

Logica computazionale

Marini Mattia

1^o semestre 3^o anno

Indice

1 Mondo e mente	3
1.1 Fatti e modelli	4
1.2 Dominio e linguaggio	5
1.3 Modelli di mondo	6
1.4 Definizioni intensionali	6
2 Utilizzare modelli di mondo	9
3 Logica	10

Definizioni

1 Fallacia	3
2 Rappresentazione mentale	3
3 Gap semantico	3
4 Consistenza e inconsistenza rappresentazioni	3
5 Fatto	4
6 Modello	4
7 Consistenza di un fatto	4
8 Asserzione	4
9 Teoria asserzionistica	4
10 Funzione di interpretazione di una teoria	5
11 Polisemia (polysemy)	5
12 Sinonimia (synonymity)	5
13 Dominio	5
14 Linguaggio asserzionistico	5
15 Correttezza e completezza linguaggio	5
16 Funzione di interpretazione di un linguaggio	6
17 Modello di mondo	6
18 Dominio, rappresentazione intensionale	7
19 Fatto, rappresentazione intensionale	7
20 Data domain, knowledge domain, mixed domain	7
21 Linguaggio, rappresentazione intensionale	8
22 Asserzione, rappresentazione intensionale	8
23 Data language, knowledge language, mixed language	8

24	Funzione di interpretazione, interpretazione intensionale	8
25	Data/knowledge/mixed interpretation function	9
26	Modello di mondo, interpretazione intensionale	9
27	Linguaggi formali semi formali e informali	9
28	Ask, tell, answer	9
29	Entailment	10
30	Model checking	10
31	Satisfiability	10
32	Validità	10
33	Entailment	11
34	Logica del mondo	11
35	Logica	11
36	Agente	11
37	Tell	12
38	Ask	12
39	Operatori logici	12

1

Mondo e mente

Definizione 1: *Fallacia*

Una fallacia è un ragionamento logico invalido. Si distinguono in:

1. Fallace formali: l'errore sta nella struttura logica del ragionamento in se (es. paradossi)
2. Fallace informali: errore "umano", non intrinseco al ragionamento (es. bias cognitivo, misconcezioni, over-generalizzazione, catastrofismo)

Definizione 2: *Rappresentazione mentale*

Parte della memoria di una persona che rappresenta il mondo giunto ad essa tramite i sensi

Può essere

1. Analogica: quanto ci giunge tramite i sensi
2. Linguistica: descrizione linguistica della rapp analogica

1.0.0 Rappresentazioni mentali, analogiche, linguistiche

Definizione 3: *Gap semantico*

Differenza fra il mondo effettivo e ciò che viene percepito di questo.

$\text{world} \neq \text{world mental representation}$

Definizione 4: *Consistenza e inconsistenza rappresentazioni*

Due rappresentazioni sono inconsistenti se è impossibile che rappresentino entrambe la stessa parte di mondo.

Es. una rappresenta una macchina gialla e l'altra la medesima macchina verde

1.0.0 Rappresentazione vs rappresentazione mentale

Una rappresentazione mentale sta nella mente, mentre una rappresentazione è un qualcosa di fisico e tangibile:

	Rapp. mentale	Rappresentazione
Analogica	ricordo paesaggio	dipinto paesaggio
Linguistica	manoscritto	flusso parole nella nostra testa

1.1 Fatti e modelli

Definizione 5: *Fatto*

Un fatto è qualcosa che accade a determinate *coordinate* spazio temporali

Definizione 6: *Modello*

Un *modello* è un insieme di fatti

$$M = \{f\}$$

Nota: Un fatto è una nozione primitiva e non può essere formalmente definita

Ad esempio i seguenti sono fatti:

1. Sofia è una persona
2. Sofia ha i capelli biondi
3. Amo il gelato

Definizione 7: *Consistenza di un fatto*

Due fatti sono inconsistenti se non possono coesistere in un modello del mondo come lo percepiamo

Definizione 8: *Asserzione*

Un'asserzione a è una rappresentazione linguistica atomica di un fatto f .

Il modo più semplice è pensare ad un'asserzione come *una relazione fra un soggetto e un oggetto*

ad esempio, *Sofia è negra* è un'asserzione

Definizione 9: *Teoria asserzionistica*

Una teoria asserzionistica \mathcal{T}_A è un insieme di asserzioni

$$\mathcal{T}_A = \{a\}$$

Definizione 10: *Funzione di interpretazione di una teoria*

Una funzione di interpretazione è una funzione:

$$\mathcal{I}_A : \mathcal{T}_A \rightarrow M$$

che assegna ad un'asserzione a un fatto f :

$$\mathcal{I}_A(a) = f$$

Definizione 11: *Polisemia (polysemy)*

E' il fenomeno che crea ambiguità nei linguaggi naturali. Formalmente:

$$\mathcal{I}_A(a) = f_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_A(a) = f_2$$

Definizione 12: *Sinonimia (synonymity)*

E' il fenomeno per cui due parole hanno lo stesso significato. Formalmente:

$$\mathcal{I}_A(a_1) = f \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_A(a_2) = f$$

1.2 Dominio e linguaggio

Definizione 13: *Dominio*

Un dominio è un insieme di fatti:

$$F = \{f\}$$

Il modello è un sottoinsieme del dominio:

$$M \subseteq D$$

Definizione 14: *Linguaggio asserzionistico*

Un linguaggio asserzionistico è un insieme di asserzioni:

$$\mathcal{L}_A = \{a\}$$

La teoria è un sottoinsieme del linguaggio:

$$\mathcal{T}_A = \mathcal{L}_A$$

Definizione 15: *Correttezza e completezza linguaggio*

Un linguaggio \mathcal{L}_A è:

1. Completo se esiste un'asserzione per ogni elemento del dominio
2. Corretto se non esistono asserzioni per elementi fuori dal dominio

Definizione 16: Funzione di interpretazione di un linguaggio

Una funzione di interpretazione è una funzione:

$$\mathcal{I}_A : \mathcal{T}_A \rightarrow M$$

che assegna ad un'asserzione a un fatto f :

$$\mathcal{I}_A(a) = f$$

1.3 Modelli di mondo

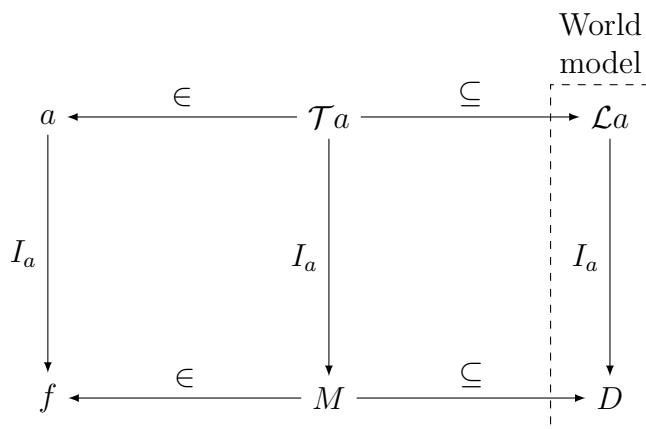
Definizione 17: Modello di mondo

La coppia

$$\mathcal{W} = \langle \mathcal{L}_A, D, \mathcal{I}_A \rangle$$

è detta modello di mondo

Uno schema riassuntivo è il seguente:



1.4 Definizioni intensionali

Per rappresentare un insieme posso utilizzare due metodi:

1. Rappresentazione estensionale: elenco il contenuto
2. Rappresentazione insensionale: genero insieme da un insieme primitivo

Per rappresentare il dominio di un modello di mondo, può essere utile utilizzare la versione intensionale

Definizione 18: Dominio, rappresentazione intensionale

Un dominio può essere rappresentato intensionalmente partendo da un set di:

1. Entità: tutti gli elementi distinguibili della rappresentazione
2. Classi: insiemi di entità simili per date caratteristiche
3. Relazioni: relazioni n-aria fra entità

$$D^i = \langle E, \{C\}, \{R\} \rangle$$

dove

$$\begin{aligned} E &= \{e\} \\ C &\in E \\ R &\in E \times \dots \times E \quad n \text{ volte} \end{aligned}$$

Da questa definizione possiamo definire un fatto in modo intensionale:

Definizione 19: Fatto, rappresentazione intensionale

Un fatto può esprimere una delle seguenti cose:

$$\begin{aligned} e &\in C \\ \langle e_1, \dots, e_n \rangle &\in R \\ C &\in E \\ R^n &\in C_1 \times \dots \times C_n \end{aligned}$$

Ad esempio, in ordine:

1. Sofia è una persona
2. Sofia, Marco e Giordano sono amici
3. Indica che C è una classe
4. Indica che una relazione va applicata ad un set di classi (i cani sono amici degli uomini)

Definizione 20: Data domain, knowledge domain, mixed domain

Una data domain è un dominio D che utilizza fatti di tipo 1,2.

Un knowledge domain contiene dati di tipo 3,4.

Un mixed domain contiene tutti i tipi di fatto. Vedi def 1.4

Definizione 21: Linguaggio, rappresentazione intensionale

Un linguaggio, può essere definito intensionalmente come:

$$\mathcal{L}_A^i = \langle \mathcal{E}, \{C\}, \{P\} \rangle$$

dove

$\{e\}$ = insieme di entità

$\{C\}$ = insieme di concetti, ossia nomi di classi

$\{P\}$ = insieme di proprietà, ossia nomi di relazioni

Definizione 22: Affermazione, rappresentazione intensionale

Un'asserzione a può esprimere una delle seguenti cose:

$C(e)$	e appartiene a C
$P^n(e_1, \dots, e_n)$	e_1, \dots, e_n sono coinvolte nella relazione P
C	esiste classe C
$P^n(C_1, \dots, C_n)$	C_1, \dots, C_n sono legate dalla relazione P

Definizione 23: Data language, knowledge language, mixed language

Una data language è un linguaggio \mathcal{L}_A che utilizza solo asserzioni di tipo 1,2.

Un knowledge language contiene solo asserzioni di tipo 3,4.

Un mixed language contiene tutti i tipi di fatto. Vedi def 1.4

Definizione 24: Funzione di interpretazione, interpretazione intensionale

Una funzione di interpretazione $\mathcal{I}_A : \mathcal{L}_A \rightarrow D$ è così definita:

$$\mathcal{I}_A^i = \langle \mathcal{I}_e, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_P \rangle$$

con

$$\mathcal{I}_e : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$\mathcal{I}_C : \{C\} \rightarrow \{E\}$$

$$\mathcal{I}_P : \{P^n\} \rightarrow \{E\} \times \dots \times \{E\}$$

Definizione 25: Data/knowledge/mixed interpretation function

Una data interpretation function è una funzione di interpretazione che associa un data language ad un data domain.

Una knowledge interpretation function è una funzione di interpretazione che associa un knowledge language ad un knowledge domain.

Definizione 26: Modello di mondo, interpretazione intensionale

Un modello di mondo è intensionalmente definito come segue:

$$W = \langle \mathcal{L}_A, D^i, I_A \rangle$$

con

$$\mathcal{L}_A^i = \langle \mathcal{E}, \{C\}, \{P\} \rangle$$

$$\mathcal{D}^i = \langle E, \{C\}, \{R\} \rangle$$

$$\mathcal{I}_A^i = \langle I_e, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_P \rangle$$

Definizione 27: Linguaggi formali semi formali e informali

1. Linguaggi informali: \mathcal{L}_A è definito informalmente (linguaggio naturale)
2. Linguaggi semi-formali: \mathcal{L}_A è definita formalmente, ma non \mathcal{I}_A (db, ER, EER)
3. Linguaggi formali: \mathcal{L}_A e \mathcal{I}_A sono definiti formalmente (linguaggi logica)

2

Utilizzare modelli di mondo

Dato un modello di mondo possiamo utilizzarlo per chiedere domande ed avere risposte come segue:

Definizione 28: Ask, tell, answer

Dato un mondo in linguaggio \mathcal{L}_W

1. Tell *data and knowledge* tramite linguaggio \mathcal{L}_T
2. Ask *question* tramite linguaggio \mathcal{L}_Q
3. Answer a *question* tramite linguaggio \mathcal{L}_A

Solitamente \mathcal{L}_Q e \mathcal{L}_A sono uguali

Definizione 29: *Entailment*

Dato un'asserzione a e un modello M , si dice a entails M nel momento in cui $I(a) \in M$

$$M| =_{\mathcal{L}_A} a \quad \text{indica } I_A(a) \in M$$

$$M| =_{\mathcal{L}_A} \mathcal{T} \quad \text{indica } I_A(a) \in M \text{ for all } a \in \mathcal{T}$$

Definizione 30: *Model checking*

Fare il check di un modello significa verificare che $M| = \mathcal{T}$

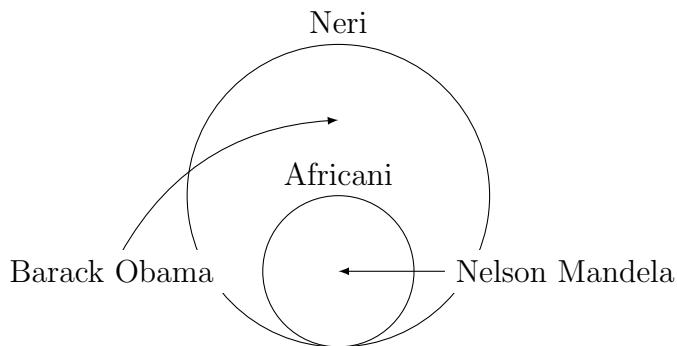
Definizione 31: *Satisfiability*

Verificare la satisfiability di \mathcal{T} significa verificare se esiste un M tale per cui $M| = \mathcal{T}$

Definizione 32: *Validità*

Verificare la validità di una teoria \mathcal{T} significa verificare se $M| = \mathcal{T} \quad \forall M$

In quest'ultimo caso, se prendo $M \{\}$



Non è vero che tutti i neri sono africani, ma è vero che tutti gli africani sono neri

3

Logica

Possiamo ragionare e trarre conclusioni tramite un nuovo concetto: l'entailment. Di base, un'asserzione a , è vera solo se trova un corrispettivo fatto in un dato modello, ossia $I_L(a) \in M$. Questo è detto entailment:

Definizione 33: *Entailment*

Data un'asserzione $a \in \mathcal{L}_a$ e un modello M , si dice che

$$M \models_{\mathcal{L}_a} a$$

se $I_{\mathcal{L}_a}(a) \in M$.

In modo simile, data una teoria $\mathcal{T} = \{a\}$, allora

$$M \models_{\mathcal{L}_a} \mathcal{T}$$

se $I_{\mathcal{L}_a}(a) \in M$ per ogni $a \in \mathcal{T}$

Di fatto se $M \models a$, significa che a è un'asserzione vera. Quindi dato un modello di mondo si può definirne una logica attorno tramite la relazione di entailment:

Definizione 34: *Logica del mondo*

La logica del mondo è data da:

$$L_W = \langle W, \models_{L_a} \rangle$$

Definizione 35: *Logica*

Data una logica del mondo $L_W = \langle W, \models_{L_a} \rangle$, si può costruire una logica ampliando il linguaggio L_a con nuove asserzioni complesse:

$$L_l = \langle W, \models_L \rangle$$

dove $L_a \in L$

L'idea è quindi quella di partire da un linguaggio semplice contentente sole asserzioni (L_A), aggiungere nuove informazioni (creo L , t.c. $L_a \in L$) e verifico correttezza informazioni tramite il ragionamento (\models_L)

Per formalizzare il meccanismo di ragionamento, si usano gli agenti:

Definizione 36: *Agente*

Data una logica $L_W \langle W, \models_{L_a} \rangle$, un agente è dato da

$$A_{L_L} = \langle L_L, \text{Tell}, \text{Ask} \rangle$$

Definizione 37: Tell

L'operatore tell è definito come segue:

1. TellW (A_L, w): adds a word and extends the interpretation function and the domain if needed
2. TellA (A_L, a): adds an *axiom*, decreasing the partiality of the given theory

Definizione 38: Ask

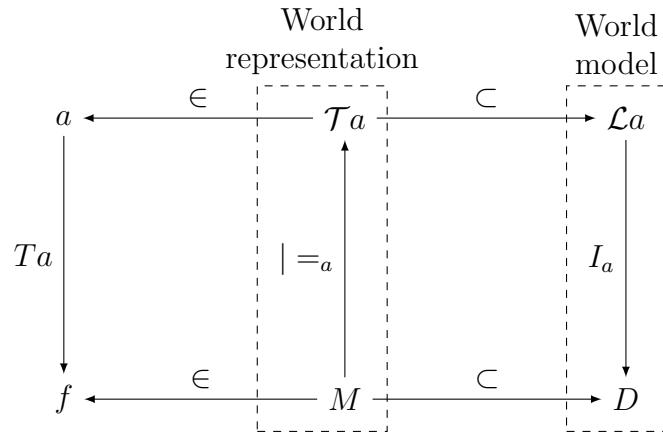
L'operatore ask è definito come segue:

1. AskC (A_L, T): *ask check*. Ritorna **true** se $T| = M$
2. AskS (A_L, T): *ask satisfiability* Ritorna **true** se T è soddisfabile, ossia esiste un M tale per cui $T| = M$

Definizione 39: Operatori logici

Gli operatori ask(3) e tell(3) possono essere scritti anche come segue:

1. $M? = T$ ossia $\text{AskC}(A, T)$ *teoria è corretta*
2. $D?? = T$ ossia $\text{AskS}(A, T)$ *teoria è soddisfabile*
3. $D! = A$ ossia $\text{TellL}(A, L)$ *amplia il linguaggio*
4. $M! = T$ ossia $\text{TellT}(A, T)$ *amplia la teoria con assiomi*



- I_a : interpretation function
- $| =_a$: world entailment
- $World\ model\ W = \langle \mathcal{L}a, D, I_a \rangle$
- $World\ representation\ R = \langle \mathcal{T}a, M \rangle$
- $World\ logic\ L_w = \langle W, | =_{La} \rangle$
- $Logic\ L_L = \langle W, | =_L \rangle$