

Logica computazionale

Marini Mattia

1^o semestre 3^o anno

Indice

1 Mondo e mente	2
1.1 Fatti e modelli	3
1.2 Dominio e linguaggio	4
1.3 Modelli di mondo	5
1.4 Definizioni intensionali	5
2 Utilizzare modelli di mondo	8
3 Logica	9

Definizioni

1 Fallacia	2
2 Rappresentazione mentale	2
3 Gap semantico	3
4 Consistenza e inconsistenza rappresentazioni	3
5 Fatto	3
6 Modello	3
7 Consistenza di un fatto	3
8 Asserzione	3
9 Teoria asserzionistica	4
10 Funzione di interpretazione di una teoria	4
11 Polisemia (polysemy)	4
12 Sinonimia (synonymity)	4
13 Dominio	4
14 Linguaggio asserzionistico	4
15 Correttezza e completezza linguaggio	5
16 Funzione di interpretazione di un linguaggio	5
17 Modello di mondo	5
18 Dominio, rappresentazione intensionale	6
19 Fatto, rappresentazione intensionale	6
20 Data domain, knowledge domain, mixed domain	7
21 Linguaggio, rappresentazione intensionale	7
22 Asserzione, rappresentazione intensionale	7
23 Data language, knowledge language, mixed language	7

24	Funzione di interpretazione, interpretazione intensionale	7
25	Data/knowledge/mixed interpretation function	8
26	Modello di mondo, interpretazione intensionale	8
27	Linguaggi formali semi formali e informali	8
28	Ask, tell, answer	8
29	Entailment	8
30	Model checking	9
31	Satisfiability	9
32	Validità	9
33	Entailment	9
34	Logica del mondo	10
35	Logica	10
36	Agente	10
37	Tell	10
38	Ask	10
39	Operatori logici	10

1 Mondo e mente

Definizione 1: *Fallacia*

Una fallacia è un ragionamento logico invalido. Si distinguono in:

1. Fallace formali: l'errore sta nella struttura logica del ragionamento in se (es. paradossi)
2. Fallace informali: errore "umano", non intrinseco al ragionamento (es. bias cognitivo, misconcezioni, over-generalizzazione, catastrofismo)

Definizione 2: *Rappresentazione mentale*

Parte della memoria di una persona che rappresenta il mondo giunto ad essa tramite i sensi

Può essere

1. Analogica: quanto ci giunge tramite i sensi
2. Linguistica: descrizione linguistica della rapp analogica

Rappresentazioni mentali, analogiche, linguistiche

Definizione 3: *Gap semantico*

Differenza fra il mondo effettivo e ciò che viene percepito di questo.

world \neq world mental representation

Definizione 4: *Consistenza e inconsistenza rappresentazioni*

Due rappresentazioni sono inconsistenti se è impossibile che rappresentino entrambe la stessa parte di mondo.

Es. una rappresenta una macchina gialla e l'altra la medesima macchina verde

Rappresentazione vs rappresentazione mentale

Una rappresentazione mentale sta nella mente, mentre una rappresentazione è un qualcosa di fisico e tangibile:

	Rapp. mentale	Rappresentazione
Analogica	ricordo paesaggio	dipinto paesaggio
Linguistica	manoscritto	flusso parole nella nostra testa

1.1 Fatti e modelli

Definizione 5: *Fatto*

Un fatto è qualcosa che accade a determinate *coordinate* spazio temporali

Definizione 6: *Modello*

Un *modello* è un insieme di fatti

$$M = \{f\}$$

Nota: Un fatto è una nozione primitiva e non può essere formalmente definita

Ad esempio i seguenti sono fatti:

1. Sofia è una persone
2. Sofia ha i capelli biondi
3. Odio i negri

Definizione 7: *Consistenza di un fatto*

Due fatti sono inconsistenti se non possono coesistere in un modello del mondo come lo percepiamo

Definizione 8: *Asserzione*

Un'asserzione a è una rappresentazione linguistica atomica di un fatto f .

Il modo più semplice è pensare ad un'asserzione come *una relazione fra un soggetto e un oggetto*

ad esempio, *Sofia è negra* è un'asserzione

Definizione 9: *Teoria asserzionistica*

Una teoria asserzionistica \mathcal{T}_A è un insieme di asserzioni

$$\mathcal{T}_A = \{a\}$$

Definizione 10: *Funzione di interpretazione di una teoria*

Una funzione di interpretazione è una funzione:

$$\mathcal{I}_A : \mathcal{T}_A \rightarrow M$$

che assegna ad un'asserzione a un fatto f :

$$\mathcal{I}_A(a) = f$$

Definizione 11: *Polisemia (polysemy)*

E' il fenomeno che crea ambiguità nei linguaggi naturali. Formalmente:

$$\mathcal{I}_A(a) = f_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_A(a) = f_2$$

Definizione 12: *Sinonimia (synonymity)*

E' il fenomeno per cui due parole hanno lo stesso significato. Formalmente:

$$\mathcal{I}_A(a_1) = f \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_A(a_2) = f$$

1.2 Dominio e linguaggio

Definizione 13: *Dominio*

Un dominio è un insieme di fatti:

$$F = \{f\}$$

Il modello è un sottoinsieme del dominio:

$$M \subseteq D$$

Definizione 14: *Linguaggio asserzionistico*

Un linguaggio asserzionistico è un insieme di asserzioni:

$$\mathcal{L}_A = \{a\}$$

La teoria è un sottoinsieme del linguaggio:

$$\mathcal{T}_A = \mathcal{L}_A$$

Definizione 15: *Correttezza e completezza linguaggio*

Un linguaggio \mathcal{L}_A è:

1. Completo se esiste un'asserzione per ogni elemento del dominio
2. Corretto se non esistono asserzioni per elementi fuori dal dominio

Definizione 16: *Funzione di interpretazione di un linguaggio*

Una funzione di interpretazione è una funzione:

$$\mathcal{I}_A : \mathcal{T}_A \rightarrow M$$

che assegna ad un'asserzione a un fatto f :

$$\mathcal{I}_A(a) = f$$

1.3 Modelli di mondo

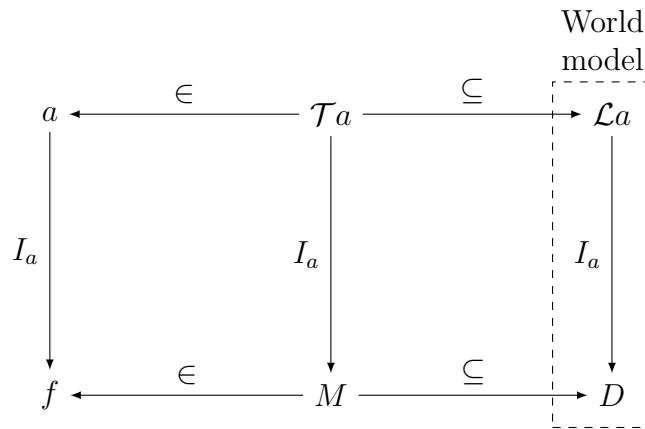
Definizione 17: *Modello di mondo*

La coppia

$$\mathcal{W} = \langle \mathcal{L}_A, D, \mathcal{I}_A \rangle$$

è detta modello di mondo

Uno schema riassuntivo è il seguente:



1.4 Definizioni intensionali

Per rappresentare un insieme posso utilizzare due metodi:

1. Rappresentazione estensionale: elenco il contenuto
2. Rappresentazione insensionale: genero insieme da un insieme primitivo

Per rappresentare il dominio di un modello di mondo, può essere utile utilizzare la versione intensionale

Definizione 18: *Dominio, rappresentazione intensionale*

Un dominio può essere rappresentato intensionalmente partendo da un set di:

1. Entità: tutti gli elementi distinguibili della rappresentazione
2. Classi: insiemi di entità simili per date caratteristiche
3. Relazioni: relazioni n-aria fra entità

$$D^i = \langle E, \{C\}, \{R\} \rangle$$

dove

$$\begin{aligned} E &= \{e\} \\ C &\in E \\ R &\in E \times \dots \times E \quad n \text{ volte} \end{aligned}$$

Da questa definizione possiamo definire un fatto in modo intensionale:

Definizione 19: *Fatto, rappresentazione intensionale*

Un fatto può esprimere una delle seguenti cose:

$$\begin{aligned} e &\in C \\ \langle e_1, \dots, e_n \rangle &\in R \\ C &\in E \\ R^n &\in C_1 \times \dots \times C_n \end{aligned}$$

Ad esempio, in ordine:

1. Sofia è una persona
2. Sofia, Marco e Giordano sono amici
3. Indica che C è una classe
4. Indica che una relazione va applicata ad un set di classi (i cani sono amici degli uomini)

Definizione 20: *Data domain, knowledge domain, mixed domain*

Una data domain è un dominio D che utilizza fatti di tipo 1,2.

Un knowledge domain contiene dati di tipo 3,4.

Un mixed domain contiene tutti i tipi di fatto. Vedi def 19

Definizione 21: *Linguaggio, rappresentazione intensionale*

Un linguaggio, può essere definito intensionalmente come:

$$\mathcal{L}_A^i = \langle \mathcal{E}, \{C\}, \{P\} \rangle$$

dove

$\{e\}$ = insieme di entità

$\{C\}$ = insieme di concetti, ossia nomi di classi

$\{P\}$ = insieme di proprietà, ossia nomi di relazioni

Definizione 22: *Asserzione, rappresentazione intensionale*

Un'asserzione a può esprimere una delle seguenti cose:

$C(e)$ e appartiene a C

$P^n(e_1, \dots, e_n)$ e_1, \dots, e_n sono coinvolte nella relazione P

C esiste classe C

$P^n(C_1, \dots, C_n)$ C_1, \dots, C_n sono legate dalla relazione P

Definizione 23: *Data language, knowledge language, mixed language*

Una data language è un linguaggio \mathcal{L}_A che utilizza solo asserzioni di tipo 1,2.

Un knowledge language contiene solo asserzioni di tipo 3,4.

Un mixed language contiene tutti i tipi di fatto. Vedi def 22

Definizione 24: *Funzione di interpretazione, interpretazione intensionale*

Una funzione di interpretazione $\mathcal{I}_A : \mathcal{L}_A \rightarrow D$ è così definita:

$$\mathcal{I}_A^i = \langle \mathcal{I}_e, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_P \rangle$$

con

$$\mathcal{I}_e : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$\mathcal{I}_C : \{C\} \rightarrow \{E\}$$

$$\mathcal{I}_P : \{P^n\} \rightarrow \{E\} \times \dots \times \{E\}$$

Definizione 25: *Data/knowledge/mixed interpretation function*

Una data interpretation function è una funzione di interpretazione che associa un data language ad un data domain.

Una knowledge interpretation function è una funzione di interpretazione che associa un knowledge language ad un knowledge domain.

Definizione 26: *Modello di mondo, interpretazione intensionale*

Un modello di mondo è intensionalmente definito come segue:

$$W = \langle \mathcal{L}_A, D^i, I_A \rangle$$

con

$$\mathcal{L}_A^i = \langle \mathcal{E}, \{C\}, \{P\} \rangle$$

$$\mathcal{D}^i = \langle E, \{C\}, \{R\} \rangle$$

$$\mathcal{I}_A^i = \langle I_e, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_P \rangle$$

Definizione 27: *Linguaggi formali semi formali e informali*

1. Linguaggi informali: \mathcal{L}_A è definito informalmente (linguaggio naturale)
2. Linguaggi semi-formali: \mathcal{L}_A è definita formalmente, ma non \mathcal{I}_A (db, ER, EER)
3. Linguaggi formali: \mathcal{L}_A e \mathcal{I}_A sono definiti formalmente (linguaggi logica)

2 Utilizzare modelli di mondo

Dato un modello di mondo possiamo utilizzarlo per chiedere domande ed avere risposte come segue:

Definizione 28: *Ask, tell, answer*

Dato un mondo in linguaggio \mathcal{L}_W

1. Tell *data and knowledge* tramite linguaggio \mathcal{L}_T
2. Ask *question* tramite linguaggio \mathcal{L}_Q
3. Answer a *question* tramite linguaggio \mathcal{L}_A

Soltanamente \mathcal{L}_Q e \mathcal{L}_A sono uguali

Definizione 29: *Entailment*

Dato un'asserzione a e un modello M , si dice a entails M nel momento in cui $I(a) \in M$

$$\begin{array}{ll} M \models_{\mathcal{L}_A} a & \text{indica } \mathcal{I}_A(a) \in M \\ M \models_{\mathcal{L}_A} \mathcal{T} & \text{indica } \mathcal{I}_A(a) \in M \text{ for all } a \in \mathcal{T} \end{array}$$

Definizione 30: *Model checking*

Fare il check di un modello significa verificare che $M \models \mathcal{T}$

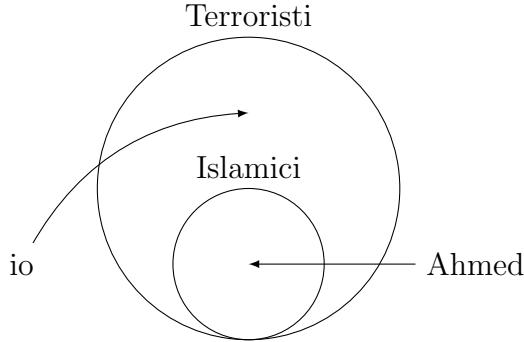
Definizione 31: Satisfiability

Verificare la satisfiability di \mathcal{T} significa verificare se esista un M tale per cui $M \models \mathcal{T}$

Definizione 32: Validità

Verificare la validità di una teoria \mathcal{T} significa verificare se $M \models \mathcal{T} \quad \forall M$

In quest'ultimo caso, se prendo $M \{ \}$



Non è vero che tutti i terroristi sono islamici, ma è vero che tutti gli islamici sono terroristi

3 Logica

Possiamo ragionare e trarre conclusioni tramite un nuovo concetto: l'entailment. Di base, un'asserzione a , è vera solo se trova un corrispettivo fatto in un dato modello, ossia $I_L(a) \in M$. Questo è detto entailment:

Definizione 33: Entailment

Data un'asserzione $a \in \mathcal{L}_a$ e un modello M , si dice che

$$M \models_{\mathcal{L}_a} a$$

se $I_{\mathcal{L}_a}(a) \in M$.

In modo simile, data una teoria $\mathcal{T} = \{a\}$, allora

$$M \models_{\mathcal{L}_a} \mathcal{T}$$

se $I_{\mathcal{L}_a}(a) \in M$ per ogni $a \in \mathcal{T}$

Di fatto se $M \models a$, significa che a è un'asserzione vera. Quindi dato un modello di mondo si può definirne una logica attorno alla relazione di entailment:

Definizione 34: Logica del mondo

La logica del mondo è data da:

$$L_W = \langle W, \models_{L_a} \rangle$$

Definizione 35: Logica

Data una logica del mondo $L_W = \langle W, | =_{L_a} \rangle$, si può costruire una logica ampliando il linguaggio L_a con nuove asserzioni complesse:

$$L_l = \langle W, | =_L \rangle$$

dove $L_a \in L$

L'idea è quindi quella di partire da un linguaggio semplice contentente sole asserzioni (L_A), aggiungere nuove informazioni (creo L , t.c. $L_a \in L$) e verifico correttezza informazioni tramite il ragionamento ($| =_L$)

Per formalizzare il meccanismo di ragionamento, si usano gli agenti:

Definizione 36: Agente

Data una logica $L_W \langle W, | =_{L_a} \rangle$, un agente è dato da

$$A_L = \langle L_L, \text{Tell}, \text{Ask} \rangle$$

Definizione 37: Tell

L'operatore tell è definito come segue:

1. TellW (A_L, w): adds a word and extends the interpretation function and the domain if needed
2. TellA (A_L, a): adds an *axiom*, decreasing the partiality of the given theory

Definizione 38: Ask

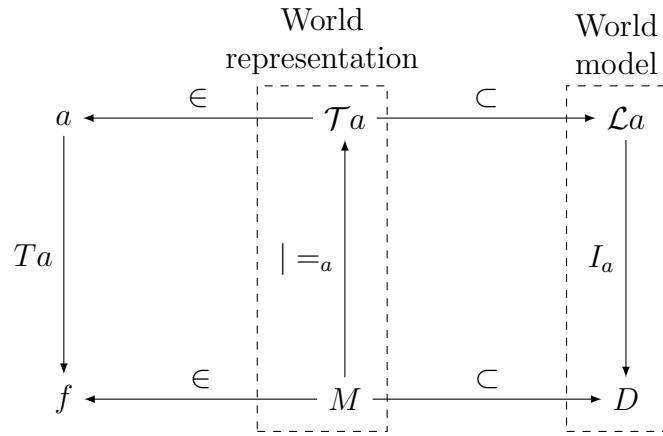
L'operatore ask è definito come segue:

1. AskC (A_L, T): *ask check*. Ritorna **true** se $T| = M$
2. AskS (A_L, T): *ask satisfiability* Ritorna **true** se T è soddisfacibile, ossia esiste un M tale per cui $T| = M$

Definizione 39: Operatori logici

Gli operatori ask(38) e tell(37) possono essere scritti anche come segue:

1. $M? = T$ ossia $\text{AskC}(A, T)$ teoria è corretta
2. $D?? = T$ ossia $\text{AskS}(A, T)$ teoria è soddisfacibile
3. $D! = A$ ossia $\text{TellL}(A, L)$ amplia il linguaggio
4. $M! = T$ ossia $\text{TellT}(A, T)$ amplia la teoria con assiomi



- I_a : interpretation function
- $| =_a$: world entailment
- $World\ model\ W = \langle \mathcal{L}a, D, I_a \rangle$
- $World\ representation\ R = \langle \mathcal{T}a, M \rangle$
- $World\ logic\ L_w = \langle W, | =_{La} \rangle$
- $Logic\ L_L = \langle W, | =_L \rangle$