Potential für 1 Punktladung bei $\underline{\boldsymbol{r}}_0$

$$\varphi(\underline{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\underline{\boldsymbol{r}} - \underline{\boldsymbol{r}}_0|}$$

Potential für einen zylindrischen Leiter bei $\underline{\boldsymbol{r}}_0$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\frac{r}{r_0} + C$$

(r = Abstand von der Zylinderachse)

elektrisches Feld im stationären Fall vs. dynamischer Fall

$$\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{E}} = 0 \rightarrow \underline{\boldsymbol{E}} \text{ ist wirbelfrei}$$

$$\mathrm{div}\ \underline{\boldsymbol{B}} = 0 \rightarrow \underline{\boldsymbol{B}} \text{ quellenfrei}$$

$$\text{Dynamischer Fall:}\,\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Maxwellgleichungen (4)

"Gaußsches Gesetz"	$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{D}} = \rho$
"Faradaysches Induktionsgesetz"	$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$
"Quellfreiheit des magn. Feldes"	$\operatorname{div} B = 0$
"Ampersches Gesetz"	$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$

Materialgleichungen (3)

$$\underline{\boldsymbol{D}} = \epsilon \underline{\boldsymbol{E}}$$

$$\underline{\boldsymbol{B}} = \mu \underline{\boldsymbol{H}}$$

$$\underline{\boldsymbol{j}} = \sigma \underline{\boldsymbol{E}}$$

elektromagnetisches Vektorpotential

&

elektromagnetisches Skalares Potential

$$\text{überall definiertes Vektorfeld } \underline{\boldsymbol{A}} \text{ mit } \boxed{\underline{\boldsymbol{B}} = \operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{A}}}$$

$$\&$$

$$\text{Skalarfeld } \Phi(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \quad \text{mit} \quad \underline{\boldsymbol{E}} = -\nabla\Phi - \tfrac{\partial A}{\partial t}$$

Energie im Elektrischen Feld
(bei diskreter und kontinuierlicher Ladungsverteilung)

diskreter Fall:

$$W_{\text{el}} = \sum_{\substack{i<k\\i,k=1}}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_k q_i}{|\underline{\boldsymbol{r}}_k - \underline{\boldsymbol{r}}_i|} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{\substack{i\neq k\\i,k=1}}^{N} \frac{q_k q_i}{|\underline{\boldsymbol{r}}_k - \underline{\boldsymbol{r}}_i|}$$

kontinuierlicher Fall:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\limits_V\int\limits_V \frac{\rho(\underline{\boldsymbol{r}})\rho(\underline{\boldsymbol{r}}')}{|\underline{\boldsymbol{r}} - \underline{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'$$

Energiedichten im magnetischen und Elektrischen Feld im elektrischen Feld:

$$\delta_{\mathrm{W_{el}}} = \underline{\boldsymbol{E}} \cdot \delta\underline{\boldsymbol{D}} \begin{cases} \xrightarrow{\epsilon\ \text{const.}} & w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}} \\ \text{sonst} & w_{\mathrm{el}} = \int\limits_0^{\underline{\boldsymbol{D}}} \underline{\boldsymbol{E}}(\underline{\boldsymbol{D'}})\ \mathrm{d}\underline{\boldsymbol{D}}' \end{cases}$$

im magnetischen Feld:

$$\delta_{\mathrm{W_{mag}}} = \underline{\boldsymbol{H}} \cdot \delta\underline{\boldsymbol{B}} \begin{cases} \xrightarrow{\mu\ \text{const.}} & w_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu}\underline{\boldsymbol{B}}^2 \\ \text{sonst} & w_{\mathrm{mag}} = \int\limits_0^{\underline{\boldsymbol{B}}} \underline{\boldsymbol{H}}(\underline{\boldsymbol{B'}})\ \mathrm{d}\underline{\boldsymbol{B}}' \end{cases}$$

$\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} = \frac{\partial w_{el}}{\partial t} + \frac{\partial w_{mag}}{\partial t}$

allgemeine Bilanzgleichung
(differentielle & integrale Form)

differentielle Form:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{j}}_x = \Pi_x$$

integrale Form

$$\frac{dX(V)}{dt} = -\int_{\partial V} \underline{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{X}}} \; d\underline{\boldsymbol{a}} + \int_V \Pi_X \; d^3r$$

Poynting Vektor

$$\underline{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}$$

$\rightarrow$ elektromagnetische Energiestromdichte

Eichfreiheiten von $\underline{\boldsymbol{A}}$ (2)

$$\underline{\boldsymbol{A}}' = \underline{\boldsymbol{A}} - \nabla\chi$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

Lorenz Eichung

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{A}} + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Coulomb Eichung

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{A}} = 0$$

Gleichungen zum Verhalten an den Materialgrenzen (4)

$$\underline{\boldsymbol{D}}_2\underline{\boldsymbol{n}} - \underline{\boldsymbol{D}}_1\underline{\boldsymbol{n}} = \sigma_{\text{int}}$$

$$\underline{\boldsymbol{B}}_2\underline{\boldsymbol{n}} - \underline{\boldsymbol{B}}_1\underline{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}_1 \times \underline{\boldsymbol{n}} - \underline{\boldsymbol{E}}_2 \times \underline{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\underline{\boldsymbol{H}}_2 \times \underline{\boldsymbol{n}} - \underline{\boldsymbol{H}}_1 \times \underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{j}}$$

Differentielle Änderung von
W_{el} & W_{mag}

$$\delta W_{el} = \int_V \Phi(\underline{\boldsymbol{r}}) \cdot \delta\rho(\underline{\boldsymbol{r}}) \ d^3r \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\boldsymbol{E}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{D}} \ d^3r$$

$$\delta W_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta w_{mag} \ d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\boldsymbol{H}}(\underline{\boldsymbol{r}}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{B}}(\underline{\boldsymbol{r}}) \ d^3r$$

Elektromagnetische Leistung

einer diskreten Ladungsverteilung auf Kurve $\underline{\boldsymbol{r}}$ mit v_k:

$$P_{elmag} \quad = -\sum_{k=1}^{N} q_k \underline{\boldsymbol{v_k}} \cdot \underline{\boldsymbol{E_k}}(\underline{\boldsymbol{r_k}}) = -P_{mech}$$

einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit $\underline{\boldsymbol{j}} = \rho \underline{\boldsymbol{v}}$

$$P_{elmag} = -\int_V \underline{\boldsymbol{j}}(\underline{\boldsymbol{r}}) \cdot \underline{\boldsymbol{E}}(\underline{\boldsymbol{r}}) \; d^3 r$$

Energiebilanz für das elektromagnetische Feld

$$\underbrace{\underline{\boldsymbol{E}} \cdot \frac{\partial \underline{\boldsymbol{D}}}{\partial t}}_{\frac{\partial w_{el}}{\partial t}} + \underbrace{\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}}_{\frac{\partial w_{mag}}{\partial t}} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{J}}_{elmag} = \underbrace{-\underline{\boldsymbol{j}} \cdot \underline{\boldsymbol{E}}}_{\Pi_{elmag}}$$

Statt $\underline{\boldsymbol{J}}_{elmag}$ auch mit $\underline{\boldsymbol{S}}$ und $\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} = \frac{\partial w_{el}}{\partial t} + \frac{\partial w_{mag}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{S}} = \Pi_{elmag}$$

Elektromagnetische Leistungsflussdichte

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{elmag} = \underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}} + \underline{\boldsymbol{S_0}} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{S_0}} = 0$$

Satz von Poincaré

$\underline{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{r}})$ ist stetig differenzierbar in Ω mit $\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{U}} = 0$ in Ω
$\Rightarrow$ es existiert ein Vektorpotential $\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{r}})$ auf Ω mit $\boxed{\underline{\boldsymbol{U}} = \operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{V}}}$ in Ω

Allgemeine Form des Vektorpotentials:

$$\underline{\boldsymbol{V}'} = \underline{\boldsymbol{V}} - \operatorname{grad} \chi(\underline{\boldsymbol{r}})$$

MWG in Potentialdarstellung
(4-komponentiges DGL-System)

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\epsilon \underline{\boldsymbol{A}}) = -\rho$$
$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{A}}\right) + \epsilon \frac{\partial^2 \underline{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} + \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \underline{\boldsymbol{j}}$$

Poissongleichung

$$\mathrm{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho(\underline{\boldsymbol{r}}, t)$$

Volumendichte in benachbarten Gebieten

differentielle Form: Vektorfeld $\underline{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{r}})$ erfüllt

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{U}} = \gamma$$

integrale Form:

$$\int_{\partial V} \underline{\boldsymbol{U}} \cdot d\underline{\boldsymbol{a}} = \int_V \gamma \, d^3 r + \int_{V \cap \Sigma} \nu \, da$$

in benachbarten Gebieten Ω_1 und Ω_2 mit stetiger und beschränkter **Volumendichte** $\gamma(\underline{\boldsymbol{r}})$

Flussdichte in benachbarten Gebieten

differentielle Form

$$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{J}} + \underline{\boldsymbol{V}}$$

integrale Form

$$\int_{\partial A} \underline{\boldsymbol{U}}\, d\underline{\boldsymbol{r}} = \int_A \underline{\boldsymbol{J}}\, d\underline{\boldsymbol{a}} + \int_A \underline{\boldsymbol{V}} d\underline{\boldsymbol{a}} + \int_{A\cap\Sigma} \underline{\boldsymbol{\nu}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}\, ds$$

mit $\underline{\boldsymbol{J}}$ = Flussdichte von $\underline{\boldsymbol{U}}$, dem beschränkten Vektorfeld $\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{r}})$ und der Grenzflächenflussdichte auf Σ $\underline{\boldsymbol{\nu}}(\underline{\boldsymbol{r}})$

Grenzflächenbedingung für elektrisches Potential an Materialgrenzen

$$\Phi(\underline{\boldsymbol{r}}) = \text{const. auf Leitern}$$
$$\Phi \text{ ist längs Materialgrenzen stetig}$$

Für Normalenableitung des Potentials gilt:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_1 - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_2 = \sigma_{int} \qquad \text{auf } \Sigma$$
$$\text{Sonderfälle:}$$
$$1 = \text{Leiter}, 2 = \text{Isolator} \Rightarrow -\nabla\Phi|_2 = \underline{\boldsymbol{E}}_2$$

Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Randbedingungen
(Dirichlet und Neumann)

Dirichlet-Problem:

$$[\text{Dir-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon\nabla\Phi) = -\rho \text{ auf } \mathring{\Omega} \text{ und } \Phi|_{\partial\Omega} = \Phi_D$$

Bem.: Ω heißt dann **Normalgebiet**

Neumann-Problem:

$$[\text{Neu-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon\nabla\Phi) = -\rho \text{ auf } \mathring{\Omega} \text{ und } \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = F_N$$

[Neu-RWP] entspricht der Vorgabe einer Oberflächenladungsdichte $\sigma(\underline{\boldsymbol{r}})$

Gemischtes Randwertproblem

$$[\text{M-RWP}] \quad \text{div}\,(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ in } \mathring{\Omega}$$

$$\text{mit } \Phi\big|_{\partial\Omega^{(D)}} = \Phi_D \text{ und } \epsilon\, \frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega^{(N)}} = \sigma_N$$

$$\text{wobei } \partial\Omega = \partial\Omega^{(D)} \cup \partial\Omega^{(N)},\ \partial\Omega^{(D)} \cap \partial\Omega^{(N)} = \emptyset,$$

$$\partial\Omega^{(D)} \neq \emptyset$$

Ladungserhaltungsgleichung

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Transportmodell für bewegliche Ladungsträger:
Partialstromdichte

$$\underline{\boldsymbol{j}}_\alpha = \underbrace{\underbrace{|q_\alpha| n_\alpha \mu_\alpha}_{\sigma_\alpha} \underline{\boldsymbol{E}}}_{\text{Driftstrom} \to \text{Ohmsches Gesetz}} - \underbrace{q_\alpha D_\alpha \nabla n_\alpha}_{\text{Diffusionsstrom} \to \text{Ficksches Diffusionsgesetz}}$$

α : Trägersorte

q_α : spezif. Ladung

μ_α : Beweglichkeit

n_α : Teilchendichte

D_α : Diffusionskoeffizient

Gesamtstromdichte und Raumladungsdichte

Gesamtstromdichte:

$$\underline{\boldsymbol{j}} = \sum_{\alpha=1}^{K} \underline{\boldsymbol{j}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{K} -\sigma_{\alpha} \nabla \Phi_{\alpha}$$

Raumladunsdichte:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{K} q_{\alpha} n_{\alpha}$$

Teilchenbilanzgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{q_\alpha}\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{j}}_\alpha + G_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, K)$$

$$G_\alpha \quad : \quad \text{Generations-Rekomb.rate der Spezies } \alpha$$

$$\frac{1}{q_\alpha}\underline{\boldsymbol{j}}_\alpha \quad : \quad \text{Teilchenstromdichte der Spezies } \alpha$$

dielektrische Relaxationszeit

$$\tau_R := \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Quasistationäre Näherung (in Metallen)

In Metallen: t(technisch relevante Vorgänge) $<< \tau_R$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$$

Mehrpolige elektrische Bauelemente

- Ladungsaustausch (Stromfluss) durch Kontakte/Klemmen $A_1 \dots A_N$ $(N \geq 2)$
- Klemmenpotentiale $\Phi_k = \Phi|_{A_k} \quad (k = 1 \dots N)$
- Bauelement elektr. neutral $(Q = 0)$
  $\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\sum\limits_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} \underline{\boldsymbol{j}} \cdot d\underline{\boldsymbol{a}} = -\sum\limits_{k=1}^{N} I_k = 0$
  I_k : Klemmenstrom
- Kompaktmodell $\underline{F}(\underline{U}, \underline{I}, \underline{\dot{U}}, \underline{\dot{I}}) = 0$

  $\underline{U} = (\Phi_1 - \Phi_0, \dots \Phi_N - \Phi_0)$ Klemmenspannungen
  $\Phi_0 =$ Bezugspotential ("Nullpunkt")
  $\underline{I} = (I_1, \dots I_N)$ Klemmenströme

Erforderliche Eigenschaften (physikalischer) Knoten

- Knoten sind Äquipotentialflächen $\Rightarrow$ Zuordnung eines Potentialwertes Φ_K, $\mathcal{K}$ = Menge aller Knoten im Netzwerk

- echter Knoten: Zahl der Kontakte $M \geq 3$

- Knoten sind ladungsneutral: $Q_K = 0$, Ausnahme: speichernde Knoten (Elektroden): $\sum\limits_{K \in \mathcal{K}} Q_K = 0$

Erforderliche Eigenschaften von Zweigen

- gerichter Zweigstrom $I(K_1, K_2)$ wird flusserhaltend zwischen K_1 und K_2 transportiert

- Jedem Zweig wird Zweigspannung
  $U(K_1, K_2) = \int\limits_{K_1}^{K_2} \underline{\boldsymbol{E}} \cdot d\underline{\boldsymbol{r}}$ zugeordnet
  mit $\underline{\boldsymbol{E}} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$
  $\Rightarrow U(K_1, K_2) = -\int\limits_{K_1}^{K_2} \nabla\Phi \cdot d\underline{\boldsymbol{r}} - \int\limits_{K_1}^{K_2} \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}}{\partial t} \cdot d\underline{\boldsymbol{r}} = \Phi_{K_1} - \Phi_{K_2} + U_{ind}(K_1, K_2)$

Kirchhoffsche Knotenregel

- allgemein: $I(K,K') = \int\limits_{A(K,K')} \underline{\boldsymbol{j}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}\, d\underline{\boldsymbol{a}}$
- speichernde Knoten: $\sum\limits_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K,K') = -\frac{dQ_K}{dt}$
- nichtspeichernde $\sim$: $\sum\limits_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K,K') = 0$

Kirchhoffsche Maschenregel

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{M}} \underline{\boldsymbol{E}} \cdot d\underline{\boldsymbol{r}} &= \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{K_j}^{K_{j+1}} \underline{\boldsymbol{E}} \cdot d\underline{\boldsymbol{r}} = \sum_{j=0}^{N} U(K_j, K_{j+1}) \\
&= -\int\limits_{\mathcal{M}} \nabla\Phi \cdot d\underline{\boldsymbol{r}} + \int\limits_{\mathcal{M}} \underline{\boldsymbol{E}}_{ind} \cdot d\underline{\boldsymbol{r}} = 0 + U_{ind}(\mathcal{M}) \\
&\Rightarrow \sum_{j=0}^{N} U(K_j, K_{j+1}) = U_{ind}(\mathcal{M})
\end{aligned}
$$

Elektrodenladungen & Maxwellsche Kapazitätskoeffizienten

Elektrodenladungen

$$Q_k = \sum_{l=0}^{N} C_{kl} V_l$$

mit Maxwellschen Kapazitätskoeffizienten

$$\begin{aligned} C_{kl} &:= -\int\limits_{\partial\Omega_k} \epsilon \underline{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \Phi_l \, da \quad (k, l = 0, \ldots, N) \\ &= \int\limits_{\Omega} \nabla \Phi_k \epsilon \nabla \Phi_l \, d^3 r \end{aligned}$$

Maxwellsche Kapazitätsmatrix

$$\left[C\right] = (C_{kl}) = \begin{bmatrix} C_{00} & \cdots & C_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N0} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

Symmetrie:

$$C_{kl} = C_{lk} \Leftrightarrow \left[C\right] = \left[C\right]^T$$

Positiv semi-definit (elektr. Energie stets ≥ 0):

$$(\,V\,)^T \left[C\right] \,(\,V\,) \geq 0 \;\forall\,(\,V\,) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Alle Zeilen/Spaltensummen sind Null

Darstellung der gespeicherten elektrischen Energie mit

$[C]$

$$W_{el} = \tfrac{1}{2} \sum_{k,\,l=0}^{N} V_l C_{lk}\ V_k = \tfrac{1}{2} \left(V \right)^T \left[C \right] \left(V \right)$$

mit dem Vektor der Klemmenpotentiale: $\underline{V} := \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$

und dem Vektor der Elektrodenladungen: $\underline{Q} := \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$ gilt: $\underline{Q} = \underline{\underline{C}}\ \underline{V}$

Reduzierte Kapazitätsmatrix

Streichung der nullten Zeile und Spalte:

$$\left[\tilde{C}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} (\,\tilde{Q}\,) &= \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_N \end{bmatrix}^T \\ (\,U\,)_0 &= \begin{bmatrix} U_{1,0} & \cdots & U_{N,0} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V_1 - V_0 & \cdots & V_N - V_0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Rightarrow (\,\tilde{Q}\,) = \left[\tilde{C}\right] \, (\,U\,)_0 \tag{3}$$

Spulenanordnungen

Spannung an Leiterschleife:

$$u_k(t) = -u_{ind,k}(t) + r_k i_k(t) \tag{4}$$

Spule als Generator ($\triangleq$ Spannungsquelle mit $u_{ind}(t)$):

$$u_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(S) = -w\frac{d}{dt}\Phi(S_0) = -w|S_0|\frac{dB}{dt} \tag{5}$$

Spule als Verbraucher:

$$u(t) = -u_{ind}(t) \overset{B(t)=ci(t)}{\Longrightarrow} u(t) = \underbrace{w|S_0|c}_{:=L}\frac{di}{dt} \tag{6}$$

w: Windungsanzahl

Induktionskoeffizienten und Transformatorgleichung

$$u_{ind,k}(t) = -\sum_{l=1}^{N} \underbrace{\frac{\mu}{4\pi}\int_{C_k}\int_{C_l}\frac{d\underline{\boldsymbol{s}}\cdot d\underline{\boldsymbol{r}}}{|\underline{\boldsymbol{r}}-\underline{\boldsymbol{s}}|}}_{\text{Induktionskoeffizienten } L_{kl}} \frac{di_l(t)}{dt} \tag{7}$$

L_{kk} Selbstinduktions-, L_{kl} $(k \neq l)$ Gegeninduktionskoeffizienten
Transformatorgleichung:

$$u_k(t) = r_k i_k(t) + \sum_{l=1}^{N} L_{kl}\frac{di_l}{dt} \tag{8}$$

$L_{kk} = L_k$ Selbstinduktions-, $L_{kl} = M$ $(k \neq l)$ Gegeninduktionskoeffizienten

Kopplungsfaktor:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{9}$$

Induktivitätsmatrix

$$\left[L\right] = (L_{kl}) = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix}$$

Symmetrie:

$$L_{kl} = L_{lk} \Leftrightarrow \left[L\right] = \left[L\right]^T, \quad (k, l = 1, \ldots, N)$$

Positiv definit (magn. Energie stets positiv!):

$$(\,V\,)^T \left[L\right] \, (\,V\,) > 0 \;\forall\, (\,V\,) \in \mathbb{R}^N$$

Darstellung der gespeicherten magnetischen Energie mit $[L]$

$$
\begin{aligned}
W_{mag} &= \frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{N} i_k L_{kl}\; i_l = \frac{1}{2}\,(\,\textit{I}\,)^T\,\big[L\big]\;(\,\textit{I}\,)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \underline{\boldsymbol{j}}\cdot\underline{\boldsymbol{A}}\,d^3r\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Phi(S_k)\cdot i_k\\
\text{mit }\;(\,\textit{I}\,) &:= \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_N\end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

Wechselspannungsgenerator

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- $u(t)$: Momentanwert
- $\hat{U}$: Scheitelwert
- $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$: Momentane Phase
- $\varphi_0 = \omega t_0$: Anfangsphase (Phase bei $t = 0$)
- $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$: Periodendauer

Zeigerdarstellung

Rotierender Zeiger

$$(\,\scriptstyle U\,) \, (t) = \begin{pmatrix} \hat{U} \cos \varphi(t) \\ \hat{U} \sin \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$(\,\scriptstyle U\,) = U_1(t) + jU_2(t) = \hat{U}(\cos \varphi + j \sin \varphi) \tag{11}$$

$$\text{mit } \hat{U} = |\,(\,\scriptstyle U\,)\,| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$$

$$\varphi = \arctan(U_2/U_1) = \arg\ (\,\scriptstyle U\,) \,,\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Fester Zeiger:} \quad (\,\scriptstyle \hat{U}\,) = \hat{U}\, \mathrm{e}^{j\varphi_u} \qquad (\,\scriptstyle \hat{I}\,) = \hat{I}\, \mathrm{e}^{j\varphi_i} \tag{12}$$

$$(\,\scriptstyle U\,) \, (t) = \mathrm{e}^{j\omega t}\, \hat{U}\, \mathrm{e}^{j\varphi_u} \qquad (\,\scriptstyle I\,) \, (t) = \mathrm{e}^{j\omega t}\, \hat{I}\, \mathrm{e}^{j\varphi_i} \tag{13}$$

Zeigeroperationen

$$\left.\begin{array}{l}\text{Drehung}\\ \text{Streckung}\\ \text{Drehstreckung}\end{array}\right\}\text{Multiplikation mit}\begin{cases}\mathrm{e}^{j\psi}\\ r\in\mathbb{R}^{+}\\ r\,\mathrm{e}^{j\psi}=:(\,z\,)\in\mathbb{C}\end{cases}$$

Impedanz/Admittanz

Komplexes ohmsches Gesetz: $(\hat{U}) = (Z) \cdot (I)$

$(Z) = |(Z)|\,\mathrm{e}^{j\Delta\varphi} \in \mathbb{C}$: **Impedanz**, $\arg((Z)) = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
$|(Z)|$: **Scheinwiderstand**, $\operatorname{Im}(Z)$: **Blindwiderstand**

$(\hat{I}) = \frac{1}{(Z)} \cdot (\hat{U}) := (Y) \cdot (\hat{U})$

$(Y) = \frac{1}{|(Z)|}\,\mathrm{e}^{-j\Delta\varphi} \in \mathbb{C}$: **Impedanz**, $\arg((Y)) = -\arg((Z))$
$|(Y)|$: **Scheinleitwert**, $\operatorname{Im}(Y)$: **Blindleitwert**

Lineare Wechselstrombauelemente

Bauelement	(z)	$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi i$
Ohmscher Widerstand	R	0
Induktivität	$j\omega L$	$\frac{\pi}{2}$
Kapazität	$-\frac{j}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$

Kirchhoffsche Regeln für Wechselstromschaltungen

Knotenregel (KCL)

$$\sum_{k \in K} \hat{I}_k \, \mathrm{e}^{j\varphi_{i,k}} = \sum_{k \in K} \left(\hat{\underline{I}} \right)_k = 0 \tag{14}$$

Maschenregel (KVL)

$$\sum_{l \in M} \hat{U}_l \, \mathrm{e}^{j\varphi_{u,l}} = \sum_{l \in M} \left(\hat{\underline{U}} \right)_l = \left(\hat{\underline{U}} \right)_e = \hat{U}_e \, \mathrm{e}^{j\varphi_e} \tag{15}$$

Momentane Leistung

$$
\begin{aligned}
p(t) &= u(t)i(t) = \hat{U}\hat{I}\sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_i) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{zeitl. Mittelwert } P_m} - \underbrace{\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{zeitl. Mittelwert } 0}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Effektivwerte für Spannung und Strom

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,dt} \quad \text{analog für } I \tag{17}$$

Spezialfall sinusförmiger Verlauf:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{U} \quad \text{analog für } I \tag{18}$$

Effektivwertzeiger:

$$(\,U\,) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,\hat{U}\,) \quad \text{analog für } I \tag{19}$$

Komplexe Leistung

$$
\begin{aligned}
(\,P\,) &= \frac{1}{2}\,(\,\hat{U}\,)\cdot(\,\hat{I}\,)^{*} = (\,U\,)\cdot(\,I\,)^{*} \\
&= \frac{1}{2}\hat{U}\,\hat{I}\,\mathrm{e}^{j(\varphi_u-\varphi_i)} = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\,\mathrm{e}^{j\Delta\varphi} \\
&= \underbrace{U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}(\cos\Delta\varphi}_{P_W=\mathrm{Re}(\,P\,):\ \text{Wirkleistung}} \quad +j\sin\Delta\varphi)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Wirk-, Blind- und Scheinleistung

$$P_W = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \underbrace{\mathrm{Re}((\,\underline{Z}\,))}_{R_W} I_{\mathrm{eff}}^2 \tag{21}$$

$$P_B = \underbrace{\mathrm{Im}((\,\underline{Z}\,))}_{R_B} I_{\mathrm{eff}}^2 \tag{22}$$

$$P_S = |\,(\,\underline{P}\,)\,| = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} \tag{23}$$

Ausbreitungs-/Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\text{mit } c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$$

D'Alembertsche Lösung

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Elektromagnetische Energiedichte für ebene EM-Wellen

$$w_{el} = w_{mag}$$

$$\begin{aligned} w_{elmag}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) &= w_{el} + w_{mag} \\ &= \epsilon \underline{\boldsymbol{E}}_0 (\underline{\boldsymbol{k}} \cdot \underline{\boldsymbol{r}} - \omega t)^2 \\ &= \mu \underline{\boldsymbol{H}}_0 (\underline{\boldsymbol{k}} \cdot \underline{\boldsymbol{r}} - \omega t)^2 \end{aligned} \tag{24}$$