

# Logica computazionale

Marini Mattia

1° semestre 3° anno

## Indice

<b>1</b>	<b>Mondo e mente</b>	<b>3</b>
1.1	Fatti e modelli . . . . .	4
1.2	Dominio e linguaggio . . . . .	5
1.3	Modelli di mondo . . . . .	6
1.4	Definizioni intensionali . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Utilizzare modelli di mondo</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Logica</b>	<b>10</b>

## Definizioni

1	Fallacia . . . . .	3
2	Rappresentazione mentale . . . . .	3
3	Gap semantico . . . . .	3
4	Consistenza e inconsistenza rappresentazioni . . . . .	3
5	Fatto . . . . .	4
6	Modello . . . . .	4
7	Consistenza di un fatto . . . . .	4
8	Asserzione . . . . .	4
9	Teoria asserzionistica . . . . .	4
10	Funzione di interpretazione di una teoria . . . . .	5
11	Polisemia (polysemy) . . . . .	5
12	Sinonimia (synonymity) . . . . .	5
13	Dominio . . . . .	5
14	Linguaggio asserzionistico . . . . .	5
15	Correttezza e completezza linguaggio . . . . .	5
16	Funzione di interpretazione di un linguaggio . . . . .	6
17	Modello di mondo . . . . .	6
18	Dominio, rappresentazione intensionale . . . . .	7
19	Fatto, rappresentazione intensionale . . . . .	7
20	Data domain, knowledge domain, mixed domain . . . . .	7
21	Linguaggio, rappresentazione intensionale . . . . .	8
22	Asserzione, rappresentazione intensionale . . . . .	8
23	Data language, knowledge language, mixed language . . . . .	8

24	Funzione di interpretazione, interpretazione intensionale . . . . .	8
25	Data/knowledge/mixed interpretation function . . . . .	9
26	Modello di mondo, interpretazione intensionale . . . . .	9
27	Linguaggi formali semi formali e informali . . . . .	9
28	Ask, tell, answer . . . . .	9
29	Entailment . . . . .	10
30	Model checking . . . . .	10
31	Satisfiability . . . . .	10
32	Validità . . . . .	10
33	Entailment . . . . .	11
34	Logica del mondo . . . . .	11
35	Logica . . . . .	11
36	Agente . . . . .	11
37	Tell . . . . .	12
38	Ask . . . . .	12
39	Operatori logici . . . . .	12

## 1 Mondo e mente

### Definizione 1: *Fallacia*

Una fallacia è un ragionamento logico invalido. Si distinguono in:

1. Fallace formali: l'errore sta nella struttura logica del ragionamento in se (es. paradossi)
2. Fallace informali: errore "umano", non intrinseco al ragionamento (es. bias cognitivo, misconcezioni, over-generalizzazione, catastrofismo)

### Definizione 2: *Rappresentazione mentale*

Parte della memoria di una persona che rappresenta il mondo giunto ad essa tramite i sensi

Può essere

1. Analogica: quanto ci giunge tramite i sensi
2. Linguistica: descrizione linguistica della rapp analogica

#### 1.0.0 Rappresentazioni mentali, analogiche, linguistiche

### Definizione 3: *Gap semantico*

Differenza fra il mondo effettivo e ciò che viene percepito di questo.

world  $\neq$  world mental representation

### Definizione 4: *Consistenza e inconsistenza rappresentazioni*

Due rappresentazioni sono inconsistenti se è impossibile che rappresentino entrambe la stessa parte di mondo.

Es. una rappresenta una macchina gialla e l'altra la medesima macchina verde

#### 1.0.0 Rappresentazione vs rappresentazione mentale

Una rappresentazione mentale sta nella mente, mentre una rappresentazione è un qualcosa di fisico e tangibile:

	Rapp. mentale	Rappresenzazione
Analogica	ricordo paesaggio	dipinto paesaggio
Linguistica	manoscritto	flusso parole nella nostra testa

## 1.1 Fatti e modelli

### Definizione 5: *Fatto*

Un fatto è qualcosa che accade a determinate *coordinate* spazio temporali

### Definizione 6: *Modello*

Un *modello* è un insieme di fatti

$$M = \{f\}$$

*Nota:* Un fatto è una nozione primitiva e non può essere formalmente definita

Ad esempio i seguenti sono fatti:

1. Sofia è una persona
2. Sofia ha i capelli biondi
3. Amo il gelato

### Definizione 7: *Consistenza di un fatto*

Due fatti sono inconsistenti se non possono coesistere in un modello del mondo come lo percepiamo

### Definizione 8: *Asserzione*

Un'asserzione  $a$  è una rappresentazione linguistica atomica di un fatto  $f$ .

Il modo più semplice è pensare ad un'asserzione come *una relazione fra un soggetto e un oggetto*

ad esempio, *Sofia è negra* è un'asserzione

### Definizione 9: *Teoria asserzionistica*

Una teoria asserzionistica  $\mathcal{T}_A$  è un insieme di asserzioni

$$\mathcal{T}_A = \{a\}$$

### Definizione 10: *Funzione di interpretazione di una teoria*

Una funzione di interpretazione è una funzione:

$$\mathcal{I}_A : \mathcal{T}_A \rightarrow M$$

che assegna ad un'asserzione  $a$  un fatto  $f$ :

$$\mathcal{I}_A(a) = f$$

**Definizione 11:** *Polisemia (polysemy)*

E' il fenomeno che crea ambiguità nei linguaggi naturali. Formalmente:

$$\mathcal{I}_A(a) = f_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_A(a) = f_2$$

**Definizione 12:** *Sinonimia (synonymity)*

E' il fenomeno per cui due parole hanno lo stesso significato. Formalmente:

$$\mathcal{I}_A(a_1) = f \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_A(a_2) = f$$

**1.2** Dominio e linguaggio

**Definizione 13:** *Dominio*

Un dominio è un insieme di fatti:

$$F = \{f\}$$

Il modello è un sottoinsieme del dominio:

$$M \subseteq D$$

**Definizione 14:** *Linguaggio asserzionistico*

Un linguaggio asserzionistico è un insieme di asserzioni:

$$\mathcal{L}_A = \{a\}$$

La teoria è un sottoinsieme del linguaggio:

$$\mathcal{T}_A = \mathcal{L}_A$$

**Definizione 15:** *Correttezza e completezza linguaggio*

Un linguaggio  $\mathcal{L}_A$  è:

1. Completo se esiste un'asserzione per ogni elemento del dominio
2. Corretto se non esistono asserzioni per elementi fuori dal dominio

**Definizione 16:** *Funzione di interpretazione di un linguaggio*

Una funzione di interpretazione è una funzione:

$$\mathcal{I}_A : \mathcal{T}_A \rightarrow M$$

che assegna ad un'asserzione  $a$  un fatto  $f$ :

$$\mathcal{I}_A(a) = f$$

**1.3** Modelli di mondo

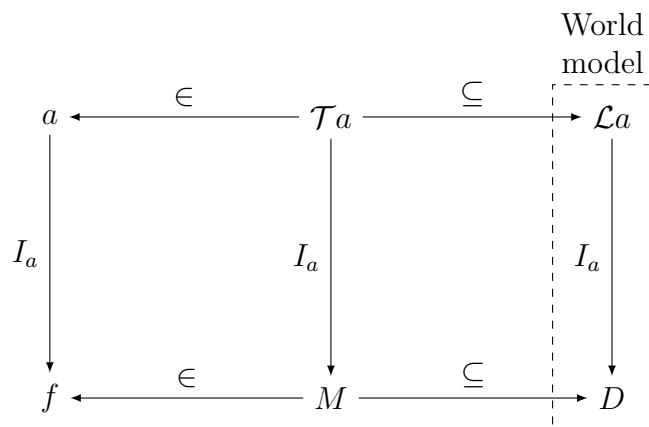
**Definizione 17:** *Modello di mondo*

La coppia

$$\mathcal{W} = \langle \mathcal{L}_A, D, \mathcal{I}_A \rangle$$

è detta modello di mondo

Uno schema riassuntivo è il seguente:



**1.4** Definizioni intensionali

Per rappresentare un insieme posso utilizzare due metodi:

1. Rappresentazione estensionale: elenco il contenuto
2. Rappresentazione insensazionale: genero insieme da un insieme primitivo

Per rappresentare il dominio di un modello di mondo, può essere utile utilizzare la versione intensionale

**Definizione 18:** *Dominio, rappresentazione intensionale*

Un dominio può essere rappresentato intensionalmente partendo da un set di:

1. Entità: tutti gli elementi distinguibili della rappresentazione
2. Classi: insiemi di entità simili per date caratteristiche
3. Relazioni: relazioni n-aria fra entità

$$D^i = \langle E, \{C\}, \{R\} \rangle$$

dove

$$E = \{e\}$$

$$C \in E$$

$$R \in E \times \dots \times E \quad n \text{ volte}$$

Da questa definizione possiamo definire un fatto in modo intensionale:

**Definizione 19:** *Fatto, rappresentazione intensionale*

Un fatto può esprimere una delle seguenti cose:

$$\begin{array}{lll} e & \in & C \\ \langle e_1, \dots, e_n \rangle & \in & R \\ C & \in & E \\ R^n & \in & C_1 \times \dots \times C_n \end{array}$$

Ad esempio, in ordine:

1. Sofia è una persona
2. Sofia, Marco e Giordano sono amici
3. Indica che  $C$  è una classe
4. Indica che una relazione va applicata ad un set di classi (i cani sono amici degli uomini)

**Definizione 20:** *Data domain, knowledge domain, mixed domain*

Una data domain è un dominio  $D$  che utilizza fatti di tipo 1,2.

Un knowledge domain contiene dati di tipo 3,4.

Un mixed domain contiene tutti i tipi di fatto. Vedi def 1.4

**Definizione 21:** *Linguaggio, rappresentazione intensionale*

Un linguaggio, può essere definito intensionalmente come:

$$\mathcal{L}_A^i = \langle \mathcal{E}, \{C\}, \{P\} \rangle$$

dove

$\{e\}$  = insieme di entità

$\{C\}$  = insieme di concetti, ossia nomi di classi

$\{P\}$  = insieme di proprietà, ossia nomi di relazioni

**Definizione 22:** *Asserzione, rappresentazione intensionale*

Un'asserzione  $a$  può esprimere una delle seguenti cose:

$C(e)$	$e$ appartiene a $C$
$P^n(e_1, \dots, e_n)$	$e_1, \dots, e_n$ sono coinvolte nella relazione $P$
$C$	esiste classe $C$
$P^n(C_1, \dots, C_n)$	$C_1, \dots, C_n$ sono legate dalla relazione $P$

**Definizione 23:** *Data language, knowledge language, mixed language*

Una data language è un linguaggio  $\mathcal{L}_A$  che utilizza solo asserzioni di tipo 1,2.

Un knowledge language contiene solo asserzioni di tipo 3,4.

Un mixed language contiene tutti i tipi di fatto. Vedi def 1.4

**Definizione 24:** *Funzione di interpretazione, interpretazione intensionale*

Una funzione di interpretazione  $\mathcal{I}_A : \mathcal{L}_A \rightarrow D$  è così definita:

$$\mathcal{I}_A^i = \langle \mathcal{I}_e, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_P \rangle$$

con

$$\mathcal{I}_e : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$\mathcal{I}_C : \{C\} \rightarrow \{E\}$$

$$\mathcal{I}_P : \{P^n\} \rightarrow \{E\} \times \dots \times \{E\}$$



### Definizione 25: *Data/knowledge/mixed interpretation function*

Una data interpretation function è una funzione di interpretazione che associa un data language ad un data domain.

Una knowledge interpretation function è una funzione di interpretazione che associa un knowledge language ad un knowledge domain.

### Definizione 26: *Modello di mondo, interpretazione intensionale*

Un modello di mondo è intensionalmente definito come segue:

$$W = \langle \mathcal{L}_A, D^i, I_A \rangle$$

con

$$\mathcal{L}_A^i = \langle \mathcal{E}, \{C\}, \{P\} \rangle$$

$$\mathcal{D}^i = \langle E, \{C\}, \{R\} \rangle$$

$$\mathcal{I}_A^i = \langle I_e, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_P \rangle$$

### Definizione 27: *Linguaggi formali semi formali e informali*

1. Linguaggi informali:  $\mathcal{L}_A$  è definito informalmente (linguaggio naturale)
2. Linguaggi semi-formali:  $\mathcal{L}_A$  è definita formalmente, ma non  $\mathcal{I}_A$  (db, ER, EER)
3. Linguaggi formali:  $\mathcal{L}_A$  e  $\mathcal{I}_A$  sono definiti formalmente (linguaggi logica)

## 2 Utilizzare modelli di mondo

Dato un modello di mondo possiamo utilizzarlo per chiedere domande ed avere risposte come segue:

### Definizione 28: *Ask, tell, answer*

Dato un mondo in linguaggio  $\mathcal{L}_W$

1. Tell *data and knowledge* tramite linguaggio  $\mathcal{L}_T$
2. Ask *question* tramite linguaggio  $\mathcal{L}_Q$
3. Answer *a question* tramite linguaggio  $\mathcal{L}_A$

Solitamente  $\mathcal{L}_Q$  e  $\mathcal{L}_A$  sono uguali

### Definizione 29: *Entailment*

Dato un'asserzione  $a$  e un modello  $M$ , si dice  $a$  *entails*  $M$  nel momento in cui  $I(a) \in M$

$$\begin{array}{ll} M \models_{\mathcal{L}_A} a & \text{indica } \mathcal{I}_A(a) \in M \\ M \models_{\mathcal{L}_A} \mathcal{T} & \text{indica } \mathcal{I}_A(a) \in M \text{ for all } a \in \mathcal{T} \end{array}$$

### Definizione 30: *Model checking*

Fare il check di un modello significa verificare che  $M \models \mathcal{T}$

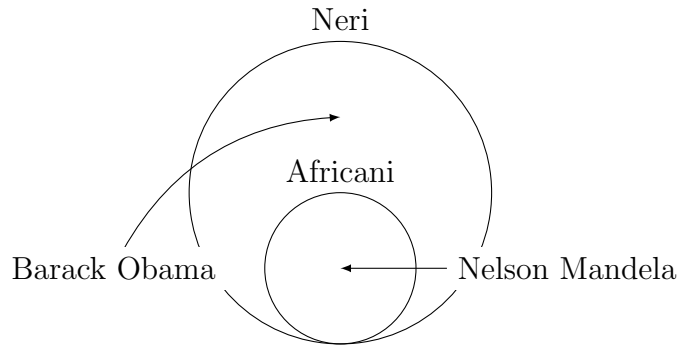
### Definizione 31: *Satisfiability*

Verificare la satisfiability di  $\mathcal{T}$  significa verificare se esista un  $M$  tale per cui  $M \models \mathcal{T}$

### Definizione 32: *Validità*

Verificare la validità di una teoria  $\mathcal{T}$  significa verificare se  $M \models \mathcal{T} \quad \forall M$

In quest'ultimo caso, se prendo  $M \{ \}$



*Non è vero che tutti i neri sono africani, ma è vero che tutti gli africani sono neri*

3

## Logica

Possiamo ragionare e trarre conclusioni tramite un nuovo concetto: l'entailment. Di base, un'asserzione  $a$ , è vera solo se trova un corrispettivo fatto in un dato modello, ossia  $I_L(a) \in M$ . Questo è detto entailment:

**Definizione 33: Entailment**

Data un'asserzione  $a \in \mathcal{L}_a$  e un modello  $M$ , si dice che

$$M \models_{\mathcal{L}_a} a$$

se  $I_{\mathcal{L}_a}(a) \in M$ .

In modo simile, data una teoria  $\mathcal{T} = \{a\}$ , allora

$$M \models_{\mathcal{L}_a} \mathcal{T}$$

se  $I_{\mathcal{L}_a}(a) \in M$  per ogni  $a \in \mathcal{T}$

Di fatto se  $M \models a$ , significa che  $a$  è un'asserzione vera. Quindi dato un modello di mondo si può definirne una logica attorno tramite la relazione di entailment:

**Definizione 34: Logica del mondo**

La logica del mondo è data da:

$$L_W = \langle W, \models_{L_a} \rangle$$

**Definizione 35: Logica**

Data una logica del mondo  $L_W = \langle W, \models_{L_a} \rangle$ , si può costruire una logica ampliando il linguaggio  $L_a$  con nuove asserzioni complesse:

$$L_l = \langle W, \models_L \rangle$$

dove  $L_a \in L$

L'idea è quindi quella di partire da un linguaggio semplice contenente sole asserzioni ( $L_A$ ), aggiungere nuove informazioni (creo  $L$ , t.c.  $L_a \in L$ ) e verifico correttezza informazioni tramite il ragionamento ( $\models_L$ )

Per formalizzare il meccanismo di ragionamento, si usano gli agenti:

**Definizione 36: Agente**

Data una logica  $L_W = \langle W, \models_{L_a} \rangle$ , un agente è dato da

$$A_{L_L} = \langle L_L, \text{Tell}, \text{Ask} \rangle$$

### Definizione 37: *Tell*

L'operatore tell è definito come segue:

1.  $\text{TellW}(A_L, w)$ : adds a word and extends the interpretation function and the domain if needed
2.  $\text{TellA}(A_L, a)$ : adds an *axiom*, decreasing the partiality of the given theory

### Definizione 38: *Ask*

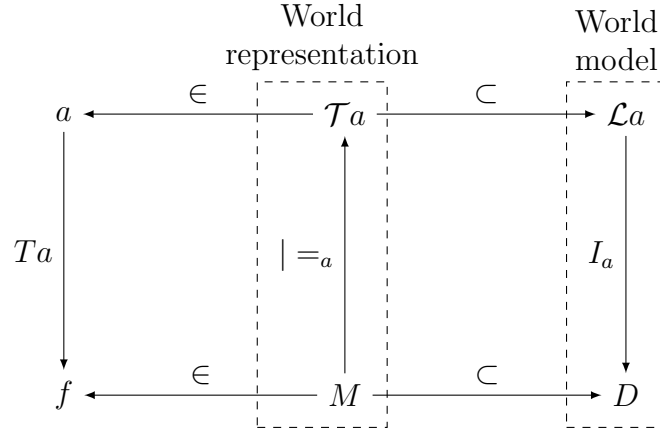
L'operatore ask è definito come segue:

1.  $\text{AskC}(A_L, T)$ : *ask check*. Ritorna **true** se  $T| = M$
2.  $\text{AskS}(A_L, T)$ : *ask satisfiability*. Ritorna **true** se  $T$  è soddisfabile, ossia esiste un  $M$  tale per cui  $T| = M$

### Definizione 39: *Operatori logici*

Gli operatori ask(3) e tell(3) possono essere scritti anche come segue:

1.  $M? = T$  ossia  $\text{AskC}(A, T)$  *teoria è corretta*
2.  $D?? = T$  ossia  $\text{AskS}(A, T)$  *teoria è soddisfabile*
3.  $D! = A$  ossia  $\text{TellL}(A, L)$  *amplia il linguaggio*
4.  $M! = T$  ossia  $\text{TellT}(A, T)$  *amplia la teoria con assiomi*



- $I_a$ : interpretaion function
- $\models_a$ : world entailmen
- *World model*  $W = \langle \mathcal{L}a, D, I_a \rangle$
- *World representation*  $R = \langle \mathcal{T}a, M \rangle$
- *World logic*  $L_w = \langle W, \models_{La} \rangle$
- *Logic*  $L_L = \langle W, \models_L \rangle$