Fondamenti di elaborazione di segnali

Marini Mattia

1^o semestre 3^o anno

Indice

1 Basi

1.1 Numeri complessi

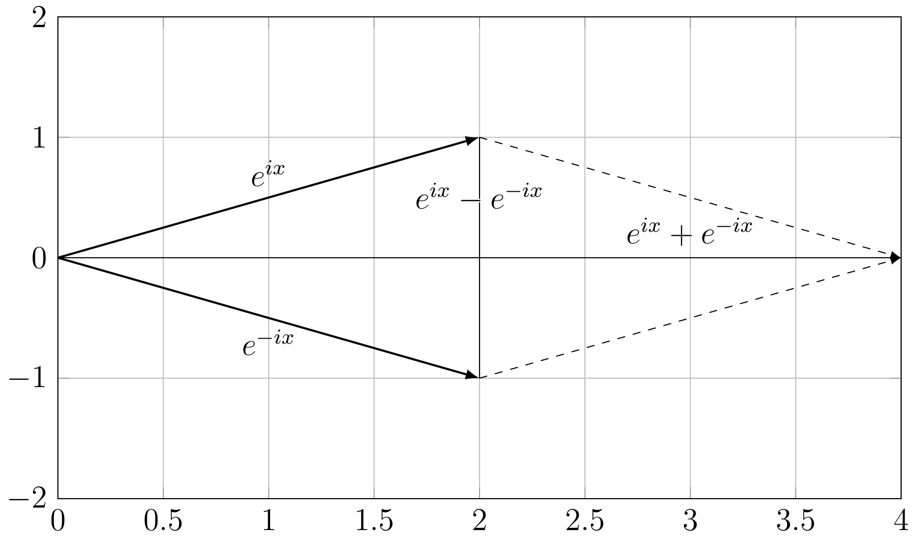
In seguito le possibili rappresentazioni dei numeri complessi:

$$z = a + bi$$
$$z = r \cdot (\cos(\omega) + i \sin(\omega))$$
$$z = re^{\omega i}$$

Altra formula utile:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

interpretazione grafica:



1.2 Trigonometria

1.2.0 Formule di duplicazione

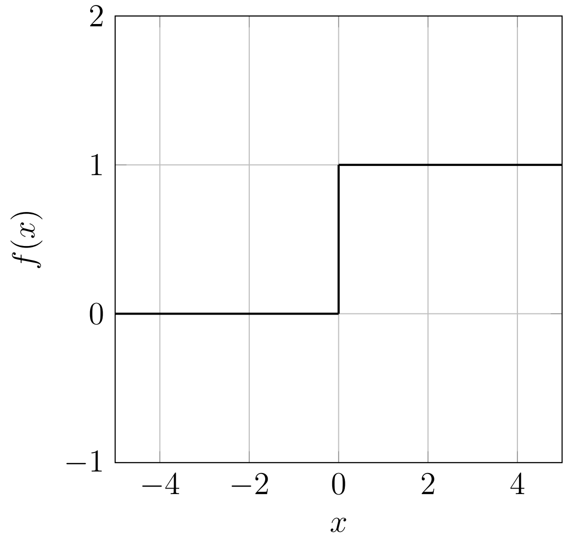
$$\sin(2t) = 2sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2$$

2 Segnali noti e statistiche segnali

2.1 Segnali noti

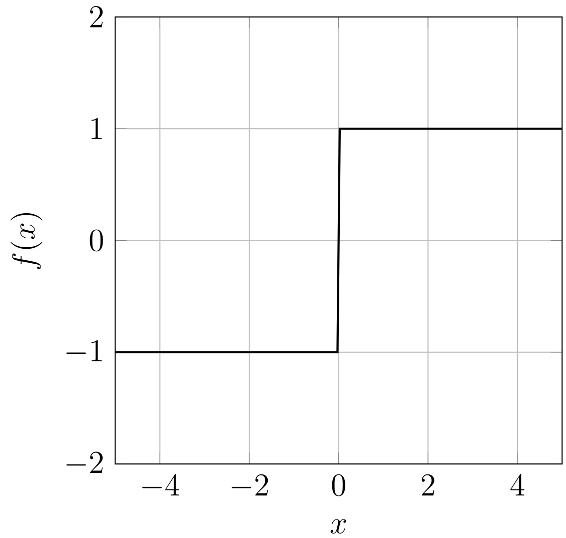
2.1.0 Gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



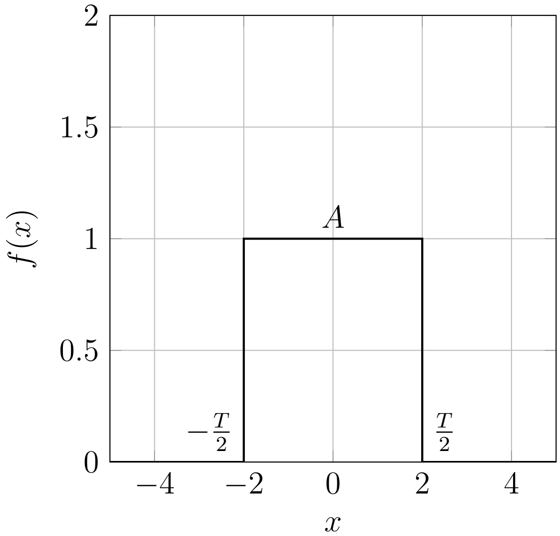
2.1.0 Funzione segno

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



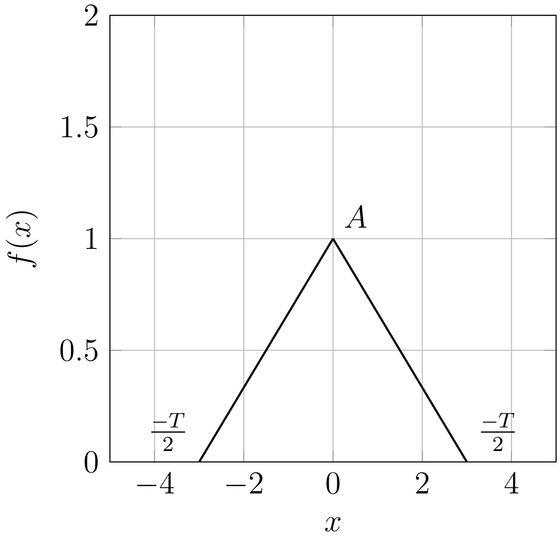
2.1.0 Funzione rettangolo simmetrico

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



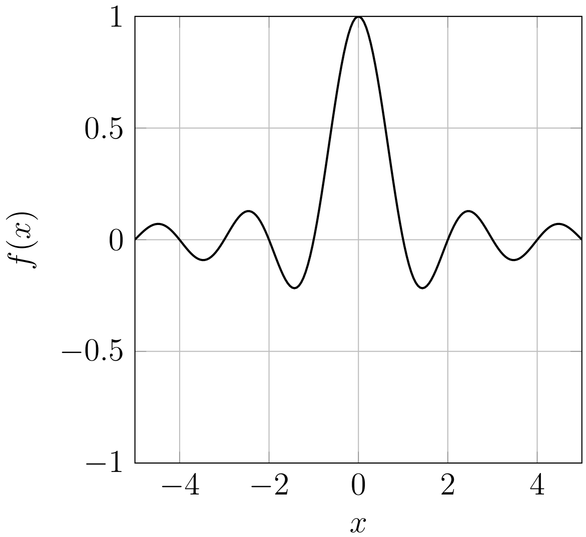
2.1.0 Funzione triangolo simmetrico

$$A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{A\left(\frac{T}{2}-|t|\right)}{T/2} & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



2.1.0 Funzione sinc

$$\mathrm{sinc}\,(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



2.1.0 Funzione impulso o delta di Dirac

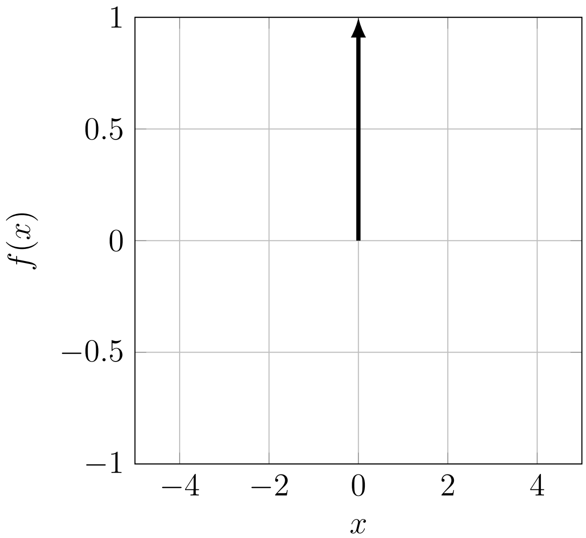
$$\delta\,(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \pi \left(\frac{t}{T} \right) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

nota che :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\,(t)\;\, dt = 1$$

e dunque anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t)\,\delta\,(t)\;\, dt = f\,(0)$$



2.2 Statistiche segnali

2.2.0 Valor medio

$$\overline{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ dt$$

2.2.0 Valore quadratico medio

$$\overline{x^2} = \left\langle x(t)^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\ dt$$

2.2.0 Varianza

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t) - \overline{x})^2\ dt$$

2.2.0 Energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt \quad [\text{Joule}]$$

2.2.0 Potenza

Uguale a valore quadratico medio:

$$\overline{x^2} = \left\langle x(t)^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\ dt \quad [\text{Watt}]$$

Un segnale può essere o di potenza o di energia, non entrambi!

2.2.0 Cross correlazione

Indica intuitivamente quanto due segnali siano simili tra di loro:

Se il segnale è di energia:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\ dt$$

se invece è di potenza:

$$R_{xy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, y(t+\tau)\ dt$$

se il segnale viene messo in correlazione con se stesso si parla di *autocorrelazione*

3 Sistemi lti e convoluzione

Definizione 1: *Sitema LTI*

Un sistema è detto LTI se gode di due proprietà:

- Linearità:
$$f\left(ax\left(t\right)+bx\left(t\right)\right)=af\left(x\left(t\right)\right)+bf\left(x\left(t\right)\right)$$
ossia applicare il sistema sulla somma dei segnali è come sommare l'output dei diversi segnali, una volta passati per il sistema

- Tempo invarianza
$$f\left(x\left(t\right)\right)=y\left(t\right)\rightarrow f\left(x\left(t-\tau\right)\right)=y\left(t-\tau\right)$$
ossia applicare ritardare un segnale non modificherà l'otput del sistema, ad eccezione del ritardo

3.0.0 Approssimare un segnale con forme d'onda rettangolari

$$X_R\left(t\right)=\sum_k x\left(k\Delta T\right)\cdot R\left(t-k\Delta T\right)\cdot\Delta T\approx x\left(t\right)$$

dove $R\left(t\right)$ è un rettangolo di area unitaria e di ampiezza ΔT

3.1 Convoluzione

Dato un sistema LTI possiamo calcolare la sua risposta ad una qualsiasi onda se sappaimo la risposta ad un impulso unitario. Data la risposta $h_R\left(t\right)$ di un sistema alla funzione $R\left(t\right)$, applicando linearità e tempo invazianza si ottiene:

$$x_R\left(t\right)=\sum_k x\left(k\Delta T\right)\cdot h_R\left(t-k\Delta T\right)\cdot\Delta T$$

che facendo tendere ΔT a 0 diventa:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\tau\right)\delta\left(t-\tau\right)\ d\tau=y\left(t\right)$$

Definizione 2: *Convoluzione*

L'integrale seguente è detto integrale di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\;d\tau = y(t)$$

e rappresenta la risposta di un sistema LTI, calcolabile conoscendo solo la risposta ad un impulso. L'operazione di convoluzione viene rappresentato con un asterisco $*$

$$x(t) * h(t)$$

e si legge $x(t)$ convoluito $y(y)$

Graficamente, effettuare la convouzione significa:

- Ribaltare orizzontalmente il segnale
- Farlo scorrere orizzontalmente
- Di volta in volta integrare

3.1.0 Properietà convoluzione

- La convoluzione restituisce una funzione che ha durata $\geq$ della funzione di partenza, omeglio $=$ alla somma delle durate delle due funzioni
- Proprietà commutativa
$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$
- Proprietà associativa
$$x(t) * y(t) * \mathrm{z(t)} = x(\mathrm{t}) * [y(t) * z(t)]$$
- Properità distributiva
$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$
- Linearità

3.1.0 Convoluzioni notevoli

1. Rettangoli simmetrici di pari durata: triangolo simmetrico di ampiezza $2T$ e area $A_1 \cdot A_2 \cdot T$
$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * A_2\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = A_1A_2T\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$
2. Rettangoli dimmetrici di durata diversa: assumento $T_1 \geq T_2$ ottengo trapezio con
   - $B = T_1 + T_2$
   - $b = T_2 - T_1$

- $h = A_1 \cdot A_2 \cdot T_1$

3. Rettangoli non simmetrici: come rettangoli simmetrici ma centrati nel mezzo del rettangolo con lunghezza maggiore

4. Gaussiana: date

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}; x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

allora la convoluzione vale

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}} e^{-\frac{[t-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}$$

4 Serie e trasformata di Fourier

Definizione 3: *Serie di Fourier*

La serie di fourirer è cosi definita:

$$x\left(t\right) = a_0 + \sum_k \cos\left(2\pi k f_0 t + \omega_k\right)$$

passando alla notazione con i numeri complessi, si ottiene:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad X_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} e^{j\vartheta_n} & n > 0 \\ \frac{a_{-n}}{2} e^{j\vartheta_{-n}} & n < 0 \\ a_0 & n = 0 \end{cases}$$

i coefficienti della serie sono calcolati come segue:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Proprietà serie di fourier:

1. Simmetria Hermitiana:

$$X_n = -X_{-n}^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg\left(X_n\right) = -\arg\left(X_{-n}\right) \end{cases}$$

2. Linearità: dati $x(t)$ e $y(t)$ periodici, avremo

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

3. Simmetrie del segnale:

   (a) Periodico *pari* $\rightarrow$ coefficienti X_n reali $\rightarrow$ soli coseni

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos\left(2\pi k f_0 t\right) dt$$

(b) Periodico *dispari* $\rightarrow$ coefficienti X_n immaginari $\rightarrow$ soli seni

$$X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\sin\left(2\pi k f_0 t\right) dt$$

(c) Segnale *alternato* $\rightarrow$ ho solo armoniche dispari

NB. date le simmetrie, posso calcolare l'integrale su metà periodo

Definizione 4: *Trasformata di Fourier*

La traformata di Fourier può essere intesa come il limite per $T_0 \rightarrow \infty$ della serie di Fourier

$$w\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f\right) e^{j2\pi f t} df \ dx$$

dove i coefficienti $X\left(f\right)$ sono:

$$X\left(f\right) = \int_{-\infty}^{\infty} w\left(t\right) e^{-j2\pi f t} \ dx$$

La prima si ottiene facendo il limite per $x \rightarrow \infty$ della serie di Fourier:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \frac{T_0}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k T_0 e^{j2\pi k f_0 t} f_0 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(k f_0\right) e^{j2\pi k f_0 t} f_0
\end{aligned}$$

passando al limite per $T_0 \rightarrow \infty$ e dunque $f_0 \rightarrow 0$, $k f_0$ tende a una variabile continua f e f_0 a un infinitesimo df:

$$\lim_{T_0\rightarrow\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(k f_0\right) e^{j2\pi k f_0 t} f_0 = \lim_{T_0\rightarrow\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f\right) e^{j2\pi f t} df$$

dunque:

$$w\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f\right) e^{j2\pi f t} df \ dx$$

Applicando lo stesso limite a $X\left(f\right)$, ottengo come calcolarmi i coefficienti:

$$X\left(f\right) = \lim_{f_0\rightarrow 0} X\left(k f_0\right) = \lim_{t_0\rightarrow\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} w\left(t\right) e^{-2\pi j k f_0 t} \ dt$$

dunque

$$X\left(f\right) = \int_{-\infty}^{\infty} w\left(t\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

4.0.0 Proprietà trasformata di Fourier

1. Simmetria Hermitiana se $x(t)$ funzione reale
2. Linearità
3. Simmetrie segnale nel tempo

$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ pari } \Rightarrow X(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt$$
$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ dispari } \Rightarrow X(f) = -2j\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt$$

4. Fattore di scala:
$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$
ossia, se il segnale viene compresso, allora le sue frequenze aumentano (immagina di velocizzare audio)
5. Fattore di ritardo:
$$x(t - \Delta T) \rightarrow X(f)\, e^{-j2\pi f \Delta T}$$
6. Dualità:
$$x(t) \rightarrow y(f) \Leftrightarrow y(t) \rightarrow x(-f)$$
7. Derivata:
$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}[x(t)]\right\} = j2\pi f \cdot X(f)$$
8. Integrale
$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\varepsilon)\ d\varepsilon\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$
9. Convoluzione
$$\mathfrak{F}\{x(t) * y(t)\} = \mathfrak{F}(x(t)) \cdot \mathfrak{F}(y(t))$$
10. Prodotto
$$\mathfrak{F}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \mathfrak{F}\{x_1(t)\} * \mathfrak{F}\{x_2(t)\}$$

4.1 Trasformate notevoli

1. Rettangolo:
$$V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow V_0 T \,\mathrm{sinc}\,(fT)$$
2. Sinc function:
$$V_0 \,\mathrm{sinc}\,(tW) = V_0$$
3. Costante
$$\mathfrak{F}\{V_0\} = V_0 \delta(f)$$

4. Esponenziale
$$\mathfrak{F}\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

5. Sinusoidi
$$\mathfrak{F}\left\{\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f + f_0\right) + \delta\left(f - f_0\right)\right]$$
$$\mathfrak{F}\left\{\sin\left(2\pi f_0 t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f + f_0\right) - \delta\left(f - f_0\right)\right]$$

6. Impulso
$$\mathfrak{F}\left\{\delta\left(t - t_0\right)\right\} = 1 \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

7. Treno di impulsi
$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT\right)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

4.2 Energia e banda

Teorema 1: *Parseval*

Dato un segnale periodico, la sua potenza è uguale a:
$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|X_n\right|^2$$

Questo teorema può essere esteso segnali non periodici

Teorema 2: *Rayleigh*

Dato un segnale aperiodico, la sua energia è uguale a:
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x\left(t\right)\right|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X\left(f\right)\right|^2 \, df$$

Definizione 5: *Larghezza di banda*

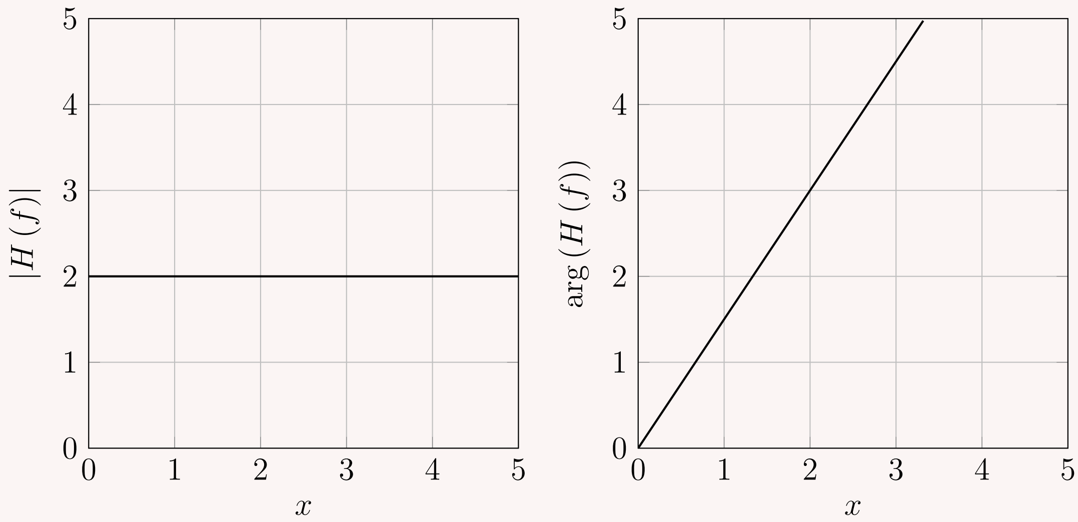
La larghezza di banda è l'intervallo di frequenze per le quali lo spettro del segnale assume valori non nulli. Per segnali con spettro infinito, si può imporre la larghezza di banda come l'intervalli in cui p contenuto l'x % della energia del segnale:
$$B : \int_{-B}^{B} \left|X\left(f\right)\right|^2 \, df = 0.99Ex$$

per dualità ho che $F\left(x\left(t\right)\right) = Y\left(f\right) \rightarrow F\left(Y\left(t\right)\right) = x\left(-f\right)$. Dunque è anche vero che

5 Distorsione ed equalizzazione

Definizione 6: *Condizione di non distorsione*

Un sistema è non distorcente se la sua risposta in frequenza è piatta e la sua risposta in fase è lineare (una retta)



Definizione 7: *Ritardo di gruppo*

Il ritardo di gruppo(temporale) è dato dallo sfasamento di fase di un segnale:

$$\tau_g(f) = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

Se il sistema è LTI, allora si può compensare la distorsione applicando un'equalizzazione tale per cui:

$$H_{\text{tot}} = H(f) \cdot H_{\text{eq}} = ke^{-j2\pi f t_0}$$

5.1 Distorsione non lineare

Se il sistema non è LTI, allora

- Spettro si deforma e si allarga
- Posso calcolare distorsione di seconda armonica

$$\text{distorsione di seconda armonica} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \cdot 100$$

- Posso fare companding per evitare distorsione:

Compressore → Sistema → Equalizzatore → Espansore

6 Conversione AD/DA

6.1 Campionamento nel tempo - versione teorica

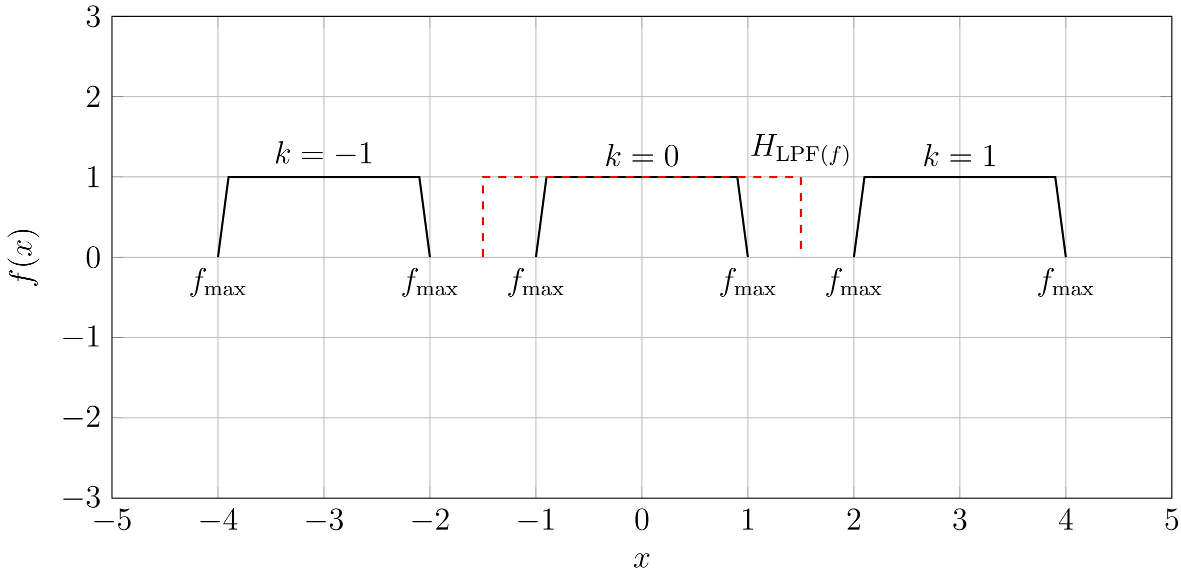
Matematicamente posso rappresentare il campionamento nel tempo come:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c)$$

Passando al dominio della frequenza ottengo

$$X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c)$$

Nota dunque come si ottenga il preciso spettro di $x(t)$ ripetuto nel tempo. Per risalire al segnale originario posso sfruttare un low cut, finestrando la prima iterazione del suo spettro:



Questo ricostruisce perfettamente il segnale, ma solo nel caso in cui $f_c \geq f_{\max}$. Da qui la regola di Nyquist:

Definizione 8: *Regola di Nyquist*

Per campionare un segnale senza perdita di informazione (aliasing) deve valere che.

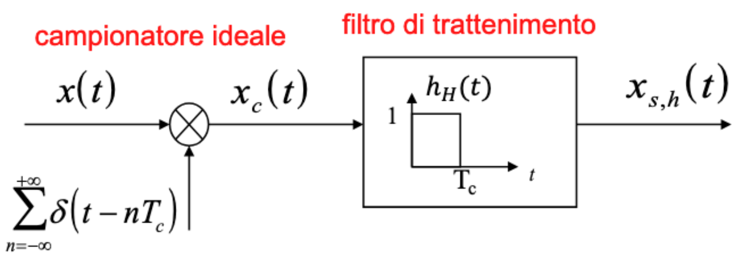
$$f_c \geq 2f_{\max} \quad \text{o equivalentemente} \quad T_c < \frac{1}{2}T_{\max}$$

Per ricostuire il campione mi basta quindi applicare un passa-basso:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c) * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right) \end{aligned}$$

6.2 Campionamento nel tempo - sample and hold

Nella pratica viene usata una tecnica diversa.



- Siccome $h_H(t)$ in frequenza diventa una sinc, le frequenze verranno attenuate. Questo è compensabile tramite un'equalizzazione

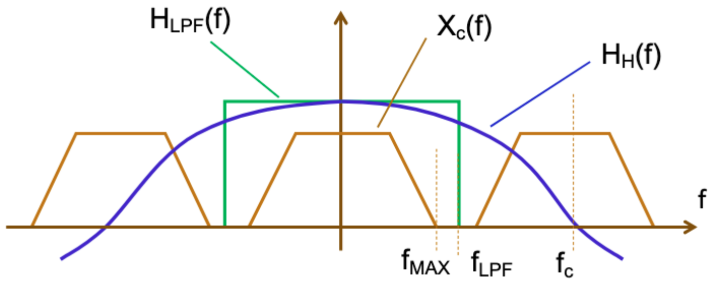


Figura 1: Si noti come la curva blu, ossia il filtro di trattenimento attenui le frequenze alte

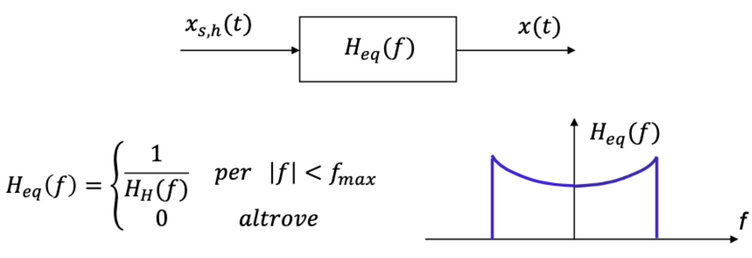


Figura 2: Filtro di equalizzazione per contrastare effetto del filtro di trattenimento

6.3 Quantizzazione

Posso stimare la potenza dell'"errore" di quantizzazione assumendo che questo sia distribuito in maniera omogenea:

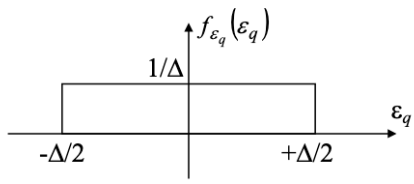


Figura 3: Distribuzione di probabilità di errore di quantizzazione

La potenza coincide con il valore quadratico medio, che a sua volta coincide con la varianza, dato che la distribuzione appena vista ha chiaramente valor medio nullo

$$E\left\{\varepsilon_q^2\right\} = \sigma_q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon^2 f_{\varepsilon_q}(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\frac{\varepsilon^3}{3}\Bigg|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Per stimare la qualità del segnale di utilizza il rapporto fra potenza di rumore e posenza del segnale:

Definizione 9: *Rapporto segnale rumore*

Il rapporto segnale rumore è così definito:

$$\text{SNR} = 10\log_{10}\left(\frac{S_x}{S_n}\right)[\text{db}]$$

Ogni bit in più usato per rappresentare la quantizzazione corrisponse a circa 6 db in i più nel SNR

Salvare segnale è costoso in termini di spazio. Ad esempio per salvare un segnale con $f_{\max} = 10kh$ con qualità di almeno 30 db servono:

$$r_b \geq \underbrace{2 \cdot 10^4}_{\text{Nyquist}} \cdot \underbrace{\frac{30}{6}}_{\text{db ogni bit in più}} = 10^5\left[\frac{\text{bits}}{\text{sec}}\right]$$

6.4 Modulazione predittiva

Tecniche per salvare bit

6.4.0 Modulazione delta

Scelgo costante Δ a priori e per ogni campione esprimo il suo valore in funzione del precedente $\pm\Delta$.

$$x_i = n_{i-1} \pm \Delta$$

Problemi:

- Staircase
- Slope overload
- Quantization noise

6.4.0 Modulazione DPCM

Crea una stima del valore del campione presente utilizzando i campioni passati e salva l'errore rispetto alla stima in un dato numero di bits, ad esempio:

$$\hat{x}_i = a_1 \tilde{x_{i-1}} + a_2 \tilde{x_{i-2}} + \ldots + a_N \tilde{x_{i-N}}$$

7 Segnali discreti: basi

1. Simmetria:
   - Pari:
   $$x(t) = x(-t) \quad \forall t \Rightarrow x[n] = x[-n] \quad \forall n$$
   - Dispari:
   $$x(t) = -x(-t) \quad \forall t \Rightarrow x[n] = -x[-n] \quad \forall n$$
2. Guadagno:
   - Positivo:
   $$\alpha x(t) : \alpha > 1 \Rightarrow \alpha x[n] : \alpha > 1$$
   - Negativo:
   $$\alpha x(t) : \alpha < 1 \Rightarrow \alpha x[n] : \alpha < 1$$
3. Ritardo:
   $$x(t - \Delta T) \Rightarrow x[n-k]$$
4. Integrazione discreta:
   $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$
5. Derivazione discreta:
   $$y[n] = \frac{1}{T_c}(x[n] - x[n-1])$$
   $T_c = 1$ se non conosciuto
6. Convoluzione discreta:
   $$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

7.1 Statistiche segnali discreti

1. Valor medio:
   $$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \implies \bar{x} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x[k]$$
2. Varianza:
   $$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \bar{x})^2\,dt \implies \sigma_x^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (x[k] - \bar{x})^2$$

3. Energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \implies E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$$

4. Potenza media:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt \implies P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} |x[k]|^2$$

5. Cross-correlazione:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+k]$$

6. Autocorrelazione:

$$R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+k]$$

7. Istogramma:
   - Creazione
   $$h(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta(x[n] - v_l), \quad l = 1, \dots, L$$
   - Valor medio
   $$\bar{x} = \sum_{l=1}^{L} v[l] \cdot h[l]$$
   - Varianza
   $$\sigma_x^2 = \sum_{l=1}^{L} (v[l] - \bar{x})^2 \cdot h[l]$$

7.2 Filtri

1. Passa basso (LPF)
   (a) Media mobile (filtro passa-basso FIR):
   $$h[k] = \frac{1}{K} \cdot [1, 1, \dots, 1]$$
   (b) Gaussiana discreta (kernel di convoluzione):
   $$h[k] = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}, \quad k \in \left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right]$$
   dove $\lambda = \sum_k e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$ e σ^2 è la varianza.
2. Passa alto (HPF) Si possono ottenere per differenza:
$$h_{\text{HPF}} = \delta[k] - h_{\text{LPF}}[k]$$

3. Derivativi e integrativi:

   (a) Filtro gradiente (derivata prima):

   $$h[k] = [-1, 1]$$

   (b) Filtro Laplaciano (derivata seconda):

   $$h[k] = [0, 1, -2, 1, 0]$$

   Ottieni applicando un filtro gradiente ad un altro filtro gradiente

4. Filtri non lineari:

   (a) Filtri auto-regressivi: filtri che si applicano a sinistra con i valori filtrati, a destra con i valori non filtrati

   (b) Rimappatura dei livelli(compressione ed espansione)

   (c) Filtri di rango:

      i. Massimo:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq N \\ 1 & \forall i = N \end{cases}$$

      ii. Minimo

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq 1 \\ 1 & \forall i = 1 \end{cases}$$

      iii. Mediano

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \neq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \\ 1 & i = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \end{cases}$$

8 Segnali discreti in frequenza

8.1 Trasformata di Frourier discreta

$$\text{DFT} \rightarrow X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}; \text{k} = 0, \ldots, N-1$$

$$\text{IDFT} \rightarrow x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n}; \text{n} = 0, \ldots, N-1$$

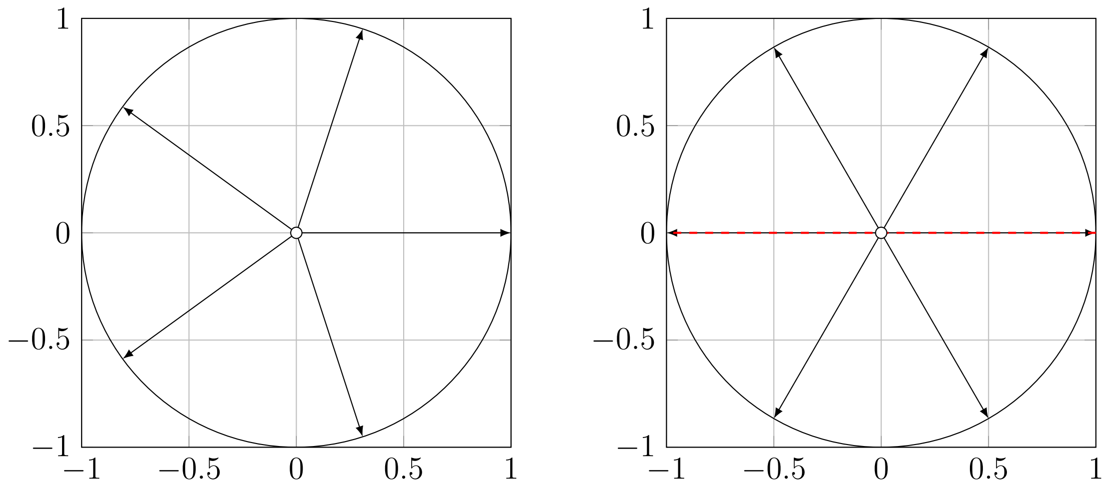
Osservazioni:

- La trasformata è data dalla somma di funzioni complesse periodiche di periodo N, dove N è la lunghezza del segnale
- La DFT è ortogonale, ossia la correlazione tra basi diverse è nulla:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x\left[n\right] y^*\left[n\right] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi i n}{N}} \cdot e^{j\frac{2\pi j n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(i-j)}{N}n}$$

occhio al $-j$ che diventa $+j$ nel secondo termine complesso. La correlazione fra funzioni complesse vuole il coniugato sul secondo termine

I termini ottenuti sono vettori "arrotolati" in modo equispaziato attorno alla circonferenza di raggio 1. La loro somma è sempre 0. Ragiona sul caso in cui siano pari o siano dispari



Nel caso in cui n è dispari, immaginati di ruotare i vettori di $\frac{2\pi}{n}$. In questo caso si otterrebbe la medesima situazione, dunque la somma non può cambiare. La somma non può che essere zero, in quanto se non lo fosse, sarebbe anch'essa ruotata (e dunque diversa)

8.2 Teorema della convoluzione

Siccome operiamo con vettori di lunghezza finita, è necessario rivedere la convoluzione. Abbiamo due tipi di convoluzione:

Definizione 10: *Convoluzione lineare discreta*

La convoluzione lineare discreta è così definita

$$y[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

Operativamente, prendi i segnali ed aggiungi zeri al più corto finché questo avrà la stessa lunghezza del più lungo ed esegui convoluzione

Definizione 11: *Convoluzione circolare discreta*

La convoluzione circolare discreta è così definita

$$y[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[(n-k)]_N$$

dove $y\left[.\right]_N$ indica la periodizzazione di $y[n]$

Operativamente, prendi il primo segnale, periodizzalo(duplica lo stesso segnale davanti e dopo) ed esegui convoluzione lineare

Teorema 3: *Teorema della convoluzione segnali discreti*

$$x[n] \circledast y[n] \leftrightarrow x[k] \cdot y[k]$$

Nota che per far coincidere convoluzione lineare e circolare si possono aggiungere zeri ad entrambi i vettori, facendoli arrivare alla stessa lunghezza.

Suppondendo che i due vettori siano lunghi N_x e N_y, allora a x aggiungo N_y zeri e a y N_x

9 Segnali in più dimensioni

Definizione 12: *Segnale in più dimensioni*

Un segnale in due dimensioni è rappresentato come:

$$x\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right) : \mathbb{R}_N \to \mathbb{R}_K$$

ad esempio un'immagine è rappresentata come:

$$I\left(x, y\right) : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3$$

$\mathbb{R}_2$ sono le coordinate del pixel, $\mathbb{R}_3$ il colore RGB

Definizione 13: *Sistema in più dimensioni*

Un sistema in più dimensioni è così definito:

$$y(\bar{v}) = f(x(\bar{u}))$$

dove

$$x(\bar{u}) : \mathbb{R}_N \to \mathbb{R}_K \qquad y(\bar{v}) : \mathbb{R}_M \to \mathbb{R}_L$$

Solitamente $M = N$ e $K = L = 1$

9.1 Estensione a segnali multidimensionali

Definizione 14: *LTI sistema multidimensionale*

Un sistema multidimensionale è lineare se e solo se:

$$\left.\begin{array}{l} f(i(\bar{v})) = \hat{\imath}(\bar{v}) \\ f(j(\bar{v})) = \hat{\jmath}(\bar{v}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\alpha i(\bar{v}) + \beta j(\bar{v})) = \alpha\hat{\imath}(\bar{v}) + \beta\hat{\jmath}(\bar{v}) \quad \forall \alpha, \beta$$

Un sistema multidimensionale è dominio indipendente se

$$f(i(\bar{v})) = \hat{\imath}(\bar{v}) \Rightarrow f\left(i\left(\bar{v} - \bar{v}_0\right)\right) = \hat{\imath}\left(\bar{v} - \bar{v}_0\right) \quad \forall \bar{v}_0$$

Definizione 15: *Convoluzione in più dimensioni*

La convoluzione in più dimensioni constiste nel applicare la convoluzione su ogni asse indiviadualmente

$$y\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right) = x\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right) * h\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right) =$$
$$\int_{\lambda_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{\lambda_N=-\infty}^{+\infty} x\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_N\right) \cdot h\left(v_1 - \lambda_1, \ldots, v_N - \lambda_N\right) \partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_N$$

Definizione 16: *Trasformata di Fuorier in più dimensioni*

La trasformata di Fuorier in più dimensioni constiste nel applicare la trasformata su ogni asse indiviadualmente

Trasformata di fuorier diretta:

$$\mathrm{X}\left(f_1, \ldots, f_N\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(v_1, \ldots, v_N\right) e^{-j2\pi\left(f_1 v_1 + \ldots + f_N v_N\right)} dv_1 \ldots dv_N$$

Trasformata di fuorier inversa:

$$x\left(v_1, \ldots, v_N\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}\left(f_1, \ldots, f_N\right) e^{j2\pi\left(f_1 v_1 + \ldots + f_N v_N\right)} df_1 \ldots df_N$$

Definizione 17: *Teorema della convoluzione in più dimensioni*

Il teorema della convoluzione rimane invariato in più dimensioni

$$y\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right) = x\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right) * h\left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\mathrm{Y}\left(f_1, \ldots, f_N\right) = \mathrm{X}\left(f_1, \ldots, f_N\right) \cdot \mathrm{H}\left(f_1, \ldots, f_N\right)$$

Definizione 18: *Trasformata di Fourier discreta in più dimensioni*

La trasformata di Fuorier in più dimensioni constiste nel applicare la trasformata su ogni asse individiadualmente

Trasformata di fuorier diretta:

$$X[k_1, \dots, k_N] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_N=0}^{N_N-1} x[n_1, \dots, n_N] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_N n_N}{N_N}\right)}$$

Trasformata di fuorier inversa:

$$x[n_1, \dots, n_N] = \frac{1}{N_1 \cdot \dots \cdot N_N} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_N=0}^{N_N-1} X[k_1, \dots, k_N] \cdot e^{j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_N n_N}{N_N}\right)}$$

10 Cheatsheet

Funzione	Dominio temporale	Dominio frequenza
Impulso	$\delta\left(t-t_0\right)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
Costante	V_0	$V_0\delta\left(f\right)$
Seno	$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f+f_0\right)-\delta\left(f-f_0\right)\right]$
Coseno	$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f+f_0\right)+\delta\left(f-f_0\right)\right]$
Rettangolo	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\,\mathrm{sinc}(fT)$
Sinc	$\mathrm{sinc}\left(Tt\right)$	$\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{f}{T}\right)$
Sinc quadra	$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$	$T(1-\lvert f\rvert T)\Pi\left(\frac{fT}{2}\right)$
Funzione segno	$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Gradino unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
Impulso triangolare	$\left(1-\frac{\lvert t\rvert}{T}\right)\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$	$T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$
Treno di impulsi	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_0\right)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$
Esponenziale	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$

10.0.0 Proprietà traformata

1. Fattore di scala:
$$x\left(t\right)\Leftrightarrow X\left(f\right)\Rightarrow x\left(\alpha t\right)\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$
2. Fattore di ritardo:
$$x\left(t-\Delta T\right)\rightarrow X\left(f\right)e^{-j2\pi f\Delta T}$$
3. Dualità:
$$x\left(t\right)\rightarrow y\left(f\right)\Leftrightarrow y\left(t\right)\rightarrow x\left(-f\right)$$
4. Derivata:
$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}\left[x\left(t\right)\right]\right\}=j2\pi f\cdot X\left(f\right)$$

5. Integrale

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\varepsilon)\ d\varepsilon\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

6. Convoluzione

$$\mathfrak{F}\{x(t) * y(t)\} = \mathfrak{F}(x(t)) \cdot \mathfrak{F}(y(t))$$

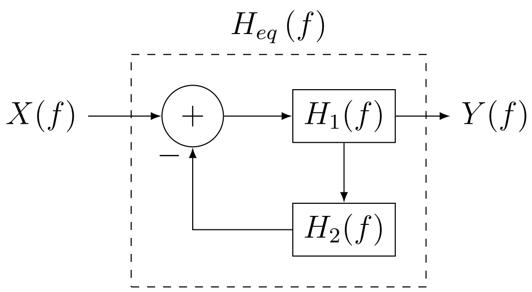
7. Prodotto

$$\mathfrak{F}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \mathfrak{F}\{x_1(t)\} * \mathfrak{F}\{x_2(t)\}$$

10.0.0 Serie Fourier note

Nome funzione	Espressione funzione	Coefficienti X_n
Onda quadra	$\begin{cases} V_0 & t \in \left[kT, kT + \frac{T}{2}\right] \\ -V_0 & t \in \left[kT + \frac{T}{2}, kT + T\right] \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\frac{2jV_0}{\pi k} & k\text{dispari} \end{cases}$
Onda quadra con ritorno a zero	$\begin{cases} V_0 & t \in [kT - \tau, kT + \tau] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\frac{V_0 \tau}{T_0} \operatorname{sinc}(k f_0 \tau)$
Onda triangolare	$V_0 \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ ripetuta periodicamente	$\frac{V_0}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$

1. Retroazione negativa:



$$H_{eq}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)}$$

$N=2$		0	1
0	re	1	1
	im	0	0
1	re	1	-1
	im	0	0

$N=3$		0	1	2
0	re	1	1	1
	im	0	0	0
1	re	1	-0.5	-0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
2	re	1	-0.5	-0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$

$N=4$		0	1	2	3
0	re	1	1	1	1
	im	0	0	0	0
1	re	1	0	-1	0
	im	0	-1	0	1
2	re	1	-1	1	-1
	im	0	0	0	0
3	re	1	0	-1	0
	im	0	1	0	-1

$N=5$		0	1	2	3	4
0	re	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0
1	re	1	0.309	-0.809	-0.809	0.309
	im	0	-0.951	-0.588	0.588	0.951
2	re	1	-0.809	0.309	0.309	-0.809
	im	0	-0.588	0.951	-0.951	0.588
3	re	1	-0.809	0.309	0.309	-0.809
	im	0	0.588	-0.951	0.951	-0.588
4	re	1	0.309	-0.809	-0.809	0.309
	im	0	0.951	0.588	-0.588	-0.951

$N=6$		0	1	2	3	4	5
0	re	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0
1	re	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
2	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
3	re	1	-1	1	-1	1	-1
	im	0	0	0	0	0	0
4	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
5	re	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$

$N=7$		0	1	2	3	4	5	6
0	re	1	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0	0
1	re	1	0.623	-0.223	-0.901	-0.901	-0.223	0.623
	im	0	-0.782	-0.975	-0.434	0.434	0.975	0.782
2	re	1	-0.223	-0.901	0.623	0.623	-0.901	-0.223
	im	0	-0.975	0.434	0.782	-0.782	-0.434	0.975
3	re	1	-0.901	0.623	-0.223	-0.223	0.623	-0.901
	im	0	-0.434	0.782	-0.975	0.975	-0.782	0.434
4	re	1	-0.901	0.623	-0.223	-0.223	0.623	-0.901
	im	0	0.434	-0.782	0.975	-0.975	0.782	-0.434
5	re	1	-0.223	-0.901	0.623	0.623	-0.901	-0.223
	im	0	0.975	-0.434	-0.782	0.782	0.434	-0.975
6	re	1	0.623	-0.223	-0.901	-0.901	-0.223	0.623
	im	0	0.782	0.975	0.434	-0.434	-0.975	-0.782

$N=8$		0	1	2	3	4	5	6	7
0	re	1	1	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0	0	0
1	re	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
	im	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$
2	re	1	0	-1	0	1	0	-1	0
	im	0	-1	0	1	0	-1	0	1
3	re	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
	im	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$
4	re	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	im	0	0	0	0	0	0	0	0
5	re	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
	im	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$
6	re	1	0	-1	0	1	0	-1	0
	im	0	1	0	-1	0	1	0	-1
7	re	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
	im	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$

$N=9$		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	re	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	im	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	re	1	0.766	0.174	-0.5	-0.94	-0.94	-0.5	0.174	0.766
	im	0	-0.643	-0.985	$-\sqrt{3}/2$	-0.342	0.342	$\sqrt{3}/2$	0.985	0.643
2	re	1	0.174	-0.94	-0.5	0.766	0.766	-0.5	-0.94	0.174
	im	0	-0.985	-0.342	$\sqrt{3}/2$	0.643	-0.643	$-\sqrt{3}/2$	0.342	0.985
3	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
4	re	1	-0.94	0.766	-0.5	0.174	0.174	-0.5	0.766	-0.94
	im	0	-0.342	0.643	$-\sqrt{3}/2$	0.985	-0.985	$\sqrt{3}/2$	-0.643	0.342
5	re	1	-0.94	0.766	-0.5	0.174	0.174	-0.5	0.766	-0.94
	im	0	0.342	-0.643	$\sqrt{3}/2$	-0.985	0.985	$-\sqrt{3}/2$	0.643	-0.342
6	re	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5
	im	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
7	re	1	0.174	-0.94	-0.5	0.766	0.766	-0.5	-0.94	0.174
	im	0	0.985	0.342	$-\sqrt{3}/2$	-0.643	0.643	$\sqrt{3}/2$	-0.342	-0.985
8	re	1	0.766	0.174	-0.5	-0.94	-0.94	-0.5	0.174	0.766
	im	0	0.643	0.985	$\sqrt{3}/2$	0.342	-0.342	$-\sqrt{3}/2$	-0.985	-0.643