

Potential für 1 Punktladung bei  $\underline{r}_0$

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_0|}$$

Potential für einen zylindrischen Leiter bei  $\underline{r}_0$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r}{r_0} + C$$

(  $r$  = Abstand von der Zylinderachse)

elektrisches Feld im stationären Fall vs. dynamischer  
Fall

$\text{rot } \underline{\underline{\mathbf{E}}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{E}}}$  ist wirbelfrei

$\text{div } \underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}}$  quellenfrei

Dynamischer Fall:  $\text{rot } \underline{\underline{\mathbf{E}}} = -\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{B}}}}{\partial t}$

Maxwellgleichungen (4)

"Gaußsches Gesetz"	$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{D}} = \rho$
"Faradaysches Induktionsgesetz"	$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$
"Quellfreiheit des magn. Feldes"	$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$
"Ampersches Gesetz"	$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$



## Materialgleichungen (3)

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$$

$$\underline{B} = \mu \underline{H}$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

elektromagnetisches Vektorpotential  
&  
elektromagnetisches Skalares Potential

überall definiertes Vektorfeld  $\underline{\mathbf{A}}$  mit  $\boxed{\underline{\mathbf{B}} = \text{rot } \underline{\mathbf{A}}}$   
&  
Skalarfeld  $\Phi(\underline{\mathbf{r}}, t)$  mit  $\underline{\mathbf{E}} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Energie im Elektrischen Feld  
(bei diskreter und kontinuierlicher Ladungsverteilung)

diskreter Fall:

$$W_{\text{el}} = \sum_{\substack{i < k \\ i, k=1}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_k q_i}{|\underline{\mathbf{r}}_k - \underline{\mathbf{r}}_i|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{\substack{i \neq k \\ i, k=1}}^N \frac{q_k q_i}{|\underline{\mathbf{r}}_k - \underline{\mathbf{r}}_i|}$$

kontinuierlicher Fall:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \int_V \frac{\rho(\underline{\mathbf{r}}) \rho(\underline{\mathbf{r}}')}{|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} d^3r d^3r'$$

Energiedichten im magnetischen und Elektrischen Feld

im elektrischen Feld:

$$\delta W_{\text{el}} = \underline{\underline{E}} \cdot \delta \underline{\underline{D}} \begin{cases} \epsilon \xrightarrow{\text{const.}} & w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \\ \text{sonst} & w_{\text{el}} = \int_0^{\underline{\underline{D}}} \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{D}}') \, d\underline{\underline{D}}' \end{cases}$$

im magnetischen Feld:

$$\delta W_{\text{mag}} = \underline{\underline{H}} \cdot \delta \underline{\underline{B}} \begin{cases} \mu \xrightarrow{\text{const.}} & w_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{B}}^2 \\ \text{sonst} & w_{\text{mag}} = \int_0^{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{H}}(\underline{\underline{B}}') \, d\underline{\underline{B}}' \end{cases}$$

$$\frac{\partial w_{\text{elmag}}}{\partial t} = \frac{\partial w_{\text{el}}}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{mag}}}{\partial t}$$



allgemeine Bilanzgleichung  
(differentielle & integrale Form)

differentielle Form:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{j}}_x = \Pi_x$$

integrale Form

$$\frac{dX(V)}{dt} = - \int_{\partial V} \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{X}} \, d\underline{\mathbf{a}} + \int_V \Pi_X \, d^3r$$

## Poynting Vektor

$$\underline{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}$$

→ elektromagnetische Energiestromdichte

Eichfreiheiten von **A** (2)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}'}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \nabla\chi$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

Lorenz Eichung

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}} + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$



Coulomb Eichung

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}} = 0$$

Gleichungen zum Verhalten an den Materialgrenzen (4)

$$\underline{D}_2 \underline{n} - \underline{D}_1 \underline{n} = \sigma_{\text{int}}$$

$$\underline{B}_2 \underline{n} - \underline{B}_1 \underline{n} = 0$$

$$\underline{E}_1 \times \underline{n} - \underline{E}_2 \times \underline{n} = 0$$

$$\underline{H}_2 \times \underline{n} - \underline{H}_1 \times \underline{n} = \underline{j}$$

Differentielle Änderung von  
 $W_{el}$  &  $W_{mag}$

$$\delta W_{el} = \int_V \Phi(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \delta \rho(\underline{\mathbf{r}}) d^3r \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\mathbf{E}} \cdot \delta \underline{\mathbf{D}} d^3r$$

$$\delta W_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta w_{mag} d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \delta \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{r}}) d^3r$$

## Elektromagnetische Leistung

einer diskreten Ladungsverteilung auf Kurve  $\underline{\mathbf{r}}$  mit  $v_k$ :

$$P_{elmag} = - \sum_{k=1}^N q_k \underline{\mathbf{v}}_k \cdot \underline{\mathbf{E}}_k(\underline{\mathbf{r}}_k) = -P_{mech}$$

einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit  $\underline{\mathbf{j}} = \rho \underline{\mathbf{v}}$

$$P_{elmag} = - \int_V \underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) d^3r$$



Energiebilanz für das elektromagnetische Feld

$$\underbrace{\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}_{\frac{\partial w_{el}}{\partial t}} + \underbrace{\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial w_{mag}}{\partial t}} + \operatorname{div} \underline{J}_{elmag} = \underbrace{-\underline{j} \cdot \underline{E}}_{\Pi_{elmag}}$$

Statt  $\underline{J}_{elmag}$  auch mit  $\underline{S}$  und  $\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} = \frac{\partial w_{el}}{\partial t} + \frac{\partial w_{mag}}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{S} = \Pi_{elmag}$$

## Elektromagnetische Leistungsflussdichte

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{elmag} = \underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}} + \underline{\boldsymbol{S_0}} \quad \text{mit} \quad \text{div} \underline{\boldsymbol{S_0}} = 0$$

## Satz von Poincaré

$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{r}})$  ist stetig differenzierbar in  $\Omega$  mit  $\operatorname{div} \underline{\mathbf{U}} = 0$  in  $\Omega$

$\Rightarrow$  es existiert ein Vektorpotential  $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{r}})$  auf  $\Omega$  mit  $\boxed{\underline{\mathbf{U}} = \operatorname{rot} \underline{\mathbf{V}}}$  in  $\Omega$

Allgemeine Form des Vektorpotentials:

$$\underline{\mathbf{V}}' = \underline{\mathbf{V}} - \operatorname{grad} \chi(\underline{\mathbf{r}})$$

MWG in Potentialdarstellung  
(4-komponentiges DGL-System)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\epsilon \underline{\mathbf{A}}) &= -\rho \\ \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^2} + \epsilon \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= \underline{\mathbf{j}}\end{aligned}$$



Poissongleichung

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho(\underline{\boldsymbol{r}}, t)$$

Volumendichte in benachbarten Gebieten

differentielle Form: Vektorfeld  $\underline{U}(\underline{r})$  erfüllt

$$\operatorname{div} \underline{U} = \gamma$$

integrale Form:

$$\int_{\partial V} \underline{U} \cdot d\underline{a} = \int_V \gamma d^3r + \int_{V \cap \Sigma} \nu da$$

in benachbarten Gebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  mit stetiger und beschränkter **Volumendichte**  $\gamma(\underline{r})$

Flussdichte in benachbarten Gebieten

differentielle Form

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{V}}$$

integrale Form

$$\int_{\partial A} \underline{\mathbf{U}} d\mathbf{r} = \int_A \underline{\mathbf{J}} d\mathbf{a} + \int_A \underline{\mathbf{V}} d\mathbf{a} + \int_{A \cap \Sigma} \underline{\boldsymbol{\nu}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds$$

mit  $\underline{\mathbf{J}}$  = Flussdichte von  $\underline{\mathbf{U}}$ , dem beschränkten Vektorfeld  $\underline{\mathbf{V}}(\mathbf{r})$  und der Grenzfächenflussdichte auf  $\Sigma$   $\underline{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{r})$

# Grenzflächenbedingung für elektrisches Potential an Materialgrenzen

$\Phi(\underline{r}) = \text{const.}$  auf Leitern

$\Phi$  ist längs Materialgrenzen stetig

Für Normalenableitung des Potentials gilt:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_1 - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_2 = \sigma_{int} \quad \text{auf } \Sigma$$

Sonderfälle:

$$1 = \text{Leiter}, 2 = \text{Isolator} \Rightarrow -\nabla \Phi|_2 = \underline{\underline{E}}_2$$



Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Randbedingungen  
(Dirichlet und Neumann)

Dirichlet-Problem:

$$[\text{Dir-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ auf } \mathring{\Omega} \text{ und } \Phi|_{\partial\Omega} = \Phi_D$$

Bem.:  $\Omega$  heißt dann **Normalgebiet**

Neumann-Problem:

$$[\text{Neu-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ auf } \mathring{\Omega} \text{ und } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = F_N$$

[Neu-RWP] entspricht der Vorgabe einer Oberflächenladungsdichte  $\sigma(\underline{r})$

## Gemischtes Randwertproblem

$$[\text{M-RWP}] \quad \operatorname{div} (\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ in } \mathring{\Omega}$$

$$\text{mit } \Phi|_{\partial\Omega^{(D)}} = \Phi_D \text{ und } \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega^{(N)}} = \sigma_N$$

$$\text{wobei } \partial\Omega = \partial\Omega^{(D)} \cup \partial\Omega^{(N)}, \quad \partial\Omega^{(D)} \cap \partial\Omega^{(N)} = \emptyset,$$

$$\partial\Omega^{(D)} \neq \emptyset$$

## Ladungserhaltungsgleichung

$$\operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



Transportmodell für bewegliche Ladungsträger:  
Partialstromdichte

$$\underline{j}_{\alpha} = \underbrace{\underbrace{|q_{\alpha}| n_{\alpha} \mu_{\alpha}}_{\sigma_{\alpha}} \underline{E}}_{\text{Driftstrom} \rightarrow \text{Ohmsches Gesetz}} - \underbrace{q_{\alpha} D_{\alpha} \nabla n_{\alpha}}_{\text{Diffusionsstrom} \rightarrow \text{Ficksches Diffusionsgesetz}}$$

$\alpha$  : Trägersorte

$q_{\alpha}$  : spezif. Ladung

$\mu_{\alpha}$  : Beweglichkeit

$n_{\alpha}$  : Teilchendichte

$D_{\alpha}$  : Diffusionskoeffizient

Gesamtstromdichte und Raumladungsdichte

Gesamtstromdichte:

$$\underline{j} = \sum_{\alpha=1}^K \underline{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^K -\sigma_{\alpha} \nabla \Phi_{\alpha}$$

Raumladungsdichte:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^K q_{\alpha} n_{\alpha}$$

Teilchenbilanzgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{q_\alpha} \operatorname{div} \underline{j}_\alpha + G_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, K)$$

$G_\alpha$  : Generations-Rekomb.rate der Spezies  $\alpha$

$\frac{1}{q_\alpha} \underline{j}_\alpha$  : Teilchenstromdichte der Spezies  $\alpha$

dielektrische Relaxationszeit

$$\tau_R := \frac{\epsilon}{\sigma}$$



Quasistationäre Näherung (in Metallen)

In Metallen:  $t(\text{technisch relevante Vorgänge}) \ll \tau_R$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$$

## Mehrpolige elektrische Bauelemente

- Ladungsaustausch (Stromfluss) durch Kontakte/Klemmen  $A_1 \dots A_N$  ( $N \geq 2$ )
- Klemmenpotentiale  $\Phi_k = \Phi|_{A_k}$  ( $k = 1 \dots N$ )
- Bauelement elektr. neutral ( $Q = 0$ )  
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = - \sum_{k=1}^N \int_{A_k} \underline{\mathbf{j}} \cdot d\underline{\mathbf{a}} = - \sum_{k=1}^N I_k = 0$$
 $I_k$ : Klemmenstrom
- Kompaktmodell  $\underline{F}(\underline{U}, \underline{I}, \dot{\underline{U}}, \dot{\underline{I}}) = 0$

$\underline{U} = (\Phi_1 - \Phi_0, \dots, \Phi_N - \Phi_0)$  Klemmenspannungen

$\Phi_0$  = Bezugspotential (“Nullpunkt”)

$\underline{I} = (I_1, \dots, I_N)$  Klemmenströme

Erforderliche Eigenschaften (physikalischer) Knoten

- Knoten sind Äquipotentialflächen  $\Rightarrow$  Zuordnung eines Potentialwertes  $\Phi_K$ ,  $\mathcal{K}$  = Menge aller Knoten im Netzwerk
- echter Knoten: Zahl der Kontakte  $M \geq 3$
- Knoten sind ladungsneutral:  $Q_K = 0$ , Ausnahme: speichernde Knoten (Elektroden):  $\sum_{K \in \mathcal{K}} Q_K = 0$

Erforderliche Eigenschaften von Zweigen

- gerichteter Zweigstrom  $I(K_1, K_2)$  wird flusserhaltend zwischen  $K_1$  und  $K_2$  transportiert
- Jedem Zweig wird Zweigspannung

$$U(K_1, K_2) = \int_{K_1}^{K_2} \underline{\mathbf{E}} \cdot d\underline{\mathbf{r}} \text{ zugeordnet}$$

$$\text{mit } \underline{\mathbf{E}} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{\mathbf{A}}$$

$$\Rightarrow U(K_1, K_2) = - \int_{K_1}^{K_2} \nabla\Phi \cdot d\underline{\mathbf{r}} - \int_{K_1}^{K_2} \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} \cdot d\underline{\mathbf{r}} = \Phi_{K_1} - \Phi_{K_2} + U_{ind}(K_1, K_2)$$



## Kirchhoffsche Knotenregel

- allgemein:  $I(K, K') = \int_{A(K, K')} \underline{\mathbf{j}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, d\underline{\mathbf{a}}$
- speichernde Knoten:  $\sum_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K, K') = -\frac{dQ_K}{dt}$
- nichtspeichernde  $\sim$ :  $\sum_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K, K') = 0$

## Kirchhoffsche Maschenregel

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} \underline{\mathbf{E}} \cdot d\underline{\mathbf{r}} &= \sum_{j=0}^N \int_{K_j}^{K_{j+1}} \underline{\mathbf{E}} \cdot d\underline{\mathbf{r}} = \sum_{j=0}^N U(K_j, K_{j+1}) \\ &= - \int_{\mathcal{M}} \nabla \Phi \cdot d\underline{\mathbf{r}} + \int_{\mathcal{M}} \underline{\mathbf{E}}_{ind} \cdot d\underline{\mathbf{r}} = 0 + U_{ind}(\mathcal{M}) \\ &\Rightarrow \sum_{j=0}^N U(K_j, K_{j+1}) = U_{ind}(\mathcal{M})\end{aligned}$$

Elektrodenladungen & Maxwellsche  
Kapazitätskoeffizienten

Elektrodenladungen

$$Q_k = \sum_{l=0}^N C_{kl} V_l$$

mit Maxwellschen Kapazitätskoeffizienten

$$\begin{aligned} C_{kl} &:= - \int_{\partial\Omega_k} \epsilon \underline{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi_l \, da \quad (k, l = 0, \dots, N) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \Phi_k \epsilon \nabla \Phi_l \, d^3r \end{aligned}$$

Maxwellsche Kapazitätsmatrix

$$[C] = (C_{kl}) = \begin{bmatrix} C_{00} & \cdots & C_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N0} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

Symmetrie:

$$C_{kl} = C_{lk} \Leftrightarrow [C] = [C]^T$$

Positiv semi-definit (elektr. Energie stets  $\geq 0$ ):

$$(v)^T [C] (v) \geq 0 \quad \forall (v) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Alle Zeilen/Spaltensummen sind Null



Darstellung der gespeicherten elektrischen Energie mit  
 $[C]$

$$W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^N V_l C_{lk} V_k = \frac{1}{2} (V)^T [C] (V)$$

mit dem Vektor der Klemmenpotentiale:  $\underline{V} := \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$

und dem Vektor der Elektrodenladungen:  $\underline{Q} := \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$  gilt:  $\underline{Q} = \underline{\underline{C}} \underline{V}$

Reduzierte Kapazitätsmatrix

Streichung der nullten Zeile und Spalte:

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}) &= [Q_1 \quad \cdots \quad Q_N]^T \\ (U)_0 &= [U_{1,0} \quad \cdots \quad U_{N,0}]^T = [V_1 - V_0 \quad \cdots \quad V_N - V_0]^T \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Rightarrow (\tilde{Q}) = [\tilde{C}] (U)_0 \quad (3)$$

## Spulenanordnungen

Spannung an Leiterschleife:

$$u_k(t) = -u_{ind,k}(t) + r_k i_k(t) \quad (4)$$

Spule als Generator ( $\triangleq$  Spannungsquelle mit  $u_{ind}(t)$ ):

$$u_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(S) = -w\frac{d}{dt}\Phi(S_0) = -w|S_0|\frac{dB}{dt} \quad (5)$$

Spule als Verbraucher:

$$u(t) = -u_{ind}(t) \xrightarrow{B(t)=\mu_0 c i(t)} u(t) = \underbrace{w|S_0|\mu_0 c}_{:=L} \frac{di}{dt} \quad (6)$$

$w$ : Windungszahl

## Induktionskoeffizienten und Transformatorgleichung

$$u_{ind,k}(t) = - \sum_{l=1}^N \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \int_{C_k} \int_{C_l} \frac{d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}}_{\text{Induktionskoeffizienten } L_{kl}} \frac{di_l(t)}{dt} \quad (7)$$

$L_{kk}$  Selbstinduktions-,  $L_{kl}$  ( $k \neq l$ ) Gegeninduktionskoeffizienten  
Transformatorgleichung:

$$u_k(t) = r_k i_k(t) + \sum_{l=1}^N L_{kl} \frac{di_l}{dt} \quad (8)$$

$L_{kk} = L_k$  Selbstinduktions-,  $L_{kl} = M$  ( $k \neq l$ ) Gegeninduktionskoeffizienten

Kopplungsfaktor:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (9)$$



Induktivitätsmatrix

$$[L] = (L_{kl}) = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix}$$

Symmetrie:

$$L_{kl} = L_{lk} \Leftrightarrow [L] = [L]^T, \quad (k, l = 1, \dots, N)$$

Positiv definit (magn. Energie stets positiv!):

$$(v)^T [L] (v) > 0 \quad \forall (v) \in \mathbb{R}^N$$

Darstellung der gespeicherten magnetischen Energie  
mit  $[L]$

$$\begin{aligned}W_{mag} &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N i_k L_{kl} i_l = \frac{1}{2} (I)^T [L] (I) \\&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{j} \cdot \underline{A} d^3r \\&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi(S_k) \cdot i_k\end{aligned}$$

$$\text{mit } (I) := \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_N \end{bmatrix}^T$$

## Wechselspannungsgenerator

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- $u(t)$ : Momentanwert
- $\hat{U}$ : Scheitelwert
- $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ : Momentane Phase
- $\varphi_0 = \omega t_0$ : Anfangsphase (Phase bei  $t = 0$ )
- $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ : Periodendauer

Zeigerdarstellung

Rotierender Zeiger

$$\begin{pmatrix} U \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} \hat{U} \cos \varphi(t) \\ \hat{U} \sin \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} U \end{pmatrix} = U_1(t) + jU_2(t) = \hat{U}(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (11)$$

$$\text{mit } \hat{U} = |\begin{pmatrix} U \end{pmatrix}| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$$

$$\varphi = \arctan(U_2/U_1) = \arg \begin{pmatrix} U \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Fester Zeiger: } \begin{pmatrix} \hat{U} \end{pmatrix} = \hat{U} e^{j\varphi_u} \quad \begin{pmatrix} \hat{I} \end{pmatrix} = \hat{I} e^{j\varphi_i} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} U \end{pmatrix} (t) = e^{j\omega t} \hat{U} e^{j\varphi_u} \quad \begin{pmatrix} I \end{pmatrix} (t) = e^{j\omega t} \hat{I} e^{j\varphi_i} \quad (13)$$



## Zeigeroperationen

$$\left. \begin{array}{l} \text{Drehung} \\ \text{Streckung} \\ \text{Drehstreckung} \end{array} \right\} \text{Multiplikation mit } \begin{cases} e^{j\psi} \\ r \in \mathbb{R}^+ \\ r e^{j\psi} =: (z) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Impedanz/Admittanz

Komplexes ohmsches Gesetz:  $(\hat{U}) = (Z) \cdot (I)$

$(Z) = |(Z)| e^{j\Delta\varphi} \in \mathbb{C}$ : **Impedanz**,  $\arg((Z)) = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$   
 $|(Z)|$ : **Scheinwiderstand**,  $\operatorname{Im}(Z)$ : **Blindwiderstand**

$$(\hat{I}) = \frac{1}{(Z)} \cdot (\hat{U}) := (Y) \cdot (\hat{U})$$

$(Y) = \frac{1}{|(Z)|} e^{-j\Delta\varphi} \in \mathbb{C}$ : **Impedanz**,  $\arg((Y)) = -\arg((Z))$   
 $|(Y)|$ : **Scheinleitwert**,  $\operatorname{Im}(Y)$ : **Blindleitwert**

## Lineare Wechselstrombauelemente

Bauelement	$(Z)$	$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
Ohmscher Widerstand	$R$	$0$
Induktivität	$j\omega L$	$\frac{\pi}{2}$
Kapazität	$-\frac{j}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$

## Kirchhoffsche Regeln für Wechselstromschaltungen

Knotenregel (KCL)

$$\sum_{k \in K} \hat{I}_k e^{j\varphi_{i,k}} = \sum_{k \in K} (\hat{I})_k = 0 \quad (14)$$

Maschenregel (KVL)

$$\sum_{l \in M} \hat{U}_l e^{j\varphi_{u,l}} = \sum_{l \in M} (\hat{U})_l = (\hat{U})_e = \hat{U}_e e^{j\varphi_e} \quad (15)$$



Momentane Leistung

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = \hat{U}\hat{I} \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I} \cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{zeitl. Mittelwert } P_m} - \underbrace{\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{zeitl. Mittelwert } 0} \end{aligned} \quad (16)$$

Effektivwerte für Spannung und Strom

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} \quad \text{analog für } I \quad (17)$$

Spezialfall sinusförmiger Verlauf:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U} \quad \text{analog für } I \quad (18)$$

Effektivwertzeiger:

$$(U) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{U}) \quad \text{analog für } I \quad (19)$$

## Komplexe Leistung

$$\begin{aligned}
 (P) &= \frac{1}{2} (\hat{U}) \cdot (\hat{I})^* = (U) \cdot (I)^* \\
 &= \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j\Delta\varphi} \\
 &= \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} (\cos \Delta\varphi)}_{P_W = \text{Re}(P): \text{ Wirkleistung}} + j \sin \Delta\varphi
 \end{aligned} \tag{20}$$

Wirk-, Blind- und Scheinleistung

$$P_W = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \underbrace{\operatorname{Re}((Z))}_{R_W} I_{\text{eff}}^2 \quad (21)$$

$$P_B = \underbrace{\operatorname{Im}((Z))}_{R_B} I_{\text{eff}}^2 \quad (22)$$

$$P_S = |(P)| = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} \quad (23)$$



Ausbreitungs-/Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\text{mit } c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

## D'Alembertsche Lösung

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

# Elektromagnetische Energiedichte für ebene EM-Wellen

$$w_{el} = w_{mag}$$

$$\begin{aligned}w_{elmag}(\underline{\mathbf{r}}, t) &= w_{el} + w_{mag} \\&= \epsilon \underline{\mathbf{E}}_0 (\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}} - \omega t)^2 \\&= \mu \underline{\mathbf{H}}_0 (\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}} - \omega t)^2\end{aligned}\tag{24}$$