Titolo

Mattia Marini

16.10.22

Indice

Teoremi e Assiomi

Formule

Incomprensioni

Definizioni

1 Esercitazione 4 *14 ottobre*

1. $$s_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

   - Non converge: mi basta prendre due sottocsuccessioni e dimostrare che tendono a due limiti diversi
   - Ad esempio per ogni n pari $a_n \to 1$, mentre per ogni n dispari $a_n \to -1$

2. $$s_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) n^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) \frac{1}{n}$$

   - Noto che $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e che $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$
   - $$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) n^2}_{=0} - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) \frac{1}{n}}_{=\frac{\pm 1}{+\infty}=0}$$
   - Quindi $s_n \to 0$

3. $$S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

   - Moltiplico e divido per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

   $$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

   - Ottengo $\frac{1}{+\infty} = +\infty$

4. $$s_n = \frac{\sqrt[3]{n} \sin(n)}{n+1}$$

   - Appuro che $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ e considero

   $$\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} = \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}}}$$

   - Il limite tende a zero. Visto che il seno è compreso fra -1 e 1 avro:

   $$s_n = \text{ numero finto } \cdot 0 \to 0$$

5. $$\frac{n \sin(n)}{\sqrt{n^2+1}}$$

   - Considero la seguente cosa:

   $$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1$$

- Visto che il seno oscilla, e questo viene moltiplicato per $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ che tende ad un numero finito, il limite non esiste

6.
$$s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \quad , n \geq 1$$

- In questo caso ho una successione che cambia il numero di elementi al variare di n quindi, nonostante ogni elemento tenda a zero, se n tende a infinito avrò un numero infinito di elementi
- Visto che la radice quadrata è crescente per n positivi posso dire che ogni membro sia maggiorato dal termine $\frac{1}{\sqrt{n^2}}$:
$$\frac{1}{\sqrt{n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \ldots \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$
- Al contrario ogni termine sarà minorato dal termine $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$
$$\frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}} \leq \ldots \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$
- La successione è quindi compresa fra le due successioni composte sommando $2n+1$ volte i termini trovati ai due punti precedenti
$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^2}} \geq s_n \geq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+sn}}$$
- Visto che pero entrambe le successioni tendono a 2, per il confronto a 3 posso dire che $s_n \to 2$
$$\underbrace{\frac{2n+1}{\sqrt{n^2}}}_{\to 2} \geq s_n \geq \underbrace{\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+sn}}}_{\to 2}$$

7.
$$s_n = n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right)$$

- Applico prorprietà dei logaritmi:
$$s_n = n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) = \log\left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}3}\right) = 3\log\left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)$$
- Ricordo il limite notevole $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ e definisco $t = \frac{n}{3}$
$$3\log\left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right) = 3\log\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right) \to 3\log(e) = 3$$

8.

9.
$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 + \sqrt{s_{n-1}} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

- i

2 Esercizio samu

2.1 Sviluppo numeratore

- Sviluppo di e^x al terzo ordine:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

- Sviluppo di $e^{\sin x}$ al terzo ordine:
  - Sviluppo di $\sin x$:
  $$x - x^3 + o\left(x^3\right)$$
  - Sviluppo di $e^{x-x^3+o\left(x^3\right)}$
  $$1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o\left(x^3\right)$$

- Sviluppo di $e^x - e^{\sin x}$:

$$x - x^3 + o\left(x^3\right) - \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o\left(x^3\right)\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x\right)\right) = \frac{x^3}{6} + o\left(x\right)$$

2.2 Sviluppo denominatore

- Sviluppo do $\ln\left(x+1\right)$ al terzo ordine:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

- Sviluppo di $\ln\left(\sin x\right)$ al terzo ordine:
  - Sviluppo di $\sin x$:
  $$x - x^3 + o\left(x^3\right)$$
  - Sviluppo di $\ln 1 + \left(x - x^3 + o\left(x^3\right)\right)$
  $$\ln\left(1 + \sin\left(x\right)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o\left(x^3\right)$$

- Sviluppo di $\ln\left(1+x\right) - \ln\left(1 + \sin\left(x\right)\right)$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o\left(x^3\right)\right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

2.3 Mettendo insieme

Metto insieme numeratore e denominatore, raccogliendo x^3:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{o\left(x^3\right)}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)} = 1$$