Ripetizioni Matteo

Marini Mattia

2024

Indice

Definizioni

1 Equazioni di secondo grado

1.1 Terminologia

Definizione 1: *Forma normale*

Un'equazione si dice in forma normale se è scritta come un'equzione tra un polinomio e zero e non si può semplificare nulla

- Equazioni in forma normale:

$$15x^4 + x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 12x = 0 \qquad x^2 + 1 = 0$$

- Equazioni che NON sono in forma normale:

$$12x = 1 \qquad x^2 - x^2 + x = 0$$

non lo sono.

Definizione 2: *Equazione di secondo grado*

Un'equazione si dice di secondo grado se, una volta ridotta in forma normale l'esponente di grado massimo è uguale a 2

- Equazioni di secondo grado:

$$\begin{array}{ll} 5x^2 - 2x + 1 = 0 & 5x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2 \\ x^2 = -1 & x^2 - 2x = 0 \end{array}$$

- Equazioni che NON sono di secondo grado:

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 = 0 & 5x^2 - 5x^2 + 1 = -2 \\ x^2 = x^2 + x & 3x + 2 = -2x \end{array}$$

Definizione 3: *Equazioni complete, pure, spurie, monomie*

Un' equazione di secondo grado può essere classificata in base a quali suoi coefficienti valgono. Una generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

viene detta:

- *Completa* se ne a ne b ne c valgono 0: $15x^2 + 2x - 10 = 0$
- *Pura* se solo $b = 0$: $15x^2 - 10 = 0$
- *Spuria* se solo $c = 0$: $15x^2 + 2x = 0$
- *Monomia* se sia b che c valgono 0: $15x^2 = 0$

1.2 Risoluzione equazioni di secondo grado

Ci occupiamo intanto della risoluzione delle equazioni NON fratte. Lo schema risolutivo è il seguente:

1. Tramite le proprietà delle equazioni, riduco al l'equazione nella sua forma normale
2. Trovare i risultati come indicato qui sotto, in base al tipo della equazione ottenuta vedi definizione 1.1

1.2.1 Equazioni complete

Per questo tipo di equazione esiste una formula nella quale possiamo inserire i parametri per ricavare le soluzioni. Data un'equazione di secondo grado nella seguente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

allora le soluzioni sono date da

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nota che

- La quantità $\sqrt{b^2 - 4ac}$ è detta determinante e si indica con Δ
- Questa formula può produrre 0,1 o 2 soluzioni a seconda del valore di Δ:
  - $\Delta < 0$: 0 soluzioni
  - $\Delta = 0$: 1 soluzione
  - $\Delta > 0$: 2 soluzioni

1.2.1 Esempio

Supponendo di avere:

$$2x^2 - 4x - 6$$

le soluzioni sono date da

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2) \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

1.2.2 Equazioni pure

Per questo tipo di equazioni è sufficiente portare a destra a e c ed eseguire la radice da entrambe le parti. Occhio al "$\pm$"!

$$ax^2 + c = 0 \to ax^2 = -c \to x^2 = \frac{-c}{a} \to x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Nota che

- Nell'ultimo passaggio va messo sempre il $\pm$. Basti pensare a $x^2 = 4$. Chiaramente $2 \cdot 2 = 4$ ma anche $-2 \cdot -2 = 4$. Questo è vero per qualsiasi numbero!
- Le equazioni pure hanno sempre 2 o 0 soluzioni, nel caso alla destra io ottenga rispettivamente un numero positivo o negativo

1.2.2 Esempio

Supponendo di avere:

$$4x^2 - 9 = 0$$

allora procedo così:

$$4x^2 = 9 \to \sqrt{4x^2} = \sqrt{9} \to 2x = 3 \to x = \frac{3}{2}$$

1.2.3 Equazioni spurie

Per questo tipo di equazioni si può sempre effettuare un raccoglimento della x, applicando poi la legge dell'annullamento del prodotto:

$$ax^2 + bx = 0 \to x\,(ax + b) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Nota che:

- Ho sempre esattamente 2 soluzioni
- Una soluzione è sempre 0. Questo perché la x compare in ogni fattore. Quando questa si annulla, l'equazione sarà sempre soddisfatta

1.2.3 Esempio

Supponiamo di avere:

$$5x^2 - 2x = 0$$

allora risolvo così

$$5x^2 - 2x = 0 \to x\,(5x - 2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ (5x - 2) = 0 \to x_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

1.2.4 Monomie

Il caso delle equazioni monomie è particolarmente semplice. La soluzione è una, ossia 0

$$ax^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

1.3 Esercizi

1.3.1 Pure

$$5x^2 - 20 = 0 \qquad 3x^2 - 27 = 0 \qquad 4x^2 - 36 = 0$$
$$2x^2 - 8 = 0 \qquad x^2 - 16 = 0 \qquad 6x^2 - 18 = 0$$

Soluzione 1

$$5x^2 - 20 = 0 \rightarrow 5x^2 = 20 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Soluzione 2

$$3x^2 - 27 = 0 \rightarrow 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

Soluzione 3

$$4x^2 - 36 = 0 \rightarrow 4x^2 = 36 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

Soluzione 4

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Soluzione 5

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

Soluzione 6

$$6x^2 - 18 = 0 \rightarrow 6x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

1.3.2 Spurie

$$4x^2 - 8x = 0 \qquad 6x^2 - 18x = 0 \qquad 5x^2 - 10x = 0$$
$$3x^2 - 9x = 0 \qquad 2x^2 - 4x = 0 \qquad 7x^2 - 21x = 0$$

Soluzione 1

$$4x^2-8x=0 \rightarrow x\,(4x-8)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Soluzione 2

$$6x^2-18x=0 \rightarrow x\,(6x-18)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3 \end{cases}$$

Soluzione 3

$$5x^2-10x=0 \rightarrow x\,(5x-10)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Soluzione 4

$$3x^2-9x=0 \rightarrow x\,(3x-9)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3 \end{cases}$$

Soluzione 5

$$2x^2-4x=0 \rightarrow x\,(2x-4)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Soluzione 6

$$7x^2-21x=0 \rightarrow x\,(7x-21)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3 \end{cases}$$

1.3.3 Complete

$$\begin{array}{lll} 3x^2-4x-7=0 & 5x^2+8x-3=0 & 2x^2-6x+4=0 \\ x^2-2x-8=0 & 4x^2+12x+5=0 & 6x^2-11x+2=0 \end{array}$$

Soluzione 1:

$$3x^2-4x-7=0 \qquad \underbrace{(3)}_{a}x^2+\underbrace{(-4)}_{b}x+\underbrace{(-7)}_{c}=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-7)}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{6} \begin{cases} x_1=\dfrac{4+10}{3} \\ x_2=\dfrac{4-10}{3} \end{cases}$$

Soluzione 1:

$$3x^2 - 4x - 7 = 0 \qquad \underbrace{(3)}_{a}\,x^2 + \underbrace{(-4)}_{b}\,x + \underbrace{(-7)}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}$$

Soluzione 2:

$$5x^2 + 8x - 3 = 0 \qquad \underbrace{(5)}_{a}\,x^2 + \underbrace{(8)}_{b}\,x + \underbrace{(-3)}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{10}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{31}}{5}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{31}}{5}$$

Soluzione 3:

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \qquad \underbrace{(2)}_{a}\,x^2 + \underbrace{(-6)}_{b}\,x + \underbrace{(4)}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4}$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Soluzione 4:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad \underbrace{(1)}_{a}\,x^2 + \underbrace{(-2)}_{b}\,x + \underbrace{(-8)}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{2 - 6}{2} = -2$$

Soluzione 5:

$$4x^2 + 12x + 5 = 0 \qquad \underbrace{(4)}_{a}\,x^2 + \underbrace{(12)}_{b}\,x + \underbrace{(5)}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{8} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8}{8} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Soluzione 6:

$$6x^2 - 11x + 2 = 0 \qquad \underbrace{(6)}_{a}\, x^2 + \underbrace{(-11)}_{b}\, x + \underbrace{(2)}_{c} = 0$$

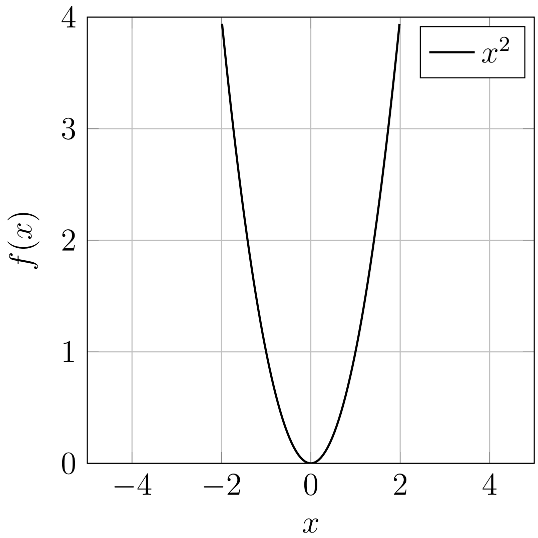
$$x_{1/2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{12} \begin{cases} x_1 = \dfrac{11 + \sqrt{73}}{12} \\ x_2 = \dfrac{11 - \sqrt{73}}{12} \end{cases}$$

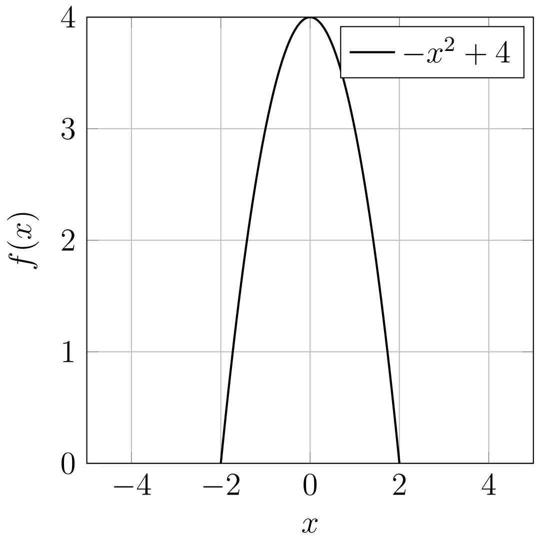
1.4 Grafico di una parabola

Per disegnare una parabola sul piano cartesiano possono esserci utilile seguenti nozioni. Consideriamo

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Se $a < 0$ allora la parabola ha concavità verso il basso, altrimenti verso l'alto





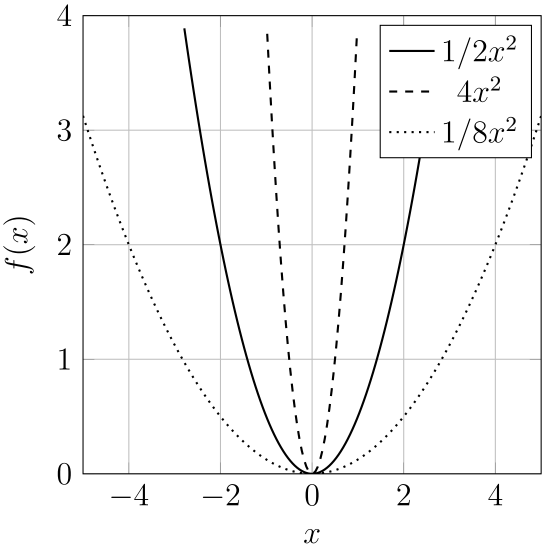
- Il vertice ha coordinate

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

- La parabola incontra l'asse x nelle x che risolvono l'equazione associata (ossia quella ottenuta ponendo la funzione = 0)

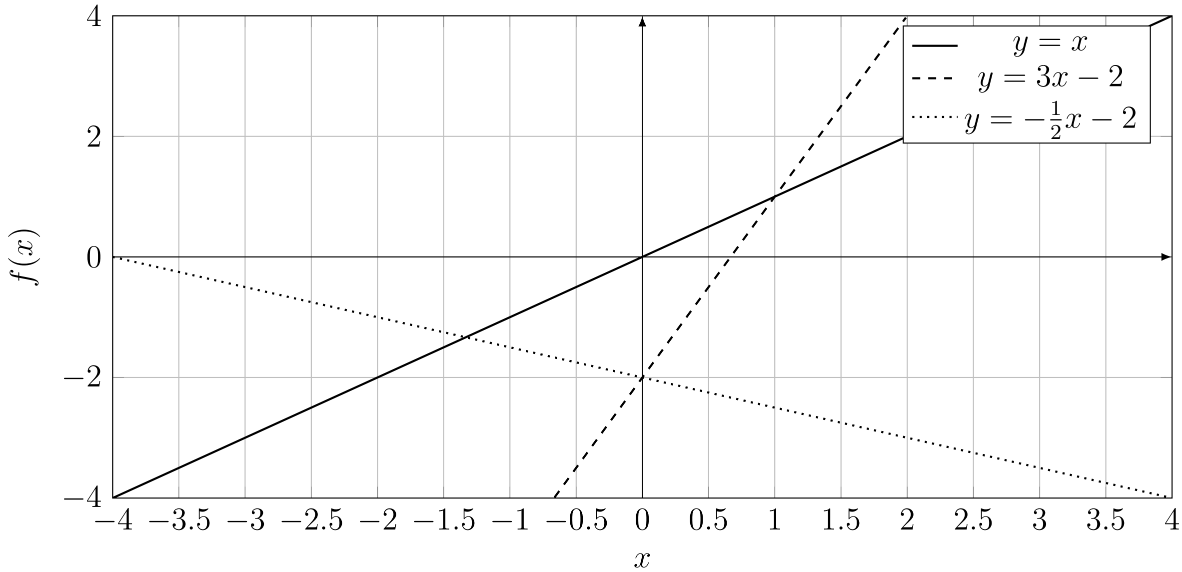
- Il valore c è detto *quota*, e indica il punto in cui la parabola incrocia l'asse y

- Il coefficiente a, indica quanto "ripida è la parabola"



2 La retta nel piano cartesiano

Come rappresentiamo una parabola nel piano cartesiano, possiamo rappresentare anche una retta. Se le seguenti sono tutte rette nel piano cartesiano:



Vediamo ora la forma della equazione e cosa considerare per disegnarne una sul piano cartesiano.

2.1 Equazione retta e grafico

Una retta ha equazione di tipo:

$$y = mx + c$$

dove m è detto *coefficiente angolare* e c è detto, come nelle parabole, *quota*.

- c, come nelle parabole, indica l'altezza alla quale la retta interseca l'asse y

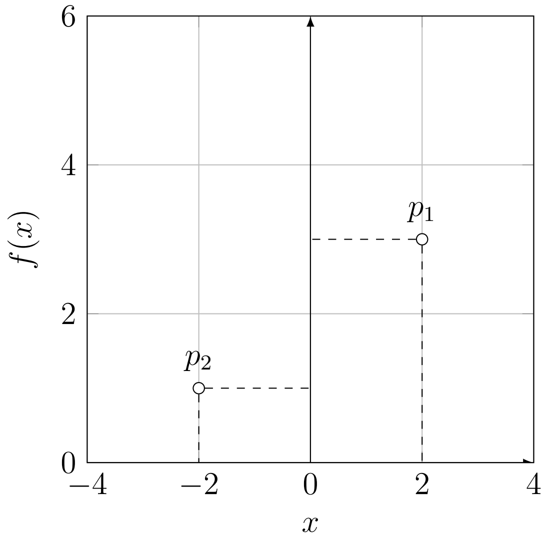
- m, ossia il coefficiente angolare, indica quanto la retta è inclinata sull'asse orizzontale. Per valori di m molto grandi, la retta sarà quasi verticale, mentre per valori molto bassi sarà quasi orizzontale. Per valori positivi sarà in "salita" e per valori negativi sarà in "discesa"

2.1.0 Disegno

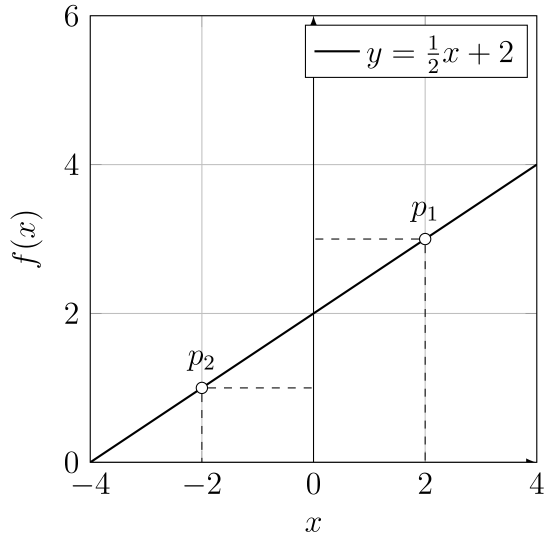
Data una retta con equazione $y = mx + c$, per ottenere il disegno è sufficiente calcolare due punti e tracciare l'unica retta passante per entrambi. Cinsideriamo

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Calcolo $f(-2)$ e $f(2)$ e segno punti:



Traccio unica retta passante per entrambi



2.1.0 Ricavare equzione da disegno

Dato un disegno di una retta, possiamo sfruttare le seguenti proprietà per ricavarne l'equazione come segue:

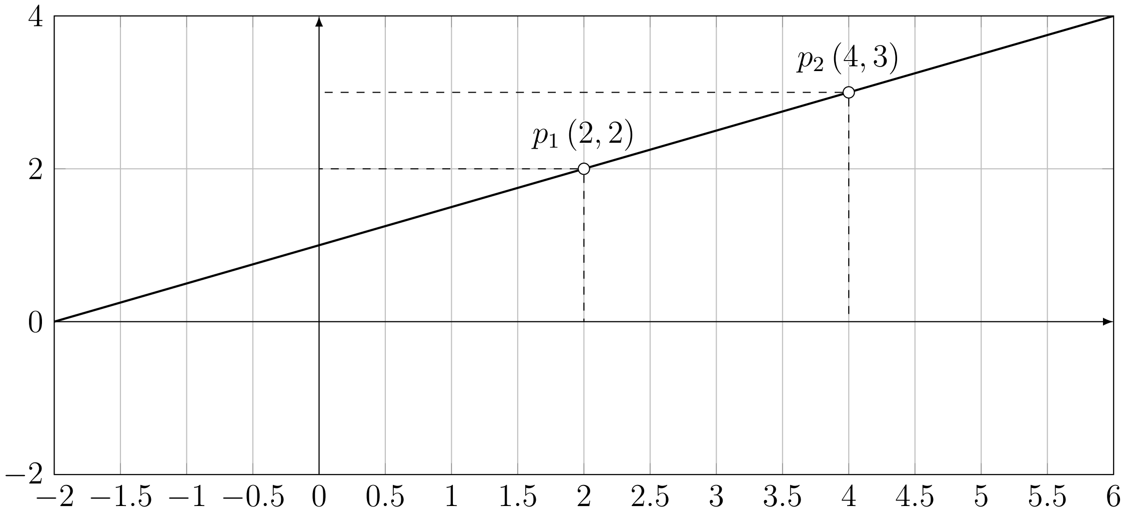
- c è l'altezza a cui la retta interseca l'asse y
- m, dati due punti qualsiasi appartenenti alla retta è uguale a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Quindi operativamente, dato un grafico di una retta, per ottenere la sua equazinoe bisogna:

- Ricavare il coefficiente angolare, prendendo due punti e dividendo la differenza delle loro y per la differenza delle loro x
- Trovare c inserendo uno dei due punti della retta e risolvendo un'equazione di primo grado in c

2.1.0 Esempio



1. Trovare m, ossia il coefficiente angolare:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$$

2. Trovare c, inserendo un punto qualsiasi della retta nella sua equazione:

$$y = mx + c \to y = \frac{1}{2}x + c$$

   Inserendo p_2:

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 4 + c \to c = 3 - 2 = 1$$

   oppure inserendo p_1:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + c \to c = 2 - 1 = 1$$

3. Quindi, sapendo che $m = \frac{1}{2}$ e $c = 1$, l'equazione della retta sarà:

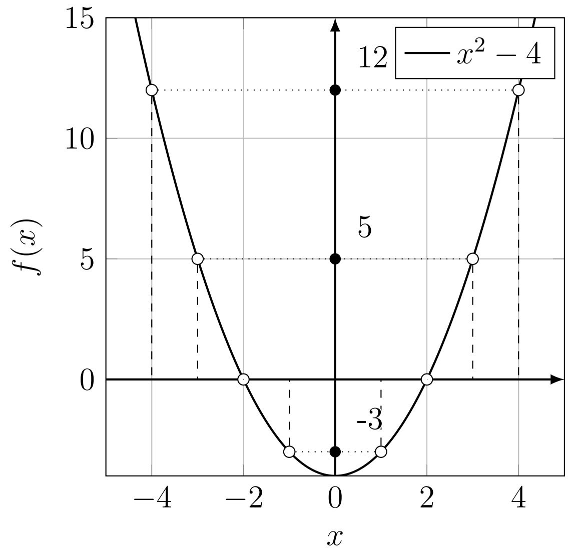
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

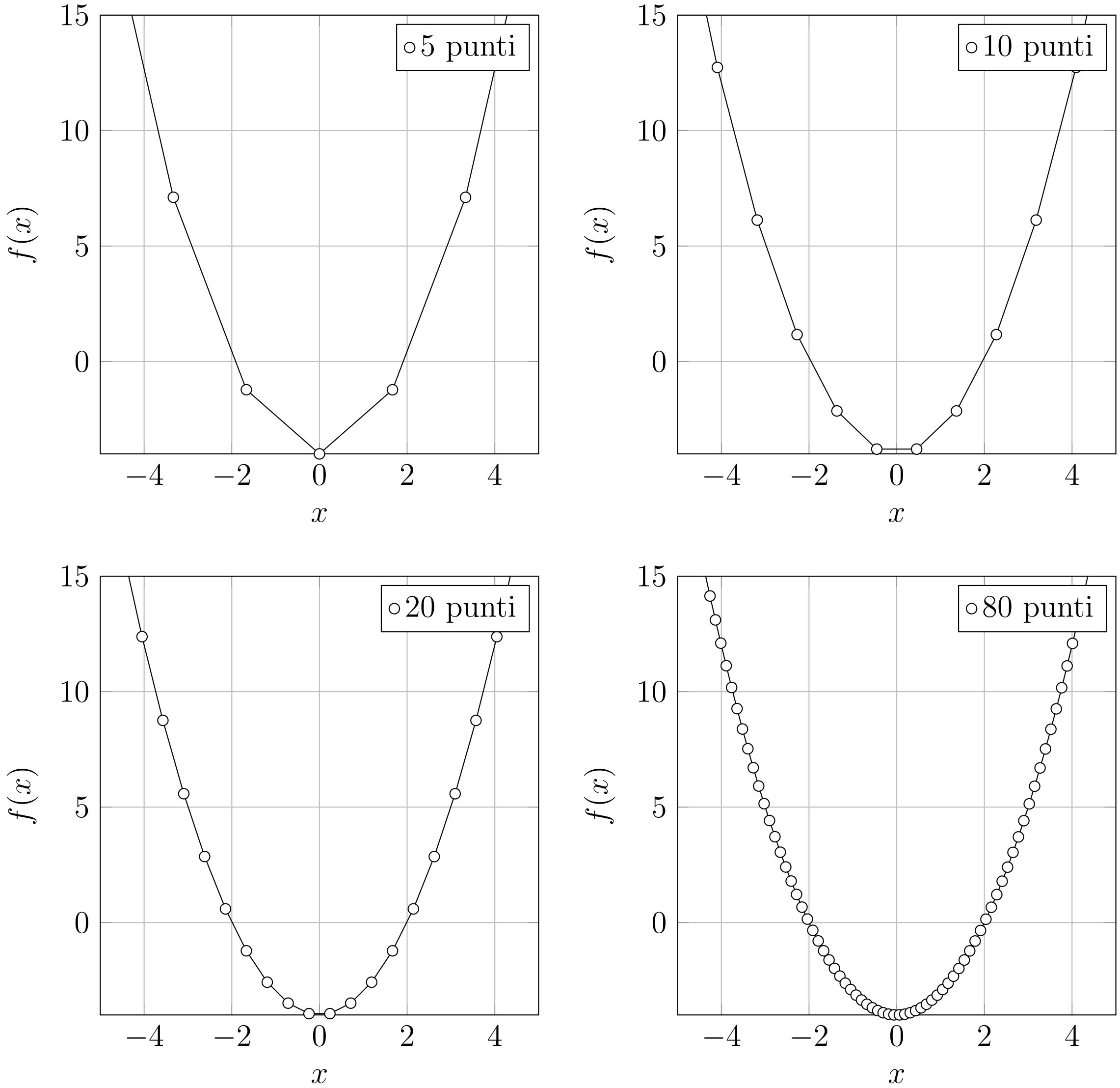
   i

3 Significato di una funzione

Consideriamo ora una funzione che costituisce una parabola

$$x^2 - 4$$





4 Sistemi lineari

Definizione 4: *Sistema lineare*

Un sistema lineare è un sistema di equazioni in più incognire dove ogni incognita compare con esponente massimo pari ad 1

Ad esempio

$$\begin{cases} x + 3y - z = 15 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

é un sistema lineare, mentre

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 3\sqrt{z} = 12 \\ 2x - xy - z = 0 \end{cases}$$

non lo è

4.1 Soluzioni di un sistema lineare

Un sistema lineare può avere 0, 1 o infinite soluzioni. Particolare

- 1 soluzione se vi sono tante incognite quante equazioni

5 Fisica

5.0.0 Notazione scientifica

La notazione scientifica è un modo comodo per riscrivere un numero molto grande o molto piccolo. Ad esempio:

$$300.000 = 3 \cdot 10^5$$

5.0.0 Conversione a notazione scientifica

Per convertire un numero in notazione scientifica occorre seguire questi passaggi:

1. Sposta la virgola in maniera tale che resti alla sinistra *solo 1 cifra diversa da 0*, tenendo contro di quanto la abbiamo spostata

   $$198,274 \text{ diventa } 1,98 \text{ spostando la virgola di 2 passi}$$

2. Moltiplicare il numero ottenuto per 10^x, dove x è quanto abbiamo spostato la virgola e ha segno:

   - *Positivo* se la abbiamo spostata verso *sinistra*
   - *Negativo* se la abbiamo spostata verso *destra*

   $$1,98 \cdot 10^2$$

5.1 Unità di misura e conversioni

10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
chilo	etto	deca	deci	centi	milli

10^{12}	10^9	10^6	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
tera	mega	giga	micro	nano	pico

$$\frac{1}{2} + \int_a^b f(x)\, dx$$

5.2 Moto rettilineo uniformement accelerato

Nel momento in cui la velocità di un oggetto cambia, si parla di moto rettilineo uniformemente accelerato Ricordiamo innanzitutto le formule di accelerazione e velocità media:

Definizione 5: *Velocità media*

La velocità *media* fra due istanti f e i di un corpo è data per definizione dalle seguenti formule:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Definizione 6: *Velocità media*

L'accelerazione fra due istanti f e i di un corpo è data per definizione dalle seguenti formule:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Definizione 7: *Accelerazione e velocità media*

La velocità *media* e accelerazione fra due istanti f e i di un corpo è data per definizione dalle seguenti formule:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \qquad v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Inoltre, la formula più importante di tutte da tenere a mente è la legge oraria:

Definizione 8: *Legge oraria MRUA*

Dato un corpo che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, la sua posizione in funzione del tempo è data da

$$x = \frac{1}{2}at^2 + vt + x_0$$

L'ultima formula che serve sapere è quella che collega la velocità all'accelerazione:

Definizione 9: *Rapporto tra velocità e accelerazione*

Dato un corpo con accelerazione costante a e velocità iniziale v_0, la sua velocità dopo t secondi è data da:

$$v = +at + v_0$$