Potential für 1 Punktladung bei $\vec{r}_0$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Potential für einen zylindrischen Leiter bei $\vec{r}_0$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\frac{r}{r_0} + C$$

(r = Abstand von der Zylinderachse)

elektrisches Feld im stationären Fall vs. dynamischer Fall

$$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} \text{ ist wirbelfrei}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} \text{ quellenfrei}$$

$$\text{Dynamischer Fall:}\,\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Maxwellgleichungen (4)

"Gaußsches Gesetz"	$\text{div}\,\vec{D} = \rho$
"Faradaysches Induktionsgesetz"	$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
"Quellfreiheit des magn. Feldes"	$\text{div}\,B = 0$
"Ampersches Gesetz"	$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Materialgleichungen (3)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

elektromagnetisches Vektorpotential
&
elektromagnetisches Skalares Potential

überall definiertes Vektorfeld $\vec{A}$ mit $\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$

&

Skalarfeld $\Phi(\vec{r}, t)$ mit $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$

Energie im Elektrischen Feld
(bei diskreter und kontinuierlicher Ladungsverteilung)

diskreter Fall:

$$W_{\mathrm{el}} = \sum_{\substack{i<k \\ i,k=1}}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{\substack{i\neq k \\ i,k=1}}^{N} \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$$

kontinuierlicher Fall:

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int\limits_V \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r'$$

Energiedichten im magnetischen und Elektrischen Feld

im elektrischen Feld:

$$\delta_{\mathrm{W_{el}}} = \vec{E} \cdot \delta\vec{D} \begin{cases} \xrightarrow{\epsilon\ \text{const.}} & w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} \\ \text{sonst} & w_{\text{el}} = \int\limits_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D}')\ \mathrm{d}\vec{D}' \end{cases}$$

im magnetischen Feld:

$$\delta_{\mathrm{W_{mag}}} = \vec{H} \cdot \delta\vec{B} \begin{cases} \xrightarrow{\mu\ \text{const.}} & w_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2 \\ \text{sonst} & w_{\text{mag}} = \int\limits_0^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B}')\ \mathrm{d}\vec{B}' \end{cases}$$

$$\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} = \frac{\partial w_{el}}{\partial t} + \frac{\partial w_{mag}}{\partial t}$$

allgemeine Bilanzgleichung
(differentielle & integrale Form)

differentielle Form:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \text{div}\ \vec{j}_x = \Pi_x$$

integrale Form

$$\frac{dX(V)}{dt} = -\int_{\partial V} \vec{J_X}\ d\vec{a} + \int_V \Pi_X\ d^3r$$

Poynting Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$\rightarrow$ elektromagnetische Energiestromdichte

Eichfreiheiten von $\vec{A}$ (2)

$$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\chi$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Lorenz Eichung

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Coulomb Eichung

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Gleichungen zum Verhalten an den Materialgrenzen (4)

$$\vec{D}_2\vec{n} - \vec{D}_1\vec{n} = \sigma_{\text{int}}$$

$$\vec{B}_2\vec{n} - \vec{B}_1\vec{n} = 0$$

$$\vec{E}_1 \times \vec{n} - \vec{E}_2 \times \vec{n} = 0$$

$$\vec{H}_2 \times \vec{n} - \vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{j}$$

Differentielle Änderung von W_{el} & W_{mag}

$$\delta W_{el} = \int_V \Phi(\vec{r}) \cdot \delta\rho(\vec{r})\ d^3r \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E} \cdot \delta\vec{D}\ d^3r$$

$$\delta W_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta w_{mag}\ d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{B}(\vec{r})\ d^3r$$

Elektromagnetische Leistung

einer diskreten Ladungsverteilung auf Kurve $\vec{r}$ mit v_k:

$$P_{elmag} \quad = -\sum_{k=1}^{N} q_k \vec{v_k} \cdot \vec{E}_k(\vec{r_k}) = -P_{mech}$$

einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit $\vec{j} = \rho \vec{v}$

$$P_{elmag} = -\int_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\ d^3r$$

Energiebilanz für das elektromagnetische Feld

$$\underbrace{\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{\frac{\partial w_{el}}{\partial t}}+\underbrace{\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial w_{mag}}{\partial t}}+\operatorname{div}\vec{J}_{elmag}=\underbrace{-\vec{j}\cdot\vec{E}}_{\Pi_{elmag}}$$

Statt $\vec{J}_{elmag}$ auch mit $\vec{S}$ und $\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t}=\frac{\partial w_{el}}{\partial t}+\frac{\partial w_{mag}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{S}=\Pi_{elmag}$$

Elektromagnetische Leistungsflussdichte

$$\vec{J}_{elmag} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{S_0} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \vec{S_0} = 0$$

Satz von Poincaré

$\vec{U}(\vec{r})$ ist stetig differenzierbar in Ω mit $\operatorname{div}\vec{U} = 0$ in Ω
$\Rightarrow$ es existiert ein Vektorpotential $\vec{V}(\vec{r})$ auf Ω mit $\boxed{\vec{U} = \operatorname{rot}\vec{V}}$ in Ω

Allgemeine Form des Vektorpotentials:

$$\vec{V}' = \vec{V} - \operatorname{grad}\chi(\vec{r})$$

MWG in Potentialdarstellung
(4-komponentiges DGL-System)

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\epsilon \vec{A}) = -\rho$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}\right) + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \vec{j}$$

Poissongleichung

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho(\vec{r}, t)$$

Volumendichte in benachbarten Gebieten

differentielle Form: Vektorfeld $\vec{U}(\vec{r})$ erfüllt

$$\operatorname{div} \vec{U} = \gamma$$

integrale Form:

$$\int_{\partial V} \vec{U} \cdot d\vec{a} = \int_V \gamma \, d^3r + \int_{V \cap \Sigma} \nu \, da$$

in benachbarten Gebieten Ω_1 und Ω_2 mit stetiger und beschränkter *Volumendichte* $\gamma(\vec{r})$

Flussdichte in benachbarten Gebieten

differentielle Form

$$\operatorname{rot} \vec{U} = \vec{J} + \vec{V}$$

integrale Form

$$\int_{\partial A} \vec{U}\, d\vec{r} = \int_A \vec{J}\, d\vec{a} + \int_A \vec{V}\, d\vec{a} + \int_{A \cap \Sigma} \vec{\nu} \cdot \vec{n}\, ds$$

mit $\vec{J}$ = Flussdichte von $\vec{U}$, dem beschränkten Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ und der Grenzflächenflussdichte auf Σ $\vec{\nu}(\vec{r})$

Grenzflächenbedingung für elektrisches Potential an Materialgrenzen

$$\Phi(\vec{r}) = \text{const. auf Leitern}$$
$$\Phi \text{ ist längs Materialgrenzen stetig}$$

Für Normalenableitung des Potentials gilt:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_1 - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_2 = \sigma_{int} \qquad \text{auf } \Sigma$$
$$\text{Sonderfälle:}$$
$$1 = \text{Leiter}, 2 = \text{Isolator} \Rightarrow -\nabla\Phi|_2 = \vec{E}_2$$

Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Randbedingungen
(Dirichlet und Neumann)

Dirichlet-Problem:

$$[\text{Dir-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon\nabla\Phi) = -\rho \text{ auf } \mathring{\Omega} \text{ und } \Phi|_{\partial\Omega} = \Phi_D$$

Bem.: Ω heißt dann *Normalgebiet*

Neumann-Problem:

$$[\text{Neu-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon\nabla\Phi) = -\rho \text{ auf } \mathring{\Omega} \text{ und } \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = F_N$$

[Neu-RWP] entspricht der Vorgabe einer Oberflächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$

Gemischtes Randwertproblem

$$[\text{M-RWP}] \quad \mathrm{div}\,(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ in } \mathring{\Omega}$$

$$\text{mit } \Phi|_{\partial\Omega^{(D)}} = \Phi_D \text{ und } \epsilon \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega^{(N)}} = \sigma_N$$

$$\text{wobei } \partial\Omega = \partial\Omega^{(D)} \cup \partial\Omega^{(N)},\ \partial\Omega^{(D)} \cap \partial\Omega^{(N)} = \emptyset,$$

$$\partial\Omega^{(D)} \neq \emptyset$$

Ladungserhaltungsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Transportmodell für bewegliche Ladungsträger: Partialstromdichte

$$\vec{j}_\alpha = \underbrace{\underbrace{|q_\alpha| n_\alpha \mu_\alpha}_{\sigma_\alpha} \vec{E}}_{\text{Driftstrom} \rightarrow \text{Ohmsches Gesetz}} - \underbrace{q_\alpha D_\alpha \nabla n_\alpha}_{\text{Diffusionsstrom} \rightarrow \text{Ficksches Diffusionsgesetz}}$$

α : Trägersorte

q_α : spezif. Ladung

μ_α : Beweglichkeit

n_α : Teilchendichte

D_α : Diffusionskoeffizient

Gesamtstromdichte und Raumladungsdichte

Gesamtstromdichte:

$$\vec{j} = \sum_{\alpha=1}^{K} \vec{j}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{K} -\sigma_\alpha \nabla \Phi_\alpha$$

Raumladunsdichte:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{K} q_\alpha n_\alpha$$

Teilchenbilanzgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{q_\alpha}\operatorname{div}\vec{j}_\alpha + G_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, K)$$

G_α : Generations-Rekomb.rate der Spezies α

$\frac{1}{q_\alpha}\vec{j}_\alpha$: Teilchenstromdichte der Spezies α

dielektrische Relaxationszeit

$$\tau_R := \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Quasistationäre Näherung (in Metallen)

In Metallen: t(technisch relevante Vorgänge) $<< \tau_R$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$$

Mehrpolige elektrische Bauelemente

- Ladungsaustausch (Stromfluss) durch Kontakte/Klemmen $A_1 \dots A_N$ $(N \geq 2)$

- Klemmenpotentiale $\Phi_k = \Phi|_{A_k} \quad (k = 1 \dots N)$

- Bauelement elektr. neutral $(Q = 0)$
  $\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} \vec{j} \cdot d\vec{a} = -\sum_{k=1}^{N} I_k = 0$
  I_k : Klemmenstrom

- Kompaktmodell $\underline{F}(\underline{U}, \underline{I}, \dot{\underline{U}}, \dot{\underline{I}}) = 0$

  $\underline{U} = (\Phi_1 - \Phi_0, \dots \Phi_N - \Phi_0)$ Klemmenspannungen
  $\Phi_0 =$ Bezugspotential ("Nullpunkt")
  $\underline{I} = (I_1, \dots I_N)$ Klemmenströme

Erforderliche Eigenschaften (physikalischer) Knoten

- Knoten sind Äquipotentialflächen $\Rightarrow$ Zuordnung eines Potentialwertes Φ_K, $\mathcal{K}$ = Menge aller Knoten im Netzwerk
- echter Knoten: Zahl der Kontakte $M \geq 3$
- Knoten sind ladungsneutral: $Q_K = 0$, Ausnahme: speichernde Knoten (Elektroden): $\sum\limits_{K \in \mathcal{K}} Q_K = 0$

Erforderliche Eigenschaften von Zweigen

- gerichter Zweigstrom $I(K_1, K_2)$ wird flusserhaltend zwischen K_1 und K_2 transportiert

- Jedem Zweig wird Zweigspannung
  $U(K_1, K_2) = \int\limits_{K_1}^{K_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ zugeordnet
  mit $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$
  $\Rightarrow U(K_1, K_2) = -\int\limits_{K_1}^{K_2} \nabla\Phi \cdot d\vec{r} - \int\limits_{K_1}^{K_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \Phi_{K_1} - \Phi_{K_2} + U_{ind}(K_1, K_2)$

Kirchhoffsche Knotenregel

- allgemein: $I(K,K') = \int\limits_{A(K,K')} \vec{j} \cdot \vec{n}\, d\vec{a}$
- speichernde Knoten: $\sum\limits_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K,K') = -\frac{dQ_K}{dt}$
- nichtspeichernde $\sim$: $\sum\limits_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K,K') = 0$

Kirchhoffsche Maschenregel

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{M}} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{K_j}^{K_{j+1}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{j=0}^{N} U(K_j, K_{j+1}) \\
&= -\int\limits_{\mathcal{M}} \nabla\Phi \cdot d\vec{r} + \int\limits_{\mathcal{M}} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} = 0 + U_{ind}(\mathcal{M}) \\
&\Rightarrow \sum_{j=0}^{N} U(K_j, K_{j+1}) = U_{ind}(\mathcal{M})
\end{aligned}
$$

Elektrodenladungen & Maxwellsche Kapazitätskoeffizienten

Elektrodenladungen

$$Q_k = \sum_{l=0}^{N} C_{kl} V_l$$

mit Maxwellschen Kapazitätskoeffizienten

$$\begin{aligned} C_{kl} &:= -\int_{\partial\Omega_k} \epsilon\vec{n} \cdot \nabla\Phi_l \, da \quad (k, l = 0, \ldots, N) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\Phi_k \epsilon \nabla\Phi_l \, d^3 r \end{aligned}$$

Maxwellsche Kapazitätsmatrix

$$\left[C\right] = (C_{kl}) = \begin{bmatrix} C_{00} & \cdots & C_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N0} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

Symmetrie:

$$C_{kl} = C_{lk} \Leftrightarrow \left[C\right] = \left[C\right]^T$$

Positiv semi-definit (elektr. Energie stets ≥ 0):

$$(\,V\,)^T \left[C\right] \,(\,V\,) \geq 0 \;\forall\,(\,V\,) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Alle Zeilen/Spaltensummen sind Null

Darstellung der gespeicherten elektrischen Energie mit $[C]$

$$W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{k,\, l=0}^{N} V_l C_{lk} \; V_k = \frac{1}{2} \left(\, V \, \right)^T \left[C \right] \; \left(\, V \, \right)$$

mit dem Vektor der Klemmenpotentiale: $\underline{V} := \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$

und dem Vektor der Elektrodenladungen: $\underline{Q} := \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$ gilt: $\underline{Q} = \underline{\underline{C}} \; \underline{V}$

Reduzierte Kapazitätsmatrix

Streichung der nullten Zeile und Spalte:

$$\left[\tilde{C}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} (\,\tilde{Q}\,) &= \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_N \end{bmatrix}^T \\ (\,U\,)_0 &= \begin{bmatrix} U_{1,0} & \cdots & U_{N,0} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V_1 - V_0 & \cdots & V_N - V_0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Rightarrow (\,\tilde{Q}\,) = \left[\tilde{C}\right]\,(\,U\,)_0 \tag{3}$$

Spulenanordnungen

Spannung an Leiterschleife:

$$u_k(t) = -u_{ind,k}(t) + r_k i_k(t) \tag{4}$$

Spule als Generator ($\triangleq$ Spannungsquelle mit $u_{ind}(t)$):

$$u_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(S) = -w\frac{d}{dt}\Phi(S_0) = -w|S_0|\frac{dB}{dt} \tag{5}$$

Spule als Verbraucher:

$$u(t) = -u_{ind}(t) \overset{B(t)=ci(t)}{\Longrightarrow} u(t) = \underbrace{w|S_0|c}_{:=L}\frac{di}{dt} \tag{6}$$

w: Windungsanzahl

Induktionskoeffizienten und Transformatorgleichung

$$u_{ind,k}(t) = -\sum_{l=1}^{N} \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \int_{C_k} \int_{C_l} \frac{d\vec{s} \cdot d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{s}|}}_{\text{Induktionskoeffizienten } L_{kl}} \frac{di_l(t)}{dt} \tag{7}$$

L_{kk} Selbstinduktions-, L_{kl} $(k \neq l)$ Gegeninduktionskoeffizienten
Transformatorgleichung:

$$u_k(t) = r_k i_k(t) + \sum_{l=1}^{N} L_{kl} \frac{di_l}{dt} \tag{8}$$

$L_{kk} = L_k$ Selbstinduktions-, $L_{kl} = M$ $(k \neq l)$ Gegeninduktionskoeffizienten

Kopplungsfaktor:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{9}$$

Induktivitätsmatrix

$$\left[L\right] = (L_{kl}) = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix}$$

Symmetrie:

$$L_{kl} = L_{lk} \Leftrightarrow \left[L\right] = \left[L\right]^T, \quad (k, l = 1, \ldots, N)$$

Positiv definit (magn. Energie stets positiv!):

$$(\,v\,)^T \left[L\right] \,(\,v\,) > 0 \;\forall\, (\,v\,) \in \mathbb{R}^N$$

Darstellung der gespeicherten magnetischen Energie mit $[L]$

$$
\begin{aligned}
W_{mag} \quad &= \quad \frac{1}{2} \sum_{k,\, l=1}^{N} i_k L_{kl} \ i_l = \frac{1}{2} \left(\, I \, \right)^T \left[L \right] \ \left(\, I \, \right) \\
&= \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} \, d^3 r \\
&= \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \Phi(S_k) \cdot i_k \\
\text{mit } \left(\, I \, \right) \quad &:= \quad \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_N \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

Wechselspannungsgenerator

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- $u(t)$: Momentanwert
- $\hat{U}$: Scheitelwert
- $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$: Momentane Phase
- $\varphi_0 = \omega t_0$: Anfangsphase (Phase bei $t = 0$)
- $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$: Periodendauer

Zeigerdarstellung

Rotierender Zeiger

$$(\,{\scriptstyle U}\,)\,(t) = \begin{pmatrix} \hat{U}\cos\varphi(t) \\ \hat{U}\sin\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$(\,{\scriptstyle U}\,) = U_1(t) + jU_2(t) = \hat{U}(\cos\varphi + j\sin\varphi) \tag{11}$$

$$\text{mit } \hat{U} = |\,(\,{\scriptstyle U}\,)\,| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$$

$$\varphi = \arctan(U_2/U_1) = \arg\,(\,{\scriptstyle U}\,)\,,\; \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Fester Zeiger:} \quad (\,{\scriptstyle \hat{U}}\,) = \hat{U}\,\mathrm{e}^{j\varphi_u} \qquad (\,{\scriptstyle \hat{I}}\,) = \hat{I}\,\mathrm{e}^{j\varphi_i} \tag{12}$$

$$(\,{\scriptstyle U}\,)\,(t) = \mathrm{e}^{j\omega t}\,\hat{U}\,\mathrm{e}^{j\varphi_u} \qquad (\,{\scriptstyle I}\,)\,(t) = \mathrm{e}^{j\omega t}\,\hat{I}\,\mathrm{e}^{j\varphi_i} \tag{13}$$

Zeigeroperationen

$$\left.\begin{array}{l}\text{Drehung}\\ \text{Streckung}\\ \text{Drehstreckung}\end{array}\right\}\text{Multiplikation mit}\begin{cases}\mathrm{e}^{j\psi}\\ r\in\mathbb{R}^+\\ r\,\mathrm{e}^{j\psi} =: (\,z\,)\in\mathbb{C}\end{cases}$$

Impedanz/Admittanz

Komplexes ohmsches Gesetz: $(\,\hat{U}\,) = (\,Z\,) \cdot (\,I\,)$

$(\,Z\,) = |\,(\,Z\,)\,|\,\mathrm{e}^{j\Delta\varphi} \in \mathbb{C}$: *Impedanz*, $\arg((\,Z\,)) = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
$|\,(\,Z\,)\,|$: *Scheinwiderstand*, $\mathrm{Im}\,(\,Z\,)$: *Blindwiderstand*

$(\,\hat{I}\,) = \frac{1}{(\,Z\,)} \cdot (\,\hat{U}\,) := (\,Y\,) \cdot (\,\hat{U}\,)$

$(\,Y\,) = \frac{1}{|(\,Z\,)|}\,\mathrm{e}^{-j\Delta\varphi} \in \mathbb{C}$: *Impedanz*, $\arg((\,Y\,)) = -\arg((\,Z\,))$
$|\,(\,Y\,)\,|$: *Scheinleitwert*, $\mathrm{Im}\,(\,Y\,)$: *Blindleitwert*

Lineare Wechselstrombauelemente

Bauelement	(Z)	$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi i$
Ohmscher Widerstand	R	0
Induktivität	$j\omega L$	$\frac{\pi}{2}$
Kapazität	$-\frac{j}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$

Kirchhoffsche Regeln für Wechselstromschaltungen

Knotenregel (KCL)

$$\sum_{k \in K} \hat{I}_k \, \mathrm{e}^{j\varphi_{i,k}} = \sum_{k \in K} \left(\,\hat{\underline{I}}\, \right)_k = 0 \tag{14}$$

Maschenregel (KVL)

$$\sum_{l \in M} \hat{U}_l \, \mathrm{e}^{j\varphi_{u,l}} = \sum_{l \in M} \left(\,\hat{\underline{U}}\, \right)_l = \left(\,\hat{\underline{U}}\, \right)_e = \hat{U}_e \, \mathrm{e}^{j\varphi_e} \tag{15}$$

Momentane Leistung

$$\begin{aligned}
p(t) &= u(t)i(t) = \hat{U}\hat{I}\sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_i) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{zeitl. Mittelwert } P_m} - \underbrace{\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{zeitl. Mittelwert } 0} \qquad (16)
\end{aligned}$$

Effektivwerte für Spannung und Strom

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,dt} \quad \text{analog für } I \tag{17}$$

Spezialfall sinusförmiger Verlauf:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{U} \quad \text{analog für } I \tag{18}$$

Effektivwertzeiger:

$$(\,U\,) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,\hat{U}\,) \quad \text{analog für } I \tag{19}$$

Komplexe Leistung

$$
\begin{aligned}
(\,P\,) &= \frac{1}{2}\,(\,\hat{U}\,)\cdot(\,\hat{I}\,)^{*} = (\,U\,)\cdot(\,I\,)^{*} \\
&= \frac{1}{2}\hat{U}\,\hat{I}\,\mathrm{e}^{j(\varphi_u-\varphi_i)} = U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}\,\mathrm{e}^{j\Delta\varphi} \\
&= \underbrace{U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}(\cos\Delta\varphi}_{P_W=\mathrm{Re}(\,P\,):\ \text{Wirkleistung}} + j\sin\Delta\varphi)
\end{aligned} \tag{20}
$$

Wirk-, Blind- und Scheinleistung

$$P_W = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \underbrace{\mathrm{Re}((\,\underline{Z}\,))}_{R_W} I_{\mathrm{eff}}^2 \tag{21}$$

$$P_B = \underbrace{\mathrm{Im}((\,\underline{Z}\,))}_{R_B} I_{\mathrm{eff}}^2 \tag{22}$$

$$P_S = |\,(\,\underline{P}\,)\,| = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} \tag{23}$$

Ausbreitungs-/Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\text{mit } c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$$

D'Alembertsche Lösung

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Elektromagnetische Energiedichte für ebene EM-Wellen

$$w_{el} = w_{mag}$$

$$\begin{aligned} w_{elmag}(\vec{r}, t) &= w_{el} + w_{mag} \\ &= \epsilon \vec{E}_0 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)^2 \\ &= \mu \vec{H}_0 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Leistungsflussdichte für ebene EM-Wellen

$$
\begin{aligned}
\vec{S}(\vec{r},t) &= \frac{1}{Z}|\vec{E}_0(\vec{k}\vec{r}-\omega t)|^2\vec{n} \qquad (25)\\
&= \frac{1}{Z}\vec{E}_0^2 \cdot \vec{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\vec{E}_0|^2\vec{n} \qquad (26)\\
&= w_{elmag} \cdot \underbrace{c \cdot \vec{n}}_{\vec{u}}
\end{aligned}
$$

Allgemeine Energiebilanz für ebene EM-Wellen

$$\frac{\partial w_{elmag}}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = 0 \tag{27}$$

Linear polarisierte harmonische EM-Wellen

$\vec{E}_0 = const. \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi) \tag{28}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi) \tag{29}$$

$$\text{mit } \omega = c|\vec{k}| = ck,\ k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Inverse Dispersionsrelation: $\vec{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\vec{n} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}\vec{n}$

Elliptisch polarisierte harmonische EM-Wellen

Elliptisch polarisierte Wellen als Superposition zweier linear polarisierter Wellen:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_{01}\vec{e}_1\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\varphi_1) \\ &\quad + E_{02}\vec{e}_2\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\varphi_2\end{aligned} \tag{30}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{Z}\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r},t) \tag{31}$$

Spezialfälle:

- $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$: **linear polarisierte Welle**
- $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}$: **zirkular polarisierte Welle**

Komplexe Darstellung harmonischer EM-Wellen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\,\{\{\}\,\hat{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\} \tag{32}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\,\{\{\}\,\hat{\vec{H}}_0\,\mathrm{e}^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\} \tag{33}$$

$$\text{mit } \hat{\vec{E}}_0 = E_{01}\,\mathrm{e}^{-j\varphi_1}\,\vec{e}_1 + E_{02}\,\mathrm{e}^{-j\varphi_2}\,\vec{e}_2 \tag{34}$$

Darstellung beliebiger elektromagnetischer Wellen durch harmonische ebene Wellen

$$\begin{bmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{H}(\vec{r},t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\left\{\int\right\}_{\mathbb{R}^3} \begin{bmatrix} \hat{\vec{E}}(\vec{k}) \\ \frac{1}{Z}\vec{n} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)}\ d^3k \tag{35}$$

Fourierdarstellung für $\vec{D}$- und $\vec{B}$-Feld

$$\begin{bmatrix} \vec{D}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\left\{ \int \right\}_{\mathbb{R}^3} \begin{bmatrix} \hat{\vec{D}}(\vec{k}) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{k}) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)} \; d^3k \tag{36}$$

$$\hat{\vec{D}}(\vec{k}) = \epsilon \hat{\vec{E}}(\vec{k}), \;\; \hat{\vec{B}}(\vec{k}) = \mu \hat{\vec{H}}(\vec{k}) \tag{37}$$

Erweiterung der Materialgleichungen auf dispersive Medien

In vielen Materialien sind ϵ, μ, σ frequenzabhängig:

$$\hat{\vec{D}}(\vec{k}) = \epsilon(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{E}}(\vec{k}) \tag{38}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{k}) = \mu(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{H}}(\vec{k}) \tag{39}$$

$$\hat{\vec{j}}(\vec{k}) = \sigma(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{E}}(\vec{k}) \tag{40}$$

FT-Korrespondenzen für Nabla-Kalkül

$$\operatorname{rot} \vec{U}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{U}(\vec{r}) \circ\!\!-\!\!\bullet\; j\vec{k} \times \hat{\vec{U}}(\vec{k}) \tag{41}$$

$$\operatorname{div} \vec{U}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{U}(\vec{r}) \circ\!\!-\!\!\bullet\; j\vec{k} \cdot \hat{\vec{U}}(\vec{k}) \tag{42}$$

Maxwell-Gleichungen in Fourierdarstellung

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet\ \vec{k}\times\hat{\vec{E}}(\vec{k}) = \omega(\vec{k})\mu(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{H}}(\vec{k}) \tag{43}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0 \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet\ \vec{k}\cdot\hat{\vec{E}}(\vec{k}) = 0 \tag{44}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet\ \vec{k}\times\hat{\vec{H}}(\vec{k}) = -\omega(\vec{k})\tilde{\epsilon}(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{E}}(\vec{k}) \tag{45}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet\ \vec{k}\cdot\hat{\vec{H}}(\vec{k}) = 0 \tag{46}$$

Komplexe Dilektrizitätskonstante und komplexe Dispersionsrelation

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon(\omega) + j\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \tag{47}$$

$$\omega(\vec{k})^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}(\omega(\vec{k}))\mu(\omega(\vec{k}))}\vec{k}^2 \tag{48}$$

$$\tilde{k}\omega = \sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)\mu(\omega)}\omega \tag{49}$$

Lorenzeichung: Wellengleichung für Φ

$$\Delta\Phi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Lorenzeichung: Wellengleichung für $\vec{A}$

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \tag{50}$$

Lorenzeichung: Wellengleichung

$$\underbrace{(\Delta - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2})}_{\textbf{Wellenoperator}} \begin{bmatrix}\Phi \\ \vec{A}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\rho/\epsilon \\ \mu\vec{j}\end{bmatrix} \tag{51}$$

Gemischtes RWP für stationäre Ohmsche Strömungsfelder

$$\text{div } (\sigma(\vec{r})\nabla\Phi) = 0 \tag{52}$$

$$\text{mit } \Phi|_{\partial\Omega_j} = V_j \quad (j = 1, \ldots N)$$

$$\text{und } \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} \partial\Omega_j \right) \tag{53}$$

*** ENDE KAPITEL 1 ***

*** BEGINN KAPTIEL 2 ***

Konzentriertheitshypothese

$$\text{Wellenlänge } \lambda >> \text{ Abmessung d. Systems } d \tag{54}$$

Näherung des Verschiebungsstroms

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \approx -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) \tag{55}$$

$\Rightarrow$ Vernachlässigung des magn. induzieren Anteils

Quellgrößen bei Quasistationarität

$(\Phi, \vec{A})$, $(\vec{E}, \vec{B})$ nur vom momentanen zeitl. Wert d.
Quellgrößen $\rho(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ abhängig
$\Leftrightarrow$ **alle Feldgrößen quasistationär**

Dielektrische Relaxation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\rho \qquad \text{mit } \frac{\sigma}{\epsilon} = \text{constans} \tag{56}$$

Störung durch lokale Ladungsfluktuation

$$\Delta\rho(t,\vec{r}) = \Delta\rho(t_0,\vec{r})\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_R}\right) \tag{57}$$

$$\text{mit} \qquad \underbrace{\tau_R := \frac{\epsilon}{\sigma}}_{\text{dielektrische Relaxationszeit}} \tag{58}$$

Partialstromdichte mit Einsteinrelation und Quasiferminiveau

$$\vec{j}_\alpha = -(|q_\alpha| n_\alpha \mu_\alpha \nabla\Phi + q_\alpha D_\alpha \nabla n_\alpha) \tag{59}$$

$$\text{mit Einstein } D_\alpha = \frac{kT}{|q_\alpha|}\mu_\alpha \tag{60}$$

$$\text{und Quasiferminiveau } \Phi_\alpha = \Phi + \frac{kT}{q_\alpha} \ln \frac{n_\alpha}{n_0} \tag{61}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_\alpha = -\sigma_\alpha \nabla\Phi_\alpha \tag{62}$$

1. Lösungsschritt: Aufspaltung von Φ in homogenen und inhomogenen Teil

$$
\begin{aligned}
\text{Ansatz: } \Phi &= \Phi^{(0)} + \varphi \\
\text{div } (\epsilon \nabla \Phi) &= -\rho - \text{div } (\epsilon \nabla \Phi^{(0)}) =: -f \text{ in } \Omega \\
\varphi|_{\partial\Omega^{(D)}} &= 0, \;\; \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega^{(N)}} = 0
\end{aligned} \tag{63}
$$

2. Lösungsschritt (I): Eigenwertproblem für $-\mathrm{div}\,(\epsilon\nabla\,.\,)$

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}\,(\epsilon \nabla b_\nu) &= \lambda_\nu b_\nu \quad \text{in } \mathring{\Omega} \\
\text{mit } b_\nu\big|_{\partial\Omega^{(D)}} = 0 \text{ und } \left.\frac{\partial b_\nu}{\partial n}\right|_{\partial\Omega^{(N)}} &= 0
\end{aligned} \tag{64}
$$

Wobei $b_\nu(\vec{r})$ Eigenfunktionen und λ_ν Eigenwerte $\in \mathbb{C}$ des Differentialoperators $-\mathrm{div}\,(\epsilon\nabla\ .)$ sind.

2. Lösungsschritt (II): Lösung für φ

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu b_\nu \quad \text{mit } \alpha_\nu = \langle b_\nu | \varphi \rangle = \int_\Omega b_\nu(\vec{r'})^* \varphi(\vec{r'})\, d^3r' \tag{65}$$

$$\Rightarrow \forall\ \varphi \in L_2(\Omega): \quad \varphi(\vec{r}) = \int_\Omega \delta(\vec{r} - \vec{r'}) \varphi(\vec{r'})\, d^3r' \tag{66}$$

Lösungsschritt 3: Lösung des RWP

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\langle b_v | f \rangle}{\lambda_\nu} b_\nu(\vec{r}) \tag{67}$$

$$= \int_\Omega \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(\vec{r}) \frac{1}{\lambda_\nu} b_\nu(\vec{r'})^* f(\vec{r'})\, d^3r' \tag{68}$$

$$= \int_\Omega G(\vec{r}, \vec{r'}) f(\vec{r'})\, d^3r'$$

Greenfunktion des [M-RWP]

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(\vec{r}) \frac{1}{\lambda_\nu} b_\nu(\vec{r'})^* \tag{69}$$

Vakuum-Greenfunktion $\widehat{=}$ Greenfunktion zur Poissongleichung im $\mathbb{R}^3$

$$G_{\text{Vac}}(\vec{r}, \vec{r'}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{70}$$

Greenfunktion für Halbraum über Spiegelladungsmethode

$$\Phi_H(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^*_Q|}\right] \tag{71}$$

$$\text{mit} \quad Q = 1,\ \vec{r}_Q = \vec{r'},\ \vec{r}^* = S\vec{r}$$

$$\Rightarrow G_H(\vec{r},\vec{r'}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} - \frac{1}{|\vec{r}-S\vec{r'}|}\right] \tag{72}$$

Greenfunktion für Winkelraum über Spiegelladungsmethode

$$\begin{aligned}
\Phi_W(\vec{r}) \quad &= \quad \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r}-S_1\vec{r}_Q|} + \frac{1}{|\vec{r}-S_2\vec{r}_Q|}\right. \\
&- \quad \left.\frac{1}{|\vec{r}-S_3\vec{r}_Q|}\right]
\end{aligned} \tag{73}$$

mit $\quad Q = 1,\ \vec{r}_Q = \vec{r'}$

$$\Rightarrow \quad G_W(\vec{r},\vec{r'}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{|\vec{r}-S_n\vec{r'}|} \tag{74}$$

V-RWP für Mehrelektroden-Kondensatoranordung

$$[\text{V-RWP}] \qquad \operatorname{div}(\epsilon\nabla\Phi) = 0 \text{ in } \mathring{\Omega} \text{ und } \Phi|_{\partial\Omega_l} = V_l \\ (l = 0, \ldots, N) \tag{75}$$

Q-RWP für Mehrelektroden-Kondensatoranordung

$$[\text{Q-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = 0 \text{ in } \Omega \text{ und } \int_{\partial \Omega_l} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, da = Q_l \quad (l = 0, \ldots, N) \tag{76}$$

Allgemeine Sprungbedingung für tangentiale Feldkomponenten

$$
\begin{aligned}
\vec{U}_2 \cdot \vec{t} - \vec{U}_1 \cdot \vec{t} &= \vec{\nu} \cdot \vec{n} \quad \text{auf } \Sigma && (77) \\
\vec{U}_2 \cdot \vec{t} - \vec{U}_1 \cdot \vec{t} &= (\vec{\nu} \times \vec{N}) \cdot \vec{t} \quad \forall \vec{t} && (78) \\
\vec{N} \times \vec{U}_2 - \vec{N} \times \vec{U}_1 &= \vec{\nu} \quad \text{auf } \Sigma && (79) \\
& \vec{N} \text{ zeigt von Material 1 nach 2}
\end{aligned}
$$

Sprungbedingung für Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Felds

$$\vec{E}_1 \times \vec{N} = \vec{E}_2 \times \vec{N} \qquad \text{auf } \Sigma \tag{80}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \qquad \text{auf } \Sigma$$

"Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig"

Sprungbedingung für Tangentialkomponente des $\vec{H}$-Felds

$$\vec{H}_2 \times \vec{N} - \vec{H}_1 \times \vec{N} = \vec{i} \qquad \text{auf } \Sigma \tag{81}$$

$$\vec{N} \text{ zeigt von Material 1 nach 2}$$

$$\text{Für } \vec{i} = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 \times \vec{N} = \vec{H}_2 \times \vec{N}$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{t} = \vec{H}_2 \cdot \vec{t}$$

$$\text{"Tangentialkomponente von } \vec{H} \text{ ist stetig"}$$

Allgemeine Sprungbedingung für normale Feldkomponenten

$$\vec{U}_2 \cdot \vec{N} - \vec{U}_1 \cdot \vec{N} = \nu \qquad \text{auf } \Sigma \tag{82}$$

$\vec{N}$ zeigt von Material 1 nach 2

Sprungbedingung für Normalkomponente des $\vec{D}$-Felds

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{N} - \vec{D}_1 \cdot \vec{N} = \sigma_{int} \qquad \text{auf } \Sigma \tag{83}$$

$$\vec{N} \text{ zeigt von Material 1 nach 2}$$

$$\text{Für } \sigma_{int} = 0 \Rightarrow \vec{D}_1 \cdot \vec{N} = \vec{D}_2 \cdot \vec{N}$$

$$\text{"Normalkomponente von } \vec{D} \text{ ist stetig"}$$

Sprungbedingung für Normalkomponente des $\vec{B}$-Felds

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{N} = \vec{B}_2 \cdot \vec{N} \qquad \text{auf } \Sigma \tag{84}$$

"Normalkomponente von $\vec{B}$ ist stetig"

Coulombeichung: Wellengl. für $\vec{A}$

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \underbrace{-\mu\left(\vec{j} - \epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi)\right)}_{\textbf{transversale Stromdichte } \vec{j}_t} \tag{85}$$

Allgemeine transversale elektromagnetische Wellen

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{n} \tag{86}$$

E-M Welle ist also eine **transversale** ebene Welle!

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{87}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{88}$$

$$\text{mit } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \text{ bzw. } \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0$$

$\vec{k}$ heißt Ausbreitungs- oder Wellenvektor

Ebene elektromagnetische Wellen

Gleichungssystem

$$\vec{H}_0(.) = \frac{1}{\mu\omega}\vec{k} \times \vec{E}_0(.) \tag{89}$$
$$= \frac{1}{Z}\vec{n} \times \vec{E}_0(.)$$
$$\vec{E}_0(.) = -\frac{1}{\epsilon\omega}\vec{k} \times \vec{H}_0(.) \tag{90}$$
$$= -Z\vec{n} \times \vec{H}_0(.)$$

mit **Wellenwiderstand** $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad Z_0 = 376,9\,\Omega$

Dispersionsrelation (Lösbarkeitsbedingung für (89)/(90)) eines homogenen linearen Mediums

$$\omega(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}|\vec{k}| \tag{91}$$

Wellengleichung für $\vec{E}-$ und $\vec{H}-$Feld

Herleitung über Maxwell-Gleichungen mit Ersetzung $\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_0$ und Bildung von $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})$ bzw. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H})$. Ergebnis:

$$\underbrace{\left[\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right]}_{\text{(gedämpfter }(\sigma>0)\text{ Wellenoperator)}} \begin{bmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\nabla\left(\frac{\rho_0}{\epsilon}\right) - \mu\dot{\vec{j}}_0\\ \mathrm{rot}\,\vec{j}_0\end{bmatrix} \tag{92}$$

Inhomogene Wellengleichung für Viererpotential

$$\left[\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right]\begin{bmatrix}\Phi \\ \vec{A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho/\epsilon \\ \mu\vec{j}\end{bmatrix} \tag{93}$$

Vereinfachte Wellengleichung

Nur eine Raumdimension: $\vec{r} = x\vec{e}_x; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
$\sigma = \vec{j}_0 = \rho_0 = 0$

$$\epsilon\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{94}$$

Gespeicherte magnetische Energie für allg. 3-dim. Gebiete

$$\frac{\partial W_{mag}}{\partial i_k} = \sum_{l=1}^{N} L_{kl} i_l \tag{95}$$

$$\frac{\partial^2 W_{mag}}{\partial i_k i_l} = L_{kl} \tag{96}$$

Grundlösungen des [V-RWP]

Für [V-RWP] mit $(\,V\,) = (\,e\,)$, $\Phi(\vec{r}) \equiv 1$ gilt:

$$1 = \Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{N} \underbrace{V_k}_{=1} \Phi_k(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{N} \Phi_k(\vec{r})$$

$$\Phi_0(\vec{r}) = 1 - \sum_{k=0}^{N} \Phi_k(\vec{r}) \qquad (97)$$

Für Potentialvorgabe $(\,V\,) \in \mathbb{R}^{N+1}$ lautet

$$\Phi(\vec{r}) = V_0 + \sum_{k=1}^{N} (V_k - V_0)\Phi_k(\vec{r}) \qquad (98)$$

Potential des [V-RWP] aus Grundlösungen

Wdh.:

$$[\text{V-RWP}] \quad \operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = 0 \text{ in } \mathring{\Omega} \text{ und } \Phi|_{\partial \Omega_l} = V_l$$

Lösung als Linearkombination von $N+1$ Grundlösungen $\Phi_0 \ldots \Phi_N$:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{N} V_k \Phi_k(\vec{r})$$