

# Fondamenti di elaborazione di segnali

Marini Mattia

1° semestre 3° anno

## Indice

<b>1</b>	<b>Basi</b>	<b>2</b>
1.1	Numeri complessi . . . . .	2
1.2	Trigonometria . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Segnali noti e statistiche segnali</b>	<b>3</b>
2.1	Segnali noti . . . . .	3
2.2	Statistiche segnali . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Sistemi lti e convoluzione</b>	<b>7</b>
3.1	Convoluzione . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Serie e trasformata di Fourier</b>	<b>9</b>
4.1	Trasformate notevoli . . . . .	11
4.2	Energia e banda . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Distorsione ed equalizzazione</b>	<b>13</b>
5.1	Distorsione non lineare . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Conversione AD/DA</b>	<b>14</b>
6.1	Campionamento nel tempo - versione teorica . . . . .	14
6.2	Campionamento nel tempo - sample and hold . . . . .	15
6.3	Quantizzazione . . . . .	15
6.4	Modulazione predittiva . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Segnali discreti: basi</b>	<b>17</b>
7.1	Statistiche segnali discreti . . . . .	17
7.2	Filtri . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Segnali discreti in frequenza</b>	<b>19</b>
8.1	Trasformata di Frouier discreta . . . . .	19
8.2	Teorema della convoluzione . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Segnali in più dimensioni</b>	<b>21</b>
9.1	Estensione a segnali multidimensionali . . . . .	22
<b>10</b>	<b>Cheatsheet</b>	<b>24</b>

# 1 Basi

## 1.1 Numeri complessi

In seguito le possibili rappresentazioni dei numeri complessi:

$$z = a + bi$$

$$z = r \cdot (\cos(\omega) + i \sin(\omega))$$

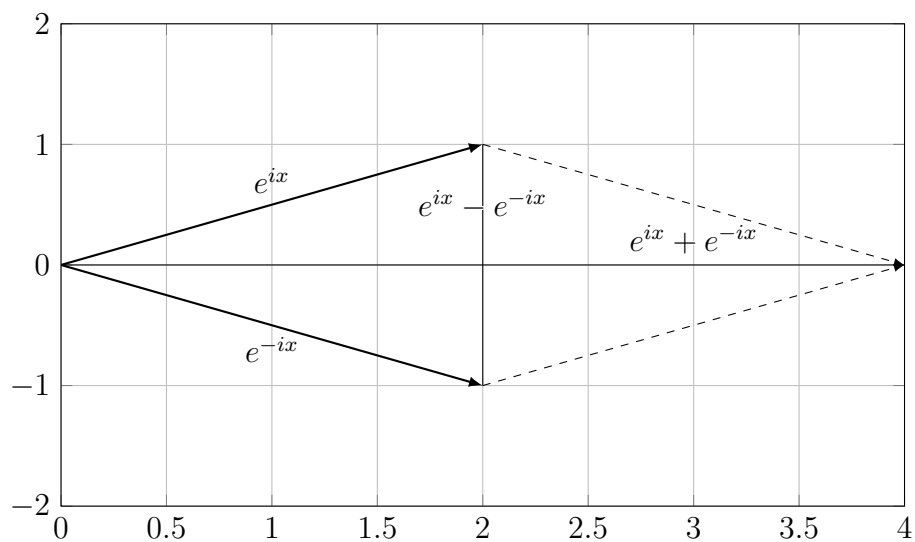
$$z = re^{\omega i}$$

Altra formula utile:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

interpretazione grafica:



## 1.2 Trigonometria

Formule di duplicazione

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

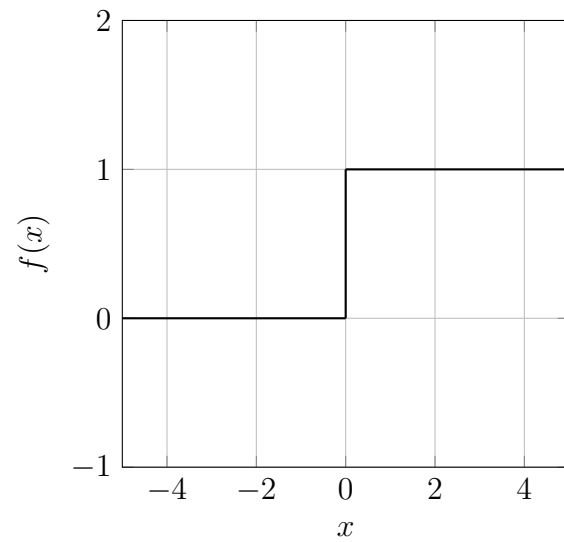
$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2$$

## 2 Segnali noti e statistiche segnali

### 2.1 Segnali noti

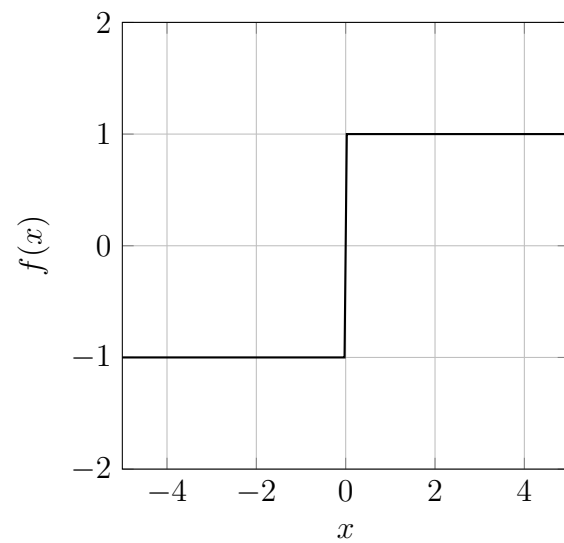
Gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



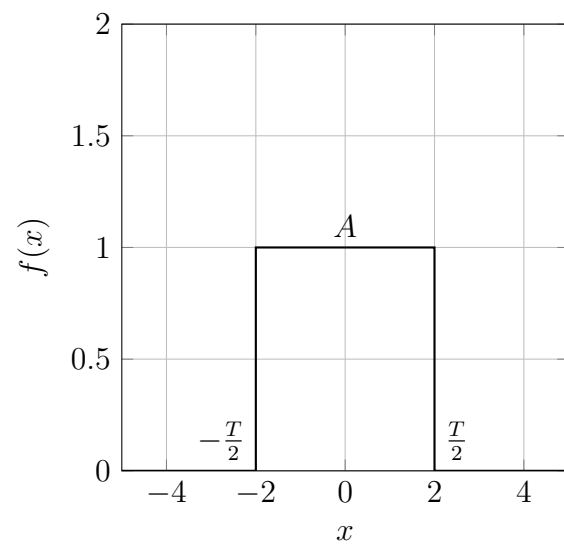
Funzione segno

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



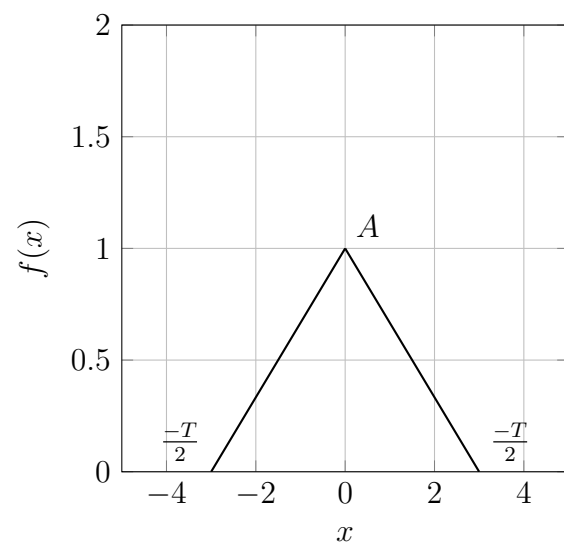
### Funzione rettangolo simmetrico

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



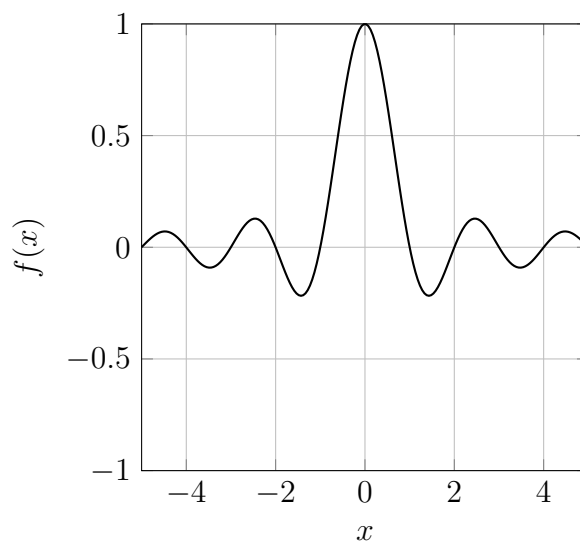
### Funzione triangolo simmetrico

$$A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{A(\frac{T}{2}-|t|)}{T/2} & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



## Funzione sinc

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



## Funzione impulso o delta di Dirac

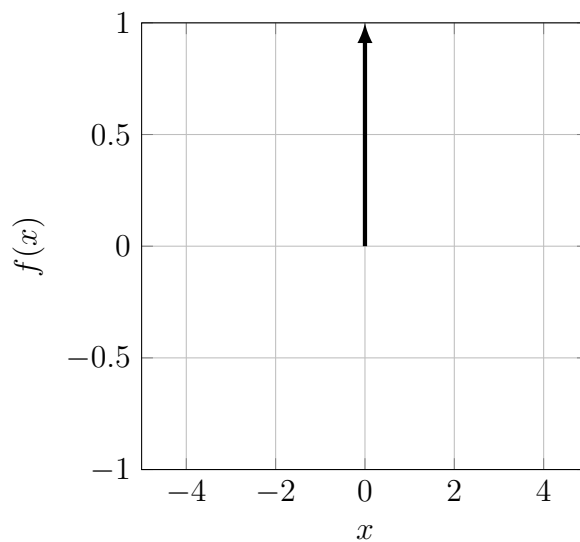
$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \pi \left( \frac{t}{T} \right) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

nota che :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

e dunque anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$



## 2.2 Statistiche segnali

### Valor medio

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

### Valore quadratico medio

$$\overline{x^2} = \langle x(t)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

### Varianza

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t) - \bar{x})^2 dt$$

### Energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad [\text{Joule}]$$

### Potenza

Uguale a valore quadratico medio:

$$\overline{x^2} = \langle x(t)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad [\text{Watt}]$$

Un segnale può essere o di potenza o di energia, non entrambi!

### Cross correlazione

Indica intuitivamente quanto due segnali siano simili tra di loro:

Se il segnale è di energia:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt$$

se invece è di potenza:

$$R_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y(t + \tau) dt$$

se il segnale viene messo in correlazione con se stesso si parla di *autocorrelazione*

### 3 Sistemi lti e convoluzione

**Definizione 1:** *Sistema LTI*

Un sistema è detto LTI se gode di due proprietà:

- Linearità:

$$f(ax(t) + bx(t)) = af(x(t)) + bf(x(t))$$

ossia applicare il sistema sulla somma dei segnali è come sommare l'output dei diversi segnali, una volta passati per il sistema

- Tempo invarianza

$$f(x(t)) = y(t) \rightarrow f(x(t - \tau)) = y(t - \tau)$$

ossia applicare ritardare un segnale non modificherà l'output del sistema, ad eccezione del ritardo

#### Approssimare un segnale con forme d'onda rettangolari

$$X_R(t) = \sum_k x(k\Delta T) \cdot R(t - k\Delta T) \cdot \Delta T \approx x(t)$$

dove  $R(t)$  è un rettangolo di area unitaria e di ampiezza  $\Delta T$

#### 3.1 Convoluzione

Dato un sistema LTI possiamo calcolare la sua risposta ad una qualsiasi onda se sappiamo la risposta ad un impulso unitario. Data la risposta  $h_R(t)$  di un sistema alla funzione  $R(t)$ , applicando linearità e tempo invarianza si ottiene:

$$x_R(t) = \sum_k x(k\Delta T) \cdot h_R(t - k\Delta T) \cdot \Delta T$$

che facendo tendere  $\Delta T$  a 0 diventa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = y(t)$$

**Definizione 2:** *Convoluzione*

L'integrale seguente è detto integrale di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = y(t)$$

e rappresenta la risposta di un sistema LTI, calcolabile conoscendo solo la risposta ad un impulso. L'operazione di convoluzione viene rappresentata con un asterisco \*

$$x(t) * h(t)$$

e si legge  $x(t)$  convoluto  $y(t)$

Graficamente, effettuare la convoluzione significa:

- Ribaltare orizzontalmente il segnale
- Farlo scorrere orizzontalmente
- Di volta in volta integrare

### Proprietà convoluzione

- La convoluzione restituisce una funzione che ha durata  $\geq$  della funzione di partenza, omeglio = alla somma delle durate delle due funzioni
- Proprietà commutativa

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- Proprietà associativa

$$x(t) * y(t) * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

- Proprietà distributiva

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

- Linearità

### Convoluzioni notevoli

1. Rettangoli simmetrici di pari durata: triangolo simmetrico di ampiezza  $2T$  e area  $A_1 \cdot A_2 \cdot T$

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * A_2\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = A_1A_2T\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$

2. Rettangoli dimmetrici di durata diversa: assunto  $T_1 \geq T_2$  ottengo trapezio con

- $B = T_1 + T_2$
- $b = T_2 - T_1$
- $h = A_1 \cdot A_2 \cdot T_1$

3. Rettangoli non simmetrici: come rettangoli simmetrici ma centrati nel mezzo del rettangolo con lunghezza maggiore

4. Gaussiana: date

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}; x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

allora la convoluzione vale

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{[t-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$



## 4 Serie e trasformata di Fourier

### Definizione 3: Serie di Fourier

La serie di Fourier è così definita:

$$x(t) = a_0 + \sum_k \cos(2\pi k f_0 t + \omega_k)$$

passando alla notazione con i numeri complessi, si ottiene:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad X_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} e^{j\vartheta_n} & n > 0 \\ \frac{a_{-n}}{2} e^{j\vartheta_{-n}} & n < 0 \\ a_0 & n = 0 \end{cases}$$

i coefficienti della serie sono calcolati come segue:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Proprietà serie di Fourier:

1. Simmetria Hermitiana:

$$X_n = -X_{-n}^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg(X_n) = -\arg(X_{-n}) \end{cases}$$

2. Linearità: dati  $x(t)$  e  $y(t)$  periodici, avremo

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

3. Simmetrie del segnale:

- (a) Periodico *pari*  $\rightarrow$  coefficienti  $X_n$  reali  $\rightarrow$  soli coseni

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

- (b) Periodico *dispari*  $\rightarrow$  coefficienti  $X_n$  immaginari  $\rightarrow$  soli seni

$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

- (c) Segnale *alternato*  $\rightarrow$  ho solo armoniche dispari

NB. date le simmetrie, posso calcolare l'integrale su metà periodo

### Definizione 4: Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier può essere intesa come il limite per  $T_0 \rightarrow \infty$  della serie di Fourier

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

dove i coefficienti  $X(f)$  sono:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

La prima si ottiene facendo il limite per  $x \rightarrow \infty$  della serie di Fourier:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \frac{T_0}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k T_0 e^{j2\pi k f_0 t} f_0 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t} f_0\end{aligned}$$

passando al limite per  $T_0 \rightarrow \infty$  e dunque  $f_0 \rightarrow 0$ ,  $k f_0$  tende a una variabile continua  $f$  e  $f_0$  a un infinitesimo  $df$ :

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t} f_0 = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

dunque:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Applicando lo stesso limite a  $X(f)$ , ottengo come calcolarmi i coefficienti:

$$X(f) = \lim_{f_0 \rightarrow 0} X(k f_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} w(t) e^{-2\pi j k f_0 t} dt$$

dunque

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

## Proprietà trasformata di Fourier

1. Simmetria Hermitiana se  $x(t)$  funzione reale
2. Linearità
3. Simmetrie segnale nel tempo

$$\begin{aligned}x(t) \in \mathbb{R} \text{ pari} &\Rightarrow X(f) = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ x(t) \in \mathbb{R} \text{ dispari} &\Rightarrow X(f) = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt\end{aligned}$$

4. Fattore di scala:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

ossia, se il segnale viene compresso, allora le sue frequenze aumentano (immagina di velocizzare audio)

5. Fattore di ritardo:

$$x(t - \Delta T) \rightarrow X(f) e^{-j2\pi f \Delta T}$$

6. Dualità:

$$x(t) \rightarrow y(f) \Leftrightarrow y(t) \rightarrow x(-f)$$

7. Derivata:

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{d}{dt} [x(t)] \right\} = j2\pi f \cdot X(f)$$

8. Integrale

$$\mathfrak{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\varepsilon) d\varepsilon \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

9. Convoluzione

$$\mathfrak{F} \{x(t) * y(t)\} = \mathfrak{F}(x(t)) \cdot \mathfrak{F}(y(t))$$

10. Prodotto

$$\mathfrak{F} \{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \mathfrak{F} \{x_1(t)\} * \mathfrak{F} \{x_2(t)\}$$

## 4.1 Trasformate notevoli

1. Rettangolo:

$$V_0 \Pi \left( \frac{t}{T} \right) \rightarrow V_0 T \operatorname{sinc}(fT)$$

2. Sinc function:

$$V_0 \operatorname{sinc}(tW) = V_0$$

3. Costante

$$\mathfrak{F} \{V_0\} = V_0 \delta(f)$$

4. Esponenziale

$$\mathfrak{F} \{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

5. Sinusoidi

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \{\cos(2\pi f_0 t)\} &= \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \\ \mathfrak{F} \{\sin(2\pi f_0 t)\} &= \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \end{aligned}$$

6. Impulso

$$\mathfrak{F} \{\delta(t - t_0)\} = 1 \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

7. Treno di impulsi

$$\mathfrak{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma \left( f - \frac{n}{T} \right)$$

## 4.2 Energia e banda

**Teorema 1:** *Parseval*

Dato un segnale periodico, la sua potenza è uguale a:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$$

Questo teorema può essere esteso segnali non periodici

**Teorema 2:** *Rayleigh*

Dato un segnale aperiodico, la sua energia è uguale a:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

**Definizione 5:** *Larghezza di banda*

La larghezza di banda è l'intervallo di frequenze per le quali lo spettro del segnale assume valori non nulli. Per segnali con spettro infinito, si può imporre la larghezza di banda come l'intervallo in cui è contenuto l' $x$  % della energia del segnale:

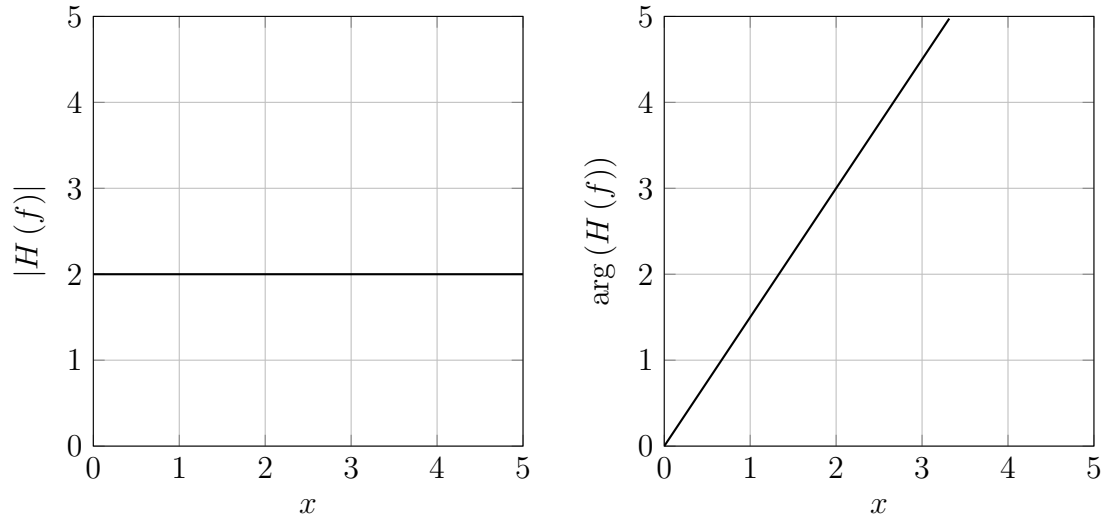
$$B : \int_{-B}^B |X(f)|^2 df = 0.99 E_x$$

per dualità ho che  $F(x(t)) = Y(f) \rightarrow F(Y(t)) = x(-f)$ . Dunque è anche vero che

## 5 Distorsione ed equalizzazione

### Definizione 6: Condizione di non distorsione

Un sistema è non distorcente se la sua risposta in frequenza è piatta e la sua risposta in fase è lineare (una retta)



### Definizione 7: Ritardo di gruppo

Il ritardo di gruppo(temporale) è dato dallo sfasamento di fase di un segnale:

$$\tau_g(f) = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

Se il sistema è LTI, allora si può compensare la distorsione applicando un'equalizzazione tale per cui:

$$H_{\text{tot}} = H(f) \cdot H_{\text{eq}} = k e^{-j2\pi f t_0}$$

### 5.1 Distorsione non lineare

Se il sistema non è LTI, allora

- Spettro si deforma e si allarga
- Posso calcolare distorsione di seconda armonica

$$\text{distorsione di seconda armonica} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \cdot 100$$

- Posso fare companding per evitare distorsione:



## 6 Conversione AD/DA

### 6.1 Campionamento nel tempo - versione teorica

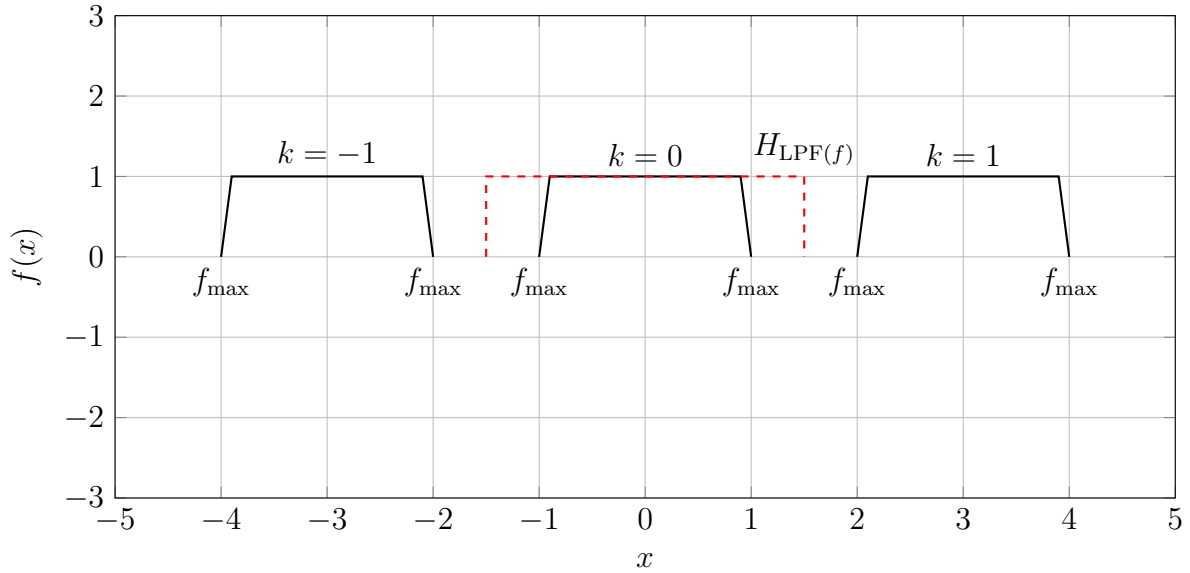
Matematicamente posso rappresentare il campionamento nel tempo come:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c)$$

Passando al dominio della frequenza ottengo

$$X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c)$$

Nota dunque come si ottenga il preciso spettro di  $x(t)$  ripetuto nel tempo. Per risalire al segnale originario posso sfruttare un low cut, finestrando la prima iterazione del suo spettro:



Questo ricostruisce perfettamente il segnale, ma solo nel caso in cui  $f_c \geq f_{\max}$ . Da qui la regola di Nyquist:

**Definizione 8: Regola di Nyquist**

Per campionare un segnale senza perdita di informazione (aliasing) deve valere che.

$$f_c \geq 2f_{\max} \quad \text{o equivalentemente} \quad T_c < \frac{1}{2}T_{\max}$$

Per ricostruire il campione mi basta quindi applicare un passa-basso:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right) \end{aligned}$$

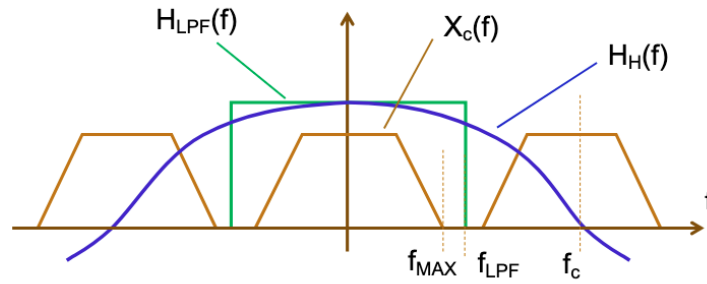


Figura 1: Si noti come la curva blu, ossia il filtro di trattenimento attenui le frequenze alte

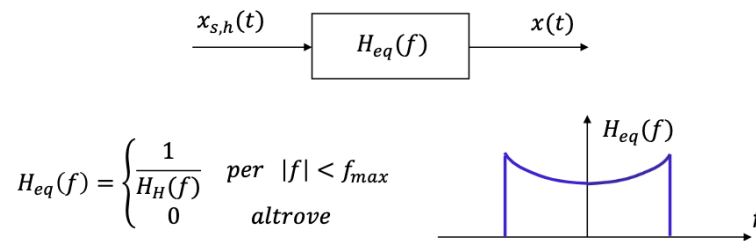
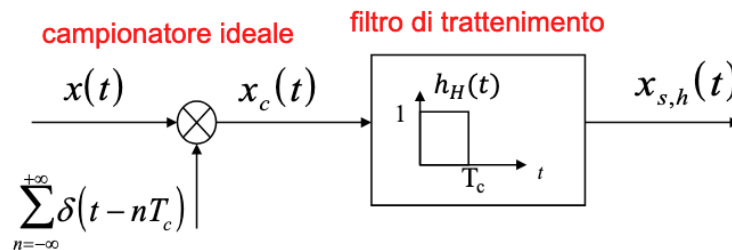


Figura 2: Filtro di equalizzazione per contrastare effetto del filtro di trattenimento

## 6.2 Campionamento nel tempo - sample and hold

Nella pratica viene usata una tecnica diversa.



- Siccome  $h_H(t)$  in frequenza diventa una sinc, le frequenze verranno attenuate. Questo è compensabile tramite un'equalizzazione

## 6.3 Quantizzazione

Posso stimare la potenza dell'errore di quantizzazione assumendo che questo sia distribuito in maniera omogenea:

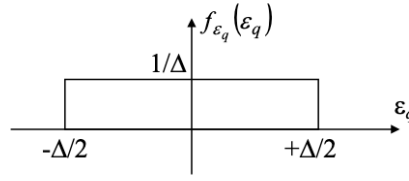


Figura 3: Distribuzione di probabilità di errore di quantizzazione

La potenza coincide con il valore quadratico medio, che a sua volta coincide con la varianza, dato che la distribuzione appena vista ha chiaramente valor medio nullo

$$E \{ \epsilon_q^2 \} = \sigma_q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 f_{\epsilon_q}(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \frac{\epsilon^3}{3} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Per stimare la qualità del segnale si utilizza il rapporto fra potenza di rumore e potenza del segnale:

**Definizione 9:** *Rapporto segnale rumore*

Il rapporto segnale rumore è così definito:

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{S_x}{S_n} \right) [\text{db}]$$

Ogni bit in più usato per rappresentare la quantizzazione corrisponde a circa 6 db in più nel *SNR*

Salvare segnale è costoso in termini di spazio. Ad esempio per salvare un segnale con  $f_{\max} = 10kh$  con qualità di almeno 30 db servono:

$$r_b \geq \underbrace{2 \cdot 10^4}_{\text{Nyquist}} \cdot \underbrace{\frac{30}{6}}_{\text{db ogni bit in più}} = 10^5 \left[ \frac{\text{bits}}{\text{sec}} \right]$$

## 6.4 Modulazione predittiva

Tecniche per salvare bit

### Modulazione delta

Scelgo costante  $\Delta$  a priori e per ogni campione esprimo il suo valore in funzione del precedente  $\pm \Delta$ .

$$x_i = n_{i-1} \pm \Delta$$

Problemi:

- Staircase
- Slope overload
- Quantization noise



## Modulazione DPCM

Crea una stima del valore del campione presente utilizzando i campioni passati e salva l'errore rispetto alla stima in un dato numero di bits, ad esempio:

$$\hat{x}_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_N x_{i-N}$$

## 7 Segnali discreti: basi

1. Simmetria:

- Pari:

$$x(t) = x(-t) \quad \forall t \Rightarrow x[n] = x[-n] \quad \forall n$$

- Dispari:

$$x(t) = -x(-t) \quad \forall t \Rightarrow x[n] = -x[-n] \quad \forall n$$

2. Guadagno:

- Positivo:

$$\alpha x(t) : \alpha > 1 \Rightarrow \alpha x[n] : \alpha > 1$$

- Negativo:

$$\alpha x(t) : \alpha < 1 \Rightarrow \alpha x[n] : \alpha < 1$$

3. Ritardo:

$$x(t - \Delta T) \Rightarrow x[n - k]$$

4. Integrazione discreta:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

5. Derivazione discreta:

$$y[n] = \frac{1}{T_c} (x[n] - x[n-1])$$

$T_c = 1$  se non conosciuto

6. Convoluzione discreta:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

### 7.1 Statistiche segnali discreti

1. Valor medio:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \implies \bar{x} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x[k]$$

2. Varianza:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \bar{x})^2 dt \implies \sigma_x^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x[k] - \bar{x})^2$$

3. Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \implies E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$$

4. Potenza media:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \implies P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |x[k]|^2$$

5. Cross-correlazione:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+k]$$

6. Autocorrelazione:

$$R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+k]$$

7. Istogramma:

- Creazione

$$h(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x[n] - v_l), \quad l = 1, \dots, L$$

- Valor medio

$$\bar{x} = \sum_{l=1}^L v[l] \cdot h[l]$$

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \sum_{l=1}^L (v[l] - \bar{x})^2 \cdot h[l]$$

## 7.2 Filtri

1. Passa basso (LPF)

(a) Media mobile (filtro passa-basso FIR):

$$h[k] = \frac{1}{K} \cdot [1, 1, \dots, 1]$$

(b) Gaussiana discreta (kernel di convoluzione):

$$h[k] = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}, \quad k \in \left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right]$$

dove  $\lambda = \sum_k e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$  e  $\sigma^2$  è la varianza.

2. Passa alto (HPF) Si possono ottenere per differenza:

$$h_{\text{HPF}} = \delta[k] - h_{\text{LPF}}[k]$$

### 3. Derivativi e integrativi:

(a) Filtro gradiente (derivata prima):

$$h[k] = [-1, 1]$$

(b) Filtro Laplaciano (derivata seconda):

$$h[k] = [0, 1, -2, 1, 0]$$

Ottieni applicando un filtro gradiente ad un altro filtro gradiente

### 4. Filtri non lineari:

(a) Filtri auto-regressivi: filtri che si applicano a sinistra con i valori filtrati, a destra con i valori non filtrati

(b) Rimappatura dei livelli (compressione ed espansione)

(c) Filtri di rango:



i. Massimo:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq N \\ 1 & \forall i = N \end{cases}$$

ii. Minimo

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq 1 \\ 1 & \forall i = 1 \end{cases}$$

iii. Mediano

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \\ 1 & i = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \end{cases}$$

## 8 Segnali discreti in frequenza

### 8.1 Trasformata di Fourier discreta

$$\text{DFT} \rightarrow X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}; k = 0, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT} \rightarrow x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n}; n = 0, \dots, N-1$$

Osservazioni:

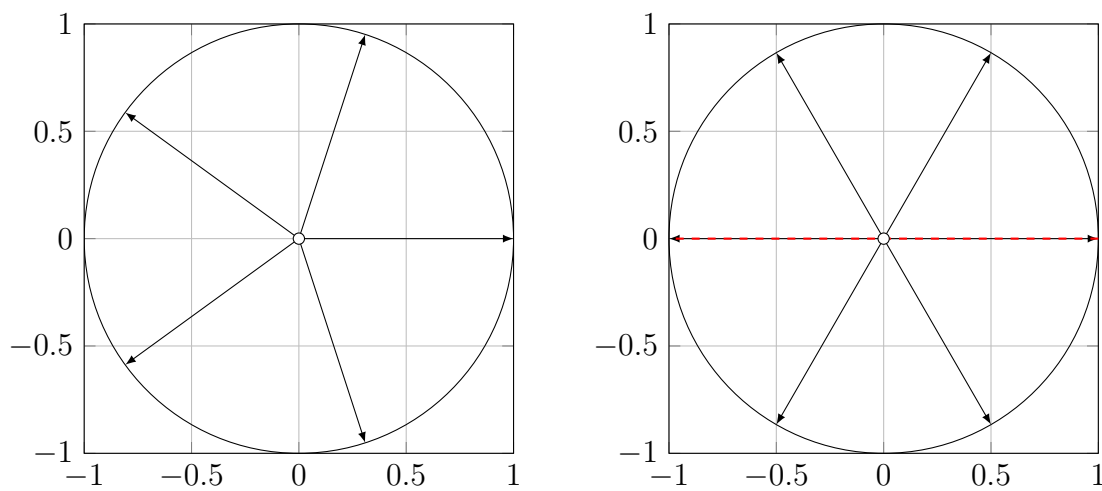
- La trasformata è data dalla somma di funzioni complesse periodiche di periodo  $N$ , dove  $N$  è la lunghezza del segnale

- La DFT è ortogonale, ossia la correlazione tra basi diverse è nulla:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] y^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi in}{N}} \cdot e^{j\frac{2\pi jn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(i-j)}{N}n}$$

occhio al  $-j$  che diventa  $+j$  nel secondo termine complesso. La correlazione fra funzioni complesse vuole il coniugato sul secondo termine

I termini ottenuti sono vettori "arrotondati" in modo equispaziato attorno alla circonferenza di raggio 1. La loro somma è sempre 0. Ragiona sul caso in cui siano pari o siano dispari



Nel caso in cui  $n$  è dispari, immaginati di ruotare i vettori di  $\frac{2\pi}{n}$ . In questo caso si otterrebbe la medesima situazione, dunque la somma non può cambiare. La somma non può che essere zero, in quanto se non lo fosse, sarebbe anch'essa ruotata (e dunque diversa)

## 8.2 Teorema della convoluzione

Siccome operiamo con vettori di lunghezza finita, è necessario rivedere la convoluzione. Abbiamo due tipi di convoluzione:

**Definizione 10:** *Convoluzione lineare discreta*

La convoluzione lineare discreta è così definita

$$y[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

Operativamente, prendi i segnali ed aggiungi zeri al più corto finché questo avrà la stessa lunghezza del più lungo ed esegui convoluzione

**Definizione 11:** *Convoluzione circolare discreta*

La convoluzione circolare discreta è così definita

$$y[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[(n-k)]_N$$

dove  $y[\cdot]_N$  indica la periodizzazione di  $y[n]$

Operativamente, prendi il primo segnale, periodizzalo (duplica lo stesso segnale davanti e dopo) ed esegui convoluzione lineare

**Teorema 3:** *Teorema della convoluzione segnali discreti*

$$x[n] \circledast y[n] \leftrightarrow x[k] \cdot y[k]$$

Nota che per far coincidere convoluzione lineare e circolare si possono aggiungere zeri ad entrambi i vettori, facendoli arrivare alla stessa lunghezza.

Supponendo che i due vettori siano lunghi  $N_x$  e  $N_y$ , allora a  $x$  aggiungo  $N_y$  zeri e a  $y$   $N_x$

## 9 Segnali in più dimensioni

**Definizione 12:** *Segnale in più dimensioni*

Un segnale in due dimensioni è rappresentato come:

$$x(v_1, v_2, \dots, v_N) : \mathbb{R}_N \rightarrow \mathbb{R}_K$$

ad esempio un'immagine è rappresentata come:

$$I(x, y) : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_3$$

$\mathbb{R}_2$  sono le coordinate del pixel,  $\mathbb{R}_3$  il colore RGB

**Definizione 13:** *Sistema in più dimensioni*

Un sistema in più dimensioni è così definito:

$$y(\bar{v}) = f(x(\bar{u}))$$

dove

$$x(\bar{u}) : \mathbb{R}_N \rightarrow \mathbb{R}_K \quad y(\bar{v}) : \mathbb{R}_M \rightarrow \mathbb{R}_L$$

Solitamente  $M = N$  e  $K = L = 1$

## 9.1 Estensione a segnali multidimensionali

### **Definizione 14:** *LTI sistema multidimensionale*

Un sistema multidimensionale è lineare se e solo se:

$$\left. \begin{array}{l} f(i(\bar{v})) = \hat{i}(\bar{v}) \\ f(j(\bar{v})) = \hat{j}(\bar{v}) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\alpha i(\bar{v}) + \beta j(\bar{v})) = \alpha \hat{i}(\bar{v}) + \beta \hat{j}(\bar{v}) \quad \forall \alpha, \beta$$

Un sistema multidimensionale è dominio indipendente se

$$f(i(\bar{v})) = \hat{i}(\bar{v}) \Rightarrow f(i(\bar{v} - \bar{v}_0)) = \hat{i}(\bar{v} - \bar{v}_0) \quad \forall \bar{v}_0$$

### **Definizione 15:** *Convoluzione in più dimensioni*

La convoluzione in più dimensioni consiste nel applicare la convoluzione su ogni asse individualmente

$$y(v_1, v_2, \dots, v_N) = x(v_1, v_2, \dots, v_N) * h(v_1, v_2, \dots, v_N) = \int_{\lambda_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\lambda_N=-\infty}^{+\infty} x(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \cdot h(v_1 - \lambda_1, \dots, v_N - \lambda_N) \partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N$$

### **Definizione 16:** *Trasformata di Fourier in più dimensioni*

La trasformata di Fourier in più dimensioni consiste nel applicare la trasformata su ogni asse individualmente

Trasformata di Fourier diretta:

$$X(f_1, \dots, f_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x(v_1, \dots, v_N) e^{-j2\pi(f_1 v_1 + \dots + f_N v_N)} dv_1 \dots dv_N$$

Trasformata di Fourier inversa:

$$x(v_1, \dots, v_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} X(f_1, \dots, f_N) e^{j2\pi(f_1 v_1 + \dots + f_N v_N)} df_1 \dots df_N$$

### **Definizione 17:** *Teorema della convoluzione in più dimensioni*

Il teorema della convoluzione rimane invariato in più dimensioni

$$\begin{array}{c} y(v_1, v_2, \dots, v_N) = x(v_1, v_2, \dots, v_N) * h(v_1, v_2, \dots, v_N) \\ \updownarrow \\ Y(f_1, \dots, f_N) = X(f_1, \dots, f_N) \cdot H(f_1, \dots, f_N) \end{array}$$

**Definizione 18:** *Trasformata di Fourier discreta in più dimensioni*

La trasformata di Fourier in più dimensioni consiste nel applicare la trasformata su ogni asse individualmente

Trasformata di Fourier diretta:

$$X[k_1, \dots, k_N] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_N=0}^{N_N-1} x[n_1, \dots, n_N] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_N n_N}{N_N}\right)}$$

Trasformata di Fourier inversa:

$$x[n_1, \dots, n_N] = \frac{1}{N_1 \cdot \dots \cdot N_N} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_N=0}^{N_N-1} X[k_1, \dots, k_N] \cdot e^{j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_N n_N}{N_N}\right)}$$

## 10 Cheatsheet

Funzione	Dominio temporale	Dominio frequenza
Impulso	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
Costante	$V_0$	$V_0 \delta(f)$
Seno	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$
Coseno	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$
Rettangolo	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}(fT)$
Sinc	$\operatorname{sinc}(Tt)$	$\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{f}{T}\right)$
Sinc quadra	$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$	$T(1 -  f T) \Pi\left(\frac{fT}{2}\right)$
Funzione segno	$\operatorname{sign}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Gradino unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$
Impulso triangolare	$\left(1 - \frac{ t }{T}\right) \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$	$T \operatorname{sinc}^2(fT)$
Treno di impulsi	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$
Esponenziale	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

### Proprietà trasformata

1. Fattore di scala:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

2. Fattore di ritardo:

$$x(t - \Delta T) \rightarrow X(f) e^{-j2\pi f \Delta T}$$

3. Dualità:

$$x(t) \rightarrow y(f) \Leftrightarrow y(t) \rightarrow x(-f)$$

4. Derivata:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}[x(t)]\right\} = j2\pi f \cdot X(f)$$



5. Integrale

$$\mathfrak{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\varepsilon) d\varepsilon \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

6. Convoluzione

$$\mathfrak{F} \{x(t) * y(t)\} = \mathfrak{F}(x(t)) \cdot \mathfrak{F}(y(t))$$

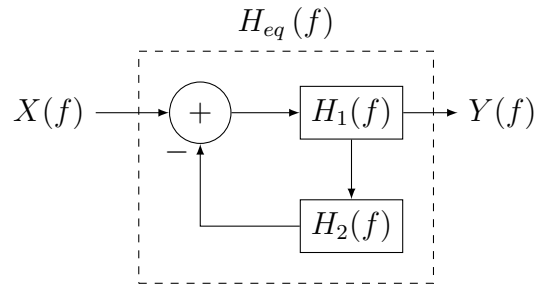
7. Prodotto

$$\mathfrak{F} \{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \mathfrak{F} \{x_1(t)\} * \mathfrak{F} \{x_2(t)\}$$

**Serie Fourier note**

Nome funzione	Espressione funzione	Coefficienti $X_n$
Onda quadra	$\begin{cases} V_0 & t \in [kT, kT + \frac{T}{2}] \\ -V_0 & t \in [kT + \frac{T}{2}, kT + T] \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\frac{2jV_0}{\pi k} & k \text{ dispari} \end{cases}$
Onda quadra con ritorno a zero	$\begin{cases} V_0 & t \in [kT - \tau, kT + \tau] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\frac{V_0 \tau}{T_0} \text{sinc}(kf_0 \tau)$
Onda triangolare	$V_0 \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \text{ripetuta periodicamente}$	$\frac{V_0}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$

1. Retroazione negativa:



$$H_{eq}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)}$$

$N = 2$				
		0	1	
0	re	1	1	
	im	0	0	
1	re	1	-1	
	im	0	0	

$N = 3$					
		0	1	2	
0	re	1	1	1	
	im	0	0	0	
1	re	1	-0.5	-0.5	
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	
2	re	1	-0.5	-0.5	
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	

$N = 4$						
		0	1	2	3	
0	re	1	1	1	1	
	im	0	0	0	0	
1	re	1	0	-1	0	
	im	0	-1	0	1	
2	re	1	-1	1	-1	
	im	0	0	0	0	
3	re	1	0	-1	0	
	im	0	1	0	-1	

$N = 5$							
		0	1	2	3	4	
0	re	1	1	1	1	1	
	im	0	0	0	0	0	
1	re	1	0.309	-0.809	-0.809	0.309	
	im	0	-0.951	-0.588	0.588	0.951	
2	re	1	-0.809	0.309	0.309	-0.809	
	im	0	-0.588	0.951	-0.951	0.588	
3	re	1	-0.809	0.309	0.309	-0.809	
	im	0	0.588	-0.951	0.951	-0.588	
4	re	1	0.309	-0.809	-0.809	0.309	
	im	0	0.951	0.588	-0.588	-0.951	

$N = 6$		0	1	2	3	4	5
0	re	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0
1	re	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
2	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
3	re	1	-1	1	-1	1	-1
	im	0	0	0	0	0	0
4	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
5	re	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$

$N = 7$		0	1	2	3	4	5	6
0	re	1	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0	0
1	re	1	0.623	-0.223	-0.901	-0.901	-0.223	0.623
	im	0	-0.782	-0.975	-0.434	0.434	0.975	0.782
2	re	1	-0.223	-0.901	0.623	0.623	-0.901	-0.223
	im	0	-0.975	0.434	0.782	-0.782	-0.434	0.975
3	re	1	-0.901	0.623	-0.223	-0.223	0.623	-0.901
	im	0	-0.434	0.782	-0.975	0.975	-0.782	0.434
4	re	1	-0.901	0.623	-0.223	-0.223	0.623	-0.901
	im	0	0.434	-0.782	0.975	-0.975	0.782	-0.434
5	re	1	-0.223	-0.901	0.623	0.623	-0.901	-0.223
	im	0	0.975	-0.434	-0.782	0.782	0.434	-0.975
6	re	1	0.623	-0.223	-0.901	-0.901	-0.223	0.623
	im	0	0.782	0.975	0.434	-0.434	-0.975	-0.782

$N = 8$		0	1	2	3	4	5	6	7
0	re	1	1	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0	0	0
1	re	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
	im	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$
2	re	1	0	-1	0	1	0	-1	0
	im	0	-1	0	1	0	-1	0	1
3	re	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
	im	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$
4	re	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	im	0	0	0	0	0	0	0	0
5	re	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
	im	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$
6	re	1	0	-1	0	1	0	-1	0
	im	0	1	0	-1	0	1	0	-1
7	re	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
	im	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$

$N = 9$		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	re	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	re	1	0.766	0.174	-0.5	-0.94	-0.94	-0.5	0.174	0.766
	im	0	-0.643	-0.985	$-\sqrt{3}/2$	-0.342	0.342	$\sqrt{3}/2$	0.985	0.643
2	re	1	0.174	-0.94	-0.5	0.766	0.766	-0.5	-0.94	0.174
	im	0	-0.985	-0.342	$\sqrt{3}/2$	0.643	-0.643	$-\sqrt{3}/2$	0.342	0.985
3	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
4	re	1	-0.94	0.766	-0.5	0.174	0.174	-0.5	0.766	-0.94
	im	0	-0.342	0.643	$-\sqrt{3}/2$	0.985	-0.985	$\sqrt{3}/2$	-0.643	0.342
5	re	1	-0.94	0.766	-0.5	0.174	0.174	-0.5	0.766	-0.94
	im	0	0.342	-0.643	$\sqrt{3}/2$	-0.985	0.985	$-\sqrt{3}/2$	0.643	-0.342
6	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
7	re	1	0.174	-0.94	-0.5	0.766	0.766	-0.5	-0.94	0.174
	im	0	0.985	0.342	$-\sqrt{3}/2$	-0.643	0.643	$\sqrt{3}/2$	-0.342	-0.985
8	re	1	0.766	0.174	-0.5	-0.94	-0.94	-0.5	0.174	0.766
	im	0	0.643	0.985	$\sqrt{3}/2$	0.342	-0.342	$-\sqrt{3}/2$	-0.985	-0.643

