Analisi 1

Mattia Marini

12.09.22

Indice

Teoremi e Assiomi

Formule

Incomprensioni

Definizioni

1 O-piccolo

Definizione 1: *O-piccolo definizione 1*

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è o-piccolo per $x \to x_0$ se esiste una funzione $\omega : Aro\mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x)\,\omega(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0} \omega = 0$$

Si scrive che $f(x) = o(g(x))$

Definizione 2: *O-piccolo definizione 2*

Supponiamo di poter dividere per $g(x)$. Assumiamo quindi $g(x) \neq 0$ tranne tuttalpiù in x_0 allora $f(x) = o(g(x))$ se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

1.1 Proprietà o-piccolo

Somma e differenza di o piccoli

$$o(g) + o(g) = o(g) \quad x \to x_0$$
$$o(g) - o(g) = o(g) \quad x \to x_0$$

Dimostrazione:

Date due funzioni $f_1(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$ e $f_2(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$

- $f_2(x) = g(x)\,\omega_2(x)$
- $f_1(x) + f_2(x) = g(x)\left(\underbrace{\omega_1(x) + \omega_2(x)}_{\omega_3 \to 0}\right)$

Moltiplicazione per scalare

$$ko(g) = o(g) \quad x \to x_0$$

- $f_1(x) = g(x)\,\omega_1(x)$
- $kf_1(x) = g(x) \cdot k\omega(x) = g(x)\,\omega(x)$

Prodotto di o-piccoli

$$o(g)\,o(g) = o\left(g^2\right) \quad x \to x_0$$

- $o(g)\,o(g) = f(x)\,f(x)\,\omega(x)\,\omega(x) = (f(x))^2\,\omega(x)^2$
- $= g^2\omega(x) = o(g^2)$

Transitività o-piccolo

$$\begin{gathered} f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0 \\ g(x) = o(h(x)) \quad x \to x_0 \\ \text{allora} \\ f(x) = o(h(x)) \quad x \to x_0 \end{gathered}$$

Prodotto per scalare dell'argomento

$$\begin{gathered} \text{se } f(x) = o(g(x)) \quad x \to 0 \\ \text{allora} \\ f(kx) = o(g(kx)) \end{gathered}$$

1.2 Sviluppi al primo ordine

Mentre faccio un limite per $x \to 0$ posso usare gli sviluppi al primo ordine per rendre tutto molto più semblice:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + o(x) & e^x &= 1 + x + o(x) \\ \cos(x) &= 1 + o(x) & \log(1+x) &= x + o(x) \\ \cos(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) & \arctan(x) &= x + o(x) \\ \tan(x) &= x + o(x) & \arcsin(x) &= x + o(x) \end{aligned}$$

Posso dimostrarli tutti isolando il $o(x)$ e facendo il limite per $x \to 0$ di $\frac{f(x)}{f(x)}$

2 Derivate

Definizione 3: *Derivata con rapporto incrementale*

In un punto x_0 di una funzione la derivata è definita tramite il rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f(x)$ è derivabile in x_0 se il limite esiste ed è finito

Definizione 4: *Derivata con o piccolo*

Dire che esiste la derivata $f'(x_0)$ è equivalente a dire che è siddisfatta la seguente relazione:

$$f(x_0 + g) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h) \qquad \text{con } h \to 0$$

Dimostrazione fra le due defínzioni:

- Supponiamo vera la relazione con l'o piccolo e inseriamola all'interno del rapporto incrementale:
$$f'(x_0) = \frac{f'(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0)\,h + o(h)}{h} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\to 0} = f'(x_0)$$
- Viceversa: supponiamo vero il limite del rapporto incrementale. Dimostro che
$$o(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h$$
- Calcolo $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{g(h)}$
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Quindi le due relazioni sono reciprocamente implicate

2.1 Regole derivazione

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$
$$(f(g(x)))' = f'(g)\,g'$$

2.1.1 Dimostrazione regole di derivazione

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

- Per definizione la derivata è il limite del rapporto incrementale:
$$f'(f(x)\,g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$
- Aggiungo e sottraggo $f(x_0+g)\,g(o)$
$$\frac{f(x_0+h)\underbrace{-f(x_0+h)\,g(x_0) + g(x_0+h)\,g(x_0)}\,-f(x_0)}{h}$$
- Raccolgo primo con secondo e terzo con quarto:
$$f(x_0+h)\,\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0)\,\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
- tutto questo è uguale a:
$$f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)$$

  Questo in quanto f è continua

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g)\,g'}$$

- i

2.2 Derivate elementari

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + (\tan x)^2 \qquad (\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

2.2.1 Dimostrazione di derivate elemenrari tramite o-piccolo

$$\boxed{d\left[e^x\right] = e^x}$$

- $f(x_0 + h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h$
- Applico sviluppi al primo ordine:
$$e^{x_0}e^h = e^{x_0}(1 + h + o(h)) = e^x + e^{x_0}h + e^{x_0}o(h)$$
- Noto che
$$\underbrace{e^x}_{f(x_0)} + \underbrace{e^{x_0}}_{f'(x_0)} h + \underbrace{e^{x_0}o(h)}_{=o(h)}$$

$$\boxed{d\left[\sin(x)\right]}$$

- $f(x_0 + h) = \sin(x_0 + h)$
- Applico formula somma di seni:
$$\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)$$
- Applico sviluppo al primo ordine di $\sin(h)$ e $\cos(h)$
$$\sin(x_0)(1 + o(h)) + \cos(x_0)(h + o(h))$$

$$\boxed{d\left[\log(x_0 + h)\right]}$$

- $f(x_0 + h) = \log(x_0 + h)$
- Raccolgo x_0 :
$$\log\left(x_0\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right)$$
- Proprietà dei logaritmi:
$$\log(x_0) + \log\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)$$
- Sviluppo al primo ordine di $\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$:
$$\log(x_0) + \frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)$$
- Per proprietà degli o piccoli $o\left(\frac{h}{x_0}\right) = o(h)$
$$\underbrace{\log(x_0)}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{x_0}}_{f'(x_0)}h + o(h)$$

3 De l'Hopital e Taylor: pilastri della matematica

3.1 De l'hopital

3.2 Esempi limiti

$$\frac{x - \sin(x) + x^5}{x^3}$$

Applico de l'Hopital derivando 3 volte

$$\begin{aligned}\frac{x - \sin(x) + x^5}{x^3} &= \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x) + x^5}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x) + 5x^4}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + 20x^3}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x + 60x^2)}{6}\end{aligned}$$

3.3 Taylor

Teorema 1: *Formula di taylor*

Sia f unf funzione e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi esiste un polinomio di grado $\leq n, P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad x \to 0$$

Il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla seguente formulari:

$$P_n(x) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k$$

3.3.1 Dimostrazione

Teorema necessario ai fini della Dimostrazione:

Teorema 2: *Teorema derivate di primo e secondo ordine*

Sia ϕ una funzione per cui

$$\phi(0) = \phi'(0) + \phi''(0) + \ldots + \phi^{n}(0) = 0$$

Allora

$$\phi(x) = o(x^{n}) \quad x \to 0$$

Dimostrazione:

- Applico definizione quasi equivalente per il caso $n = 3$ (eivto di fare infinite derivate):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^3} \underbrace{=}_{\text{de l'hopital}} \frac{\phi'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi'''(x)}{6} = 0$$

3.4 Tabella sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

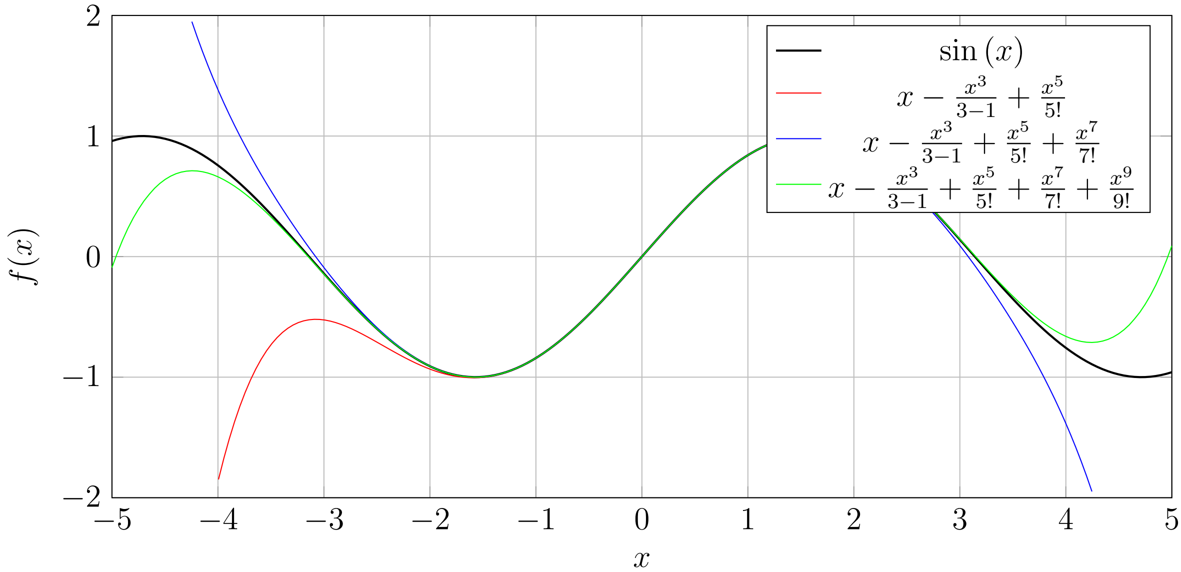
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots \qquad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots \qquad (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots$$

Questi sviluppi si possono dimostrare applicando la definizione e calcolando la derivata, trovando la regola che detta quando questa si annulla

GRAFICO: Approssimazione seno con taylor



3.5 Sviluppo con Taylor $\neq 0$

Definizione 5: *Taylor con centro in x_0*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

NB: questa formula è equivalente alla formula di Taylor per $x \to 0$ applicata su una funzione traslata orizzontalmente verso destra di x_0

Incomprensione - 10:45:02

Come cazzo si dimostra?

- Calcolando la derivata in x_0 ottengo l'approssimazione locale in x_0
- Moltiplicando la derivata per $(x - x_0)$ traslo il polinomio ottenuto verso destra di x_0

4 Teoremi continuoità e derivabilità

Teorema 3: *Esistenza degli zeri*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ossia che che a e b hanno segno discorde). Allora

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f(c) = 0$$

NB: posso applicare una variante del teorema. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$ o viceversa, allora

$$\exists x_0 \text{ t.c. } f(x_0) = \lambda$$

Posso generalizzare ulteriormente tramite il teorema dei valori intermedi:

Teorema 4: *Teorema dei valore intermedi*

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia

$$L = sup\{f(x) : x \in (a, b)\} \text{ e } l = \infty\{f(x) : x \in (a, b)\}$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $l < \lambda < L$. Allora

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f(c) = \lambda$$

Questo equivale a dire che una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo. NB: da questo teorema posso ricavare il fatto generale che se:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

oppure viceversa, allora $f(x)$ è surgettiva

4.1 Teoremi studio locale funzione

Teorema 5: *Criterio di monotonia 1*

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Supponiamo che $f'(x) > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

- $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

NB: l'affermazione si limita allo studio locale di una funzione. La funzione è quindi crescente ma solo localmente

Definizione 6: *Punto stazionario*

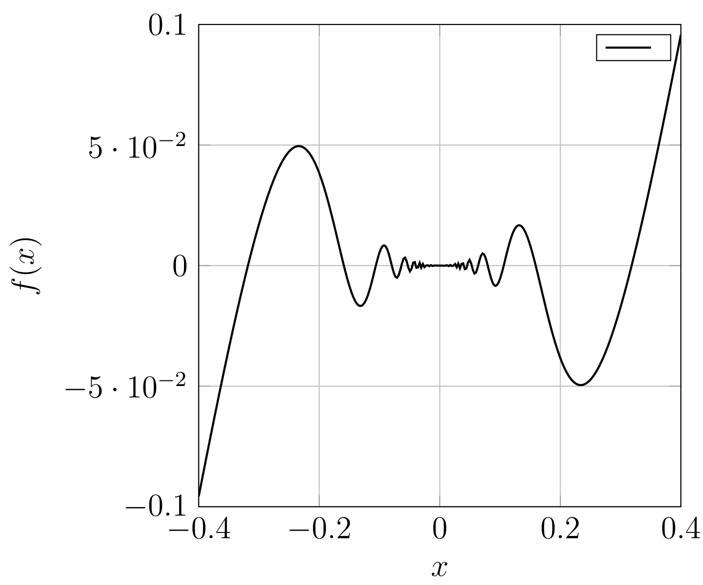
Sia f derivabile in x_0. Se $f'(x_0)$ allora il punto x_0 è detto punto stazionario

NB: ho 5 possibili punti stazionari:

- Punto di massimo
- Punto di minimo
- Flesso a tangenza orizzontale ascendente
- Flesso a tangenza orizzontale discendente
- Funzioni patologiche che oscillano in a fucked-up fashion

Esempio di quest'ultimo caso:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Questa funzione oscilla sempre più avvicinandosi all'origine, ma la derivate in 0 esiste ed è nulla

Teorema 6: *Criterio delle derivate successive*

Immagino di cercare la prima derivata che non si annulla in un punto x_0. Supponiamo che questa derivata sia di ordine k:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

ho 4 opzioni:

- k
  - è pari
    - $f^k(x_0) > 0$ — x_0 è minimo locale
    - $f^k(x_0) < 0$ — x_0 è minimo locale
  - è dispari
    - $f^k(x_0) > 0$ — x_0 è flesso a tg. orizzontale ascendente
    - $f^k(x_0) < 0$ — x_0 è flesso a tg. orizzontale discendente

Dimostrazione: la dimostrazione è interesante e usa lo sviluppo di Taylor

- Calcolo sviluppo di Taylor in x_0 in modo tale da approssimare concavità della funzione (vedi *sezione 3.5*)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

- Per un valore di h molto piccolo posso calcolare il polinomio in $x_0 + h$, visto che non mi distaccherei troppo dall'intorno in cui il polinomio è approssimato bene:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots + \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k + o\left(h^k\right)$$

- Noto che per ipotesi le derivate di ordine $1, \ldots, k-1$ sono tutte nulle, quindi lo sviluppo di Taylor è il seguente:

$$f(x_0 + h) = \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k + o\left(h^k\right)$$

- Dividendo per h^k elimino l'o-piccolo per definizione e ottengo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

- Noto che ho a destra la derivata *k-esima* di f. Riprendendo le affermazioni riguardo segno della derivata e parità di k posso osservare che, ad esempio, se $f(x_0 + h) > f(x_0)$ x_0 è un punto di minimo locale. Le stesse affermazioni si possono fare per i flessi e i massimi

Teorema 7: *Teorema di Weierstrass*

Sia $f : [a, b]$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Allora esistono almeno un massimo e un minimo assoluto in $[a, b]$

Varianti Weierstrass:

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica. Allora esistono MAX e MIN
- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

  allora esiste MIN/MAX (rispettivamente per $+\infty/-\infty$)

Teorema 8: *Teorema di Rolle*

Sian $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)
- $f(a) = f(b)$

allora

$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f'(x_0) = 0$$

Teorema 9: *Teorema di Cauchy*

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f e g sono continue in $[a, b]$
- f e g sono derivabili in (a, b)

Allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(x) - g(a))\, f_0(x_0)$$

se inoltre

- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo per $g_0(x_0)$ ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

NB: se penso a teorema di Lagrange, noto che il rapporto fra le derivate è esattamente il rapporto fra i Δy che la funzione assume agli estremi:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Facendo il rapporto $b - a$ si annulla e ottengo esattamente quanto espresso da teorema di Cauchy

Dimostrazione:

- Uso rolle su una nuova funzione definita nel seguente modo:

$$\phi(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$$

- Noto che
  - ϕ è continua in $[a, b]$ in quanto *combinazione lineare* di funzioni derivabili
  - ϕ è derivabile in (a, b) in quanto *combinazione lineare* di funzioni derivabili
  - $\phi(a) = \phi(b)$. Basta verificare inserendo a e b
- La funzione soddisma le ipotesi del teorema di Rolle ossia:

$$\phi'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x) = 0$$

  ottengo quindi l'ipotesi 1 del teorema

Teorema 10: *Teorema di Lagrange*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

Allora $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c.

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Dimostrazione:

- Uso teorema di Cauchy con $g(x) = x$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Teorema 11: *Teorema monotonia 2*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo

- f continuo in $[a, b]$
- f derivabile in (a, b)

allora

- Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente
- Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ è debolmente crescente
- Se f è strettamente crescente allora $f_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Se f è debolmente crescente allora $f_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione:

- Per ipotesi f è debolmente crescente. Prendo $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Se f è crescente allora il denominatore del rapporto incrementale è positivo. Il limite per $h \to o^+$ è quindi positivo.

- Per ipotesi $f_0(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Applico Lagrande a $[c, d] \subseteq [a, b]$ e ottengo:

$$f(d) - f(c) = f'(x_0)(d - c)$$

- Siccome $f'(x) > 0$ per ipotesi e $(d - c) > 0$ allora $f(d) - f(c) > 0$
- Vista l'arbitrarietà nella scelta di d e c posso affermare che f è crescente

Teorema 12: *Teorema monotonia 3*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)
- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- Non esiste alcun intervallo contenuto in (a, b) in cui f' è sempre $= 0$. E' possibile tuttavia che $f'(x) = 0$ in punti isolati (*sporadicamente*)

allora

$$f \text{ è strettamente crescente in } (a, b)$$

Dimostrazione:

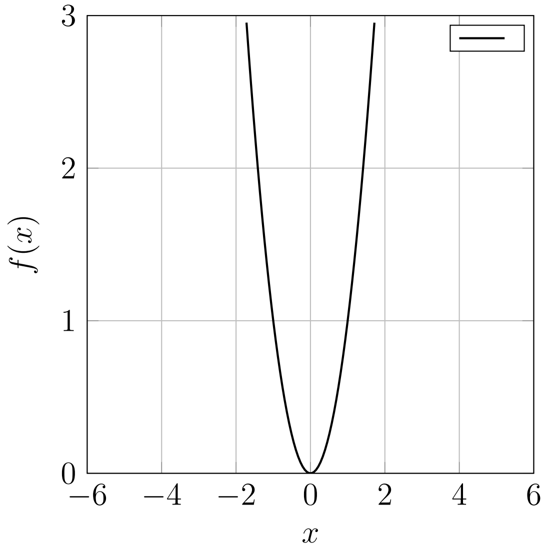
- Per ipotesi f è debolmente crescente: se non fosse strettamente crescente vorrebbe dire che c'è un intervallo in cui f è costante. Questo però viola la condizione 4 per cui f è strettamente crescente

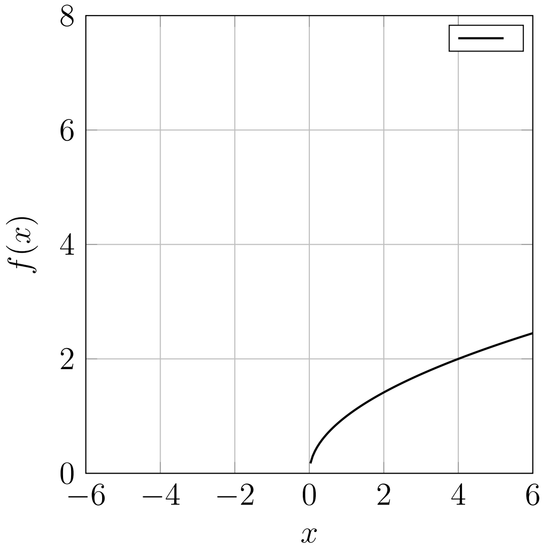
Definizione 7: *Lipschizzianità*

Sia $A \in \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. si dice che f è lipschizziana in A se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x, y \in A$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

Esempi:





No, se $x \to \infty$ la pendenza è infinita. Sì se considero intervallo $[-1, 1]$

No, se $x \to 0$ la pensenza è infinita. Si se considero intervallo $[1, +\infty)$

Teorema 13: *Continuità e lipschizianità*

Sia $f A \to \mathbb{R}$ lipschizziana. Allora

$$f \text{ continua in } A$$

Teorema 14: *Continuità e lipschizianità 2*

Sia $F : A \to \mathbb{R}$ con A convesso. Allora

$$f \text{ è lipschizziana in } A \Leftrightarrow |f'(x)| \text{ è limitato}$$

in più, in quest'ultimo caso si ha che

$$L = sup\left(|f'(x)| : x \in [0, 1]\right)$$

NB:

$$\boxed{\text{Posso sfruttare quest'ultimo teorema per ottenere importanti disuguaglianze.}}$$

Se trovo la minima costante di lipschiz posso applicare la definizione per ottenere la disuguaglianza