minorante di S

β è dunque estremo inferiore di S
$$\text{supL} = \text{ infS } = \beta$$

8.2 Esercizio 2

Dato l'insieme
$$A = \left\{ a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$
si determini limite superiore, inferiore, massimo e minimo se presenti.

- Scrivo qualche termine
$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, a_4 = \frac{1}{17}$$
- Osservo che
$$|a_n| > |a_n + 1| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
- $|a_n| = \left|\frac{\cos(\pi n)}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$ in quanto $\cos(\pi n)$ è sempre uguale a ± 1
- Risolvo disequazione →è vera $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2+1}$$
- Visto che la successione decresce in valore assoluto posso affermare che

Estremo superiore	1
Estremo inferiore	$-\frac{1}{2}$
Massimo	1
Minimo	$-\frac{1}{2}$

8.3 Esercizio 3

Dato l'insieme

$$A = \left\{ a_n = \frac{N^2 - 5}{n^2 + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

si determini limite superiore, inferiore, massimo e minimo se presenti.

- Scrivo qualche termine

$$a_0 = \frac{5}{2}, a_1 = -\frac{4}{3}, a - 2 = -\frac{1}{6}, a_3 = \frac{4}{11}$$

- Noto che termini sono crescenti e lo verifico risolvendo la disequazione:

$$\frac{(n+1)^2 - 5}{(n+1)^2 + 2} > \frac{n^2 - 5}{n^2 + 2}$$

$$\frac{14n + 7}{(n^2 + 2)\left((n+1)^2 + 2\right)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Noto che $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2-5}{n^2+2} = 1$ dunque è probabile che 1 costituisca l'estremo superiore. Verifico che ciò è vero nel seguente modo:
  - Ricordo definizione estremo: β è estremo superiore se:

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \text{ t.c. } x > \beta - \varepsilon$$

  - Se la disequazione seguente ha soluzione per almeno un $n \in \mathbb{N}$, allora vuol dire che esiste un $n \in A$ t.c. $a_n > \beta - \varepsilon$

  $$1 - \varepsilon < \frac{n^2 - 5}{n^2 + 2}$$

  $$n > (\text{ int }) \sqrt{\frac{7}{\varepsilon} - 2} + 1$$

  - La disequazione ha soluzioni per ogni valore positivo di ε e β è un estremo superiore

Estremo superiore	1
Estremo inferiore	$-\frac{5}{2}$
Massimo	no
Minimo	$-\frac{5}{2}$

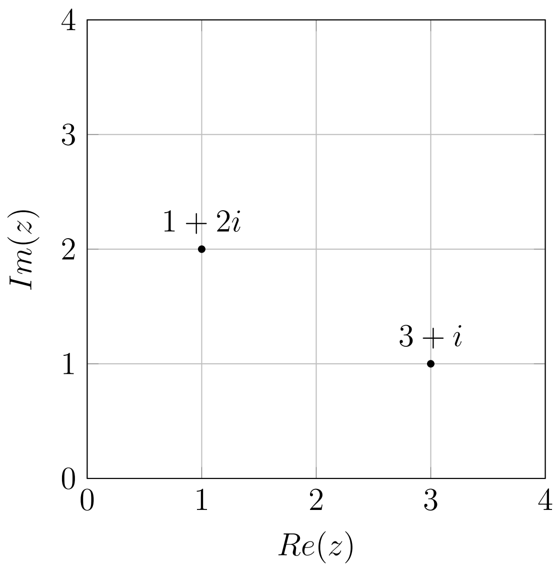
9 Numeri complessi

9.1 Forma cartesiana

Un numero completto è un oggetto del tipo

$$\underbrace{a}_{\text{Parte reale}} + \underbrace{b}_{\text{Parte immaginaria}} i$$

dove a e b sono numeri reali e i è un numero tale che $i^2 = -1$



- L'asse y è detta asse immaginaria
- Un numero con parte i mmaginaria nulla è detto puro

9.2 Somme e differenze

Dati $z = a + bi, \quad w = c + di \quad \in \mathbb{C}$ la loro somma è data da:

$$(a + c) + (b + d)\, i$$

9.3 Prodotto

Si usa la proprietà distributiva per il fatto che $i^2 = -1$

$$z * w = (a + bi)\,(c + di) = ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{=-1}$$

9.4 Reciproco

Dato un numero $z \in \mathbb{C}$, al fine di calcolarne il reciproco $\frac{1}{z}$ posso razionalizzare, in modo da ottenere un numero in forma cartesiana

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

9.5 Divisione

Per effettuare una divisione fra numeri complessi trovo il reciproco del divisore e effettuo la divisione

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(ca+bd)}{a^2+b^2} + \frac{ad-^3}{a^2+b^2}i$$

9.6 Definizioni

Definizione 8: *Numeri coniugati*

Dato $z = a + bi$ si dice coniugato di z e si indica con $\overline{z}$ un numero uguale a

$$a - bi$$

- $z * \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ quindi ho come conseqguenza che $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
-

Definizione 9: *Modulo numero complesso*

Dato $z = a + bi$ si dice il modulo di z il numero

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

10 Rappresentazione trigonometrica

Posso rappresentare il numero complesso $z = a + bi$ tramite coordinate polari, ossia angolo e distanza dall'origine

Ad esempio, per un $z \in \mathbb{C}$ che dista ρ dall'origine e con l'asse x crea un angolo di θ so che questo numero avra coordinate cartesiane

$$\rho\cos\theta + \rho\sin\theta$$

Se invece ho un $z \in \mathbb{C}$ di coordinate polari $\rho\cos\theta + \rho\sin\theta$ la rappresentazione cartesiana è

$$\begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{c}\right) & \text{se } -\frac{\pi}{2}\theta\frac{\pi}{2} \\ \arctan\left(\frac{b}{c}\right) + \pi & \text{se } \theta < -\frac{\pi}{2} \text{ o } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

10.1 Argomento di un numero complesso

L'argomento di un numero complesso è l'angolo che questo formerebbe con l'asse x se rappresentato in coordinate polari

10.1.1 Prodotto in forma trigonometrica

$$z = \rho\left(\cos\theta + \sin\theta\right) \qquad w = r\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$

$$zw = \cos\left(\theta + \alpha\right) + \sin\left(\theta + \alpha\right)$$

10.1.2 reciproco in forma trigonometrica

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\rho\left(\cos\left(-\theta\right) + \sin\left(-\theta\right)\right)}{\rho^2} =$$

10.1.3 Divisione in forma trigonometrica

$$\frac{z}{w} = z * \frac{1}{w} = \ldots = \frac{\rho}{r}\left[\cos\left(\theta - \alpha\right) + i\sin\left(\theta - \alpha\right)\right]$$

10.2 Forma esponenziale

Un numero complesso di coordinate polari (ρ, θ) è espresso nel seguente modo:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Formula di passaggio fra forma trigonometrica e esponenziale:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

10.3 Potenza di un numero complesso

Se $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

$$z^n = \rho^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)$$

Se $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Dimostrazione per induzione

$$z^{n+1} = z \cdot z^n = z\left(\rho^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)\right) = \rho^{n+1}\left\{\cos\left[\left(n+1\right)\theta\right] + i\sin\left[\left(n+1\right)\theta\right]\right\}$$

10.3.1 Esempio potenza

$$\left(1+i\right)^6$$

- Metodo 1 - faccio binomio di Newtoon - roba da matti

- Metodo 2 - passo a forma esponenziale $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^6 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^6 e^{i\frac{\pi}{4}6} = 8e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8i$$

$$(1+i)^{6000} = 2^{3000}e^{i\frac{\pi}{4}6000} = 2^{3000}$$

10.4 Radici dei numeri complessi

Definizione 10: *Radici dei numeri complessi*

Dato un numero complesso $a \in \mathbb{C}$, le radici complesse n-esimi sono tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = a$

NB: se $a \neq 0$ esistono sempre n numeri complessi z che verificano l'equazione $z^n = a$. Questi numeri coincidono con i vertici di un poligono regolare di n lati con centro nell'origine

Supponiamo che $a = re^{i\phi}$ e $z = \rho e^{i\theta}$.

$$z^n = a \rightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\phi}$$

Per soddisfare uguaglianza devo avere:

- Stesso modulo $\rho^n = r$
- Stesso argomento $n\theta = \phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ossia rispettivamente

- $\rho = \sqrt[n]{r}$
- $\theta = \frac{\phi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}$

NB: ottengo valori diversi solo per $k \in [0, n-1]$

Incomprensione - 11.22.37

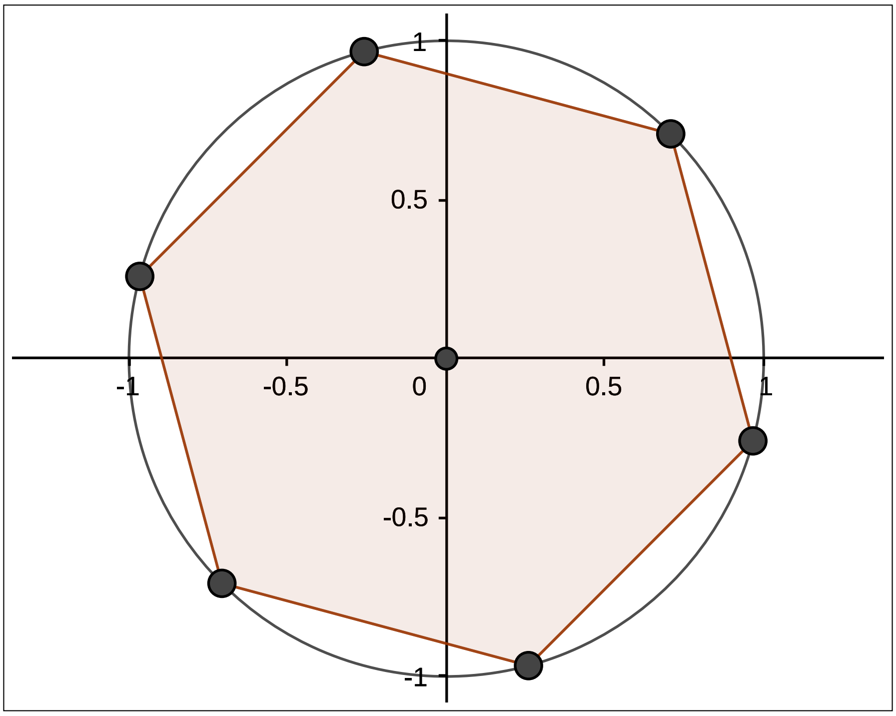
Esercizio *Trova le radici seste di* $-i$

- Ciò corrisponde a risolvere l'equazione

$$z^n = -i$$

- $-i = 1e^{\frac{3}{2}\pi}$
- Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ 6\phi = \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \end{cases}$$



11 Il teorema fondamentale dell'algebra

Per polinomi a coefficienti reali $P(x)$ sapevamo che:

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} \ldots + c_1 x^1 + c_0 \quad c_n \in \mathbb{R}$ polinomio di grado n a coefficienti reali. Ha al massimo n soluzioni.

Definizione 11: *Radice di un polinomio*

Dato un polinomio a coefficienti complessi$\alpha \in \mathbb{C}$ si dice radice di $P(z)$ se $P(\alpha) = 0$

Definizione 12: *Molteplicità radice*

Si diche che $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $P(x)$ di molteplicità $\mu \in \mathbb{N}$ se é è divisibile per $(x - \alpha)^{\mu}$

Per un polinomio a coefficienti complessi devi ridefinire il teorema fondamentale dell'algebra:

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} \ldots + c_1 x^1 + c_0 \quad c_n \in \mathbb{C}$ polinomio di grano n a coefficienti complessi. Ha esattamente n soluzioni

quindi

Teorema 7: *Teorema fondamentale dell'algebra*

Ogni polinimio $p(x)$ di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse eventualmente contando le rispettive moltepliicità

Ogni polinomio a coefficienti complessi può essere scritto come prodotto di fattori di grado 1

$$P(z) = a_k x^k \dots a_1 x + a_0 = a_n (z - \alpha_1)^{\mu_1} (z - \alpha_2)^{\mu_2}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono radici $\in \mathbb{C}$ di $P(z)$

Teorema 8: *Radici complesse coniugate*

Sia $P(z)$ polinomio a coefficienti reali. Se $z \in \mathbb{C}$ è radice di $P(z)$ allora anche $\overline{z}$ è radice di $P(z)$

- Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di P anche $\overline{\alpha}$ è radice di P
- Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di P con moltepicità $\mu \in \mathbb{N}$ allora $\overline{\alpha} \in \mathbb{C}$ è radice di P con molteplicità μ

Dimostrazione:

- $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad P(\alpha) = 0$ per hp.
- $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$ i

Incomprensione - 09:48:11

Ogni polinomio reale di grado n è prodotto di fattori di grado 1 e di fattori irreducibili di grado 2

- I fattori di grado dure rappresentano coppie di radici complesse coniugate eventualmente con molteplicità

Incomprensione - 10:00:29

12 Successione numeri reali

12.1 Frequenza variabili

Definizione 13: *Freqentemente*

Si dice che una variabile P_n + vera (o falsa) frequentemente se + vera per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$

Definizione 14: *Definitivamente*

Si dice che una variabile P_n è definitivamente se

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \qquad P_n \text{ vera } \forall n \geq n_0$$

NB: se una variabile è vera definitivamente lo è anche frequentemente. Ma non vale il contrario:

$$(-2)^2 \geq 7$$

- Vera frequentemente
- Falsa frequentemente
- Non è ne vera ne falsa definitivamente

12.2 Successione di numeri naturali

Definizione 15: *Successione di numeri naturali*

E una funzione in cui l'insieme iniziale sono i numeri naturali e l'insieme finale sono i nueri reali

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

il termine n-esimo della succesione si indica con f_n

NB: la seguente non è una successione:

$$a_n = \frac{1}{n - 2022}$$

in quanto per $n = 2022$ risulta $\frac{1}{0}$ che non è definito, per questo usiamo una definizione più accomodante

Definizione 16: *Successione di numeri reali accomodante*

Consideriamo succeesione di numeri reali quelle che sono vere almento definitivamente, ossia che siano definite da un determinato indice n_0 in poi

Esempi:

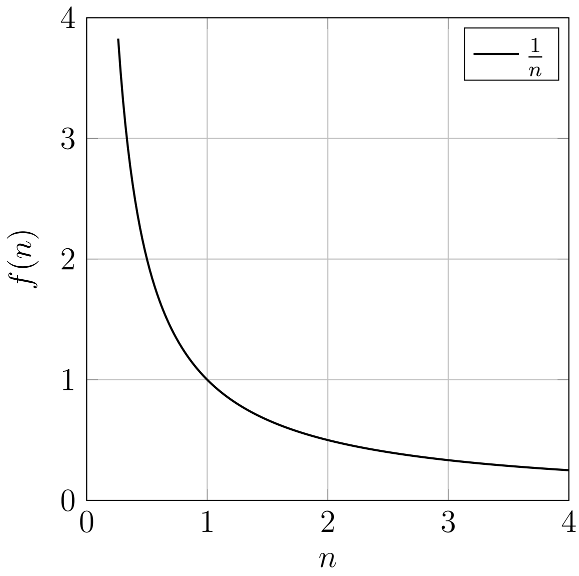
- $a_n = \frac{1}{n+5}$ vera in senso classico
- $b_n = \frac{1}{n-5}$ vera in senso accomodante per $n \geq 6$
- $c_n = \sqrt{n - 2022}$ vera in senso accomodante per $n \geq 2022$
- $b_n = \sqrt{2022 - n}$ non è una successione $\rightarrow \nexists n_0$ t.c. b_n vera $\forall n \geq n_0$

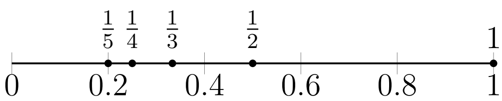
12.3 Rappresentazione di successioni

Posso rappresentare successioni come normali funzioni, quindi traite grafico

- Tramite grafico $(n, f(n))$

$$f(n) = a_n = \frac{1}{n}$$



- Sulla retta dei numeri reali: 

- Rapppresentazione dinamica: i mmagino di accendere una lampadina ogni tot secondi e in corrispondenza dell'accensione segno il valore della funzione

12.4 Limite di una successione

Una successione ha 4 possibilità:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ ossia $a_n \to l$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = l^+$ ossia ha $a_n \geq l$ definitivamente
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = l^-$ ossia $a_n \leq l$ definitivamente
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ oscillando intorno al valore
- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ossia $a_n \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ossia $a_n \to -\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n$ NON esiste ossia a_n non ha limite

Definizione formale di limite

Definizione 17: *Limite infinito*

Si diche che $a_n \to +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a_m \text{ t.c. } a_m \geq M$$

ossia $a_m \geq M$ definitivamente

Si dice che $a_n \to -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a_m \leq M$$

ossia $a_m \geq M$

Definizione 18: *Limite se tenda a numero finito*

Si dice che $a_n \to l \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon \geq 0 \quad l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon$$

ossia

$$|a_n - l| \leq \epsilon \quad \underline{\text{definitivamente}}$$

12.4.1 Errori comuni

- Se $a_n \to \infty$ allora è definitivamente crescente. NO: potrei avere una successione che somma 2 e scende di 1 all'infinito
- Se $a_n \to 0$ allora tende o a 0^+ o a 0^-. NO: vedi $\frac{(-1)^n}{n}$
- Se a_n non è limitata superiormente allora $a_n \to \infty$. NO: vedi $(-2)^n$

12.5 Esempi

Esempio 1

$$a_n = n^2$$

Dimostriamo che $a_n \to \infty$ 2 casi:

- Se $M \leq 0 \to n^2 \geq M$ sempre
- Se $M \geq 0 \to n^2 \geq M \Leftrightarrow n \geq \sqrt{M}$

Esempio 2

$$a_n = \sqrt{n}$$

Dimostriamo che $a_n \to \infty$ 2 casi:

- Se $M \leq 0 \to \sqrt{n} \geq M$ sempre
- Se $M \geq 0 \to \sqrt{n} \geq M \Leftrightarrow n \geq M^2$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^a = \infty \quad \forall a \geq 0}$$

Esemipio 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = o^+$$

Devo verificare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad 0 < \frac{1}{n} \geq \epsilon$$

- $a < \frac{1}{n}$ definitivamente in quanto n è naturale
- $\frac{1}{n} \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq n$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \leq 0$$

Teorema 9: *Permanenza del segno*

Se $a_n \to l > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente
Se $a_n \to l < 0$ allora $a_n < 0$ definitivamente

Dimostrazione

12.6 Unicità del limite

Una successione ha sempre solo uno dei comportamenti descritti in subsec 12.4 Dimostrazione

- Supponiamo che uno stesso limite tenda a due cose diverse $a_n \to l_1$ e $a_n \to l_2$ con $l_1 \neq l_2$
- Per la definizione di limite il valore del limite deve ricadere in un intorno di l_1 e l_2. Se questi due intervalli sono sufficientemente piccoli e dunque non hanno punti in comune dovrei avere un punto che sta in due parti contemporaneamente. Ne concludiamo che l'ipotesi sia falsa

12.7 Teoremi sui limiti

Teorema 10: *Teorema del confronto a 2*

Siano a_n e b_n succesioni. Supponiamo che $a_n \geq b_n$ almeno definitivamente

- Se $b_n \to \infty$ allora $a_n \to \infty$
- Se $a_n \to -\infty$ allora $b_n \to -\infty$

Teorema 11: *Teorema del confronto a 3 (dei due carabinieri)*

Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ almeno definitivamente. Supponiamo che $a_n \to l \in \mathbb{R}$ e $c_n \to l \in \mathbb{R}$ allora $b_n \to l \in \mathbb{R}$

12.8 Errori comuni

- Supponiamo che a $a_n > b_n$ e $a_n \to l_1, b_n \to l_2$. Allora
$$l_1 > l_2$$
- Falso in quanto al limite non si conserva l'uguale. Vedi ad esempio:
$$a_n = \frac{2}{n} \quad b_n = \frac{1}{n}$$
nonostante i termini di a_n siano sempre il doppio di quelli di b_n il loro limite è lo stesso e vale 0. Posso in caso affermare che se $a_n > b_n$ allora $l_1 \geq l_2$

12.9 Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Teorema 12: *Somma, prodotto e divisione limiti*

Siano a_n e b_n successioni reali.

$$a_n \to l_1 \in \mathbb{R} \text{ e } b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$$

allora

$$a_n + b_n \to l_1 + l_2 \qquad a_n - b_n \to l_1 - l_2$$

$$a_n b_n \to l_1 l_2 \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \to l_1^{l_2}$$

A meno che non si cada in uno di questi 7 casi speciali:

$$+\infty - \infty \quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$0^0 \quad (+\infty)^0 \quad 1^{\pm\infty}$$

NB: nel caso della successione di tipo $\frac{a_n}{b_n}$ devo stare attento al modo in cui b_n tende a zero: può tendere a $a^+, 0^-$ o a 0

12.10 Forma indeterminata

Esempio 1

$$a_n = \underbrace{n^3}_{+\infty} + \underbrace{n^2}_{+\infty} \to +\infty$$

Esempio 2

$$a_n = \underbrace{n^3}_{+\infty} - \underbrace{n^2}_{+\infty} = \underbrace{n^2}_{\infty} \underbrace{(n-1)}_{+\infty - 1} \to +\infty$$

Esempio 3

$$a_n = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{0} \to +\infty$$

Esempio 4

$$a_n = 2^n$$

Dimostro con disuguaglianza di Bernoulli(sub 3.5):

$$2^n \geq n + 1$$

dunque visto che $n + 1 \to \infty$ allora anche $2^n \to \infty$ per teorema del confronto a 2(teo 12.7)

Esempio 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(2^n + n!)}{n^2+3} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

in quanto al numeratore ho valoni finiti e al demonimatore valori infiniti. Posso applicare teorema dei dure carabinieri:

- $0 \leq \arctan(2^n + n!) \leq \pi$
- Diviso per $n^2 + 3$

$$0 \leq \frac{\arctan(s^n + n!)}{\underbrace{n^2+3}_{\to 0}} \leq \frac{\pi}{\underbrace{n^2+3}_{\to 0}}$$

- Il mio limite deve essere compreso fra 0 e 0, quindi è = 0 per il teorema del confronto a tre (teo 12.7)

Esempio 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n + 10^{23}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}(1 - n^{-6})}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - n^{-6}\right) \to 0$$

12.11 Implicazione i mportante disuquaglianza di bernoulli

Dimostro che

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$$

- Noto che

$$a^n = (1 + (a-1))^n$$

- questa quantità per il teorema di bernoulli è maggiore di:

$$(1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$$

- Se $a > 1$ $\lim_{n\to\infty} n(a-1) = +\infty$

Se invece ho $a \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} a^n \qquad \text{con } a \in (0,1)$$

Visto che $a \in (a, 1)$ posso supporre che $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \to 0$$

13 Fattoriali e combinatoria

Definizione 19: *Fattoriale di un numero*

Il fattoriale di un numero è definito nel seguente modo:

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

in numeri $n!$ rapprentenza il numero di modi in cui posso ordinare n oggetti

Per scegliere n persone posso pensare che

- La prima persona la posso scieglere in n modi
- La seconda in $n-1$
- La terza in $n-2$
- …la k esima in $n-k+1$

quindi

n	n-1	n-2	…	n-k+1

Definizione 20: *Coefficiente binomiale*

Dati 2 interi $n, k \quad 0 \leq k \leq n$, ponto

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Immagino di avere un esercito di n soldati e ne devo estrarre k. Non conta l'ordine con cui gli estraggo

- Il primo soldato lo posso scegliere in n modi
- Il secondo in $n-1$
- Il terzo in $n-2$
- …il k esimo in $n-k+1$
- Devo poi dividere per il le permutazioni possibili visto che l'ordine non conta

$$\text{numero modi di estrarre } = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Perchè diviso? Pensa al fatto che ogni squadra estratta può essere disposta in $k!$ modi, quindi $k!$ modi vanno considerati come la stessa squadra

13.1 Proprietà dei fattoriali

- Scontate:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)} = n \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)\,1!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

- Simmetrica: prendere k persona da squadra di n è la stessa cosa che lasciarne fuori $n-k$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Generazione ricorsiva binomiale:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)\,(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!\underbrace{(n-k)}_{(n-k)(n-k-1)!}!} + \frac{n!}{\underbrace{(k+1)}_{(k+1)k!}(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\frac{k+1+n-k}{(n-k)\,(k+1)}\end{aligned}$$

A livello combinatorio

  - Prendo un gruppo di n persone e tengo separatamente 1
  - Per formare un gruppo grande $k+1$ posso:
    1. Creare un gruppo grande n e poi aggiungerci il nuovo arrivato
    2. Creare un gruppo grande $n+1$ che non contenga il nuovo arrivato
  - Nel primo caso posso creare $\binom{n}{k}$ gruppi
  - nel secondo caso posso create $\binom{n}{k+1}$ gruppi

13.2 Il triangolo di tartaglia

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

Ogni valore è dato dalla somma dei valori dei termini sopra di esso a sinistra e a destra

Il coefficiente alla riga n nella posizione k è dato da

$$\binom{n}{k}$$

visto che il coefficiente nella posizione $n+1, k+1$ è uguale al coefficiente nella posizione n, k e $n, k+1$ noto che questo triangolo verifica la generazione ricorsiva binomiale:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Nello sviluppo di un binomio del tipo $(x+y)^n$ il monomio $x^k y^{n-k}$ ha coefficiente $\binom{n}{k}$ ossia:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

La somma dei coefficienti alla riga n è uguale a

$$2^n$$

Dimostrazione:

- Applico sviluppo del binomio $(x+y)^n$ con $x = y = 1$
- In questo caso so che

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

14 3 criteri: rapporto, radice, rapporto-radice

14.1 Criterio della radice

- Sia a_n una successione tale che $a_n \geq 0$ definitavente
- Supponiamo che se $\sqrt[n]{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora ho 3 possibilità:
  - se $l > 1$, allora $a_n \to +\infty$
  - se $l < 1$, allora $a_n \to 0$
  - se $l = 1$ il criterio non fornisce informazioni

14.2 Criterio del rapporto

- Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente
- Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora ho 3 possibilità
  - se $l > 1$, allora $a_n \to +\infty$
  - se $l < 1$, allora $a_n \to 0$
  - se $l = 1$ il criterio non fornisce informazioni

14.3 Criterio rapporto $\rightarrow$ radice

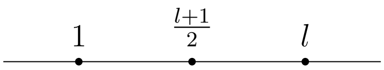
- Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente
- Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora

$$\sqrt[n]{a_n} \to l$$

ossia $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sqrt[n]{a_n} \to l$ tendono allo stesso $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

14.4 Dimostrazioni

14.4.1 Dimostrazione criterio radice

- Prendo punto a metà fra 1 e l 

- Visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$ necessariamente

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$$

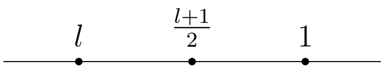
- Ho quantità positive sia a sinistra che a destra, posso elevare alla n da entrambe le parti, ottenendo:

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

- Se $l > 1$ $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \to \infty$

---

se invece $l < 1$ agisco nello stesso modo:

- Prendo punto a metà fra l e 1 

- Visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$ necessariamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$$

- Ho quantità positive sia a sinistra che a destra, posso elevare alla n da entrambe le parti, ottenendo:

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

- Se $l < 1$ $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \to 0$
- Siccome $a_n \geq 0$ per ipotesi allora

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

ossia $a_n \to 0$ per teorema del confronto a tre

14.5 Numero di nepero

Il numero di nepero è definito dal seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

14.6 Esempio forme indeterminate

Esempio 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

Esempio 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n^2}}{n!}=+\infty$$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!}$$

Esempio 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=$$

Criterio rapporto radice

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

15 Limiti di funzioni

Definizione 21: *Limite di funzione*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}$ abbiamo tre tipologie di limite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Primo tipo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{ non esiste} \end{cases}$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \geq M \forall x \geq k$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = + - \infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \forall x \geq k$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon \quad \forall x \geq k$$

ossia

$$|f(x) - l| \leq \epsilon$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l^+$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l < f(x) \leq l + \epsilon \quad \forall x \geq k$$

se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l^-$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l - \epsilon \leq f(x) \leq l \quad \forall x \geq k$$

Secondo tipo: molto simile a primo, semplicemnte speculare

Terzo tipo:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \text{ non esiste} \end{cases}$$

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \epsilon \text{ se } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

15.1 Continuità

Definizione 22: *Continuità*

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in A$ se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

OSS:

- Si dice che f è continua in A se essa è continua in ogni punto di A
- Le funzioni elementari sono sempre comtinue sul loro dominio
- Se faccio operazioni algebriche su funzioni continue ottengo funzioni continue
- La composizione di funzioni continue è continua

15.2 Limiti notevoli

Limiti "nonni"

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4}$$

Limiti "di seconda generazione"

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a)$$

15.3 Cambio di variabile

Esempio 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

pongo $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)}$$

pongo $y = \sin(x)$; se $x \to 0 \Rightarrow \sin(x) \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin()-1}}{\sin(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(x)}$$

pongo $y = \sin(x)$; se $x \to \pi \Rightarrow \sin(x) \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}$$

Esempio 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

moltiplico e divido per $1 + \cos(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{c^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{2}$$

Limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

pongo $x = \log(y+1)$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}}}_{\text{limite notevole}}$$

Limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

pongo $a^x = x\log(a)$

$$\frac{e^{x\log(a)}}{x}.$$

15.4 Ordini di infiniti

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{(\log(x))^a}{x^b} = 0 \quad \forall e > 0, b > 0}$$

dimostro facendo cambiodi variabile (im pongo $y = \log(x)$)

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0}$$

pongo $y = \frac{1}{y}$

15.5 Dimostrazioe $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

- Sappaimo che vale la seguente disuguaglianza:

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

- Divido per $\sin(x)$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

15.6 Altri esempi

Esempio 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(x) + 1 - 1)}{x^2}$$

- Moltiplico e divito per $\cos(x) - 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + (\cos(x) - 1))}{\cos(x) - 1} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

- Ottengo due limiti notevoli

Esempio 2

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

- Ricordo che $A^B = e^{B \log A}$

- $$\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2} \log(\cos(x))}$$

Esempio 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan(x)} - \cos(x) + \arctan(2x)}{x}$$

- Sommo e sottraggo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan(x)} - 1 + 1 - \cos(x) + \arctan(2x)}{x}$$

- Quindi ottengo limiti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan(x)} - 1}{x} + \frac{1 - \cos(x)}{x} + \frac{\arctan(2x)}{x}$$

- Moltiplico e divido numeratori e demonimatori per ottenere limiti notevoli

Esempio 4

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + 2^x)}{x}$$

- Se $x \to +\infty$ l'uno diventa insignificante. Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + 2^x)}{x} = \frac{\log(2^x)}{x} = \frac{x \log(x)}{x} = \log(2)$$

- Rigorosamente potrei raccogliere a fattor comune il 2^x

15.7 Dimostrare non esistenza di un limite

Definizione 23: *Sottosuccessione*

Data una successione a_n una sottosuccessione è composta da tuttti i termini con indice crescente selezionati secondo una data regola

Teorema 13: *Essitenza di un limite di una successione*

Sia a_n una successione di numeri reali e sia a_{kn} la regola che descrive come scelgo la sottosuccessione. Supponiamo che $a_n \to l \in \mathbb{R}$ allora

$$a_{kn} \to l$$

se a_n non ha limite non posso dire nulla riguardo a a_{nk}

Esempio: se voglio dimostrare che una successione non ha limite posso cercare due sottosuccessioni che non convergano verso lo stesso limite

$$e_n = (-)^n \to \text{ non ha limite}$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \to_1, 1, 1, 1, 1 \to 1$$
$$a_{2n+1} = (1)^{2n+1} = -1, -1, -1, -1, -1, \to -1$$

per questo motivo visto che $l_1 \neq l_2$, a_n non ha limite

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_{2n} = \sin(n\pi) = 0, 0, 0, 0, 0 \to$$

16 Numero di nepero

Per dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge al numero di nepero servono dei prerequisiti e dei teoremi

Definizione 24: *Crescenza/decrescenza di una successione*

Una successione a_n si dice:

- Debolmente crescente se $\quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Strettamente crescente se $\quad a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La stessa cosa vale per la decrescenza

OSS: una funzione è debolmente crescente se e solo se per ogni $m > n$ anche $a_m \geq a_n$
Consideriamo la successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Teorema 14: *Limiti succesioni crescenti*

Sia a_n una successione debolmente crescente. Allora abbiamo 2 possibili limiti:

- $a_n \to l \in \mathbb{R}$
- $a_n \to +\infty$

In ogni caso il limite della successione è il $sup\,(a_n)$

Teorema 15: *Corollario al teorema precedente*

Sia a_n una successione

- Debolemnte crescente
- Limitata superiormente

Allora

$$a_n \to l \in \mathbb{R}$$

NB: non necessariamente $l = k$

16.1 Dimostrazione definizione numero di nepero

La dimostrazione si basa su 3 proprietà della succession e_n

- E' sempre $\geq 2 \forall n$
- E' debolmente crescente
- E' $\leq 3 \forall n$

se so che e_n è limitata e crescente allora posso affermare che

$$e_n \to l \in [2,3]$$

$$\boxed{\text{Dimostro un passo alla volta}}$$

E' sempre $\geq 2 \forall n$

- Uso disuguaglianza di Bernoulli ossia

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

- Pongo $x = \frac{1}{n}$ ossia

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} \geq 2$$

E' debolmente crescente

-

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

- $$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$
- Moltiplico e divido per n e per $n-1$ il membro di destra
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1}$$
ottengo quindi
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n-1}{n}$$
$$\frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \geq \frac{n-1}{n}$$
- Noto la somma per differenza al numeratore del primo menmbro
$$\frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}$$
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$
- Pongo x = $-\frac{1}{n^2}$ e moltiplicando e dividendo per n a destra ottengo che
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n} = (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\boxed{\text{La crescenza è quindi stata verificata per la disuguaglanza di bernoulli}}$$

E' $\leq 3 \forall n$

- Utilizzo binomio di Newtoon:
$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
- Pongo $x=1$ e $y=\frac{1}{n}$:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$
- Sviluppando la sommatoria mi accordo di alcune cose:
$$\binom{n}{0}\frac{1}{n^0}\binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2}\dots$$
$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}\dots$$

- Noto che la quantità $\frac{n(n-1)}{n^2}$ è maggiorata da 1. Posso affermare quindi che l'uguaglianza è maggiorata dalla seguente:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

- Visto che si può dimostrare per induzione che $n! \geq 2^n \forall n \in \mathbb{N}$ quest'ultima somma sarà a sua volta maggiorata dalla seguente:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n}$$

- Si può dimostrare poi per induzione che $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$, quindi nel nostro caso sappiamo che:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

- Quindi $a_n \leq 3$

Ho dimostrato dunque che

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = l \in (2, 3)$$