Analysis 2

1 Nützliches Wissen $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\cdot\sin(x)$

1.1 Integrale:

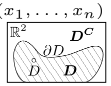
- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int g(x)\,\mathrm{d}x$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2\right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2\right\rvert$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

2 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ordnet jedem Vektor eines Vektorraums einen Wert zu.
$f\ :\ D\ \subseteq\ \mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n)^T\ \mapsto\ f(x_1,\dots,x_n)$
Teilmengen von $\mathbb{R}^n$: $D = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$
Offene Kugelmenge vom Radius r: $B_r(x_0)$
Topologische Begriffe für $D \subseteq \mathbb{R}^n$



- Das Komplement D^C von D: $D^C := \mathbb{R}^n \setminus D$
- innerer Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Inneren $\operatorname{int}(D)$, falls $\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\right\} \subseteq D$
- Die Menge D heißt offen, falls $D = \operatorname{int}(D)$
- Randpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Rands ∂D von D, falls $\forall\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x_0)\cap D \neq \emptyset\ \wedge\ B_\varepsilon(x_0)\cap D^C \neq \emptyset\ \Rightarrow\ \partial D = \partial D^C$
- Abschluss $\overline{D}$ von D: $\overline{D} = D \cup \partial D$
- Die Menge D ist abgeschlossen, falls $\partial D \subseteq D$
- beschränkt, falls $\exists\mu \in \mathbb{R}\quad \forall x \in D : \|x\| < \mu$
- kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Es gilt: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist D^C abgeschlossen.
$\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

2.1 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Eine Folge (a_n) ist eine Abbildung $(a_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^n, k \mapsto a_n$
Für $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bedeutet
Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow f a_n \to x_0) \to c\quad \forall a_n$
Stetigkeit: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
Satz von Max. und Min.: Ist $f(\boldsymbol{x})$ stetig und D kompakt, so $\exists x_{max}, x_{min} \in D\quad \forall x \in D : f(x_{\text{min}}) \le f(x) \le f(x_{\text{max}})$

2.2 Differentiation von Skalarfeldern - Gradient

$$\nabla f(x) = \operatorname{grad}(f(x)) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}f(x)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}f(x)\end{pmatrix}$$

Richtungsableitung: $\boxed{\partial_{\boldsymbol{v}} f(x) = \langle\nabla f(x), \boldsymbol{v}\rangle}$ $\boxed{\|\boldsymbol{v}\| = 1}$

Gradientenregeln: $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind partiell diffbar:
Linearität: $\nabla(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\nabla f(x) + \mu\nabla g(x)$
Produkt: $\nabla(f\cdot g)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$
Quotient: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)\right)$

Kettenregeln:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$h := g\circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$h := f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\boxed{\nabla h(x) = g'(f(x))\cdot\nabla f(x)}$	$\boxed{h'(x) = \nabla f(g(x))^T\cdot g'(x)}$

2.3 Differentialoperatoren $\qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0$

Operator	Definition
Gradient: $\operatorname{grad} f$ S-Feld $\to$ V-Feld	$\nabla f = \begin{pmatrix}\partial_1 f\\ \vdots\\ \partial_n f\end{pmatrix}$
Divergenz: $\operatorname{div} f$ V-Feld $\to$ S-Feld	$\nabla^\top\cdot f = \sum\limits_{i=0}^{n}\partial_i f_i$
Rotation: $\operatorname{rot} f$ V-Feld $\to$ V-Feld	$\nabla\times f = \begin{pmatrix}\partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x)\\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x)\\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x)\end{pmatrix}$
Laplace: $\Delta\ f$ S-Feld $\to$ S-Feld	$\underset{\nabla^\top\cdot(\nabla f)}{\nabla^2} = \sum\partial_i^2 f$

2.4 Höhere Partielle Ableitungen $\partial_j\partial_i f(x) = f_{x_i x_j}(x)$

$\mathcal{C}^m(D) = \{$m-mal stetig partiell diffbare Funktion auf D$\}$
Satz von Schwarz: $f \in \mathcal{C}^2(D) \Rightarrow f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x)\quad \forall i,j$

Mittelwertsatz ($f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, xy \in D\quad x,y \subseteq D$)
$\exists\xi \in \overline{x,y}$ mit $f(y) - f(x) = \nabla f^\top(\xi)(y - x)$
Es gilt $|f(y) - f(x)| \le c|y - x|$ mit $c = \max\|\nabla f(z)\|\quad z \in \overline{x,y}$

Hessematrix: $H_f(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix}\partial_{11}f(x) & \dots & \partial_{1n}f(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_{n1}f(x) & \dots & \partial_{nn}f(x)\end{bmatrix}$
Die Hessematrix ist symmetrisch, falls $f \in \mathcal{C}^2(D)$

$T_{2,f,\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) +$
$+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) +$ (Tangentialebene)
$+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\top\boldsymbol{H}_f(x_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ (Schmiegequadrik)

$T_{3,f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum\partial_i f(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum\partial_i\partial_j f(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{6}\sum\partial_i\partial_j\partial_k f(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)$

2.5 Jacobimatrix = Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{J}_f(x) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla f_1^\top\\ \vdots\\ \nabla f_m^\top\end{pmatrix}\quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Rechenregeln für die Jacobimatrix:
$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ part. diffbar:
Linearität: $\boldsymbol{J}_{\alpha f + \beta g} = \alpha J_f + \beta J_g$
Produkt: $\boldsymbol{J}_{f^\top g} = g^\top J_f + f^\top J_g\quad (\nabla f^\top g = J_f^\top g + J_g^\top f)$
Komposition: $\boldsymbol{J}_{g\circ f}(x) = \boldsymbol{J}_g\big(f(x)\big)\cdot\boldsymbol{J}_f(x)$
Umkehrfunktion: $\boldsymbol{J}_{f^{-1}}(f(x)) = \boldsymbol{J}_f(x)^{-1}$

3 Taylorpolynom für Skalarfelder

Ist $f\ :\ D\ \subset\ \mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}$ ein $(m+1)$-mal stetig partiell differenzierbar Skalarfeld, D offen und konvex, so gilt für alle $\boldsymbol{a} \in D$ und $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in D$ die Approximation durch das Taylorpolynom :

$$\boxed{T_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \dots + \frac{1}{m!}g^m(0)}$$

(Teilen durch $n!$ nicht vergessen!)

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist definiert als $g(t) = f(a + th)$
Die Ableitungen von g an der Stelle 0 können wie folgt bestimmt werden:

- $g(0) = f(\boldsymbol{a})$
- $g'(0) = \nabla f(\boldsymbol{a})^\top\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^n\partial_{x_i}f(\boldsymbol{a})h_i$
- $g''(0) = h^\top H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} = \sum_{i,j=1}^n\partial_{x_j}\partial_{x_i}f(\boldsymbol{a})h_i h_j$
- $g'''(0) = \sum_{i,j,k=1}^n\partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k}f(\boldsymbol{a})h_i h_j h_k$
- $\dots$

3.1 Das Restglied - die Taylorformel

$$R_{m+1}(a; a + h) = f(x) - T_m(a, a + h) = \frac{1}{m!}\int_0^1(1 - t)^m g^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Es gibt eine Zwischenstelle $\xi \in (0,1)$ mit:

$$R_{m+1}(a; a + h) = \frac{1}{m!}g^{(m+1)}(\xi)$$

4 Koordinatensysteme

Transformationsvektoren (Um einen Vektor in anderen Koordinaten darzustellen):

	$(x,y,z)^\top$	
Zylinder	$\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\\ r\cdot\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}$	$0 \le \varphi < 2\pi$
Kugel	$\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ r\cdot\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ r\cdot\cos(\theta)\end{pmatrix}$	$0 \le \varphi < 2\pi$ $0 \le \theta \le \pi$

Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}_z$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{f_{\text{kart}} = \boldsymbol{S}_z\cdot f_{\text{zyl}}\qquad f_{\text{zyl}} = \boldsymbol{S}_z^{-1}\cdot f_{\text{kart}}}$$

Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}_k$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{f_{\text{kart}} = \boldsymbol{S}_k\cdot f_{\text{kug}}\qquad f_{\text{kug}} = \boldsymbol{S}_k^{-1}\cdot f_{\text{kart}}}$$

Die Spalten entsprechen den orthonormalen Basisvektoren im jeweiligen Koordinatensystem.
$\Rightarrow$ Trafo-Matrizen orthogonal: $\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^\top$

5 Implizite Funktionen g

... werden als Nullstellenmenge einer expl. Funktion f angegeben.
$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\right\}$ mit $y = g(x) \in \mathbb{R}$

5.1 Satz über implizite Funktionen

Es gelte: $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\quad \to$ implizite Gleichung $f(x,y) = 0$
Bedinungen für die Existenz von $y = g(x)$:

- D ist offen
- $f \in C^1(D)$
- $\exists(x_0,y_0) \in D$ mit $f(x_0,y_0) = 0$
- $f_y(x_0,y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists I \subseteq \mathbb{D} : I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), J \subseteq \mathbb{R} : J = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ mit:

- $I\times J \subseteq D$ in $f_y(x,y) \neq 0\forall(x,y) \in I\times y$
- $\exists_1$ Funktion $g(x)$ mit $f(x, g(x)) = 0$ ("g wird implizit definiert")
- $g'(x) = \frac{-f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))} = \frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\quad \forall x \in I$

$g''(x) = -\frac{f_{xx}(x,g(x)) + 2f_{xy}(x,g(x))\cdot g'(x) + f_{yy}(x,g(x))\cdot(g'(x))^2}{f_y(x,g(x))}$

5.2 Satz über implizite Funktionen (allgemein)

$f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar,
$z_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{k+m}\ x_0 \in \mathbb{R}^k, y_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $f(z_0) = 0$
Falls $J_{f,y} = (\frac{\partial f_i(z_0)}{\partial x_j})_{i=1\dots mj=k+1\dots k+m}$ ist invertierbar ($\det J_{f,y}(z_0) \neq 0$)
Dann: $\exists$ offende Menge I in J mit $g : I \to J$ mit $f(x, g(x)) = 0$

5.3 Satz von der Umkehrabbildung

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n \in C^1(D).X_0 \in D$ mit $J_f(x_0)$ ist invertierbar.
Dann: $\exists U$ Umgebung von x_0 mit $f|_U : U \to f(U)$ ist bijektiv.
Die Umkehrfunktion $(f|_u)^{-1}$ ist stetig diffbar und es gilt:
$J(f|_U)^{-1}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}\forall x \in U$

6 Matrizen

Matrix $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ heißt nilpotent, falls $\exists A^r = 0$, mit $r \in \mathbb{R}$

6.1 Definitheit

Eine sym. Matrix $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

$$\begin{cases}\overset{\text{pos.}}{\text{neg.}}\ \text{definit falls alle EW}\lambda \gtrless 0\\ \overset{\text{pos.}}{\text{neg.}}\ \text{semi definit falls alle EW}\lambda \gtreqqless 0\\ \text{indefinit falls zwei EW}\lambda\text{unterschiedliche VZ haben}\end{cases}$$

Alle EW von $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ sind reel. $\lambda \in \mathbb{R}$ selbst wenn EV $v \in \mathbb{C}$!
Überprüfung mit $\det\boldsymbol{A} = \prod\lambda_i\qquad \mathrm{Sp}\boldsymbol{A} = \sum\lambda_i$

6.1.1 Hauptminorenkriterium

Postiv definit, falls Determinanten der Quadratischen Teilmatrizen positiv:
$$\begin{bmatrix} \underline{+}| & | & \\ - & \underline{+}| & \\ & & + \end{bmatrix}$$

Negativ definit, falls Determinanten der Quadratischen Teilmatrizen abwechselnd positiv und negativ:
$$\begin{bmatrix} \underline{-}| & | & \\ - & \underline{+}| & \\ & & - \end{bmatrix}$$

7 Extremwerte von Skalarfeldern

7.1 Extremewerte ohne Nebenbedingungen

- Suche Kandidaten (stationäre Punkte): $\{\boldsymbol{x}_0\} : \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$
- Falls $H_f(\boldsymbol{x}_0) \begin{cases} \text{neg. definit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0 = \text{lok. Max.} \\ \text{pos. definit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0 = \text{lok. Min.} \\ \text{indefinit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0 = \text{Sattelpunkt} \\ \text{semidefinit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0 = \text{keine Aussage} \end{cases}$
- globale Extrema $\rightarrow$ prüfe zusätzlich Rand

7.2 Extremwerte mit Nebenbedingung

Es seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

- NB $g(x) = 0$ ist nach einer Variable auflösbar.
  $\rightarrow$ Setze x_i in $f(x)$ ein $\rightarrow$ Bestimme EW
- Lagrange-Funktion
  Nebenbedingung $g(x) = 0$
  $\boxed{L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)}$
  - Regularitätsbedingung:
    $\nabla g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow$ zusätzlich als Kandidaten prüfen
  - Kandidaten:
    $\nabla L(x, \lambda) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
  - Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten
    $\rightarrow$Entscheidung über Extrema (auch Rand betrachten)

7.3 Lineare Ausgleichsrechnung (Polynom)

Man betrachtet eine Funktion $b = f(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n$ mit unbekannten Koeffizienten $x_0, x_1, \ldots x_n$. Es sind m Paare (b_i, t_i) gegeben und sucht den Vektor $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$, für den $r_i(x) = b_i - x_0 - x_1 t - \ldots - x_n t^n$ minimal sind.

<u>Aufgabe:</u> Minimiere $\sum\limits_{i=1}^{m} (b_i - x_0 - x_1 t - \ldots - x_n t^n)^2$

$\Leftrightarrow$ Minimiere $\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\|^2$ mit $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Man erhält Minimum durch Lösen der Normalengleichung

$\boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}}$

PS: Geht auch mit einer Summe aus anderen Funktionen als einem Polynom.

8 Kurvenintegral

8.1 Skalares Kurvenintegral

von Skalarfeld $f(\boldsymbol{x})$ entlang einer Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f \, \mathrm{d}s := \int\limits_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \mathrm{d}t}$$

Im Fall $n = 2$ gibt $\int\limits_{\gamma} f \, \mathrm{d}s$ den Flächeninhalt unter f entlang der Spur von $\boldsymbol{\gamma}$ an. $L(\boldsymbol{\gamma})$ ist das skalares Kurvenintegral über $f = 1$

Anmerkung: Ist $\varrho(x, y, z)$ die Masse- oder Ladungsdichte eines Drahtes so ist die Gesamtmasse M:

$\int\limits_{\gamma} f \, \mathrm{d}s = \int\limits_a^b \varrho(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \mathrm{d}t$

Der Schwerpunkt $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ist: $S_i = \frac{1}{M(\boldsymbol{\gamma})} \cdot \int\limits_{\gamma} x_i \varrho \, \mathrm{d}s$

8.2 Vektorielles Kurvenintegral

von einem Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ längs der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \int\limits_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \, \mathrm{d}t}$$

Für beide Integrale gilt:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g$
$\int\limits_{\gamma} \lambda f + \mu g \, \mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma} \lambda f \, \mathrm{d}s + \int\limits_{\gamma} \mu g \, \mathrm{d}s$
Ist $\gamma = \sum \gamma_i$ so gilt: $\int\limits_{\gamma} f \, \mathrm{d}s = \sum \int\limits_{\gamma_i} f \, \mathrm{d}s$

$\int\limits_{\gamma} f \, \mathrm{d}s \underset{\text{Bei VF}}{=} (-) \int\limits_{-\gamma} f \, \mathrm{d}s$

9 Bereichsintegrale

Satz von Fubini: Falls die Integralgrenzen von den Integranden unabhängig sind, gilt: $\int\limits_c^d \int\limits_a^b \ldots \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \ldots \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Krummlinige Koordinaten:
$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(\Phi(x)) d(x_1, x_2) = \int_a^b \int_c^d f(\Phi(x)) \det(J_\Phi) dx_1 dx_2$

Normalbereiche:

- Typ I: $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$
- Typ II: $\int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy$
- Ineinander umwandeln mit Hilfe von Skizze

9.1 Oberflächenintegrale

$\iint_\Phi f dO = \int_a^b \int_c^d f(\Phi(u, v)) ||\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)|| du dv$
Falls f Vektorfeld Skalarprodukt des Oberflächenelements statt Norm. Zur Flächenbestimmung: $f(x) = 1$

10 Integralsätze

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet mit geschlossenem Rand $\partial B = \sum \boldsymbol{\gamma}_i$ mit $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathcal{C}^1$ und pos. param. (gegen Uhrzeigersinn), dann gilt $\forall \mathcal{C}^1$ VF $\boldsymbol{v}$:

10.1 Divergenzsatz von Gauß für einfache $\partial V = \sum \phi_i$

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \oiint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \sum \iint_{\boldsymbol{\phi}_i} \boldsymbol{v} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{O}}$$

$\boldsymbol{\phi}_i$ muss pos. param. sein! ($\boldsymbol{n} = \phi_{iu} \times \phi_{iy}$ nach außen)

Für Fläche A: $\boxed{\iint_A \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}A = \oint_{\partial A} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))^\top \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s}$

$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \, \mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{n} = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^{-1} (\gamma_2, -\gamma_1)^\top$

10.1.1 Sektorformel zur Flächenberechnung

$\omega(t) = \partial B$

$$\boxed{F(B) = \frac{1}{2} \int_a^b \omega_1 \dot{\omega_2} - \omega_2 \dot{\omega_1} \, \mathrm{d}t}$$

10.2 Satz von Stokes für doppelpunktfreien $\partial \phi = \sum \gamma_i$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\phi}} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \oint_{\partial \boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}}$$

Rechte Hand Regel:
Flächennormale = Daumen
Umlaufrichtung = Finger

10.2.1 Satz von Green

$$\boxed{\iint_B \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \boldsymbol{v} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\boldsymbol{\gamma}_i} \boldsymbol{v} \cdot \, \mathrm{d}s}$$

Fläche muss **gegen den Uhrzeigersinn** umlaufen werden.
Falls ein Teil der Parametrisierung im Uhrzeigersinn verläuft, muss dieses Integral **subtrahiert** statt addiert werden.

10.2.2 Satz von Stokes für ebene Felder

$\boldsymbol{v} : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\iint_B \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{e_3} \, \mathrm{d}F = \oint_{\partial B} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

Sind f, g zwei SF, so: $\iiint_B f \Delta g + \nabla f \nabla g \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial B} f \nabla g \, \mathrm{d}\boldsymbol{O}$
für $f = 1$: $\iiint_B \Delta g \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial B} \nabla g \, \mathrm{d}\boldsymbol{O}$

10.3 Gradientenfeld und Potential

$\Rightarrow$ Kurve muss einfach zusammenhängend sein.
(Man muss die Kurve auf einen Punkt zusammenziehen könnnen)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ist ein Gradientenfeld, wenn $f(x) = \nabla \Phi(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{J_f(x) = J_f(x)^T}$ bzw. $\partial_{x_i} f_j(x) = \partial_{x_j} f_i(x)$

<u>Sonderfälle:</u>

- $n = 2$: $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$
- $n = 3$: $\operatorname{rot} v = 0 \Rightarrow$ Integrabilitätsbedinung ist erfüllt.

Potential $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und **einfach zusammenhängend** und $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld. Dann

- $\boldsymbol{f}$ ist Gradientenfeld mit $\boldsymbol{f} = \operatorname{grad} \phi$
- $\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \, \mathrm{d}t = \Phi(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \Phi(\boldsymbol{\gamma}(a))$ (wegunabhängig)
- $\oint_\gamma \boldsymbol{f} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \quad \forall C^1$-Kurven γ in D
- $\boldsymbol{f}$ konservativ auf $D \Rightarrow$ auch auf jeder Teilmenge von D
- **Stammfunktion:** Es gilt $\partial_i \Phi = v_i \rightarrow \Phi = \int v_i \, \mathrm{d}x_i + c(\boldsymbol{x_k}) \quad k \neq i$ (Aufstellen durch geschicktes Integrieren, Ableiten und Gleichsetzen)

Rezept: Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Fall $n = 3$: Ist $\boldsymbol{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ ein Gradientenfeld, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$, so findet man eine Stammfunktion f von $\boldsymbol{v}$ wie folgt:

1. Integration von v_1 nach x:
   $f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) \, \mathrm{d}x + g(y, z)$
2. Ableiten von f aus (1) nach y und Gleichsetzen mit v_2 liefert eine Gleichung für $g_y(y, z)$:
   $f_y(x, y, z) = v_2(x, y, z) \Rightarrow g_y(y, z)$
3. Integration von $g_y(y, z)$ nach y liefert:
   $g(y, z) = \int g_y(y, z) \, \mathrm{d}y + h(z)$
4. $g(y, z)$ in f aus (1) einsetzen
5. Ableiten von f aus (4) nach z und Gleichsetzen mit v_3 liefert eine Gleichung für $h_z(z)$:
   $f_z(x, y, z) = v_3(x, y, z) \Rightarrow h_z(z)$
6. Integration von $h_z(z)$ nach z mit der Konstanten $c = 0$ liefert $h(z)$:
   $h(z) = \int h_z(z) \, \mathrm{d}z$
7. Setze $h(z)$ aus (6) in f aus (4) ein und erhalte eine Stammfunktion f

11 Differentialgleichungen (DGL)

11.1 Existenz von Lösungen von DGL erster Ordnung

globale Lipschitz-Bedingung: $\exists L \geq 0 | \forall (t, u_1) \in D \wedge (t, u_2) \in D \, | f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L \, |u_1 - u_2|$
lokale Lipschitz-Bedingung: Es existiert zu jedem Punkt in D eine Umgebung, in der die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist.
Satz von Peano: f ist stetiges Skalarfeld auf dem Rechteck $D = [t_0, t_0 + \alpha] \times [u_0 - \beta, u_0 + \beta]$ mit $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow$ Lösung von $u(t)$ im Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$ mit $\delta > 0$
Es können im Allgemeinen jedoch mehrere Lösungen existieren (keine eindeutige Lösung)!

Satz von Picard-Lindelöf: f ist stetiges Skalarfeld auf $[t_0, t_0 + \alpha] \times [u_0 - \beta, u_0 + \beta]$ und es erfüllt die lokale Lipschitz-Bedingung $\Rightarrow$ Lösung von $u(t)$ im Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$ mit $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M}) > 0$ mit $M = \max_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$
Diese Lösung ist eindeutig.

11.2 Separierbare DGL

$\boxed{u'(t) = f(u) \cdot g(t)}$ mit $u(t_0) = u_0$

1. $\int \frac{1}{f(u)} \, \mathrm{d}u = \int g(t) \, \mathrm{d}t$
2. Nach u(t) auflösen
3. Anfangswert einsetzen und C bestimmen

11.3 Transformation von DGL in lineares DGL System

Jede DGL n-ter Ordnung lässt sich als DGL System mit n Gleichungen darstellen:

$\boxed{f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0}$

1. Bestimme $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
2. Erhalte folgende Gleichungen
   1) $f(t, \boldsymbol{x}(t), x_n'(t)) = 0$
   2) $x_1'(t) = x_2(t)$
   ...
   n) $x_{n-1}'(t) = x_n(t)$
3. Löse das System und lese die erste Zeile ab

11.4 Homogene lineare DGL Systeme

$\boxed{\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$

1. Bestimme n EW λ_i und deren EV $\boldsymbol{v}_i$ von $\boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} \boldsymbol{v}_i$
3. Bestimme c_i durch Anfangsbedingungen

Zu jedem komplexen EW λ einer reellen Matrix gibt es einen konjugiert komplexen EW $\overline{\lambda}$.
Umrechnung komplexer EW $\lambda = \lambda_{\text{re}} + \mathrm{i}\lambda_{im}$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{re}} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_{\text{im}}$ in reelle Darstellung:
$c_1 \mathrm{e}^{t\lambda_{\text{re}}} [\cos(t\lambda_{\text{im}}) \boldsymbol{v}_{\text{re}} - \sin(t\lambda_{\text{im}}) \boldsymbol{v}_{\text{im}}] + c_2 \mathrm{e}^{t\lambda_{\text{re}}} [\cos(t\lambda_{\text{im}}) \boldsymbol{v}_{\text{im}} + \sin(t\lambda_{\text{im}}) \boldsymbol{v}_{\text{re}}]$

Alternative

1. Bestimme EW λ_i und EV $\boldsymbol{v}_i$ von $\boldsymbol{A}$
2. Setze $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ und bestimme $\boldsymbol{S}^{-1}$ und $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$
3. Berechne $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \exp(\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1}) = \boldsymbol{S}\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{S}^{-1}$

$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \cdot e^{(x-x_0)\boldsymbol{A}} = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x} \cdot b_i$

11.4.1 Inhomogene DGL

$\boxed{u'(t) = f(t)u + g(t)}$

1. Löse homogene DGL für $g(t) = 0$ (siehe 11.2) $\Rightarrow u_{hom}(t)$
2. Partikuläre Lösung $u_p(t)$ durch **Variation der Konstanten**
   - $u(t) = c(t)\mathrm{e}^{F(t)}$
   - Ableiten: $u'(t) = c'(t)\mathrm{e}^{F(t)} + u \cdot f(t)$
   - Gleichsetzen: $g(t) = c'(t)\mathrm{e}^{F(t)}$
   - Bestimme $c(t)$ als Stammfunktion von $c'(t) = g(t)\mathrm{e}^{-F(t)}$
   - $u_p(t) = c(t)\mathrm{e}^{F(t)}$
3. Die Lösung der DGL ist $u(t) = u_p(t) + u_{hom}(t)$

11.5 Lineare DGL höherer Ordnung

$\boxed{a_n u^{(n)}(t) + \ldots + a_1 u'(t) + a_0 u = 0}$

1. Stelle das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ auf
2. Bestimme alle Lösungen von $p(\lambda)$
3. Gib n linear unabhängige Lösungen der DGL an:
   - Ist λ eine k-fache reelle NST:
     $u_1 = e^{\lambda t}, u_2 = te^{\lambda t}, \ldots, u_k = t^{k-1}e^{\lambda t}$
   - Ist λ eine k-fache konjugiert komplexe NST $\lambda = a + \mathrm{i}b$:
     $u_1 = e^{at}\cos(bt),\ u_2 = e^{at}\sin(bt)$
     bzw. $u_i = t^i e^{at}\sin(bt)$ und $u_{i+1} = t^i e^{at}\cos(bt)$
4. $u(t) = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t)$ mit $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ ist Lösung der DGL
5. Bestimme c_i durch Anfangsbedingungen

11.6 Lösen von allgemeinen DGL-Systemen

$\boxed{\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t)}$ mit $u(t_0) = u_0$

Lösung: $u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}(u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t'-t_0)\boldsymbol{A}} f(s)dt')$

11.7 Stabilität

Autonom, falls DGL nicht explizit von der freien Variable t abhängt: $u' = f(u)$
Gleichgewichtspunkt einer autonomen DGL, falls: $f(v) = 0$
Stabilität: EW der Jacobimatrix $\boldsymbol{J}_f$ berechnen

- $Re(\lambda_i) > 0 \to$ instabil
- $Re(\lambda_i) \leq 0 \to$ stabil
- $Re(\lambda_i) < 0 \to$ asymptotisch stabil

Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Thomas Wick
Dr. Dominik Meidner

Sommersemester 2015

Formelsammlung Koordinatentransformation

Es wird die Notation aus Vorlesung und Übung zur Analysis 2 (EI) verwendet.

Skalarfelder $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

kartesische Koordinaten im Punkt $(x,y,z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r,\varphi,z)^T$	Kugelkoordinaten im Punkt $(r,\theta,\varphi)^T$
f	$\tilde{f}$	$\tilde{f}$
$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta} f = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta} f = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}$
$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_x, e_y, e_z \,\}$	$\widehat{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\varphi, e_z \,\}$	$\widehat{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\theta, e_\varphi \,\}$

Vektorfelder $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

kartesische Koordinaten im Punkt $(x,y,z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r,\varphi,z)^T$	Kugelkoordinaten im Punkt $(r,\theta,\varphi)^T$
$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_x, e_y, e_z \,\}$	$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\varphi, e_z \,\}$	$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\theta, e_\varphi \,\}$
$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$	$\widetilde{\operatorname{div}}\, g = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{g}_3}{\partial z}$	$\widetilde{\operatorname{div}}\, g = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\hat{g}_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\hat{g}_2\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_3}{\partial \varphi}$
$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_x, e_y, e_z \,\}$	$\widehat{\operatorname{rot}}\, g = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_3}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\varphi, e_z \,\}$	$\widehat{\operatorname{rot}}\, g = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\hat{g}_3\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_3)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\theta, e_\varphi \,\}$

12 Anhang: Krummlinige Koordinaten

	Skalarfelder $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$		
Koordinatentyp	karthesische Koordinaten im Punkt $(x, y, z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r, \varphi, z)^T$	Kugelkoordinaten um Punkt $(r, \varphi, \theta)^T$
	f	$\tilde{f}$	$\tilde{f}$
Laplace-Operator	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{cos\theta}{r^2 sin\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}$
Gradient	$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\widehat{\nabla f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\widehat{\nabla f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
Basis	$\{e_x, e_y, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_\theta\}$
	Vektorfelder $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$		
Koordinatentyp	karthesische Koordinaten im Punkt $(x, y, z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r, \varphi, z)^T$	Kugelkoordinaten um Punkt $(r, \varphi, \theta)^T$
	$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$	$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}$	$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}$
Divergenz	$\mathrm{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$	$\widetilde{\mathrm{div}} g = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{g}_3}{\partial z}$	$\widetilde{\mathrm{div}} g = \frac{1}{r2}\frac{\partial (r^2\hat{g}_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial (\hat{g}_3 sin\theta)}{\partial \theta}$
Rotation	$\mathrm{rot} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\widehat{\mathrm{rot}} g = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_3}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$	$\widehat{\mathrm{rot}} g = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial (\hat{g}_2 sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_3}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_3)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_2)}{\partial r} \end{pmatrix}$
Basis	$\{e_x, e_y, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_\theta\}$

Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen:

Zylinderkoordinaten	$\Rightarrow$	kartesische Koordinanten	$x = r \cdot \cos\varphi$	$y = r \cdot \sin\varphi$	$z = z$
kartesische Koordinaten	$\Rightarrow$	Zylinderkoordinaten	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\varphi = arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = arctan\frac{y}{x}$	$z = z$
Kugelkoordinaten	$\Rightarrow$	kartesische Koordinaten	$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$	$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$	$z = r \cdot \cos\theta$
kartesische Koordinaten	$\Rightarrow$	Kugelkoordinaten	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; tan\varphi = \frac{y}{x}$	$cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
Kugelkoordinaten	$\Rightarrow$	Zylinderkoordinaten	$r_z = r_k \cdot \sin\theta$	$\varphi_z = \varphi_k$	$z_z = r_k \cdot \cos\theta$
Zylinderkoordinaten	$\Rightarrow$	Kugelkoordinaten	$r_k = \sqrt{r_z^2 + z_z^2}$	$\varphi_k = \varphi_z$	$\theta = arctan\frac{r_z}{z_z}$

Quelle: http://www.calc3d.com/help/gcoord.html

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \tag{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \tag{4}$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} \tag{5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \tag{6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{9}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{11}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x}, \ a \neq b \tag{14}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| \tag{15}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{16}$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a}dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}dx = 2\sqrt{x\pm a} \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}dx = -2\sqrt{a-x} \tag{19}$$

$$\int x\sqrt{x-a}dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \tag{20}$$

$$\int \sqrt{ax+b}dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{21}$$

$$\int (ax+b)^{3/2}dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{22}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x\pm a}}dx = \frac{2}{3}(x\mp 2a)\sqrt{x\pm a} \tag{23}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{24}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}}dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right] \tag{25}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{26}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2\ln\left|a\sqrt{x}+\sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{27}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}}\ln\left|a\sqrt{x}+\sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{28}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{29}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{30}$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{1}{3}\left(x^2\pm a^2\right)^{3/2} \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{32}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{33}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \sqrt{x^2\pm a^2} \tag{34}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{35}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{36}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{37}$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}}\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times \left(-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)\right) + 3(b^3-4abc)\ln\left|b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|\right) \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{39}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{40}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \tag{41}$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x\ln ax - x \tag{42}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 \tag{43}$$

$$\int \ln(ax+b)dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x, a \neq 0 \tag{44}$$

$$\int \ln(x^2+a^2)\,\mathrm{dx} = x\ln(x^2+a^2) + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} - 2x \tag{45}$$

$$\int \ln(x^2-a^2)\,\mathrm{dx} = x\ln(x^2-a^2) + a\ln\frac{x+a}{x-a} - 2x \tag{46}$$

$$\int \ln\left(ax^2+bx+c\right)dx = \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a}+x\right)\ln\left(ax^2+bx+c\right) \tag{47}$$

$$\int x\ln(ax+b)dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2-\frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b) \tag{48}$$

$$\int x\ln\left(a^2-b^2x^2\right)dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2-\frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2-b^2x^2\right) \tag{49}$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{50}$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax}dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\mathrm{erf}\left(i\sqrt{ax}\right), \quad \text{where } \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{51}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x \tag{52}$$

$$\int xe^{ax}dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \tag{53}$$

$$\int x^2e^x dx = \left(x^2-2x+2\right)e^x \tag{54}$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \tag{55}$$

$$\int x^3e^x dx = \left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x \tag{56}$$

$$\int x^ne^{ax}\,\mathrm{dx} = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\mathrm{dx} \tag{57}$$

$$\int x^ne^{ax}\,\mathrm{dx} = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n,-ax], \quad \text{where } \Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{dt} \tag{58}$$

$$\int e^{ax^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{59}$$

$$\int e^{-ax^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{60}$$

$$\int xe^{-ax^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{61}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\mathrm{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{62}$$

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \tag{63}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{64}$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \;\; {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{65}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{66}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{67}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{68}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{69}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{70}$$

$$\int \cos ax \sin bx dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{71}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{72}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \tag{73}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{74}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a}\cos^3 ax \tag{75}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{76}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{77}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax \tag{78}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax \tag{79}$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{80}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a}\ln\cos ax + \frac{1}{2a}\sec^2 ax \tag{81}$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{82}$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\tan ax \tag{83}$$

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| \tag{84}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \tag{85}$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2}\sec^2 x \tag{86}$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n}\sec^n x, n \neq 0 \tag{87}$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{88}$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\cot ax \tag{89}$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| \tag{90}$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n}\csc^n x, n \neq 0 \tag{91}$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln|\tan x| \tag{92}$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x \tag{93}$$

$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax \tag{94}$$

$$\int x^2\cos x dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x \tag{95}$$

$$\int x^2\cos ax dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax \tag{96}$$

$$\int x^n cosx dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n\Gamma(n+1, ix)\right] \tag{97}$$

$$\int x^n cosax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{98}$$

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x \tag{99}$$

$$\int x\sin ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{100}$$

$$\int x^2\sin x dx = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x \tag{101}$$

$$\int x^2\sin ax dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2} \tag{102}$$

$$\int x^n\sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n\Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{103}$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \tag{104}$$

$$\int e^{bx}\sin ax dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax) \tag{105}$$

$$\int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \tag{106}$$

$$\int e^{bx}\cos ax dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax) \tag{107}$$

$$\int xe^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) \tag{108}$$

$$\int xe^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x - \sin x + x\sin x) \tag{109}$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\sinh ax \tag{110}$$

$$\int e^{ax}\cosh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\cosh bx - b\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{111}$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax \tag{112}$$

$$\int e^{ax}\sinh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[-b\cosh bx + a\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{113}$$

$$\int e^{ax}\tanh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)}{}_2F_1\left[1+\dfrac{a}{2b}, 1, 2+\dfrac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] - \dfrac{1}{a}e^{ax}{}_2F_1\left[\dfrac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \tag{114}$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax \tag{115}$$

$$\int \cos ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[a\sin ax\cosh bx + b\cos ax\sinh bx\right] \tag{116}$$

$$\int \cos ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\cos ax\cosh bx + a\sin ax\sinh bx\right] \tag{117}$$

$$\int \sin ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[-a\cos ax\cosh bx + b\sin ax\sinh bx\right] \tag{118}$$

$$\int \sin ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\cosh bx\sin ax - a\cos ax\sinh bx\right] \tag{119}$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a}\left[-2ax + \sinh 2ax\right] \tag{120}$$

$$\int \sinh ax \cosh bx dx = \frac{1}{b^2-a^2}\left[b\cosh bx\sinh ax - a\cosh ax\sinh bx\right] \tag{121}$$