Ripetizioni Emma

Marini Mattia

2023 2024 2025

Indice

Elenco delle tabelle

Definizioni

Teoremi e Assiomi

Esercizi

1 Prodotti notevoli

1.1 Proprietà potenze

$$a^n a^m = a^{n-m}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

1.2 Prodotti notevoli

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 + b^2 - ab\right)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

1.3 Domande interrogazione

1. Qual è l'utilizzo dei prodotti notevoli? E' indispensabile il loro utilizzo?
2. Dimostra come vengono derivate le formule dei prodotti notevoli enunciate in sezione 1.2
3. Dimostra come sia possibile passare dalla formula con il più alla formula con il meno in questi casi

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \rightarrow (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 + b^2 - ab\right) \rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$

   Come mai non esiste un prodotto notevole per la forma $a^2 + b^2$? Come mai non possiamo ricavare il prodotto notevole per questa forma partendo dalla forma con il meno $a^2 - b^2$?

2 Equazioni fratte

Nel momento in cui dobbiamo risolvere delle equazioni fratte è fondamentale avere delle tecniche per semplificare l'espressione. Per semplificare l'espressione bisogna riuscire a scrivere i polinomi come prodotto polinomi di grado inferiore:

$$\frac{x^2-x-2}{x+1}=\frac{(x-2)\,(x+1)}{x+1}$$

in questo caso, il membro a destra risulta molto più comodo di quello a sinistra in quanto è scritto come prodotto di polinomi, i quali possono essere semplificati:

$$\frac{(x-2)\,(x+1)}{x+1}=x-2$$

lo scopo delle prossime pagine sarà quello di trovare tecniche per scomporre i polinomi, permettendo quindi di semplificare le fratte

2.1 Raccoglimento totale

Questo metodo si basa sulla proprietà distributiva "applicata al contrario":

$$A\cdot B+A\cdot C=A\,(B+C)$$

Lo stesso ragionamento può essere fatto con i polinomi:

$$2xa+2xb=2x\,(a+b)$$

oppure

$$4x^3+2x^2=2x^2\cdot 2x+2x^2=2x^2\,(2x+1)$$

Idea del raccoglimento totale:

- Cerco il fattore comune (ossia il monomio che divide tutti gli altri) che abbia esponente maggiore
- Moltiplico il fattor comune per gli tutti i membri divisi a loro volta per il fattor comune stesso

2.2 Raccoglimento parziale

Quando un polinomio è composto dalla somma di 4 monomi si può applicare il raccoglimento totale a due a due, per poi raccogliere ancora una volta:

$$\underbrace{3ax+3bx}_{\text{raccolgo}}+\underbrace{ay+by}_{\text{raccolgo}}=\underbrace{3x\,(a+b)+y\,(a+b)}_{\text{raccolgo}}=(a+b)\,(3x+y)$$

La sfida qui sta nel cercare la combinazione che mi permetta di raccogliere una seconda volta. Un consiglio può essere quello di raccogliere i membri il cui rapporto fra i coefficienti sia lo stesso

2.3 Trinomio speciale

Quando abbiamo un polinomio di secondo grado, possiamo a volte scomporlo tramite questo "algoritmo". Dato $P\,(x)$

$$ax^2+bx+c$$

- Cerco due numeri interi x_1 e x_2 che sommati diano b e moltiplicati $a \cdot c$
- In questo caso a e b esistono e sono 2 e -3
- Se $a = 0$ allora posso riescrivere il polinomio direttamente come

$$(x + x_1)(x + x_2)$$

- Altrimenti rischiviamo il polinomio rimpiazzando il il termine di primo grado con $(x_1 + x_2)\, x$ ed effettuiamo raccoglimento parziale, il quale è garantito che riesca

Ad esempio con

$$x^2 - x - 6$$

i due numeri candidati sono 2 e -3: Allora possiamo riscrivere il polinomio come:

$$(x + 2)(x - 3)$$

2.4 Formula risolutiva eq secondo grado

Se non si riesce a scomporre un polinomio con il metodo appena enunciato, è possibile utilizzare la seguente formula. Dato un polinomio $ax^2 + bx + c$, troviamo gli zeri:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

otteniamo quindi due numeri x_1 e x_2(uno utilizzando il $+$ e uno utilizzando il - nella formula sopra). Scriviamo ora il polinomio come

$$a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

2.5 Prodotti notevoli

Utilizzando "al contrario" i prodotti notevoli elencati in sezione 1.2, possiamo scrivere un polinomio come prodotto

3 Disequazioni

La differenza nella risoluzione di un'equazione e di una disequazione sta principalmente nell'ultimo step e nel fatto che bisogna stare attenti a dividere/moltiplicare per quantità negative.

3.1 Disequazioni letterali di primo grado

Voglio arrivare ad una forma di questo tipo:

$$Ax < B$$

Il metodo generale per risolvere una disequazione non fratta è il seguente:

- Svolgo calcoli a destra e a sinistra del $<$ o $>$

- Porto alla sinistra tutto ciò che contenga l'incognita (es $2x, ax, ab(x)$) e a destra tutto ciò che non la contiene (es $13, a, ab$)
- Raccolgo la x a sinistra e studio il parametro se presente. Avrò una forma di questo tipo:

  $$Ax < B$$

  Al posto di $<$ chiaramente ci possono essere $> \leq \geq$

  - Verifico cosa succede quando $A = 0$
  - Verifico cosa succede quando $A > 0$ La soluzione è $x < \frac{B}{A}$
  - Verifico cosa succede quando $A < 0$. La soluzione è $x > \frac{B}{A}$, ossia inverto l'uguaglianza

Per studiare il segno di A è necessario spesso usare le tabelle

3.2 Disequazioni letterali fratte

Voglio arrivare ad una forma di questo tipo:

$$\frac{A}{B} < 0$$

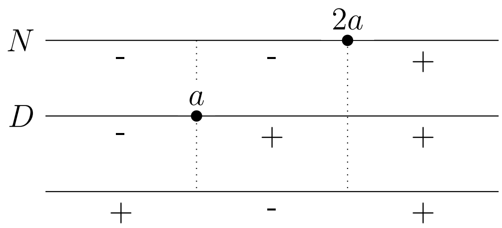
dove A e B sono polinomi

- Svolgo i calcoli e porto tutto a sinistra
- Studio il segno del numeratore
- Studio il segno del denominatore
- Nell'uso delle tabelle per lo studio del segno studio anche il segno del parametro

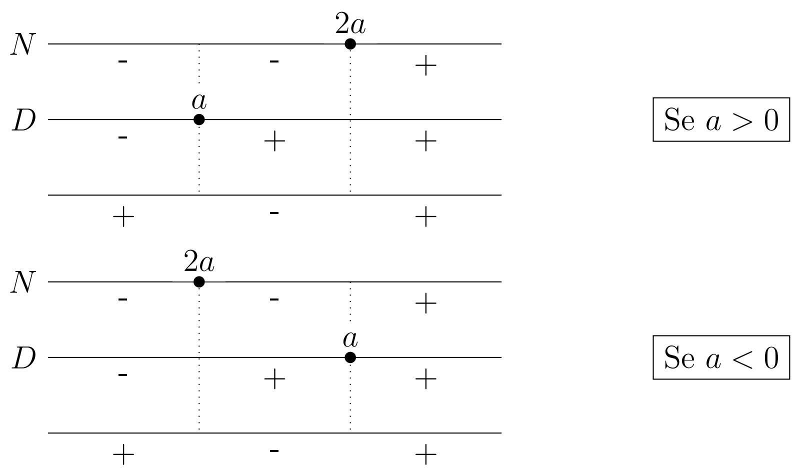
L'ultimo punto è la cosa che crea più confusione. Supponiamo di avere

$$\frac{x - 2a}{x - a} > 0$$

Verrebbe automatico studiare il segno come segue:



tuttavia chi ci dice che a vada "a sinistra" di $2a$? Questo infatti non è necessariamente vero, infatti se $a < 0$ allora $2a < a$. Per questo dobbiamo contemplare entrambe le opzioni:



4 Grandezze fisiche e unità di misura

Definizione 1: *Grandezze fisiche*

Le grandezze fisiche sono le prorprietà di un oggetto o di un fenomeno che si possono misurare

Occhio che non tutte le caratteristiche di un oggetto sono grandezze fisiche, in quanto alcune non possono essere misurate (es. bellezza, originalità)

Definizione 2: *Unità di misura*

L'unità di misura di una grandezza fisica è un campione, scelto di comune accordo in modo che sia riproducibile e invariabile con cui di confrontano tutte le grandezze di quel tipo

Il confrondo si effettua dicendo quante volte l'unità di misura è contenuta in un'altra. (matematicamente si effettua un rapporto). Nota che potrei anche dire che un tavolo è lungo *"3 spanne"*, però questo sarebbe impreciso perchè non tutte le spanne sono uguali. Per questo l'unità scelta deve essere invariabile

nota infine che

- Una caratteristica delle grandezze fisiche è che si possono sommare
- Ha senso sommare grandezze fisichè dello stesso tipo

Definizione 3: *Grandezza omogenee*

Due grandezze si dicono omogenee se sono dello stesso tipo (ad es due lunghezze. al contrario, volume e temperatura non lo sono).

Prefissi per i multipli		
Nome	Simbolo	Valore
tera	T	$1000000000000 = 10^{12}$
giga	G	$1000000000 = 10^{9}$
mega	M	$1000000 = 10^{6}$
kilo	k	$1000 = 10^{3}$
etto	h	$100 = 10^{2}$
deca	da	$10 = 10^{1}$

Prefissi per i sottomultipli		
Nome	Simbolo	Valore
deci	d	$1/10 = 10^{-1}$
centi	c	$1/100 = 10^{-2}$
milli	m	$1/1000 = 10^{-3}$
micro	μ	$1/1000000 = 10^{-6}$
nano	n	$1/1000000000 = 10^{-9}$
pico	p	$1/1000000000000 = 10^{-12}$

Tabella 2: Prefissi SI

4.1 Il sistema internazionale

Per far sì che quando si parla di misure non vi sia anbiguità è stato istituito il Sistema Internazionale di Unità (SI) che fornisce 7 grandezze fondamentali, elencate qui sotto

Grandezza	Unità di misura	
	Nome	Simbolo
lunghezza	metro	m
massa	kilogrammo	kg
intervallo di tempo	secondo	s
temperatura	kelvin	K
intensità di corrente elettrica	ampere	A
intensità luminosa	candela	cd
quantità di sostanza	mole	mol

Tabella 1: 7 grandezze fondamentali SI

Quando una grandezza fisica è molto grande o molto piccola, è scomodo misurarla con le grandezze elencate sopra. Ad esempio, si potrebbe dire che un capello è spesso 0,000050 metri, ma risulterebbe scomodo, per questo si dice che è spesso 50 micrometri. Nel SI sono presenti 20 prefissi, di seguito quelli più utilizzati

4.2 Grandezze derivate

Alcune grandezze fisiche non sono esprimibili direttamente tramite le unità di misura del SI, ma possono essere derivate. Ad esempio, l'area può essere espressa come m^2

Definizione 4: *Unità di misura derivate*

Le unità di misura derivate si ottengono combinando quelle fondamentali con operazioni di moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza

Esempi:

- Volume : lunghezza · lunghezza · lunghezza $\rightarrow m \cdot m \cdot m = m^3$
- Velocità : $\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \rightarrow m/s$
- Densità: $\frac{\text{massa}}{\text{volume}} \rightarrow \frac{m}{l}$

nota che tutte le formule devono essere dimensionalmente corrette ossia

- Posso confronate solo grandezze con la stessa unità di misura
- Posso aggiungere o sottrarre solo grandezze con la stessa unità di misura
- I numeri adimensionali possono essere confrontati e sommati/sottratti solo con numeri adimensionali

4.3 La notazione scientifica

Spesso viene comodo "uniformare" il modo in cui si scrive un numero utilizzando la notalizione scientifica.

Definizione 5: *Notazione scientifica*

Un numero viene detto in notazione scientifica se è scritto nella seguente forma:

$$a \cdot 10^n$$

dove $\leq 1a < 10$, ossia c'è solo una cifra davanti alla virgola

$1,42341 \cdot 10^4$ e $1,2$ sono in notazione scienfitica, mentre $52.3 \cdot 10^3$ e $0.12 \cdot 10^2$ non lo sono

Definizione 6: *Ordine di grandezza*

La potenza di 10 che moltiplica un numero scritto in notazione scientifica è detto il suo ordine di grandezza

4.4 Misure di diversi tipi

Definizione 7: *Portata e risoluzione*

- Portata: il valore più grande che lo strumento può misurare
- Risoluzione: la più piccola variazione di grandezza che lo strumento può misurare. Su strumenti digitali è di solto l'ultima cifra sul display, su quelli analogici la distanza fra le "tacche"

Definizione 8: *Misure dirette ed indirette*

Una misura si dice indiretta nel momento in cui il valore della grandezza viene calcolato tramite una formula. Quando il valore viene ricavato direttamente dallo sturmento di misura si dice invece diretta

Ad esempio, per calcolare l'area di un tavolo possiamo calcolarla in modo indiretto misurando i lati e moltiplicando i valori.

4.4.1 Area

- Calcolo diretto: prendo dei "quadratini" e conto quanti ne servono per ricoprire la superficie in questione
- Calcolo indiretto: utilizzo formule, ad esempio:
  - Quadrato: $A = l \cdot l$
  - Trapezio: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
  - Rettangolo: $A = b \cdot h$
  - Cerchio: $A = \pi r^2$
  - Triangolo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$ i

4.4.2 Volume

- Calcolo diretto:
  - Per liquidi vi sono recipienti graduati
  - Per solidi basta inserirlo in un liquido e calcolare la differenza del volume dopo e prima dell'immersione
- Calcolo indiretto: utilizzando formule, ad esempio:
  - Cubo: $V = l \cdot l \cdot l$
  - Cilindro: $V = \pi r^2 \cdot h$
  - Parallelepipedo: $a \cdot b \cdot h$
  - Sfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

4.4.3 Area

- Calcolo diretto:
- Calcolo indiretto

4.4.4 Tempo

La unità del SI del tempo è il secondo. Nota però si usano spessissimo anche altre unità che non sono accettate ufficialmente, ossia minuti ore giorni e anni. Nota che un anno è fatto di 365.25 giorni!!

4.4.5 Densità

Misura quanto un oggetto peso a parità di volume. Ad esempio il fetto pesa di più del legno, quindi si dice che è più denso. Occhio a non confondere densità con viscosità nei fluidi: l'olio è meno denso dell'acqua, in quanto lo stesso volume pesa di meno!

4.5 Conversioni di untià di misura

Per convertire fra diverse unità di misura possiamo utilizzare il seguente algoritmo. Ad esempio vogliamo convertire $10\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ in $\frac{\text{hg}}{\text{cm}^2}$

- Prendere ad una ad una le unità di misura e mettere al loro posto quante volte ci sta l'unità di misura nella quale vogliamo convertire:

$$10\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 10\frac{10\text{hg}}{(100\text{ cm })^2}$$

  in questo caso $1\text{kg} = 10\text{hg}$ e $1\text{m} = 100\text{cm}$

- Eseguire i conti

$$10\frac{10\text{hg}}{(100\text{ cm })^2} = 10\frac{10\text{hg}}{10000\text{ cm }^2} = \frac{1}{100}\frac{\text{hg}}{\text{cm}^2}$$

4.6 Incertezza di misura

Concetto chiave: tutte le misure che si effettuano non sono mai essatte, ma costituiscono una approssimazione

Definizione 9: *Errore sidstematico e accidentale*

- Errore sistematico: errore che influisce nello stesso modo in tuttte lemisurazioni, producendo dati sempre più grandi o più piccoli della misura effettiva.
- Errore accidentale: errore "fortuito" che può produrre un dato più grande o più piccolo

Un errore sistematico può essere quello dovuto ad una bilancia tarata male, mentre uno accidentale può essere un errore umano nella lettura di un valore

Definizione 10: *Incertezza assoluta*

Indica di quanto può "sballare" una misura.

100 ± 0.5 vuol dire che il valore della misura dovrebbe essere compreso nel range $[100 - 0.5, 100 + 0.5]$

Definizione 11: *Incertezza relativa*

Indica quanto è precisa una misura. L'incertezza relativa è data da

$$\text{incertezza relativa} = \delta_{\text{rel}} x = \frac{\text{incertezza assoluta}}{\text{valore medio}} = \frac{\delta_x}{\overline{x}}$$

Definizione 12: *Semidispersione*

Indica di quanto possono sballare i dati intorno ad il valore medio. E' il metodo più comune per ricavare l'errore assoluto quando si fanno misure ripetute. Si calcola nel seguente modo:

$$\text{semidispersione} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Definizione 13: *Cifre significative*

Il concetto di cifre significative è strettamente legato al concetto di precisione di uno strumento di misura. Il particolare, dal punto di vista intuitivo, dato un numero che rappresenta una misura, il numero di cifre significative è <u>il numero di cifre che hanno importanza ai fini della misura</u>. In particolare

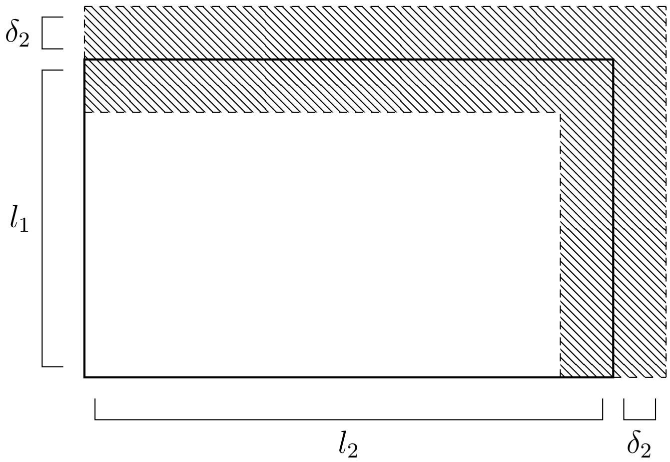
- Gli zeri a inizio del numero <u>non</u> sono significativi
  - 0.013 ha 2 cifre significative
- Gli zeri a meta e a fine del numero dopo la virgola sono significativi
  - 10.10 ha 4 cifre significative
- Gli zeri a fine numero <u>prima della virgola</u> possono esserlo come no: non abbiamo modo per saperlo
  - 1400 può avere 2,3 o 4 cifre significative

Quando si fanno operazioni con numero soggetti ad incertezza bisogna stare attenti in quanto l'errore viene <u>propagato</u>

Definizione 14: *Operazioni con incertezza*

- Addizione o sottrazione: l'incertezza assoluta del risultato è la somma delle incertezze dei numeri sommati/sottratti
  - $10.0 \pm 0.3 + 5.0 \pm 0.2 = 15.0 \pm 0.5$
- Moltiplicazione e divisione: l'incertezza relativa è data dalla somma delle incertezze relative dei numeri sommati
- Potenza: l'incertezza relativa è data prodotto fra l'esponente e l'incertezza relativa del numero elevato
- Moltiplicazione per costante: l'incertezza assoluta è data dalla moltiplicazione fra l'incertezza assoluta del dato moltiplicato e la costante, mentre quella relativa rimane invariata

Soffermandoci sul caso della moltiplicazione, possiamo convincercene come segue



L'area ▨ è il doppio dell'errore assoluto sulla misura del rettangolo.

$$\begin{aligned}
\delta_{rel} A = \frac{\text{Area } ▨}{2 l_1 l_2} &= (l_1 + \delta_1)(l_2 + \delta_2) - (l_1 - \delta_1)(l_2 - \delta_2) \\
&= \frac{2 l_1 \delta_1 + 2 l_2 \delta_2}{2 l_1 l_2} = \frac{\delta_1}{l_1} + \frac{\delta_2}{l_2} \\
&= \delta_{\text{rel}} l_2 + \delta_{\text{rel}} l_1
\end{aligned}$$

Nota bene: tutti questi calcoli sull'incertezza sono troppo laboriosi per i problemi. Per questo quando si calcola un risultato di un problema si esprime con tante cifre significative quante il dato iniziale che ne ha meno

5 Relazioni tra grandezze fisiche

Uno degli obiettivi della fisica è cercare relazioni tra grandezze, ossia formule che, calcolate su dati che inserisco io, mi permettano di ottenere altri dati. Ad esempio, la formula $A = l^2$ mi permette di calcolare l'area di un quadrato inserendo l'area all'interno di essa

Definizione 15: *Variabili dipendenti e indipendenti*

Una variabile indipendente è una variabile in una formula che è "inserita" dallo sperimentatore (es l).

Una variabile dipendente è una variabile il cui valore dipende da una o più variabili indipendenti (es A).

Vi sono diversi modi secondo cui una variabile può dipendere da un'altra:

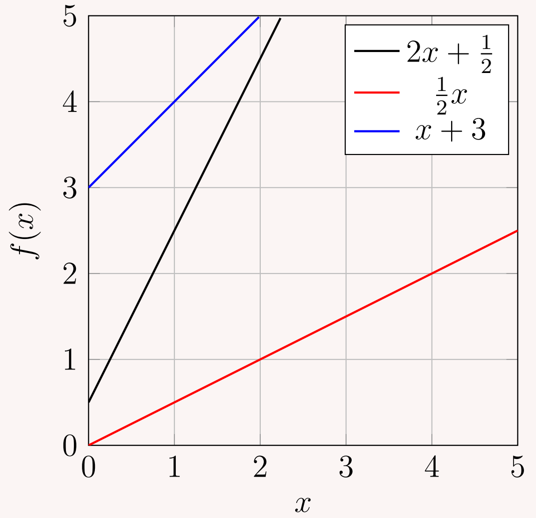
5.1 Tipi di relazioni

Definizione 16: *Relazione lineare*

Due grandezze sono in relazione lineare quando sono legate da un'equazione del tipo:

$$y = kx + q$$

dove q e k sono costanti



- q è l'altezza del punto in cui la retta interseca l'asse y
- k determina quanto la retta è "ripida"

Ad esempio, vi è una relazione lineare fra il volume contenuto in una caraffa e il suo peso (all'aumentare del volume aumenta il peso linearmente)

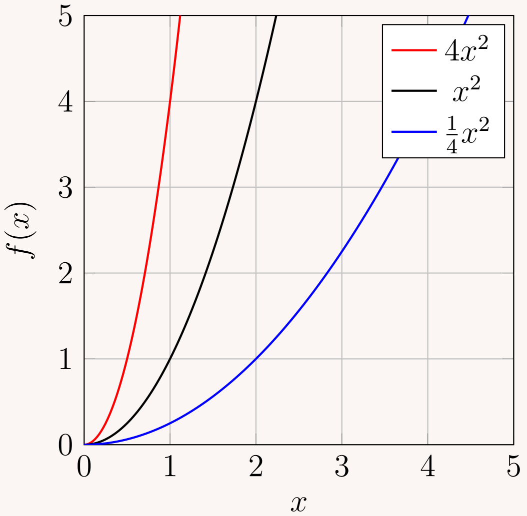
Se due variabili sono in realzione lineare e la loro equazione ha $q = 0$ allora si dice che fra queste vige una proporzionalità diretta

Definizione 17: *Proporzionalità quadratica diretta*

Due grandezze sono in relazione quadratica diretta quando sono legate da un'equazione del tipo:

$$y = k \cdot x^2$$

dove k è una costante



- k determina quanto la curva "si alza velocemente"

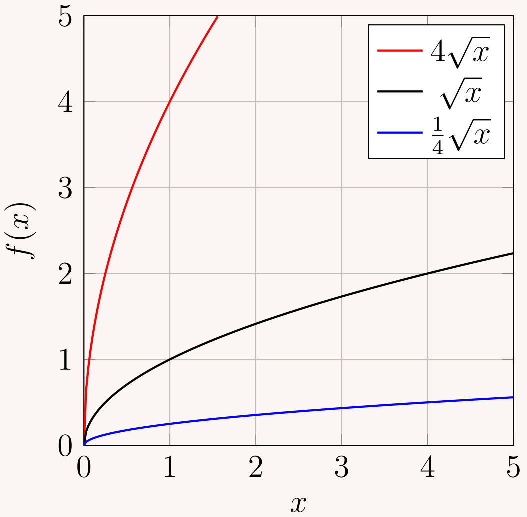
Ad esempio, vi è una relazione di proporzionalità quadratica diretta fra il lato di un quadrato e la sua area: $A = l^2$

Definizione 18: *Proporzionalità radicale diretta*

Due grandezze sono in relazione di proporzionalità radicale diretta quando sono legate da un'equazione del tipo:

$$y = k\sqrt{x}$$

dove k è una costante



- k determina quanto la curva "si alza velocemente"

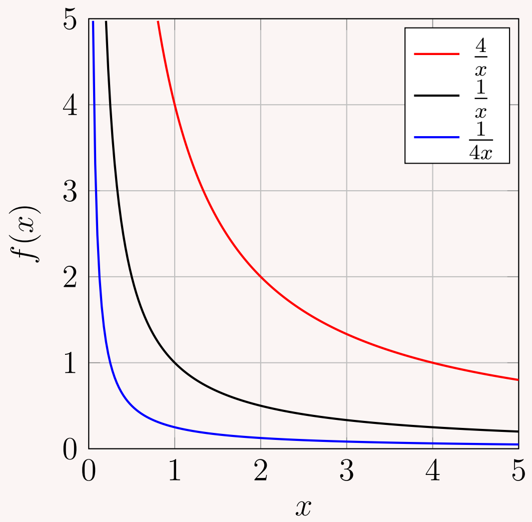
Ad esempio, vi è una relazione di proprorzionalità radicale fra area di un quadrato e lato: $l = \sqrt{A}$

Definizione 19: *Proporzionalità inversa*

Due grandezze sono in relazione di proporzionalità inversa quando sono legate da un'equazione del tipo:

$$y = \frac{k}{x}$$

dove k è una costante



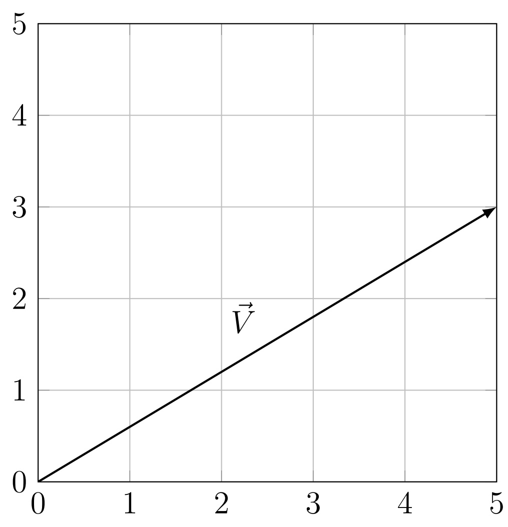
- k determina quanto la curva "si schiaccia" contro l'origine

Un esempio può essere il tempo necessario ad un veicolo per percorrere una determinata distanza: $t = \frac{d}{v}$

- Cosa succede quanto mi avvicino a 0 sull'asse x?
- Cosa succede invece quando sull'asse x vado verso valori molto grandi?

6 Vettori

Per rappresentare una forza i numeri non bastano in quanto dobbiamo avere modo di rappresentarne anche direzione e verso. Per questo scopo esistono i vettori.

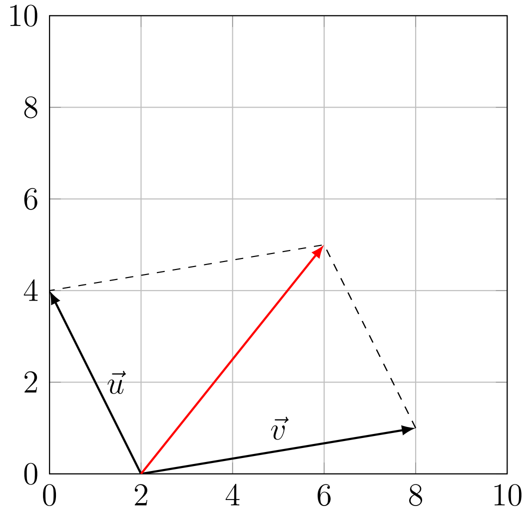


6.1 Operazioni

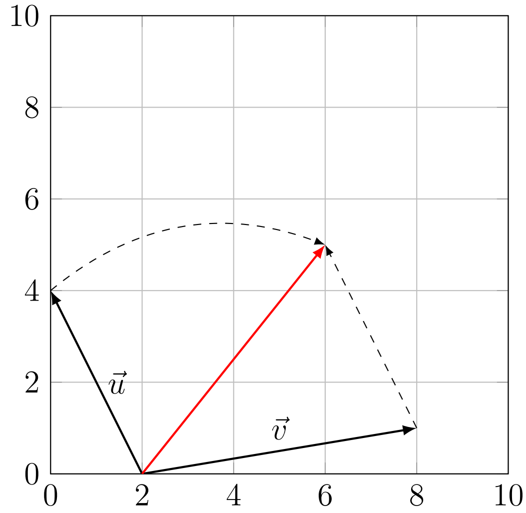
6.1.1 Addizione

Se i vettori hanno la stessa direzione, il vettore risultante sarà un vettore con stessa direzione e modulo uguale alla somma dei moduli.

Metodo del parallelogramma



Metodo del punta coda



Somma per via grfica:

- Parallelogramma: posiziona i due vettori in maniera tale che i punti di applicazione coincidano ("culo a culo"), completa il parallelogramma e traccia la diagonale. La diagonale è il vettore risultante
- Punta coda: posiziona i due vettori in maniera tale che una delle due punte coincidano con una delle due teste e unisci le due estremità

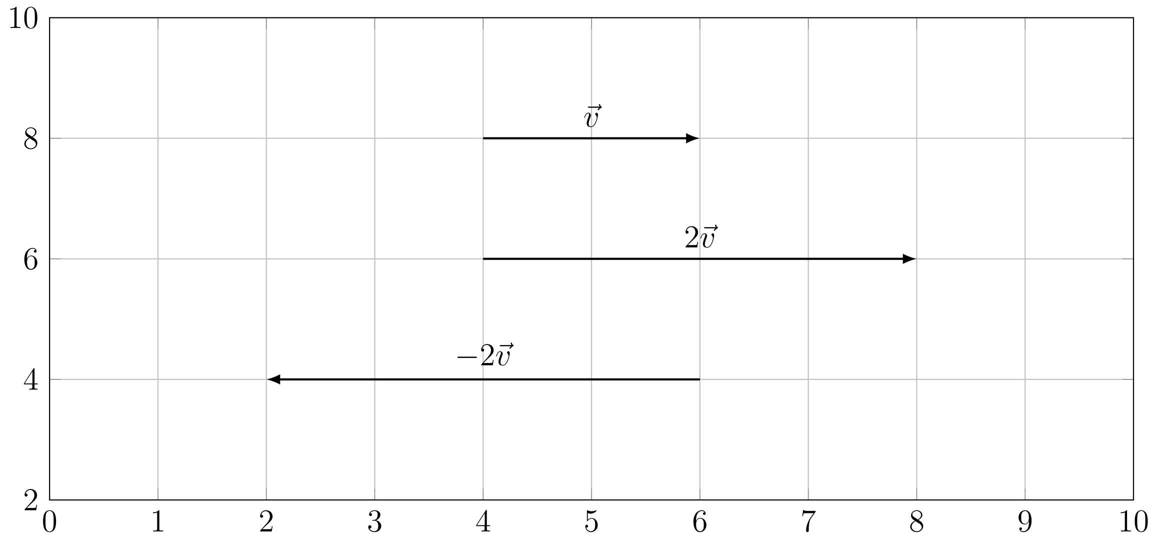
Somma per via algebrica:

- Scomporre il vettore in componenti lungo un sistema di riferimento cartesiano come indicato in sezione 6.2
- Addizionare le componenti ottenute su asse y e x
- Sui due vettori ottenuti sommando le componenti, usare il teorema di pitagora per ottenere il modulo la trigonometria per ottenere direzione e verso del risultato

6.1.2 Moltiplicazione per scalare

La moltiplicazione per scalare $k\vec{v}$ (per un numero), da come risultato un vettore che ha:

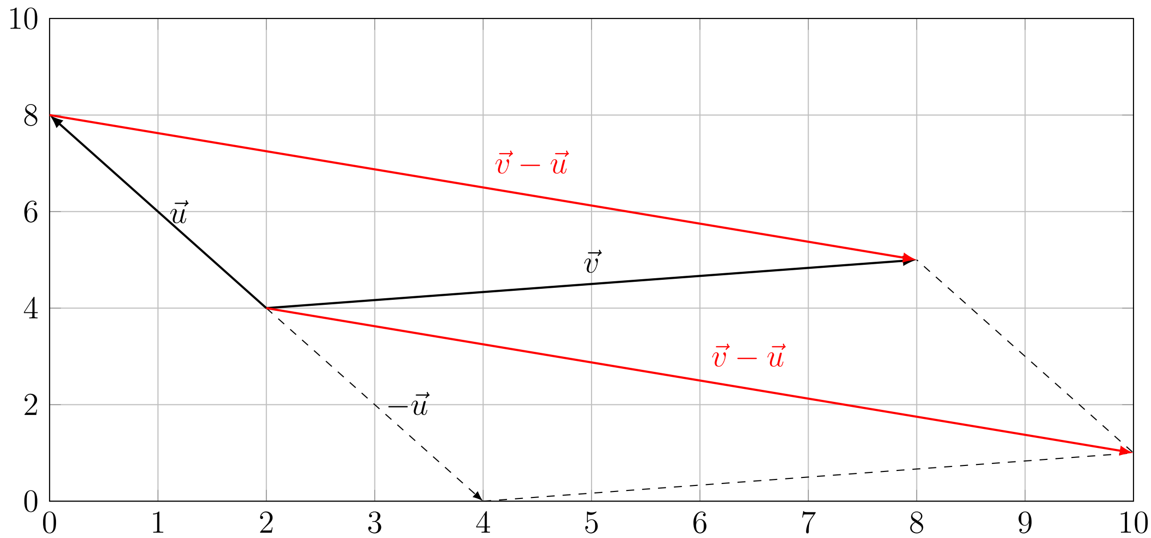
- Direzione uguale a $\vec{v}$
- Modulo uguale a $k \cdot |\vec{v}|$
- Verso uguale a $\vec{v}$ se k è positivo, invertito altrimenti



6.1.3 Sottrazione

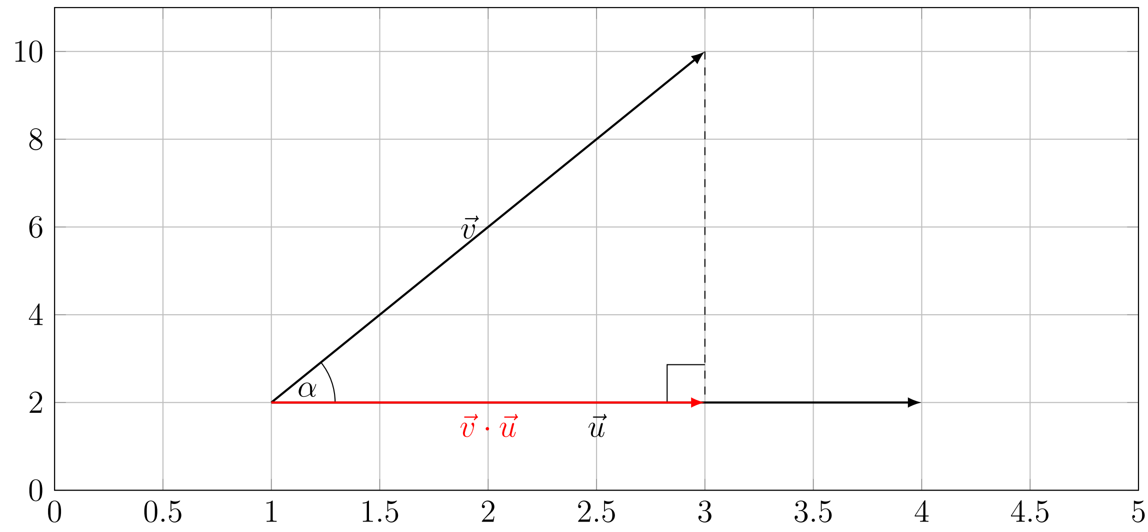
Per effettuare la sottrazione si può applicare l'addizione sul secondo vettore moltiplicato per lo scalare -1 ($\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$). Questo, graficamente, coincide con :

- Mettere i vettori in maniera tale che i punti di applicazione coincidano
- Congiungere l'estremità del vettore sottrato con quello dal quale lo stiamo sottraendo



6.1.4 Prodotto scalare

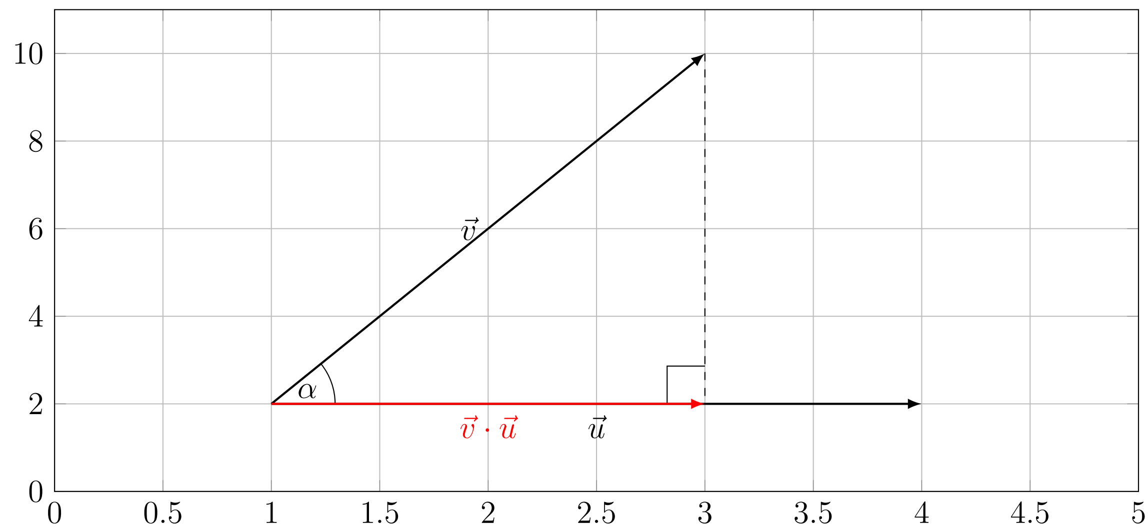
Si indica con il pallino $\cdot$ da come risultato uno scalare (un numero) uguale a $|\vec{v}|\,|\vec{u}|\cos(\alpha)$ dove α è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$



6.1.5 Prodotto vettoriale

Si indica con la croce $\times$ e da come risultato <u>un vettore</u> che abbia

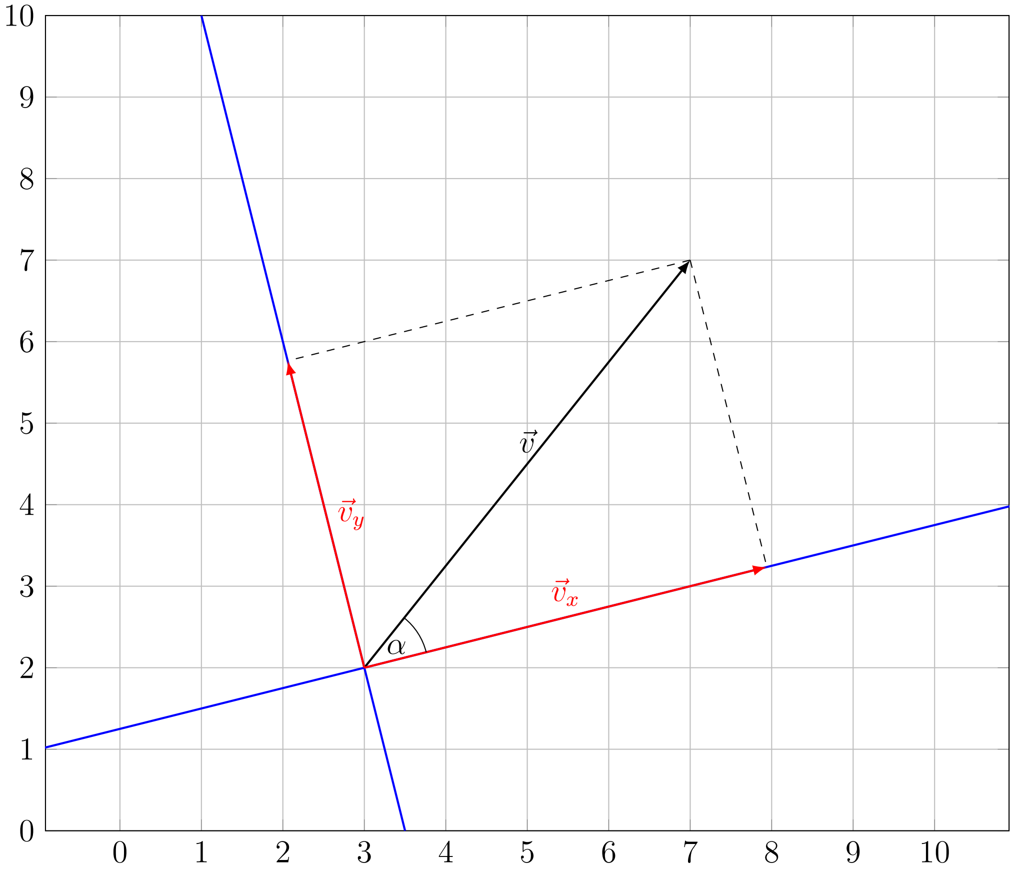
- Direzione perpendicolare al piano che contiene $\vec{v}$ e $\vec{u}$
- Modulo uguale a $|\vec{v}|\,|\vec{u}|\sin{(\alpha)}$ dove α è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$
- Direzione data dalla regola della mano destra:
  - Dato $\vec{v} \times \vec{u}$, posizionare pollice sul primo vettore
  - Posizionare l'indice sul secondo
  - La direzione del palmo costituisce da direzione del vettore risultante



6.2 Scomposizione

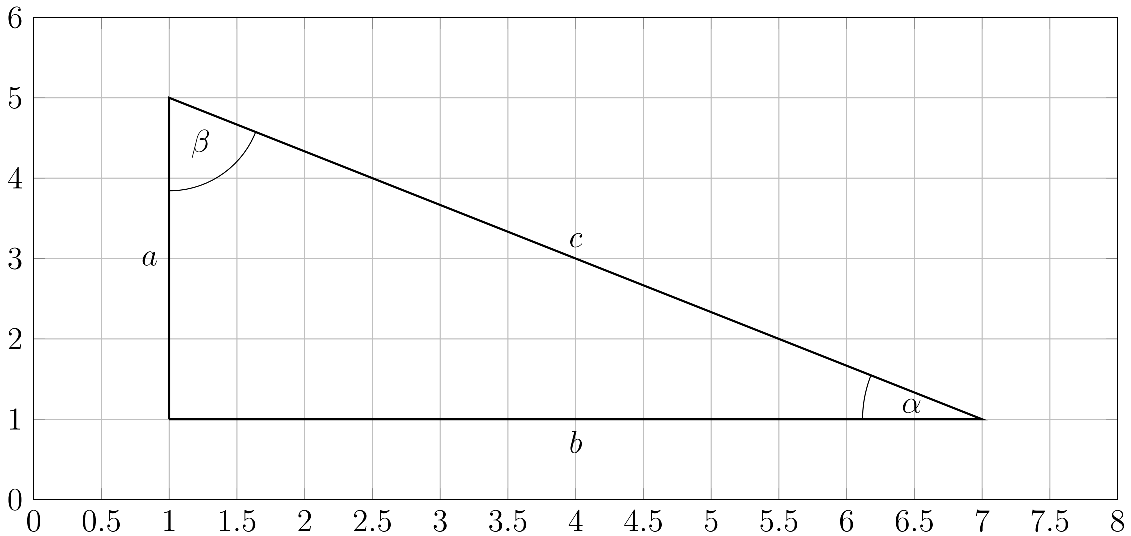
Scomporre un vettori lungo assi di un sistema di riferimento cartesiano risulta cruciale nella risoluzione di problemi di statica. Un sistema di riferimento cartesiano non è altro che due assi perpendicolari fra di loro.

L'idea della scomposizione di un vettore è trovare due vettori lungo gli assi che sommati diano il vettore di partenza:



6.3 Trigonometria

Per scomporre un vettore sono necessarie alcune nozione sugli angoli rettangoli:



- Ipotenusa $\Leftrightarrow$ cateto

$$\text{cateto} = \text{ipotenusa} \cdot \text{seno angolo opposto a cateto che voglio calcolare} \quad \text{cateto} = \text{ipotenusa}$$

nel nostro caso abbiamo che:

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$
$$b = c \cdot \cos\alpha = c \cdot \sin\beta$$

- Cateto $\Leftrightarrow$ cateto

$$\text{cateto 1} \;=\; \text{cateto 2} \; * \tan \; \text{angolo adiacente a cateto 2}$$

nel nostro caso:

$$a = b \tan\alpha$$
$$b = a \tan\beta$$

- Cateti $\Rightarrow$ ipotenusa: si usa il teorema di Pitagora

$$(\text{ipotenusa})^{\,2} = \;(\text{cateto 1})^2 + \;(\text{cateto 2})^{\,2}$$
$$(\text{ipotenusa}) \;= \sqrt{\;(\text{cateto 1})^2 + \;(\text{cateto 2})^{\,2}}$$

nel nostro caso

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

7 Statica

La statica si occupa dello studio di fenomeni per l'appunto statici. L'idea è di prendere un sistema di nostra interesse, "scattare una fotografia" e studiare le forze che agiscono su di esso.

7.1 Forze

Vediamo ora le pricipali forze

7.1.1 Forza peso

E' la forza provocata dalla gravità. Va fatta la distinzione fra peso e massa :

- Massa: è una proprietà instrinseca di un oggetto, in un certo senso decreta la quantità di materia che possiede, non dipende dal "pianeta". Si misura in kg

- Peso: è la forza che un oggetto dotato di massa subisce quando è in un campo gravitazionale. Dipende dal pianeta e si misura in N

Quando si parla di forze bisogna sempre convertire i kg in N. Per farlo basta la seguente formula:

$$\text{peso} \;=\; \text{massa} \;\cdot\; \text{costante gravitazionale } (g)$$

se siamo sulla terra, la *costante gravitazionale* vale 9.81. Es

$$5\,[\text{ kg }] = 5\,[\text{ kg }] \cdot 9.81 \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}}\right] \approx 49\,[\text{ N }]$$

7.1.2 Forza elastica

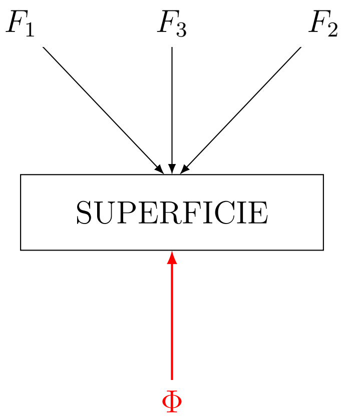
E' la forza esercitata da un oggetto che spostato dalla sua posizione di riposo, vuole tornarci. Tendenzialmente, si parla di molle. La forza esercitata da una molla è data dalla legge di hooke:

$$F_e = k \cdot \Delta x$$

dove k è la costate di Hooke, che indica "quanto la molla è dura" e Δx è l'allungamento della molla rispetto alla posizione di riposo

7.1.3 Reazione vincolare

Immaginiamo di appoggiare un libro su un tavolo. Il libro non "sprofonda" nel tavolo in quanto il tavolo esercita su di esso una forza uguale e contraria. Tale forza è detta reazione vincolare. Questa forza è uguale alla componente parallela di tutte le forze che vengono esercitate su di una superficie:



7.1.4 Forza d'attrito

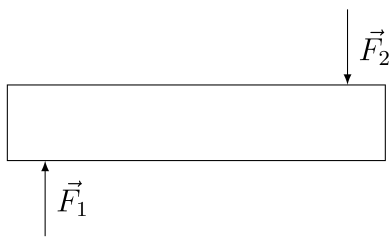
La forza d'attrito è data dalla scabrosità di un materiale.

$$F_s = \mu_s \cdot \Phi$$

dove μ_s è il *coefficiente d'attrito*, ossia una costante tabellare che dipende dalle caratteristiche fisiche dei materiali a contatto e Φ è la reazione vincolare che la soperficie esercita sull'oggetto appoggiato

7.2 Equilibrio dei corpi rigidi

Prendiamo il seguente problema di statica:

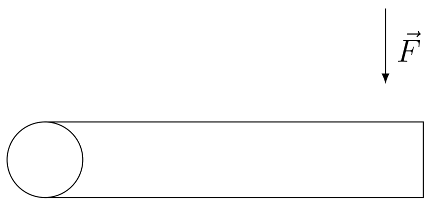


Se $|F_1| = |F_2|$ secondo ciò che abbiamo detto fin'ora il corpo dovrebbe essere in equilibrio e non dovrebbe quindi non compiere nessun movimento. L'esperienza di tutti i giorni è in constrasto con ciò (il corpo ruota in direzione oraria).

Questo succede perché abbiamo trattato i corpi come punti materiali, ossia potevamo semplificare il sistema immaginandoci il corpo come un minoscolo pallino sul quale le forze agiscono tutte nello stesso punto. Per corpi estesi bisogna invece tenere conto del fatto che questi possano anche ruotare

7.2.1 Momento torcente

Per parlare di rotazione in fisica è fondamentale aver chiaro il concetto di momento. In particolare, una forza che tende a far ruotare un oggetto genera un momento torcente, che esprime *"l'intensità con la quale l'oggetto vuole girare per effetto della medesima forza"*. Supponiamo di avere un bastone ancorato ad un'estemità:



per descrivere la rotazione indotta da $\vec{F}$ è necessario indicare:

- La *direzione* della rotazione (senso orario o antiorario)
- L'intensità della torsione (ad esempio quanto forte serve girare per aprire una bottiglia)

Per descrivere ciò si usano i momenti. In particolare, data una forza $\vec{F}$, il suo momento torcente dato da:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \rightarrow \quad |M| = |r| \cdot |F| \cdot \sin(\alpha)$$

dove

- $\vec{r}$ è il vettore che congiunge il punto di applicazione della forza con il centro della rotazione
- $\vec{F}$ la forza che imprime la rotazione

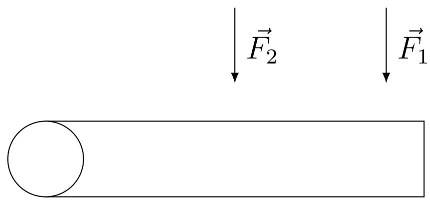
Attenzione che con $\times$ si indica il prodotto vettoriale (vedi sez 6.1.5)

> Possiamo ora introduttre il concetto di equilibrio di corpi rigidi:
>
> Un corpo rigido è in equilibrio statico se la somma delle forze e la somma dei momenti torcenti è zero

Cerchiamo ora di dare interpretazione fisica ai momenti.

- Verso: Abbiamo verso entrante nel caso in cui generino una rotazine in senso orario, mentre uscente nel caso la generino in senso antiorario. Cio vuol dire che quando sommiamo i momenti le forze che fanno ruotare in senso orario si oppongono a quelle che fanno ruotare in senso orario, il che è ragionevole

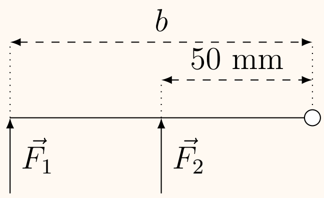
- Intensità: L'intensità di un momento torcente è pari a $|r| \cdot |F| \cdot \sin(\alpha)$. Vediamo quindi come l'intensità della torsione aumenti all'aumentare della
  - Forza, il che è evidente
  - Raggio della forza: più lontano sono dal centro della rotazione, più forza applico, il che è ragionevole. Supponiamo di voler svitare un dado con una chiave inglese. Faremmo più fativa applicando la forza vicino al dado o all'estremità della chiave inglese?



7.3 Problemi

Esercizio 1: *Una porta*

Per aprire una porta spingiamo in un punto a 50 mm dalle cerniere impiegando una forza 17 volte più grande di quella richiesta,se la spinta fosse fatta all'estremità libera della porta.

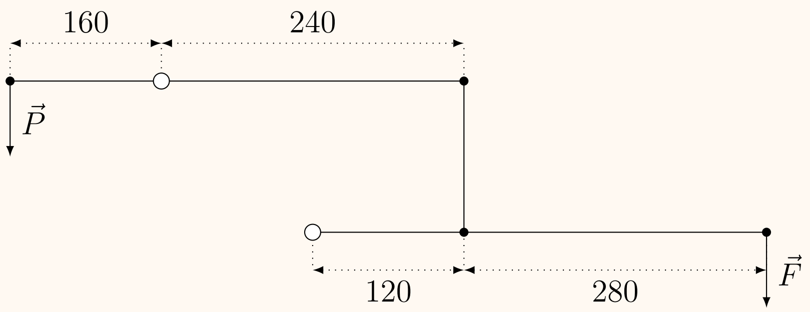


Qual è la lunghezza della porta?

[0.85m]

Esercizio 2: *Due leve*

Abbiamo una situazione come nella figura sottostante:

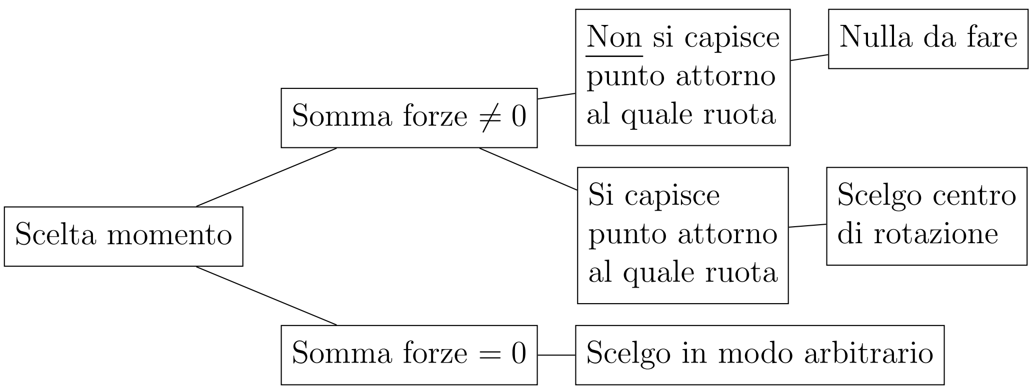


Supponendo che le leve siano ancorate nei punti bianchi e che $|P| = 900$, calcolare il valore di $|F|$ affinchè il sistema rimanga in equilibrio

[180 N]

7.4 Approfondimento sulla scelta dell'origine

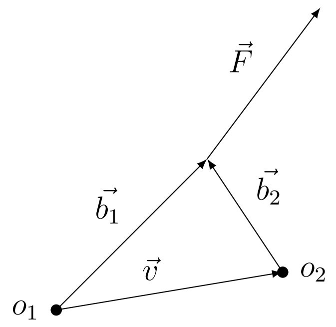
Per affrontare un problema sui momento dobbiamo innanzitutto scegliere un'origine o un polo. Viene spesso detto che questo può essere scelto in modo *arbitrario*, ma ciò non è vero in ogni caso:



Nel momento in cui scegliamo un'origine (o *polo*), possiamo scegliere qualsiasi punto a patto che la risultante delle forze sul sistema sia nulla:

$$\text{scelta polo è arbitraria} \iff \vec{F_{tot}} = 0$$

Si può dimostrare questo come segue. Supponiamo di avere una forza e due possibili origini o_1 e o_2:



- Il momento della forza $\vec{F}$ secondo o_1 è $\vec{b_1} \times \vec{F}$
- Il momento della forza $\vec{F}$ secondo o_2 è $\vec{b_2} \times \vec{F}$

Il momento secondo o_2 può anche essere scritto in funzione di b_1 come segue :

$$\begin{aligned}
\vec{b_2} \times \vec{F} &= \left(\vec{b_1} - \vec{v}\right) \times \vec{F} \\
&= \vec{b_1} \times \vec{F} - \vec{v} \times \vec{F} \\
&= M_{o_1}\left(\vec{F}\right) - \vec{v} \times \vec{F}
\end{aligned}$$

in quanto osservando i vettori si può vedere come $\vec{b_2} = \vec{b_1} - \vec{v}$ Ora supponiamo di avere due forze F_1 e F_2 e di esprimere il momento totale secondo il polo o_2:

$$\begin{aligned}
M_{\text{tot } o_2} &= M_{F_1\ o_2} + M_{F_2\ o_2} \\
&= b_2 \times \vec{F_1} + b_2 \times \vec{F_2}
\end{aligned}$$

usando ora quanto ricavato pocanzi possiamo scrivere il momento come segue:

$$\begin{aligned}
&= b_2 \times \vec{F_1} + b_2 \times \vec{F_2} \\
&= M_{o_1}\left(\vec{F_1}\right) - \vec{v} \times \vec{F_1} + M_{o_1}\left(\vec{F_2}\right) - \vec{v} \times \vec{F_2}
\end{aligned}$$

riordinando la formula otteniamo:

$$M_{\text{tot } o_2} = M_{o_1}\left(\vec{F_1}\right) + M_{o_1}\left(\vec{F_2}\right) - \vec{v} \times \vec{F_1} - \vec{v} \times \vec{F_2}$$

e raccogliendo $-\vec{v}$:

$$M_{\text{tot } o_2} = M_{o_1}\left(\vec{F_1}\right) + M_{o_1}\left(\vec{F_2}\right) - \vec{v} \times \left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)$$

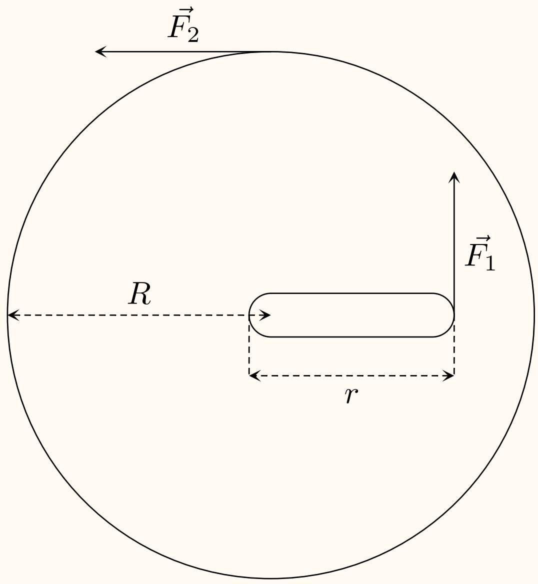
dunque, se la somma vettoriale delle forze è nulla, il momento totale calcolato scegliendo o_1 come polo è uguale al momento totale calcolato scegliendo o_2 come polo

7.4.1 Esercizi

Esercizio 3: *Momenti 1*

Una persona aziona una ruota con una forza di $F_1 = 120N$, tramite una manovella di $r = 36cm$ di braccio.

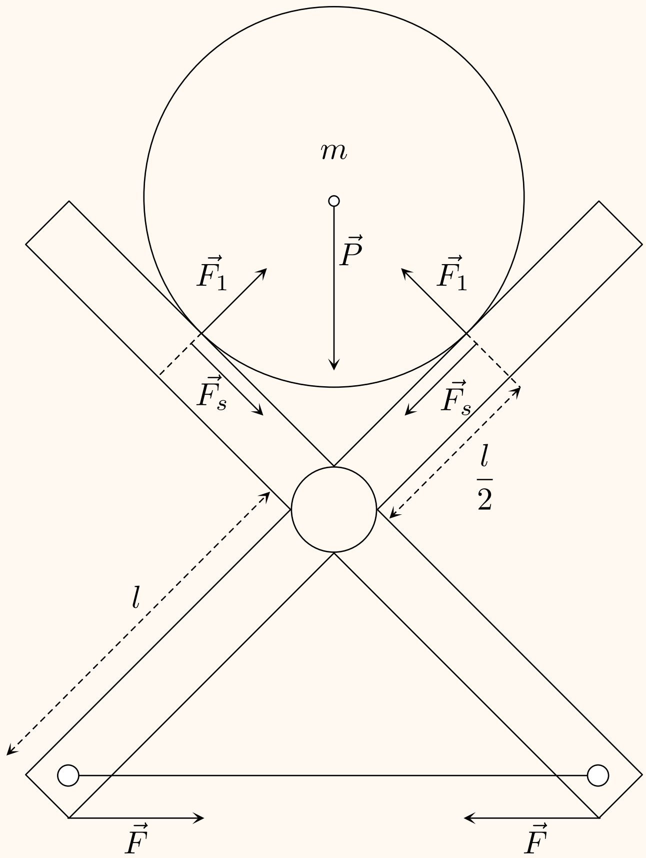
Per fare in modo che sul bordo della ruota vi siano $F_2 = 200N$ di forza, quale deve essere il suo diametro?



[43,2 cm]

Esercizio 4: *Momenti 2*

Si ha una situazione come in figura. Alla base delle forbici vi è una molla (che resiste all'allungamento). La molla è allungata di $\Delta x = 20cm$. e ha una costante elastica $k = 150 \left[\frac{N}{kg}\right]$. La palla ha una massa $m = 5kg$.



Calcolare il coefficiente di attrito minimo che deve esserci fra la palla e le aste affinchè questa non si muova. Quale direzione avrà questo? Se non ci fosse attrito, la palla potrebbe stare ferma?

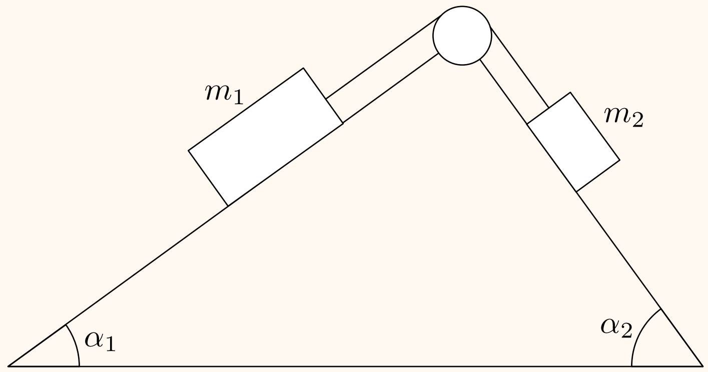
Suppore ora che la palla pesi $m = 7kg$ e che il coefficiente di attrito sia quello trovato, ossia 0.18. E' possibile che la palla sia ferma?

Supporre infine che la palla pesi $m = 7kg$. Calcolare il coefficiente di attrito minimo necessario affinchè la palla stia ferma

[0.18, no, verso il basso, sì, 0.14]

Esercizio 5: *Statica 1*

Data una situazione come in figura, calcolare gli angoli $\alpha 1$ e $\alpha 2$, sapendo che il sistema è in equilibrio e che le masse sono $m_1 = 2kg$ e $m_2 = 3.46kg$. Trascurare gli attriti



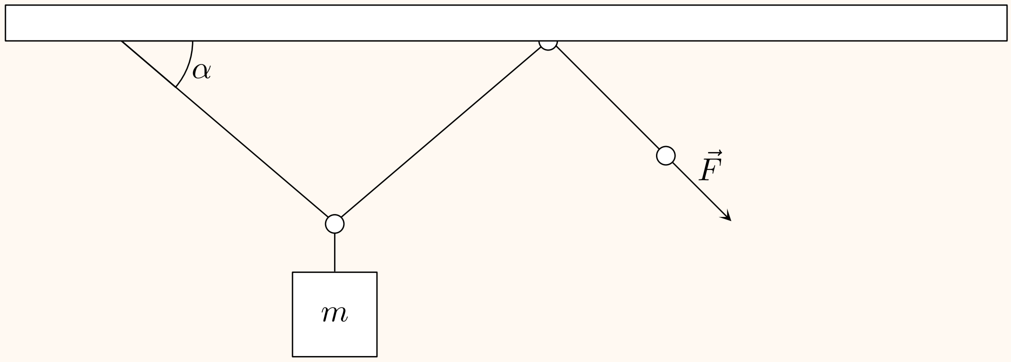
Supponi ora di avere attrito con coefficiente $\mu = 0.2$. Calcola quale sarebbe il valore massimo della massa m_1 prima di far scrivolare i blocchetti. Ripetere il calcolo per m_2

Se fossimo sulla luna, i risultati di questo esercizio cambierebbero? In caso affermativo spiega come e perché

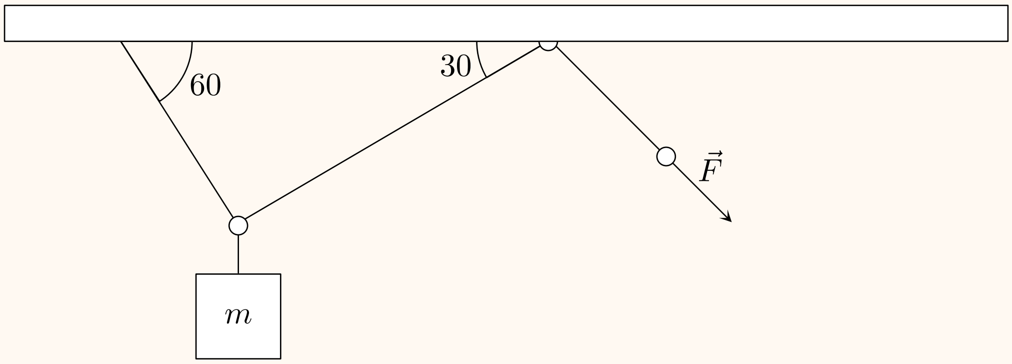
[$\alpha_1 \approx 30, \alpha_2 \approx 60$, 5.3 kg, 2.26 kg, no]

Esercizio 6: *Statica 2*

Una massa è appesa ad un filo. La massa è di $m = 4kg$. La forza è di $\left|\vec{F}\right| = 39N$. Calcola l'angolo α



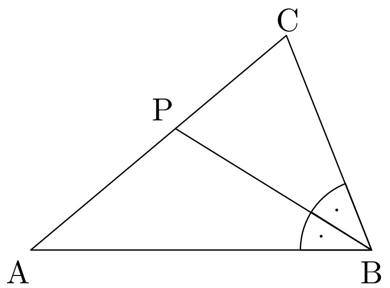
Supponi ora di ancorare del tutto la massa al filo in modo tale che formi un triangolo 30 60 90:



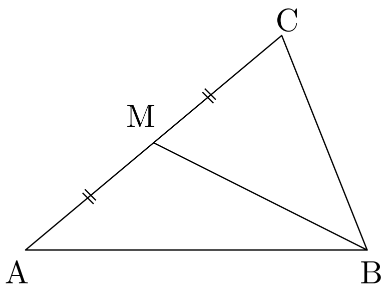
Calcola il valore di F affinché il sistema sia in equilibrio

$[\alpha = 30, \left|\vec{F}\right| = 19.6N]$

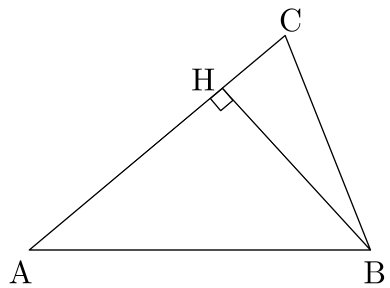
8 Geometria



Bisettrice di $\hat{B}$



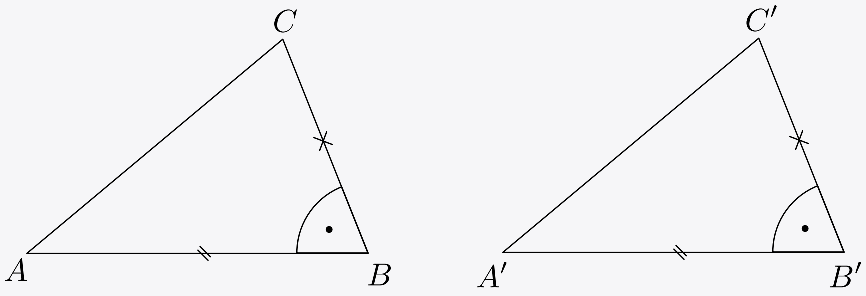
Mediana di AC



Altezza di AC

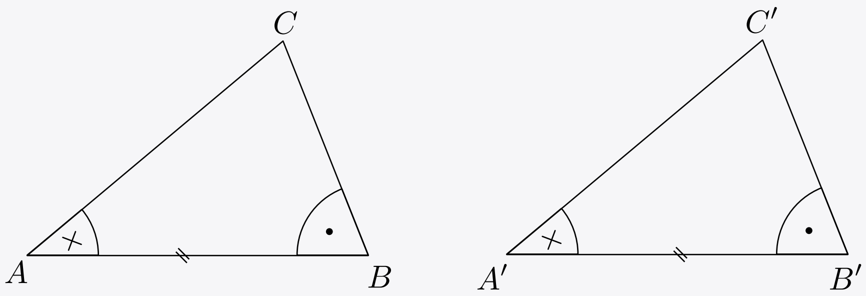
8.1 Criteri di congruenza

Teorema 1: *Criterio di congruenza 1*



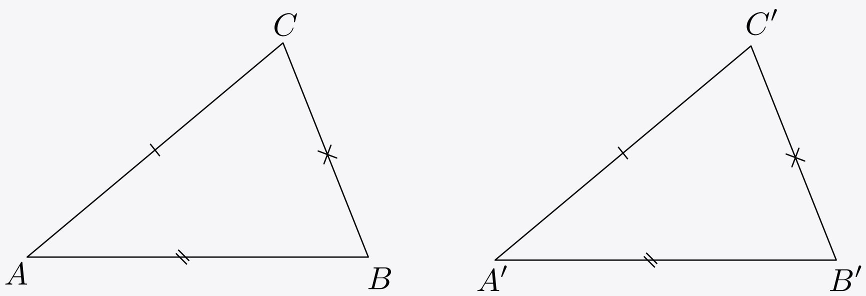
Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso fra i due lati.

Teorema 2: *Criterio di congruenza 2*



Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e gli angoli adiacenti al lato.

Teorema 3: *Criterio di congruenza 3*



Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti tre lati.

Teorema 4: *Somma angoli interni*

La somma degli angoli interni di un triangolo è di 180 gradi

Nota come, sapendo ciò si possa estendere il secondo principio di equivalenza: gli angoli non devono necessariamente essere adiacenti al lato in quanto se due sono uguali, allora lo sarà anche il terzo

Teorema 5: *Angolo esterno*

L'angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso

Teorema 6: *Angoli opposti a lati*

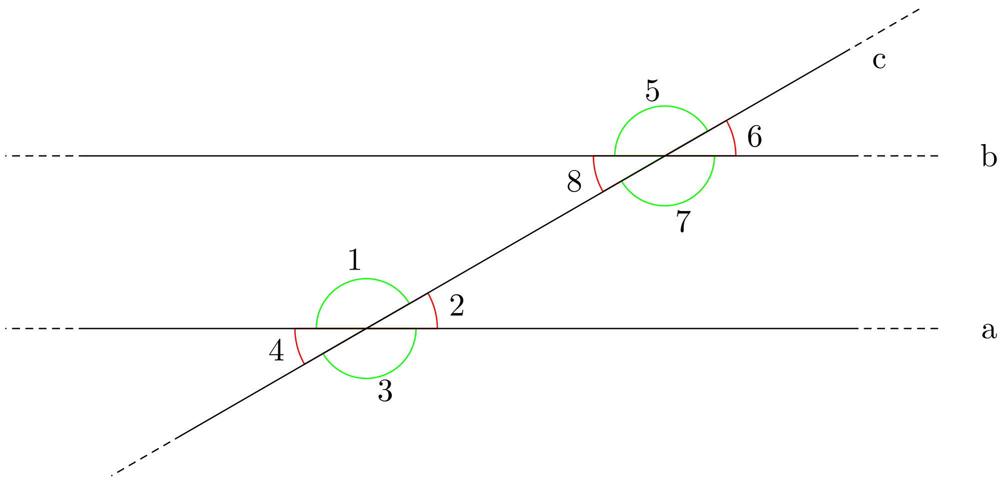
In un triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore e viceversa

Teorema 7: *Disuguaglianze triangolari*

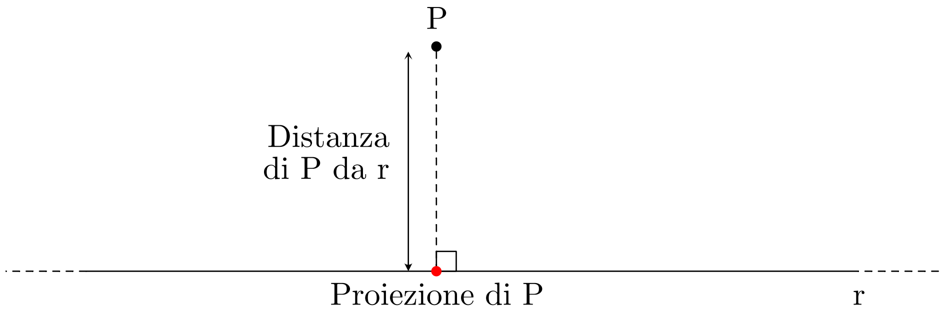
In un triangolo, un lato è:

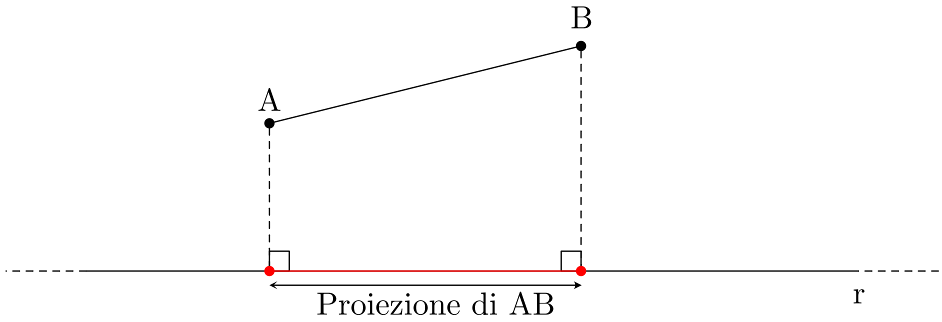
- minore della somma degli altri due
- maggiore della loro differenza

8.2 Rette e parallelismo



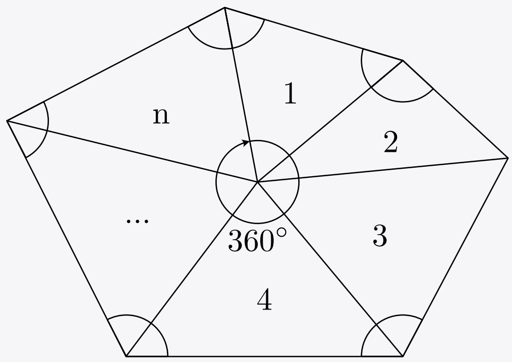
- *Alterni interni*: (2,8), (1,7)
- *Alterni esterni*: (4,6), (3, 5)
- *Coniugati interni*: (1,8), (2,7)
- *Coniugati esterni*: (4,5), (3,6)
- *Corrispondenti*:(4,8), (1,5), (2,6), (3,7)





Teorema 8: *Somma angoli interni poligono convesso*

La somma degli angoli interni di un qualsiasi poligono convesso è $180 * n - 360$ gradi



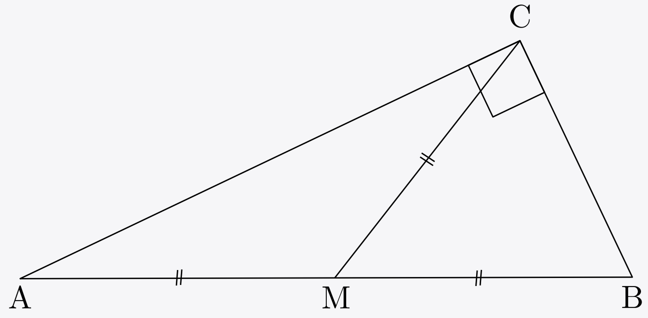
8.2.1 Teoremi triangoli rettangoli

Teorema 9: *Quarto criterio di congruenza per triangoli rettangoli*

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti ipotenusa e un cateto

Teorema 10: *Mediana angolo rettangolo*

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.



8.2.2 Luogo geometrico

Definizione 20: *Luogo geometrico*

Un luogo geometrico è un insieme di punti di un piano che godono di certe proprietà

Ad esempio:

- L'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento
- La bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati di un angolo
- Una circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto detto centro

Es: g69 12, e199 197, g92 57, g97 97, g99 123

8.3 Il piano cartesiano

Di seguito elencate una serie di strumenti matematici utili per lavorare con oggetti nel piano cartesiano:

8.3.1 Lunghezza e punto medio segmento

$$\begin{aligned} \text{Lunghezza segmento } &= \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \\ \text{Punto medio segmento } &= \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right) \end{aligned}$$

8.3.2 Retta per due punti

Per trovare l'equazione di una retta passante per due punti bisogna trovare i valori del *coefficiente angolare* m e della *quota* c

$$\begin{aligned} \text{Coefficiente angolare } &= m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_a - x_b}{y_a - y_b} \\ \text{Quota } &= c = y_a - m x_a = y_b - m x_b \end{aligned}$$

Per trovare la quota posso inserire al posto di y_a e x_a ogni punto che appartenga alla retta stessa

8.3.3 Intersezione fra rette

Per trovare l'intersezione fra due rette è sufficiente creare una equazione in cui eguagliamo le due espressioni delle rette stesse:

$$r_1 = m_1 x + c_1 \qquad\qquad r_2 = m_2 x + c_2$$

$$\begin{aligned} r_1 \cap r_2 \to m_1 x + c_1 &= m_2 x + c_2 \\ m_1 x - m_2 x &= c_2 - c_1 \\ x\left(m_1 - m_2\right) &= c_2 - c_1 \\ x &= \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

8.3.4 Formula di Erone

$$\begin{aligned} \text{Perimetro } &= 2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \\ \text{Semiperimetro } &= p = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}{2} \\ \text{Area } &= A = \sqrt{p\left(p - \overline{AB}\right)\left(p - \overline{BC}\right)\left(p - \overline{CD}\right)} \end{aligned}$$

8.4 Luighi geometrici

Definizione 21: *Luogo geometrico*

Un luogo geometrico della proprietà P è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono della proprietà P

Definizione 22: *Asse di un segmento*

L'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento stesso

Esercizio: dimostra che il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento è una retta perpendicolare al segmento stesso. Dimostra anche il contrario

Definizione 23: *Bisettrice*

La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo

Esercizio: dimostra che la bisettrice di un angolo è una retta che divide l'angolo in due parti uguali

Definizione 24: *Circonferenza*

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto detto centro (solitamente indicato con O)

Definizione 25: *Cerchio*

Un cerchio è l'insieme di tutti i punti di una circonferenza e di quelli al suo interno

Teorema 11: *Circonferenza per 3 punti*

Esiste una e una sola circonferenza che passa per 3 punti non allineati

Dimostrazione:

- Traccia 3 punti
- Traccia assi
- Per definizione di assi, la distanza fra la loro intersezione e gli estremi è la stessa. L'intersezione è dunque il centro
- Dato che l'intersezione è unica, anche la circonfereenza deve esserlo

Definizione 26: *Arco di circonferenza*

Un arco di circonferenza è una parte di circonferenza compresa fra due suoi punti

Definizione 27: *Corda di circonferenza*

Una corda di circonferenza è un segmento che congiunge due punti della circonferenza

Definizione 28: *Angolo al centro*

Un angolo al centro è un angolo che ha il vertice al centro della circonferenza

Teorema 12: *Arco e angolo*

Angoli uguali individuano argo uguali sulla stessa circonferenza e viceversa

Teorema 13: *Corde e archi congruenti*

In una circonferenza, corde congruenti determinano archi congruenti e viceversa

Dimostrazione arco congruenti $\Leftrightarrow$ corda congeruente:

- Traccia triangolo che ha base su arco/corda

- Verifica che è congruente con LLL

Definizione 29: *Settore circolare*

Un settore circolare è la parte di circonferenza compresa fra due raggi

Definizione 30: *Segmento circolare*

Il segmento circolare può avere una o due basi:

- Segmento circolare con una base: è la parte di cerchio compresa fra un arco e una corda
- Segmento circolare con due basi: è la parte di cerchio compresa fra due corde

Teorema 14: *Diametro e corde*

In una circonferenza un diametro è maggiore di qualsiasi corda non passante per il centro

Dimostrazione:

- Disegna un triangolo generico con centro in O
- Verifica che la base che appoggia sulla circonferenza sempre minore rispetto alla somma dei due lati

Teorema 15: *Diametro e corda 1*

In una circonferenza, se una corda è perpendicolare al diametro, allora il diametro divide a metà:

- la corda
- l'angolo al centro e l'arco che le corrispondono

Dimostrazione:

- Ottengo triangolo isoscele, per cui è immediato che corda e angolo al centro vengano divisi a metà
- Anche gli archi sono uguali poiché ad angoli uguali corrispondono archi uguali

Teorema 16: *Diametro e corda 2*

In una circonferenza, se una corda che non è un diametro viene tagliata a metà dal diametro, allora la corda è anche perpendicolare ad esso

Dimostrazione: vedi dimostrazione teorema 8.4

8.4.1 Retta e circonferenza

Teorema 17: *Posizione reciproca retta e circonferenza*

Se la distanza di una retta dal centro di una circonferenza è:

- maggiore del raggio, la retta è *esterna* alla circonferenza
- uguale al raggio, la retta è *tangente* alla circonferenza
- minore del raggio, la retta è *secante* alla circonferenza

Dimostrazione:

- Distanza $\overline{OH} > r$:
  - Considero punto P generico su r
  - $|\overline{OP}| > |\overline{OH}|$ siccome $\overline{OP}$ è ipotenusa
- Distanza $\overline{OH} = r$: esattamente come a punto precedete. Unico punto in cui r interseca la circonferenza è H. Questa è la definizione di retta tangente
- Distanza $\overline{OH} < r$: considero punto P t.c. $|\overline{HP}| = r$
- Siccome $\overline{OP}$ è ipotenusa, $|\overline{OP}| > |\overline{HP}| = r$. Quindi $|\overline{OP}| > r$, ossia è un punto esterno.
- Siccome la retta passa per un punto esterno e uno interno, per forza deve "trapassare" la circonferenza

Teorema 18: *Raggio e retta tangente*

In una circonferenza, la retta perpendicolare a un qualsiasi raggio $\overline{OP}$ in P è tangente alla circonferenza. Viceversa la retta tangente alla circonferenza in P è perpendicolare al raggio $\overline{OP}$

Dimostrazione:

- Disegna triangolo con punto generico P su r
- Sfrutta il fatto che $\overline{OP}$ è ipotenusa

Teorema 19: *Tangenti da un punto esterno*

Dato un punto P esterno alla circonferenza, e detti T_1 e T_2 il punto di tangenza con la circonferenza delle rette passanti per P, allora:

- $PT_1 \cong PT_2$
- OP è bisettrice di T_1ot_2 e T_1PT_2

Dimostrazione:

- Disegnando quanto detto sopra, si ottengono due triangoli rettangoli congruenti per il criterio di congruenza degli angoli rettangoli

- Da qui è immediato dedurre quando enunciato

Definizione 31: *Angoli al centro e alla circonferenza*

Un angolo al centro è un angolo che ha il vertice al centro della circonferenza. Un angolo alla circonferenza è un angolo che ha il vertice sulla circonferenza

Teorema 20: *Angoli alla circonferenza*

Ogni angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco è congruente

Dimostrazione:

- Traccia triangolo delineato da angolo

- Unisci suoi vertici al centro della circonferenza

- Esprimilo in funzione del corrispettivo angolo al centro

- Verifica che risultato non cambia alla sceltra del punto dell'angolo

Teorema 21: *Rapporto angoli al centro e alla circonferenza*

Un angolo al centro è il doppio di un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco

Dimostrazione:

- Disegna triangolo con vertice al centro

- Prolunga lato passando per il vertice al centro, ottenendo così l'angolo alla circonferenza

- Utilizza l'angolo esterno del triangolo disegnato allo step 1 e sfrutta il fatto che l'angolo esterno è uguale alla somma dei due interni opposti

- Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali. Questa dimostrazione può dunque essere generalizzata

In alternativa:

- Disegna angolo al centro e alla circonferenza generico

- Chiama angolo al centro x

- Esprimi angolo alla circonferenza in funzione di x, collegando ogni vertice dell'angolo alla circonferenza al centro della circonferenza

Teorema 22: *Angolo insistente su diametro*

In angolo alla cirferenza che insiste su un diametro è retto

Dimostrazione:

- Come descritto in teorema 8.4.1, l'angolo alla circonferenza è la meta di quello al centro.
- In questo caso l'angolo al centro è piatto. $\frac{180}{2} = 90$

Teorema 23: *Angolo insistente su diametro*

Un angolo alla circonferenza che insiste su un diametro è retto

Dimostrazione: per teorema 8.4.1, l'angolo alla circonferenza è la metà di quello al centro. In questo caso l'angolo al centro è piatto, dunque l'angolo alla circonferenza è retto

8.5 Poligoni

Definizione 32: *Poligono inscritto*

Un poligono è inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza stessa

Definizione 33: *Poligono circoscritto*

Un poligono è circoscritto ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza stessa

Teorema 24: *Inscrivibilità pologono*

Un poligono è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si intersecano in uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta

Teorema 25: *Circoscrivibilità poligono*

Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se le bisettrici dei suoi angoli si intersecano in uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta

Teorema 26: *Inscrivibilità triangoli*

Un triangolo è sempre inscrivibile in una circonferenza. Il centro è detto circocentro ed è dato dall'intersezione degli assi

Dimostrazione:

- I primi due assi di due lati si incontrano per forza
- Il terzo asse passa per forza per l'intersezione degli altri due, in quanto l'intersezione è equidistante da tutti i vertici del triangolo stesso

Teorema 27: *Circoinscrivibilità triangoli*

Un triangolo è sempre circoinscrivibile ad una circonferenza. Il centro è detto incentro ed è dato dall'intersezione delle bisettrici

Diostrazione:

- Segno intersezione due bisettrici e segno distanza dai lati
- Considero triangoli formati e dimostro che la distanza del circocentro è uguale per tutti

Teorema 28: *Ortocentro*

Le altezze di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto ortocentro

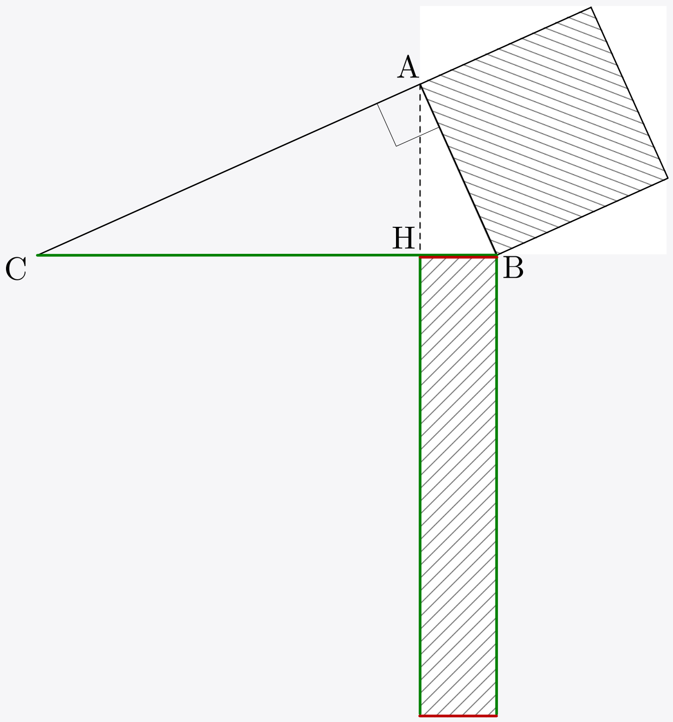
Dimostrazione:

- Per ogni lato, si traccia una linea parallela passante per il vertice opposto. Ottengo un triangolo più grande all'interno del quale è "inscritto" quello di partenza
- Dimostro che vertice cade a metà del lato del triangolo più grande
- Dimostro che asse del triangolo più grande è altezza del triangolo più piccolo
- Per teorema 8.5, gli assi di un triangolo si incontrano sempre

8.6 Teorema di euclide per triangoli rettangoli

Teorema 29: *Teorema di euclide 1*

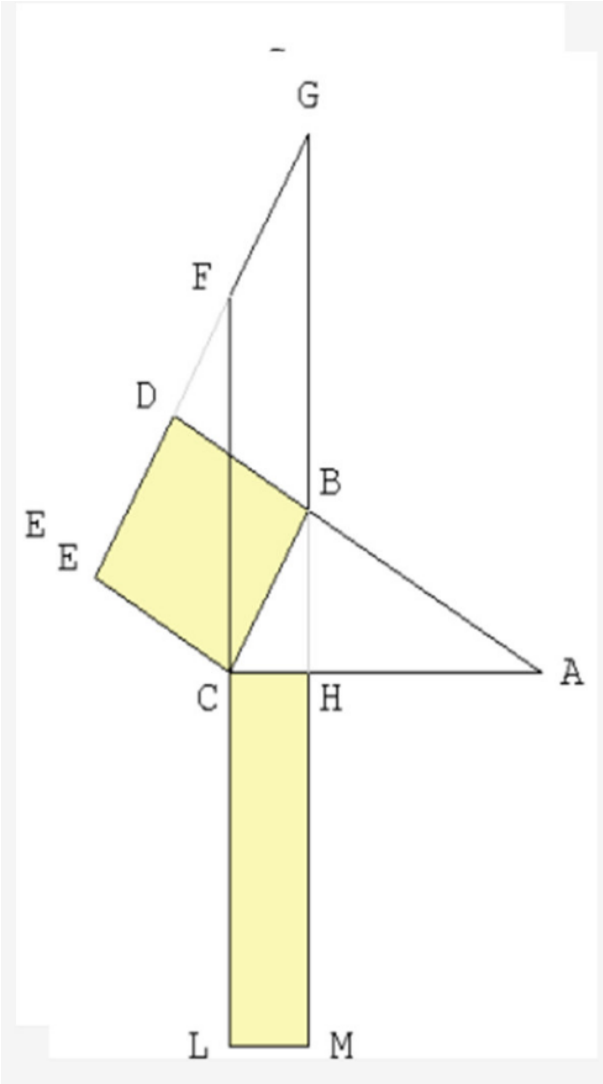
In un triangolo rettangolo ABC, retto in A, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa



$$CB \cdot HB = AB^2$$

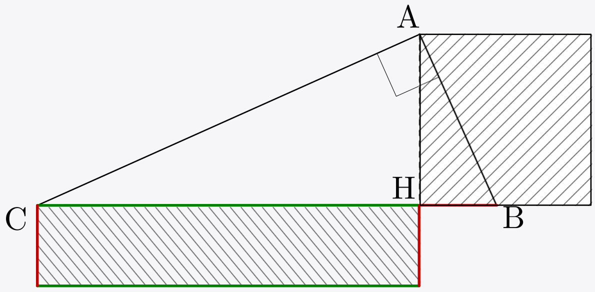
Dimostrazione:

- Disegno parallelepipedi con base in BC, e l'altra base ottenuta intersecando il prolungamento di CL e ED
- Dimostro che l'area del quadrato sul cateto è uguale all'area del paralelepipedo appena costruito
- Dimostro che FC è uguale a CL dimostrando che $ECF \cong CAB$
- Dimostro che l'area del paralelepipedo e del rettangolo sono congruenti



Teorema 30: *Teorema di euclide 2*

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa



$$CH \cdot HB = AH^2$$

Dimostrazione:

- Applicando pitagora e euclide 1 su AHB, mi rendo conto che togliento il quadratino di lato HB i conti tornano

9 Fluidostatica

9.1 Prerequisiti

Formula 1: *Densità*

La densità è la grandezza fisica che indica la *massa* di un oggetto per unità di *volume*.

$$\rho = \frac{m}{V} \frac{[kg]}{[m^3]}$$

Nota bene:

- La densità è una proprietà che non riguarda solo i liquidi, ma anche i solidi e i gas.
- Densità $\neq$ viscosità: l'acqua è *più densa* dell'olio
- La densità indica quanto un oggetto pesa a parità di volume. Il ferro è pùù denso del legno in quanto un cubo di ferro di volume V pesa di pùù che un cubo di legno di volume V

Formula 2: *Pressione*

La pressione si esprime come rapporto fra *forza* *perpendicolare* ad una superficie, e *superficie* sulla quale questa forza agisce:

$$p = \frac{F_{perp}}{S}$$

La pressione si misura in *Pascal* [Pa], ossia $\frac{N}{m^2}$

Occhio che nel caso la forza agente sulla superficie non sia perpendicolare è necessario scomporla per ricavarne la componente perpendicolare alla superficie stessa

9.2 Legge di stevino

Teorema 31: *Legge di stevino*

Secondo la legge di stevino, un corpo immerso in un liquido di densità ρ a profondità h, subisce una pressione pari a:

$$p = \rho g h$$

Si pensi ad una colonna di liquido di densità ρ di superficie S alta h sopra ad un corpo. Il corpo subisce una forza pari a

$$F = P_{\text{colonna}} = \underbrace{m_{\text{colonna}}}_{\text{massa colonna}} \cdot g = V_{\text{colonna}} \cdot \rho \cdot g = S \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

dividendo per S da entrambe le parti otteniamo

$$\underbrace{\frac{F}{S}}_{\text{pressione}} = S \cdot h \cdot \rho$$

dunque

$$p = h \cdot \rho \cdot g$$

Un dato importante è la pressione atmosferica, ossia la pressione subita da un oggetto a livello del mare. Questa è detta *pressione atmosferica* e vale 101325 Pa

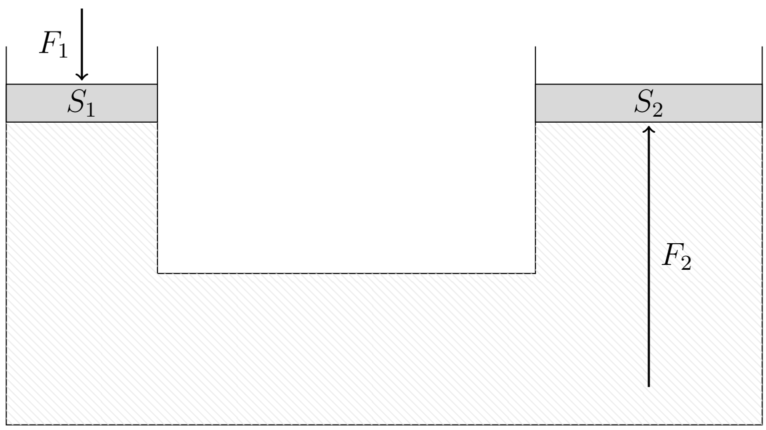
$$p_{\text{atm}} = 101325\,\text{Pa} \begin{cases} \text{altitudine} & 0 \\ \text{latitutdine} & 45^\circ \\ \text{temperatura} & 15^\circ\,\text{C} \end{cases}$$

9.3 Principio di Pascal

Teorema 32: *Principio di Pascal*

Il principio di Pascal enuncia che una variazione di pressione esercitata su un fluido viene trasmessa inalterata a *ogni punto* del fluido e sulle pareti del suo contenitore.

9.3.1 Torchio idraulico



Secondo il principio di Pascal si ha che $p_1 = p_2$. Dato che $p = \frac{F}{S}$, allora

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Questo significa che applicando una forza applicata sulla superficie piccola di un torchio idraulico risulterà più grande dall'altra parte del torchio, un po' in modo simile a ciò che accade con una leva

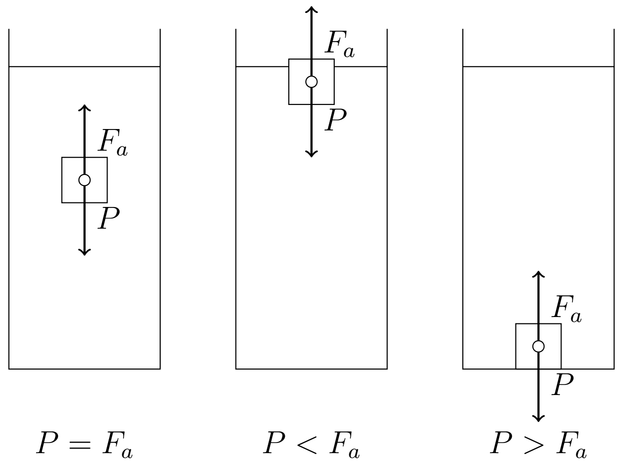
9.4 Principio di archimede

Teorema 33: *Principio di Archimede*

Il principio di Archimede enuncia che un corpo immerso in un liquido di densità ρ subisce una spinta verso l'alto con intensità pari al peso di liquido spostato dalla parte immersa del corpo:

$$F_a = \rho \cdot V_{\text{immerso}} \cdot g$$

Nota che tramite la forza di archimede siamo in grado di capire se un corpo galleggia o meno:



10 Il moto

In questa sezione sono descritti i principali strumenti e metodi per descrivere lo spostamento di un corpo nello spazio, bidimensionale e tridimensionale

10.1 Definizioni

Una serie di definizioni utili

Definizione 34: *Traiettoria*

La traiettoria di un corpo in movimento è la linea "tracciata" dal corpo in movimento al passare del tempo

Definizione 35: *Moto rettilineo*

Moto che avviene lungo una retta

Definizione 36: *Intervallo di tempo*

Un intervallo di tempo è la quantità di tempo trascorsa tra due istanti:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

dove t_2 è l'istante finale e t_1 è l'istante iniziale

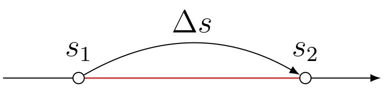
Definizione 37: *Spostamento*

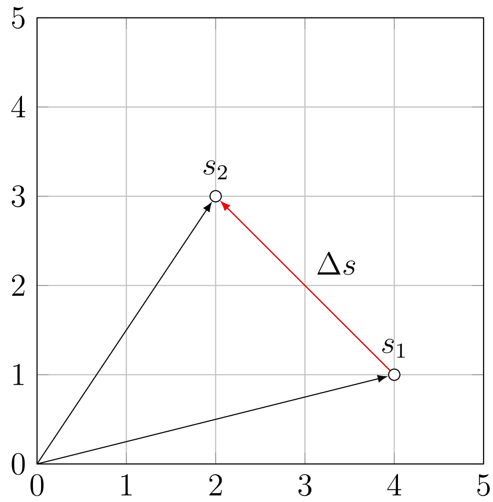
Lo spostamento è la differenza tra due posizioni

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

dove s_2 è l'istante finale e s_1 è l'istante iniziale

Nota come la nozione di spostamento sia valida dal punto di vista logico sia in 1 che in 2 dimensioni:





10.2 La natura relativa del moto

Poniamoci la seguente domanda:

Se ci trovassimo nella stiva di una nave completamente chiusa, riusciremmo a capire se siamo in movimento oppure no?

La risposta è no. Poniamoci dunque una domanda leggermente diversa:

Se ci trovassimo nella stiva di una nave, la quale sappiamo essere in moto, possiamo affermare di essere in moto?

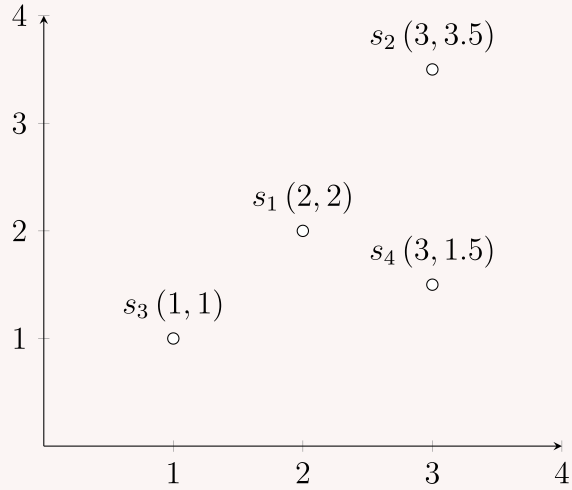
La risposta è dipende. Questo perché il moto non è mai assoluto, bensì è sempre relativo a qualcos'altro, detto sistema di riferimento. Una risposta completa alla seconda domanda potrebbe dunque essere:

Siamo *in moto rispettto al mare*, mentre siamo *fermi rispetto alla nave*

Dunque quando parliamo di moto è sempre fondamentale fissare un sistema di riferimento, ossia "l'oggetto" rispetto al quale l'oggetto si sposta

Definizione 38: *Sistema di riferimento cartesiano*

Un sistema di riferimento cartesiano è il modo più comune per esprimere la posizione di un corpo. Questo è composto da due assi cartesiani i quali si intersecano in un punto detto *origine*:



10.3 Velocità e grafici

Definizione 39: *Velocità media*

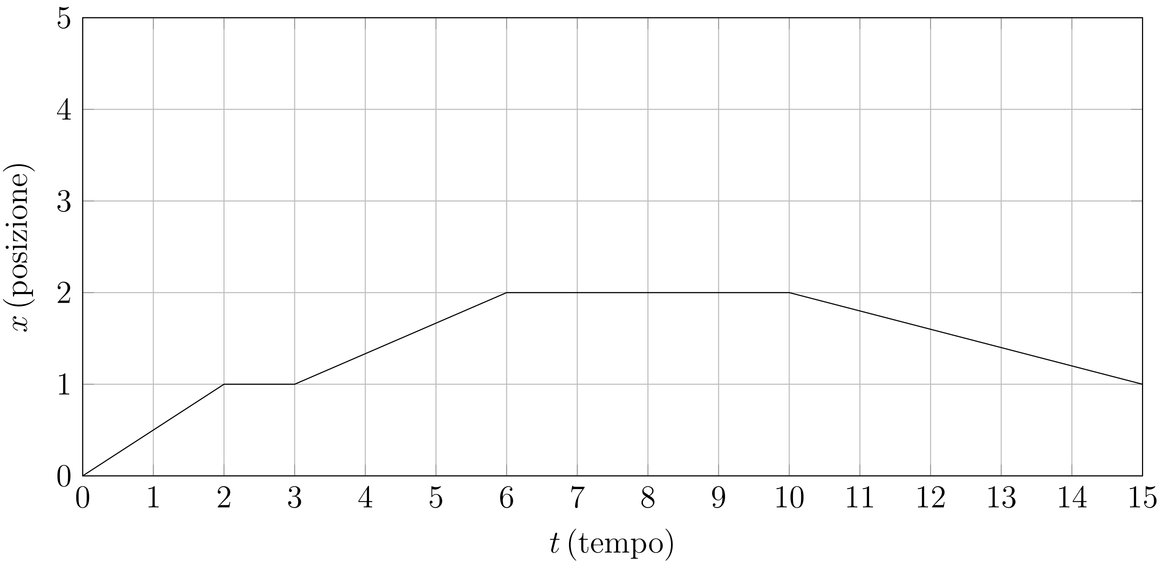
Per definizione la velocità media è data dallo spostamento per unità di tempo, dunque:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

occhio che questa è la velocità media, quindi è possibile che il corpo si muova a velocità maggiori o minori negli istanti compresi tra t_1 e t_2

Spesso è utile rappresentare lo spostamento in funzione del tempo su di un grafico:

- Asse x: indica il tempo
- Asse y: indica la posizione



Questo particolare grafico rappresenta la cosidetta *legge oraraia* di un corpo

Definizione 40: *Legge oraria*

La legge oraria di un corpo non è altro che un'espressione matematica che esprime *in funzione del tempo* la *posizione* del suddetto corpo. Ad esempio:

$$x(t) = 3 \cdot t$$

è la legge oraria di un corpo che si sposta in avanti velocità costante

10.4 Esercizi tipici MRU

1. Data lette oraria, rappresentala nel grafico spazio-tempo
   - La legge oraria non è altro che una retta, quindi rappresentarla come si farebbe in matematica:
     $$s = vt + s_0$$
     corrisponde alla retta
     $$y = mx + q$$
     dove $m = v$ e $q = s_0$
2. Dato la rappresentazione del moto nel grafico spazio-tempo, ricavarne la legge oraria
   - In questo caso bisogna ricavare il coefficiente angolare della retta e la sua quota. Il coefficiente angolare sarà la velocità, mentre la quota lo spostamento iniziale:
     $$m = v, \quad q = s_0$$
     ricordarsi che per ricavare m è sufficiente prendere due punti della retta e calcolare
     $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
3. Data la legge oraria di due corpi, calcolare dove questi si incontrano:

- Date le leggi orarie:
$$s_1 = v_1 t + s_1 \quad s_2 = v_2 t + s_2$$
per trovare il tempo al quali i corpi hanno la stessa posizione è sufficiente risolvere l'equazione di primo grado :
$$v_1 t + s_1 = v_2 t + s_2$$
per trovare poi la posizione in cui si incontrano, è sufficiente inserire il tempo trovato nell'equazione sopra in una delle due leggi orarie(è indifferente quale, in quanto i due corpi sono nella stessa posizione)

4. Dedurre proprietà dei moti dal grafico, quali:
   - Retta più ripida → corpo più veloce
   - Retta piana → corpo fermo
   - Retta "in discesa" → corpo va all'indietro
5. Esercizi su scomposizione dei moti(es corpo che si muove in due dimensioni)
   - In questo caso il moto va scomposto in due componenti, una su asse x e una su asse y. Per far ciò è necessario ricordarsi delle regole della trigonometria indicate in sezione 6.3

10.5 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Introduciamo ora una nuova quantità fisica, ossia l'accelerazione. Intuitivamente l'accelerazione indica la velocità con cui la velocità stessa cambia, ossia quanto rapidamente un corpo passa da una velocità v_1 ad una velocità v_2. Formalmente si indica con a ed è definita come segue:
$$a = \frac{(v_2 - v_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
nota che come nel caso della velocità questa formula esprima l'accelerazione media.

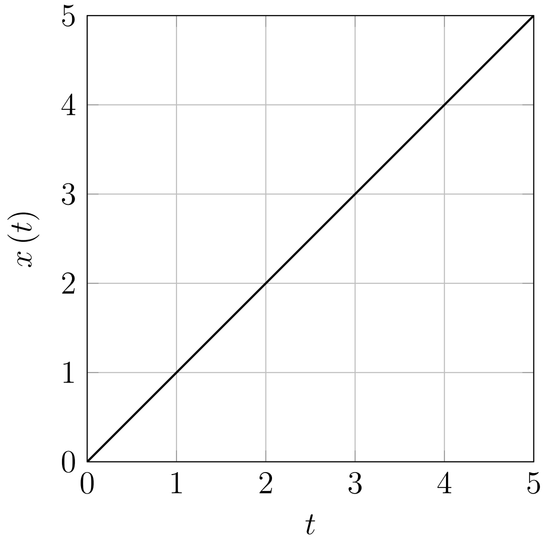
10.5.1 Legge oraria per moti accelerati

Per esprimere la posizione di un corpo che accelera in funzione del tempo bisogna tenere conto dell'accelerazione nella legge oraria. In particolare, la legge oraria di un corpo che si muove di MRUA è:
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + vt + x_0$$
Quindi nel caso di moti accelerati ci toccherà operare con equazioni di secondo grado per via del t^2 che compare vicino allaccelerazione

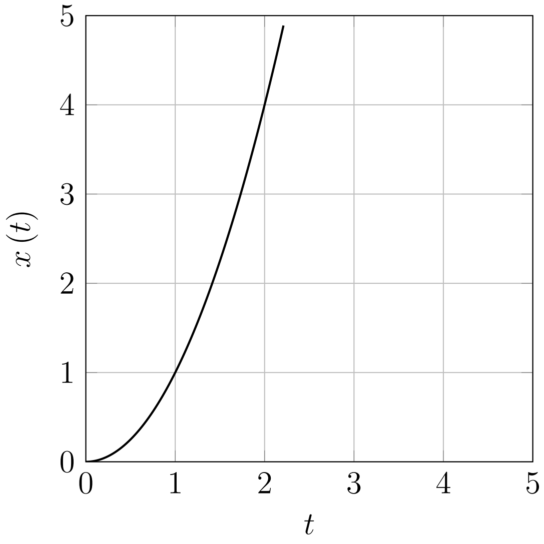
10.5.2 Grafici

Osserviamo ora i seguenti grafici:

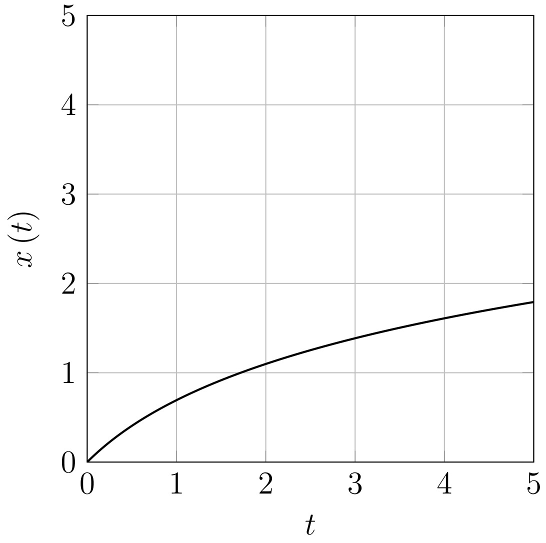
G1



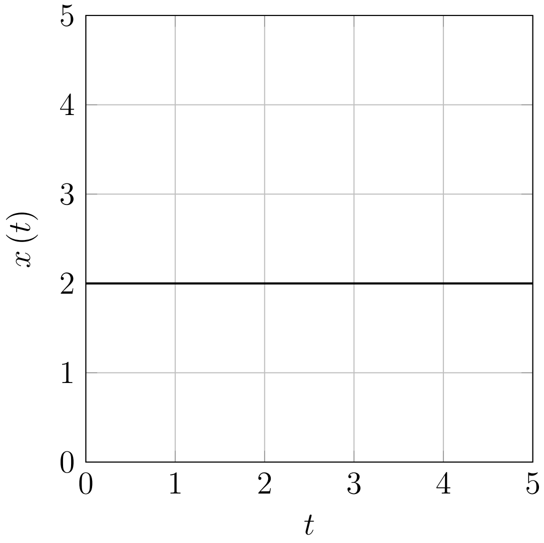
G2



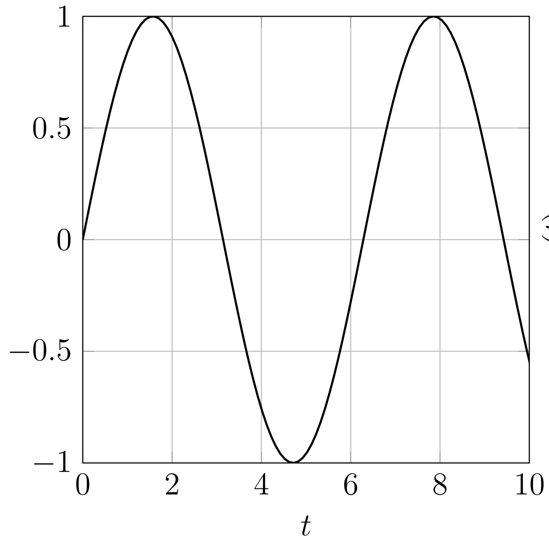
G3



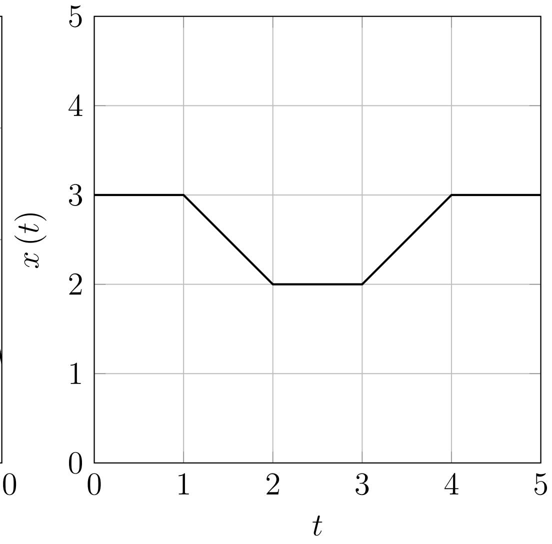
G4



G5

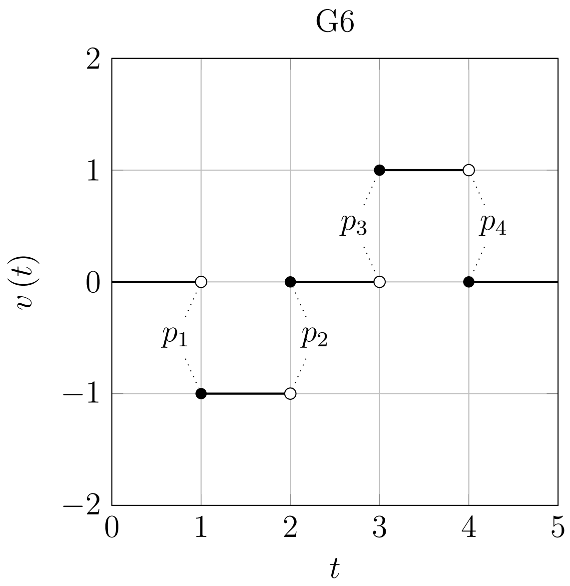


G6



Quali dei seguenti grafici possono essere relativi a moti rettilinei uniformemente accelerati? (Ricordarsi che la velocità è la pendenza della tangente al grafico)

1. G1 e G2 non possono esserlo in quanto la tangente ha sempre la stessa inclinazione, dunque la velocità è sempre la stessa
2. G2, G3, G5 sono accelerati in quanto la pendenza della tangente al grafico cambia, dunque la velocità cambia per via di una accelerazione
3. G6 rappresenta una situazione un po' particolare. Nei tratti $[0,1], [1,2], [2,3], [3,4], [4,5]$ il moto di muove di MRU. Il problema sta nel capire cosa accade nei punti angolosi. Disegnamo il grafico $v(t), t$ per capire meglio



Nei punti p_1, p_2, p_3, p_4 effettivamente la velocità cambia, ma istantaneamente. Ciò nella vita reale è impossibile, ma in un modello può aver senso. Rimane il problem che calcolando l'accelerazione in ognuno di questi punti si avrebbe:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{0} \rightarrow \underline{\text{impossibile}}$$

10.5.3 Grafico velocità tempo

Come possiamo relazionare lo spostamento al tempo nel grafico $x - t$, possiamo anche relazionare l'andamento della velocità nel tempo tramite un grafico $v - t$. In maniera del tutto analoga al grafico $v - t$, possiamo affermare le seguenti cose:

1. L'inclinazione della retta tangente al grafico in un punto p costituisce l'accelerazione in quel punto
2. Il grafico $v - t$ di un MRU sarà dato da una linea "piatta", con equazione $t = v$

10.5.4 Grafico accelerazione tempo

Questo grafico è molto meno interessante in quanto ci limitiamo ad analizzare moti con accelerazione costante. Il grafico sarà dunque costituito da una semprile linea piatta orizzontale, con equazione $y = a$

10.5.5 Conversione grafici

Per passare da un tipo di grafico all'altro possiamo seguire il seguente schema:

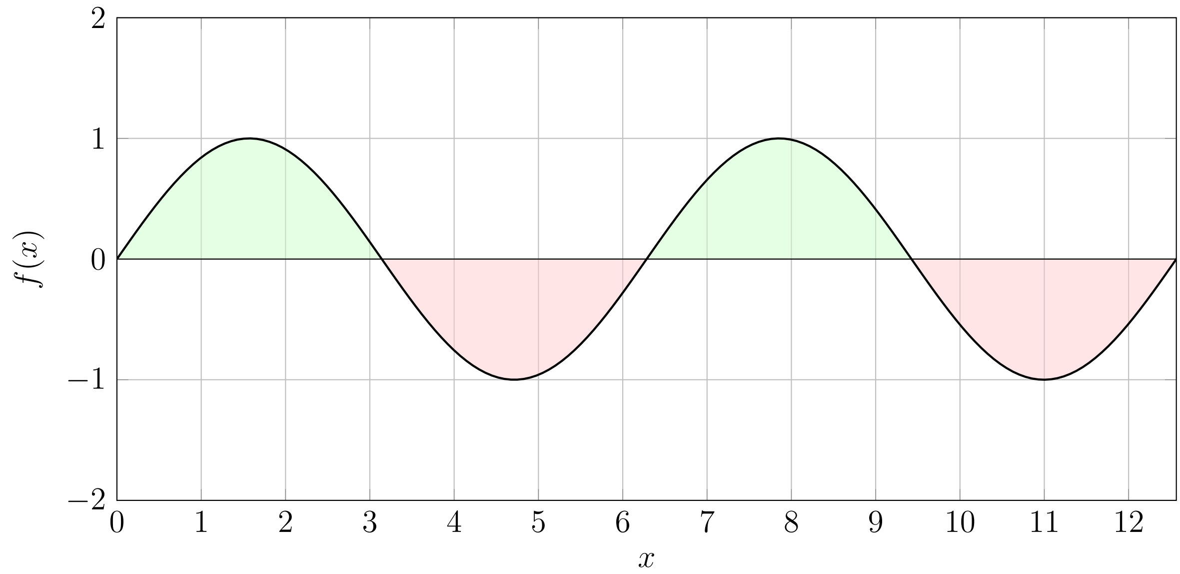
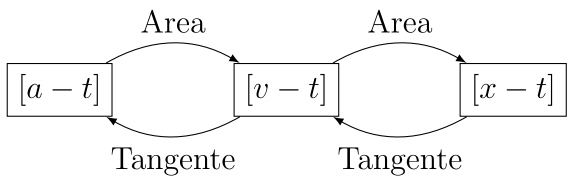


Figura 1: Segno area sottesa al grafico



In particolare il metodo dell'area e della tangente si comportano come segue:

1. AREA: il grafico calcolato in p vale quanto la somma dell'area sottesa al grafico di partenza fino a p. Nota che l'area va intesa con il segno, come in figura ??
2. TANGENTE: il grafico calcolato in p vale quanto l'inclinazione della retta tangente in p nel grafico di partenza

11 Equazioni di secondo grado e parabole

11.1 Terminologia

Definizione 41: *Forma normale*

Un'equazione si dice in forma normale se è scritta come un'equzione tra un polinomio e zero e non si può semplificare nulla

- Equazioni in forma normale:

$$15x^4 + x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 12x = 0 \qquad x^2 + 1 = 0$$

- Equazioni che NON sono in forma normale:

$$12x = 1 \qquad x^2 - x^2 + x = 0$$

non lo sono.

Definizione 42: *Equazione di secondo grado*

Un'equazione si dice di secondo grado se, una volta ridotta in forma normale l'esponente di grado massimo è uguale a 2

- Equazioni di secondo grado:

$$5x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad 5x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2$$
$$x^2 = -1 \qquad x^2 - 2x = 0$$

- Equazioni che NON sono di secondo grado:

$$2x + 1 = 0 \qquad 5x^2 - 5x^2 + 1 = -2$$
$$x^2 = x^2 + x \qquad 3x + 2 = -2x$$

Definizione 43: *Equazioni complete, pure, spurie, monomi*

Un' equazione di secondo grado può essere classificata in base a quali suoi coefficienti valgono. Una generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

viene detta:

- *Completa* se ne a ne b ne c valgono 0: $15x^2 + 2x - 10 = 0$
- *Pura* se solo $b = 0$: $15x^2 - 10 = 0$
- *Spuria* se solo $c = 0$: $15x^2 + 2x = 0$
- *Monomia* se sia b che c valgono 0: $15x^2 = 0$

11.2 Risoluzione equazioni di secondo grado

Ci occupiamo intanto della risoluzione delle equazioni NON fratte. Lo schema risolutivo è il seguente:

1. Tramite le proprietà delle equazioni, riduco al l'equazione nella sua forma normale
2. Trovare i risultati come indicato qui sotto, in base al tipo della equazione ottenuta vedi definizione 11.1

11.2.1 Equazioni complete

Per questo tipo di equazione esiste una formula nella quale possiamo inserire i parametri per ricavare le soluzioni. Data un'equazione di secondo grado nella seguente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

allora le soluzioni sono date da

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nota che

- La quantità $\sqrt{b^2 - 4ac}$ è detta determinante e si indica con Δ
- Questa formula può produrre 0,1 o 2 soluzioni a seconda del valore di Δ:
  - $\Delta < 0$: 0 soluzioni
  - $\Delta = 0$: 1 soluzione
  - $\Delta > 0$: 2 soluzioni

11.2.2 Esempio

Supponendo di avere:

$$2x^2 - 4x - 6$$

le soluzioni sono date da

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2) \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

11.2.3 Equazioni pure

Per questo tipo di equazioni è sufficiente portare a destra a e c ed eseguire la radice da entrambe le parti. Occhio al "$\pm$"!

$$ax^2 + c = 0 \to ax^2 = -c \to x^2 = \frac{-c}{a} \to x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Nota che

- Nell'ultimo passaggio va messo sempre il $\pm$. Basti pensare a $x^2 = 4$. Chiaramente $2 \cdot 2 = 4$ ma anche $-2 \cdot -2 = 4$. Questo è vero per qualsiasi numbero!
- Le equazioni pure hanno sempre 2 o 0 soluzioni, nel caso alla destra io ottenga rispettivamente un numero positivo o negativo

11.2.4 Esempio

Supponendo di avere:

$$4x^2 - 9 = 0$$

allora procedo così:

$$4x^2 = 9 \to \sqrt{4x^2} = \sqrt{9} \to 2x = 3 \to x = \frac{3}{2}$$

11.2.5 Equazioni spurie

Per questo tipo di equazioni si può sempre effettuare un raccoglimento della x, applicando poi la legge dell'annullamento del prodotto:

$$ax^2 + bx = 0 \to x\,(ax+b) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Nota che:

- Ho sempre esattamente 2 soluzioni
- Una soluzione è sempre 0. Questo perché la x compare in ogni fattore. Quando questa si annulla, l'equazione sarà sempre soddisfatta

11.2.6 Esempio

Supponiamo di avere:

$$5x^2 - 2x = 0$$

allora risolvo così

$$5x^2 - 2x = 0 \to x\,(5x-2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ (5x-2) = 0 \to x_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

11.2.7 Monomie

Il caso delle equazioni monomie è particolarmente semplice. La soluzione è <u>una</u>, ossia 0

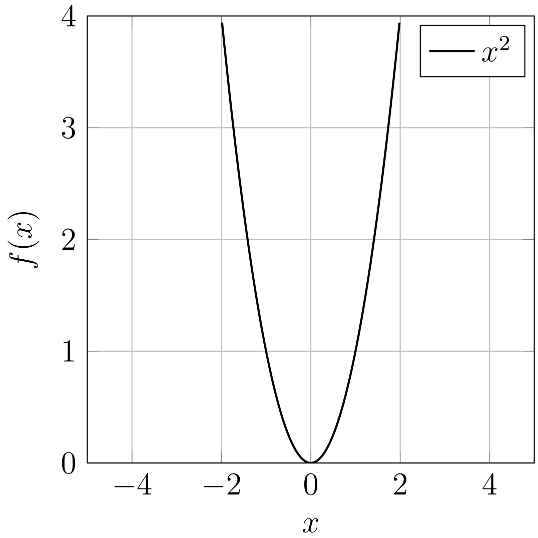
$$ax^2 = 0 \to x = 0$$

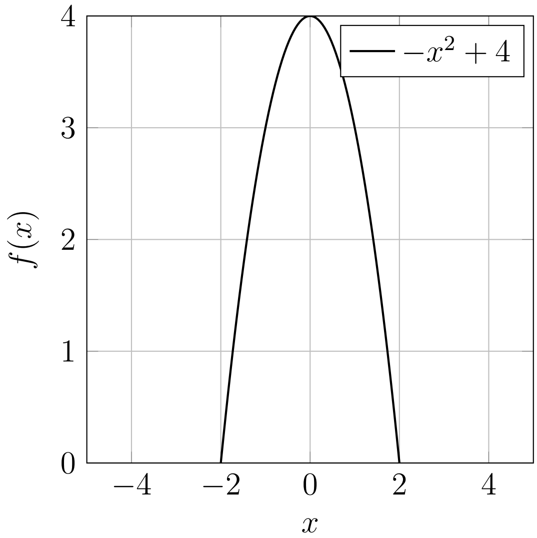
11.3 Grafico di una parabola

Per disegnare una parabola sul piano cartesiano possono esserci utilile seguenti nozioni. Consideriamo

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Se $a < 0$ allora la parabola ha concavità verso il basso, altrimenti verso l'alto

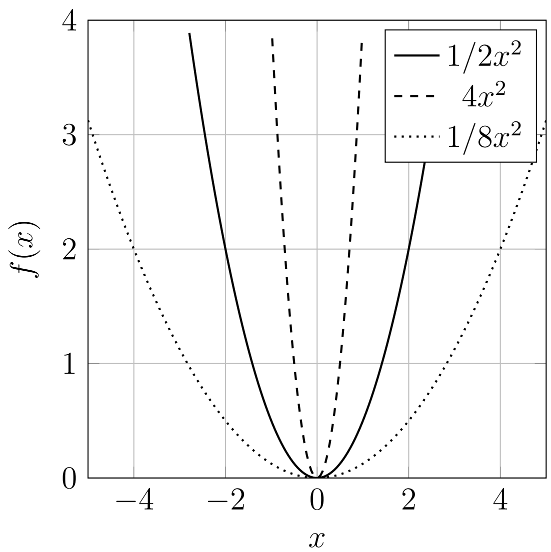




- Il vertice ha coordinate

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

- La parabola incontra l'asse x nelle x che risolvono l'equazione associata (ossia quella ottenuta ponendo la funzione = 0)
- Il valore c è detto *quota*, e indica il punto in cui la parabola incrocia l'asse y
- Il coefficiente a, indica quanto "ripida è la parabola"



12 Termodinamica

12.1 Dilatazione termica

Definizione 44: *Dilatazione termica lineare*

Dato un oggetto di lunghezza L_0 e un cambiamento di temperatura di ΔT gradi, allora la dilatazione lineare è pari a

$$\Delta L = L_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$$

dove γ è il coefficiente di dilatazione lineare, che è una costante caratteristica del materiale.

Definizione 45: *Dilatazione termina superficiale*

Dato un oggetto di area A_0 e un cambiamento di temperatura di ΔT gradi, allora la dilatazione quadratica è pari a

$$\Delta A = A_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$$

dove γ è il coefficiente di dilatazione quadratica, che è una costante caratteristica del materiale.

Definizione 46: *Dilatazione termica volumetrica*

Dato un oggetto di volume V_0 e un cambiamento di temperatura di ΔT gradi, allora la dilatazione cubica è pari a

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$$

dove γ è il coefficiente di dilatazione cubica, che è una costante caratteristica del materiale.

Teorema 34: *Rapporto tra coeffienti di dilatazione termica*

I coefficienti di dilatazione termica lineare(γ), superficiale γ_2 e volumetrica γ_3 sono legati dalla relazione:

$$\gamma_3 = 3 \cdot \gamma$$
$$\gamma_2 = 2 \cdot \gamma$$

12.2 Calore

Il calore è una forma di energia che è presente nel momento in cui due corpi di scambiano, per l'appunto, *calore*

Definizione 47: *Calore specifico*

Il calore specifico è la quantità di calore necessaria per aumentare la temperatura di un grammo di sostanza di un grado Celsius.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

quando di usano quete formule è necessario ricordarsi di usare i gradi Kelvin:

$$\text{gradi Kelvin} = \text{gradi Celsius} + 273$$

inoltre è spesso utile la caloria come unità di misura del calore:

$$1\,[\text{cal}] = 4.1868\,[\text{J}]$$

13 Riassuntone

13.1 Equazioni e disequazoni

Equazioni e disequazioni sono la base di ogni argomento che tratterai, quindi è importante averci familiarità.

13.1.1 Equazioni

Per risolvere le equazioni la stratega di base è sempre la stessa:

- Fare le C.E.
- Portare tutto a sinistra
- Mettere tutto a comune denominatore
- Imporre il numeratore $= 0$
- Verificare che le soluzioni trovate non appartengano ai valori esclusi dalle C.E.

Imporre il numeratore $= 0$ significa rsolvere un'equazone di grado x. Questo, in base al caso, può voler dire:

- Risolvere un' equazione di primo grado, in questo modo: $ax + b = 0 \to ax = b \to x = \frac{b}{a}$
- Risolvere un'equazione di secondo grado, il che può essere fatto iin pui modi:
  - Scomposizioine tramite trinomio speciale
  - Applicando la formula risolutiva:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Risolvere un'equazione di grado superiore al secondo, il che può richiedere "un po' di fantasia". Di solito si ricorre alla scomposizione tramite prodotti notevoli e raccoglimenti

13.1.2 Disequazioni

Il procedimento per risolvere una disequazione è uguale a quello per risolvere l'equazione associata, tuttavia vi è una differenza nell'ultimo step. In particolare, una volta ottenuta una forma del tipo:

$$\frac{A}{B} \geq 0$$

è necessario sudiare il segno di numerattore e denominatore separatamente.

13.2 Rette

Una retta è definita da un'equazione nella forma:

$$y = mx + q$$

dove m è detto *coefficiente angolare* e q è detta *quota*. In particolare:

- m indica di quanto "sale" sulla y ogni spostamento di 1 sulla x. Nello specifico, per ogni punto che appartenga alla retta vale:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- q definisce l'altezza del punto di inersezione fra la retta e l'asse y

13.3 Parabola

Una parabola è definita da un'equazione nella forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Se $a > 0$ la parabola ha concavità verso l'alto, altrimenti verso il basso
- Quanto più grande è $|a|$ tanto più "ripida" è la parabola
- c definisce l'altezza del punto di intersezione fra la parabola e l'asse y

In più, il vertice della parabola ha coordinate:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$