Esercizi analisi

Valentino Abram

2023

Indice

1 Esercizi settimana 1

1. Determinare per quali valori del parametro a il polinomio è divisibile per il secondo

$$P_1(x) = \left(1 - a^2\right) x^3 - (a-2)\, x^2 + (2-a)\, x + a \quad P_2(x) = x + 1$$

2. Fattorizzare i seguenti polinomi a coefficienti reali:

$$\begin{aligned} &P(x) = x^4 - \left(a^2 - 1\right) x^2 - a^2 \quad a \in \mathbb{R} \\ &P(x) = x^9 + a^9 \quad a \in \mathbb{R} \\ &P(x) = x^6 + a^6 \quad a \in \mathbb{R} \\ &P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 7 \\ &P(x) = 3x^4 - 1 \end{aligned}$$

3. Determinare, eventualmente al variare di $m \in \mathbb{R}$ i seguenti insiemi:

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{x^2 - (m+1)\, x + m}{x^3 + 1} \geq 0\right\} \qquad \left\{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{x+1}{x-2} > \frac{x-3}{x+3}\right\}$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{|x-1|\, x}{x^2 + m} \leq 0\right\} \qquad \left\{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{(x+m)}{mx^2} \geq 0\right\}$$

4. Sia $P(x)$ un polinomio di grado n. Qual è il numero massimo delle radici distinte di $|P(x)|$? E di $P(|x|)$?

5. Dimostra per induzione la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

dove $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, $n \geq i$ è un coefficiente binomiale e $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2, \quad 0! = 1$

> *Suggerimento: nel passo induttivo effettuate la sosotiuzione $t = k+1$ nella sommatoria:*
>
> $$\sum_{k=0}^{n} b^{k+1} = \sum_{t=1}^{n+1} b^t$$
>
> *Cervate di ricondurvi a due sommatorie uguali e usate la relazione* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{n-1}$

6. (Difficile) sia $n \geq 2$ e siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\text{se } x_1, \ldots, x_n = 1 \text{ allora } x_1 + \ldots + x_n \geq n$$

Suggerimento: per il passo base $n = 2$ dovere risolvere una semplice disequazione

Per il passo induttivo , si supponga che

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{n+1}$$

Cosa succede se $x_1 < 1$? Cosa possiamo concludere ? E cosa succede di conseguenza a x_{n+1}?

Stimate $(x_1 - 1)(1 - x_{n+1})$ ed utilizzate l'ipotesi induttiva

2 Esercizi settimana 2

2.1 Estremo superiore e inferiore, massimo e minimo

1. Determinate estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi, stabilendo se sono eventualmente massimo e minimo:

$$\left\{a_n = 3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cap (0, 2]$$
$$\left\{a_n = \frac{3^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\left\{a_n = \frac{n^3 - 1}{n - 1}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\} \cup (-1, 2)$$

2. Determinate estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi, stabilendo se sono eventualmente massimo e inimo:

$$\{x \in \mathbb{R} : \quad |\cos x - 1| > \cos x\} \cap [0, 3\pi]$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+2} \leq 15\right\}$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \sqrt{2x + 4} > x - 2\right\}$$

3. Dimostrare, <u>facendo uso della definizione</u>, che dato l'insieme

$$A = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

vale che

$$\inf A = \min A = 0 \quad \sup A = 1$$

4. Determinate estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$\left\{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{N} : \quad 0 < m < n\right\}$$

2.2 Funzioni e le loro proprietà

1. Determinare i domini delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&f : x \mapsto \log\left(\sqrt{x^2+3}\right)\\
&f : x \mapsto \log\sin\left(\log\left(x^2-1\right)\right)\\
&f : x \mapsto \log\frac{\alpha x+1}{x^2+3}\\
&f : x \mapsto \log\tan\left(\log|x|\right)
\end{aligned}$$

2. Determinare le immagini delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&f : x \mapsto \operatorname{sign}(x)\, e^x, \text{ ove } \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se x ¿ 0} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}\\
&f : x \mapsto x\sin(x)
\end{aligned}$$

3. Determinare la periodicità delle seguenti funzioni, e dire inoltre se sono pari o dispari:

$$f : x \mapsto e^{\pi\sin(x)} \qquad f : x \mapsto \log(\cos(x))$$

$$f : x \mapsto (\sin(x))^2\, x \qquad f : x \mapsto \frac{x^2+3}{\cos x}$$

4. Siano A, B, C, D quattro insiemi e f, g, h tre funzioni

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Dimostrare che se $g \circ f : A \to C$ e $h \circ g : B \to D$ sono entrambe biiettive allora f, g, h sono biettive

3 Esercizi settimana 3

1. Sia $x \in \mathbb{C}$. Scrivere in forma algebrica e polare i seguenti numeri complessi:
   - Simmetrico di z rispetto all'origine
   - Simmetrico di z rispetto all'asse immaginario
   - Simmetrico di z rispetto alla bisettrice del I e III quadrante
   - Simmetrico di z rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante

2. Rappresentare nel piano complesso le seguenti radici:

$$\sqrt[3]{2(i-1)} \qquad \sqrt{[4]1-i} \qquad \sqrt[2]{i+20}$$

3. Determinare la parte reale ed immaginario dei seguenti numeri complessi:

$$(1+i)^{100} \qquad (1+i)^{101} \qquad \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$$

4. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
&\overline{z}\left(\operatorname{Im}(z)+\operatorname{Re}(z)\right)=z\\
&\frac{8}{z\,|z|}=\sqrt{3}+i\\
&2z\overline{z}+2\left(z+\overline{z}\right)-2i\left(z-\overline{z}\right)=-2\\
&3x^2+3\overline{z}^2+2z\overline{z}-8\left(z+\overline{z}\right)=-4\\
&\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=z
\end{aligned}$$

5. Rappresentare nel piano compesso i seguenti insiemi:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}(z)+2\operatorname{Im}(z)\geq 1\\ |z+i-3|<1\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}|\operatorname{Im}(z)|\leq 2\\ |z|=|z-1|\end{cases}$$

$$\begin{cases}|z-1|\geq |z-i|\\ |z-2i|\geq 1\end{cases}$$

6. Siamo $z_1,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{C}$ le radici $n-$ *esime* di un numero complesso $w\in\mathbb{C}$, sia $p\in\mathbb{N}$. Vale la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^p=\begin{cases}nw^{p/n} & \text{se } p \text{ è multiplo di } n\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Suggerimento: Conviene scrivere i numeri in forma polare. Il caso p multiplo di n è immediato; per il caso oppoosto, convieme ricordarsi la somma parziale di una serie geometrica di ragione a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k=\frac{a^n-1}{a-1}$$

4 Esercizi settimana 4

1. Determinare se le seguenti successioni convergono, ed eventualmente a quale numero reale:

$$\left(s_n = \frac{2x^4 - 5n}{1-n}\right)_n \qquad \left(s_n = \frac{n!\,(n+1)^2}{e^n\,(n^3+3)}\right)_n$$

$$\left(s_n = \sqrt{n^2+n} - n\right)_n \qquad \left(s_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}\right)_n$$

$$\left(s_n = \begin{cases} (-1)^n & , n \le 100 \\ \frac{n^2}{1+n^2} & , n > 100 \end{cases}\right)_n \qquad \left(s_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}\right)_n$$

$$\left(s_n = \frac{1 + \ldots + n}{n^2}\right)_n \qquad \left(s_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)_n$$

$$\left(s_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2}\right)_n \qquad \underbrace{\left(s_n = \sqrt[n]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)_n}_{\text{con } x \in \mathbb{R} \text{ fissato}}$$

2. Vale il seguente risultato:

Teorema 1: *Convergenza succesioni*
Se $(b_n)_n$ e $(a_n)_n$ sono tali per cui

- $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n \to b, b > 0$
- $a_n \to a$

allora

$$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{a_n} = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

Determinare se le sseguenti successioni convergono, ed eventualmente a quale numero reale:

$$\left(s_n = \left(\frac{n^5+7}{5n^5-1}\right)^{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}\right)_n$$

$$\left(s_n = \left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2-1}}\right)^{\frac{n+\sin(n)}{2n+5}}\right)_n$$

3. Definiamo la successione $(s_n)_n$:

$$s_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2}s_{n-1} + \frac{1}{s_{n-1}} & \text{se } n \ge 1 \end{cases}$$

Determinare se $(s_n)_n$ converge, ed eventualmente a quale limite

4. Sia $(a_n)_n$ con $a_n \to 0$, allora $(b_n = e^n a_n)$

   - ☐ b_n converge per ogni scelta di $(a_n)_n$
   - ☐ b_n è monotona crescente per ogni scelta di $(a_n)_n$
   - ☐ $b_n \to 0$ per qualsiasi $(a_n)_n$
   - ☐ $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste $(a_n)_n$ tale che $b_n \to a$

5. Verificare, <u>facendo uso della definizione</u>, che $(a_n)_n$

$$s_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

   non converge

6. Definiamo la successione $(f_n)_n$

$$f_n = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ f_{n-1} + g_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

   Dimostrare che f_n diverge a $+\infty$

7. A partire da $(f_n)_n$, definiamo la successione $(l_n)_n$

$$l_n = \frac{f_n}{f_{n-1}} \quad n \geq 1$$

   Dimostrare che l_n converge a $l \in \mathbb{R}$, e determinare l

> *(Suggerimento): Se si suppone che $l_n \to l$, rislvendo un'equazione di punto fisso simile a quella vista a lezione (ricordarsi che $f_n = f_{n.1} + f_{n-2}$!) otteniamo il valore di l.*
>
> *A questo punto possiamo verificare usando la definizione che effettivamente $l_n \to l$. A questo scopo, è utile trova una stima "rivorsiva" per $|l_1 - l|$, ossia*
>
> $$|l_n - l| \leq \text{ (qualcosa che dipende da } l_{n-1})$$
>
> *usando la monotonia di f_n $((l_n \geq 1 \forall n))$!* e la regola rocorsiva per l_n. usando poi che $\frac{1}{l} < 1$ e che $a^n \to 0$ se $a < 1$ si conclude

5 Esercizi settimana 5

5.1 Limiti di funzioni

1. Calcolare, se esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2+5x} \qquad \lim_{x\to\infty} x\sin(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)}{\arctan(3x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x+3}-\sqrt[4]{x-2} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\frac{-1}{1-\log(x)}$$

$$\lim_{x\to 1} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\log(x+3)}\right)^{x+3}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+\sqrt{1-x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(e^{2x}-1)}{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{\cos(x)}\right)\right)}$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\log(x)-1}{x-e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x|(2-x^2+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\sin(x) \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to \frac{-1}{2}} \frac{2x+1}{1-\sqrt{8x^2-1}} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to \frac{-\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{cotan}(x)}{1+\tan(x)} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^3)}{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)} \qquad \lim_{x\to 0} (1+\tan(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$$

2. Calcolare, se esistono i seguenti limiti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+x^\alpha}{2+x}\right)^{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3-3\sin(x^\alpha)}{\sqrt{1+4x^3}-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\log(1+x^\alpha)} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(x^2+x^\alpha)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} x(\alpha+\sin(x)) \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^\alpha+e^3)-3}{1-\cos(\sqrt[3]{x})}$$

5.2 Continuità

1. Stabilire se le seguenti funzioni, inizialmente definite sul proprio naturale insieme di definizione, si possano estendere a funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{x}{|x|} \qquad f(x)=\sin\left(\pi\frac{x}{|x|}\right) \qquad f(x)=\frac{1}{1+x+\frac{x}{|x|}}$$

2. Determinare per quali valori del parametro $\alpha in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni definite a tratti sono continue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} & x \leq 1 \\ -3x + \alpha & x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \log(2x+\alpha) & \frac{-\alpha}{2} < x < 1 \\ \arcsin(1-x^2) & 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha^2-4}{x}} + 1 & x > 0 \\ \cos(x) + \frac{\alpha}{2} & x \leq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3+4} & x \leq 0 \\ (x-\alpha)^2 - \frac{1}{\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

3. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta addittiva se

$$f(x+4) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che se f è monotona crescente e addittiva, allora

$$f(x) = xf(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Suggerimento): innanzitutto, sudiate il comportamento di f in 0. Dopodiche, passate allo studio di $f(n), n \in \mathbb{N}$ e $f(z), z \in \mathbb{Z}$.

Cosa succede se considerate $zf(z), z \in \mathbb{Z}$? Cosa si può concludere per $f(q), q \in \mathbb{Q}$?

Dimostrare che f è continua in 0 tramite le successioni, per addittiviò concludete che f è continua ovunque. A questo punto concludete ricondando che $\forall x \in \mathbb{R} \exists (q_n)_n, \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ tale che $q_n \to x$

4. Diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è moltiplicativa se

$$f(xy) = f(x) f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è additiva e moltiplicativa, allora $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ oppure

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Suggerimento): cercare di ricondurvi all'esercizio prederente, dimostrando che se f è additiva e moltiplicativa, allora f è monotona. Per farlo, procedete valutando il comportamento di f in 0.

Determinate quindi il legame fra $F(x)$ e $f(-x)$, dopodichè valutate il comportamento di $f(x^2)$.

Ricordando che $x^2 : R^+ \to \mathbb{R}^+$ è suriettiva e iniettiva, cosa possiamo dire di $f(x)$ per $x \geq 0$? Se $x \geq y$, allora $z - y \geq 0$, usate i risultati precedenti per concludere che f è monotona crescente. Infine valutato f in 1

6 Esercizi settimana 6

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, definite nel loro naturale dominio di definizione:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k+1}$$
$$f(x) = \sin(e^x)\, e^{\cos(x)} \qquad f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$$
$$f(x) = x^{-1}\log(x) \qquad f(x) = (x\beta)(x+\beta)\,x^{-n}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \arcsin(x)\arccos(x) \qquad f(x) = \cosh(\sinh(x))$$
$$f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+\cos()}{1-\cos(x)}}\right) \qquad f(x) = \log(\log(x))$$

2. Determinare dove le seguenti funzioni sono derivabili:

$$f(x) = \sqrt{x+|x|^3+1} \qquad f(x) = \cosh|x|$$

3. Determinare la retta tangente al grafico di $f(x)$ passante nel punto x_0, y_0 indicato:

$$f(x) = e^{\cos(x)} \qquad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$
$$f(x) = \log(\tan(x)) \qquad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$
$$f(x) = e^{\arctan(x)} \qquad \left(1, e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$f(x) = 2^x \qquad (0,0) \to \text{ !! Il punto } (0,0) \text{ non appartiene al grafico di } f\text{!!}$$

4. Determinare la retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ passante per il punto di Graph (f^{-1}) indicato

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{e}\right) + x \qquad (e,e)$$
$$f(x) = \log(x) + \sqrt{x} \qquad \left(2+e, e^2\right)$$
$$f(x) = e^x + x^2 \qquad (e+1, 1)$$

5. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed eventualmente $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che f sia derivabile (nel naturale dominio di definizione):

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} & x<0 \\ \sqrt{1+\sin(\beta x)} & x \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \log|x-\alpha| & x<0 \\ \beta x - \sin(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(x+\alpha) & x<0 \\ \sqrt{1+\beta x^2} & \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & 0 < x \leq 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

6. Calcolare, se possibile, i seguenti limiti con il teorema di de l'Hôpital

$$\overset{\sin(x)}{\lim_{x\to 0^+}} \qquad \lim_{x\to 0} x\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x+\log(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\log(1+x^2)} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2x^2-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan(x))^{\tan(2x)}$$

7. Determinate i primi termini (decidete voi dove fermarvi, ma andate avanti almeno fino al quarto ordine) dello sviluppo di Taylor centrato in 0 delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 2\arctan(\sin(x)) - \sin(2x)$$
$$f(x) = \sin(\log(1+x)) + x\log(\cos(x))$$
$$f(x) = \sinh(x) - x\cosh(x)$$
$$f(x) = x^2\log(1+\sin(x))$$
$$f(x) = \log\left(\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$$

in seguito, determinate i valori di $f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$ delle funzioni

8. Risolvere i seguenti limiti utilizzando Taylor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos(x)}-2x\sin(x)-1}{\sqrt{1+9x^4}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+e^{-3x}-3cos(2x)}{2\log(1-2x)-\log(1-4x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{e})^{\sin(x)}-\cos\sqrt{x}-x}{\log^2(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left((1-x)^{-1}+e^x\right)^2-4e^{2x}-3x^2}{x^3}$$

7 Esercizi settimana 7

1. Studiare l'andamento delle seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \frac{2x^2+4x+11}{x^2+2x-8} \qquad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-5x+6)^2} \qquad f(x) = \sqrt{1+e^x}$$

$$f(x) = \log\left|1-\frac{1}{\log|x|}\right| \qquad f(x) = \frac{e^x}{2x-1}$$

2. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione polinomiale

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + k$$

ammette una sola radice

3. Calcolare il volume massimo e la soperficie laterale massima si un cilindro ciroclare retto iscritto nella sfera di raggio unitario $\mathbb{S}^2$

4. Dato $a \in \mathbb{R}$, sia definita $g_a(x) = (x-a)\, e^{-x^2}$. Determinare, in funzione di a se esistono punti di minimo/massimo locali e globali $\mathbb{R}^+$, ed eventualmente trovarli

5. Se dovere calcolare $\cos(1)$ con le cifre decimali esatte, usando lo sviluppo di Taylor, quanti termini è necessario considerare?

6. Calcolare $\log(48)$ alla seconda cifra decimale, usando carta e penna (ed eventualmente la calcolatrice)

> *(Suggerimento): ricordare che lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange per* $\log(1+x)$ *è dato da*
>
> $$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{(1+\delta)^{-n+1}}{n+1} x^{n+1}$$
>
> *Pertanto l'errore cresce molto velocemente se ci allontaniamo da* $x = 1$*, c cala molto lentamente per* $x = 1$*. Pertanto provate a scrivere* $\log(48)$ *come somma di termini più piccoli, per esempio* $\log\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

7. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenziabile due volte in $[a,b]$ (ossia è differenziabile due volte su di un intervallo aperto contenente $[a,b]$) e tale che:

$$\begin{aligned} &f(a) < 0, \quad f(b) > 0 \\ &f'(x) \geq d > 0 \quad \forall x \in [a,b] \\ &0 \leq f''(x) \leq \mu \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

   (a) Dimostrare che esiste un unico punto $\xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$

   (b) Dato un generico $x_1 \in (\xi, b)$, definiamo per ricorsione

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   Che significato geometrico ha il punto x_{n+1}?

   (c) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$

   (d) Mostrare che vale la seguente stima:

   $$0 \leq x_{n+1} - \xi \leq \frac{2d}{\mu} \left(\frac{\mu}{2d} (x_1 - \xi) \right)^{2n}$$

(Sugerimento): per il punto (a) procedere come fatto a lezione nell'esercizio sul teorema di Rolle.

Per il punto (d), ricodate che la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è data da

$$y = f'(x')(x - x_0) + f(x_0)$$

Per il punto (3), povate che la successione $(x_n)_n$ è monotona decrescente e che è limitata inferiormente. Per fare questo, operate così facendo: $x_1 > \xi$ e quindi $f(x_1) > 0$ per costruzione. A questo punto $x_2 > x_1$ e applicando il teorema del valor medio otteniamo:

$$f(x_2) = f(x_1) - f'(t_2)(x_1 - x_2) \quad t_2 \in (x_2, x_1)$$

Per la terza ipotesi $-f'(t_2) \geq f'(x_1)$ (spiega!) e quindi :

$$f(x_2) \geq f(x_1) - f'(x_1)(x_1 - x_2) = f'(x_1)\left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - x_1 + x_2\right) = 0$$

Poiché f è monotona crescente (perché?) allora $x_2 \geq \xi$. Cosa succede se $x_2 = \xi$? Se invece $x_2 > \xi$, si può proseguire come prima per il passo induttivo

Poiché $(x_n)_n$ converge, si può determinare il limite con brdicie di punto fisso.

Per la stima, utilizzare il teorema di Taylor on resto di Lagrange per stimare $x_{n+1} - \xi$ e utilizzare (b), (c) per stimare il coefficiente di $(x_n - \xi)$. Infine procedere per ricorsione

Questo metodo è un metodo numeri per il calcolo degli zeri di funzione, chiamato metodo di Newton. E' estremamente veloce nel convergere alla radice (invere il metodo di bisezione e molto lento, ad ongi passaggio fissate una cifra binaria!)

8 Esercizi settimana 8

1. Determinare le seguenti primitive usando il teorema del cambiamento di variabile:

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx \qquad \int xs\sqrt{x+1}\,dx$$

$$\int e^{x^2}\,dx \qquad \int \frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \int \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

$$\int \tan(x)\,dx \qquad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \qquad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

2. Determinare le seguenti primitive usando l'integrazione per parti:

$$\int x \sin(x)\ dx \qquad \int (\log(x))^2\ dx$$
$$\int xe^x\ dx \qquad \int \arcsin(x)\ dx$$
$$\int x^2 \cos(x)\ dx \qquad \int \log\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\ dx$$
$$\int x \arctan(x)\ dx \qquad \int \frac{x}{\cos^2(x)}\ dx$$
$$\int \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\ dx \qquad \int x^3 e^{-x}\ dx$$
$$\int e^x \cos(x)\ dx \qquad \int \cos^2(x)\ dx$$
$$\int \frac{\log(x)}{x^2}\ dx \qquad \int e^x \sin(x)\ dx$$
$$\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x}\ dx$$

3. Determinare le seguenti primitive di funzioni razioni

$$\int \frac{1}{x^2-x-2}\ dx \qquad \int \frac{1}{4x^2-4x+1}\ dx$$
$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\ dx \qquad \int \frac{2x+1}{9x+4}\ dx$$
$$\int \frac{x-1}{x+1}\ dx \qquad \int \frac{4+x^3}{x^2-1}\ dx$$
$$\int \frac{9}{9+4x^2}\ dx \qquad \int \frac{x^2-1}{x^3(2x^2+1)}\ dx$$
$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\ dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\ dx$$
$$\int \frac{1}{4x^2+12x+9}\ dx \qquad \int \frac{1}{6\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\ dx$$
$$\int \frac{1}{x^2-5x+4}\ dx \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx$$

i

9 Esercizi settimana 9

1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$
determinare il dominio di definizione D_F di
$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt + 1$$

Dimostrare che F è invertibile su D_F e calcolare

$$\left(\frac{d}{dx}F^{-1}\right)(1)$$

2. Calcolare gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni (almeni i primi 3 termini)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \sinh(t) + \frac{t^2}{2} - \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)\, dt && \text{in } x_0 = 0 \\
F(x) &= \int_0^x (t-1)^2 - \sin(\pi t)\, dt && \text{in } x_0 = 1 \\
F(x) &= \int_0^{x^2-1} e^{-t^2}\, dt && \text{in } x_0 = 1 \\
F(x) &= \int_0^x t\cosh(t) - \sinh(t)\, dt && \text{in } x_0 = 0
\end{aligned}$$

3. Calcolare i seguenti limiti in funzione del parametro reale α, usando il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x t^2 + \sin(\pi t)\, dt}{x^\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \left(\frac{\sin(2t)}{t} + \frac{t^2}{3} - 2\cosh(t)\right)\, dt}{\int_0^x t^\alpha\, dt}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{1-\cos(x)} te^{t^4}\, dt}{x^\alpha}$$

4. Calcola i seguenti limiti sviluppando opportunamente la funzione integranda con Taylor:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^e \frac{t^2}{\sqrt[3]{x+t^3}}\, dt \qquad \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(xt)\, dt}_{\text{verificare anche con espressione esplicita}} \qquad \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_1^2 \frac{\log\left((1+x)^t\right)}{\sqrt{t+x^2}}\, dt}_{\text{verificare anche con espressione esplicita}}$$

5. Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx && \int_0^3 \frac{2x^2-3x+1}{x-4}\, dx \\
&\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx && \int_0^1 \frac{1+e^{2x}}{1+e^x}\, dx \\
&\int_1^2 \frac{\log(x^2)}{x}\, dx && \int_0^{\log 10} x^2 e^x\, dx \\
&\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\, dx && \int_2^3 x^3 (\log(x))^2\, dx \\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)+2}\, dx && \int_{-1}^1 x^5 e^{-x^2}\, dx
\end{aligned}$$

10 Esercizi settimana 10

1. Determinare se i seguenti integrali impropri esistono o meno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1+\cos(x)}{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$\int_4^{\infty} \frac{3}{1+x^2}\,dx \qquad \int_3^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2x+1}}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{xe^x}\,dx$$

2. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^3(x)}\,dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}\,(2x+1)}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx \qquad \int_6^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \left(x^3\left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}}+3xe^{-x}\right)\,dx$$

3. Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali per cui i seguenti integrali impropri esistono:

$$\int_0^{+\infty} (x+2)^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{1}{(x+3)^{2\beta}}\right)\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \frac{\alpha}{3x-1}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+\sin(x))\,(3x^2-5x+2)^{\frac{1}{3}}}{x^{\beta}\,(1+x^2)}\,dx \qquad \int_2^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{x^2+1}+\frac{\beta}{x^2-4}\right)\,dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})-\log(\sqrt{x}-1)}{x^{\frac{\beta}{2}}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{\alpha x}{x-1}-\frac{3\beta x}{x^3-1}\right)\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\arctan(\pi x)}{x^{\alpha}\,(9x+4)^{\beta}}\,dx \qquad \int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

11 Esercizi settimana 11

1. Calcolare gli integrali generali delle seguenti eqazioni differenziali, provare anche a determinare il dominio di definizione

$$\mu' = \mu + \sin(t) \qquad \mu' = \frac{1}{\mu^2(t^2+1)}$$
$$\mu' = tu + t^2 t \qquad \mu\mu' = 1 - t^2$$
$$\mu' = t(\mu-1)(\mu-2) \qquad \mu' = \mu\tan(t) + \cos(t)$$
$$\mu' = \frac{\mu^2}{t^2+1} \qquad t\mu' - \mu = \mu^3$$
$$\mu' = 2\mu\tan(x) + \sqrt{\mu} \qquad \mu' = \frac{\mu}{t} - \frac{1}{\mu}$$
$$\mu' = 2\mu - e^t\mu^2 \qquad \mu' = \frac{t+\cos(\mu)}{t\sin(\mu)}$$

2. Dati i seguenti problemi di Cauchy, calcolare il valore della soluzione nel posto indicato:

$$\begin{cases} \mu'(t) = 1 + y^2 \\ \mu(1) = 0 \end{cases} \qquad \mu(0) =?$$
$$\begin{cases} \mu'(t) = \frac{2e^{-2\mu}}{y+t^2} \\ \mu(0) = 0 \end{cases} \qquad \mu(3) =?$$
$$\begin{cases} \mu'(t) = \frac{\mu}{t(t-1)} + t \\ \mu\left(\frac{e}{1-e}\right) = \frac{e}{2(1-e)^2} \end{cases} \qquad \mu(-2) =?$$
$$\begin{cases} \mu'(t) = -\frac{1}{t}\mu + \frac{\sin(t)}{t} \\ \mu(\pi) = \frac{1}{\pi} \end{cases} \qquad \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) =?$$
$$\begin{cases} \mu' - \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\mu = \frac{1}{\sin(t)} \\ \mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \qquad \mu\left(\frac{\pi}{3}\right) =?$$
$$\begin{cases} \mu'(t) = \sinh(\mu^3 - 1) \\ \mu(1) = 1 \end{cases} \qquad \mu(2)?$$

3. Dati i seguenti problemi di Cauchy, determinare il comportamento locale della soluzione in un intorno dell'istante iniziale:

$$\begin{cases} t\mu(t) - \mu'(t)\cos(t) = e^t \\ \mu(0)\,1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\mu'(t) - \mu(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \mu(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cosh(t)\,\mu'(t) + \frac{1}{\mu(t)} = e^t \\ \mu(0) = 2 \end{cases}$$

4. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \mu' = (\mu - 1)(\mu - 2) \\ \mu(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu' = \frac{\mu^2}{1+t^2} \\ \mu(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(\mu') + \mu - e^t = 0 \\ \mu(1) = a \end{cases}$$

12 Esercizi settimana 12

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy e calcolare μ al tempo indicato

$$\begin{cases} \mu'' = 4\mu' - 12\mu = 0 \\ \mu(0) = 0 \\ \mu'(0) = 2 \end{cases} \qquad \mu\left(\frac{1}{2}\right) =?$$

$$\begin{cases} \mu'' + 4\mu' - 12\mu = 0 \\ \mu(0) = -1 \\ \mu'(0) = 1 \end{cases} \qquad \mu\left(\frac{1}{5}\right) =?$$

$$\begin{cases} \mu'' - 6\mu' - 27\mu = 0 \\ \mu(0) = 0 \\ \mu'(0) = 12 \end{cases} \qquad \mu\left(\frac{1}{3}\right) =?$$

$$\begin{cases} \mu'' + 2\mu' + 3\mu = 0 \\ \mu\left(\sqrt{2}\pi\right) = 2 \\ \mu'\left(\sqrt{2}\pi\right) = -2 \end{cases} \qquad \mu(0) =?$$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \mu'' - 2\mu' - 15\mu = e^t \\ \mu(0) = -\frac{5}{12} \\ \mu'(0) = 1 \end{cases} \qquad \mu_p(t) = k_1 e^t$$

$$\begin{cases} \mu'' - 2\mu' - 15\mu = e^{5t} \\ \mu(0) = \frac{1}{10} \\ \mu'(0) = \frac{5}{8} \end{cases} \qquad \mu_p(t) = k_1 t e^{5t} + k_2 e^{5t}$$

$$\begin{cases} \mu'' - 2\mu' - 15\mu = te^{-3t} \\ \mu(0) = \frac{1}{10} \\ \mu'(0) - \frac{1}{64} \end{cases} \qquad \mu_p(t) = k_2 t^2 e^{-3t} + k_1 t e^{-3t} + k_1 e^{-3t}$$

$$\begin{cases} \mu'' + 2\mu' - 3\mu = \cos(t) \\ \mu(0) = -\frac{1}{2} \\ \mu'(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \mu_p(t) = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it}$$

Nel secondo e nel terzo problema di Cauchy k_1 *e* k_3 *spariscono quanto inserite la soluzione particolare nell'equazione. Notate che* e^{5t} *e* e^{-3t} *sono parte della soluzione dell'omogenea; potete scomporre i coefficienti e trattarli come un'unica costante da determinare con le condizioni iniziali*