Algorithmen und Datenstrukturen

1. Allgemeines

Auf/Abrunden: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

$\lfloor 3,7 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3,1 \rceil = 4 \qquad \lceil \frac{a}{b} \rceil \leq \frac{a+(b-1)}{b}$

Modulo $\boxed{a\%n = a \mod n = a - \left(\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \cdot n \right)}$

Gesucht r mit $a = nq + r \qquad 0 \leq r < n, q \in \mathbb{Z}$

Fakultät: $n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)! & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$

Fibonacci-Zahl: $f(n) = \begin{cases} f(n-1) + f(n-2) & \text{für } n \geq 2 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$

Fibonacci-Folge: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

2. Algorithmen

Ein Algorithmus ist ein Verfahren mit einer **präzisen** (d.h. in einer genau festgelegten Sprache abgefassten) **endlichen** Beschreibung, unter Verwendung **effektiver** (tatsächlich ausführbarer), **elementarer** Verarbeitungsschritte. Ein Algorithmus besitzt eine oder mehrere Eingaben (Instanz mit Problemgröße n) und berechnet daraus eine oder mehrere Ausgaben.
Die Qualität eines Algorithmus ergibt sich aus seiner Effizienz, Komplexität, Robustheit und Korrektheit.

2.1. Darstellungsarten

- Flussdiagramm (Statements als Blöcke, verzweigte Bedingungen)
- Struktogramm (Pseudocode, Bei Bedingung mehrere Spalten)
- Programmiersprache/Pseudocode

2.2. Elementare Bausteine

- Elementarer Verarbeitungsschritt (z.B. Zuweisung Variable)
- Sequenz
- Bedingter Verarbeitungsschritt (if/else)
- Wiederholung (for/while)

2.3. Eigenschaften

Determiniert: Der Algorithmus liefert bei gleichen Startbedingungen das gleiche Ergebnis.
Deterministisch: Die nächste anzuwendende Regel ist zu jedem Zeitpunkt definiert.

2.4. Algorithmenmuster (Design Patterns)

2.4.1 Divide and Conquer

Rekursive Rückführung eines zu lösenden Problems auf mehrere identische Probleme mit kleinerer Eingabemenge bis zum Trivialfall
Beispiele: Binäre Suche, MergeSort, Quicksort

2.4.2 Greedy

Schrittweise Erweiterung der Lösung ausgehend von Startlösung unter Berücksichtigung des bestmöglichsten Schrittes
Beispiele: Berechnung Wechselgeld, Glasfasernetz

2.4.3 Brute Force

Erzeuge alle in Frage kommenden Kandidaten und suche besten aus

2.4.4 Backtracing

Systematische Suchtechnik, um Lösungsraum vollständig abzuarbeiten
Beispiele: Labyrinth (mit frühem Abbrechen von falschen Lösungspfaden)

2.4.5 Dynamisches Programmieren

Statt Rekursion berechnet man vom kleinsten Teilproblem "aufwärts". Zwischenergebnisse werden in Tabellen gespeichert
Beispiele: Fibonacci

2.5. Effizienz

Die Effizienz eines Algorithmus ist seine Sparsamkeit bezüglich der Ressourcen, Zeit und Speicherplatz, die er zur Lösung eines festgelegten Problems beansprucht.

2.6. Komplexität

Schrankenfunktionen: $1 < \log_{10}(n) < \ln(n) < \log_2(n) < \sqrt{n} < n < n \cdot \ln(n) < (\log n)! < n^2 < e^n < n! < n^n < 2^{2^n}$
Aber $\{\log_{10}(n), \ln(n), log_2(n)\} \in \Theta(\log n)$
Landau-Symbole:

Notation	Definition	
$f \in \mathcal{O}(g(n))$	$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\forall n > n_0$
$f \in \Omega(g(n))$	$f(n) \geq c \cdot g(n) \geq 0$	$\forall n > n_0$
$f \in \Theta(g(n))$	$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$	$\forall n > n_0$

2.6.1 Asymptotische Notation

Notation	Grenzwertdef. (falls existent)	Wachstum
$g \in \mathcal{O}(f)$	$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	nicht schneller als f
$g \in \Omega(f)$	$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \leq \infty$	nicht langsamer als f
$g \in \Theta(f)$	$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	gleich wie f
$g \in o(f)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$	langsamer als f
$g \in \omega(f)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$	schneller als f

2.6.2 Rechenregeln

$c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n))$ für eine beliebige Konst. c
$\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
$\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n)g(n))$
$\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(max\{f(n), g(n)\})$
Gilt auch für Ω und Θ.

2.6.3 Typische Laufzeitklassen

	Laufzeittyp	Beispiel
$\Theta(1)$	konstant	Löschen von erstem El. aus Liste
$\Theta(\log n)$	logarithmisch	Suchen in sortierter Liste
$\Theta(n)$	linear	Suchen in unsortierter Liste
$\Theta(n \log n)$	loglinear	Quicksort
$\Theta(n^2)$	quadratisch	Insertion Sort
$\Theta(n^3)$	kubisch	Matrix-Matrix-Multiplikation
$\Theta(2^n)$	exponentiell	Traveling Salesman

Beispiele:
- Array: elementAt $\mathcal{O}(1)$, insert $\mathcal{O}(n)$, erase $\mathcal{O}(n)$
- LinkedList: elementAt $\mathcal{O}(n)$, insert $\mathcal{O}(n)$, erase $\mathcal{O}(n)$
- Stack (Array/LinkedList): push, pop, top $\mathcal{O}(1)$
- Queue (LinkedList): push, pop, top $\mathcal{O}(1)$

2.6.4 Rekurrenzen

Substitutionsmethode: Lösung raten, einsetzen und mit Induktion beweisen.

Mastertheorem:

Gegeben: $\boxed{T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \text{ mit } a \geq 1, b > 1}$

$a \geq 1$: Anzahl der Unterprobleme innerhalb einer Rekursionstiefe (meist 1 oder 2)
$b > 1$: Faktor, um den jedes Unterproblem verkleinert ist.
$\epsilon > 0$: Eine beliebige Konstante.
$f(n)$: Aufwand der durch Division des Problems und Kombination der Teillösungen entsteht (nicht rekursiver Anteil, von $T(n)$ unabhängig).

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b(a)-\varepsilon}\right)$
   Dann ist $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log(n)^k\right)$
   Dann ist $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log(n)^{k+1}\right)$
3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$
   Dann ist $T(n) \in \Theta(f(n))$

2.7. Robustheit

Die Robustheit eines Algorithmus beschreibt die Fähigkeit auch bei ungünstigen Eingaben korrekt und effizient zu terminieren.

2.8. Korrektheit

Ein Algorithmus heißt korrekt, wenn er für jede Eingabeinstanz mit korrekter Ausgabe terminiert.
Qualitätskontrolle:

- Überprüfung mit geeigneten Eingabedaten die alle möglichen Fälle testen. Deckt einzelne Fehler auf, aber Fehlerfreiheit nicht garantiert.
- Formaler Beweis mit Hoare-Kalkül etc. meist sehr schwierig.

2.9. Rekursion

Eine Funktion ruft sich selbst auf bis ein Abbruchereignis eintritt. Danach werden die Rückgabewerte in umgekehrter Reihenfolge verkettet.
Beispiel Fakultät: $\text{fac}(n) = n \cdot \text{fac}(n-1), \text{fac}(1) = 1$

3. Datenstrukturen

Eine Datenstruktur ist eine **logische Anordnung** von Daten mit **Zugriffs- und Verwaltungsmöglichkeiten** der **repräsentierten Informationen** über Operationen.
Eine Datenstruktur besitzt:
- Menge von Werten
- Literale zum Bezeichnen von Werten
- Menge von Operationen auf die Werte

3.1. Stapel (Stack)

Basieren auf dem LIFO (last in first out) Prinzip.

`push(a)`	Legt ein neues Element a oben auf den Stack
`pop()`	Entfernt das oberste Element vom Stack
`top()`	Gibt das oberste Element vom Stack zurück.

Implementierung: entweder als Array (`top()` ist Zeiger auf letztes Element oder als Linked List (Jedes Element zeigt auf das Element darunter)

3.2. Warteschlange (Queue)

`*front`	zeigt auf das erste Element der Warteschlage
`*back`	zeigt auf das Ende der Warteschlange.
`enqueue(x)`	x am Ende der Warteschlange hinzufügen.
`dequeue()`	Erstes Element aus der Warteschlange nehmen und zurückgeben.

Implementierung z.B. als abgewandelte Linked List, d.h. Zeiger auf erstes und letztes Element werden gespeichert und jedes Element zeigt auf das nächste.
Priority Queue: Queue mit zugeordnetem Schlüssel, Entfernen von Element mit minimalem Schlüssel, Speicherung in fast vollständigem Binärbaum

3.3. Feld/Liste

`elementAt(i)`	Element in Position `i`
`insert(d, i)`	Element `d` an Position `i` einfügen
`erase(i)`	Element an Position `i` entfernen
`size()`	Gibt Größe/Länge des Feldes zurück

3.3.1 Vorteile und Nachteile der Implementierungen

DS	Vorteile	Nachteile
Array	direkter Zugriff mit $A[i]$ sequ. Durchlaufen einfach	Verlängern aufwendig Hinzufügen löschen aufwendig
Linked List	sequ. Durchlaufen einfach dynamische Länge Einfügen/Löschen einfach	Zugriff auf i-tes Element zusätzlicher Speicher für Ptr
Doubly Linked List	Durchlauf beide Richtungen Einfügen/Löschen einfacher	zusätzlicher Speicher für Ptr Referenzverw. aufwändig

3.4. Union Find

Verwaltet die Partitionierung einer Menge in disjunkte Teilmengen.

`makeset(x)`	Fügt Element hinzu
`find(x)`	Findet die Menge, die x enthält
`union(x, y)`	Die Funktion fügt die beiden Mengen zusammen

Implementierung: Als Linked List: Set = Liste. Jedes Element zeigt auf auf das nächste Element und zusätzlich auf das Set, in dem es enthalten ist. `find()` gibt einfach den Zeiger auf das enthaltende Set zurück. `union()` hängt die beiden Listen aneinander und überschreibt alle Zeiger auf eins der Sets. Auch Baumimplementierung ist möglich.

3.5. Augmentierung/Abänderung

1. Wähle eine zugrundeliegende Datenstruktur
2. Welche zusätzliche Information wird gebraucht?
3. Zeige: Diese Informationen können effizient geupdated werden wenn die Datenstruktur geändert wird
4. Entwickle die Operationen

4. Sortieralgorithmen

in-place: Nur konstanter Hilfsspeicher nötig. $S : \mathcal{O}(1)$
out-of-place: Zusätzlicher Speicher abhängig von n nötig. $S : \mathcal{O}(f(n))$

4.1. Insertion-Sort

1. Wähle beginnend bei 2 das nächste Element.
2. Solange es kleiner als seine Vorgänger ist, tausche es.

Im schlimmsten Fall $\frac{n}{2}(n-1)$

Best-case: $\mathcal{O}(n)$, Worst-case: $\mathcal{O}(n^2)$

```
INSERTIONSORT(A)
1 for i = 2 to Länge(A) do
2   key ← A[i]
3   j = i
4   while j > 1 and A[j-1] > key do
5     A[j] = A[j - 1]
6     j = j - 1
7   A[j] = key
```

4.2. Quicksort $\emptyset(n^2)$, avg: $\emptyset(n \log n)$

1. Wähle ein Pivotelement, welches die Liste in zwei Hälften teilt.
2. Sortiere die Liste so um, dass Elemente, die kleiner als das Pivotelement, in der einen Hälfte und größere in der anderen Hälfte sind. Suche dazu mit zwei Laufvariablen das Feld ab, bis jede eine unpassende Variable gefunden hat, dann tausche diese.
3. Wiederhole die Schritte 1. bis 3. mit beiden Teillisten, bis jede Teilliste sortiert ist.

```
QUICKSORT (A, p, r)
1 if p < r {
2   q = PARTITION (A, p, r)
3   QUICKSORT (A, p, q - 1)
4   QUICKSORT (A, q + 1, r)
5 }
```

```
PARTITION(A, p, r)
1 x = A[r] //Pivotelement
2 i = p-1
3 for j = p to r - 1 {
4   if A[j] ≤ x {
5     i = i+1
6     vertausche A[i] ↔ A[j]
7   }
8 }
9 vertausche A[i + 1] ↔ A[r]
10 return i + 1
```

4.3. Mergesort $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \emptyset(n) \Rightarrow \emptyset(n \log n)$

Feld in der Mitte rekursiv halbieren, bis Feldlänge $= 1$
Teilsortierte Felder zusammenfügen (Reißverschluss)

```
mergeSort(List* a)
1. if (a→length() <= 1)
2.   return a;
3. List* b = a→half();
4. a = mergeSort(a);
5. b = mergeSort(b);
6. return merge(a,b);

half()
1. Node* ptr = head;
2. for (0 bis length/2-2)
3.   ptr = ptr→next;
4. List* L = new List(ptr→next);
5. ptr→next = NULL;
6. return L;
```

elAt() entspricht elementAt()

```
merge(a, b)
1. if (a→empty())
2.   delete a; return b;
3. if (b→empty())
4.   delete b; return a;
5. List* h;
6. if a→elAt(0) < b→elAt(0)
7.   h = a; else h = b;
8. int d = h→removeFront();
9. List L = merge(a,b);
10. L→insertFront(d);
11. return L;
```

4.4. Laufzeiten und Speicherbedarf von Sortieralgorithmen

Die Laufzeit bzw. Taktzyklen in Abhängigkeit einer (meist großen) Eingabemenge n.

Name	Best	Avg	Worst	Zusätzlicher Speicher
Selection	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	in-place
Insertion	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	in-place
Bubblesort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	in-place
Merge	$\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$	←	←	$\mathcal{O}(n)$
Heap-Sort	$\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$	←	←	in-place
Quick	$\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$	←	$\mathcal{O}(n^2)$	in-place

in-place bedeutet zusätzlicher Speicher von $\mathcal{O}(1) = \text{const.}$
Vergleichende Sortieralgorithmen brauchen mindestens $\Omega(n \log_2 n)$ Vergleiche, egal wie clever sie sind!

4.5. Suchalgorithmen

sequentielles Suchen: Feld durchlaufen und vergleichen
Laufzeit: $\mathcal{O}(n)$, geeignet für statische kleine Mengen
binäres Suchen: Vorsortieren, Vergleich mit Mitte
Laufzeit: $\mathcal{O}(\log n)$, geeignet für statische große Mengen
binärer Suchbaum: für dynamische Mengen

5. Graphen

$G = (E, V)$, mit E: Kanten, V: Knoten
Adjazenzmatrix $(V \times V)$: 1 oder 0 für Verbindung oder Gewicht.
Bei ungerichtetem Graph symmetrisch, sinnvoll wenn Graph fast vollständig
Adjazenzliste: Für jeden Knoten alle Nachbarknoten angeben mit Startknoten s

Ungerichteter Graph: Richtung der Kante spielt keine Rolle
Gerichteter Graph: Richtung der Kante spielt eine Rolle, Schleifen möglich (u, u) mit $u \in V$
DAG: Directed acyclic graph.

5.1. Eigenschaften

v **adjazent** zu u: $(u, v) \in E$ bzw. $\{u, v\} \in E$ für $u, v \in V$
Inzident: Knoten v und Kante $e = (x, v)$ bzw. $e = \{x, v\}$ mit $v, x \in V$

Pfad: Folge von miteinander verbundenen Knoten
einfacher Pfad: alle Knoten sind paarweise verschieden
Zyklus: Pfad mit gleichem Anfangs- sowie Endknoten
Kreis: einfacher Pfad mit gleichem Anfangs- sowie Endknoten

5.1.1 Gerichteter Graph

Anzahl der eintretenden Kanten in v heißt Eingangsgrad: $indeg(v)$
Anzahl der austretenden Kanten aus v heißt Ausgangsgrad: $outdeg(v)$

stark zusammenhängend: jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten erreichbar
starke Zusammenhangskomponente: stark zusammenhängender Teilgraph

Gibt alle zusammenhängenden Komponenten eines gerichteten Graphen aus

```
dfsTarjan()
1. dfsCount = 1;
2. foreach v ∈ V
3.   v->state = initial;
4.   v->parent = NULL;
5. foreach s ∈ V
6.   if (s->state == initial)
7.     dfsVisitTarjan(s)
```

```
dfsVisitTarjan(v)
1. v->state = active;
2. v->num = dfsCount++;
3. $.push(v);
4. foreach (x ∈ N[v])
5.   if (x->state == initial)
6.     x->parent = v
7.     dfsVisitTarjan(x);
8. if (cut parent edge of v)
9.   repeat
10.    x = $.pop();
11.    // add x to current component
12.  until (v == x)
13.  // print current component
```

5.1.2 Ungerichteter Graph

Anzahl der Kanten an v heißt Grad: $deg(v)$

zusammenhängend: jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten erreichbar

5.2. Minimaler Spannbaum

Kruskal-Algorithmus $(\mathcal{O}(m \log n))$:
1. Sortiere alle Kanten aufsteigend nach Gewicht.
2. Wähle immer die nächst schwerere Kante, falls sie keine Schleife bildet.

```
PrimMST(s)
1. S = new PriorityQueue()
2. foreach v ∈ V
3.   v→key = ∞
4.   v→par = NULL;
5.   v→han = S→insert(v);
6. s→key = 0;
7. S→decreaseKey(s→han, 0);
8. while(!S→empty())
9.   v = S→extractMin();
10.  foreach x ∈ N[v]
11.    if (x→key > w(v,x))
12.      S→decreaseKey(x→han,
.          w(v,x));
13.      x→key = w(v,x);
14.      x→par = v;
```

5.3. Kürzeste Wege

SSSP (single source shortest path)
APSP (all pairs shortest path)

Satz: Teilpfade von kürzesten Pfaden sind auch kürzeste Pfade!

Dijkstra-Algorithmus: nur positive Kantengewichte!
Menge S: Knoten mit dem Gewicht ihres kürzesten Pfades von s
Menge Q: Min-Prioritätswarteschlange mit den ungeprüften Knoten.
Relaxationsschritt: Überprüfe ob ein Umweg über einen anderen Knoten kürzer ist.
Muss für jede Kante nur genau einmal überprüft werden.

```
BELLMANFORD(s)
Laufzeit: Ø(m · n)
1. foreach v ∈ V
2.   v→key = ∞;
3.   v→par = NULL;
4. s→key = 0;
5. for i = 1 to n-1
6.   foreach (x,y) ∈ E
7.     if (y→key > x→key + w(x,y))
8.       y→key = x→key + w(x,y);
9.       y→par = x;
10. foreach (x,y) ∈ E
11.   if (y→key > x→key + w(x,y))
12.     y→par = x;
```

```
APSP - Floyd Warshall
Laufzeit: Ø(m · n²)
1. foreach (u,v) ∈ V
2.   d[u,v] = ∞
3.   pred[u,v] = NULL;
4. foreach v ∈ V
5.   d[u,v] = 0;
6. foreach (u,v) ∈ E
7.   d[u,v] = w(u,v);
8.   pred[u,v] = u;
9. foreach v ∈ V
10.  for {u,w} ∈ V × V
11.    if (d[u,w] > d[u,v] + d[v,w])
12.      d(u,w) = d(u,v) + d(v,w);
13.      pred(u,w) = pred(v,w);
```

5.4. Bäume

... sind spezielle Graphen mit einer Wurzel, Zweigen und Blättern.
Er besitzt keine zyklischen Strukturen und ist zusammenhängend.

Begriffe:
Grad deg(v): Anzahl der Kinder (direkten Nachfolger)
Blatt: Knoten mit $deg(v) = 0$
Tiefe $d(v)$: Länge des Pfades von der Wurzel bis zum Knoten v.
Höhe $h(v)$: Längster Pfad von v zu einem Blatt.
Niveau: Knoten mit gleicher Tiefe.

5.5. Binärer Suchbaum (BSB)

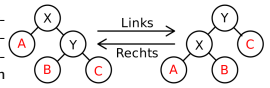
... ist ein geordneter Baum und $\forall v \in V : deg(v) \leq 2$
Ein Binärbaum ist vollständig, wenn $\forall v : deg(v) = 2 \ \vee \ deg(v) = 0$
Falls Höhe k, dann gilt: $2^{k+1} - 1$ Knoten und 2^k Blätter.

Bedeutung: Verdopplung der Eingabegröße, mit logarithmischer Vergrößerung der Struktur.
Binärbaum als verkettete Liste: Knoten x mit $links[x], rechts[x], parent[x], key[x]$

Balancierter Suchbaum: Höhe des Baumes ist immer in $\mathcal{O}(\log n)$

5.5.1 AVL-Baum

Betrag der Differenz der Höhe der Teilbäume für jeden Knoten ist ≤ 1.
AVL-Baum der Höhe h enthält mindestens $F_{h+2} - 1$ und höchstens $2^h - 1$ Knoten. Blattknoten sind Dummys ohne Daten. Jeder interne Knoten hat genau zwei Kinder Jeder Knoten speichert die Balance $v = h$(linkes Kind) $- h$(rechtes Kind)
Rotationen:
Nach links: Rechtes Kind wird Wurzel, Wurzel wird linkes Kind der neuen Wurzel, Altes linkes Kind der neuen Wurzel wird rechtes Kind der alten Wurzel.



Nach rechts: Umkehrung der Rotation nach links
Einfügen:
1. Knoten einfügen wie in normalen BSB
2. Vom Elternknoten des eingefügten Knotens aufsteigend die Balance aller Knoten bis zur Wurzel prüfen und bei Bedarf die AVL-Bedingung wiederherstellen
Löschen:
1. Knoten löschen wie im normalen BSB
2. Vom Elternknoten des überbrücken Knotens aufsteigend die Balance aller Knoten bis zur Wurzel prüfen und bei Bedarf die AVL-Bedingung wiederherstellen
Balance eines Knotens wiederherstellen:

```
1 Balance(v)
2 if (v->balance == -2)
3   if (v->right->balance ∈ {0, −1})
4     v = LeftRotate(v)
5   else
6     v->right = RightRotate(v->right)
7     v = LeftRotate(v) // Doppelrotation
8 else
9   if (v->left->balance ∈ {0, 1})
10    v = RightRotate(v)
11  else
12    v->left = LeftRotate(v->left)
13    v = RightRotate(v) // Doppelrotation
14 return v
```

5.5.2 Traversierung

Pre-order: Wurzel → linker Teilbaum → rechter Teilbaum
In-order: linker Teilbaum → Wurzel → rechter Teilbaum
Post-order: linker Teilbaum → rechter Teilbaum → Wurzel

5.6. Suchen in Graphen

Breitensuche(BFS) $\Theta(|V| + |E|)$
Von einem Startknoten S werden alle noch nicht durchsuchten Knoten mit Abstand k durchsucht. Der Suchradius breitet sich aus. Neue Knoten kommen in eine Queue an zu besuchenden Knoten.
Code ähnlich wie DFS, nur Stack durch Queue ersetzt.

Tiefensuche(DFS) $\Theta(|V| + |E|)$
Von einem Knoten werden alle Nachfolger rekursiv durchsucht. Mehrere Verzweigungsmöglichkeiten werden zwischengespeichert.
1. DFS(G): Suche im Graph G den nächsten unbesuchten Knoten a. Rufe DFS-VISIT(a) auf.
2. DFS-VISIT(a): Finde rekursiv alle Nachfolgerknoten von a und markiere sie als durchsucht.

5.7. Heap

Fast vollständiger Binärbaum mit Indizierung von links nach rechts und von oben nach unten. Wert eines Knotens ist immer kleiner bzw. größer als Werte der Kinder. Max-Heap: Wurzel hat den größten Wert, Min-Heap: Wurzel hat den kleinsten Wert.
Heap-Sort:
1. Erzeuge Max-Heap aus A
2. Wähle $|A|/2$ als Starknoten, da größter Knoten mit $deg > 1$
3. Betrachte Knoten i und seine beiden Kinder $2i$ und $2i + 1$

6. Hashtabellen

... sind Felder bei denen die Position eines Objekts durch eine Hashfunktion berechnet wird. Da es zu Kollisionen kommen kann, werden in den Feldern nur Verweise auf eine Liste gespeichert.
Schlüssel: wird von einem Schlüsselgenerator aus den Daten generiert.

6.1. Hashfunktion

... ordnet jedem Schlüssel aus einer großen Schlüsselmenge einen möglichst eindeutigen Wert aus einer kleineren Indexmenge zu. $h : key \rightarrow index$
Operatoren: Verkettete Hashtabelle: Jedes Feld entspricht einer Liste die mehrere kollidierte Daten speichern kann.
chained-hash-insert(T,x) : Füge x an den Kopf der Liste $T[h(x.schluessel)]$
chained-hash-search(T,k) : Suche Element k in der Liste $T[h(k)]$
chained-hash-delete(T,x) : entferne x aus der Liste $T[h(x.schluessel)]$

7. Fouriertransformation

Transformation eines periodischen Signals aus dem Zeit in den Frequenzbereich → Darstellung als Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen
Theorem:
Jede periodische Funktion $x(t)$ mit Periode T lässt sich als $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j \frac{2\pi}{T} t}$ schreiben.

7.1. Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Fouriertransformation ist Integration über alle komplexen Exponentialfunktionen ⇒ Näherung über Summe entlang des Einheitskreises (mit $n-ten$ Einheitswurzeln)
Geg.: $x_0, ..., x_{N-1}$ mit $x_k = x(\frac{T}{N}k)$. Berechne

$$\hat{x}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} lk} \quad \forall l \in \{0, ..., N-1\}$$

⇒ DFT ist Polynomauswertung, einfache Implementierung $\emptyset(n^2)$

7.2. Fast Fourier Transform (FFT)

Schnelle Polynomauswertung mit $N = 2^k$.
Input: Polynom P vom Grad N-1, Koeffizenten C
Output: $R[l]$ enthält $P[W_N^l]$

```
FFT(C, N, W_N)
1   if (N == 1) return C
2   C_odd = [C[1], C[3], ..., C[N − 1]]
3   C_even = [C[0], C[2], ..., C[N − 2]]
4   R_odd = FFT(C_odd, N/2, W_N^2)
5   R_even = FFT(C_even, N/2, W_N^2)
6   W = 1; // = W_N^0
7   for l = 0 to N/2 − 1
8       R[l] = R_even[l] + W * R_odd[l]
9       R[l + N/2] = R_even[l] − W * R_odd[l]
10      W *= W_N; // = W_N^l
11  return R;
```

Für DFT: $W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$ und Ergebnis durch N dividieren; $\emptyset(n \log n)$