Ripetizioni Annalisa

Marini Mattia

Ottobre 2024

Indice

1 Conoscenze fondamentali

1.1 Derivate

Qui di seguito un cheatsheet con le regole di derivazione delle funzioni fondamentali:

Nome funzione	$f(x)$	$f'(x)$
Polinomio	x^n	nx^{n-1}
Costante	c	0
Esponenziale	e^x	e^x
Esponenziale con base a	a^x	$a^x \ln(a)$
Logaritmo naturale	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Seno	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Coseno	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
Tangente	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
Cotangente	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Qui di seguito un cheasheet con le regole di derivazioni per funzioni composte, prodotti e divisioni di funzioni:

Tipo operazione	$f(x)$	$f'(x)$
Prodotto per costante	$cf(x)$	$cf'(x)$
Prodotto fra funzioni	$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Quoziente	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Funzione composta	$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

1.2 Limiti

Per quanto riguarda i limiti è fondamentale:

- Avere chiaro dal punto di vista intuitivo il concetto di infinito, classi di infinito e di "tendere a" (avvicinarsi asintoticamente ad un valore)
- Sapere risolvere limiti e in particolare le forme indeterminate

Funzione	limite	tipo F.I
Seno	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\left[\frac{0}{0}\right]$
Coseno	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\left[\frac{0}{0}\right]$
Numero di Nepero	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	1^∞
Esponenziale	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\left[\frac{0}{0}\right]$
Logaritmo	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\left[\frac{0}{0}\right]$
Potenza di se stessa	$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$	0^0

NB: spesso ricondursi ad un limite notevole è più impegnativo che applicare de l'Hopital meccanicamente. L'unico caso in cui è necessario l'utilizzo di un limite notevole è quello in cui si ha 0^0 o 1^∞

1.2.0 Cheatsheet forme indeterminate

Limite

- $[\infty - \infty]$
  - Razionalizzazione inversa
- $[1^\infty]$
  - Limite di Nepero
  - Utilizzo $x = e^{\ln(x)}$
- $[0^\infty]$ o $[\infty^0]$
  - Utilizzo $x = e^{\ln(x)}$
- $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
  - Confronto tra classi di infinito
  - Raccoglimento (con polinomi)
  - De l'Hopital

1.2.0 Classi di infiniti

"Rapidità" con cui funzioni note tendono ad infinito (in ordine descrescente)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$\boxed{x!}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{n^x \to (n-1)^x \to e^x \dots 3^x \to 2^x \to}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{x^n \to x^{n-1} \dots x^2 \to x^1}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{\sqrt{x} \to \sqrt[3]{x} \to x^{\frac{1}{4}} \dots}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{\log_2(x+1) \to \ln(x+1) \to \log_3(x+1) \dots}$$

"Rapidità" con cui funzioni note tendono a 0 (in ordine descrescente)

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

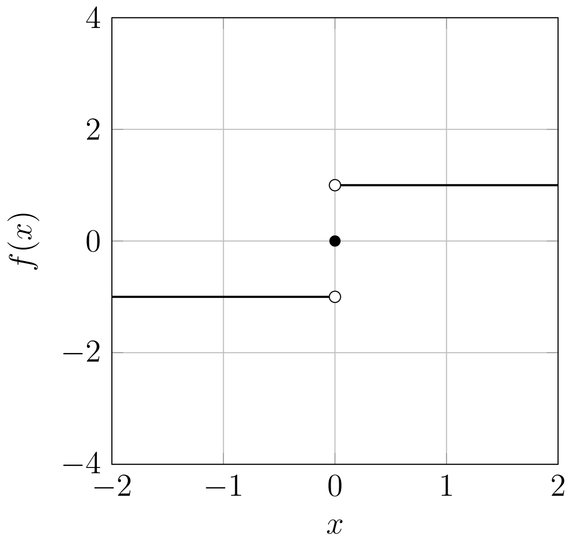
$$\boxed{x^n \to x^{n-1} \dots x^2 \to x^1}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{\sqrt{x} \to \sqrt[3]{x} \to x^{\frac{1}{4}} \dots}$$
$$\uparrow$$
$$\boxed{\log_2(x) \to \ln(x) \to \log_3(x) \dots}$$

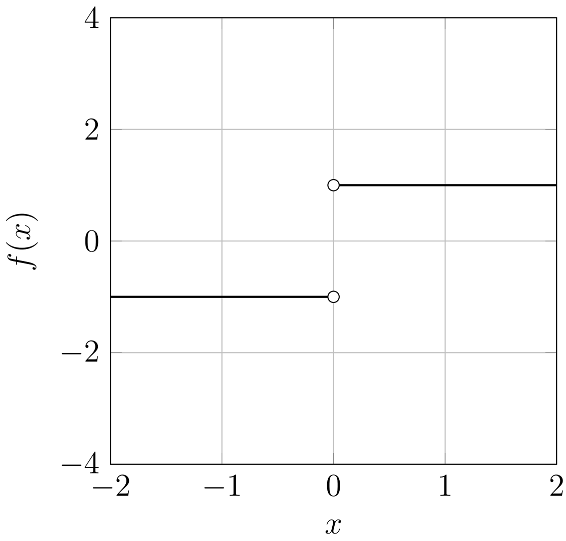
2 Punti di discontinuità

2.1 Discontinuità a salto finito

Limite destro e sinistro tendono a valori finiti ma diversi tra loro:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{esiste finito}$$



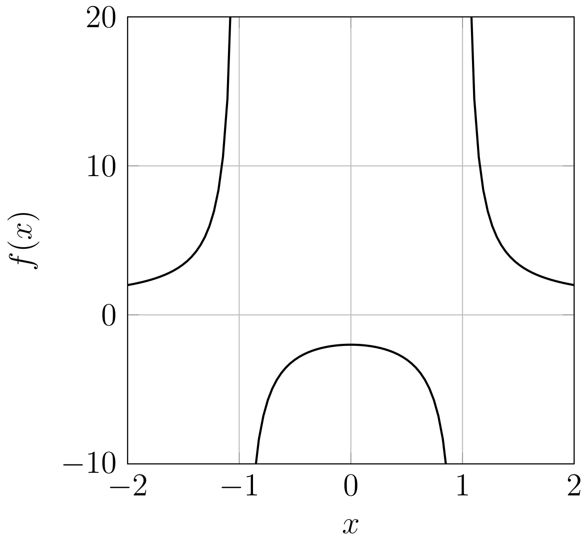


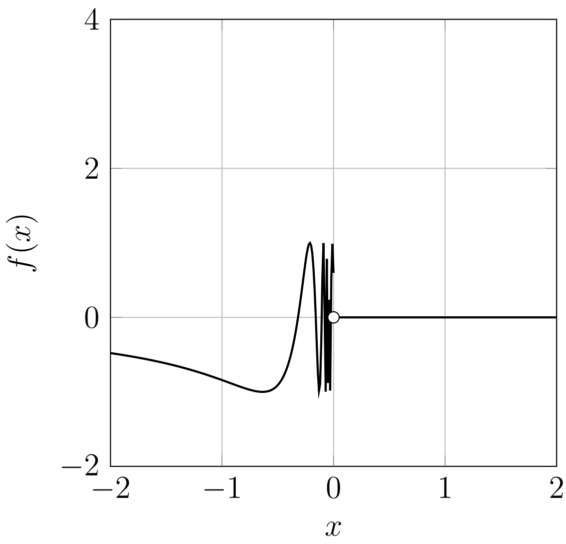
2.2 Discontinuità di secondo tipo

Almeno uno dei due limiti (sinistro o destro) tende a valori infiniti o non esiste:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \begin{cases} \pm\infty \\ \nexists \end{cases} \qquad \text{oppute} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \begin{cases} \pm\infty \\ \nexists \end{cases}$$

$$f\left(x\right) = \frac{x^2+2}{x^2-1} \qquad\qquad f\left(x\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x<0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

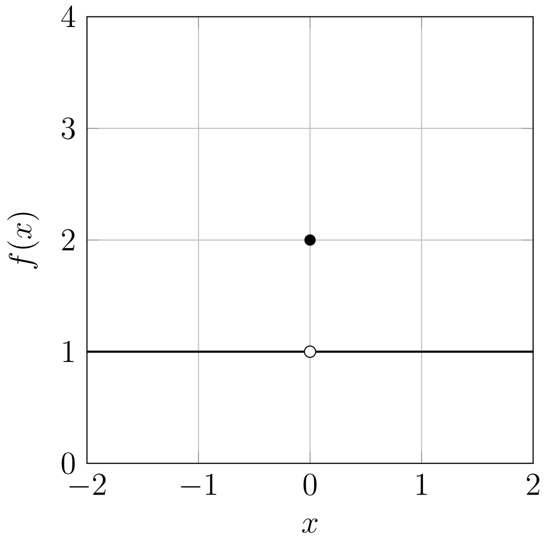




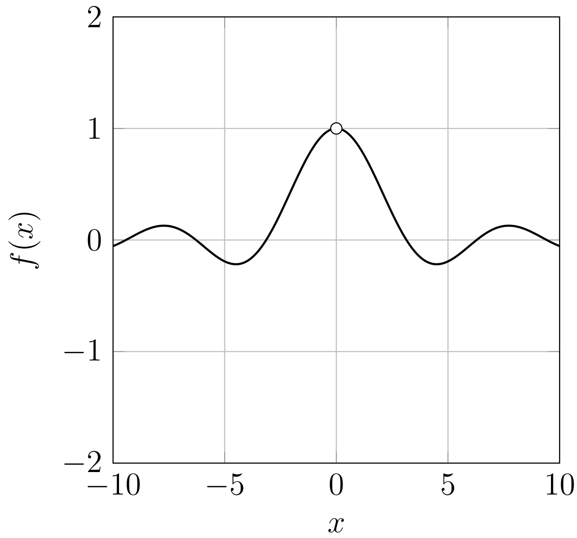
2.3 Discontinuità eliminabile

I limiti destro e sinitro esistono *finiti* e *coincidono* ma in quel punto la funzione ha vaole diverso o non è definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



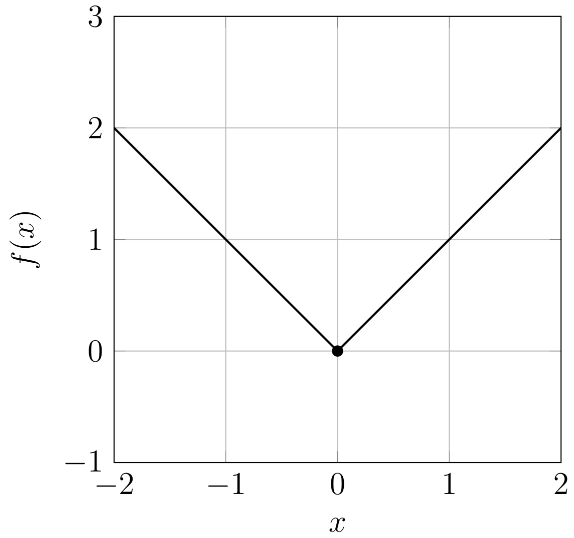
La discontinuità è detta eliminabile in quanto è possibile rendere la funzione continua modificando solamente il punto in cui questa presenta la discontinuità stessa, facendolo coincidere con il limite destro e sinistro

3 Punti di non derivabilità

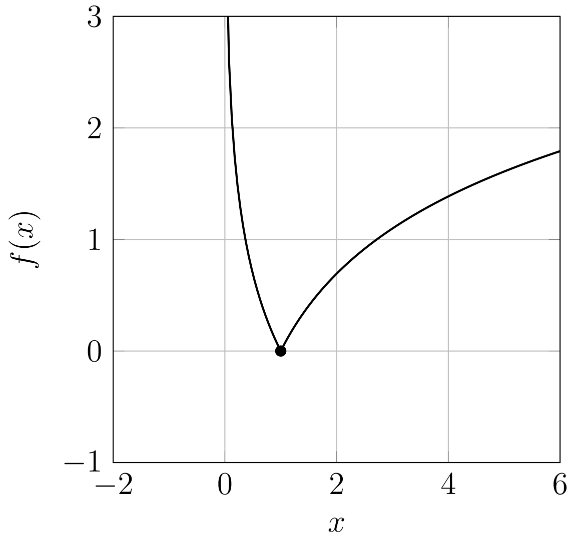
3.1 Punto angoloso

Il limite destro e sinistro della derivata prima sono valori finiti ma non coincidono

$$f(x) = |x|$$



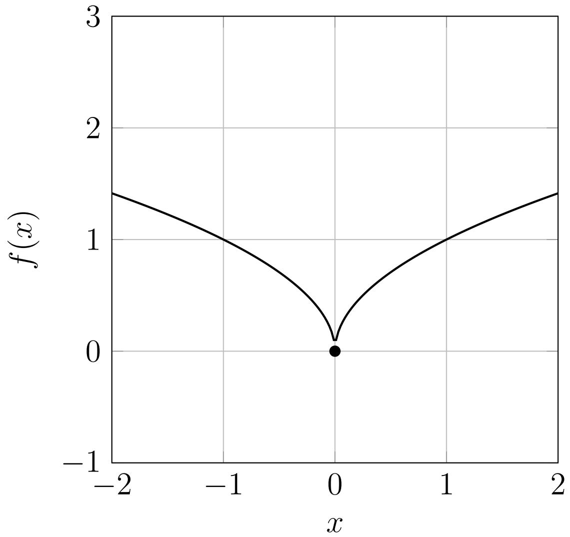
$$f(x) = |\ln(x)|$$



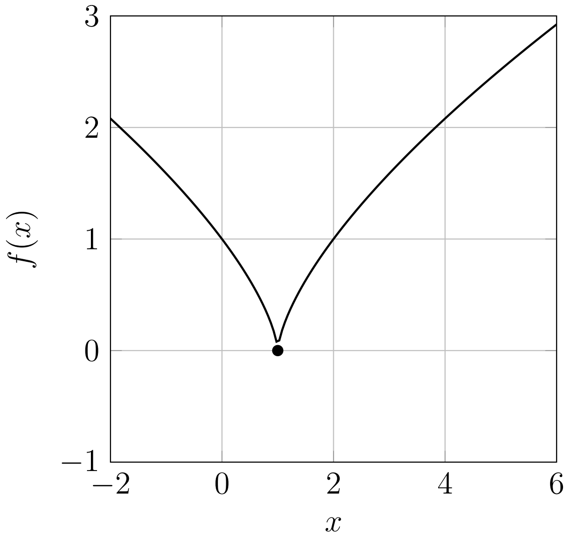
3.2 Cuspide

Il limite destro e sinistro della derivata prima sono *infiniti di segno opposto*

$$f(x) = |x|$$

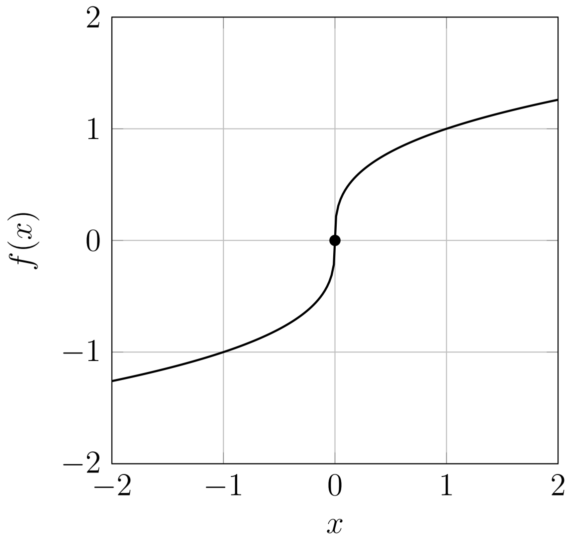


$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

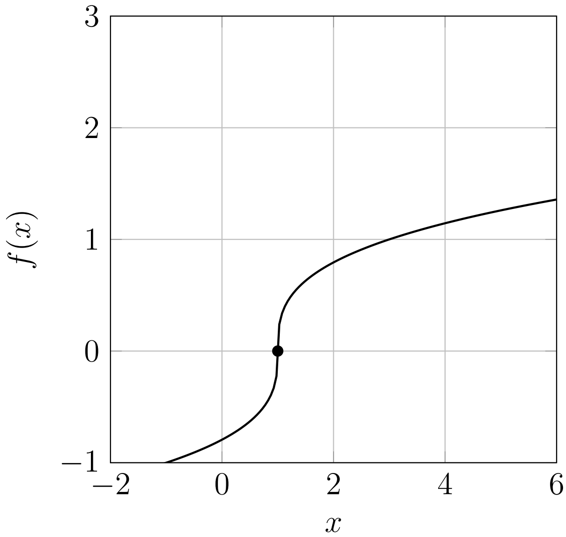


3.3 Flesso a tangenza verticale

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



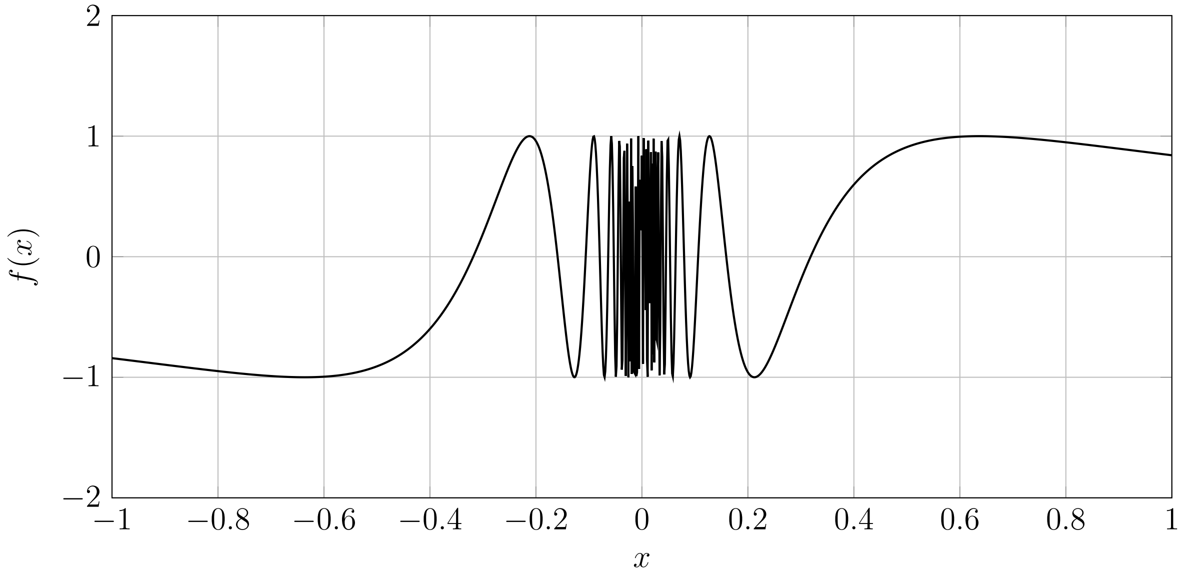
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-1)}{2}}$$



3.4 Casi particolari

Oltre ai casi sopra citati, vi sono casi particolari in cui non è possibile parlare di derivata di una funzione. Il seguente è quello più comune:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Avvicinandosi all'origine, la funzione oscilla sempre più rapidamente, dunque la sua derivata non tende a nessun valore, ma oscillerà sempre più velocemente anch'essa

4 Esercizi preliminari studio di funzione

Esercizio 1: *Classicifa punti discontinuità (p. 1560 n. 853)*

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ ln(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

calcolane i punti di discontinuità e nel casi siano di prima specie, calcolane il salto

4.0.0 Soluzione

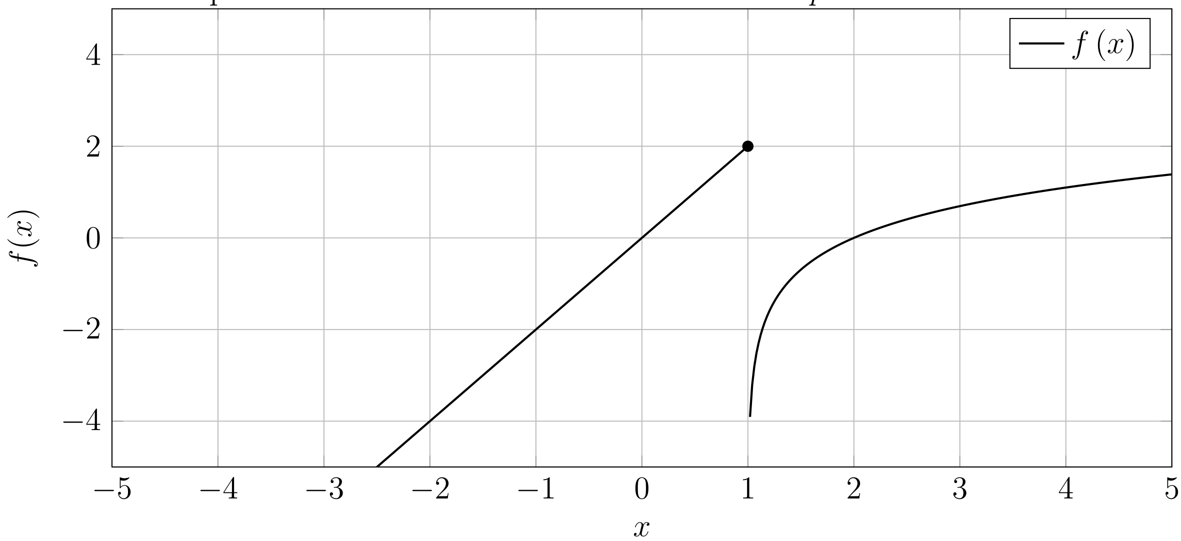
Il dominio di $2x$ è $\mathbb{R}$, mentre il dominio di $\ln(x-1)$ è $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x > 1$. Il dominio di $f(x)$ è dunque:

$$\mathbb{R} - \{1\}$$

I limiti destro e sinistro valgono:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} ln(x-1) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2$$

rientriamo dunque nel caso della *discontinuità di secondo tipo*

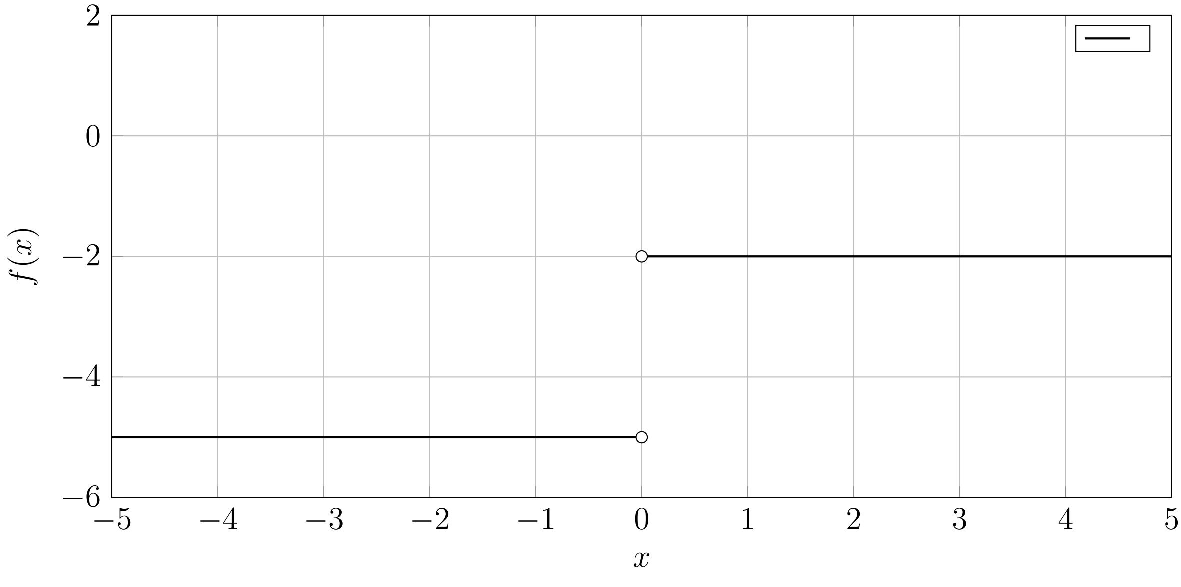


Esercizio 2: *Classicifa punti discontinuità (p. 1561 n. 856)*

Data la funzione

$$f(x) = \frac{2|x|}{x} - 3$$

calcolane i punti di discontinuità e nel casi siano di prima specie, calcolane il salto



Esercizio 3: *Classicifa punti discontinuità (p. 1561 n. 871)*

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$$

calcolane i punti di discontinuità e nel casi siano di prima specie, calcolane il salto

Qui la situazione è un po' più complicata in quanto dal dominio vanno esclusi tutti e soli i valori che annullano il denominatore. Essendo quest'ultimo una funzione trigonometrica, avremo infiniti valori per i quali questo sarà nullo. Partiamo imponento il denominatore

$= 0$:

$$\sin(2x) = 0 \to 2x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{2} \qquad \text{dove } k \in \mathbb{N}$$

Prendiamo ora due punti x_1 e x_2 esclusi dal dominio e studiamo il comportamento della funzione nel loro intorno:

$$x_1 = \frac{1 \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

calcoliamo limite destro e sinistro:

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi)}\right] = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi)}\right] = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

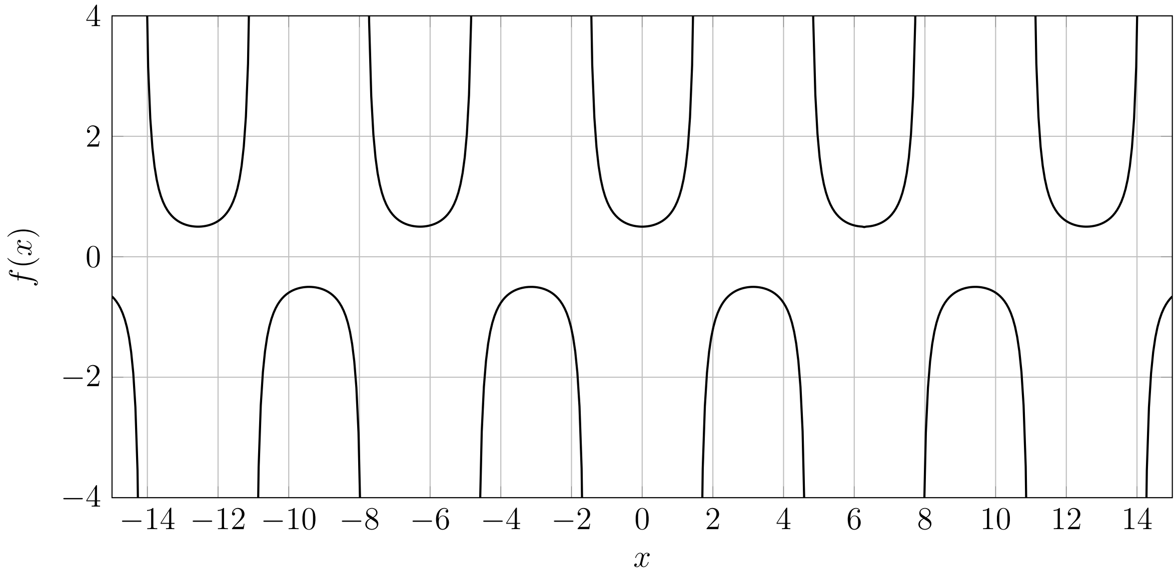
facendo la stessa cosa con x_2 ottengo una forma indeterminata che posso risolvere riscrivendo l'espressione così:

$$\frac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{2\cos(x)}$$

dunque facendo il limite

$$\lim_{x \to x_2} \frac{1}{2\cos} = \left[\frac{1}{2\cos(\pi)}\right] = \frac{1}{2}$$

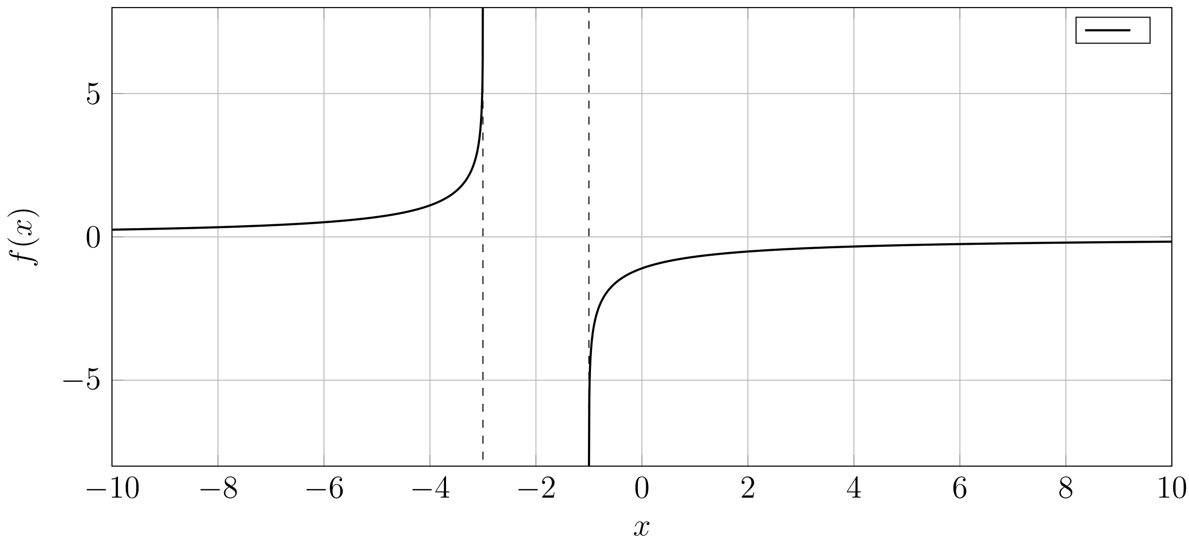
Il risultato è dunque interessante: ottengo un punto di discontinuità di secondo tipo per ogni k *dispari*, mentre un punto di discontinuità eliminabile per ogni k *pari*



Esercizio 4: *Individua gli asintoti (p. 1565 n.939)*

Individua asintoti orizzontali e verticali della seguente funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)$$



Esercizio 5: *Individua gli asintoti (p. 1567 n.964)*

Individua asintoti obliqui della seguente funzione

$$f(x) = x + e^{-x} + 1$$

Si tratta di risolvere due limiti. Trovo m

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + e^{-x} + 1}{x} = 1$$

trovo c:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} x + e^{-x} + 1 - x = 1$$

quindi $m = 1$ e $c = 1$. L'equazione dell'asintoto obliquo è $y = x + 1$

5 Studio di funzione

5.1 Teoria

In ogni studio di funzione è opportuno affrontare i seguenti passaggi nell'ordine indicato, ottenendo passo per passo un grafico approssimato

1. *Dominio*
   - Trovo valori per i quali la funzione non ha senso
2. *Segno*
   - Risolvo equazione associata
   - Trovo zeri e intervalli in cui la funzione è positiva o negativa
3. *Limiti*
   - Vedo come funzione si comporta a $\pm\infty \to \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$:
   - Vedo come funzione si comporta ad estremi del dominio e in punti esculsi dal dominio

- Trovo asintoti orizzontali, verticali ed obliqui
  - Verticali: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ dove x_0 è un punto escluso dal dominio
  - Orizzontali: se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$, dove k è numero finito
  - Obliqui: se $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ dove m è finino ed è il coefficiente angolare della retta asintoto. Il quozioente di tale retta è : $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

4. *Derivata prima*
   - se $f'(x) > 0$ allora f cresce
   - se $f'(x) < 0$ allora f decresce
   - se $f'(x) = 0$ allora ho 3 opzioni:
     - Punto di minimo locale/assoluto
     - Punto di massimo locale/assoluto
     - Flesso a tangenza orizzontale

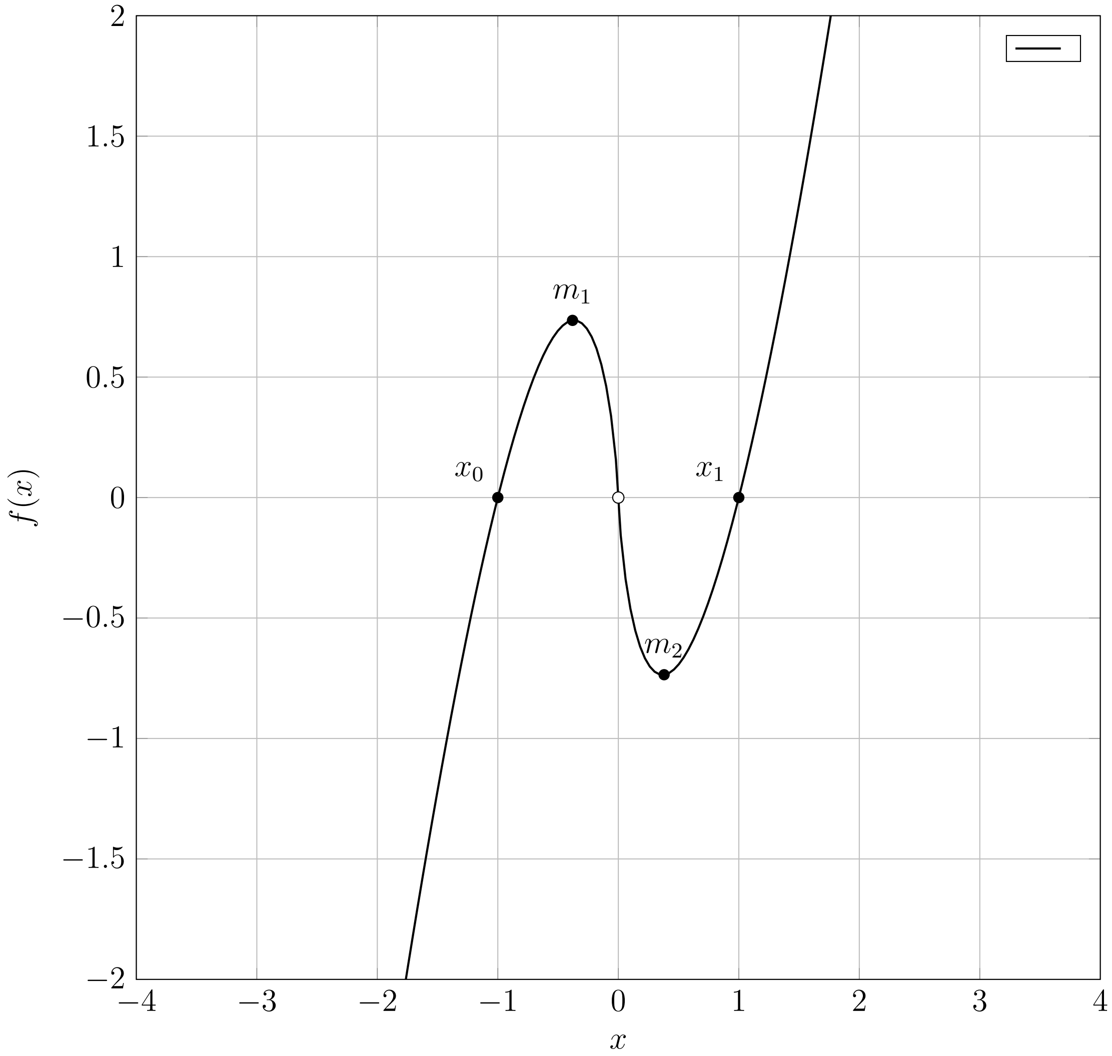
5. *Derivata seconda*
   - se $f''(x) > 0$ allora f ha concavità verso l'alto
   - se $f''(x) <$ allora f ha concavità verso il basso
   - se $f''(x) = 0$ allora non si può dire nulla

5.2 Esercizi

Esercizio 6: *Studio di funzione*

Studia la seguente funzione:

$$xln\left(x^2\right)$$

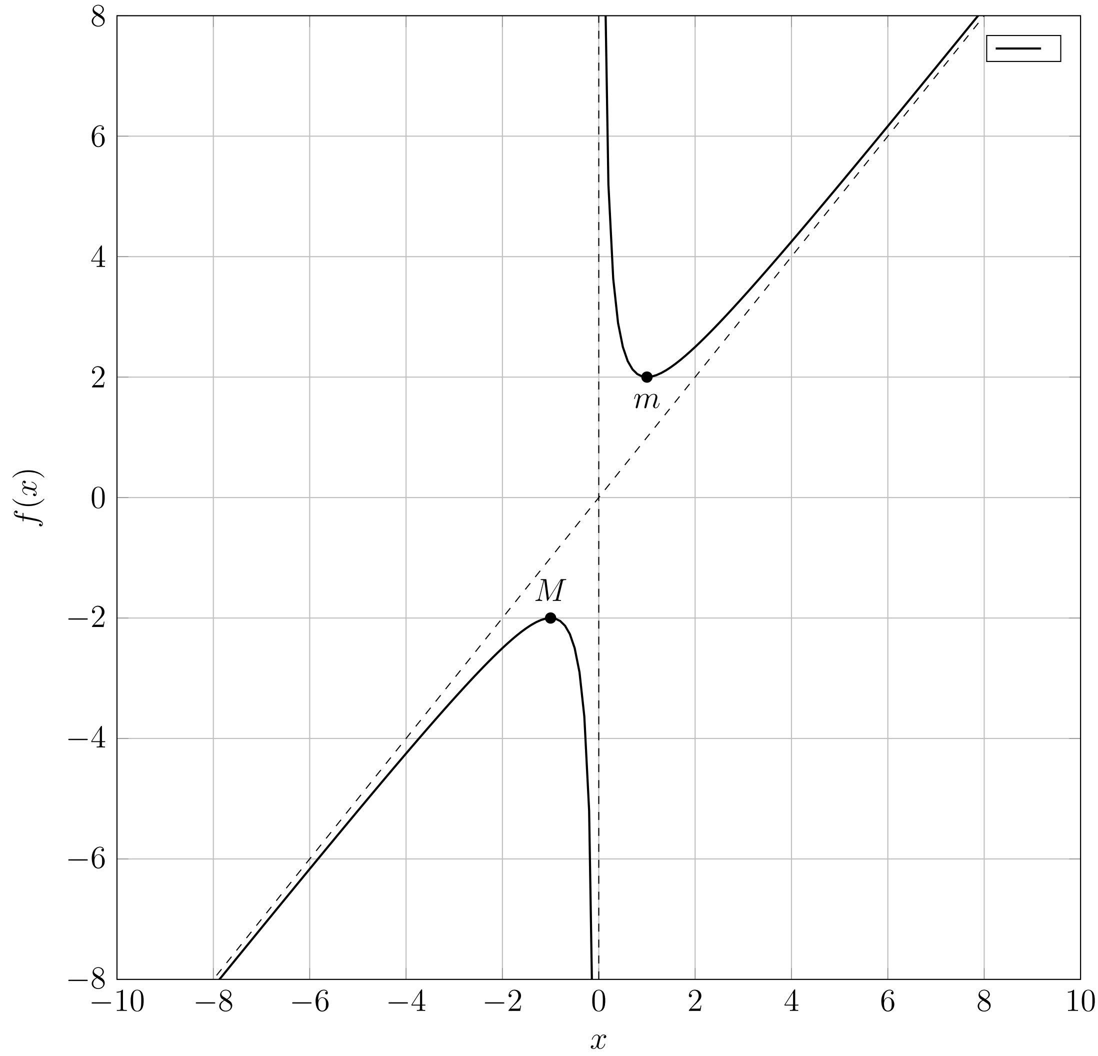


- $f'(x) = ln(x^2) + 2$
- $f''(x) = \frac{2}{x}$
- No asintoti

Esercizio 7: *Studio di funzione*

Studia la seguente funzione:

$$\frac{x^2+1}{x}$$



- $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
- $f''(x) = \frac{2}{x^3}$
- Asintoto verticale $x = 0$ e obliquo $y = x$