Geometria e algebra lineare

Mattia Marini

14.09.22

Indice

Definizioni

Teoremi e Assiomi

Incomprensioni

1 Vettori geometrici

1.0.0 Vettore geometrico nel piano

Prendo due punti A,B. Il vettore $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \in \mathbb{R}^2$

1.0.0 Vettore geometrico nello spazio

Prendo due punti A,B. Il vettore $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \in \mathbb{R}^2$

NB: $\vec{AB} = \vec{CD}$ se e solo se A,B,C,D sono i vertici di un parallelogramma

1.1 Somma e prodotto per scalare

Definizione 1: *Somma vettori*

Dati due vettori di componenti $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ la loro somma è definita come somma delle loro componenti:

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Definizione 2: *Prodotto per scalare*

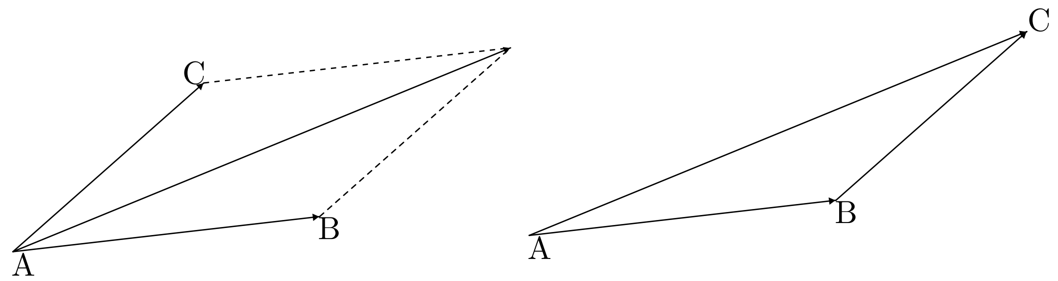
Dato un vettore di componenti (a_1, a_2) e uno scalare k il prodotto scalare è definito nel seguente modo:

$$k\,(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$$

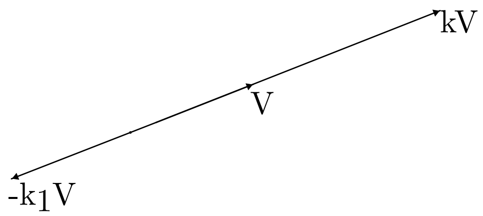
La stessa cosa vale per vettori in $\mathbb{R}^3$

1.1.0 Interpretazione grafica somma vettori

Graficamente la somma vettoriale si può rappresentare con la regola del parallelogramma o del punta coda:



Allo stesso, il <u>prodotto vettoriale</u> si può interpretare graficamente come un allungamento per un fattore k di un vettore v:



$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2)\,|a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3)\,|a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

NB: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (regola del punta coda)

1.1.0 Proprietà somma vettori

- Proprietà associativa →è ovvio visto che la somma di numeri naturali è associativa
- Esistenza elemento neutro $\vec{AB} + 0 = AB$
- Per ogni vettore geometrico $\vec{AB}$ esiste un vettore simmetrico (indicato con $-AB$) che sommato ad AB risulta $\vec{0}$
- Proprietà commutativa i

Posso riassumere queste proprietà affermando che V^2 è un **gruppo commutativo**

2 Rette e piani

2.1 Rette

L'equazione di una retta può essere ricavata immaginandosi di prendere un vettore per due punti, moltiplicarlo per uno scalare variabile t e poi traslare in tutto forzando il passaggio per uno dei due punti del vettore originario. Ottengo in questo modo l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t\,(z_2 - z_1) \end{cases}$$

NB: se semplifico sistema che ottengo esplicitando coordinata x y e z eliminando t ottengo l'equazione di due piani la cui intersezione e la retta

2.2 Piani

L'equazione di un piano può essere ricavata immaginandosi di prendere due vettori, allineare il punto di applicazione (metterli culo a culo), ed eseguire la combinazione lineare di questi ($sv_1 + sv_2$) in modo da ottenere il luogo dei punti definito da un piano. Ottengo la seguente equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_1 + s\,(x_2 - x_1) + t\,(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s\,(y_2 - y_1) + t\,(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s\,(z_2 - z_1) + t\,(z_3 - z_1) \end{cases}$$

Eliminando la s e la t posso ottenere la forma cartesiana, ad esempio:

$$2x - y + 5z - 4 = 0$$

NB: il vettore di coordinate $2, -1, 5$ definize la direzione perpendicolare al piano

2.3 Lunghezza del vettore

La lughezza di un vettore $\vec{v}$ viene indicata con $|\vec{v}|$. Noi scegliamo un sistema di riferimento con gli assi ortogonali per poter applicare il teorema di pitagora e poter evitare l'uso di seni e coseni

$$|\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \text{ in } V^2 \qquad |\vec{c}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \text{ in } V^3$$

3 Prodotto scalare e vettoriale

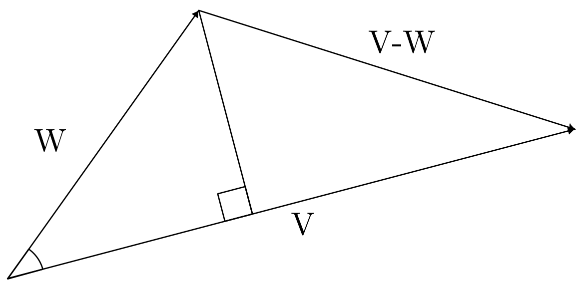
Premessa: Siano $\vec{V} e \vec{W}$ vettori geometrici non nulli nel piano o nello spazio. Noi consideriamo l'angolo convesso ossia quelli compreso fra $[0, 180]$ gradi

3.1 Prodotto scalare

Dimostro la seguente equivalenza:

$$\text{Prodotto scalare } = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = |v|\,|w| \cos\theta$$

Prendo due vettori $\vec{W}, \vec{V}$, li metto culo a culo ed esprimo la lunghezza del terzo vettore che li congiunge:



Condidero i due vettori $\vec{V}$ e $\vec{W}$ ed esprimo la loro differnza tramite due modi: teorema di pitagora e trigonometria

- Modo 1: teorema di pitagora

$$|v-w|^2 = (v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 + (v_3-w_3)^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2\,(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)$$

- Modo 2: trigonometria

$$|v-w|^2 = (|w| \sin\theta)^2 + (|v| - |w| \cos\omega)^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2\,|v|\,|w| \cos\theta$$

- Ottengo per questo l'uguaglianza

$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = |v| + |w| \cos\theta$$

- Girando la formula e tenendo conto che a sinistra ho per definizione il prodotto scalare di v e w ottengo la seguente relazione:

$$w \cdot v = |v|\,|w| \cos\theta$$

3.2 Proprietà prodotto scalare

- Bilineare:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$k\,(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

3.3 Significato coefficienti in equazione cartesiana retta e piano

In una retta r con equazione cartesiana $ax + by = c$ i coefficienti a e b costituiscono un vettore ortogonale alla retta r

- Prendo $P_1\,(x_1, y_2)$ e $P_2\,(x_2, y_2)$ in modo tale che appartengano alla retta:

$$ax_1 + by_1 = c \quad ax_2 + by_2 = c$$

- Mettendo a sistema le due relazioni ottenute e sottraendole ottengo che:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

- Noto che ciò che ho ottenuto a sinistra è il prodotto scalare del vettore di coordinate (a, b) e $\vec{P_1P_2}$; per questo (a, b) definisce un vettore ortogonale alla retta

Eseguento il medesimo ragionamento posso affermare che in un piano π con equazione $ax + by + cz + d = 0$ il vettore di coordinate (a, b, c) sia ortogonale al piano π

3.4 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale fra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è uguale all'area del parallelogramma definito da questi ultimi. Posso dimostrare abbastanza facilmente il suo valore:

$$\begin{aligned} A^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 \sin^2\theta &= |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) \\ &= \left(v_1^2 + v_2^2\right)\left(w_1^2 + w_2^2\right) - \left(v_1w_1 + v_2w_2\right)^2 \\ &= \left(v_1w_2 - v_2w_1\right)^2 \end{aligned}$$

Posso definire quindi il prodotto vettoriale:

Definizione 3: *Prodotto vettoriale*

Il prodotto scalare fra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è uguale all'area del paralelogramma definito da questi ultimi e si può esprimere nel seguente modo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = |v|\,|w| \sin\theta = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

- $\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{w}$
- Il prodotto è nullo se e solo se i vettori sono paralleli o proporzionali
- La direzione di $\vec{v} \times \vec{w}$ è ortogonale a $\vec{v}, \vec{w}$
- Il verso del vettore prodotto vettoriale si determina con la regola della mano destra
- La quantità $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ è l'area del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

4 Gruppi

Definizione 4: *Gruppo*

Un gruppo è un insieme G su cui è definita un'operazione $*$

$$* : G \times G \to G$$

Tale operazione deve soddisfare 3 specifiche:

- E' associativa $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Esiste l'elemento neutro $\exists e \in G$ t.c. $e * a = a * e = a$
- $\forall a \in G$ esiste il simmetrico $a' \in G$ tale che: $a * a' = a' * a = e$

Inoltre, il gruppo si dice **commutativo** se:

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G$$

4.1 Esempi

- $(\mathbb{N}, +)$ $\to$non è gruppo in quanto:
  - è associativo
  - Esiste elemento neutro
  - Non esiste simmetrico
- $(\mathbb{Z}, +)$ $\to$è gruppo in quanto
  - è associativo
  - esiste elemento neutro
  - Esiste simmetrico
- $(\mathbb{N}, \times)$ $\to$non è gruppo (non esiste simmetrico)
- $(\mathbb{Z}, \times)$ $\to$non è gruppo (non esiste simmetrico)
- $(\mathbb{Q}, \times)$ $\to$non è gruppo (solo per quanto riguarda lo zero $0 \cdot$ qualsiasi numero $= 0$)
- $(Q^* = Q \setminus \{0\}, \times)$ $\to$è gruppo commutativo (i razionali meno lo zero)
- $(R^* = R \setminus \{0\}, \times)$ $\to$è gruppo commutativo (i razionali meno lo zero)
- $(C^* = C \setminus \{0\}, \times)$ $\to$è gruppo commutativo (i razionali meno lo zero)

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono detti **campi** nei quali vale la proprietà distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in K$$

Definizione 5: *Campi*

Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ su cui sono definite due operazioni $+$ e $\times$ tali che :

- $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo commutativo
- $\mathbb{K}^* = K \setminus \{0\}, (\mathbb{K}^*, \times)$ è un gruppo commutativo
- Vale la proprietà distributiva: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \forall a, b, c \in \urcorner$

5 n-uple

$$\mathbb{R}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \, | a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

5.0.0 Addizione

$$a, b \in \mathbb{R}^n \quad a + b = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n)$$

5.0.0 Moltiplicazione

$$a \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \quad ka = (ka_1, \ldots, ka_n)$$

NB: è gruppo commutativo in quanto l'addizione e il prodotto sono definite come addizione e prodotto di numeri reali

6 Matrici

Definizione 6: *Matrice*

Una matrice A del tipo $m \times n$ è una tabella di m file e n colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matrice si può scrivere in versione compatta

$$A = [a_{ij}]$$

Se $m = 1$ la matrice si può identificare come una n-upla:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix} = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$$

Se $n = 1$ la matrice si può identificare come una u-upla

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = (a_{11}, \ldots, a_{m1})$$

Con il simbolo $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si indica l'insieme contenente tutte le matrici reali

6.0.0 Somma

A, B di tipo $m \times n$, $a = [a_{ij}]$, $b = [b_{ij}]$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

6.0.0 Moltiplicazione

A di tipo $m \times n$, $a = [a_{ij}]$, $k \in R$

$$kA = [ka_{ij}]$$

6.1 Prodotto matriciale

Considera $A \quad m \times n$ e $B \quad n \times r$ ossia **matrici conformabili**

La matrice prodotto matriciale $C = AB \quad m \times r$

$$A \quad m \times n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B \quad m \times r = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}) + (a_{12}b_{21}) + (a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}) + (a_{12}b_{22}) + (a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}) + (a_{22}b_{21}) + (a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}) + (a_{22}b_{22}) + (a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

6.1.0 Motivazioni prodotto matriciale in sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 24 \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare in quanto non comapiono cose tipo x^2 o $\ln(x)$

Posso rappresentare sistema tramite matrice di coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 24 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

6.2 Proprietà

- Il prodotto per scalare è associativo
$$(k_1 k_2) A = k_1 (k_2 A)$$
e distributivo
$$k (A + B) = kA + kB \quad (k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A$$
- Il prodotto matriciale è associativo:
$$(AB) C = A (BC)$$
$$k (AB) = (kA) B = A (kB)$$
e distributivo rispetto alla somma:
$$A (B + C) = AB + AC \quad (A + B) C = AC + BC$$
sempre che le matrici siano conformabili
- Il prodotto matriciale non è commutativo:
$$AB \neq BA$$
ad esempio:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ma } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- La matrice identica di ordine n si indica con I_n ed è la matrice quadrata: i
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
La matrice è tutta uguale a zero a parte lungo la diagonale: $I_n = [\delta_{ij}]$, con $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j, \delta_{ij} = 1$ per $i = j$. Se A è una matrice conformabile con I_n, a destra o a sinistra, si ha $AI_n = A$ (oppure $I_n A = A$).

Definizione 7: *Matrici invertibili*

Sia $A \in M_n (\mathbb{R})$ si dice invertibile se $\exists B \in M_n (\mathbb{R})$ t.c.
$$AB = BA = I_n$$
Se esiste, B è unica e viene detta matrice inversa di A e viene definita con A^{-1}

OSS. Il prodotto di matrici invertibili è invertibile
$$(AB) \left(B^{-1} A^{-1}\right) = A \left(BB^{-1}\right) A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
Le matrici invertibili formano un gruppo in quanto:
$$g = \{A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) | A \text{ invertibile } \}$$

- $(G, \times)$ è un gruppo (non commutativo)
  - E' associativa in quanto anche $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è associativa
  - Matrice neutra è presente
  - Ogni matrice ha il suo simmetrico (radice inversa)

Definizione 8: *Potenze*

Sia A una radice $m \times n$ la potenza k-esima di A è la radice

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{\text{k volte}}$$

NB:

$$A^i A^j = A^{i+j} = A^j A^i$$

Definizione 9: *Matrice trasposta*

Si dice matrice trasposta di $A \quad m \times n$ e si indica con A^T la matrice

$$A^T = [a_{ji}] \quad n \times m$$

ossia inverto righe e colonne

OSS:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Definizione 10: *Matrice simmetrica*

Se $A = A^T \rightarrow n = m$ A è detta simmetrica, ossia è speculare rispetto alla diagonale

7 Sistemi e matrici

Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 24 \end{cases}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 24 \end{bmatrix} = b$$

OSS: il sistema è risolubile se e solo se il vettore b è combinazione lineare delle colonne di A

Definizione 11: *Combinazione lineare per matrici*

Date $A_1, \dots, A_k$ matrici $m \times n$ e dati k scalari $c_1, .., c_k \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare di $A_1, \dots, A_k$ con $c_1, .., c_k$ è la matrice

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 \dots + c_k A_k \quad m \times n$$

7.1 Matrici e grafi

Definizione 12: *Matrice di adiacenza*

Dato un grafo (V, E) la sua matrice di adiacenza A è la matrice $m \times n$ (n numero di vertici) con elemto a_{ij} = numero di lati dal vertice V_i al vertice V_j

Teorema 1: *Numero cammini in grafo*

L'elemento di posto (i, j) nella matrice A^S è il numero di cammini di lungheza S che iniziano in V_i e terminano in V_j

Spiegazione:

- Penso a caso base in cui $S = 2$ e faccio prodotto matriciale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Provo ad esempio a trovare numero percorsi da V_1 a V_3
- In questo caso devo moltiplicare la riga 1 di A e la colonna 3 sempre di A:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Frecce che partono da } V_1} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Frecce che arrivano in } V_3} \quad \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

- Il numero di percorsi $V_1 \to V_k \to V_3$ sono dati da

$$V_{11} V_{13} + V_{12} V_{23} + V_{13} V_{33}$$

ossia da prodotto matriciale che genera la cella a_{ij}

- A questo punto so che A^2 è una matrice che in ogni cella a_{ij} contiene il numero di strade di lunghezza 2 per arrivare da $V_i a V_j$

- Effettuando il prodotto matriciale per A ancora una volta eseguo una procedura ricorsiva

Definizione 13: *prodotto scalare n-uple*

Il prodotto scalare di due n-uple $x, y \in \mathbb{R}^n$ è il numero reale è uguale a:

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$$

Proprietà:

- Simmetrico $\quad x \cdot y = y \cdot x$
- Bilineare
  - $(x + y)z = x \cdot z + y \cdot z$
  - $(\alpha x) \cdot y = \alpha (x \cdot y)$
  - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  - $x \cdot (\alpha y) = \alpha \cdot (x \cdot y)$
- Positivo $\quad x \cdot x \geq 0$

Definizione 14: *Norma di n-ulpa*

La lunghezza o norma di una n-upla $x \in \mathbb{R}^n$ è

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \geq 0$$

Definizione 15: *Distanza fra n-uple*

La distanza fra x e y in $\mathbb{R}^n$ è

$$d(x, y) = ||x - y||$$

OSS: ogni nupla può essere normalizzata, facendola diventare un versore:

$$x' = \frac{x}{||x||}$$

Definizione 16: *Ortogonalità n-uple*

Due n-uple $x, y \in R^n$ si dicono ortogonali se $x \cdot y = 0$

Osservando la seguente figura cerco di ricavare la lunghezza di cy

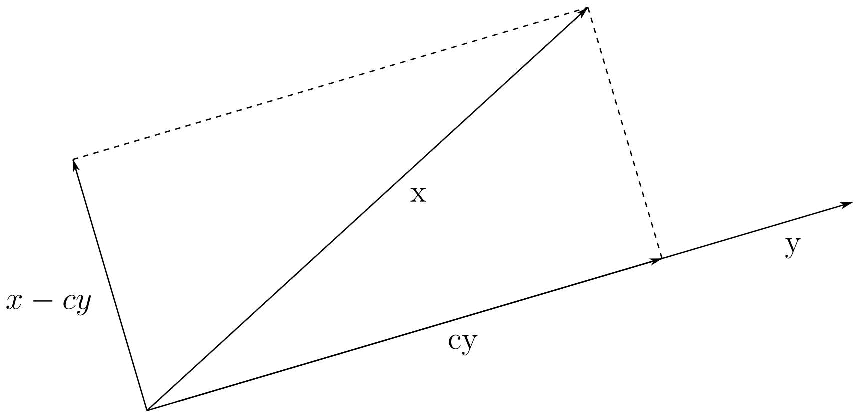


Figura 1: Proiezione ortogonale di un vettore

Definizione 17: *Proiezione ortogonale*

La proiezione ortogonale del segmento x su y è:

$$pr_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

7.2 Disuguaglianza di Cauchy- Schwarz

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

Dimostrazione

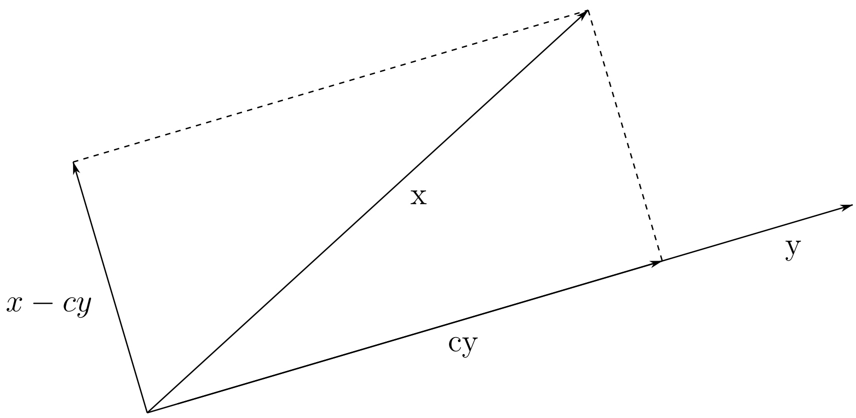


Figura 2: Proiezione ortogonale

Per Cauchy-Schwarz, se $x, y \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0, y \neq 0$

$$\left| \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right| \in [0, 1]$$

Definizione 18: *Angolo*

Angolo convesso tra x e y (non nulli in $\mathbb{R}^n$) è

$$\theta \in [0, \pi] \rightarrow \cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$$

7.3 Distanza tra rette sghembe

OSS: Fra due rette sghembe esiste un solo segmento che sia ortogonale a entrambe le rette. La lunghezza di tale segmento costituisce la distanza fra le due rette

- Prendo generico punto P sulla retta r e un punto generico Q sulla retta r'
- Scrivo lunghezza vettore $\vec{PQ}$
- Impongo che il prodotto scalare fra $\vec{PQ}$, $\vec{V_r}$ e $\vec{V_{r'}}$ sia 0:

$$\begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{V_r} = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{Vr'} = 0 \end{cases}$$

- Risolvendo il sistema trovo i valori in corrispondenza dei quali il segmento $\vec{PQ}$ è ortogonale a entrambe le rette. Calcolo lunghezza del segmento in corrispondenza dei valori trovati

8 Metodo di eliminazione di Gauss Jordan

Operazioni disponibili in una matrice

- S_{ij} - scambio righe
- $D_i(c)$ - moltiplico riga per scalare c
- $E_{ij}(c)$ - somma di riga i con j moltiplicata per uno scalare c

8.1 Sistema risolvibile

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow E_{21}(-2), E_{31}(-4) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow S_{23} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

posso semplificare ulteriormente, ad esempio rendo coefficienti x_1, x_2, x_3 uno

$$D_2\left(\frac{1}{2}\right), D_3\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_{23}(-2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_{12}(-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} E_{13}(-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

8.2 Sistema con ifinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_1 - x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow R_{21}(-3), E_{31}(2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_{32}(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ottengo una riga di zeri:

> un sistema di tre equazioni può essere equivalente ad un sistema di due equazioni

In questo caso il sistema a due equazioni ha 3 incognite e per questo avra infinite soluzioni. Un parametro (x_1, x_2, x_3) potrà assumere un qualsiasi valore. Questo è detto parametro libero

8.3 Sistema impossibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_{21}(-3), E_{31}(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow E_{32}(1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Definizione 19: *Matrice a scalini*

Una matrice generica $A \quad m \times n$ è detta a scalini se il numero di zeri che precede il primo elemento non nullo su una riga (detto pivot) aumenta riga per riga.

NB: se ci sono file coostituite da soli zeri queste non vanno considerate:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è a scalini

Definizione 20: *Matrice a scalini ridotta*

Una matrice a scalini $A \quad m \times n$ se i pivot sono uguali a 1 e sia l'unico elemento non nulla nella sua colonna. Data una matrice la sua corrispondente matrice a scalini ridotta è una e una sola

Teorema 2: *Riducibilità matrice*

Ogni matrice $m \times n$ è riducibile per righe ad una matrice a scalini

Dimostrazione

- Se prima colonna non è nulla posso scambiare righe portando in cima quella che abbia la prima cella non nulla. Se prima colonna è nulla posso ignorarla del tutto
- Prendo prima riga ed eseguo la seguente operazione su ogni riga al di sotto.

$$E_1 i\left(\frac{a_{i_1}}{a_{11}}\right)$$

- Ripeto operazione ricorsivamente sulla matrice piu piccola ottenua

Definizione 21: *Rango di una matrice*

Il rango di A è il numero dei *pivot* di una qualsiasi matrice a scalini equivalente per righe ad A. Il rango di A è unico: ogni processo di riduzione a scalini porterà allo stesso numero di pivot.

NB: il numero di pivot è compreso fra 0 e il minimo fra il numero di colonne e righe:

$$0 \leq rg\,(a) \leq \text{ minimo } (m, n)$$

NB: ridurre una matrice a scalini è il modo più efficace di determinarne il rango. Non si riesce a determinarlo senza ridurla
NB: un sistema è risolubile se e solo se non ci sono pivot sull'ultima colonna ossia

$$rg\,(Ab) = rg\,(A)$$

Se $Ax = b$ è risolubile , le variabili libere corrispondono alle colonne che non conotengono i *pivot*

9 Teorema di Rouchè-Capelli

Teorema 3: *Risolubilità sistema*

Il sistema $Ax = b$ è risolubile $\Leftrightarrow$

$$rg\left(A|b\right) = rg\left(A\right)$$

se $rg\left(A|b\right) = rg\left(A\right)$ il sistema ha un'unica soluzione se

$$rg\left(A\right) = n$$

se $rg\left(A\right) < n$ il sistema ha infinite soluzioni con

$$\text{numero parametri } = n - rg\left(A\right)$$

ossia con $n - rg\left(A\right)$ variabili libere. Le variabili in cui ci sono pivot sono dipententi

Definizione 22: *Nullità di una matrice*

Data una matrice A, il numero

$$n - rg\left(A\right)$$

viene definito nullità di una matrice

9.1 Sistemi omogenei

Proprietà:

- Se $x, y \in Sol\left(Ax = 0\right)$ allora anche $x + y$ è soluzione:

$$A\left(x + y\right) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

- $x \in \mathbb{R}, \quad x \in sol\left(ax = 0\right)$ allora anche cx è soluzione:

Quidni ho un'importante implicazione: $\left(Sol\left(Ax = 0\right)\right)$ è un sottospazio di R^n

Interpretazione grafica:

- In $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ posso pensare un sistema lineare rispettivamente come una retta o un piano per l'origine
- Se prendo un punto appartenente al piano o alla retta e lo sommo con qualsiasi altro punto sempre appartenente ottengo necessariamente un punto sempre appartenente

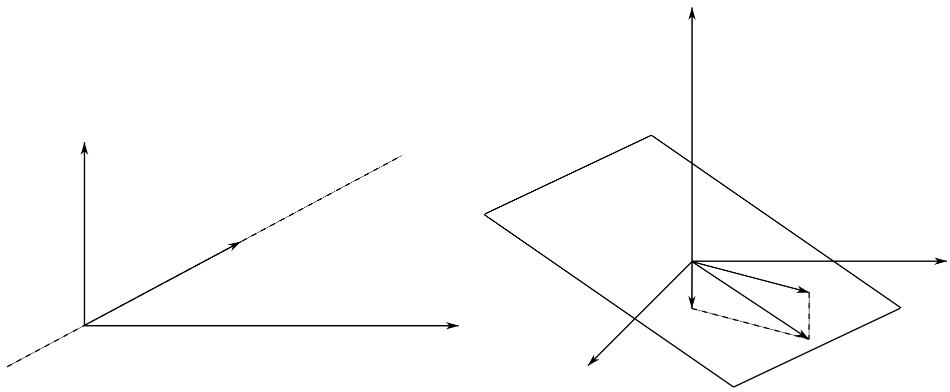


Figura 3: Interpretazione grafica sistemi omogenei

Teorema 4: S

ia $Ax = b$ un sistema risolvibile. Sia y una soluzione del sistema $y \in Sol\left(Ax = b\right)$ detta soluzione particolare. Allora

$$Sol\left(Ax = b\right) = \{x = y + x_0 | x_0 \in Sol\left(Ax = 0\right)\}$$

Dimostrazione: Devo dimostrare la seguente doppia implicazione, tenendo presente che $Ay = b$:

$$Ax = 0 \Leftrightarrow A\left(x + y\right) = b$$

- $Ax = 0 \Rightarrow A\left(x + y\right) = b$

$$A\left(x + y\right) = Ax + Ay = 0 + b = b$$

  Quindi $x + y$ è soluzione del sistema omogeneo $Ax = b$

- $Ax = 0 \Leftarrow A\left(x + y\right) = b$

$$A\left(x + y\right) = Ax + Ay = b \rightarrow Ax = 0$$

  Ossia x deve essere soluzione del sistema omogeneo

10 Matrici delle operazioni elementari

Per eseguire sulle righe di A un'operazione elementare basta moltiplicare A a sinistra per una matrice A(detta matrice elementare) ottenuta dalla matrice identica di ordine n I_n applicando su quest'ultima le stesse operazioni che voglio applicare su A

- Primo tipo$S_{ij}A = S_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Secondo tipo $D_j\left(i\right)A \rightarrow S_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Terzo tipo $E_{ij}(c)\,A \rightarrow E_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OSS:

- $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$
- $D_j(c)^{-1} = D_j\left(\frac{1}{c}\right)$
- $E_{ij}(c)^{-1} = R_{ij}(-c)$

Posso vedere processo di riduzione gaussiana come serie di prodotti matriciali:

$$E_k(\ldots(E_2(E_1A))) = E_k \ldots E_2E_1A = PA$$

Sia $m = n$. Sia S = rref(A) ossia la sua matrice ridotta. Se $rg(A) = n \Rightarrow A$ è invertibile

- $PA = S = rref(a)$
- Deve essere matrice identica in quanto *pivot* sono $= 1$ e $rg(A) = n$ per questa ragione:
$$PA = S = rref(a) = I_n$$
- Siccome $PA = I_n$ posso moltiplicare per P^{-1} da entrambe le parti
$$P^{-1}PA = P^{-1}$$
$$A = P^{-1} \rightarrow A^{-1} = P$$

10.0.0 Inverse e metodo per trovare matrice P in un colpo solo

Supponiamo di volere trovare la matrice P in un solo colpo. Posso agire nel seguente modo:

- Creo matrice composta affiancando a destra di A la matrice identica:
$$(A|I_m)$$
- Applico riduzione su intera matrice $(A|I_m)$
- A fianco della matrice A ottengo matrice P in quanto:
$$P(A|I_m) = (PA|PI_m) = (S|P) = (I_m|P)$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Affianco matrice identica:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Riduco intera matrice a scala con metodo di Gauss Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Teorema 5: *Invertibilità matrici quadrate*

Sia A una matrice quadrata $m \times m$ invertibile.
Parte 1: Ogni sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione $x = A^{-1}b$.

Parte 2:

$$A \quad n \times n \quad A \text{ è invertibile } \Leftrightarrow rg\,(A) = n$$

Dimostrazione

- Parte 1: il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione uguale a $A^{-1}b$:
  - Se x è soluzione di $Ax = b$ allora posso ricavare la seguente uguaglianza $\Leftrightarrow A$ è invertibile:
    $$x = A^{-1}Ax$$
  - Visto che per ipotesi x è soluzione del sistema, $Ax = b$. Ricavo dunque che
    $$x = A^{-1}b$$
    quindi il sistema $Ax = b$ ammette una sola soluzione (in quanto A^{-1} è unica) uguale a $A^{-1}b$
- Parte 2:
  - $rg\,(a) = n \Rightarrow A$ è invertibile:
    * Riducendo la matrice $(A|I_m)$ ottengo $(I_m|P)$
    * Visto che $PA = rref\,(A) = I_m$ posso affermare che:
      $$P = A^{-1}$$
  - A invertibile $\Rightarrow rg\,(a) = n$
    * Come dimostrato in parte 1, se A è invertibile, allora $Ax = b$ ammette un'unica soluzione
    * Se $Ax = b$ ammette un'unica soluzione, necessariamente
      $$rg\,(A) = n$$

Esempio: stabiliamo se la seguente matrice è invertibile. Per quali k lo è?

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & k & -k \end{bmatrix}$$

- Affianco matrice I_n

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Riduco matrice con Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Se $k = 0$ ho $rg\,(A) = 2$ quindi A non è invertibile
  - Se $k = 1$ ho $rg\,(A)\,2$ qindi $A =$ non è invertibile
  - Se $k \neq 0, 1$ $rg\,(A) = 3$ quindi A è invertibile

- In quest'ultimo caso, con $k \neq 0, 1$ posso srivere la matrice in forma ridotta

11 Spazi vettoriali

Definizione 23: *Spazio vettoriale*

Uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ è in insieme V, i cui elementi sono detti vettori, su cui sono definite una somma e una moltiplicazione per scalare tali che:

- (V, +) è un gruppo commutativo
  - associatività
  - esistenza elemento nullo
  - esistenza inverso
  - commutatività
- $(V, \times)$ deve soddisfare le seguenti proprietà $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K} \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$:
  - $(k_1 + k_2)\,v = k_1 v + k_2 v$
  - $k\,(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$
  - $(k_1 k_2)\,k_3 = k_1\,(k_2 k_3)$
  - $1v = v$

Esempi:

- $V^2, V^3 \quad$ spazi vettoriali in $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$ (spazio n-uple ordinate) spazio vettoriale reale
- $\mathbb{C}^n$ (spazio n-uple ordinate) spazio vettoriale complesso
- $M_{mn}\,(\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}\,[x] = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f\,(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x \ldots + a_d x^d, a_0, a_1 \ldots a_d \in \mathbb{R} \right\}$ polinomi

- $(f+q)(x) = f(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots (a_d + b_d)x^d$
- $(kf)(x) = kf(x)$

- $\mathbb{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ continua } \}$ (insieme funzioni continue)

11.1 Sottospazi vettoriali

Definizione 24: *Sottospazio vettoriale*

Sia V una spazio vettoriale (in $\mathbb{K}$). Sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto. W è detto sottospazio vettoriale di V se

- $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$
- $\forall w \in W, \forall k \in \mathbb{K}, \quad kw \in W$

OSS: W è spazio vettoriale, rispetto alle operazioni di V: ogni sottospazio vettoriale è anche uno spazio vettoriale
OSS: Ogni sottospazio contiene 0 (vettore nullo di V):

$$\text{se } w \in W, 0w = 0 \in W$$

Esempi:

- $Sol(Ax = 0) \subseteq R^n$ è sottospazio: immaginati piano per origine in $\mathbb{R}^3$. Il prodotto per scalare soddisfa le proprietà necessarie ed è presente l'elemento nullo in quano il piano passa per l'origine.
- $Sol(Ax = b) \quad$ con $b \neq 0$ non è sottospazio vettoriale: immaginando il piano in $\mathbb{R}^3$ posso affermare che
  - Non è presente l'elemento nullo
  - $kv \notin Sol(Ax = b)$ se $v \in Sol(Ax = b)$
- Insieme delle matrici simmetriche $A = A^T$ reali di ordine n è un sottopspazio di $M_n(\mathbb{R})$
- Polinomi a coefficienti reali di grado $< n$ sono sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ (chiamato $\mathbb{R}_n[x]$)
- $\mathbb{R}[x]$ è sottospazio di $C(\mathbb{R})$ (i polinomi sono sottospazio delle funzioni in generale)

11.2 Esempio campo finito

Consideriamo il campo $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ ossia un campo finito con soli due elementi. Per far si che questo sia un campo devo tenere in mente una sola regola:

$$1 + 1 = 0$$

in modo tale che ogni operazione possibile dia risultato $k \in \mathbb{F}$

Consideriamo il sistema lineare in $\mathbb{F}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{con matrice dei coefficienti} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

risolvo con Gauss-Jordan e ottengo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per Rouché-Capelli so che in numero di variabili indipendendi sono uguali a $null\left(A\right) = n - rg\left(A\right) = 1$. Le soluzioni tuttavia vanno ricercate solo all'interno di $\mathbb{F}$. Il numero di soluzioni non è dunque infinito come sarebbe in $\mathbb{R}$, bensì $2^1 = 2$

$$Sol\left(Ax = b\right) = \left\{\left(1, 0\right), \left(0, 1\right)\right\}$$

12 Basi, generatori e indipendenza lineare

Definizione 25: *Combinazione lineare*

Un vettore $v \in V$ è combinazione lineare dei vettore $v_1, \ldots, v_k \in V$ mediante i coefficienti $c_i \in \mathbb{K}$ se

$$v = c_1 v_2 + \ldots + c_k v_k$$

Useremo il simbolo $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ per indicade ogni possibile combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_k$

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{c_1, v_1 + \ldots + c_k v_k | c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

Esempi:

1. Due vettori di $\mathbb{R}^3$ generano il sottospazio vettoriale coicidente ad un piano. Ad esempio:

   $$v_1 = (2, 3, 1) \qquad v_2 = (0, 2, 1)$$

   scrivendo combinazione lineare per $c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ ottengo che questi vettori generano il sottospazio

   $$W = \langle v_1, v_2 \rangle \left\{2c_1, 3c_1 + 2c_2, c_1 + c_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

   ossia il piano passante per l'origine (normalmente, per ricavare l'equazione di un piano dovrei traslare la combinazione lineare forzando il passaggio per un punto)

2. Come dimostro che $\langle x + 1, x - 1, x^2 - 1 \rangle$ genera $\mathbb{R}_n\left[x\right]$?

   - Osservo che la base canonica di $\mathbb{R}_n\left[x\right]$ è data da $\left(1, x, x^2\right)$
   - Se riesco a ricavare ogni elemento della base canonica per combinazione lineare sono a posto. Ciò è vero in quanto la combinazione lineare di elementi ottenuti per combinazione lineare di x, y, z sarà sempre combinazione lienare di x, y, z

Definizione 26: *Base dello spazio vettoriale*

Sia V uno spazio vettoriale in $\mathbb{K}$. Un insieme di vettori v_n viene detto base di V se ogni elemento $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare.

$$v = x_1 v_1 + \ldots n_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di elementi. Tale numero è detto dimensione dello spazio vettoriale

I coefficienti $x_1 \ldots x_n$ della combinazione lineare si dicono cooerdinate di V rispetto alla base $\{v_1 \ldots v_n\}$

Definizione 27: *Insieme generatore*

Un insieme di vettore $v_1, \ldots, v_m$ è detto insieme generatore di V se ogni vettore v di V si può scrivere come combinazione lineare:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + v_m v_m = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

la differenza rispetto ad una base è che un vettore $v \in V$ può essere ottenuto tramite diverse coordinate

Definizione 28: *Vettori linearmente indipendenti*

Un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_k$ è detto linearmente indipendente se il vettore nullo si piò scrivere come combinazione lineare dei v_i solo scegliendo coefficienti tutti nulli

$$a_1 v_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k v_k = 0 \Leftrightarrow a_1 \ldots a_k = 0$$

se i vettori non sono linearmente indipendenti questi si dicono *linearmente dipendenti*

OSS: un gruppo di vettori sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di questi si può scrivere come combinazione lineare degli altri

Esempio: stabilisci se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad v_2 = (0, 1, 1) \quad v_3 = (1, -1, -2)$$

Basterà trovare le soluzioni dell'equazione $a_1 v_2 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$, equivalente al sistema $Ma = 0$ dove

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

risolvendo tramite Gauss-Jordan mi accorgo che il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da a_3, ossia la unica variabile libera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l'insieme è quindi dipendente con soluzioni: $(-a_3, 2a_3, a_3)$

Teorema 6: *Criterio affinche un generatore sia base*

Un insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di elementi di V è una base di $V \Leftrightarrow$ s è un generatore di V linearmente indipendente

OSS:

- Nel piano due vettori sono LI se e solo se non appartengono alla stessa retta.
- Nello spazio tre vettori sono LI se e solo se non appartengono allo stesso piano:
- Le basi canoniche di una matrice o di una n-upla sono linearmente indipendenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione 29: *Gruppo finitamente generato*

Se V è finitamente generato (esiste un numero finito di generatori) $\Rightarrow V$ ha una base

Esempio: $V = \mathbb{R}[x] \rightarrow$ non è finitamente generato in quanto:

$$\{p_1, \ldots, p_m\} = \sum_{k=0}^{m} a_i p_i$$

tramite questi generatori posso ottenere polinomi di grado massimmo $= m$

OSS:

$$V\{0\} \text{ è finitamente generato ma non ha basi}$$

12.1 Rango e dimensione

Vi è una relazione ben specifica fra rango di una matrice e dimensione dello spazio vettoriale definito dalle sue righe non nulle.

- Sia A una matrice di rango r, ossia una matrice con r pivot
- Sia $S = rref(A)$ la sua matrice a scalini. Questa matrice avrà r righe non nulle
- Le righe $S_1, \ldots, S_r$ sono linearmente indipendenti in quanto per annullare la colonna contenente il pivot k-esimo devo moltiplicare per 0 la k-esima riga

- Essendo $S_1, \dots, S_r$ linearmente indipendenti posso affermare che:

$$r = rg\,(A) = dim\,\langle S_1, \dots, S_r \rangle$$

- Visto che la matriche S è ottenuta tramite operazioni elementari, ossia eseguendo combinazioni lineari fra le sue righe, posso affermare che

$$\langle A_1, \dots, A_r \rangle = \langle S_1, \dots, S_r \rangle$$

NB: di fatto la riduzione a scalini della matrice A consiste nell' eseguire operazioni di combinazione lineare fra le sue righe fino ad ottenere i vettori della sua base canonica. Risulta quindi evidente che il rango equivale alla dimensione dello spazio delle righe di A

Teorema 7: *Rango matrice trasposta*

Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di A hanno la stessa dimensione, ossia:

$$rg\,(A) = rg\left(A^T\right)$$

Implicazioni:

- Immagino di avere k vettori $v_1, \dots, v_k$ e di voler verificare quali di questi sono *linearmente indipendenti*: ho <u>2 metodi</u>:

  1. Creo la matrice che ha come <u>righe</u> i vettori $v_1, \dots, v_k$ e calcolando la sua matrice ridotta ottengo k righe non nulle che individuano <u>una base</u>
  2. Creo una matriche che ha come <u>colonne</u> i vettori $v_1, \dots, v_k$ e calcolando la sua *matrice ridotta* ottengo più informazioni:
     - Le colonne contenenti i *pivot* costituiscono le basi canoniche dell'insieme individuato dai vettori di partenza
     - Le colonne <u>non</u> contennti i *pivot* individuano i <u>le coordinate</u> per ottenere la j-esima colonna secondo la base trovata

Esempio: in $\mathbb{R}^4$, siano

$$v_1 = (2, -1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0, 1), v_3 = (1, -2, 0, 0), v_4 = (-1, 2, 2, 1), v_5 = (0, 3, 2, 2)$$

La matrice 4×5 con colonne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ha forma ridotta

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Le colonne $1, 2, 4$ contengono le basi canoniche. Interpreta il sistema come "la somma di ogni componente di ogni vettore $= 0$ ". Se il sistema fosse composto solo dai vettori $1, 2, 4$, questo avrebbe una sola soluzione. I vettori $1, 2, 4$ sono quindi <u>LI</u> per definizione

- Le colonne $3, 5$ contengono invece le coordinate secondo la base $\{v_1, v_2, v_4\}$ per ottenere rispettivamente v_3 e v_5

Dato un spazio vettoriale V con una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Per definizione di base ogni vettore in V si scrive come combinazione lineare fra i vettori della base:

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_i v_i$$

Si può scrivere che

$$v = (x_1, \ldots, x_n)_B$$

ossia che il vettore v è dato dalla combinazione lineare fra la base v e le coordinate $x_1, \ldots, x_n$

La n-upla contentente le coordinate di v rispetto alla base B si può scrivere come:

$$T_B(v)$$

Esempio: Dimostriamo che la seguente è una base di $\mathbb{R}^3$

$$\{v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (-1, 2, 1), v_3 = (0, 0, 1)\} = B$$

- Sia LI :

$$M = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12.2 Proprietà basi di $\mathbb{R}^n$

1. m vettori di $\mathbb{R}^n$ sono necessariamente linearmente dipendenti se $m > n$
2. n vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ sono necessariamente una base di $\mathbb{R}^n$
3. Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ con $m < n$. Allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_m\}$ può essere completato aggiungendo $n - m$ vettori di $\mathbb{R}^n$

Dimostrazioni:

1. Creo matrice $M = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{bmatrix}$ con $m > n$
   - Questa matrice ha rango $= min(n, m) = n$
   - Per forza di cose avrò almeno una variabile libera, ad il sistema omogeneo associato avrà infinite soluzioni.

   $$\{v_1, \ldots, v_m\} \text{ non possono essere LI}$$

2. Dati n vettori $v_1, \ldots, v_n$ e un vettore $\in \mathbb{R}^n$ v creo sistema associato

   $$M = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_k \end{bmatrix} = v$$

   - M ha rango $= n$ in quanto i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono LI
   - Per questa ragione il sistema $Mx = v$ ha un'unica soluzione, ossia $v_1, \ldots, v_k$ sono una base

3. Considero la matrice $M = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k & e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix}$
   - Questa matrice ha rango $= n$ in quanto le ultime n colonne sono LI
   - Le prime m colonne sono uguali a $e_1, \dots, e_m$ in quanto $v_1, \dots, v_m$ sono LI
   - Visto che il rango è n, ottengo per forza altri $n - m$ *pivot*, in corrispondenza delle colonne che devo aggiungere per completare la base

Esempio:per completare l'insieme indipendente

$$\{v_1 = (1, 0, 2, 1), v_2 = (1, 1, -2, -1)\}$$

a una base di $\mathbb{R}^4$, basta considerare la riduzione per righe

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Le colonne 1,2,3,5 sono indipendenti. Quindi I'insieme

$$\{v_1, v_2, e_1, e_3\}$$

forma una base di $\mathbb{R}^4$. Non è necessario ottenere una matrice ridotta per individuare le colonne indipendenti, è sufficiente una matrice a scalini

Teorema 8: *Teorema della base di* $\mathbb{R}^n$

Ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene esattamente n elementi

Dimostrazione

- m vettori di $\mathbb{R}^n$ se $m > n$ sono necessariemente linearmente dipendenti allora una base non può conenere più di n elementi (sezione **??**, proposizione 1)
- Un insieme di m vettori con $m < n$ può essere completato con $n - m$ vettori (sezione **??**, proposizione 3)
- Siccome i vettori che aggiungo sono linearmente indipendendi, questi non possono essere creati con combinazione lineare dai primi m. Per questo i primi m vettori non possono essere generatori dello spazio $\mathbb{R}^n$

13 Somma e intersezione sottospazi

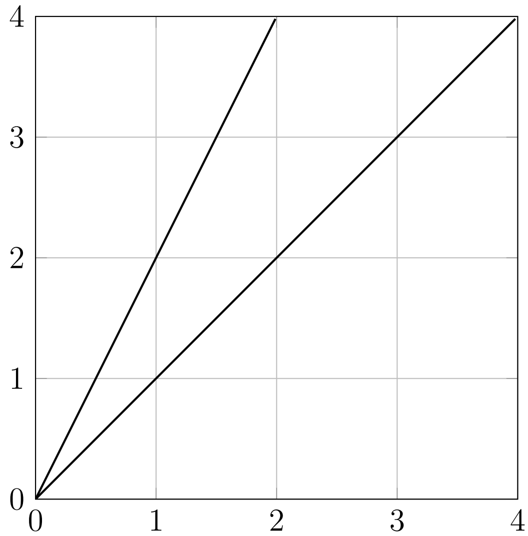
13.1 Intersezione

L'intersezione di due sottospazi è sempre sottospazio

- Prendo 2 vettori $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$ ossia appartenenti all'intersezione degli spazi
- Visto che $v_1, v_2 \in V_1$ allora ogni loro combinazione lineare sta in V_1
- Visto che $v_1, v_2 \in V_2$ allora ogni loro combinazione lineare sta in V_2
- Visto che ogni combinazione lineare sta sia in V_1 che in V_2 allora ogni combinazione lineare sta in $V_1 \cap V_2$. L'intersezione è sottospazio

13.2 Unione

L'unione insiemistica di sottospazi non è sottospazio, basti pensare al seguente caso in $\mathbb{R}^2$



Se prendo due vettori sulle due rette mi rendo conto che la loro somma non ricade all'interno di nessuna delle due rette. Posso però definire una somma fra sottospazi

Definizione 30: *Somma di sottospazi*

La somma di V e W è l'insieme

$$V + W = \{v \in V | v = u + w, v \in V, w \in W\}$$

ossia la somma di ogni vettore in W con ogni vettore di V

Formula 1: *Formula di Grassmann*

$$dim\left(V\right) + dim\left(W\right) = dim\left(V \cap W\right) + dim\left(V + W\right)$$

Esempio: Considero due spazi vettoriali:

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3\left[x\right] | xp'' = 2p'\}$$

$$W = \{p \in \mathbb{R}_3\left[x\right] | p\left(2\right) = p\left(4\right) = 0\}$$

- Caso 1:
  - Prendo polinomio generico
  - Derivo
  - Risolvo sistema
- Caso 2:
  - Risolvo sistema che impone che il polinomio si annulli in 2 e in 4
  - Alternativamente posso scrivere i polinomi nel seguente modo

$$\left(x-2\right)\left(x-4\right) \quad \text{e} \quad x\left(x-2\right)\left(x-4\right)$$

13.3 Interpolazione polinomiale

Dati n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ voglio trovare $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che

$$p(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

noto che non posso rappresentare $R[x]$ con una base che abbia un numero finito di elementi. Restringo quindi il grado del polinomio. Si può dimostrare che la soluzione è unica in $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ (pensa al teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado n ha n zeri).

La logica è la seguente:

- Creo tramite la cosiddetta *base di lagrange* n polinomi $f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ che abbiano le seguenti proprietà:
  - $f_i(x_i) = 1$
  - $f_i(x_j) = 0 \quad \forall j = 1 \ldots n-1, j \neq i$
- Noto che il polinomio $f_i(x)$ vale zero "sotto" ad ogni punto meno che sotto a x_i. Se lo sommo con altri polinomi $f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ posso ottenere un polinomio che passa per tutti i punti $x_1, \ldots, x_n$ i

Introduciamo la base di Lagrange:

Definizione 31: *Base di langrange*

La base di lagrange mi permette di trovare un polinomio $f_i(x)$ che valga 1 sotto a x_i, mentre 0 sotto ogni altra $x_1, \ldots, x_n$

$$B = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

$$f_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \text{con } j \neq i$$

Nota che la base di lagrange $f_i(x)$ è un polinomio che vale 0 in x_j per $j = 1, \ldots, n$ mentre vale 1 in x_i. Chiaramente quindi le basi di lagrange sono linearmente indipendenti e ci permettono di creare un polinomio che passi per tutti i punti indicati.

Esempio: dati tre punti $(2,1)\,(4,2)\,(5,0)$ si trovi un polinomio che passi per essi.

- Cerco base di Lagrange:

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{1}{6}(x-4)(x-5)$$
$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{1}{2}(x-2)(x-5)$$
$$f_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

- Una volta trovata la base di lagrange posso fare combinazione lineare con f_1, f_2, f_3. Il polinomio finale è:

$$y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) = 1 f_1(x) + 2 f_2(x) + 0 f_3(x)$$

- Eseguendo i conti ottengo:

$$p(x) = (x-5)\left(-\frac{5}{6}x + \frac{4}{3}\right)$$

- Volendo posso verificare che

$$f(x_1) = f(2) = 1$$
$$f(x_2) = f(4) = 2$$
$$f(x_3) = f(5) = 0$$

14 Determinante

Premessa:

- Il determinante è definito solo per matrici quadrate
- L'interesse del determinante è più teorico che pratico

Esempio: Sia $A \quad 2 \times 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Ha righe linearmente indipendenti (ossia $rg(A) = 2$) se e solo se:

$$D = ad - bc \neq 0$$

Se il determinante D è diverso da 0 posso definire la quantità $\frac{1}{D}$. Noto che la matrice

$$B = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

è la matrice inversa di A e posso verificarlo moltiplicandola per A

Perchè se $\det(A) = 0$ allora le colonne sono linearmente dipendenti?

- $\det(A) = ad - bc = 0 \rightarrow ad = bc$
- Se $c, d \neq 0$ il vale la seguente relazione:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = t \quad \rightarrow \quad (a, c) = t(c, d)$$

I vettori (a, c) e (c, d) sono proporzionali se $\det(A) = 0$

Definizione 32: *Determinante*

Sia $A \quad n \times n$. Il determinante di A viene definito in maniera ricorsiva nel seguente modo:

- Se $n = 1$, $\det[a_{11}] = a_{11}$
- Se $n > 1$ $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i_1} a'_{i_1}$ dove $a'_{i_1} = (-1)^{i+1} \det(A_{i_1})$. La matrice A_{i_1} è ottenuta da A toglienda la *i-esima* riga e la prima colonna

NB: il calcolo del determinante ha complessità fattoriale, quindi è possibile farlo solo su matrici molto piccole

Esempio 1: Data la matrice:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1\,(-1)\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esempio 2: Provando a ridurre una matrice triangolare alta (ossia ua matrice che abbia zeri nella parte inferiore alla diagonale principale non compresa), ottengo che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

osserviamo che

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 3\cdot -1 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 3\,(-1)\,1\,(4)$$

in quanto l'unico elemento che può essere non nullo è l'elemento sulla diagonale.

14.1 Proprietà determinante

- $\det(A) = -\det(B)$ dove B è una matrice ottenuta scambiando due righe di A
- $\det(B) = c\det(A)$ se B è ottenuta moltiplicando una riga di A per lo scalare c
- $\det(B) = \det(A)$ se B è ottenuta aggiungendo due righe di A, moltiplicando la seconda per una scalare c

---

14.1.0 Dimostrazione 1

La dimostrazione di basa sulla seguente idea, da applicare ricorsivamente: prendo una matrice A e scambio due delle sue righe (chiamo quest'ultima matrice B).

$$A = \begin{bmatrix} a & \dots \\ b & \dots \\ c & \dots \\ d & \dots \\ e & \dots \\ f & \dots \end{bmatrix} \qquad B = S_{2,5}A = \begin{bmatrix} a & \dots \\ e & \dots \\ c & \dots \\ d & \dots \\ b & \dots \\ f & \dots \end{bmatrix}$$

Poi faccio i seguenti ragionamenti, che dimostrano per induzione questa proprietà:

- Se voglio che il rango di B sia l'opposto di quello di A nello sviluppo devo avere che ogni $a_{i1}\det A_{i1}$ sia l'inverso del corrispettivo elemento calcolato in B
- Ho più casi:

– Se la riga i non è una delle due scambiate il suo complemento algebrico sarà una matrice anch'essa con due righe invertite. Il segno dato da $(-1)^{i+1}$ non è alterato in quanto scambiando due righe non altero gli indici ai quali sono posizionati gli elementi non alterati.

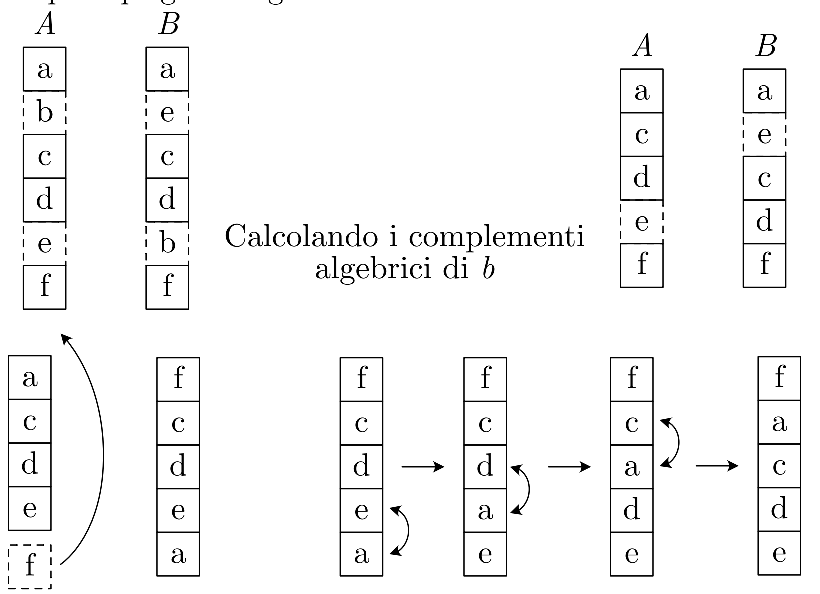
  In questo caso gli elementi a, c, d, f nel calcolo del determinante di B danno un risultato opposto di quello di A

– Prendendo in considerazione gli elementi che vengono scambiati devo tenere conto di una cosa carina:

  * Considera ciò lo sviluppo secondo b nella matrice A e nella matrice B. Questo sarà uguale a $b \cdot (-1)^{i+1}$. Quindi se la differenza fra gli indici di a e b è un numero dispari il segno sarà invertito:

  $$\det(A) = \ldots + b \cdot (-1) + \ldots \quad \det(B) = \ldots + b \cdot (1) + \ldots$$

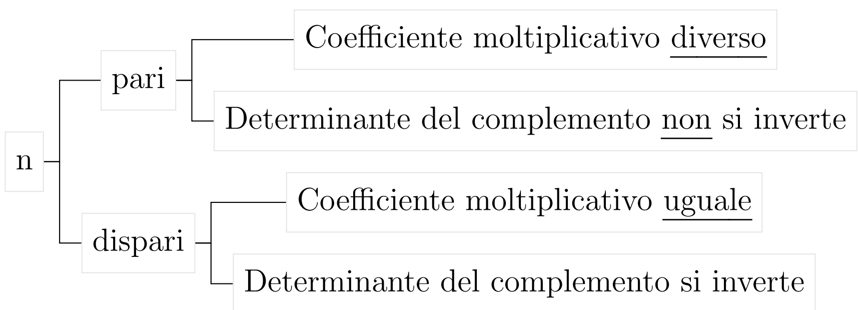
  * Il complemento algebrico di b B sarà uguale a quello di b in A, ma andranno fatte n operazioni di scambio riga. n è dispari se la differenza degli indici delle righe scambiate è dispari. In caso contrario è pari. La seguente immagine può spiegare meglio:



Servono n operazioni

  * Quindi se n è pari, assumendo che la proprietà che stiamo cercando di dimostrare sia vera, avverranno n scambi, e il segno non cambiera. Contrariamente, il segno sarà opposto.

– Riassumento, sia n la differenza fra gli indici di a e di b -1(ossia il numero di "blocchetti" che saparano a e b , allora



14.1.0 Dimostrazione 2

Procedo per induzione come nella dimostrazioni precedente:

$$A = \begin{bmatrix} a & \dots \\ b & \dots \\ c & \dots \\ d & \dots \\ e & \dots \\ f & \dots \end{bmatrix} \qquad B = D_2(k) = \begin{bmatrix} a & \dots \\ k \cdot b & \dots \\ c & \dots \\ d & \dots \\ e & \dots \\ f & \dots \end{bmatrix}$$

- Se nello sviluppo la riga presa in considerazione non è quella moltiplicata per lo scalare, ottengo che la costante moltiplicativa rimane la stessa, mentre il complemento algebrico è una matrice con una riga moltiplicata per k
- Se nello sviluppo la riga presa in considerazione non è quella moltiplicata per lo scalare ottengo che la costante moltiplicativa è moltiplicata a sua volta per k, mentre il complemento algebrico rimane invariato

Raccogliento k ottengo la proprietà enunciata

14.1.0 Dimostrazione 3

Per ora non saprei come fare lol
Nota che le proprietà precedentemente elencate si possono scrivere nella seguente forma contratta, visto che riguardano operazioni elementari:

- $\det(S_{ij}A) = -\det A$
- $\det(D_j(c)A) = c\det(A)$
- $\det(E_{ij}(c)A) = \det(A)$

Da queste proprietà se ne ricavano di altre in maniera molto intuitiva:

- Se una matrice A ha due righe uguali allora $\det(A) = 0$
  - Scambiandole il determinante deve essere opposto, ma visto che scambiando le righe identiche la matrice ottenuta è identica $\det(A) = 0$
- Se una matrice A ha una riga di zeri allora $\det(A) = 0$. (Pensa di moltiplicare per uno scalare non nullo la riga di zeri.
  - Per la seconda proprietà $\det(D_j(c)A) = c\det(A)$)
  - Moltiplicando per scalare non nullo la riga nulla ottengo una matrice identica ad A. Quindi $c\det(A) = \det(A) \Leftrightarrow \det(A) = 0$
- Se una matrice A ha ordine n alora $\det(kA) = k^n\det(A)$

14.2 Teoremi importanti

14.2.0 Proprietà intuitiva 1

Anche se non si tratta di un teorema, possiamo intuire che

$$\det(EA) = \det E \det A$$

dove E è la matrice delle operazioni elementari. Pensala nel modo seguente

- Moltiplicare a sinista A per una matrice delle operazioni elementari equivale a eseguire le corrispondenti operazioni su A stessa
- Pensando alle proprietà elencate in *sottosezione* **??** si intuisce che per ottenere il determinante della matrice ridotta basta moltiplicare il determinante di A per il prodotto dei determinanti delle matrici delle operazioni elementari che sono servite per ottenere la forma a scalini S

14.2.0 Proprietà intuitiva 2

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow A \text{ invertibile}$$

- Se il determinante di una matrice A è nullo, anche quello della sua forma ridotta a scalini S lo è.
- Una matrice quadrata $n \times n$ ridotta a scalini è una matrice triangolare alta. Se il suo rango è n allora non ho zeri sulla diagonale, e qindi il determinante non è nullo. Se il rango è $< n$, allora in determinante è nullo

14.2.0 Teoremi fondamentali

Teorema 9: *Teorema di Binet*

Siano A, B matrici di ordine n. Vale la seguente uguaglianza

$$\det(AB) = \det A \det B$$

A differenza della somma, il prodotto di matrici si comporta bene con il determinante. Occhio a non scrivere la stronzata seguente:

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

Teorema 10: *Corollario a Binet: matrice inversa*

Sia A una matrice invertibile. Allora

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

Dimostro facilmente tramite binet:

$$\det\left(A^{-1}A\right) = \det I_n = 1$$

per il teorema di binet posso spezzare il prodotto matriciale:

$$\det\left(A^{-1}A\right) = \det A^{-1} \cdot \det A = \det I_n = 1$$

quindi necessariamente $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Teorema 11: *Teorema di Laplace*

Sia A una matrice di ordine n. Posso calcolarne il determinante "*sviluppando*" la matrice secondo ogni riga ed ogni colonna. Formalmente vale la seguente proprietà:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a'_{ij} = \det A$$

NB: intuitivamente, la matrice a'_{ij} è il cosiddetto cofattore si a_{ij}, definito così:

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di A

14.3 Determinante e volume

Un trucchetto per ricordarsi il prodotto vettoriale di due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ è quello di calcolare il determinante di una matrice "impropria" che contiene le componenti di questi vettori e dei versori di $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$:

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

facendo i conti ottengo che

$$\det = \vec{I}\,(v_2w_3 - v_3w_2) + \vec{J}\,(v_3w_1 - v_1w_3)\,\vec{K}\,(v_1w_2 - v_2w_1)$$

ossia esattamente il vettore dato dal prodotto vettoriale.

Visto che il prodotto vettoriale indica l'area del parallelogramma definito dai vettori v e w il prodotto misto per un terzo vettore u indica il volume del parallelogramma. Il determinante della seguente matrice corrisponde a questo volume:

$$u\,(v \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

sostituendo al posto dei versori le componenti di u ottengo il prodotto scalare

$$\det = u_1\,(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2\,(v_3w_1 - v_1w_3)\,u_3\,(v_1w_2 - v_2w_1)$$

14.4 Determinante e sistemi lineari

Posso sfruttare le proprietà del determinante per trovare le soluzioni di un sistema di n equazioni in n incognite. Innanzitutto bisogna tenere a mente che

> Un sistema $Ax = b$ ha 1 soluzione $\Leftrightarrow rg\left(A\right) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

ragionando nel seguente modo posso ricavare la regola di Cramer tramite il teorema di Binet

Teorema 12: *Regola di Cramer*

Sia $Ax = b$ un sistema lineare di n equazioni in n ingognite. Se $Ax = b$ ammette una sola soluzione, questa può essere espressa in termini di determinante:

$$x_j = \frac{\det A_j\left(b\right)}{\det A}$$

dove la matrice $A_j\left(b\right)$ è ottenuta sostinuendo la colonna j di A con b

Dimostrazione:

- Per il colorrario a binet (vedi *teorema* **??**)
$$\frac{\det A_j\left(b\right)}{\det A} = \det A^{-1} \cdot \det A_j\left(b\right)$$
- Per il teorema di binet posso portare dentro A^{-1}:
$$\det A^{-1} \cdot \det A_j\left(b\right) = \det\left(A^{-1}A_j\left(b\right)\right)$$
- Facendo il prodotto matriciale di A^{-1} con $A_j\left(b\right)$ ottengo la matrice identica, ad eccezione della colonna j (visto che tutte le colonne di $A_j\left(b\right)$ sono uguali a quelle di A, ad eccezione di quella j-esima)
$$\det\left(A^{-1}A_j\left(b\right)\right) = \det\left(e_1 \dots x \dots e_n\right)$$
ossia ottengo una matrice identica nella quale sostituisco la colonna j con il vettore x, contennente le soluzioni del sistema. Il suo determinante è uguale a x_j in quanto l'unico elemento non nullo è proprio x_j (usa laplace sulla j-esima riga e convinciti)

Teorema 13: *Corollario a cramer*

Sia $A \in M_n\left(\mathbb{K}\right)$ una matrice con $\det\left(A\right) \neq 0$ Allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\left(A\right)}\left[a'_{ij}\right]^T$$

dove a'_{ij} è la matrice dei cofattori

NB: la matrice dei cofattori è una matrice che in indice i, j contiene lo scalare

$$\left(-1\right)^{i+j} \cdot \det a_{ij}$$

ossia lo sviluppo di Laplce del termine a_{ij} senza il coefficiente

14.4.0 Dimostrazione

- Nota che la matrice dei cofattori posso esprimerla tramite il termine $\det(A_j(e_i))$

$$a'_{ij} = \det(A_j(e_i)) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \dots & 1 & \vdots \\ a_{1m} & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se sviluppo secondo la j esima colonna ottengo che il determinante è uguale a a'_{ij}

- Similmente a quanto fatto per dimostrare Cramer *teorema* **??** scrivo il corollario nel seguente modo:

$$\frac{a'_{ij}}{\det A} = \frac{\det(A_j(e_i))}{\det A} = \det\left(A^{-1}A_j(e_i)\right)$$

- Noto che la matrice $A^{-1}A_j(e_i)$ è la matrice identica, alla quale sostituisco la j esima colonna con $A^{-1}e_i$

- $A^{-1}e_i$ è tuttavia uguale alla i esima colonna di A^{-1} (per convincertene basta fare il prodotto matriciale)

- La matrice $A^{-1}A_j(e_i)$ è quindi la matrice identica, dove al posto della j esima colonna ho la i esima colonna di A^{-1}

$$\det\left(A^{-1}A_j(e_i)\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & A^{-1}_{1i} & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & A^{-1}_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1}_{mi} & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}_{ji}$$

Nota bene che gli indici sono invertiti! In definitiva ho che:

$$\frac{a'_{ij}}{\det A} = \frac{\det(A_j(e_i))}{\det A} = \det\left(A^{-1}A_j(e_i)\right) = A^{-1}_{ji} = \left(A^{-1}_{ij}\right)^T$$

15 Funzioni lineari

Ad ogni matrice possiamo associare una funzione che gode di una particolare proprietà: la linearità

Definizione 33: *Funzione lineare associata ad una matrice*

Sia A una matrice $m \times n$. Si può definire una funzione lineare dallo spazio di n-uple $\mathbb{K}^n$ allo spazio di m-uple $\mathbb{K}^m$ nel seguente modo:

$$T_A(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

Queste funzioni godono di importantissime proprietà: sono infatti lineari. Formalmente questo vuol dire che:

$$T_A(v_1 + v_2) = T_A(v_1) + T_A(v_2)$$
$$T_A(av_1) = aT_A(v_1)$$

o, tutto in un colpo:

$$T_A(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T_A(v_1) + a_2T_A(v_2)$$

15.1 Interpretazione grafica funzioni lineari

Queste funzioni vengono dette "lineari" perché quando applicate ad oggetti matematici che possono essere intesi come *rette*, non fanno altro che eseguire traslazioni e/o dilatazioni in orizzontale/verticale

15.2 Matrici associate a funzioni lineari

Consideriamo una funzione T da $V \to V'$ lineare. Ragioniamo nel seguente modo:

- Supponiamo che esistano delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di V e V'
- Per questa ragione ad ogni vettore di V corrispondono delle n-uple, dove n è la dimensione di V. Stesso ragionamento vale per V', con m-uple
- Per questo posso definire una matrice A che descriva tale funzione da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ chiamata T_A
- Se applico T_A ad un elemento della base $\mathcal{B}$ posso ottenerlo tramite combinazione lineare di vettori del codominio V'

15.3 Esempi e definizioni

Definizione 34: *Dominio, codominio, immagine*

Sia $T : V \to V'$ una funzione lineare (o applicazione , operatore, trasformazione lineare). Si definiscono

- Dominio $\to V$
- Codominio $\to V'$
- Immagine $\to \{v' \in V' | v' = T(v)\}$ per almeno un $v \in V$

15.3.0 Esempio 1: funzione lineare su retta

Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to T_A(x, y)$ una funzione associata a una matrice. Posso "darle in pasto" una retta, rappresenta in forma parametrica una retta in $\mathbb{R}^n$ può essere rappresentata come *n-upla*. Ad esempio in $\mathbb{R}^3$ avro una 3-upla del tipo (x, y, z). Considero la seguente retta:

$$\begin{cases} x = -t + 6 \\ y = 4t - 3 \end{cases}$$

alla quale associo la 2-upla

$$r = (-t + 6, 4t - 3)$$

eseguendo il prodotto matriciale fra l'n-upla r e la matrice A ottengo $T_A(r)$

15.3.0 Esempio 2: trovo matrice a partire da funzione

Data una funzione $T(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, x_2$ posso associarci una matrice (che è unica). I coefficienti della n-upla $T(x_1, x_2, x_3)$ saranno i coefficienti della matrice riga per riga:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15.3.0 Esempio 3: immagine e sottospazi vettoriali

Lo spazio delle colonne di una matrice A corrisponde con l'immagine della sua funzione associata T

- Il prodotto matriciale di un vettore colonna b con una matrice A può essere espresso anche come combinazione lineare delle sue colonne con b

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3$$

  ossia il prodotto matriciale è uguale alla combinazione lineare delle colonne

- Per questa ragione posso affermare che $\dim(Im(T_A)) = rg(A)$ ossia che la immagine di T_A è un sottospazio e che la l'immagine ha la stessa dimensione dello spazio delle colonne di A

15.3.0 Altri esempi significativi

- La funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_3)$ non è lineare: è sufficiente osservare, ad esempio, che $T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) = (0, 0)$ ma $T(1, 1, 0) = (1, 0)$
- L'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ è lineare.
- L'operatore traccia $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che ad una matrice quadrata A associa la sua traccia $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ è lineare. È vero anche per l'operatore determinante?

Definizione 35: *Nucleo di una funzione lineare*

Sia $T : V \to V'$ una funzione lineare. Il nucleo di T, indicato con $N(T)$ è l'insieme controimmagine del vettore nullo:

$$N(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}$$

ossia l'insieme dei vettori di V, ai quali applicando T si ottiene il vettore nullo

NB: per trovare il nucleo di una matrice A basta risolvere il sistema lineare $Ax = 0$. Quindi ottengo la seguente importante proprietà

15.4 Utili proprietà

Teorema 14: *Proprietà nucleo + immagine*

Sia T una funzione lineare. Vale sempre la seguente identità:

$$\dim N\left(T_A\right) + \dim I_m\left(T_A\right) = n$$

Dimostrazione

- Lo spazio delle soluzioni di questo sistema ha dimensione $n - rg\left(A\right)$
- La dimensione dello spazio delle colonne di A, ossia la dimensione dell'immagine di A è uguale al rango della matrice è uguale al rango di A

ottengo la seguente identità:

$$\dim N\left(T_A\right) + \dim I_m\left(T_A\right) = n$$

La proprietà può essere generalizzata per qualsiasi funzione lineare.

NB: se dominio e codominio sono spazi vettoriali con dimensione uguale allora

$$T \text{ iniettiva } \Leftrightarrow T \text{ suriettiva}$$

15.4.0 Iniettività di una funzione

Teorema 15: *Iniettività di una funzione lineare*

Sia T una funzione lineare. Allora

$$T \text{ è iniettiva } \Leftrightarrow N\left(t\right) = \{0\}$$

Dimostrazione:

1. Se T è iniettiva, allora il vettore nullo può avere un'unica immagine
2. Viceversa, se $N\left(T\right) = \{0\}$, non possono esistere due vettori diversi la cui differenza è nulla in quanto
   - Suppungo per assurdo di avere due vettori in V' la cui differenza sia nulla: $T\left(v_1\right) - T\left(v_2\right) = 0$
   - Per linearità accoppio le due funzioni: $T\left(v_1\right) - T\left(v_2\right) = T\left(v_1 - v_2\right) = 0$
   - Visto che il nucleo di T ha solo il vettore nullo, necessariamente $v_1 - v_2 = 0 \rightarrow v_1 = v_2$

Teorema 16: *Sottospazi e funzioni lineari*

Sia $T : V \rightarrow V'$ lineare. Allora

- $N\left(T\right)$ è un sottospazio vettoriale di V
- $I_m\left(T\right)$ è sottospazio vettoriale di V'

Dimostrazione 1:

- Prendo due vettori $v_1, v_2 \in N(T)$e verifico che il sottospazio è chiuso rispetto alla somma e al prodotto, ossia che ogni combinazione lineare di ogni vettore nel nucleo di T è a sua volta nel nucleo di T

  $$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = 0$$

  ossia $a_1v_1 + a_2v_2 \in N(T)$

Dimostrazione 2:

- Siano $v_1', v_2' \in I_m(T)$ tali che $T(v_1) = v_1', T(v_2) = v_2'$
- Applico linearità su combinazione lineare di v_1 e v_2:

  $$T(a_1v_2 + a_2v_2) = a_1v_1' + a_2v_2'$$

- L'identità indica che una combinazione lineare di vettori dell'immagine (membro di dx), sta ancora nell'immagine di T (membro di sinistra, ogni $T(v) \in I_m(T)$), ossia $Im(T)$ è sottospazio

15.4.0 Altre proprietà

La composizione di funzioni lineari è anch'essa lineare:

$$(S \circ T)(a_1v_1 + a_2v_2) = S(a_1T(v_1) + a_2T(v_2)) = a_1(S \circ T)(v_1) = a_2(S \circ T)(v_2)$$

La inversa di una funzione lineare è anchessa lineare

16 Matrici associate a funzioni lineari

Può spesso tornare utile partire da una funzione lineare e poterci associare una matrice. Così facendo basterà eseguire il prodotto matriciale fra ma matrice e il vettore per applicare la funzione al vettore stesso

Definizione 36: *Matrice associata ad una funzione lineare*

Sia $T : V \to V'$ una funzione lineare. Siano $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ basi rispettivamente di V e V'.

Indico con $T_{\mathcal{B}}(v)$ e $T_C(v)$ i vettori che contengono le coordinate di v secondo la base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Posso associare una matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = [a_{ij}] \quad m \times n$ tale che:

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m \text{ per } j = 1, \ldots, n$$

ossia, se $v \in V$ allora

$$T_{\mathcal{C}}(T(v)) = AT_{\mathcal{B}}(v)$$

esprimento una funzione lineare tramite prodotto matriciale

NB: se $V = \mathbb{K}^n$ e $V' = \mathbb{K}^M$ e $B, \mathcal{C}$ sono basi canoniche, allora la matrice associata si indica come $M(T)$

Operativamente posso costruire tale matrice nel seguente modo:

- La $j-esima$ colonna della matrice è data da $T_{\mathcal{C}}(T(u_j))$ ossia:
  - Applico la funzione T sul *j-esimo* elemento della base di V ossia $\mathcal{B}$
  - Trovo le coordinate del vettore ottenuto secondo la base di V' ossia $\mathcal{C}$

16.0.0 Dare senso alla matrice associata

Il fine ultimo della matrice associata è quello di avere una matrice che rappresenti una funzione lineare (vedi *teorema* **??**). La matrice è costruita secondo questa relazione:

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m \text{ per } j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Notiamo che la suddetta relazione equivale ad affermare che la matrice è costruita mettendo come colonne i vettori $T_C(T(u_j))$ dove il vettore u_j è il *j-esimo* vettore della base $\mathcal{B}$ in quanto:

- Il termine $a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m$ indica la combinazione lineare fra gli elementi della base C e la colonna j della matrice ossia un vettore rappresentato tramite la base $\mathcal{C}$
- $T(u_j)$ è quindi combinazione lineare della colonna j della matrice con gli elementi della base C. La colonna j della matrice individua dunque le coodrdinate del vettore $T(u_j)$ secondo la base C

Sfruttando l'*equazione* **??** posso capire perchè tramite il prodotto matriciale posso rappresentare una funzione lineare:

- Indico con $T_{\mathcal{B}}(v)$ e $T_{\mathcal{C}}(v)$ i vettori che contengono le coordinate di v secondo la base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$.
- Siano $x_1, \ldots, x_n$ le coordinate di v secondo $\mathcal{B}$. Allora
$$v = \sum_{j=1}^{j=n} x_j u_j \to T(v) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j T(u_j)$$
- Per *equazione* **??** $T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m$ per $j = 1, \ldots, n$, quindi, sostituendo:
$$\sum_{j=1}^{j=n} x_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j (a_{1j}v_1 + \ldots + a_{mj}v_m)$$
- Ora mi immagino di eseguire i prodotti, per poi raccogliere $v_1, \ldots, v_m$, ottenendo
$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) v_1 + \ldots + (a_{m_1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n) v_m$$
- Ritornando a capo della catena di uguali ricordo che la suddetta quantità esprime $T(v)$. Ho ottenuto una combinazione lineare fra gli elementi della base $\mathcal{C}$ e le quantità $(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + (a_{m_1}x_1, \ldots, a_{mn}x_n)$.
- Per questa ragione la $i-esima$ coordinata di $T(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$ è uguale al prodotto fra il vettore coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ e la $i-esima$ riga della matrice

16.0.0 Esempio 1

L'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ha matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In realtà, posso considerare una matrice più piccola (2×3) in quanto sappiamo che la derivazione del polinomio va ad abbassarlo di un grado. In questo secondo caso otterrei la matrice:

$$\mathcal{B} = \left\{x^2, x, 1\right\}, \mathcal{C} = \{x, 1\} \to M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

16.0.0 Esempio 2

Sia

$$T(x) = (2x_1 - x_2 + x_4, x_2 - 2x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 2x_3)$$

Si considerino le basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1), (0,1,1,1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}.$$

Si ha

$$M(T) = A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ bisogna calcolare le 4 immagini

$$T(1,0,0,0) = (2,0,1) \quad T(0,1,-1,0) = (-1,3,3),$$

$$T(0,0,0,1) = (1,1,0) \quad T(0,1,1,1) = (0,0,-1)$$

e trovarne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ (bisogna risolvere 4 sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti 3×3):

$$T_{\mathcal{C}}(2,0,1) = (1,-1,2) \quad T_{\mathcal{C}}(-1,3,3) = (3,0,-4)$$
$$T_{\mathcal{C}}(1,1,0) = (0,1,0) \quad T_{\mathcal{C}}(0,0,-1) = (-1,1,0)$$

Mettendo i vettori in colonna si ottiene infine

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16.1 Cambiamento di base

Possiamo sfruttare il fatto che ad ogni funzione lineare è possibile associare una matrice per effettuare il cambiamento di base di un vettore.

- Prendo vettore v
- Considero funzione lineare che non fa un cazzo (preso in input v restituisce v)

- Creo matrice associata a tale funzione $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)$

Definizione 37: *Matrice di transizione*

Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ basi di V Si dice matrice di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la matrice inveribile $P = [p_{ij}]$ di ordine n avente come colonne le coordinate dei vettori v_j della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$

$$v_j = \sum_i p_{ij} v'_i \quad (j = 1, \ldots, n)$$

ossia creo una matrice associata ad una funzione lineare che non fa nulla

NB: per calcolare le coordinate di un vettore secondo una data base $\mathcal{B}$ devo risolvere un sistema $Ax = b$ dove A è una matrice avente per colonne i vettori di $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e b è il vettore che devo ottenere.

Per eseguira tale operazione su più vettori $v_1, \ldots, v_n$ in maniera rapida, posso affiancarli a destra nella matrice A

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_n & v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$

16.2 Matrici simili

Posso "elaborare" una funzione che anzichè "prendere in input e dare in output" delle coordinate da una base $\mathcal{B}$, prende in input/output coordinate della base $\mathcal{B}'$

Teorema 17: *Cambiamento base funzione*

Sia $T : V \to V$ funzione lineare. Siano $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ basi di V. Allora vale la seguente relazione:

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P M_{\mathcal{B}}(T) P^{-1}$$

dove P è la matrice di transizione fra la base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Dimostrazione:

- Ricordiamo che il prodotto matriciale indica la composizione di funzioni
- La funzione $M_{\mathcal{B}'(T)}$ prende "in input" un vettore di coordinate secondo $\mathcal{B}'$ e lo restituisce sempre secondo $\mathcal{B}'$
- Moltiplicando per P^{-1} converto il vettore di input dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$
- Gli applico la funzione $M_{\mathcal{B}}(T)$, che mi restituisce un vettore secondo la base $\mathcal{B}$
- Converto quest'ultimo vettore, moltiplicandolo per P (a sinistra)

Teorema 18: *Matrici simili*

Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. A si sice simile a B se esiste $P \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile per la quale vale la seguente relazione:

$$A = PBP^{-1}$$

NB: valgono le seguenti proprietà utili:

- $\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A)$
- Se A è simile a B, allora B è simile ad A
- Se A è simile a B e B è simile a C, allora A è simile a C

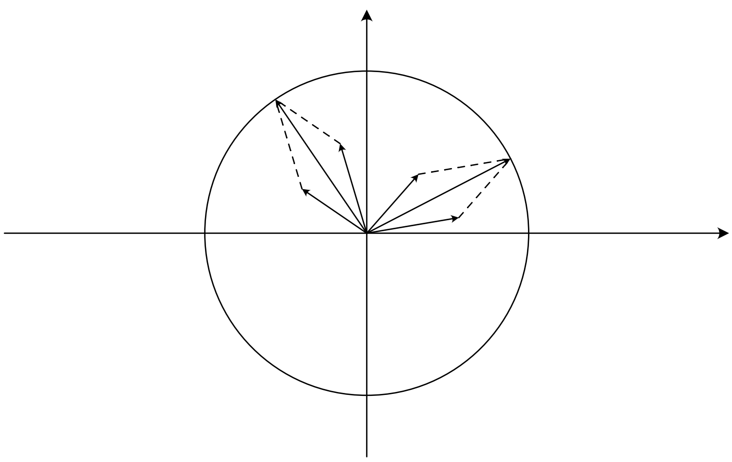
16.3 Trasformazioni geometriche

Le trasformazioni geometriche lineari, come qualsiasi funzione lineare, posso essere espresse tramite una matrice associata

Ricordiamo che per ottenere una matrice associata ad una funzione lineare $T : V \to V'$ dobbiamo:

- Sceglere delle basi $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e V'
- Creare una matrice $m \times n$ dove m è la dimensione di V' e n è la dimensione di V
- Calcolare la funzione T sulle basi di V ed esprimere il vettore ottenuto secondo la base $\mathcal{C}$
- Facendo il prodotto matriciale fra un vettore $v \in V$ (o meglio moltiplico le sue coordinate secondo $\mathcal{B}$) ottengo un vettore $v' \in V'$ che rappresenta $T(v)$ secondo le coordinate della base $\mathcal{C}$

16.3.0 Rotazione attorno all'origine



La rotazione attorno all'origine è lineare in quanto ruotare due vettori e farne la somma equivale a fare la somma dei due per poi ruotarla. Formalmente:

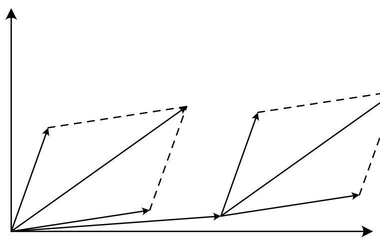
$$rot(v_1 + v_2) = rot(v_1) + rot(v_2)$$

ossia la funzione rot è lineare e può quindi essere espressa tramite matrice associata

- Uso base canonica di $\mathbb{R}^2$, ossia i vettori $(1,0),(0,1)$
- Calcolo $rot((1,0))$ e $rot((0,1))$
- Visto che la base scelta per il dominio coincide con quella del codominio posso mettere direttamente i vettori ottenuti come colonne della matrice, ottenendo:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

16.3.0 Traslazione



La traslazione non è una funzione lineare! Non vale

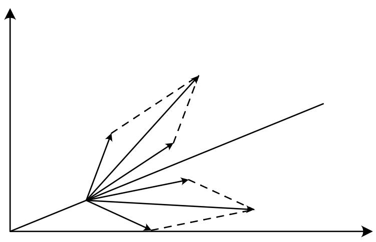
$$tr(v_1 + v_2) = tr(v_1) + tr(v_2)$$

e nemmeno

$$tr(kv_1) = k \cdot tr(v_1)$$

(occhio a non farti fottere dalla traslazione del vettore geometrico, la somma di 2-uple va interpretata come somma di vettori dall'origine alla coordinata indicata, non tramite la regola del parallelogramma)

16.3.0 Speculare rispetto ad una retta



In questo caso possiamo notare che la trasformazione è lineare e quindi vale che

$$rif(v_1 + v_2) = rif(v_1) + rif(v_2)$$

e anche che

$$rif(kv_1) = krif(v_1)$$

Per elaborare la matrice associata alla trasformazione possiamo scegliere una base opportuna, più comoda rispetto alla base canonica

- Scelgo la base che ha come "assi cartesiani" la retta coincidente a quella secondo cui specchiare e una retta perpendicolare a questa passante per l'origine.
- Secondo questa base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$posso calcolare facilmente il vettore simmetrico
  - $T(u_1) = u_1$
  - $T(u_2) = T((0,1)) = (0,-1)$

quindi la matrice associata è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

17 Autovalori e autovettori

Partiamo osservando che se ho una matrice diagonale ()

Definizione 38: *Autovalore e autovettore*

Sia A $n \times n$. Un vettore non nullo $x \in \mathbb{K}^n$ è detto autovettore di A se esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$Ax = \lambda x$$

λ è detto autovalore di A associato a x

Lo stesso ragionamento può essere esteso a qualsiasi funzione lineare

Gli autovettori sono una figata in quanto "eistono" in natura (se una matrice rappresenta un fenomeno fisico, gli autovettori hanno significato). Ad esempio in una matrice degli sforzi gli autovettori rappresentano i punti di maggiore tensione

Teorema 19: *Matrice diagonale autovettori*

Sia $T: V \to V$ un endomorfismo. Allora:

T ha una matrice diagonale associata $\Leftrightarrow$ V ha una base associata formata da autovettori di T

Dimostrazione $\Leftarrow$. Se ho una base formata da autovettori allora esiste una matrice diagonale associata

- Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di autovettori
- Creo la matrice associata, calcolando $T(u_i)$ e mettendo il risultato come colonna di $M_{\mathcal{B}}(T)$
- Considero che $T(u_j) = \lambda_j u_j$ in quanto u_j è autovettore. Le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ saranno $(0, \ldots, \lambda_1, \ldots, 0)$ con λ_1 in posizione j
- Costruendo una matrice con questi vettori ottengo chiaramente una matrice diagonale

Dimostrazione $\Rightarrow$. Se esiste una matrice diagonale associata allora esiste una base composta da autovettori

- Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di V
- Come sappiamo la matrice associata è costruita mettendo come colonne gli elementi $T(u_1), \ldots, T(u_n)$
- Se la matrice è diagonale, questa avrà forma

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

significa che il primo elemento di $\mathcal{B}$ avrà coordinate $(\lambda_1, 0, \ldots, 0)$ secondo $\mathcal{B}$. Più in generale $T(v_i)$ ha coordinate $(0, \ldots, \lambda_i, \ldots, 0)$ secondo $\mathcal{B}$

- Ciò significa che $T(v_i) = 0v_1 + \ldots + \lambda_1 v_i + \ldots + 0v_n = \lambda_1 v_i$ ossia che v_i è un autovettore (per ogni i)

Definizione 39: *Diagonalizzabilità*

T si dice diagonalizzabile se esiste una matrice associata diagonale:

$$\exists M_B(T) \text{ diagonale}$$

NB: questo equivale a dire che $M_{\mathcal{B}}(T)$ è diagonalizzabile se esiste una matrice simile diagonale, ossia:

$$D = PM_{\mathcal{B}}(T)P^{-1}$$

NB: se $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ è diagonalizzabile, con D la sua matrice simile diagonale, allora A^K è simile a D^k in quanto:

$$A^k = \left(PAP^{-1}\right)^k = \left(PDP^{-1}\right)\ldots\left(PDP^{-1}\right)$$

essendo il prodotto matriciale associativo, tutte le PP^{-1} in mezzo si eliminano e ottengo che

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

17.1 Autospazio

Definizione 40: *Autospazio*

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Si dice autospazio di T relativo all'autovalore λ lo spazio vettoriale:

$$E(\lambda) = N(T - \lambda I_n) = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}$$

ossia l'insieme degli autovettori di V più il vettore nullo (sempre presente)

NB: il medesimo discorso può essere fatto per una matrice associata ad una funzione lineare.

17.1.0 Determinare se un λ è autovalore

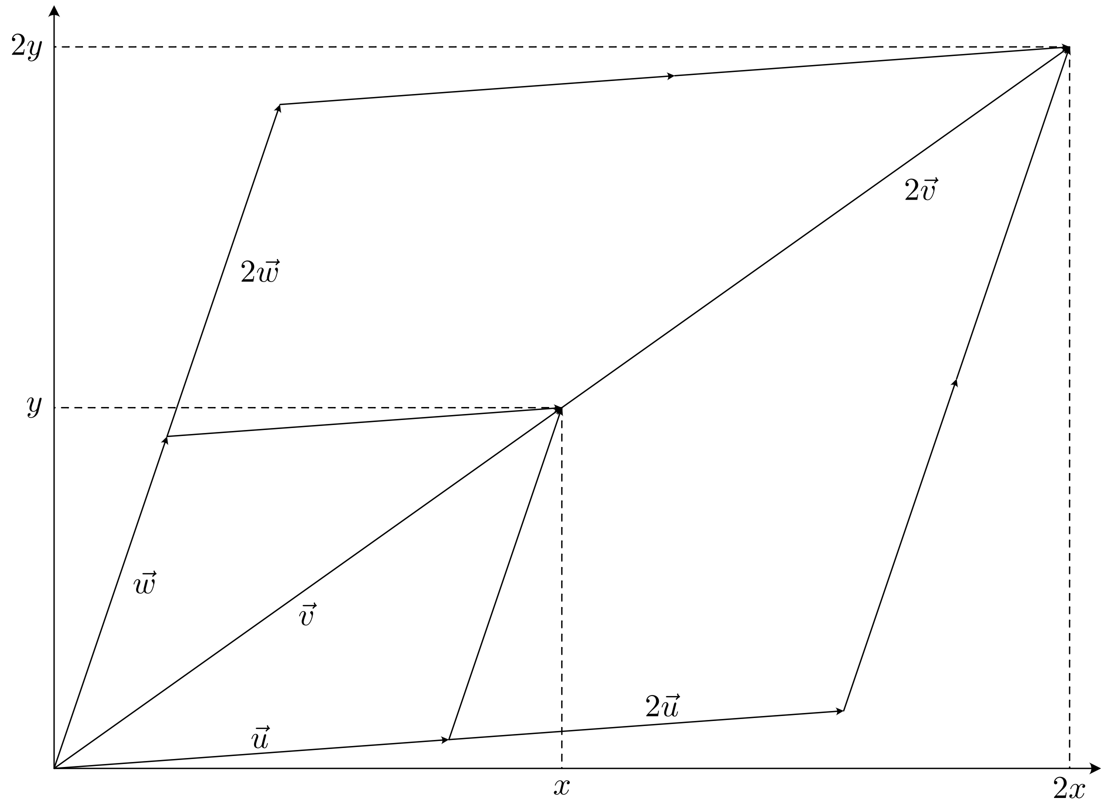
Noto che se $T : V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio n dimensionale posso identificare l'insieme dei suoi autovettori tramite un sistema lineare:

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

dove $x = T_{\mathcal{B}}(v)$. Posso visualizzare l'esempio in $\mathbb{R}^2$, come in figura seguente. In tale figura viene rappresentato come, presa qualsiasi base, costituita da qualsiasi vettore, valga sempre la relazione:

$$2v = 2x + 2y = 2\vec{u} + 2\vec{w}$$

Quindi se applico la funzione T su $\vec{V}$, è come applicare la funzione $M_{\mathcal{B}}(T)$ sulle coordinate di $\vec{v}$: se duplico un vettore è come duplicare le sue coordinate rispetto ad una base fissata



quindi riprendendo la relazione espressa pocanzi, ossia che

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

posso riportare il problema di trovare gli autovettori di una funzione alla risoluzione di un sistema omogeneo:

$$(A - \lambda I_n) = 0$$

in quanto

- $(A - \lambda I_n)\, x = ax - \lambda I_n x$ in quanto prodotto matriciale è distributivo
- $ax - \lambda I_n x = Ax - \lambda x = 0 \to Ax = \lambda x$

NB: per trovare gli autovalori di una funzione lineare potrei studiare il sistema $Ax = \lambda x$, però risulterebbe più scomodo e difficile da gestire, perchè avrei un parametro sull'ultima colonna. Allora conviene lavorare sulla matrice $Ax - \lambda I_n$, che la la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

17.2 Polinomi caratteristici

Definizione 41: *Polinomio caratteristico*

Sia A una matrice $n \times n$ e λ un autovalore. Il polinomio di grado n nella variabile λ è detto polinomio caratteristico della matrice e si denota con:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

lo stesso discorso può essere fatto anche per un qualsiasi endomorfismo T

Teorema 20: *Caratteristiche matrice $Ax - \lambda I_n$*

- Proprietà 1: uno scalare λ_0 è autovalore di A se λ_0 è radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$
- Proprietà 2: l'autospazio $E(\lambda_0)$ ha dimensione $n - rg(A - \lambda_0 I_n)$

Dimostrazione:

- Proprietà 1:
  - Se λ_0 è radice del polinomio caratteristico allora il determinante della matrice $Ax - \lambda_0 I_n$ in corrispondenza di quel valore è nullo
  - Se il determinante è nullo, il sistema omogeneo associato alla matrice ha infinite soluzioni
  - Se il sistema $(Ax - \lambda_0 x) = 0$ ha soluzioni diverse dal vettore nullo significa che esistono autovettori con autovalore λ_0
- Proprietà 2:
  - La dimensione dell'autospazio di A è uguale alla nullità del sistema lineare $Ax - \lambda_0 I_n$ che identifica l'insieme degli autovettori
  - La nullità di tale sistema è uguale a $n - rg(A - \lambda_0 I_n)$

Definizione 42: *Molteplicità algebrica*

Data una matrice A si dice molteplicità algebrica la molteplicità della radice λ_0 all'interno del polinomio caratteristico

Definizione 43: *Molteplicità geometrica*

Data una matrice A si dice <u>molteplicità geometrica</u> la dimensione dell'autospazio $E(\lambda_0)$:

$$m_{geo}(\lambda_0) = n - rg(A - \lambda_0 I_n)$$

si può dimostrare che la molteplicità algebrica di un λ_0 nel polinomio caratteristico è sempre $\geq$ alla molteplicità geometrica

$$m_{alg}(\lambda_0) \geq m_{geo}(\lambda_0) \geq 1$$

17.2.0 Esempio 1

La matrice reale $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 6 & 11 & 3 \\ 10 & 15 & 7 \end{bmatrix}$ ha polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ 6 & 11-\lambda & 3 \\ 10 & 15 & 7-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 6 & 2-\lambda & 3 \\ 10 & 3\lambda-6 & 7-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 10 & -3 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(16-\lambda)+28) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 16\lambda + 28\right)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-14).$$

Dunque A ha autovalori 2 e 14 , con autovettori rispettivamente

$$E(2) = N(A - 2I_3) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 10 & 15 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) \right\rangle$$

nota che l'insieme generatore dell'insieme soluzione lo ho ricavato passando dalla matrice al sistema, per poi scriverlo in maniera parametrica, dando il valore t e s alle variabili libere:

$$-2x - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}s - \frac{t}{2} \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

se leggi "in verticale" il sistema ti accorgi che è una combinazione lineare:

$$\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)s + \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)t$$

NB: in base alle variabile che scegli come variabili libere potresti ottenere vettori diversi, che però generano il medesimo sottospazio vettoriale. Per verificare che lo spazio generato coincida devi:

- Creare una matrice che contenga tutti i vettori generatori come colonne

- Ridurre con Gauss-Jordan
- Verificare che la soluzione dipenda da almeno 2 variabili libere (nel nostro caso): ogni variabile libera corrisponde ad un coefficiente della combinazione lineare del vettore 3 e 4. Ciò significa che ogni vettore contenuto nel secondo sottospazio può essere ottenuto tramite combinazione linare dei primi due vettori

allo stesso modo per l'altro autovalore ottengo che:

$$E(14) = N\left(A - 14I_3\right) = N\begin{bmatrix} -14 & -3 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 10 & 15 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right) = (-1, 3, 5)$$

Le molteplicità algebriche e geometriche coincidono per i due autovalori. La matrice è diagonalizzabile, poiché l'insieme di autovettori

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2), (0, 1, -3), (1, -3, -5)\}$$

forma una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto alla quale l'endomorfismo definito da A ha matrice associata diagonale (nota che non serve che mi calcoli $T\left(u_j\right)$ per ogni elemento, visto che per il teorema *teorema* **??** so già che se ho una base di autovettori allora esiste una matrice diagonale associata con le λ lungo la diagonale)

$$D = M_{\mathcal{B}}\left(T_A\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Posso verificare costruendo la matrice associata alla funzione T secondo la base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\left(T_A\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & -42 \\ -4 & -6 & -70 \end{bmatrix}$$

Teorema 21: *Indipendenza autovettori*

Se prendiamo n autovettori $v_1, \ldots, v_n$ relativi a n autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ essi sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione: supponiamo di avere solo 2 autospazi

- Supponiamo per assurdo che l'unione degli autospazi A e B sia linearmente dipendente
- Ciò significa che almeno un autovettore di questo insieme può essere ottenuto come combinazione lineare di altri autovettori
- Otterrei quindi un autovettore v dell'insieme A come combinazione lineare degli elementi dell'insieme B (o viceversa)
- Ciò tuttavia è assurdo: visto che l'autovettore $v \in A$ è relativo all'autovalore λ_a. Tuttavia questo appartiene all'insieme B. L'unica soluzione è quindi che λ_a e λ_b siano uguali

Teorema 22: *Unione di autospazi*

L'unione di basi di autospazi distinti è un insieme linearmente indipendente

Dimostrazione:

- Autovettori relativi ad autovalori differenti sono linearmente indipendenti (vedi *teorema* **??**)
- Gli autovettori che costituiscono la base di un autospazio sono necessariamente linearmente indipendenti
- Ho insiemi di elemti linearmente indipendenti in cui ogni elemento è linearmente indipendente con ogni altro elementi di ogni altro insieme. Per questo l'insieme è tutto linearmente indipendente

Teorema 23: *Teorema di diagonalizzabilità*

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ gli autovalori distinti di T. Allora

$$T \text{ è } \underline{\text{diagonalizzabile}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{h} m_{geo}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{h} \dim E(\lambda_i) = n = \dim V$$

Dimostrazione $\Rightarrow$: se T è diagonalizzabile $\Rightarrow$ la somma delle molteplicità geometriche è uguale a $\dim V$

- Se un endomorfismo è diagonalizzabile, secondo una data base $\mathcal{B}$ la sua matrice associata e la sua matrice $A - I_n\lambda$ avranno rispettivamente forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

- Quindi il polinomio caratteristico avrà forma $(\lambda_1 - \lambda)^{m_{\lambda_1}} \ldots (\lambda_n - \lambda)^{m_{\lambda_m}}$ dove m_{λ_m} è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_m
- La somma delle molteplicità algebrica è quindi $n = \dim V$
- Stessa cosa vale per le molteplicità geometriche: in corrisponsenza di un autovalore λ_m con molteplicità m_{λ_m} otterrò un sistema con m righe nulle. La sua nullità, ossia la dimensione di $E(\lambda_m) = m_{\lambda_m}$. La somma delle nullità è $n = \dim V$

Dimostrazione $\Leftarrow$: la somma delle molteplicità geometriche e algebriche è uguale a $\dim V \Rightarrow T$ è diagonalizzabile

- Se la somma delle molteplicità geometriche è uguale a $n = \dim V$ so di avere n autovettori che per il *teorema* **??** sono tutti linearmente indipendenti

- Essendo tutti gli n vettori linearmente indipendenti, questi formano una base. Per *teorema* **??**

NB: se il polinomio caratteristico ha tutte le sue radici nel campo $\mathbb{K}$ allora è sufficiente controllare che in corrispondenza di ogni autovalore λ_m la molteplicità geometrica e algebrica coincidano:

$$m_{alg}(\lambda_i) = m_{geo}(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

18 Basi ortonormali e teorema spettrale

Quando si studiano problemi che riguardano lunghezze di vettori, ortogonalità o angoli è comodo utilizzare delle basi di tipo particolare

Definizione 44: *Base ortonormale*

Una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ di un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale di U se

$$u_i \cdot u_j = 0 \text{ per } i \neq j \quad \text{e} \quad u_i \cdot u_j = 1 \text{ per } i = 1, \dots, m$$

NB: le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ sono ortonormali

Vi è una proprietà importante:

Se $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ è una base ortonormale di U, le coordinate $x_1, \dots, x_m$ di un vettore $v \in U$ rispetto a $\mathcal{B}$ si ottengono mediante il prodotto scalare

$$x_j = v \cdot u_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dimostrazione:

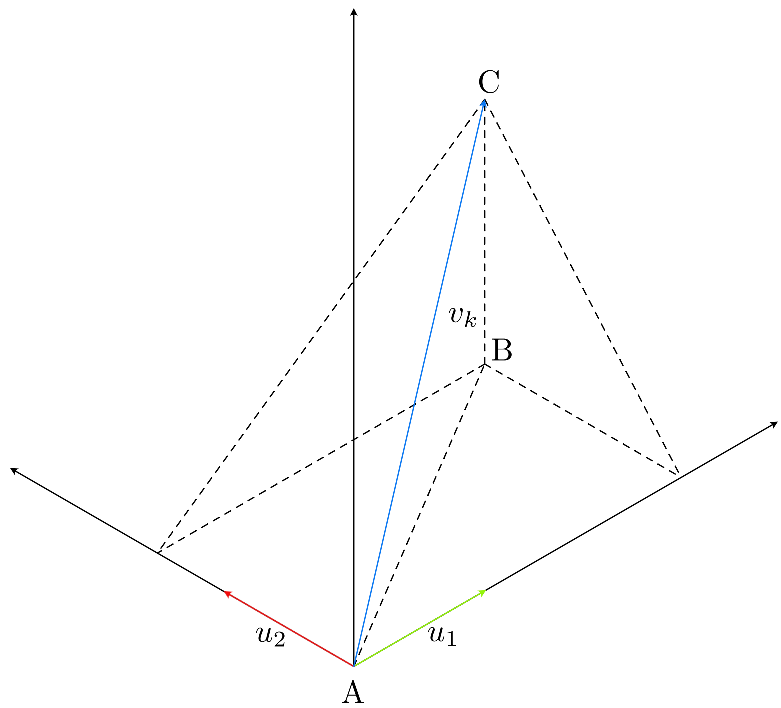
- Se $v = x_1u_1 + \dots + x_mu_m$, allora $v \cdot u_j = \left(\sum_{i=1}^m x_iu_i\right) \cdot u_j$
- Posso portarte per le proprietà delle sommatorie u_j al suo interno: $\sum_{i=1}^m (x_iu_i) \cdot u_j$
- Visto che il prodotto scalare è bilineare, posso applicare la proprietà associativa $\sum_{i=1}^m x_i (u_i \cdot u_j)$
- Noto che per definizione di base ortogonale, il prodotto scalare $(u_i \cdot u_j)$ è 1 se $i = j$, altrimenti 0. La sommatoria è quindi uguale a x_j:

$$\sum_{i=1}^m x_i (u_i \cdot u_j) = x_j$$

18.1 Costruzione basi ortonormali Gram-Schmidt

A partire da una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ di U, si può costruire una base ortonormale di U. Si procede ricorsivamente, ponendo $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ e poi definendo in successione i vettori $u_2, \dots, u_m$ con la formula con $c \in \mathbb{R}$ scelto in modo che sia $\|u_k\| = 1$.

$$u_k = c\left(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot u_i)\, u_i\right)$$



Per farsi un'idea del funzionamento della formula di Gram Schmidt posso procedere fino ad $\mathbb{R}^3$

- L'idea è che la sommatoria della formula crea un vettore che sottratto v_k ne crea uno ortogonale agli elementi della base ortonormale calcolati fino a quel momento

- Analiziamo la sommatoria

$$\sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot u_i)\, u_i$$

  sappiamo che il prodotto scalare è uguale a $\|v_1\|\|v_2\| \cos(\theta)$

- La sommatoria diventa quindi:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|v_k\|\|u_i\| \cos(\theta)\, u_i$$

  tuttavia, ricordiamo che per definizione ogni elemento della base ortonormale ha norma $= 1$, quindi $\|u_i\| = 1$ e la sommatoria diventa:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|v_k\| \cos(\theta)\, u_i$$

- Visto che u_i ha norma 1, la quantà all'interno della sommatoria è la proiezione ortogonale di v_k su u_i

- Nota che la somma delle proiezioni ortogonali su ogni u_i danno creanno la proiezione ortogonale di v_k sul piano $\left(\overline{AB}\right)$. Se a v_k sottraggo tale proiezione ottengo $\left(\overline{BC}\right)$, il quale è chiaramente ortogonale sia a u_1 che u_2

Esempio. Dalla base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,0,0),(2,1,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$, con il prodotto canonico, mediante il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1 = (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

da cui

$$u_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1}{\|v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1\|} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_3 - (v_3 \cdot u_1)\, u_1 - (v_3 \cdot u_2)\, u_2 = (2,1,0) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1,0)$$

da cui

$$u_3 = (0,1,0)$$

quindi

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad u_3 = (0,1,0)$$

Nota che la matrice di transizione $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id)$ ha come colonne i vettori della base ortonormale. Quindi, indicando con P^i e P^j rispettivamente la i esima e la j esima colonna ho che:

$$P^i \cdot P^j = \begin{cases} 1 \text{ per } i = j \\ 0 \text{ pet } i \neq j \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad P^T P = I_n$$

da questa caratteristica si ricava la definizione di matrice ortogonale

Definizione 45: *Matrice ortogonale*

Una matrice quadrata $P \in M_n(\mathbb{R})$ è detta ortogonale se $P^{-T} P = I_n$

Teorema 24: *Prerequisito 1 teorema spettrale*

Sia A una matrice reale simemtrica $n \times n$. Allora A ha n autovalori reali, contati con la loro molteplicità algebrica

Nota che **Dimostrazione**: l'idea generale è quella di ottenere due identità, e confrontarle a loro volta

Sia $T_A : \mathbb{C}^n \to C^n$ l'endomorfismo definito da A. Sia $c \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ un autovettore di T_A con autovaloce $\lambda \in \mathbb{C}$

- **Itendità 1**: se x è autovettore relativo a λ allora: $Ax = \lambda x$
  - Posso applicare la funzione "trasposta" ad ambo i membri, ottenendo:

    $$x^T A = \lambda x^T$$

    nota bene che nel membro sinistro x e A si scambiano per via delle proprietà delle matrici trasposte

- Posso applicare la funzione "negato" (negato di un numero complesso) ad ambo i membri, ottenendo:
$$\bar{x}^T A = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$
  * A sinistra $A = \overline{A}$ in quanto la matrice A è a coefficienti reali
  * A destra posso affermare che $\overline{\lambda x^T} = \overline{\lambda}\overline{x}^T$ in quanto la funzione "negato" è lineare(se ci pensi è una riflessione rispetto all'asse x)
- Moltiplicando a destra e a sinistra per x ottengo:

$$\overline{x}^T Ax = \overline{\lambda}\overline{x}^T x$$

◦ **Identità 2:** parto sempre dall'identità $Ax = \lambda x$

- Moltiplico a destra e a sinistra per x^{-T} e ottengo:

$$\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x$$

- Nel termine di destra, posso spostare lambda in quanto è solo un coefficiente, ottenendo:
$$\overline{x}^T Ax = \lambda\overline{x}^T x$$

◦ **Metto assieme** tramite il termine di sinistra l'identità 1 e 2 ottengo che :

$$\overline{\lambda}\overline{x}^T x = \lambda\overline{x}^T x$$

quindi necessariamente $\overline{\lambda} = \lambda$ ossia λ è un numero reale!

Nota bene che l'identità non può essere soddisfatta imponenendo $\overline{x}^T x = 0$ in quanto questa quantità è sempre ≥ 0:

$$\overline{x}^T x = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + \dots + \overline{x_n}x_n$$

il prodotto di un numero complesso con il suo coniugato è sempre diverso da 0 se $z \neq 0$:

$$z\overline{z} = ce^{\theta}ce^{-\theta} = c$$

quindi visto che per ipotesi $x \neq 0$ anche la quantità $\overline{x}^T x \neq 0$

Teorema 25: *Teorema spettrale*

Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$. Allora

A è diagonalizzabile

Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$costituita da autovettori di A, cioè esiste una matrice ortogonale di P tale che $P^{-1}AP = D$ sia diagonale

Dimostrazione: la dimostrazione procede per induzione

- Caso base: se $n = 1$ chiaramente l'ipotesi è verificata. Qualsiasi base costituita da un vettore con norma 1 costituisce una base ortonormale
- Ora devo dimostrare che se l'ipotesi è vera per $n - 1$ allora lo è necessariamente anche per n
- Visto che A è simmetrica per ipotesi, per il *teorema* **??** ho almeno un autovalore reale λ_1 di A. L'autovettore u_1 corrispondente a λ_1 costituirà il primo elemento della base di $\mathbb{R}^n$
- Ora considero lo spazio vettoriale $U^{\perp}$ indivituato dai vettori ortogonali a u_1. Questo spazio ha dimensione $n - m$, dove m è la dimensione del sottospazio a cui è ortogonale $U^{\perp}$. Nel nostro caso, il sottospazio è individuato dai vettori $\perp$ a u_1. Visto che il sottospazio generato da u_1 è 1, allora la $\dim U^{\perp} = n - 1$
- Noto che $Av \in U^{\perp}$ per ogni $v \in U^{\perp}$

$$(Av) \cdot u_1 = (Av)^T u_1 = \left(v^T A^T\right) u_1 = v^T \left(Au_1\right) = v^T \left(\lambda_1 u_1\right) = \lambda_1 \left(v \cdot u_1\right) = 0$$

$$(Av) \cdot u_1 = 0 \rightarrow Av \perp u_1$$

- Ciò vuol dire che posso condierare $T_A : U^{\perp} \rightarrow U^{\perp}$ anzichè $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Se ora suppongo induttivamente che $T_A : U^{\perp} \rightarrow U^{\perp}$ abbia una base ortonormale, necessariamente anche $T_A \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avrà una base ortonormale, costituita dal vettore u_1 e dagli $n - 1$ vettori che costituiscono la base di $U^{\perp}$
- Ho finito la dimostrazione: se la tesi vale per $n - 1$ allora vale anche per n. Visto che è vera per $n = 1$, allora deve essere vera per ogni n

NB: se una matrice A è simmetrica, so per certo che vettori appartenenti ad autospazi relativi ad autovalori differenti, sono sempre ortogonali