

# Festkörper-Halbleiter-Bauelementephysik

# 1. Mathematische Grundlagen

<b>1.1. Sinus, Cosinus</b> $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$								
$x$ $\varphi$	0°	π/6 30°	π/4 45°	π/3 60°	$\frac{1}{2}\pi$ $90^{\circ}$	π 180°	$1\frac{1}{2}\pi$ $270^{\circ}$	$2\pi$ $360^{\circ}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-1$ $0$ $\mp \infty$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	±∞	0	∓∞	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x \cos(x)  \mathrm{d}x = \cos(x) + x \sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x \sin(x)  \mathrm{d}x = \sin(x) - x \cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\int \sin^2(x)  \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left( x - \sin(x) \cos(x) \right)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)  \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left( x + \sin(x) \cos(x) \right)$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$
$\sin(x \pm y) = \sin x  \cos y$	$\pm \sin y \cos x$
$\cos(x \pm y) = \cos x  \cos y$	$y \mp \sin x \sin y$

# 1.2. Integrale $\int e^x dx = e^x = (e^x)'$

F(x)	f(x)	f'(x)
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	$x^q$	$qx^{q-1}$
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$a^x$	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$

$$\int e^{at} \sin(bt) dt = e^{at} \frac{a \sin(bt) + b \cos(b)}{a^2 + b^2}$$

### 1.3. Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\ln x \le x - 1$
$\ln(x^a) = a \ln(x)$	$\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$	$\log(1) = 0$

### 2. Einheiten

SI-Präfix	е				
Symbol	Vorsatz	Faktor	Symbol	Vorsatz	Faktor
Y	Yotta	$10^{24}$	d	Dezi	$10^{-1}$
Z	Zetta	$10^{21}$	с	Zenti	$10^{-2}$
E	Exa	$10^{18}$	m	Milli	$10^{-3}$
Р	Peta	$10^{15}$	$\mu$	Mikro	$10^{-6}$
Т	Tera	$10^{12}$	n	Nano	$10^{-9}$
G	Giga	$10^{9}$	р	Piko	$10^{-12}$
М	Mega	$10^{6}$	f	Femto	$10^{-15}$
k	Kilo	$10^{3}$	a	Atto	$10^{-18}$
h	Hekto	$10^{2}$	z	Zepto	$10^{-21}$
da	Deka	$10^{1}$	у	Yokto	$10^{-24}$

#### 3. Aufbau der Materie

Planck'sches Postulat In der Quantenmechanik kann der harmonische Oszillator mit der Schwingungsfrequenz f nur diskrete Energiewerte an-

$$E_n = hf\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Heisenberg'sche Unschärferelation Ort und Impuls (bzw. Energie und Zeit) können nicht gleichzeitig scharf definiert werden.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$
 und  $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$ 

Welle-Teilchen-Dualismus Materie kann sowohl Eigenschaften von Teilchen als auch von Wellen haben

#### 3.1. Quanten

Hierbei wird die Materie als Menge von Teilchen betrachtet. Sie haben eine Energie E und einen Impuls p sowie eine Masse m.

Das Photon Für das Photon gilt:  $E_{\mathsf{ph}} = f \cdot h = \hbar \cdot \omega = \frac{\hbar c}{\lambda} = m_{\mathsf{ph}} c^2$  $p_{\rm ph} = m_{\rm ph} \cdot c = \frac{h}{\lambda}$ 

#### 3.2. Materiewellen

## 3.2.1 Allgemeine Wellenfunktion $\Psi(\underline{r},t) = C \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})}$

Im eindimensionalen Fall:  $\Psi(x,t) = C \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}$ 

Größe	Beziehung
Energie	$E = \frac{1}{2}mv^2 = \hbar\omega$ $\lambda = \frac{h}{p}$
De-Broglie-Wellenlänge	
Impuls	$\begin{array}{l} \underline{p} = m\underline{v} = \hbar\underline{k} \\ \underline{\omega} = 2\pi f = \frac{\hbar}{2m}k^2 \\ v_{\rm ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v_{\rm Teilche}}{2} \\ k = \frac{2\pi}{2} \end{array}$
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi f = \frac{\hbar}{2m}k^2$
Phasengeschwindigkeit	$v_{\rm ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v_{\rm Teilche}}{2}$
Wellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

# 3.2.2 Das Wellenpaket

Der bewegten Korpuskel wird eine im Raum begrenzte Wellenfunktion zugeordnet, die sich aus der Überlagerung einzelner Wellen zu einem Wellenpaket ergibt. Ein Teilchenstrom entspricht der Folge einzelner Wellen-

pakete. 
$$\Psi(\underline{r},t) = \int\limits_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} C(k) \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}\underline{r})} \, \mathrm{d}k$$

Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets:

$$v_{\rm gr}=\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}k}=\frac{\hbar k}{m}=\frac{p}{m}=v_{\rm Teilchen}$$

Phasengeschwindigkeit  $v_{\rm ph} = \frac{\omega}{k}$ 

#### 3.3. Die Schrödingergleichung

Beschreibt die Dynamik der quantenmech. Zustände eines Systems.

# Allgemeine Schrödingergleichung:

$$E = E_{\mathsf{kin}} + V_{\mathsf{pot}} = \frac{p^2}{2m} + V \qquad \mathsf{mit} \ p = \mathrm{i}\hbar \nabla \Psi$$
 
$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\underline{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \ \Delta \ \Psi(\underline{\boldsymbol{r}},t) + V(\underline{\boldsymbol{r}},t) \cdot \Psi(\underline{\boldsymbol{r}},t)$$

#### Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\underline{\boldsymbol{r}}) = (E - V)\Psi(\underline{\boldsymbol{r}})$$

**Herleitung** Durch den Separationsansatz  $\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi(\boldsymbol{r})\Phi(t)$  lässt sich die Zeitabhängigkeit abtrennen.

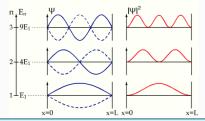
Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $dw(\underline{r}) = \Psi^*(\underline{r},t) \cdot \Psi(\underline{r},t) \cdot d\tau$ 

Normierungsbedingung: 
$$\int\limits_{\text{Volumen}} \Psi^* \Psi \, \mathrm{d}r' = 1 \qquad \Rightarrow C_i = \sqrt{\frac{2}{L_i}}$$

## Herleitung der Schrödingergleichung

- Aus De-Broglie-Beziehungen:  $\omega=\frac{\hbar}{2m}k^2\longrightarrow\hbar\omega=\frac{\hbar^2}{2m}k^2$  Multipliziere beide Seiten mit  $\Psi$  und ersetze  $\omega\to\frac{\partial}{\partial t}$  sowie
- $\begin{array}{c} k^2 \to {\rm div \, grad} \quad {\rm es \, folgt:} -{\rm i}\hbar \, \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\underline{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \underline{\Delta} \Psi(\underline{\boldsymbol{r}},t) \\ \bullet \ \ {\rm In \, einem \, Kraftfeld} \ \underline{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) \, {\rm mit} \ \underline{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) = \, {\rm grad} \, V(\underline{\boldsymbol{r}},t) \, {\rm gilt:} \end{array}$
- $E=\frac{p^2}{2m}+V({\bf r},t)\qquad {\rm mit}\ p={\rm i}\hbar\nabla\Psi$  Die allg. Schrödingergleichung folgt aus Multiplikation mit  $\Psi$  und den Operatoren  $E o -\mathrm{i}\hbar \, rac{\partial}{\partial t} \,\, \mathrm{und} \,\, rac{p^2}{2m} o -rac{\hbar^2}{2m} \,\, \Delta$

### 3.4. Potentialtopf



#### Schrödingergleichung (im eindimensionalen Potentialtopf)

- Seperation: Ist das Potential zeitunabhängig? Wenn ja  $\Rightarrow v(r, t) \rightarrow$
- Bereichseinteilung:

$$egin{aligned} x < a \ a < x < b \ (\mbox{im Topf}) \ b < x \end{aligned}$$

- Aufstellen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung Ansatz:  $\Psi(x) = Ae^{\mathrm{j}kx} + Be^{-\mathrm{j}kx}$  oder  $A\sin(kx) + B\cos(kx)$
- ullet Bestimme Koeffizienten A,B und k über die Randbedingungen
- Amplitude aus der Normierungsbedingung bestimmen Einsetzen und Umformen  $E=\frac{k^2\pi^2}{2ma^2}n^2$  mit  $k=\frac{\pi}{a}n$

# $\delta$ -Dim., unendl., zeitinvar. Potentialtopf: $i = \{x, y, ..., \delta\}$

Lösung der DGL: 
$$\Psi(\underline{\pmb{r}}) = \sqrt{\frac{2^{\delta}}{\prod L_i}} \prod_{i=1}^{\delta} \sin(k_i \cdot r_i)$$

Energie: 
$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \sum k_i^2$$

# für $\delta = 1$ (eindimensionaler PT)

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} = E_1 n^2$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$E_n m l = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n^2 + m^2 + l^2)$$

## 3.5. Moleküle - Bindungstypen

Bindung	Eigenschaften	Energie
Ionisch	Elektronaustausch, stark, starr	$3.4\mathrm{eV}$
Kovalent	Gemeinsame Elektronen	
Metallisch	"Elektronensee"	
Dipol	Coulombkräfte von Partialladungen	

#### 3.5.1 Ionische Bindung

Voraussetzung: unterschiedliche Atome,leicht zu ionisieren

#### Ionisierung

- Anion und Kation ziehen sich an bis auf einen Abstand der Ionenmittelpunkte:  $r_0 = (r_{V-} + r_{V+})$
- Dabei wird die Energie frei:  $E_{\rm el}=\int\limits_{-\infty}^{r_0} \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,{\rm d}r=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$
- Coulombanziehung nicht gerichtet → positive und negative Ionen lagern so dicht aneinander wie möglich → Ionenkristall (nicht verformbar)
- Elektronen sind an den Ionen lokalisiert → keine freien Elektronen vorhanden → Isolator
- ullet Differenz der Elektronegativität meist  $\Delta E > 1.7$
- Gesamtbilanz der der Ionischen Bindung

$$\begin{array}{l} \mathbf{X} + E_X \rightarrow \mathbf{X}^+ + \mathbf{e}^- \\ \mathbf{Y} + \mathbf{e}^- \rightarrow \mathbf{Y}^- + E_Y \\ \mathbf{X}^+ + \mathbf{Y}^- \rightarrow \mathbf{X} \mathbf{Y} + E_{\mathsf{e}} \\ E_{\mathsf{ges}} = -E_X + E_Y + E_{\mathsf{e}} \end{array}$$

#### 3.5.2 Kovalente Bindung

Spinabsättigung der äußeren Elektronenschale durch gemeinsame Elek-

- Valenz-Elektronen zwischen den Atomen lokalisiert
- keine Kugelsymmetrische Ladungsverteilung mehr im Atom
- Die Anzahl der Elektronen mit umgepaartem Spin zeigt an wie vielfache kovalente Bindungen eingegangen werden können
- treten bei und zwischen Elementen der IV. bis VII. Hauptgruppe (+H) auf
- gerichtete Bindungen → mögliche Kristallstrukturen werden eingeschränkt
- ullet Differenz der Elektronegativität meist  $\Delta E < 1.7$
- kovalente gebundene Kristalle sind üblicherweise schlechte Leiter

#### 3.5.3 Metallische Bindung

Sonderfall der kovalenten Bindung, bei der die Valenz-Elektronen nicht lokalisiert sind

- Vorwiegend Elemente mit nur wenigen Außenelektronen
- freie Elektronen → hohe elektrische Leitfähigkeit, hohe Wärmeleitfähigkeit
- Bindung nicht gerichtet → hohe Packungsdichte
- Bindungen mit gleich- und ungleichartigen Metallen eingegangen wer-
- Metallische Bindung ist schwächer als die ionische oder kovalente
- Bindungsstärke hängt von der Zahl der Leitungselektronen ab

#### 3.5.4 Dipolbindung

- zwischen Molekülen mit permanentem Dipolmoment → Moleküle mit positiver und negativer Ladung
- Dipole ordnen sich im Dipolfeld der Nachbaratome so an, dass möglichst geringe Abstand und durch die Coulombkräfte gebunden

#### 3.5.5 Van-der-Waals-Bindung:

- Atome/Moleküle haben kein permanentes Dipolmoment
- Bindung zwischen Dipolen durch statistische Fluktuationen der Ladungsschwerpunkte.
- Sehr schwache Bindung

## 3.5.6 Wasserstoffbrückenbindung

Vorraussetzung: Äußere Schale > vier Elektronen, zwischen 2 Atomen.

- Bindungen über Wasserstoffbrücken der Form A-H-A
- Das H-Atom geht eine kovalente Bindung mit Atom der Sorte A ein und gibt sein Elektron ab. Das Proton bleibt fest an Reaktionspartner gebunden und bindet nun zusätzlich das andere negative Atom
- Bindungsenergie ist gering (0.1 eV)

# 3.6. Das Periodensystem (Siehe Seite 4)

 $n = 1, 2, \dots (= K, L, \dots - Schale)$ Hauptquantenzahl  $l = 0, \ldots, n-1$  (= s,p,d,f - Zuständen) Nebenguantenzahl Magnetische Quantenzahl  $m=-l,-l+1,\ldots,l-1,l$ Spinquantenzahl

Zu jedem Wert n gehören  $n^2$  Zustände durch Variation von l und m. Außerdem ist jeweils ein Spin  $s=\pm\frac{1}{2}$  möglich.

Entartungsgrad: Kombination der QZ mit gleicher Energie:  $2n^2$ 

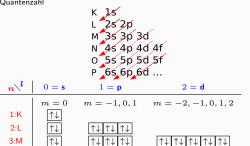
### 3.7. Atome - Hundsche Regeln

Legen fest, nach welchem Schema jedes einzelne Orbital eines Atoms mit Elektronen besetzt wird

- 1. Die Spins werden möglichst parallel ausgerichtet:  $|\sum s_i| = \max$
- 2. Gesamtdrehinmpuls  $|L| = |\sum m_i| = \max$
- 3. Falls die Schale weniger als halbvoll ist:
  - · Bahndrehimpuls und Spin antiparallel
  - Gesamtdrehimpuls J: |J| = ||L| |S||
  - Falls die Schale mehr als halbvoll ist:
  - · Bahndrehimpuls und Spin parallel
  - Gesamtdrehimpuls J: |J| = ||L| + |S||

Merke: Volle Schalen liefern keinen Beitrag zu  $S,\,L$  und J

Pauli-Prinzip: Alle Elektronen unterscheiden sich in mindestens einer Quantenzahl



# 4. Mechanische Eigenschaften von Festkörpern

Gitterkonstante ( $\approx 10^{-10} \text{ m}$ ) NAnzahl Atome in EZ (Flächenatome:  $\frac{1}{2}$ , Kantenatome:  $\frac{1}{4}$ , Eckatome:  $\frac{1}{9}$ )

Dichte:  $\rho=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}=\frac{mP}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{mN}{a_0^3}=\frac{1}{V}\frac{N}{N_A}A_r$ Packungsdichte:  $P = \frac{\text{Volumen (Atome)}}{\text{Volumen (Einheitszelle)}} = \frac{N\frac{4}{3}r^3\pi}{V_{EZ}}$ 

#### 4.2. Kristallstrukturen

SC/PK BCC/KRZ simple cubic body-centered cubic





KZ = 6HCP (dichteste)

Tetraeder

 $P = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} \approx 0.34$   $P = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} \approx 0.34$  $P = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$  $V_{\text{hex}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h$ KZ = 6, 12  $V_{\text{Tetra}} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 

KZ = 8

KZ = 4

 $V_{\mathsf{Diamant}} = a_0^3$ 

face-centered cubic

 $P = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \approx 0.74$ 

 $r_{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{4} a_0$ 

KZ = 12

Diamant

KZ = 4

KZ: Koordinationszahl (Zahl der nächsten Nachbarn) Polymorphie: Ein Stoff hat mehrere Kristallgitterstrukturen.

#### 4.3. Elastische Verformung

				Dehnung	Scherdeformation
	$\varepsilon_{xx}$	$\varepsilon_{xy}$	$\varepsilon_{xz}$	$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$	$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$
$\widetilde{\epsilon} =$	$\varepsilon_{yx}$	$\varepsilon_{yy}$	$\varepsilon_{yz}$	$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$	$\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$
	$\varepsilon_{zx}$	$\varepsilon_{zy}$	$\varepsilon_{zz}$	$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$	$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

### Verallgemeinertes Hooksches Gesetz



Mikroskopische Ebene: Bindungskräfte zwischen Atomen

 $\text{Potential } V(r) = - \quad \frac{\alpha}{r^n} \quad + \quad \frac{\beta}{r^m} \qquad m > n$ 

anziehend abstoßend Zw. atomare Kraft  $F(r)=-rac{dV(r)}{dr}$  im GG-Fall  $F(r=r_0)=0$ 

Akustische Wellen in Festkörpern:  $v_{||} = \sqrt{\frac{c}{a}}$   $v_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ Gitterschwingungen / Phononen: (Für kleine k,  $\omega_1$  optisch,  $\omega_2$  akustisch)  $\omega_1 = \sqrt{2c(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2})}$   $\omega_2 = ka\sqrt{\frac{2c}{M_1 + M_2}}$ 

# 5. Thermische Eigenschaften von Festkörpern

 $\frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{\mu V}{W}}$ Druck [p]Seebeck-Ko. [S]Wärmeleitf.  $[\lambda]$ Wärmemenge [Q]J = W sWärmekapazität [C]Wärmeleitwert [G]Innere Energie [U]spez. Wärmekapazität  $[c_{\mathsf{m}}]$ 

Wärmekapazität  $C = \frac{\partial U}{\partial T} = cn = c_m \cdot m = c_m \rho V$  Innere Energie  $U = 3Nk_{\rm B}T$  für 1 mol:  $\Delta U = \Delta T c_m$  Spezifische Wärme für hohe Temp.  $c_m = 3R = 24.9 \ \frac{\rm J}{\rm mol~K}$ FCC/KFZ (dichteste) Wärmemenge Q=CT Wärmestrom  $\dot{Q}=-\lambda \operatorname{grad}(T)A=C\dot{T}$ Wärmestromdichte  $w=\frac{\dot{Q}}{A}=\frac{\Delta Q}{A\Delta t}=nvc\Delta T=-\lambda\operatorname{grad}(T)$ Phononen:  $\lambda_{\rm ph} = \frac{1}{3} C_{\rm ph} v_{\rm Schall} l_{\rm ph}$  Elektronen  $\lambda_{\rm el} = \frac{1}{3} C_{\rm el} v_{\rm el} l_{\rm el}$  Mittlere freie Weglänge  $l = v \tau$   $C_{\rm el} \approx 6 n k_B^2 \frac{T}{E_E}$ 

## 5.1. Freies Elektronengas

Zustandsdichte 3D:  $D(E) = \frac{1}{V} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}E} = \sqrt[2]{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^3} \frac{\sqrt{E}}{2\pi^2}$ 2D:  $D = \frac{m^*}{\pi \hbar^2 a}$  1D:  $D = \frac{\sqrt{2m^*}}{\pi \hbar a^2} \frac{1}{\sqrt{E - E_{\pi,i} - E_{\pi,i}}}$ 

Elektronendichte:  $n = \int_0^\infty D(E) f(T, E) dE \stackrel{T=0}{=} \int_0^{E_F} D(E) dE$ bei 0K:  $n = (\frac{2m}{\hbar})^{\frac{3}{2}} \frac{2}{2} E_F^{\frac{3}{2}} = E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$ 

Effektive Masse:

 $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\mathrm{d}^2 E(k)}{\mathrm{d}k^2} \qquad \lambda_{\mathsf{el}} = \frac{1}{3} C_{\mathsf{el}} v_{\mathsf{el}} l_{\mathsf{el}}$ 

Wärmeleitfähigkeit

Energieeigenwerte:  $E_{nml} = \frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} (n^2 + m^2 + l^2)$ 

Wiedemann-Franzsches Gesetz:  $\frac{\Delta}{\sigma_0 T} = L := \frac{\pi^2 k_B^2}{3 e^2} = 2.44 \times 10^{-8} \; \mathrm{V^2/K^2} \quad (L: \mathsf{Lorentzzahl})$ 

**5.2. Energiebänder** Bestimmung einer Relation zwischen Wellenzahl k und Energie E durch Schrödingergleichung und periodische Randbedingungen

$$\cos(ka) = \underbrace{\cos(ga) + \frac{m\beta a}{\hbar^2} \frac{\sin(ga)}{ga}}_{-1 \leq \dots \leq 1} \text{ mit } g = \underbrace{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}_{}$$

Nur bestimme Bereiche/Werte für ga sind erlaubt  $\Rightarrow$  Energiebänder Physikalische Deutung: stehende Welle, keine fortschreitende Ausbreitung in eine Raumrichtung

5.3. Reziproker Raum (k-Raum)

 $\underline{a}_1^* = 2\pi \frac{\underline{a}_2 \times \underline{a}_3}{\underline{a}_1(\underline{a}_2 \times \underline{a}_3)} \quad \underline{a}_2^* = 2\pi \frac{\underline{a}_3 \times \underline{a}_1}{\underline{a}_1(\underline{a}_2 \times \underline{a}_3)} \quad \underline{a}_3^* =$ Reziproker Gittervektor:  $\underline{G} = h\underline{a}_1^* + k\underline{a}_2^* + l\underline{a}_3^*$  mit  $h,k,l \in \mathbb{N}$ 

Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind invariant ggü. Verschiebung um

Brillouinzone: Einheitszelle des reziproken Gitters (1. Zone enthält gesamte Information)

Metalle, HL, Isolatoren: je nach Füllung der erlaubten Bänder bzw. nach dem Bandabstand

# 6. Elektrische Eigenschaften von Festkörpern

Spez. Wid.  $[
ho] = \Omega\,\mathrm{m}$  Leitfäh.  $[\sigma] = \frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}$   $[\mu] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V}\,\mathrm{s}}$ 

## 6.1. Ladungstransport

Je kleiner  $a_0$ , desto flacher die Potentialbarrieren zwischen den Atomen, desto breiter werden die Energiebänder.

Freies Teilchen Eingesperrtes Teilchen  $\frac{1}{\hbar} \frac{\mathrm{d}E(k)}{\mathrm{d}k}$  $v_{\mathsf{ph}}$ 

#### 6.2. Drude-Modell

 $j = -en\underline{v}_d = \sigma\underline{E} = \mu\underline{E}$  $\overline{\sigma}=ne\mu$  mit Beweglichkeit  $\mu=\frac{e au}{m}$  $R = \rho \frac{l}{\Lambda} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\Lambda}$ 

#### 6.3. Halleffekt

 $m\dot{v} = -e(\epsilon + v_d \times B) - m\frac{v_d}{a}$ Zyklotronfrequenz:  $\omega_c = \frac{eB}{m}$ Hallkonstante:  $R_H = \frac{\epsilon_y}{i_x B} = -\frac{1}{ne}$ Hallspannung:  $U_H = R_H B j_x b = R_H B \frac{I_x}{J}$ 

Elektronen verbinden sich zu Cooper-Paaren

Piezoelektrizität: Mechanische Verformung erzeugt elektrische Spannung

### 7. Thermoelektrische Effekte

 $\frac{\frac{S}{m}}{W} \times \frac{W}{W} \times \frac{W}{K}$ elektrische Leitfähigkeit Wärmeleitfähigkeit  $[\lambda]$ Seebeck-Koeffizient [S]

Durch thermische Teilchenbewegung entsteht eine Diffusionsstromdichte:

$$j_{\mathsf{diff}} = -e(n_1 v_{1x} - n_2 v_{2x}) = e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} (D_n \cdot n) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Diffusionskoeffizient  $D_n = v_x l_x = v_x^2 \tau$ , Fermigeschw.  $v_x^2 = \frac{1}{3} v_{\rm F}^2$ Effektive Teilchengeschw.  $\frac{1}{2}m^*v^2 = \frac{1}{2}k_{\rm B}T$   $n_{\rm eff} = D(E_F)\cdot 2k_BT$ Seebeck Koeffizient:

 $S := -\frac{e}{\sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} (D_n \cdot n) \qquad \Delta U = S \cdot \Delta T$ 

## 7.1. Peltier-Effekt

Aufgeprägter Strom wird benutzt, um Wärme zu transportieren Wärmestromdichte  $w = \Pi \cdot j$ Peltierkonstante:  $\Pi = S \cdot T$ Gütezahl  $Z = |\Delta S|^2 \cdot \frac{\sigma}{2}$  mit Gütefaktor  $\Delta S = \Pi_1 - \Pi_2$ 

#### 7.2. Supraleitung

Starke Abnahme des Widerstands um Faktor  $< 10^{-14}$  bei einer Sprung-

Kritisches Magnetisches Feld:  $H_c = H_0(1 - (\frac{T}{T_{cc}})^2)$ 

Londongl.  $\underline{E} = \lambda_{\perp} \underline{\underline{j}}_{s}$   $\operatorname{rot} \underline{\underline{j}}_{s} = -\frac{1}{\lambda_{\perp}} \underline{\underline{B}}_{s}$ 

Londonsche Eindringtiefe  $\Lambda_{L} = \sqrt{\frac{\lambda_{L}}{\mu_{0}}}$   $\lambda_{L} = \frac{m}{n_{z}e^{2}}$ 

## 8. Halbleiter

**Definition**: Festkörper, der bei T=0K ein Isolator ist, aber unterhalb der Schmelztemperatur eine endliche Leitfähigkeit hat

Extrinsischer HL: Elektronische Eigenschaften dominiert durch  $e^-$  bzw. p<sup>+</sup>, welche durch Fremdatome zugeführt werden (Dotierung)

Intrinsischer HL: Elektronische Eigenschaften durch thermisch generierte Ladungsträger bestimmt

Valenzbandenergie Leitungsbandenergie  $E_{\rm G} = E_{\rm L} - E_{\rm V}$   $E_{\rm F} = k_{\rm B} T_{\rm F} = \frac{\hbar^2}{2m_{\rm e}} (3\pi^2 n)^{2/3}$   $T_{\rm F} = \frac{\hbar^2}{2m_{\rm e} k_b} (3\pi^2 n)^{2/3}$ Bandlückenenergie Fermi-Energie Fermi-Temperatur

#### Fermi-Verteilung für Elektronen

$$f_e(E,T) = 1 / \left( 1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) \right)$$
  $v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$ 

 $\overline{f_h(E,T)} = 1 - f_e(E,T)$ 

 $E_{\rm F}$ : Energieniveau mit Besetzungswahrsch. 0.5 im thermischen Gleichgewicht. Bei  $T=0~\mathrm{K}$  entspricht  $E_{\mathrm{F}}$  dem maximalen Energiezustand eines

$$\begin{split} E_{\rm i} &= \frac{E_{\rm V} + E_{\rm L}}{2} + \frac{k_{\rm B}T}{2} \ln \left( \frac{N_{\rm V}^{*}}{N_{\rm L}^{*}} \right) \text{ (intrinsisches Ferminiveau)} \\ E_{F} &= E_{L} - k_{B}T \ln \left( \frac{N_{L}}{N_{D}} \right) \text{ (vollständige Ionisierung)} \end{split}$$

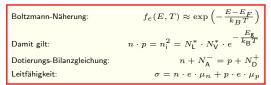
$$\boxed{ \begin{array}{c} \sigma = n_i e \mu_n + p_i e \mu_p \\ \text{mit } np = n_i^2 \text{ gilt: } 0 = n^2 e \mu_n - \sigma n + n_i^2 e \mu_p \\ \text{GGW} \end{array} }$$

#### 8.1. Effektive Masse

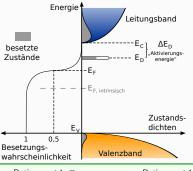
$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{\mathrm{d}^2 E(k)}{\mathrm{d} k^2}} = \sqrt[3]{m_{||}^* m_{\perp}^{*2}} \qquad m_{\mathrm{h}}^* = \left(m_{\mathrm{hl}}^{*\frac{3}{2}} + m_{\mathrm{hh}}^{*\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Fermi-Verteilung Elektronen/Löcherdichte Zustandsdichte effkt. Zustandsdichte Leitungsband effkt. Zustandsdichte Valenzband  $n_i = \sqrt{N_L^* N_V^*} e^{-\frac{E_G}{2k_b T}}$ Intrinsische Ladungsträgerdichte

# Valenzband Leitungsband Löcherdichte Elektronendichte $p = \int\limits_{-\infty}^{E_{\mathsf{V}}} D_{\mathsf{V}} \cdot f_h \, \mathrm{d}E$ $n = \int_{\Gamma}^{\infty} D_{\mathsf{L}} \cdot f_e \, \mathrm{d}E$ $D_{\mathsf{L}} = \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E - E_{\mathsf{L}}}$ $D_V = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2 h^3} \sqrt{E_V - E}$ Effektive Zustandsdichte $N_{\mathsf{V}}^* = 2 \left( \frac{m_p^* k_{\mathsf{B}} T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$ $n = N_{\parallel}^* \exp\left(-\frac{E_{\parallel} - E_{\parallel}}{k_{\text{B}} \cdot T}\right)$



# 8.2. Dotierung von Halbleitern



n-Dotierung $+1e^-$	p-Dotierung $+1h^+$
Donator aus $\overline{\underline{V}}( ext{-wertig})$ $N_{A}=0$	Akzeptor aus $\overline{\overline{\mathrm{III}}}(\text{-wertig})$ $N_{D}=0$
$N_D^+ = \frac{N_D}{g \exp\left(\frac{E_F - E_0}{k_B T}\right) + 1}$	$N_A^- = \frac{N_A}{g \exp\left(\frac{E_A - E_F}{k_B T}\right) + 1}$
$N_D^+ \approx N_D$ (vollständig lonisiert)	$g = 2, e^-; g = 4, p^+$

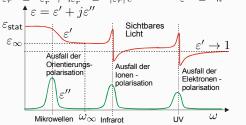
Amphoter: Sowohl n- als auch p-Dotierung. Bei  $\overline{III}$ - $\overline{V}$  HL:  $\overline{IV}$ 

## 8.3. Diffusionsströme

 $\begin{array}{ll} j_{n/p}^{\rm diff} = eD_{n/p} \, \frac{{\rm d}n/p}{{\rm d}x} & {\rm Einstein \; Beziehung:} \; D_{n/p} = \frac{k_{\rm B}T}{e} \mu_{n/p} \\ j_{\rm drift} = -env_{\rm drift} = \sigma_{\rm n,p} \epsilon & I = Aj \end{array}$ 

# 9. Dielektrische Eigenschaften





### 9.1. Polarisation (S. 144)

Dielektr. Verschiebung  $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E (1 + \chi^{\text{el}}) = \varepsilon_0 E + P$ Suszeptibilität  $\chi^{\text{el}} = \varepsilon_r - 1 = \frac{\alpha N}{1 - \frac{\alpha N}{2N}}$ 

#### Elektronische Polarisation

Elektronenhülle verschiebt sich durch äußeres Feld  $p = \varepsilon_0 \alpha \varepsilon_{\text{lok}} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_z^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \varepsilon_{\text{lok}} \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m}} \qquad \varepsilon'(w) = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$ 

#### Ionische Polarisation

Ionen werden durch äußeres Feld verschoben

$$p = qu(t) = \frac{q^2}{\mu} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \varepsilon_{\text{lok}} \qquad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$
 Gesamtpolarisation:  $P(t) = nqu(t) + n\varepsilon_0 \alpha \varepsilon_{\text{lok}}(t)$ 

#### Orientierungspolarisation

Permanente Dipole werden durch E-Feld ausgerichtet. statisch:  $p_0 = np \cdot \overline{\cos \Theta} \approx np \frac{p\varepsilon}{3k_BT}$ 

## 10. Magnetische Eigenschaften

Magnetische Flussdichte	<u>B</u>	$[T = \frac{V_s}{m^2}]$
Magnetische Feldstärke	$\underline{H} = \underline{M}$	$\left[\frac{A}{m}\right]$
Bahndrehimpuls	$\underline{m{L}}$	$[VAs^2]$
Magnetisches Moment	$\underline{m}$	[A m <sup>2</sup> ]
magn. Quantenzahl	$m \operatorname{od}. M$	
Spinquantenzahl	S	
gyromagnetisches Verhältnis	g	
Gesamtdrehimpuls	$\underline{J}$	$[T = \frac{V_s}{m^2}]$
Magnetische Suszepitbilität	$\chi^m$	111

Bohrsches Magneton:  $\mu_{\rm B} = \frac{e\hbar}{2m_{\rm o}} = 9.274 \times 10^{-24} \, {\rm A m^2}$ 

	Dielektrika	Magnetika
Polarisation	$\underline{\boldsymbol{P}} = \varepsilon_0 \chi \underline{\boldsymbol{E}}_{netto}$	$\underline{\boldsymbol{J}} = \mu_0 \underline{\boldsymbol{M}}$
Flussdichte	$\underline{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_0 \underline{\boldsymbol{E}}_{netto} + \underline{\boldsymbol{P}}$	$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \underline{J}$

Gesamtdrehimpuls J = L + Spermanentes mag. Dipolmoment  $M_z=g(-\mu_B)J$ Magnetische Suszeptibilität  $\chi^m = \mu_r - 1 = \frac{1}{\mu_0} \frac{J}{H} = \frac{M}{H}$ Magnetische Flussdichte  $\underline{B} = \mu_r \mu_0 \underline{H} = \mu_0 \underline{H} + \underline{J} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$ 

#### Elementare Dipole:

 $\begin{array}{l} \text{Mechanischer Drehimpuls } \underline{L} = \underline{r} \times m_0 \underline{v} = m_0 r^2 \underline{\omega} \\ \text{Magnetisches Moment } \underline{m} = I \underline{A} = -\frac{1}{2} e r^2 \underline{\omega} = -\frac{e}{2m_0} \underline{L} \end{array}$ g-Faktor:  $g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ Spezial:  $S = 0 \Rightarrow q = 1$  (unreal)  $L = 0 \Rightarrow q = 2$ 

# Diamagnetismus ( $\mu_{\rm r} < 1$ )

Wirkung der Lorentzkraft. Immer aktiv, wird aber von Para- und Ferromag. überlagert. Temperaturunabhängig.

$$\chi_{\rm dia}^{\rm m} = \frac{\underline{M}}{\underline{H}} = -\frac{NZ^*e^2\overline{r^2}\mu_0}{6m_{\rm e}} \qquad \underline{\underline{M}} = N\cdot\underline{\underline{m}}$$

Paramagnetismus ( $\mu_r > 1$ )

Material besitzt magnetische Dipolmomente. (Unvollständige Elektronen-

Steilheit:  $g_m = -\frac{en\mu_n bd}{l} \left( \sqrt{\frac{U_D + U_{gs}}{U_n + U_D}} - 1 \right)$ 

Orientierungsstatistische Verteilung durch Temperatur

Curiesches Gesetz: 
$$\chi^{\rm m}_{\rm para} = \frac{N\mu_0 g^2 J(J+1)\mu_{\rm B}^2}{3k_{\rm B}T}$$

Leitungselektronen ( $\mu_r \gg 1$ )

praktisch temperaturabhängig

$$\begin{split} \chi_{\mathrm{para},\mathrm{le}}^{\mathrm{m}} &= \frac{3}{2} \frac{n \mu_0 \mu_{\mathrm{B}}^2}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{F}}} \\ \chi_{\mathrm{dia},\mathrm{le}}^{\mathrm{m}} &= -\frac{1}{3} \chi_{\mathrm{para},\mathrm{le}}^{\mathrm{m}} \\ \mathrm{(mit} \ n = \frac{\mathrm{freie} \ e}{Vez} \end{split} \right\} \chi_{\mathrm{le}}^{\mathrm{m}} = \chi_{\mathrm{para},\mathrm{le}}^{\mathrm{m}} + \chi_{\mathrm{dia},\mathrm{le}}^{\mathrm{m}} = \frac{n \mu_0 \mu_{\mathrm{B}}^2}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{F}}}$$

Ferromagnetismus ( $\mu_r \gg 1$ )  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ 

Ausrichtung der elementaren Dipolmomente im Gitter. Wirkung nur bis

$$E_A = -\mu_0 \int_{V_{Ww}} \underline{\boldsymbol{H}}_G \underline{\boldsymbol{H}}_A \, \mathrm{d}V$$

Curie-Weiss-Gesetz: 
$$\chi^{\rm m}=\frac{C}{T-\Theta}$$
 mit  $\Theta=\frac{E_{\rm F}}{k_{\rm b}}=\frac{\mu_0\mu}{B_a}$ 

Hystereseverluste  $w_v = \oint B \, \mathrm{d} H$ 

**Antimagnetismus** ↑↓↑↓↑↓

gekoppelte, antiparallele Ausrichtung.

Ferimagnetismus ↑↓↑↓↑↓

In eine Richtung stärkere Magnetisierung hohe Magnetisierung, aber schlechter Leiter.  $\underline{m{m}} = IA$  ist antiparallel zu  $\underline{m{L}}$ 

# 11. pn-Übergang

Elektronen- Löcherdichtenstrom:  $j_{n,p} = en\mu_{n,p}\varepsilon \pm eD_{n,p}\frac{\partial n,p}{\partial x}$ 

Diffusionskoeffizient:  $D = \frac{k_B T \mu}{e}$  Beweglichkeit:  $\mu = \frac{e \tau}{m}$ 

stromloser Fall  $\Leftrightarrow$  konstante Fermienergie:  $\frac{\partial \widetilde{E}_F}{\partial x}$ .  $j_n = n \cdot \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} E_{\mathbf{f},\mathbf{n}}$   $j_p = p \cdot \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} E_{\mathbf{f},\mathbf{p}}$  Ladungsträgerdichte: siehe 8: Effektive Zustandsdichte

Diffusionsspannung: 
$$U_D=\frac{k_BT}{\mathrm{e}}\ln\left(\frac{n_{\mathrm{n}0}}{n_{\mathrm{p}0}}\right)=\frac{k_BT}{\mathrm{e}}\ln\left(\frac{p_{\mathrm{p}0}}{p_{\mathrm{n}0}}\right)$$

Diffusionsspannung Verarmungszone:  $U_D = \frac{1}{2} \varepsilon_m (w_n + w_p)$  mit

$$\begin{split} |\varepsilon_m| &= \frac{\mathrm{e}^{N_0 \omega_n}}{\varepsilon \varepsilon_0} \\ w_n &= \sqrt{\frac{2\varepsilon \varepsilon_0 N_A U_D}{\mathrm{e}^{N_D}(N_A + N_D)}} \end{split} \qquad w_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon \varepsilon_0 N_D U_D}{\mathrm{e}^{N_A}(N_A + N_D)}} \end{split}$$

unsymmetrischer pn-Übergang - Näherung durch:

p+n-Übergang:  $N_A\gg N_D$  n+p-Übergang:  $N_D\gg N_A$  Potentialverlauf:  $U(x)=\frac{\mathrm{e} N_D}{2\varepsilon\varepsilon_0}(x-\omega_n)^2$ 

Anlegen einer Spannung: Ersetzen von  $U_D$  durch  $U_D-U$ 

Anneger einer spänning, Ersekzelt vol on  $U_D$  durch  $U_D = U$  U > 0 in "Durchlassrichtung"; RLZ verkleinert sich Sperrschichtkapazität:  $e_S = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\omega(U)}$  Quasi-Fermi-Niveau:  $E_{\mathsf{F},n}$ ,  $E_{\mathsf{F},p}$  In RLZ:  $eU = E_{\mathsf{F},n} - E_{\mathsf{F},p}$  Profil der Löcherdichte (analog für Elektronendichte):

 $p_n(x) - p_{n0} = p_{n0} \left( \exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right) - 1 \right) \exp\left(\frac{-(x - w_n)}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right)$ 

# 12. Feldeffekt-Transistoren (FET-Transistoren)

 $\overline{U(x)}$ : Spannung ggü. Source (x=0)  $U_{ds}$ : Drain-Source-Spannung  $U_{gs} + U(x) = -U_{a}(x)$ 

$$I_d = \frac{en\mu_n bd}{l} \left( U_{\text{ds}} - \frac{2}{3\sqrt{U_n + U_D}} \left[ (U_D + U_{\text{gs}} + U_{\text{ds}})^{3/2} - (U_D + U_{\text{gs}})^{3/2} \right] \right)$$

$$\begin{split} &U_{\mathrm{gs}}+U(x)=-U_{g}(x)\\ &I_{d}=\frac{en\mu_{n}bd}{l}\left(U_{\mathrm{ds}}-\frac{2}{3\sqrt{U_{p}+U_{D}}}\left[(U_{D}+U_{\mathrm{gs}}+U_{\mathrm{ds}})^{3/2}-(U_{D}+U_{\mathrm{gs}})^{3/2}\right]\right)\\ &\mathbf{Anlaufbereich:}\\ &\mathrm{Kanalleitwert:}\ \frac{\partial I_{d}}{\partial U_{\mathrm{ds}}}|_{\mathrm{Ugs}}=\frac{en\mu_{n}bd}{l}\left[1-\frac{1}{\sqrt{U_{p}+U_{D}}}(U_{D}+U_{\mathrm{gs}}+U_{\mathrm{ds}})^{1/2}\right]\\ &\mathrm{Steilheit:}\ g_{m}=\frac{\partial I_{d}}{\partial (-U_{\mathrm{gs}})}|_{\mathrm{Ugs}}=\frac{en\mu_{n}bd}{l\sqrt{U_{p}+U_{D}}}\left[(U_{D}+U_{\mathrm{gs}}+U_{\mathrm{ds}})^{1/2}-(U_{D}+U_{\mathrm{gs}})^{1/2}\right]\\ &\mathrm{S\"{attigungsbereich:}} \end{split}$$