

1 Klassische Kontinuumstheorie des Elektromagnetismus in materiellen Medien

1.1 Maxwellsche Gleichungen-Naturgesetze

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{„Faradaysches Induktionsgesetz“}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{„Ampère-Maxwellsches Gesetz“}$$

⇒ Elektrische Felder

- elektrische Ladungsverteilung ρ (quasi-statisch)
- schnell zeitveränderliches Magnetfeld $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (magnetische Induktion)

⇒ Magnetische Felder

- elektrische Stromverteilung \vec{j} (quasi-statisch)
- schnell zeitveränderliches elektrisches Feld $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ („elektrische Induktion“ \simeq Verschiebungsstrom)

Außer bei rein statischen Feldern ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$) fasst man \vec{E} und \vec{H} zusammen als „elektromagnetisches Feld“

Materialgleichungen- phänomenologische Modellgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

1.2 Energie von elektromagnetischen Feldern

1.2.1 Elektrische Energiedichte

elektrische Energie W_{el} die im elektrischen Feld einer

- diskreten Ladungsverteilung gespeichert ist:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i,k=1}^N \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$$

- kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(r)$ gespeichert ist:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r'$$

kleine Änderung bei Ladungsdichte $\delta\rho(\vec{r})$ bewirkt kleine Änderung bei Feldenergie δW_{el} .

Es gilt $F(\alpha) := W_{el}[\rho + \alpha\delta\rho]$

1. Variation von W_{el} bezüglich $\delta\rho$:

$$\delta W_{el}[\rho, \delta\rho] := \left. \frac{d}{d\alpha} W_{el}[\rho + \alpha\delta\rho] \right|_{\alpha=0}$$

mit dem elektrost. Potential $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3r'$ erhält man nach Umformungen:

$$\delta W_{el} = \int_V \phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) d^3r$$

Wegen

- $\operatorname{div} \delta\vec{D} = \delta\rho$
- $\vec{E} = -\nabla\phi$
- $\delta\rho$ sei eingeschlossen in einer Kugel $K(\vec{0}, R)$

folgt für $R \rightarrow \infty$:

$$\delta W_{el} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E} \cdot \delta\vec{D} d^3r$$

Es wird angenommen, dass das elektrische Feld eine Energiedichte $\omega_{el}(\vec{r})$ mit sich trägt für die gilt: $W_{el} = \int_{\mathbb{R}^3} \omega_{el}(\vec{r}) d^3r$

⇒ lokale differentielle Änderung der Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$\delta\omega_{el} = \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

⇒ (lokale) Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$\omega_{el} = \underbrace{\int_{\vec{0}}^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D}') \cdot d\vec{D}'}_{\text{Wegintegral im } \vec{E}-\vec{D}\text{-Raum}}$$

⇒ Im Falle eines streng linearen Dielektrikums $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\epsilon = \text{const.}$:

$$\omega_{el} = \frac{1}{2\epsilon} \vec{D}^2 = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

1.2.2 Magnetische Energiedichte

Die magnetische Energie W_{mag} kann wegen des Verschiebungsstroms im Ampèreschem Gesetz nicht entkoppelt von W_{el} im \vec{D} -Feld betrachtet werden:

- **diskrete Ladungen** q_k auf Bahnkurve $\vec{r}_k(t)$ mit $v_k(t)$; Zufuhr elmag. Leistung :

$$P_{elmag} = \sum_{k=1}^N q_k \vec{v}_k \cdot \vec{E}(\vec{r}_k) = -\text{mechanische Leistung}$$

- **kontinuierliche Stromverteilung** $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$ mit Substitutionsregel:

$$P_{elmag} = - \int_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3r$$

Mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes kann \vec{j} eliminiert werden.

$$\begin{aligned} P_{elmag} &= - \int_V \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} d^3r + \underbrace{\int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d^3r}_{= \frac{dW_{el}}{dt} \text{ (Änderung des rein elektr. Energiegehalts)}} \\ &= \frac{dW_{el}}{dt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow - \int_V \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} d^3r = \frac{dW_{el}}{dt} + \text{Energiefluss aus System durch Berandung } \partial V$$

Mit $\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} - \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} = \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E}$ gilt:

$$- \int_V \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} d^3r = \int_V \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} d^3r + \int_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{a}$$

Wählt man für V eine Kugel $K(\vec{0}, R)$ um den Ursprung mit Radius R, mit $R \rightarrow \infty$ gilt:

$$P_{elmag} = \underbrace{\frac{dW_{el}}{dt}}_{\substack{\text{Zeitableitung der} \\ \text{elektr. Feldenergie}}} + \underbrace{\frac{dW_{mag}}{dt}}_{\substack{\text{zeitliche Änderung} \\ \text{der gesuchten} \\ \text{magn. Feldenergie}}} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{r}|=R} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{a}}_{\text{Leistungsfluss durch Kugeloberfläche nach außen im Limes}}$$

für lokalisierte Ladungen/Ströme gilt für asymptotisches Verhalten der erzeugten Felder:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{R^n} \text{ und } |\vec{H}| \sim \frac{1}{R^m} \text{ mit } \begin{cases} n = 2 \text{ \& } m = 3 & \text{im quasistatischen Fall} \\ n = m = 1 & \text{im dynamischen Fall} \end{cases}$$

Oberfläche von $\partial K(\vec{0}, R)$ wächst mit R^2 deshalb gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{r}|=R} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{a} = \begin{cases} 0 & \text{quasistatischer Fall} \\ \text{total abgestrahlte Leistung} & \text{dynamischen Fall} \end{cases}$$

Diff. Änderung der gesamten magn. Feldenergie beträgt

$$\delta W_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{B}(\vec{r}) \, d^3r$$

⇒ differentielle Änderung der Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$\delta \omega_{mag} = \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

⇒ Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$\omega_{mag} = \underbrace{\int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B}') \cdot d\vec{B}'}_{\text{Wegintegral im } \vec{H}-\vec{B}\text{-Raum}}$$

⇒ Im Falle eines streng linearen magnetisierten Materials mit $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\mu = \text{const.}$:

$$\omega_{mag} = \mu \int_{\vec{0}}^{\vec{H}} \vec{H}' \cdot d\vec{H}' = \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2$$

1.2.3 Allgemeine Bilanzgleichung

extensive physikalische Größe X = Größe, die eine Volumendichte $x(\vec{r}, t)$ besitzt, dass zu jedem beliebigen räumlichen Gebiet V der darin enthaltene **Mengeninhalt** $X(V) = \int_V x(\vec{r}, t) d^3r$ bestimmt werden kann.

Beispiele sind

Größe	X	Volumendichte	x
Ladung	Q	Ladungsdichte	ρ_{el}
Masse	M	Massendichte	ρ_M
Teilchenzahl	N	Konzentration	n
Energie	$W_{el,mag}$	Energiedichte	$\omega_{el,mag}$

Die extensive Größe X besitzt eine

Stromdichte $\vec{J}_x(\vec{r}, t)$.

Das Skalarprodukt $\vec{J}_x \cdot d\vec{a}$ gibt Menge von X an, die pro Zeiteinheit die Kontrollfläche $d\vec{a} = \vec{N}da$ in Normalrichtung passiert.

Das **Flussintegral** $\int_{\partial V} \vec{J}_x \cdot d\vec{a}$ aus Kontrollvolumen V durch geschlossene Oberfläche ∂V pro Zeiteinheit nach außen strömende Menge von X . **Produktionsrate** $\prod_x(\vec{r}, t)$ gibt an welche Menge der Größe X pro Volumen- und Zeiteinheit erzeugt (> 0) oder vernichtet (< 0) wird.

$X(V)$ kann sich nur ändern durch Zufluss/Abfluss durch Hüllfläche ∂V oder durch Erzeugung/Vernichtung innerhalb von V

⇒ Bilanzgleichung in integraler Form:
$$\frac{dX(V)}{dt} = \int_V \frac{\partial x}{\partial t}(\vec{r}, t) d^3r = - \int_{\partial V} \vec{J}_x d\vec{a} + \int_V \Pi_x d^3r$$

⇒ Bilanzgleichung in differentieller Form:
$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_x + \Pi_x$$

Wichtige Beispiele für Bilanzgleichungen:

- Ladungerhaltung
- Teilchenbilanz im Halbleiter
- Energiebilanz für das elektromagnetische Feld:
$$\frac{\partial \omega_{elmag}}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_{elmag} = \Pi_{elmag}$$
 mit
 - $\omega_{elmag} = \omega_{el} + \omega_{mag}$ = Energiedichte
 - \vec{J}_{elmag} = zugehörige Leistungsflussdichte
 - Π_{elmag} = dem Feld zugeführte Leistungsichte

mit der zugeführten **Leistungsdichte** : $\Pi_{elmag} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ und Umformungen erhält man:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{elmag} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Aus den vorherigen Gleichungen lässt sich schließen, dass gilt: $\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{J}_{elmag}$
 $\Rightarrow \vec{J}_{elmag} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{S}_0$ mit additivem quellenfreiem Vektorfeld \vec{S}_0 und $\operatorname{div} \vec{S}_0 = 0$

Der **Poynting-Vektor** $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ lässt sich als elektromag. Leistungsflussdichte interpretieren, wenn \vec{E} und \vec{H} , die miteinander gekoppelten Komponenten eines dyadischen elektromagnetischen Feldes bilden, das von einer dynamischen Quelle erzeugt wird, bei der dieselben bewegten Ladungen sowohl das \vec{E} -Feld als auch das \vec{H} -Feld erzeugen. (Typischerweise bei elektromagnetischen Wellen).

1.3 Potentialdarstellung des elektromagnetischen Feldes

1.3.1 Elektromagnetisches Vektor- und Skalarpotential

Vektorfeld $\vec{U}(\vec{r})$ besitzt ein Vektorpotential $\vec{V}(\vec{r})$, wenn es ein differenzierteres Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ gibt mit:

$$\vec{U}(\vec{r}) = \text{rot}\vec{V}(\vec{r}) \Rightarrow \text{div}\vec{U} = 0$$

In „sternförmigen“ Gebieten gilt auch die Umkehrung (Satz von Poincaré):

Wenn $\vec{U}(\vec{r})$ stetig differenzierter ist mit $\text{div}\vec{U} = 0$, dann existiert ein Vektorpotential $\vec{V}(\vec{r})$ mit $\vec{U} = \text{rot}\vec{V}$.

Alle Vektorpotentiale zu $\vec{U} = \text{rot}\vec{V}$ haben die Form

$$\vec{V}' = \vec{V} - \text{grad}\chi(\vec{r})$$

Überall definiertes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}, t)$ - das elektromagnetische Vektorpotential - mit

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot}\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Es existiert ein Skalarfeld $\Phi(\vec{r}, t)$ - das **elektromagnetisches skalares Potential** - mit

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\Phi$$

Wird das Vektorpotential gemäß $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi$ „umgeichtet“, so muss das skalare Potential transformiert werden. Daher muss gelten: $\Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\vec{r}, t)$

1.3.2 Maxwellsche Gleichungen in Potentialdarstellung

Man hat nun ein 4-Komponentiges partielles Differenzialgleichungssystem für die Unbekannten (Φ, \vec{A}) bei gegebenen Quellen ρ und \vec{j}

$$\begin{aligned}\text{div}(\epsilon \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\epsilon \vec{A}) &= -\rho \\ \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}\right) + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \epsilon \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) &= \vec{j}\end{aligned}$$

Ziel ist die Entkopplung dieser Gleichungen bezüglich \vec{A} und Φ , indem man diese „Eichbedingungen“ unterwirft, die durch passende Wahl der Eichfunktion χ erfüllt werden.

ϵ und μ seien (stückweise) räumlich konstant

- **Lorenzgleichung:** $\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

\Rightarrow **Wellengleichung** für das **skalare Potential**

$$\Phi : \Delta \Phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

\Rightarrow **Wellengleichung** für das **Vektorpotential**

$$\vec{A} : \Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$

\Rightarrow Kompaktschreibweise:
$$\underbrace{\left(\Delta - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)}_{\text{Wellenoperator}} \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\epsilon} \\ \mu \vec{j} \end{pmatrix}$$

- **Coulombgleichung** (optische Eichung) zielt auf eine Zerlegung des elektrischen Feldes in eine quasistatische und eine hochfrequente wellenartige Komponente : $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

\Rightarrow **Poissongleichung:** $\operatorname{div} (\epsilon \nabla \Phi) = -\rho(\vec{r}, t)$

\Rightarrow **Wellengleichung für Vektorpotential:**

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \underbrace{\left(\vec{j} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) \right)}_{\vec{j}_t}$$

mit $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ und transversaler Stromdichte $\vec{j}_t := \vec{j} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \Phi) \vec{A}$

1.4 Feldverhalten an Materialgrenzen

1.4.1 Grenzflächenbedingung für die normalen Feldkomponenten

Das Vektorfeld \vec{U} erfülle in benachbarten Gebieten Ω_1 und Ω_2 aus zwei verschiedenen Materialien ① und ② die Differentialgleichung $\operatorname{div} \vec{U} = \gamma$ mit Volumendichte $\gamma(\vec{r})$

An der Grenzfläche Σ existiert eine Grenzflächendichte $\nu(\vec{r})$. Es gilt für ein Kontrollvolumen V , das die Grenzfläche schneidet:

$$\int_{\partial V} \vec{U} \cdot d\vec{a} = \int_V \gamma d^3r + \int_{V \cap \Sigma} \nu da$$

Für einen Punkt \vec{r}_0 auf der Grenzfläche sei $\vec{N}(\vec{r}_0)$ die Oberflächeneinheitsnormale, die vom Material ① zum Material ② zeigt.

Z sei ein kleines zylinderförmiges Kontrollvolumen, dessen Stirnflächen A_1 und A_2 in Ω_1 und Ω_2 liegen. Der Abstand von A_1 und A_2 ist Δh = Höhe des Zylindermantels M .

Es gilt:

$$\int_{A_1} \vec{U} d\vec{a} + \int_{A_2} \vec{U} d\vec{a} + \int_M \vec{U} d\vec{a} = \int_Z \gamma d^3r + \int_{Z \cap \Sigma} \nu d$$

Für den Flächeninhalt von $|A| = Z \cap \Sigma$ gilt: $|A| = |A_1| = |A_2|$.

Umformungen durch:

- Mittelwertsatz der Integralrechnung
- Für $\Delta h \rightarrow 0$ verschwinden: $\int_M \vec{U} d\vec{a}$ und $\int_Z \gamma d^3r$
- $\vec{U}_j \cdot \vec{N}(\vec{r}_0) := \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0; \vec{r} \in \Omega_1} \vec{U}(\vec{r}) \cdot \vec{N}(\vec{r}_0)$

Sprungbedingung:

$$\vec{U}_2 \cdot \vec{N} - \vec{U}_1 \cdot \vec{N} = \nu \text{ auf } \Sigma$$

Spezialfälle:

- $\vec{U} = \vec{D}$ (dielektrische Verschiebung) mit
 - $\gamma = \rho =$ Raumladungsdichte
 - $\nu = \sigma_{int} =$ Grenzflächenladungsdichte
 - wenn $\sigma_{int} = 0 \Rightarrow$ Normalkomponente von \vec{D} ist stetig
- $\vec{U} = \vec{B}$ (magnetische Induktion)
 - $\gamma = \nu = 0 \rightarrow$ Normalkomponente von \vec{B} ist stetig

1.4.2 Grenzflächenbedingung für die tangentialen Feldkomponenten

Das Vektorfeld \vec{U} erfülle in benachbarten Gebieten Ω_1 und Ω_2 aus zwei verschiedenen Materialien ① und ② die Differentialgleichung $\text{rot } \vec{U} = \vec{J} + \vec{V}$ mit einer stetigen Flussdichte \vec{J} und einem beschränkten Vektorfeld \vec{V} .

An der Grenzfläche Σ existiert eine Grenzflächenflussdichte $\vec{\nu}(\vec{r})$. Es gilt für ein Kontrollfläche A mit positiv orientierter Randkurve $C = \partial A$, das die Grenzfläche schneidet:

$$\int_{\partial A} \vec{U} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a} + \int_A \vec{V} \cdot d\vec{a} + \int_{A \cap \Sigma} \vec{\nu} \cdot \vec{n} da$$

Für einen Punkt \vec{r}_0 auf der Grenzfläche sei $\vec{N}(\vec{r}_0)$ die **Oberflächennormale**, die vom Material ① zum Material ② zeigt und $\vec{t}(\vec{r}_0)$ ein **Tangentialvektor** an Σ .

A sei eine kleine rechteckige Kontrollfläche, die auf der Tangentialebene senkrecht steht und \vec{r}_0 als Mittelpunkt hat. Für die Kanten $\gamma_1 = -\vec{t}\Delta l$, $\gamma_3 = \vec{t}\Delta l$ und $\gamma_2 = -\vec{N}\Delta b$, $\gamma_4 = \vec{N}\Delta b$. γ_2 und γ_4 verlaufen teilweise in Ω_1 und teilweise in Ω_2 .

Orientierte Oberflächennormale $\vec{n} = \vec{N} \times \vec{t}$

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \vec{U} d\vec{r} = \int_A (\vec{J} + \vec{V}) \cdot \vec{n} da + \int_{\Sigma \cap A} \vec{\nu} \cdot \vec{n} ds$$

Mit Umformungen erhält man:

Sprungbedingung:

$$\vec{U}_2 \cdot \vec{t} - \vec{U}_1 \cdot \vec{t} = \nu \cdot \vec{n} \text{ auf } \Sigma$$

$$\vec{U}_2 \cdot \vec{t} - \vec{U}_1 \cdot \vec{t} = (\vec{\nu} \times \vec{N}) \cdot \vec{t} \text{ für jeden Tangentialvektor } \vec{t}$$

Der **Projektor auf die Tangentialebene** lautet:

$$\Pi \vec{X} = -\vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{X})$$

Es gelten die Äquivalenzen:

- $\vec{X} \cdot \vec{t} = 0$ für alle $\vec{t} \perp \vec{N}$, d.h. alle Tangentialvektoren
- $\Pi \vec{X} = 0 \Leftrightarrow \vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{X}) = 0 \Leftrightarrow \vec{N} \times \vec{X} = 0$

Es folgt für $\vec{t} \perp \vec{N}$:

$$\vec{N} \times \vec{U}_2 - \vec{N} \times \vec{U}_1 = \vec{\nu} \text{ auf } \Sigma$$

Spezialfälle:

• $\vec{U} = \vec{E}$ (elektrisches Feld) mit

$$- \vec{J} = 0$$

$$- \vec{V} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$- \vec{\nu} = 0$$

• $\vec{U} = \vec{H}$ (Magnetfeld) mit

$$- \vec{J} = \vec{j}$$

$$- \vec{V} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$- \vec{\nu} = i$$

1.5 Das Randwertproblem der Potentialtheorie

1.5.1 Randwertproblem der Elektrostatik: Rand-/Grenzflächenbedingungen

In einem dielektrischen Medium gilt im elektrostatischen Fall die

Poissongleichung: $\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho(\vec{r}, t)$. Für die Eindeutigkeit der Lösung dieser partiellen Differentialgleichung müssen auf dem Rand $\partial\Omega$

Rand- und Grenzflächenbedingungen formuliert werden:

- $\Phi(\vec{r}) = \text{const. auf Leitern}$
- für das elektrische Potential an Materialgrenzen: Φ ist längs Materialgrenzen stetig
- für die Normalenableitung des Potentials: $\epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_1 - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_2 = \sigma_{int}$ auf Σ
mit $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_j := \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0; \vec{r} \in \Omega_j} \vec{n}(\vec{r}_0) \cdot \nabla \Phi(\vec{r}) \quad (j = 1, 2)$

- Sonderfälle:
 - Material ①= Leiter, ②= dielektrischer Isolator
 - zwei diel. Isolatoren ① und ②
- Material ①= Leiter, Material ②= dielektrischer Isolator:
 - E-Feld im Leiter verschwindet \rightarrow Tangentialkomponente: $\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t} = 0$
 - einseitiger Grenzwert des Potentialgradienten hat nur eine Normalkomponente:

$-\nabla\Phi|_2 = \vec{E}_2 \perp \text{Leiteroberfläche}$
 - mit $\vec{D}_2 \cdot \vec{n} = \sigma_{int}$ und $\vec{D}_2 = -\epsilon_2 \nabla\Phi|_2$ gilt:

$\epsilon_2 \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_2 = -\sigma_{int} \text{ auf } \Sigma$

- Zwei dielektrische Isolatoren ① und ② grenzen aneinander, ohne dass eine Oberflächenladung auf Σ existiert:

- Tangentialkomponente/Normalkomponente von \vec{E}/\vec{D} längs von Σ stetig:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \text{ und } \vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}$$

- mit $\vec{D}_j = \epsilon_j \vec{E}_j$ gilt: $\frac{1}{\epsilon_1} \cdot \frac{\vec{E}_1 \cdot \vec{t}}{\vec{E}_1 \cdot \vec{n}} = \frac{1}{\epsilon_2} \cdot \frac{\vec{E}_2 \cdot \vec{t}}{\vec{E}_2 \cdot \vec{n}}$

- α_1, α_2 sind Winkel zwischen Feldlinien und Oberflächennormalen: $\tan \alpha_j = \frac{\vec{E}_j \cdot \vec{t}}{\vec{E}_j \cdot \vec{n}}$

- Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien: $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

1.5.2 Klassifikation der Potential-Randwertprobleme

Randwertproblem= man sucht Lösungen Φ der Poissongleichung, die auf dem Rand $\partial\Omega$ bestimmte Randbedingungen erfüllen. Es gibt:

- **Dirichlet-Problem** = Vorgabe der Potentialwerte auf $\partial\Omega$
- **Neumann-Problem** = Vorgabe der Normalenableitung $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ auf $\partial\Omega$
- **gemischtes Randwertproblem** = Vorgabe einer Linearkombination von beiden

1.5.2.1 Dirichletsches Randwertproblem

Lösung Φ soll auf dem Rand $\partial\Omega$ einen vorgegebenen Verlauf $\Phi_D(\vec{r})$ für alle $\vec{r} \in \partial\Omega$ annehmen:

$$[\text{Dir-RWP}] \quad \text{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ auf } \overset{\circ}{\Omega}$$

Satz: Für $\epsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $0 < c_0 \leq \epsilon(\vec{r})$, $\rho \in C(\overline{\Omega})$ und $\Phi_D \in C(\partial\Omega)$ hat [Dir-RWP] eine eindeutig bestimmte klassische Lösung $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

1.5.2.2 Neumannsches Randwertproblem

Normalableitung der Lösung $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r}) := \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$ mit $n =$ äußere Normale auf $\partial\Omega$ soll vorgegebenen Wert $F_N(\vec{r})$ annehmen:

$$[\text{Neu-RWP}] \quad \text{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ auf } \overset{\circ}{\Omega} \text{ und } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = F_N$$

Satz: Für $\epsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $0 < c_0 \leq \epsilon(\vec{r})$, $\rho \in C(\overline{\Omega})$ und $F_N \in C(\partial\Omega)$ mit $\int_{\partial\Omega} \epsilon F_N \, da$ hat [Neu-RWP] eine, bis auf eine additive Konst., eind. best. klassische Lösung $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

1.5.2.3 Gemischtes Randwertproblem (Randbedingung 3.Art)

Auf dem Rand $\partial\Omega$ soll die Linearkombination $\alpha(\vec{r})\Phi(\vec{r}) + \beta(\vec{r})\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r})$ für gegebene Koeffizientenfunktionen $\alpha(\vec{r}), \beta(\vec{r})$ einen vorgegebenen Wert $F(\vec{r})$ annehmen mit $h \geq 0$ und $\sigma \geq 0$:

$$[\text{Mix-RWP}] \quad \text{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\Pi \text{ auf } \overset{\circ}{\Omega} \text{ und } \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + h\Phi \right) \Big|_{\partial\Omega} = F \text{ auf } \partial\Omega$$

Satz: Für $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $0 < c_0 \leq \sigma(\vec{r})$, $\Pi \in C(\overline{\Omega})$, $h \in C(\partial\Omega)$ mit $h \geq 0$, $h \neq 0$ und $F \in C(\partial\Omega)$ hat [Mix-RWP] eine eindeutig bestimmte klassische Lösung $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

Für Normalgebiete (beschränkte, zusammenhängende Gebiete mit glattem Rand) haben Eigenwerte und Eigenfunktionen folgende Eigenschaften:

- **Spektrum** $\{\lambda_\nu | \nu = 1, \dots, \infty\}$ ist **diskret**
- alle Eigenwerte sind positiv: $\lambda_\nu > 0$ und aufsteigende Folge: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$
- Eigenfunktionen $\{b_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ können orthonormal im Funktionenraum $L_2(\Omega)$ gewählt werden. Mit dem **Skalarprodukt**: $\langle f|g \rangle := \int_{\Omega} f(\vec{r}) * g(\vec{r}) \, d^3r$ erfüllen die **orthonormierten Eigenfunktionen** die Bedingungen:

$$\langle b_\mu | b_\nu \rangle = \int_{\Omega} b_\mu(\vec{r}) * b_\nu(\vec{r}) \, d^3r = \delta_{\mu\nu} \text{ (Kroneckersches Deltasymbol)}$$

- **Eigenfunktionen sind vollständig**, d.h. jede Funktion $\varphi \in L_2$ lässt sich bezüglich des Skalarproduktes nach b_1, b_2, b_3, \dots entwickeln:

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu b_\nu \text{ mit } \alpha_\nu = \langle b_\nu | \varphi \rangle$$

$$\text{Vollständigkeitsrelation: } \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(\vec{r}) b_\nu(\vec{r}')^* = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

1.5.3 Analytische Lösungsverfahren für die Poissongleichung

1.5.3.1 Orthogonalentwicklung nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators (Spektraldarstellung)

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \text{ in } \overset{\circ}{\Omega}$$

mit $\Phi|_{\partial\Omega^D} = \Phi_D$ und $\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\partial\Omega^{(N)}} = \sigma_N$

wobei $\partial\Omega = \partial\Omega^{(D)} \cup \partial\Omega^{(N)}$, $\partial\Omega^{(D)} \cap \partial\Omega^{(N)} = \emptyset$ und $\partial\Omega^{(D)} \neq \emptyset$

1. Lösungsschritt:

konstruiere Funktion $\Phi^{(0)} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, welche die inhomogenen Randbed. erfüllt.

Für die Lösung verwendet man den Ansatz: $\Phi = \Phi^{(0)} + \varphi$

φ ist eine Lösung des modifizierten RWP mit homogenen Randbedingungen:

$$-f := \operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi) = -\rho - \operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi^{(0)}) \text{ in } \Omega$$

mit $\varphi|_{\partial\Omega^{(D)}} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega^{(N)}} = 0$

2. Lösungsschritt: Lösung φ des RWP kann man aus den Eigenfunktionen $b_\nu(\vec{r})$ und Eigenwerten $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$ von $-\text{div}(\epsilon \nabla \cdot)$ aufbauen:

$$-\text{div}(\epsilon \nabla b_\nu) = \lambda_\nu b_\nu \text{ in } \overset{\circ}{\Omega}$$

mit $b_\nu|_{\partial\Omega(D)} = 0$ und $\frac{\partial b_\nu}{\partial n}|_{\partial\Omega(N)} = 0$

3. Lösungsschritt:

Poissongleichung in $\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu b_\nu(\vec{r})$ einsetzen:

$$f \stackrel{!}{=} -\text{div}(\epsilon \nabla \varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \underbrace{[-\text{div}(\epsilon \nabla b_\nu)]}_{\lambda_\nu b_\nu}$$

Für α_ν erhält man: $\alpha_\nu = \frac{\langle b_\nu | f \rangle}{\lambda_\nu}$ und damit die Lösung des RWP:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\langle b_\nu | f \rangle}{\lambda_\nu} b_\nu(\vec{r}) = \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(\vec{r}) \frac{1}{\lambda_\nu} b_\nu(\vec{r}')}_{\text{Greenfunktion } G(\vec{r}, \vec{r}')} * f(\vec{r}') d^3 r'$$

1.5.3.2 Lösung mittels Greenfunktion

Die Greendfunktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ ist definiert als Lösung des reduzierten RWP mit homogenen Randbedingungen und rechter Seite $f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$:

$$\operatorname{div}_{\vec{r}}(\epsilon(\vec{r})\nabla_{\vec{r}}G(\vec{r}, \vec{r}')) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Mit $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r} \in \partial\Omega^{(D)}$ und $\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = 0$ für $\vec{r} \in \partial\Omega^{(N)}$

Für unbeschränkte Gebiete muss die Summe durch ein Integral ersetzt werden, da das Spektrum der Eigenwerte eine kontinuierliche Menge bildet.

1.5.3.3 Konstruktion der Greenfunktion m.H. der Spiegelladungsmethode

Ausgangspunkt: **Vakuum-Greenfunktion**, Greenfunktion zur Poissongleichung im unbeschränkten homogenen Raum $\Omega = \mathbb{R}^3$:

$$G_{vac}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Aus der **Vakuum-Greenfunktion** lässt sich die

Greenfunktion für den Halbraum mit ideal leitendem Rand konstruieren:

- Halbraum= dielektrisches Gebiet: $\Omega = H := \{\vec{r} = \vec{r}_{||} + n\vec{n}|\vec{r}_{||} \cdot \vec{n} = 0; \quad z > 0\}$
- Rand von der Ebene: $\partial H = \{\vec{r} = \vec{r}_{||}|\vec{r}_{||} \cdot \vec{n} = 0; \quad z = 0\}$
- \vec{n} = Normalenvektor der Ebene ∂H
- Permittivität ϵ sei im Halbraum H konstant
- Der unterhalb der Randfläche liegende Halbraum $z \leq 0$ sei ein (idealer) Leiter, der zusammen mit der Ebene ∂H ein Äquipotentialgebiet mit konstantem Potential bildet, das auf den Wert $\Phi(\vec{r}) = 0$ gesetzt werden kann
- Punkt \vec{r}_Q^* entsteht durch Spiegelung von Punkt \vec{r}_Q an der Ebene ∂H
- Spiegelung an der Ebene $\partial H = S$: $\vec{r} = \vec{r}_{||} + z\vec{n} \rightarrow \vec{r}^* = S\vec{r} := \vec{r}_{||} - z\vec{n}$

Um die Greenfunktion für den Halbraum zu bestimmen wird eine Punktladung Q an dem Ort $\vec{r}_Q \in H$ gesetzt und das erzeugte Potential bestimmt, aber man betrachtet ein Ersatzproblem, indem das Dielektrikum über ∂H hinaus nach unten fortgesetzt wird. Im virtuellen Dielektrikum wird am Punkt \vec{r}_Q^* eine virtuelle Gegenladung $-Q$ platziert. Ladung und Gegenladung erzeugen im Halbraum H das elektrische Potential:

$$\Phi_H(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_Q^*|} \right] \text{ für } \vec{r} \in H$$

Um die Greenfunktion zu erhalten $Q = 1$ und $\vec{r}_Q = \vec{r}'$ setzen:

$$G_H(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - S\vec{r}'|} \right]$$

Für beliebige Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ ist: $\Phi(\vec{r}) = \int_H G_H(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3r'$ die Lösung des Potentialproblems in H

In analoger Weise lässt sich die Spiegelladungsmethode auf einen **Viertelraum mit metal-lischer Begrenzung** anwenden, bei dem zwei Halbebenen den Rand ∂W bilden, auf dem das Potential der Randbedingung $\Phi_{\partial W} = 0$ genügen muss. Die reale Punktladung wird dreimal gespiegelt an die Punkte $S_1\vec{r}_Q, S_2\vec{r}_Q, S_3\vec{r}_Q$ mit der Ladung $-Q, +Q, -Q$. Potential zum Ersatzproblem lautet dann:

$$\Phi_W(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r}-S_1\vec{r}_Q|} + \frac{1}{|\vec{r}-S_2\vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r}-S_3\vec{r}_Q|} \right] \text{ für } \vec{r} \in W$$

Um die Greenfunktion für den Winkelraum zu erhalten $Q = 1$ und $\vec{r}_Q = \vec{r}'$ setzen:

$$G_W(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{|\vec{r} - S_n\vec{r}'|}$$

Mit $S_0\vec{r} = \vec{r}$

1.5.4 Stationäre elektrische Strömungen und das zugehörige RWP

1.5.4.1 Bilanz- und Transportgleichungen für elektrische Strömungsverteilungen

Grundlage für Theorie elektrischer Strömungen ist **Ladungserhaltungsgleichung**:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

1. **Annahme**: elektr. Strömungsfeld aus K versch. Ladungsträgersorten zusammengesetzt:

spezifische Ladung q_α	}	Partialstromdichte: $\vec{j} = \underbrace{ q_\alpha n_\alpha \mu_\alpha \vec{E}}_{\text{Driftstrom}} - \underbrace{a_\alpha D_\alpha \nabla n_\alpha}_{\text{Diffusionsstrom}}$
Beweglichkeit μ_α		
Teilchendichte n_α		

2. **Annahme**: Keine Wirbelströme im \vec{E} -Feld \Rightarrow **reines Gradientenfeld**: $\vec{E} = -\nabla \Phi$

Driftstrom im \vec{E} -Feld führt zum Ohmschen Gesetz, ist in Metallen dominant

Diffusionsstrom in Richtung des negativen Konzentrationsgradienten $-\nabla n_\alpha$, Intensität durch Diffusionskoeffizienten $D_\alpha = \frac{kT}{|q_\alpha| \mu_\alpha} > 0$ gegeben \rightarrow Ficksches Diffusionsgesetz

Mit dem elektrochemischen Potential: $\Phi_\alpha := \Phi + \frac{kT}{q_\alpha} \ln \frac{n_\alpha}{n_0}$ und $\sigma_\alpha := |q_\alpha| \mu_\alpha n_\alpha$ folgt:

$$\vec{j}_\alpha = -\sigma_\alpha \nabla \Phi_\alpha \quad \text{und} \quad \vec{j} = \sum_{\alpha=1}^K \vec{j}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \rho = \sum_{\alpha=1}^K q_\alpha n_\alpha$$

Teilchen genügen einer **Teilchenbilanzgleichung** : $\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{q_\alpha} \operatorname{div} \vec{j}_\alpha + G_\alpha$

mit G_α = Generations-Rekombinationsrate der Spezies α und Teilchenstromdichte $\frac{1}{q_\alpha} \vec{j}_\alpha$

1.5.4.2 Stationäre Strömungsfelder im Drift-Diffusions-Modell

Bei stationären Strömungen gilt: $\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\sigma_\alpha \nabla \Phi_\alpha) = -q_\alpha G_\alpha$

1.5.4.3 Stationäre Strömungsfelder im Ohmschen Transportmodell

einfaches Ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla \Phi$

Annahme: konstante Leitfähigkeit σ und Permittivität ϵ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} \right) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$

Wird der Gleichgewichtszustand durch lokale Ladungsfluktuation $\Delta\rho(t, \vec{r})$ gestört

$\rightarrow \Delta\rho(t, \vec{r}) = \Delta\rho(t_0, \vec{r})e^{-\frac{t-t_0}{\tau_R}}$ mit **dielektrischer Relaxationszeit** $\tau_R := \frac{\epsilon}{\sigma}$

Bei Metall ist die Relaxationszeit so kurz, dass man die Ausbildung einer Raumladung meistens vernachlässigen \rightarrow **quasistationäre Näherung**: $\frac{\partial\rho}{\partial t} \approx 0$

1.5.4.4 Randwertproblem für stationäre Ohmsche Strömungsfelder

stationäres Strömungsproblem: $\operatorname{div} \vec{j} = 0 \rightarrow$ homogene Poissongleichung: $\operatorname{div} (\sigma(\vec{r}) \nabla \Phi) = 0$

Der Rand $\partial\Omega$ mit potentialgesteuerten Kontakten (Klemmen) auf denen die Potentialwerte $\Phi|_{\partial\Omega_j} = V_j$ vorgegeben sind \Rightarrow **homogene Neumannsche Randbedingung**:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j \right)$$

2 Modellierung elektromagnetischer Vorgänge in technischen Systemen mit Kompaktmodellen

2.1 Flusserhaltende Diskretisierung mit Kirchhoff. Netzwerken

Erfüllung der Erhaltungssätze für Ladung/Energie \rightarrow flusserhaltende Diskretisierung

2.1.1 Generelle Modellannahmen: Vorraussetzungen

1. System besteht aus **räumlich begrenzten Funktionsblöcken**, die über lokalisierte Schnittstellen miteinander wechselwirken
2. elektrische/magnetische Felder sind **nur quasistationär zeitveränderlich** \rightarrow keine elektromagnetischen Wellenausbreitung in und zwischen den Funktionsblöcken.

Bedingung: Wellenlänge der EM-Welle $\lambda \gg$ Abmessung des Systems d

2.1.2 Feldtheoretische Beschreibung der Quasistationarität

Wenn Ausbildung elektromagnetischer Wellen unterdrückt wird ($\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0$)

\Rightarrow Näherung des Verschiebungsstromes \Rightarrow magnetisch induzierter Anteil wird vernachlässigt

Alle Feldgrößen sind quasistationär:

$\Phi, \vec{A}, \vec{E}, \vec{B}$ sind nur von momentanen zeitlichen Wert von ρ, \vec{j} abhängig

Wegen Coulomb-Eichung gilt: $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

2.1.3 Synthese von Netzwerkmodellen aus funktionalen Blöcken

Reale 3D Struktur durch Kirchhoff. Netzwerk darstellen (realitätsgetr. Klemmenverhalten)

2.1.3.1 Funktionale Blöcke

Annahme: Blöcke können als mehrpolige elektrische Bauelemente dargestellt werden

- **Ladungsaustausch** (Stromfluss) erfolgt über disjunkte, lokalisierte Randflächen
(=Kontakte/Klemmen)
- Klemmenpotentiale $\Phi_k = \Phi|_{A_k}$
- Bauelement als Ganzes elektrisch neutral \Rightarrow auslaufend gerichtete Klemmenströme:

$$I_k := \int_{A_k} \vec{j} \cdot d\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^N I_k = 0$$

- differential-algebraisches Gleichungssystem ("Kompaktmodell"):

$$\underline{F}(\underline{U}, \underline{I}, \underline{\dot{U}}, \underline{\dot{I}} = 0)$$

mit $\underline{U} = (\Phi_1 - \Phi_0, \Phi_2 - \Phi_0) =$ Klemmenspannungen, $\underline{I} =$ Klemmenströme,
 $\Phi_0 =$ Bezugspotential

2.1.3.2 Erstellung eines Kirchhoffschen Netzwerkes

elektrische Verknüpfung der Kompaktmodelle der Bauelemente über Knoten und Zweige.

Erforderliche Eigenschaften von (physikalischen) Knoten:

- ideal leitende Verbindung zwischen M Kontakten mit Potentialwert Φ_K
- „echter Knoten“ wenn $M \geq 3$
- $\mathcal{K} :=$ Menge aller Knoten im Netzwerk
- meist ladungsneutral, gespeicherte Ladung $Q_K = 0$
- „speichernde Knoten“ (=Elektroden) mit $Q_K \neq 0$, wenn andere Elektroden die Gegenladung tragen: $\sum_{K \in \mathcal{K}} Q_K = 0$

Erforderliche Eigenschaften von Zweigen:

- gerichtete Zweige bezeichnen möglichen Strompfad von K_1 zu K_2
- $\mathcal{Z} :=$ Menge aller Zweige im Netzwerk
- fließender Strom wird als gerichteter Zweigstrom $I(K_1, K_2)$ flusserhalten zwischen K_1 und K_2 transportiert
- Jedem Zweig ist anliegende, gerichtete Zweigspannung

$$U(K_1, K_2) := \int_{K_1}^{K_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- induzierte Spannung hängt von Wahl des physikalischen Integrationsweges ab:

$$U_{ind}(K_1, K_2) := \int_{K_1}^{K_2} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} = - \int_{K_1}^{K_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r}$$

- Ohne Induktionseffekt gilt: $U(K_1, K_2) = \Phi_{K_1} - \Phi_{K_2}$

2.1.3.3 Kirchhoffsche Knotenregel

- Kirchhoffsche Knotenregel für speichernde Knoten:

$$\sum_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K, K') = -\frac{dQ_K}{dt}$$

- Kirchhoffsche Knotenregel für nichtspeichernde Knoten:

$$\sum_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K, K') = 0$$

2.1.3.4 Kirchhoffsche Maschenregel

Masche/Schleife \mathcal{M} ist eine geschlossene Knotenfolge längs Zweigen im Netzwerk Linienintegral über \vec{E} mit $K_{N+1} := N_0$:

$$\sum_{j=0}^N \int_{K_j}^{K_{j+1}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{j=0}^N U(K_j, K_{j+1})$$

Kirchhoffsche Maschenregel mit eingepprägter (induktiver) Spannungsquelle:

$$\sum_{j=0}^N U(K_j, K_{j+1}) = U_{ind}(\mathcal{M})$$

!Nur sinnvoll, wenn $U_{ind}(\mathcal{M})$ durch konzentrierte Bauelemente (z.B. Spulen) erzeugt wird!

2.2 Kapazitive Speicherelemente

2.2.1 Mehrelektroden-Kondensatoranordnungen (Geometrie und RWP)

1. **RWP lösen:**
$$[\text{V-RWP}] \quad \text{div}(\epsilon \nabla \Phi) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad \Phi|_{\partial\Omega_l} = V_l$$

2. **Konstruktion des Potential aus Grundlösung:** Lösung zu [V-RWP]:

Linearkombination von $N + 1$ Grundlösungen Φ_0 darstellen:
$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^N V_k \Phi_k(\vec{r})$$

$$\text{mit } \text{div}(\epsilon \nabla \Phi_k) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad \Phi_k|_{\partial\Omega_l} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

2.2.2 Maxwell'sche Kapazitätsmatrix

2.2.2.1 Beziehung zwischen Elektrodenladungen und -potentialen

Auf Elektrode $\partial\Omega_k$ befindliche Ladung Q_k ergibt mit Gauß'schem Satz $Q_k = \int_{\partial\Omega_k} \vec{D} \cdot n \vec{d}a$:

$$Q_k = \sum_{l=0}^N C_{kl} V_l \quad \text{mit} \quad C_{kl} := - \int_{\partial\Omega_k} \epsilon \vec{n} \cdot \nabla \Phi_l \, da = \text{Maxwell'scher Kapazitätskoeffizient}$$

Mit $d\vec{a} = -\vec{n} \, da$ und weiteren Umformungen folgt

$$C_{kl} = \int_{\partial\Omega} \Phi_k \epsilon \nabla \Phi_l \cdot d\vec{a} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\Phi_k \epsilon \nabla \Phi_l) d^3 = \int_{\Omega} \nabla \Phi_k \epsilon \nabla \Phi_l d^3 r$$

\Rightarrow Matrix C_{kl} ist symmetrisch: $C_{kl} = C_{lk}$

2.2.2.2 Darstellung der gespeicherten elektrischen Energie

gespeicherte Energie:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^N V_l C_{lk} V_k = \frac{1}{2} \underline{V}^T \underline{C} \underline{V} \geq 0$$

mit der Maxwellschen Kapazitätsmatrix: $\underline{\underline{C}} = C_{kl} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0N} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N0} & C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix}$

und Vektor der Klemmenpotentiale: $\underline{V} := \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$

Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{C}}$ ist positiv semi-definit: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T$ und $\underline{V}^T \underline{\underline{C}} \underline{V} \geq 0$

Mit dem Vektor der Elektrodenladungen: $\underline{Q} := \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$ gilt: $\underline{Q} = \underline{\underline{C}} \underline{V}$

Ausserdem: $\boxed{\frac{\partial W_{el}}{\partial V_k} = Q_k \text{ bzw. } \frac{\partial W_{el}}{\partial \underline{V}} = \underline{Q}} \text{ und } \boxed{\frac{\partial^2 W_{el}}{\partial V_k \partial V_l} = C_{kl} \text{ bzw. } \frac{\partial^2 W_{el}}{\partial \underline{V} \partial \underline{V}} = \underline{\underline{C}}}$

Potentialvorgaben \underline{V} und $\underline{V} + c\underline{e}$ mit $\underline{e} := (1, 1, \dots, 1)^T$ dasselbe \vec{E} -Feld im

Dielektrikum $\Omega \rightarrow$ Alle Zeilen/Spaltensummen von $\underline{\underline{C}}$ sind Null

\Rightarrow Gesamtladung $Q_{tot} = \sum_{k=0}^N Q_k = 0$

Für die Grundlösungen $\Phi_0(\vec{r}), \Phi(\vec{r}), \dots, \Phi_N(\vec{r})$ gilt:

$$\sum_{k=0}^N \Phi_k(\vec{r}) = 1$$

$\underline{\underline{C}}$ ist nicht invertierbar deshalb:

- „reduzierte Kapazitätsmatrix“: $\tilde{\underline{\underline{C}}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix}$

- reduzierter Ladungs/Spannungsvektor: $\underline{\tilde{Q}} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$ und $\underline{\tilde{U}}_0 = \begin{pmatrix} U_{1,0} \\ \vdots \\ U_{N,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - V_0 \\ \vdots \\ V_N - V_0 \end{pmatrix}$

Es gilt. $\underline{\tilde{Q}} = \underline{\tilde{C}} \underline{U}_0$

2.2.2.3 Teilkapazitätskoeffizienten Mehrelektroden-Kondensatoranordnung kann als Netzwerk von kapazitiven Zweipolen (Eintoren) dargestellt werden mit den elektrischen Spannungen $U_{kl} := V_k - V_l$ zwischen den Elektroden $\partial\Omega_k$ und $\partial\Omega_l$.

Es gilt : $\sum_{l=0}^N C_{kl} U_{kl} = -Q_k \Rightarrow$ Teilchenkapazitätskoeffizient: $K_{kl} = -C_{kl}$

$$Q_k = \sum_{l=0, l \neq k}^N K_{kl} U_{kl}$$

2.3 Induktive Speicherelemente

2.3.1 Spulenanordnungen (Geometrie und Topologie)

Induktive Bauelemente bestehen aus **fast geschlossenen stromdurchflossenen Leiterschleifen** → erzeugen zeitveränderliches Magnetfeld → elektrische Spannung wird induziert → induzierter Strom wird getrieben. Um magnetische Feldenergie zu konzentrieren, platziert man im Inneren der Leiterschleife ein magnetisiertes Material mit großer Permeabilität. Betrachtung von N ruhenden, drahtförmigen Leiterschleifen C_k , die orientierte Flächen S_k einschließen und durch die ein zeitveränderlicher Strom $i_k(t)$ fließt:

$$u_k(t) = -u_{ind,k}(t) + r_k i_k(t)$$

Spulenstrom erzeugt Magnetfeld im Spuleninneren: $B(t) = c \cdot i(t)$ mit c =konstant:

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

mit $L = w|S_0|c$ = Eigeninduktivität der Spule

- **Spule als Generator:** ideale Spule mit w Windungen, deren Inneres vom homogenen, zeitveränderlichen Magnetfeld $\vec{B}(t) = B(t)\vec{e}_z$ Spule stellt orientierte Leiterschleife C dar, die die Fläche S einschließt. Jede Windungsfläche S_0 wird vom magnetischen Fluss durchsetzt: $\Phi(S_0) = \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{a} = |S_0| \cdot B(t)$

In der Spule wird eine elektrische Spannung $u_{ind}(t)$ induziert:

$$u_{ind}(t) = - \frac{d}{dt} \Phi(S) = -w \frac{d}{dt} \Phi(S_0) = -w |S_0| \frac{dB}{dt}$$

Der Zählpfeil von $u_{ind}(t)$ gleichorientiert mit Umlaufsinn der Leiterschleife

\Rightarrow Spule als (ideale) Spannungsquelle mit Ausgangsspannung $u_{ind}(t)$

- **Spule als Verbraucher:** Schließt man an die Spule eine äußere Spannungsquelle mit zeitveränderlicher Spannung $u(t)$ an \rightarrow Strom $i(t)$ fließt durch Spule. $u(t) = -u_{ind}(t)$.
Spule als Verbraucher

2.3.2 Induktionskoeffizienten

vereinfachende Modellannahmen:

- a) Alle Spulen sind **ortsfest** (geometrischer Aufbau: starr & zeitunabhängig)
- b) **Ruheinduktion** (induzierte Sp. werden nur von Zeitableitung des \vec{B} - Feldes verursacht)
- c) Spulenströme ändern sich so langsam, dass **quasistationäre Näherung** angewendet werden darf
- d) **Antennenwirkung** von Spulen und Wellenausbreitung werden **vernachlässigt**
- e) **keine Retardierungseffekte**

Stellt man das Magnetfeld \vec{H}_k über ein Vektorpotential $\vec{A}_k(\vec{r}, t)$ mit $\vec{H}_k = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}_k$ so genügt in Coulombbeziehung das Vektorpotential der Poissongleichung: $\Delta \vec{A}_k(\vec{r}, t) = -\mu \vec{j}_k(\vec{r}, t)$ mit

Hilfe der Vakuum-Greenfunktion kann man diese lösen und erhält:

$$\vec{A}_k(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}_k(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Linienförmige Leiter C_k stellt man durch eine Ortskurve mit Parametrisierung $s \mapsto \vec{r}_k(s)$ mit Bogenlänge s . Überall konstante Querschnittsfläche a_k mit Einheitstangentenvektor $\vec{t}_k(s) := \frac{d\vec{r}_k}{ds}$. Für Stromdichte folgt: $\vec{j}_k = \vec{t}_k(s) \frac{i_k(t)}{a_k} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_k} \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} i_k(t)$ mit $\vec{t}_k ds = d\vec{s}_k$. Das **von allen Spulen erzeugte Vektorpotential** ergibt sich aus:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N \vec{A}_k(\vec{r}, t)$$

Für **induzierte Spannung** gilt:

$$u_{ind,k}(t) = - \sum_{l=1}^N \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \int_{C_k} \int_{C_l} \frac{d\vec{s} \cdot d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{s}|}}_{:= L_{kl} = \text{Induktionskoeffizient}} \frac{d}{dt} i_l(t)$$

Man erhält die Transformatorgleichung:

$$u_k(t) = r_k i_k(t) + \sum_{l=1}^N L_{kl} \frac{di_l}{dt}$$

- Selbstinduktionskoeffizienten: L_{kk}
- Gegeninduktionskoeffizienten: L_{kl} mit $k \neq l$
- Es gilt: $\boxed{L_{kl} = L_{lk}}$
- Die Induktivitätsmatrix $\underline{\underline{L}}$ ist symmetrisch und positiv Definit

2.3.3 Zusammenhang mit der magnetischen Feldenergie

Für die gespeicherte magnetische Energie mit quasistationärer Näherung gilt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} d^3r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{C_k} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \cdot i_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi(S_k) \cdot i_k$$

$$\Rightarrow W_{mag} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N i_k L_{kl} i_l = \frac{1}{2} \underline{I}^T \underline{L} \underline{I}$$

mit dem Vektor der Spulenströme $\underline{I} := (i_1, i_2, \dots, i_N)^T$

$$\Rightarrow \Phi(S_k) = \sum_{l=1}^N L_{kl} i_l$$

Für nicht-drahtförmige Schleifen gilt:

$\frac{\partial W_{mag}}{\partial i_k} = \sum_{l=1}^N L_{kl} \cdot i_l$

$\frac{\partial^2 W_{mag}}{\partial i_k \partial i_l} = L_{kl}$

Allgemeine Neumannsche Formel: Stromverteilung in jeder Schleife Ω_l : $\vec{j}_l(\vec{r}, t) = \vec{s}_l(\vec{r}) \cdot i_l(t)$

mit der Formfunktion $\vec{s}_l(\vec{r})$ als Lösung des stationären Strömungsproblems: $\text{div } \vec{s}_l = 0$ in

Ω_l Randbedingung: Einheitsstrom fließt durch die Klemmen $A_l^{(in)}$ und $A_l^{(out)}$:

$$\int_{A_l^{(in)}} \vec{s}_l \cdot d\vec{a} = -1 \quad \text{und} \quad \int_{A_l^{(out)}} \vec{s}_l \cdot d\vec{a} = +1$$

Magnetische Feldenergie beträgt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_l} \frac{\vec{s}_k(\vec{r}) \cdot \vec{s}_l(\vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} d^3r d^3s}_{L_{kl} = \text{Neumannscher Induktivitätskoeffizient}} \cdot i_l(t) i_k(t)$$