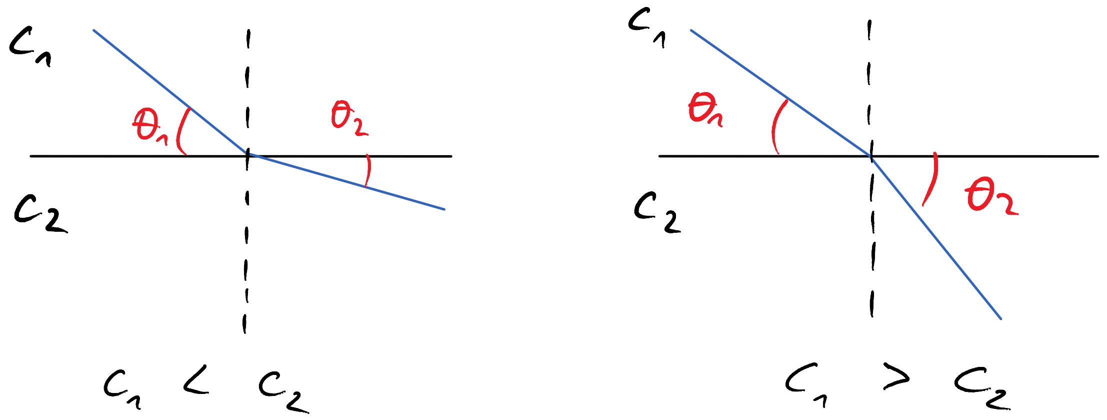
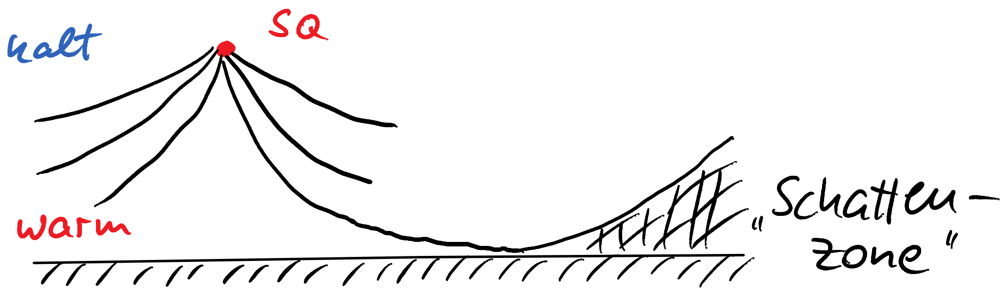
Dienstag, 4. November 2014
18:09

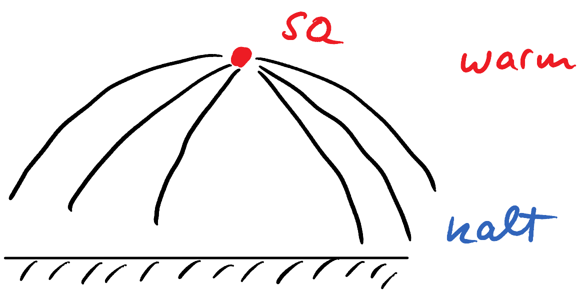
Schallbrechung

Brechungsgesetz nach Snell: $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \text{const.}$



Wetterlagen:

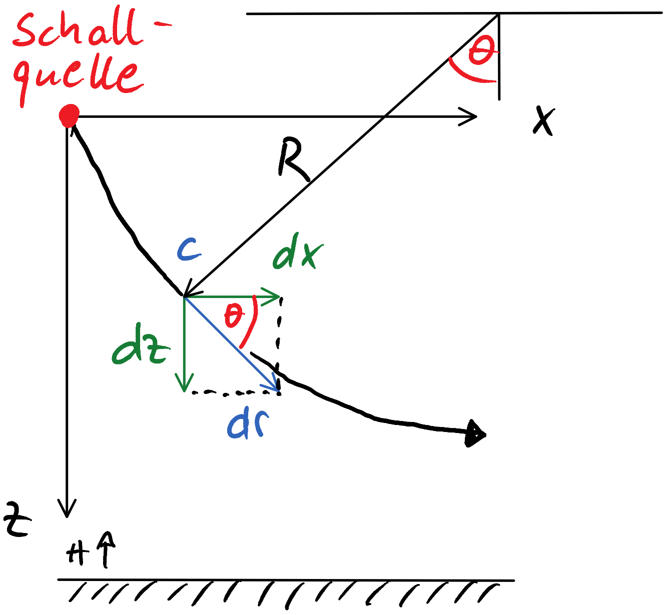


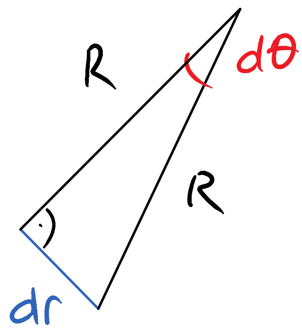


„Inversionswetterlage"

- Ausbreitung der kont. gebrochenenen Schallwellen in der Atmosphäre
- Definition: Variablen am Schallausbreitungsort Index "1", am Boden Index "0"

- Max. horiz. Ausbreitung am Boden L, Schallquellenhöhe H_1, Temperatureinflüsse (Temperaturgradient $\gamma = -6.5$ K/km, Temperatur Boden $T_0 = 20°C$)





Kleinwinkelnäherung: $\sin d\theta \cong d\theta$

$$\sin d\theta = \frac{dr}{R} = d\theta$$

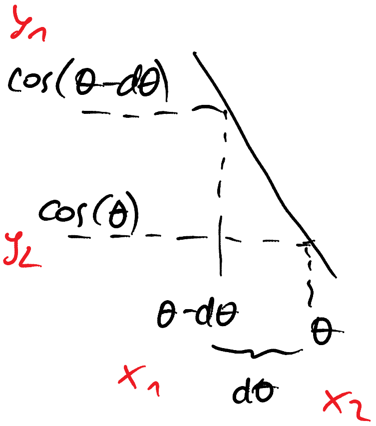
$$\rightarrow \boxed{R = \frac{dr}{d\theta}} \quad \text{und} \quad dr = \frac{dz}{\sin\theta}$$

Mit r... Wegstrecke der Schallfront

R.. Entfernung der betr. Schallfront vom „Radienhorizont"

Steigung (= Ableitung der Ortskurve) der cos-Funktion zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ an einem infinitesimal kleinen, somit linearen Abschnitt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow -\sin\theta = \frac{\cos\theta - \cos(\theta - d\theta)}{\theta - (\theta - d\theta)}$$



$$\Leftrightarrow \cos(\theta - d\theta) = \cos\theta + \sin\theta \cdot d\theta$$

Brechungsgesetz nach Snell:

$$\frac{c}{\cos\theta} = \frac{c - dc}{\cos(\theta - d\theta)}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{(c - dc)\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta \cdot d\theta}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{c - dc}{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{c} + c \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta = \cancel{c} - dc$$

$$\Leftrightarrow d\theta = -\frac{dc}{c} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\rightarrow R = \frac{dr}{d\theta} = -\frac{c \cdot \sin\theta \, dr}{\cos\theta \, dc} = -\frac{c}{\cos\theta} \frac{dz}{dc}$$

mit $dr = \frac{dz}{\sin\theta}$

Gleichwohl:

$$R = -\frac{c_1}{\cos\theta_1}\,\frac{dz}{dc}\,, \quad \text{da} \quad \frac{c}{\cos\theta} = \frac{c_1}{\cos\theta_1} = \text{const.}$$

Temperaturverlauf:

$$T = T_0 + \gamma H$$

Materialsammlung Formel 1.5.:

$$c(H) = \sqrt{\kappa \cdot R_S \cdot T} = \sqrt{\kappa\ R_S\,(T_0 + \gamma H)}$$

Ausreichende Genauigkeit $\sqrt{1 + \frac{\gamma H}{T_0}}$ für erste beiden Ausdrücke der binomischen Erweiterung:

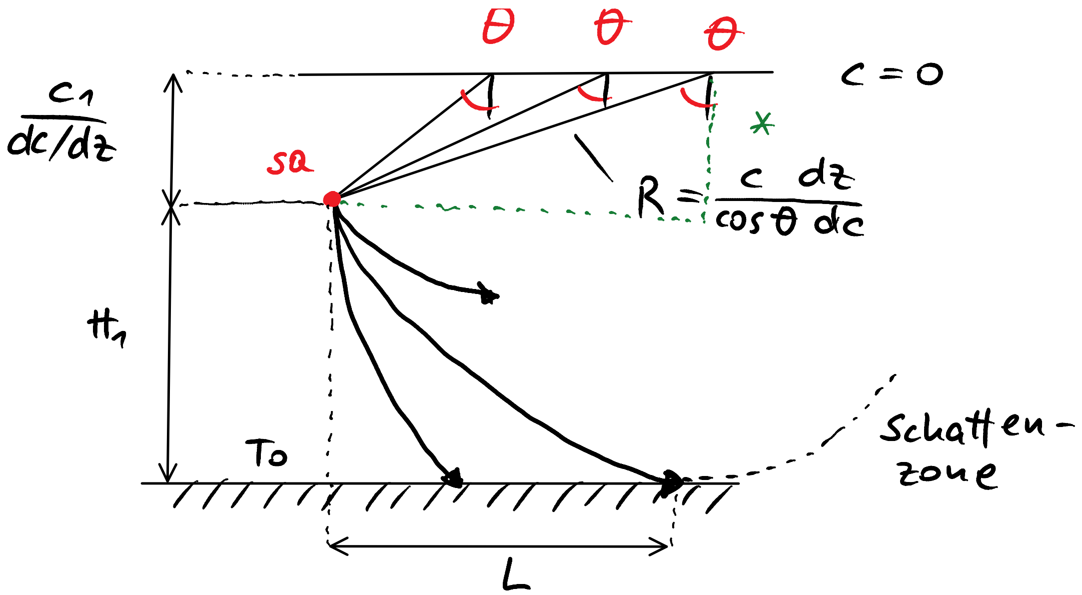
$$c(H) = c_0 + \frac{c_0 \gamma}{2 T_0} H = c_0 + \frac{dc}{dH} \cdot H$$

Da $\frac{dc}{dH} = -\frac{dc}{dz} = \gamma$, auch: $c(z) = c_1 + \frac{dc}{dz} \cdot z \ (= c_1 - \gamma z)$

(Hier "+", da Betrachtungspunkt Schallquelle mit c_1, Schallgeschwindigkeit nimmt mit z zu.)

„Radienhorizont" auf Höhe z, wo $c = 0$

$$\rightarrow \quad z = -\frac{c_1}{dc/dz}$$



Aus geometrischer Betrachtung:

$$* \quad R^2 = L^2 + \left(\frac{c_1}{dc/dz}\right)^2$$

$$\left(\frac{c_1}{dc/dz} + H_1\right)^2 = L^2 + \left(\frac{c_1}{dc/dz}\right)^2$$

mit $c(H) = c_0 + \frac{dc}{dH} H$:

$$L = \sqrt{H_1 \left(-\frac{4T_0}{\gamma} - H_1\right)}$$

Da $H_1 << -\frac{4T_0}{\gamma}$: $\boxed{L \approx \sqrt{-\frac{4T_0}{\gamma} \cdot H_1}}$

mit $H_1 = 1000\,m$, $T_0 = 20°C$

$\rightarrow L \approx 13.4\ km$