

Mitschrift von "Höhere Mathematik 4", Sommer
2013, Prof. Ulbrich

Benedict Simlinger, published by <http://latex4ei.de/>

December 5, 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche DGL

1.1 nichtlineare DGL erster Ordnung

Eine nichtlineare DGL hat die Form

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ x &\in I \in \mathbb{R} \\ f(x, y) &\in I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

und gesucht wird ein $y(x), I \rightarrow \mathbb{R}$ welches diese Gleichung erfüllt, wobei $f(x, y)$ mindestens stetig sein muss.

Ein Anfangswertproblem (AWP) liegt vor, wenn eine DGL und deren Anfangswerte $y(x_0) = y_0$ gegeben ist. Bei solchen AWP's stellt sich die Frage nach

- Existenz
- Eindeutigkeit
- Lösungsweg

1.1.1 DGL mit getrennten Variablen

DGLs mit trennbaren Variablen haben die Form

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \tag{2}$$

Mit einer formalen Taschenspielererei trennt man die Variablen

$$\begin{aligned} y(x)' &= f(x) \cdot g(y(x)) \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= f(x) \cdot g(y(x)) \\ \stackrel{g(y(x)) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{g(y(x))} dy &= f(x) dx \end{aligned}$$

Wenn man nun statt $g(y(x))$ schreibt $g(y)$ sieht man, dass alles was mit y zu tun hat, links steht, und alles was mit x zu tun hat, rechts steht. Weiter geht es mit

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \frac{1}{g(y(x))} dy}_{G(y)} &= \underbrace{\int f(x) dx}_{F(x)} + c \\ G(y) - F(x) &= c \end{aligned}$$

Die Integrale ausrechnen und eine Umformung nach y führen dann zur Lösung, wobei die Konstante c die Integrationskonstante ist, die sich aus den Anfangswerten berechnet, wie wir später sehen werden.

Für den Fall $g(y_0) = 0$ gilt

$$g(y_0) = 0 \rightarrow y = y_0 \tag{3}$$

Sind die Anfangswerte gegeben, so gilt

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\eta)} d\eta$$

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

als die Lösung des Problems. Beachte, dass hier keine Integrationskonstanten mehr vorkommen!

Satz 1 (Existenz- und Eindeigkeitsatz für trennbare DGL)

Sei f in $I_x = \{x | a \leq x \leq b\}$ stetig, $x_0 \in I_x$,
und g in $I_y = \{y | a \leq y \leq b\}$ stetig, $y_0 \in I_y$

und es gilt

entweder $g(y_0) \neq 0$
oder $g(y_0) = 0$ mit $|g(y)| \leq L |y - y_0|$

dann besitzt das AWP

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

in der Umgebung von x_0 eine eindeutige Lösung.

Beispiel 1 ($y' = xy$)

$$y' = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{y}_{g(y)}$$

Für $y = 0$

$$g(y) = g(0) = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y(t) = \text{const.}$$

Für $y \neq 0$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} dy = F(x) = \int x dx + c$$

$$\Leftrightarrow \ln |y| = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{x^2/2 + c_1}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \underbrace{e^{x^2/2}}_{>0} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{>0}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\pm c_2}_{\neq 0} \cdot e^{x^2/2}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2 ($y' = 2xy^2 + 2x$) Gegeben ist $y(0) = y_0 = 1, x_0 = 0$ und $y' = \underbrace{2x}_{f(x)} \underbrace{(y^2 + 1)}_{g(y)}$

Da es von $g(y)$ keine Nullstellen gbt, gibt es auch keine spezielle konstante Lösung.

$$\begin{aligned} G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{z^2 + 1} dz &= F(x) = \int_{x_0}^x 2s ds \\ \arctan(y) - \underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{2}} &= x^2 \\ \arctan(y) - \frac{\pi}{4} &= x^2 \\ y &= \tan(x^2 + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Beispiel 3 ($y' = y^2$) Für $y(0) = y_0 = 0$ ergibt sich die konstante Lösung $y = 0$

Für $y(0) = y_0 \neq 0$ gilt mit $f(x) = 1, g(y) = y^2, x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{y_0}^y \frac{1}{z^2} dz}_{G(y)} &= \underbrace{\int_0^x 1 ds}_{F(x)} \\ -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} &= x \\ y &= \frac{y_0}{1 - y_0 x}, \quad x \neq \frac{1}{y_0} \end{aligned}$$

1.1.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze für AWP

Beispiel 4 ($y' = 1 + y^2$)

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{1 + z^2} dz &= \int_0^x 1 ds \\ \arctan(y) &= x \\ y(x) &= \tan(x) \end{aligned}$$

Allerdings gilt diese Lösung nur solange $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Das obige Beispiel zeigt, dass Lösungen auf gewissen Umgebungen, wie in diesem Fall $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ begrenzt werden müssen.

Beispiel 5 ($y' = \sqrt{|y|}$) $y' = \sqrt{|y|} = y^{\frac{1}{2}}, y(x_0) = 0$

Für $y(x) = 0$ ist die konstante Lösung sofort erkennbar.

Für $y > 0$

$$\begin{aligned}\int y^{-\frac{1}{2}} dy &= \int 1 dx \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= x + c \\ y(x) &= \left(\frac{x + c}{2} \right)^2 \\ \stackrel{y(x_0)=0}{\Rightarrow} y(x) &= \left(\frac{x - x_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(x - x_0)^2\end{aligned}$$

Für $y < 0$ ergibt sich analog $-\frac{1}{4}(x - x_0)^2$

Durch jeden Punkt $(x_0, 0)$ verlaufen also mehrere Lösungen

- $y(x) = 0$
- $\frac{1}{4}(x - x_0)^2$ für $y > 0$
- $-\frac{1}{4}(x - x_0)^2$ für $y < 0$

Wir sehen, es gibt in keinem Punkt der x -Achse eine eindeutige Lösung, da sich die obigen Varianten beliebig kombinieren lassen. Da die Wurzelfunktion nicht lipschitzstetig ist (d.h. die Steigung der Funktion ist nicht durch eine Konstante beschränkt) kommt es in diesem Beispiel zur Nicht-Eindeutigkeit der Lösung.

Definition 1 (Lipstetigkeit und Lokale Lipstetigkeit) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$

- f ist lipschitzstetig bezüglich y wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \forall (x, y_1), (x, y_2) \in G$
- f ist lokal lipstetig bezüglich y , wenn es in jedem Punkt von G eine Umgebung U gibt, so dass f lokal lipschitzstetig bezüglich y in $G \cap U$ ist

Satz 2 (Aus Stetigkeit folgt lokale Lipstetigkeit) Ist $\partial_y f$ stetig auf G , dann ist f lokal lipstetig bezüglich y auf G . Dies folgt aus $f(x, y_2) - f(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \partial_y f(x, y) dy < L |y_2 - y_1|$ falls $|\partial_y f(x, y)| \leq L \forall y \in [y_1, y_2]$

Beispiel 6 ($f(x, y) = |y|$) f ist global lipstetig bezüglich y mit $L = 1$

Beispiel 7 ($f(x, y) = x + x^2 y^2$)

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \\ x^2 |y_1^2 - y_2^2| &= \\ x^2 |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| &\leq L |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

$$\forall (x, y_i) \text{ mit } x^2 |y_1 + y_2| \leq L$$

Dieses Beispiel ist nur lokal lipstetig, da für

$$\left. \begin{array}{l} |x| \rightarrow \infty \\ \text{oder} \\ |y_i| \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow L \rightarrow \infty$$

Übrigens hätten wir mit dem vorherigen Kriterium die Stetigkeit von

$$f(x, y) = 2x^2 y$$

gesehen und damit die lokale Lipstetigkeit gesehen.

Beispiel 8 ($f(x, y) = \sqrt{|y|}$) Wir sehen uns die Funktion in der Umgebung von $y = 0$ an

$$y_1 = 0$$

und prüfen auf Lipstetigkeit

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq L |y_2 - y_1| \\ \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_2 - y_1} \right| &\leq L \end{aligned}$$

Anmerkung: Man beachte, dass wir mit der obigen Formel prüfen, ob die Steigung einer Funktion durch einen Wert L begrenzt wird.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\overbrace{f(x, y_1) - f(x, y_2)}^0}{y_2 - \underbrace{y_1}_0} \right| &\leq L \\ \frac{\sqrt{|y_2|}}{|y_2|} &\leq L \\ \frac{1}{\sqrt{|y_2|}} &\leq L \\ y_2 \rightarrow 0 &\Rightarrow L \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es gibt keine lokale Lipstetigkeit, denn die Steigung der Wurzelfunktion am Punkt Null ist unendlich.

Anmerkung: Aus lokaler lipstetigkeit folgen Aussagen über Existenz und

Eindeutigkeit.

Satz 3 (Eindeutigkeit von Lösungen) Sei f auf dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig und erfüllt lokale Lipstetigkeit bezüglich y auf G . Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in G$ für das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösungskurve $y(x)$ die beidseitig dem Rand von G beliebig nahe kommt.

Der Beweis wird über die Picarditeration (eine Form der Fixpunktiteration) geführt. Dazu formt man das AWP um

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ \int_{x_0}^x y'(s) ds &= \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \\ y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \\ y(x) &= \underbrace{y_0}_{y(x_0)} + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

Nun führt man die Picarditeration nach folgendem Muster durch : Wähle y_0 , bestimme $F(y_0) = y_1, F(y_1) = y_2, u.s.w.$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_k(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{k-1}(s)) ds, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Beispiel 9 ($y' = 2xy$ Lösung über Separation der Variablen)

$$y' = 2xy, \quad y(\underbrace{0}_{x_0}) = \underbrace{1}_{y_0}$$

$$y(x) = e^{x^2}$$

Beispiel 10 ($y' = 2xy$, Lösung über Picarditeration)

$$\begin{aligned}y_0(x) &= 1 \\y_1(x) &= 1 + \int_0^x 2s \cdot 1 ds = 1 + x^2 \\y_2(x) &= 1 + \int_0^x 2s \cdot (1 + s^2) ds = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 \\y_3(x) &= 1 + \int_0^x 2s \cdot \left(1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4\right) ds = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \\y_4(x) &= 1 + \int_0^x 2s \cdot \left(1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4 + \frac{1}{6}s^6\right) ds \\&= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 \\&\vdots \\y_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{x^2}\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich das Gleiche. Der Vollständigkeit halber müssten man noch die Aussage per vollständiger Induktion überprüfen. Nun stellt sich noch die Frage: Wie stark hängt die Lösung von den Anfangswerten ab?

Satz 4 (stetige Abhängigkeit von Anfangswerten) *Erfüllt die stetige Funktion $f(x, y)$ auf dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}$ die Lipschitzbedingung bezüglich y , dann gilt für je zwei in G verlaufende Lösungen $y_1(x), y_2(x)$ von $y' = f(x, y)$ die Abschätzung*

$$\underbrace{|y_1(x) - y_2(x)|}_{\Delta_x} \leq \underbrace{|y_1(x_0) - y_2(x_0)|}_{\Delta_{x_0}} e^{L|x-x_0|}$$

Anmerkung: L ist die Lipschitzkonstante (die immer auf den "worst case" ausgelegt wird) Analog gilt dies auch für den mehrdimensionalen Fall.

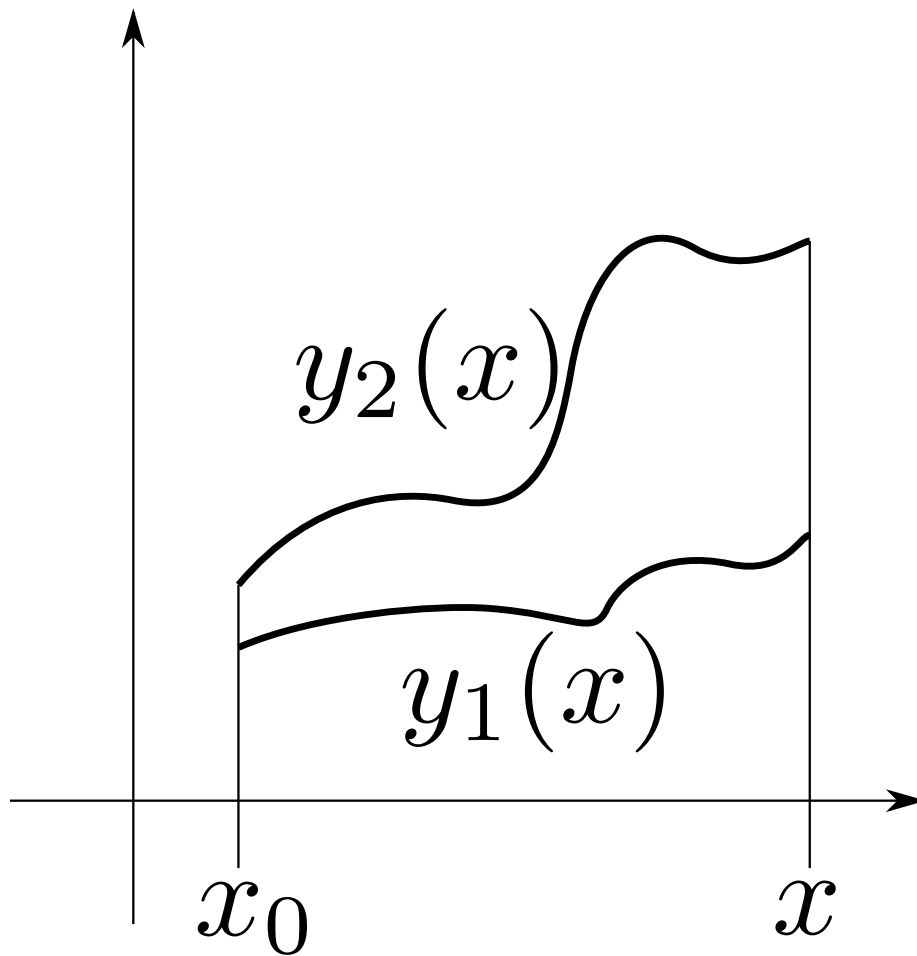


Figure 1: Veranschaulichung der Abhängigkeit von DGLen von Anfangswerten

1.2 DGLn n-ter Ordnung

Wir betrachten die DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad n \geq 1 \quad (4)$$

1.2.1 Rückführung auf ein System erster Ordnung

Die DGL n-ter Ordnung kann mit Hilfe von Hilfsfunktion in ein System erster Ordnung überführt werden.

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Klarerweise ergibt sich daraus auch

$$\begin{aligned}
z_1(x)' &= z_2(x) \\
z_2(x)' &= z_3(x) \\
&\vdots \\
z_{n-1}(x)' &= z_n(x) \\
z_n'(x) &= f(x, \underbrace{z_1(x)}_{y(x)}, \underbrace{z_2(x)}_{y'(x)}, \dots, \underbrace{z_n(x)}_{y^{(n-1)}(x)})
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ f(x, z_1(x), \dots, z_n(x)) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Löst z die DGL, dann gilt diese Lösung wegen

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \end{pmatrix} \quad (6)$$

auch für $y(x)$!

Der springende Punkt ist, die verschiedenen Ableitungen von y als "unabhängige" Gleichungen in z wahrzunehmen, auch wenn der Zusammenhang der verschiedenen z_i über die Ableitungen erhalten bleibt. Durch diese Überführungs sieht man auch sehr schön, dass man für DGLn n -ter Ordnung auch n Anfangswerte braucht, wodurch sich ein AWP nun wie folgt schreibt

Definition 2 (AWP n -ter Ordnung)

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 \\
y'(x_0) &= y_1 \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}
\end{aligned}$$

1.2.2 Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten mit diesem Wissen nun wieder die lineare DGL n-ter Ordnung (diesmal in Abhängigkeit von t wegen des engen Zusammenhangs mit LTIs)

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(t) \quad (8)$$

$$a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Wir bringen das System in die Form

$$y^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} - \dots - \frac{a_1}{a_n} y' - \frac{a_0}{a_n} y + \frac{b}{a_n} \quad (10)$$

Mit der Überführung in das Begleitsystem

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b}{a_n} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Das Begleitsystem hat also die Form $z' = Az + b$. Man kann nun die Lösungstheorie von lin. DGL-Systeme erster Ordnung anwenden.

Es gilt wie bereits festgestellt: Ist y die Lösung der DGL $\Leftrightarrow z$ ist Lösung des Begleitsystems

1.3 Die homogene DGL n-ter Ordnung

Homogene DGLn n-ter Ordnung lassen sich wie folgt darstellen

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (13)$$

Das charakteristische Polynom einer solchen DGL lautet

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (14)$$

Die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ des char. Polynom mit den jeweiligen Vielfachheiten k_1, \dots, k_r (wobei $k_1 + \dots + k_r = n$) stellen gleichzeitig die Eigenwerte der allgemeine Basislösung dar.

Zum Eigenwert λ_j mit Vielfachheit k_j bilden sich k_j Basislösungen

$$e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1} e^{\lambda_j t} \quad (15)$$

Dies für $j = 1, \dots, r$ liefert ein komplettes System von Basislösungen für die homogene Gleichung.

Falls eine reelle Lösungsbasis gesucht ist gilt:

$$\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \exists i \neq j : \lambda_i = \overline{\lambda_j} \quad (16)$$

Was bedeutet diese Formel? Sie besagt, dass sich komplexe Eigenwerte bilden können, die aber immer in komplex-konjugierten Paaren auftreten, also zum Beispiel $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ und $\lambda_i = \overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j$

Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[e^{\lambda_j t}] &= e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) \\ \operatorname{Im}[e^{\lambda_j t}] &= e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t) \\ \lambda_j &= \alpha_j + i\beta_j \\ 0 &\leq l \leq k_j - 1 \end{aligned}$$

sind die Lösungsbasen

$$\begin{aligned} &e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t), te^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t), t^2 e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t), \dots, t^{k_j-1} e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) \\ &e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t), te^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t), t^2 e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t), \dots, t^{k_j-1} e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t) \end{aligned}$$

Beispiel 11 ($L(y) = y'' - 2y' + y$)

$$\Rightarrow a_2 = 1, a_1 = -2, a_0 = 1$$

Das charakteristische Polynom lautet also

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 - 2s + 1 \\ &= (s - 1)^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda_1 = 1, k_1 = 2 \quad (17)$$

System von Basislösungen

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t} \rightarrow e^t, te^t$$

Wiederholung Homogene DGL n-ter Ordnung $L[y] = 0$

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \quad (18)$$

Es folgt eine Zusammenfassung des zuvor besprochenen Lösungsweges:

1. Bestimme char. Polynom P und dessen Nullestellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit Vielfachheiten k_1, \dots, k_r
2. Basislösungen zu $\lambda_j : e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1} e^{\lambda_j t}$ Dies liefert ein System von n Basislösungen
3. ggf. reell machen
 - (a) $\lambda_j \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1} e^{\lambda_j t}$ sind bereits reell

(b) $\lambda_j, \lambda_i = \overline{\lambda_j}$ konjugiert-komplexe Nullstellenpaare ($\lambda_j \notin \mathbb{R}$) mit

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$$

zu

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t) + \sin(\beta_j t)) \\ & t e^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t) + \sin(\beta_j t)), \dots, t^{k_j-1} \\ & e^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t) + \sin(\beta_j t)) \end{aligned}$$

Das ist ein reelles System von Basislösungen in $y_1(t), \dots, y_n(t)$

4. Allgemeine homogene Lösung: $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$ mit $c_j \in \mathbb{R}$

5. ggf. Anfangswerte

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

erfüllen

Beispiel 12 ($L[y] = y''' + 4y'$)

$$L[y] = y''' + 4y'$$

und

$$\begin{aligned} & a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 4, a_0 = 0 \\ & P(s) = s^3 + 4s = s(s^2 + 4) = s(s - 2i)(s + 2i) \\ & \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i = \overline{\lambda_2} \end{aligned}$$

mit

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

Basislösungen:

$$e^{0t} = 1, e^{2it}, e^{-2it}$$

reelle Basislösungen:

$$1, \cos(2t), \sin(2t)$$

1.4 Die inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung

Wir betrachten

$$L[y] = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

Gesucht ist eine partikuläre Lösung y_p aus der sich die allgemeine inhomogene Lösung durch

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

ergibt, wobei der zweite Teil die allgemeine homogene Lösung ist. Bilden y_1, \dots, y_n ein System von Basislösungen, dann ist

$$Z(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

die Fundamentallösung des Begleitsystems $z' = Az$
 Partikuläre Lösung von

$$z' = Az + a$$

, wobei

$$a = (0, 0, \dots, \frac{b}{a_n})^T$$

durch Variation der Konstanten

$$z_p(t) = Z(t)c(t)$$

mit Vorwissen von früher

$$Z(t)c'(t) = a$$

auflösen ergibt $c(t)$ und daraus $y_p(t)$ (ist die erste Komponente von $z_p(t)$)

Beispiel 13 ($y'' - 2y' + y = 3e^{2t}$)

$$L[y] = y'' - 2y' + y, b(t) = 3e^{2t}$$

Inhomogene DGL: $L[y] = 3e^{2t}$

System homogener Basislösungen (siehe früheres Bsp):

$$y_1(t) = e^t$$

$$y_2 = te^t$$

$$\begin{aligned} Z(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(t)}{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} Z(t)c'(t) &= a(t) \\ e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c'_2 &= 3e^t, \\ \Rightarrow c'_1 &= -tc'_2 = -3te^t \end{aligned}$$

durch Integrieren

$$\begin{aligned} c_2 &= 3e^t \\ c_1 &= 3(1-t)e^t \end{aligned}$$

Schlussendlich

$z_p(t) = Z(t)c(t) \rightarrow$ erste Zeile $\rightarrow y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) = 3(1-t)e^t e^t + 3e^t \cdot te^t = 3e^{2t}$. In diesem Fall ist die Übereinstimmung mit der Inhomogenität offensichtlich - das ist aber nicht die Regel.

1.5 Lineare DGLn n-ter Ordnung via Laplace-Transformation

Wir betrachten das LTI

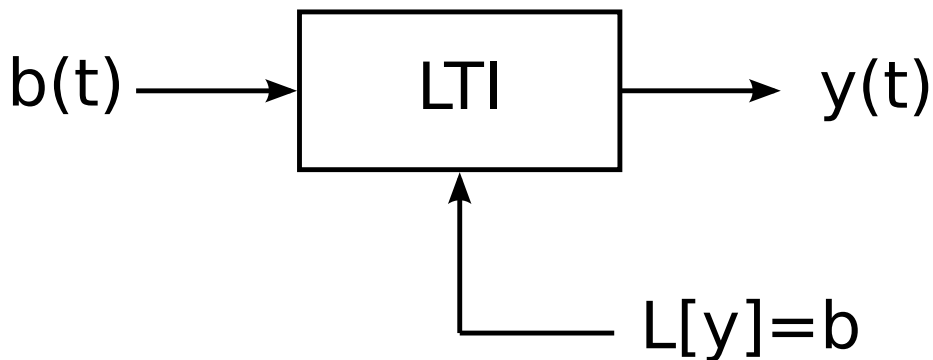


Figure 2: TODO: Is this image correct?

mit Anfangswerten

$$y(0+) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0+) = y_{n-1}$$

und der bereits bekannten AWP-Definition

$$L[y] = a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b(t), \quad a_n \neq 0$$

Das 0+ soll verdeutlichen, dass wir uns nur im positiven Zeitbereich bewegen.
 Wir werde in Zukunft aber nur noch $y(0)$ schreiben.
 Wir wenden die Laplace-Transformation an:

$$\begin{array}{ccc} y^{(n)}(t) & \circ\text{---}\bullet & s^n Y(s) - s^{n-1}y_0 - \dots - sy_{n-2} - y_{n-1} \\ y^{(n-1)}(t) & \circ\text{---}\bullet & s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y_0 - \dots - y_{n-2} \\ & \vdots & \\ y & \circ\text{---}\bullet & Y(s) \end{array}$$

Hier:

$$\begin{array}{rcl} P(s) & = & a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \\ P_1(s) & = & a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \\ P_{n-1}(s) & = & a_n s + a_{n-1} \\ P_n(s) & = & a_n \end{array}$$

wobei

$$P(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

das char. Polynom ist.

daraus für $k = 1, \dots, n$

$$P_k(s) = a_n s^{n-k} + \dots + a_{k+1} s + a_k$$

Rekursionsformel (für $1 \leq k \leq n-1$):

$$P_k(s) = sP_{k+1}(s) + a_k$$

$$\Rightarrow L[y] \circ\text{---}\bullet P(s)Y(s) - y_0 P_1(s) - \dots - y_{n-1} P_n(s) = B(s)$$

gemeinsam mit Anfangswerten

$$y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{P(s)} (B(s) + y_0 P_1(s) + \dots + y_{n-1} P_n(s))$$

wobei

$$\frac{1}{P(s)} = H(s)$$

die Übertragungsfunktion ist und

$$H(s) \bullet\text{---}\circ h(t)$$

die Impulsantwort ist.

Beispiel 14 (Ungedämpfter Schwingkreis (LC-Glied)) $L[y] = y'' + \omega^2 y, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$P(s) = s^2 + \omega^2, H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \bullet \circ h(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$P_1(s) = a_2 s + a_1 = s \quad P_2(s) = a_2 = 1$$

Definition 3 (Eigenschaften von $h(t)$) • $h(t)$ ist die eindeutige (zero input) Lösung des AWP:

$$L[h] = 0, h(0) = 0, \dots, h^{(n-2)}(0) = 0, h^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}$$

• $h(t)$ ist eindeutige (zero input) Lösung von

$$L[h] = \delta, h(0) = 0, \dots, h^{(n-1)}(0) = 0$$

Begründung:

y löst das AWP

$$\begin{aligned} L[y] &= b, \\ y(0) &= y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= H(s)[B(s) + y_0 P_1(s) + \dots + y_{n-1} P_n(s)] \\ \Rightarrow h(t) &\text{ löst AWP} \\ \Leftrightarrow B(s) + y_0 P_1(s) + \dots + y_{n-1} P_n(s) &= 1 \end{aligned}$$

Fall a) $B(s) = 0, y_0 = \dots = y_{n-2} = 0, y_{n-1} = \frac{1}{a_n} \Rightarrow B(s) + y_0 P_1(s) + \dots + y_{n-1} P_n(s) = \frac{1}{a_n} P_n(s) = \frac{1}{a_n} a_n = 1$

Fall b) alle $y_i = 0, B(s) = \mathbb{L}(\delta) = 1 \Rightarrow B(s) + y_0 P_1 + \dots + y_{n-1} P(n) = B(s) = 1$

$$L[y] = b, y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

Laplacetransformation $y(t) \circ \bullet Y(s)$

Lösung des AWP im Laplaceraum

$Y(s) = H(s)(B(s) + y_0 P_1(s) + \dots + y_{n-1} P_n(s))$ auflösen der Klammer und sumandenweises rücktransformieren ergibt

$$y(t) = (h * b)(t) + y_0 h_1(t) + \dots + y_{n-1} h_n(t) \text{ mit (siehe später):}$$

$$h_k(t) = a_n h^{n-k}(t) + \dots + a_k h(t), K = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Rekursionsformel: } h_k(t) = h'_{k+1}(t) + a_k h(t)$$

Interpretation:

$h * b$ ist die zero state Lösung zum Input b (d.h. $y_p = h * b$ löst $L[y_p] = b, y_p(0) = 0, \dots, y_p^{(n-1)}(0) = 0$)

$$h_k \text{ löst } L[h_k] = 0, h_k(0) = 0, \dots, h_k^{(k-1)}(0) = 0$$

Begründung der Formel für die h_k :

$$H(s) \underbrace{P_n(s)}_{a_n} \bullet \circ a_n h(t) = h_n(t)$$

Induktionsschritt $k + 1 \rightarrow k$:

$H(s)P_k(s) = H(s)(sP_{k+1}(s) + a_k)$ wird transformiert mit $HP_{k+1} \bullet \rightarrow k_{k+1}, h_{k+1}(0) = 0$ zu $k'_{k+1}(t) + a_k h(t) = \text{Inktionsvoraussetzung} = (a_n h^{n-k+1} + \dots + a_{k+1} h)' + a_k h = a_n h^{n-k} + \dots + a_{k+1} h' + a_k h$

Die Laplacetransformation liefert eine vollständige Darstellung der Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

2 Numerik und Optimierung

Die Numerik entwickelt und analysiert Verfahren zur approximativen Lösung kontinuierlicher Probleme auf dem Computer.

2.1 Grundlange der Numerik gewöhnlicher DGLn

2.1.1 Problemstellung

Ziel ist die approximative Lösung des AWP (mit Informationen und Kontrolle über die Genauigkeit)

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) & (19) \\ t &\in [a, b], y(a) = y(t_0) = y_0 \\ \text{gesucht} & y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{gegeben} & y_0 \in \mathbb{R}^n, f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

In vielen Anwendungen sind die entehenedne DGLn viel zu komplex um sie mit Lösungsformeln behandeln zu können. Z.B. Fahrdynamik, Roboter-dynamik, Planetenbewegungen, Reaktionskinetik, Schaltkreissimulation können nur approximativ auf dem Computer gelöst werden und nicht in Formeln. Wichtige äquivalente Formulierung (durch Integration) des AWP als Fixpunktgleichung:

$$y(t) = y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) ds \quad (20)$$

AWP: $y'(t) = f(t, y(t))$ auf $[a, b], y(a) = y_0$

Zur einfacheren Notation betrachten wir im Folgenden den skalaren Fall $n = 1$, d.h. $y \in \mathbb{R}$ der sich aber auf $m > 1$ erweitern lässt.

2.1.2 Grundidee numerischer Verfahren für AWP

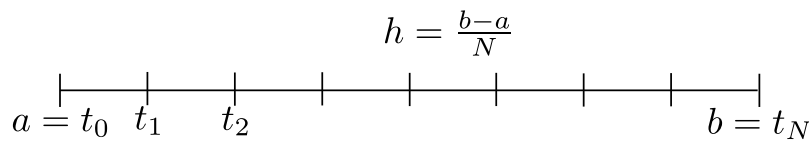


Figure 3: Der Zeitraum, in dem die DGL gelöst werden soll, wird durch Knoten in Intervalle unterteilt. Knoten: $t_i = a + jh, 0 \leq j \leq N$, N = Anzahl Maschen, Schrittweite $h = \frac{b-a}{N}$

Wir betrachten hierzu die Integralgleichung für $y(t)$ auf $[t_j, t_{j+1}]$

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} y'(t) dt = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt$$

$f(t, y(t))$ ist unbekannt, weil $y(t)$ unbekannt ist. Also muss das Integral *approximiert* werden. Durch die Approximation des Integrals (durch Interpolation bzw. Approximation) berechnen wir die *Näherung der Lösung*

$$y_j \approx y(t_j), j = 0, \dots, N$$

Durch die Approximation kommt es zum sogenannten *Diskretisierungsfehler*, mit dem wir uns später noch ausführlicher befassen werden.

Definition 4 (Diskretisierungsfehler e_j) Der Diskretisierungsfehler e_j berechnet sich durch

$$e_j = y(t_j) - y_j$$

Je nach Approximation des Integrals ergeben sich verschiedenen Verfahren, wobei wir nur Einschrittverfahren betrachten.

Definition 5 (Einschrittverfahren) Bei einem Einschrittverfahren basiert die Berechnung von y_{j+1}

- im expliziten Fall nur auf den Werten von y_j
- im impliziten Fall nur auf den Werten von y_j und y_{j+1}

Sobald Werte y_{j-2} oder Werte die noch weiter in der "Vergangenheit" liegen berücksichtigt werden, spricht man von einem Zwei- bzw. Mehrschrittverfahren.

Beim Euler Verfahren macht man folgende Kette von Approximationen:

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt &\approx \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, y(t_j)) dt \\ &\approx h \cdot f(t_j, y(t_j)) \\ &\approx h \cdot f(t_j, y_j) \end{aligned}$$

Anmerkung: Hier haben wir die Rechteckformel angewendet: $\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(t) dt \sim h \cdot g(t_j)$ Für Abschätzungen des Integrationsfehlers muss $g(t)$ hinreichend glatt sein und h hinreichend klein sein.

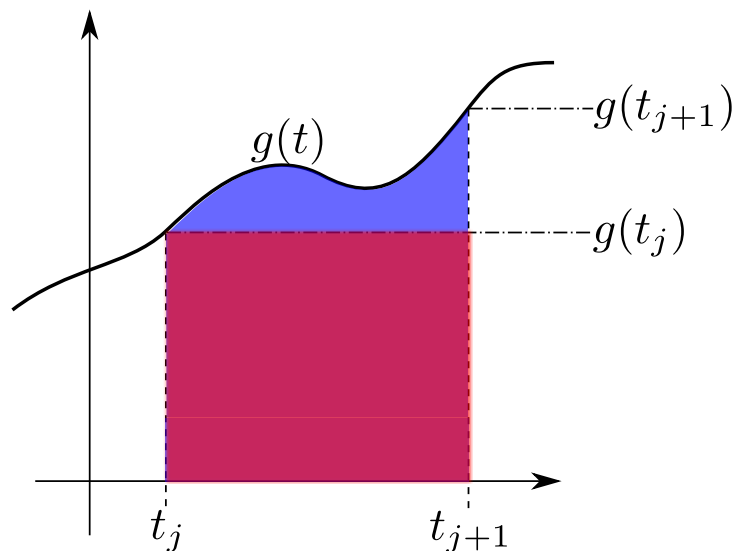


Figure 4: Blauer Bereich ist der Integrationsfehler. Der rote Bereich ist das Ergebnis der numerische Integration mit der Rechtecksapproximation und die Summe von rotem und blauen Bereich ist das Ergebnis der exakten Integration

Definition 6 (explizites Eulerverfahren)

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j), \quad j = 0, \dots, N-1$$

Interpretation: Da $f(t_j, y_j) = y'(t_j)$ können wir für die Berechnung von y_{j+1} einfach der Tangente durch y_j mit der Steigung $f(t_j, y_j)$ folgen. Das tun wir solange, bis wir beim Zeitpunkt t_{j+1} ankommen, was dem Zeitintervall h entspricht. Also wie bereits definiert $y_j + h \cdot f(t_j, y_j) = y_{j+1}$

Ein weiteres auf der Rechteckregel basierendes Verfahren ist das *implizite Eulerverfahren*. Hier wird $f(t_{j+1}, y_{j+1})$ für die Approximation genutzt. Wir benutzen also den "rechten" Wert bei t_{j+1} für die Berechnung des Integrals.

Definition 7 (implizites Eulerverfahren)

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N-1$$

Anmerkung: Wer sich fragt, warum man überhaupt das implizite Eulerverfahren benutzen will, obwohl das explizite Eulerverfahren einfacher anzuwenden ist möge einen Blick auf Wikipedia werfen. Sinngemäß steht dort, dass das implizite Eulerverfahren ein größeres Stabilitätsgebiet hat.

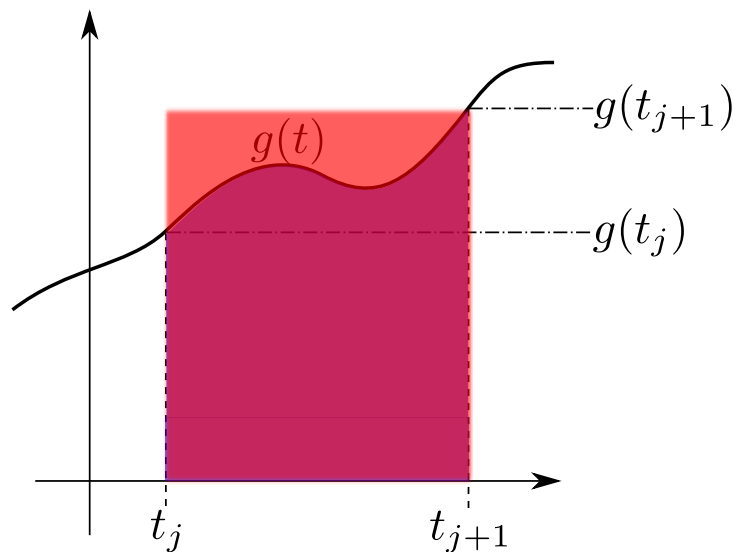


Figure 5: der hellrote Bereich ist der Integrationsfehler. Der rote Bereich ist das Ergebnis der numerische Integration durch das Rechteckverfahren mit dem Wert bei t_{j+1} als Stützstelle und der dunkelrote Bereich ist das Ergebnis der exakten Integration

Hier noch eine alternative Darstellung der Integrationsverfahren (nicht Teil

der Vorlesung)

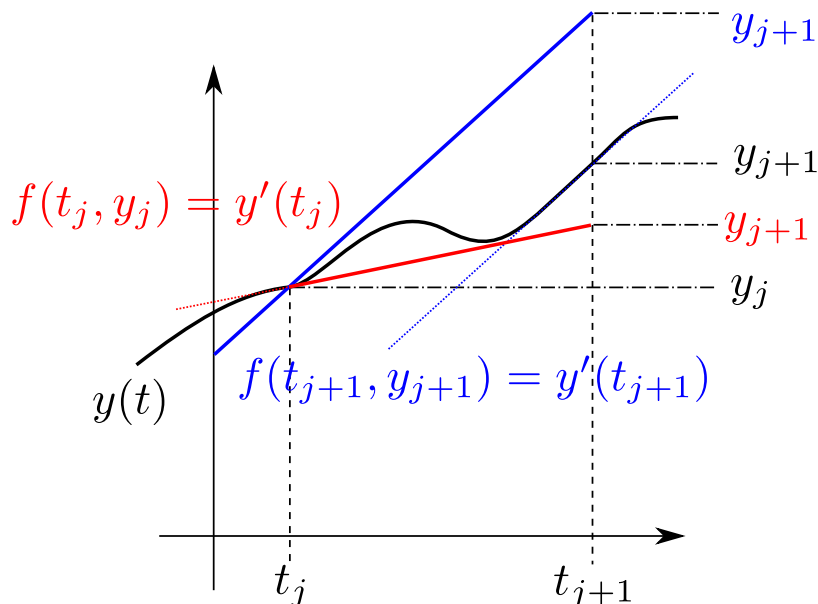


Figure 6: Die Approximation durch den expliziten Euler ist in rot gehalten. Die Representation des impliziten Eulers ist blau. Der Grundgedanke beider Verfahren ist es, mit der Steigung $f(t_i, y_i)$ am Punkt t_i bzw t_{i+1} den Wert y_{i+1} zu approximieren. Es ist offensichtlich, dass diese Approximationen nie dem genauen Wert von y_{i+1} (in schwarz geschrieben) erreichen werden, es sei denn $y(t)$ ist linear.

2.1.3 Kurzer Einschub über numerische Integration

Wir benötigen genauere Verfahren als die Rechteckregel.

Aufgabenstellung: Approximieren

$$\int_x^{x+h} g(t) dt$$

$$x = t_j, \quad g(t) = f(t, y(t))$$

und g ausreichend glatt.

Gängiger Ansatz: Lege ein Gitter über $[x, x+h]$ mit $m \geq 1$ Maschen und maschenweite

$$\Delta = \frac{h}{m}$$

und benutze die Werte von g in den Gitterpunkten

$$x + k\Delta, 0 \leq k \leq m$$

Ansatz:

$$\int_x^{x+h} g(t) dt \approx h \sum_{k=0}^m w_k g(x + k\Delta)$$

wobei

$$w_k \in \mathbb{R}, w_k > 0$$

die *Gewichtung* der zugehörigen Stützstelle $g(x+k\Delta)$ ist. (Anmerkung: Es wäre rein theoretisch möglich auch negative Gewichtungen zu benutzen, das ist aber nicht erwünscht.) Je nach Wahl von m und w_k erhalten wir unterschiedliche Integrationsformeln.

Der Ansatz erhält wichtige Eigenschaften des Integrals, insbesondere die *Linearität*

$$\int \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 dt = \lambda_1 \int g_1 dt + \lambda_2 \int g_2 dt$$

die sich in der numerischen Quadraturformel wie folgt überträgt

$$\sum_{k=0}^m \lambda_1 g_1(x+k\Delta) + \lambda_2 g_2(x+k\Delta) = \lambda_1 \sum_{k=0}^m g_1(x+k\Delta) + \lambda_2 \sum_{k=0}^m g_2(x+k\Delta)$$

Wir wollen nun Polynome möglichst hohen Grade mit dieser Quadraturformel *exakt* integrieren. Wegen der Linearität der Formeln genügt es, eine Basis von Polynomen, etwas $1, t, t^2, \dots, t^q$ zu benutzen, um ein Polynom vom Grad $\leq q$ zu integrieren. Um einfachere Formeln zu erhalten, benutzen wir im Folgenden die Basis

$$1, t-x, (t-x)^2, \dots, (t-x)^q$$

Für $g(t) = t-x$

$$\int_x^{x+h} (t-x) dt = \frac{(t-x)^2}{2} \Big|_x^{x+h} = \frac{h^2}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^m k w_k \stackrel{!}{=} \frac{h^2}{2\Delta h} = \frac{h}{2\Delta} \stackrel{\Delta=\frac{h}{m}}{=} \frac{m}{2}$$

Allgemein für $g(t) = (t-x)^q, q \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} (t-x)^q dt &= \frac{(t-x)^{q+1}}{q+1} \Big|_x^{x+h} = \frac{h^{q+1}}{q+1} \\ \Rightarrow h \sum_{k=0}^m w_k (k\Delta)^q &\stackrel{!}{=} \frac{h^{q+1}}{q+1} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^m k^q w_k &= \frac{h^q}{(q+1)\Delta^q} \stackrel{\Delta=\frac{h}{m}}{=} \frac{m^q}{q+1} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^m k^q w_k &= \frac{m^q}{q+1} \end{aligned}$$

Für die numerische Integration

$$\int_x^{x+h} g(t) dt \approx h \sum_{k=0}^m \omega_k g(x+k\Delta), \Delta = \frac{h}{m}$$

gilt also

$$g(t) = (t-x)^q \text{ wird exact integriert } \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^m k^q \omega_k}_{\text{lineare Gleichungen für } \omega_k} = \frac{m^q}{q+1}, q = 0, 1, 2, \dots$$

Es gibt zwei Mögliche Vorgehensweisen zur Bestimmung der w_k

- Wähle m und bestimme die ω_k aus den Gleichungen für $q = 0, \dots, m$
- Wähle m , interpoliere

$$(x, g(x)), (x + \Delta, g(x + \Delta)), \dots, (x + h, g(x + h))$$

durch ein Polynom p_m m -ten Grades und verwende

$$\int_x^{x+h} g(t)dt \approx \int_x^{x+h} p_m(t)dt$$

Beispiel 15 (Bestimmung der Gewicht ω_k bei $m = 1$) $m = 1 \Rightarrow$

ω_0, ω_1

Ersten Vorgehensweise

$$q = 0: \omega_0 + \omega_1 \stackrel{!}{=} 1$$

$$q = 1: 0 \cdot \omega_0 + 1 \cdot \omega_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{2}$$

Dies liefert die bekannte Trapezregel:

$$\int_x^{x+h} g(t)dt \approx h \cdot \frac{g(x) + g(x+h)}{2}$$

Die Bedingung für $q = 2$ wird nicht mehr erfüllt

$$0^2 \cdot \omega_0 + 1^2 \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$$

Zweite Vorgehensweise: wir interpolieren $(x, g(x))$ und $(x+h, g(x+h))$ durch ein Polynom ersten Grades (das ist eine Gerade)

$$g_1(t) = g(x) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}(t - x)$$

und integrieren

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} g_1(t)dt &= hg(x) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \left[\frac{(t-x)^2}{2} \right]_x^{x+h} \\ &= hg(x) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{h^2}{2} \\ &= h \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{=\omega_0} g(x) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\omega_1} g(x+h) \right) \end{aligned}$$

Beispiel 16 (Bestimmung der Gewicht ω_k bei $m = 2$) Wir wählen

$$m = 2, \omega_0 = 0, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0$$

Prüfen der Gleichungen:

$$q = 0: 0 + 1 + 0 = 1$$

$$q = 1: 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1 = \frac{2}{2}$$

$$q = 2: 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 = 1 \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \text{nicht mehr erfüllt}$$

Wir erhalten hier die Mittelpunktsregel

$$\int_x^{x+h} g(t) dt \approx h \cdot g\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Mit der Mittelpunktsregel sind wir also genau so gut wie mit der Trapezregel, müssen aber nur an einem Punkt auswerten.

Definition 8 (Ordnung eines Integrationsverfahrens) Ein Integrationsverfahren hat die Ordnung $p \in \mathbb{N}$, falls gilt:

$$\left| \int_x^{x+h} g(t) dt - h \sum_{k=0}^m \omega_k g(x + k\Delta) \right| = O(h^{p+1})$$

mit $h \rightarrow 0$ für $g \in \mathbb{C}^\infty$

Man erhält folgende gängigen Integrationsregeln:

m	Name	Gewichtungen	Ordnung	Fehler
1	Trapezregel	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2	$O(h^3)$
2	Simpsonregel	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	4	$O(h^5)$
3	3/8-Regel	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	4	$O(h^5)$
4	Milne-Regel	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	6	$O(h^7)$

Für $m \geq 7$ treten negative Gewichte auf und die Formeln werden numerisch ungünstig.

Bemerkung: Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Maximalgrad, für den Polynome von einem Integrationsverfahren exakt integriert werden und der Ordnung des Verfahrens:

Sei das Verfahren exakt für alle Polynome vom Grad $\leq p - 1$, d.h. obige Bedingungen gelten für $q = 0, \dots, p - 1$. Ist nun $g \in C^p([x, x + h])$ dann gilt mit Taylor-Entwicklung für $t \in [x, x + h]$:

$$g(t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{l!} g^{(l)}(x)(t-x)^l + R(t), \quad R(t) = \frac{1}{p!} g^{(p)}(\tau)(t-x)^p$$

wobei $\tau \in [x, t]$ geeignet ist. Ist C eine Oberschranke von $|g^{(p)}|/p!$ auf $[x, x + h]$, dann gilt $|R(t)| \leq C|t-x|^p \leq Ch^p$ für alle $t \in [x, x + h]$. Da das Polynom $g(t) - R(t)$ exakt integriert wird, folgt

$$\left| \int_x^{x+h} g(t) dt - h \sum_{k=0}^m \omega_k g(x + k\Delta) \right| = \left| \int_x^{x+h} R(t) dt - h \sum_{k=0}^m \omega_k R(x + k\Delta) \right| \leq 2Ch^{p+1}$$

d.h. das Verfahren hat *mindestens Ordnung* p

2.1.4 wichtige Einschrittverfahren

Ausgangspunkt für alle Einschrittverfahren ist

$$y(t_{j+1}) = \underbrace{y(t_j)}_{\approx y_j} + \underbrace{\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds}_{\text{to be approximated}} \quad (21)$$

Mit der Trapezregel zum Beispiel, wird das Integral mit

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \approx h \frac{f(t_j, y(t_j)) + f(t_{j+1}, y(t_{j+1}))}{2} \quad (22)$$

approximiert.

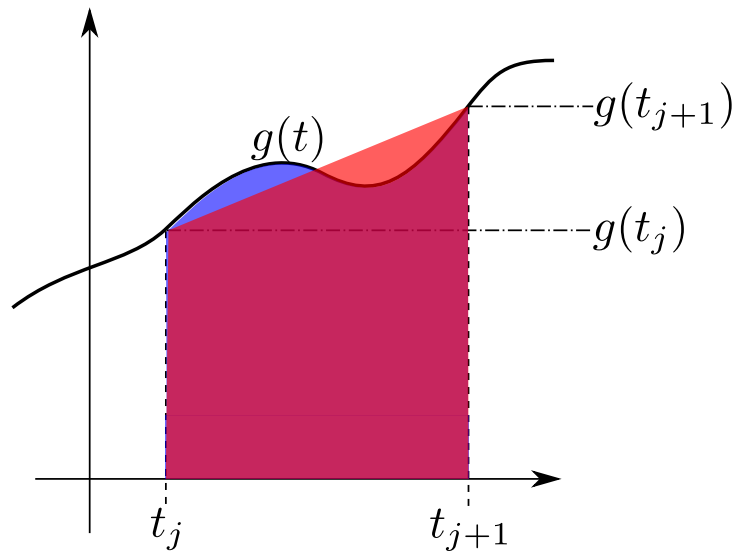


Figure 7: Der blaue Bereich ist das Ergebnis der exakten Integration. Die durchsichtig-rot darübergelegte rote Fläche repräsentiert die Integration nach der Trapezregel.

Definition 9 (Trapezregel)

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1}))$$

Das Trapezverfahren ist ein implizites Verfahren, was für die praktische Anwendung ein Nachteil ist.

Die numerische Approximation

$$f(t_j, y(t_j)) \approx f(t_j, y_j) \quad (23)$$

ist naheliegend. Wir müssen uns also noch Gedanken über die numerische Approximation von $y(t_{j+1})$ machen.

a) $y(t_{j+1}) \approx y_{j+1} \Rightarrow$ Trapezverfahren $y_{j+1} = y_j + h \frac{f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})}{2}$

diese Verfahren ist IMPLIZIT (y_{j+1} kommt rechts vor)

b) $y_{j+1} \approx y_j + h \cdot f(t_j, y_j)$ ist das Ergebnis des expliziten Eulerverfahrens, ausgedrückt durch y_j

\Rightarrow Verfahren von Heun $y_{j+1} = y_j + h \frac{f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_j + h \cdot f(t_j, y_j))}{2}$

Definition 10 (Das Verfahren von Heun) $y_{j+1} = y_j + h \frac{f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_j + h \cdot f(t_j, y_j))}{2}$

Oder anders ausgedrückt (bekannt als erstes Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung)

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$k_2 = f(t_{j+1}, y_j + h k_1)$$

Das Verfahren von Heun basiert auf der Trapezregel, wobei y_{j+1} durch das explizite Eulerverfahren approximiert wird!

Weiteres Verfahren durch Mittelpunktregel

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \approx h \cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, y\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$\underbrace{\approx}_{y(t_j + \frac{h}{2}) \approx y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)} h \cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)\right)$$

Somit modifiziertes Eulerverfahren $y_{t_{j+1}} = y_j + h \cdot f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j))$

Definition 11 (Modifiziertes Eulerverfahren)

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)\right)$$

(bekannt als zweites Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung)

$$y_{j+1} = y_j + h k_2$$

$$\text{mit } k_1 = f(t_j, y_j), k_2 = f(t_j + h/2, y_j + (h/2)k_1)$$

Verwenden wir die Simpson-Regel

Definition 12 (Simpsonregel)

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{6} \left(f(t_j, y_j) + 4 \cdot f\left(t_j + \frac{h}{2}, y\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right) + f(t_{j+1}, y_{j+1}) \right)$$

Das Simpsonverfahren ist ein implizites Verfahren, was für die praktische Anwendung ein Nachteil ist.

und approximieren wir

$y(t_j + 0.5 \cdot h)$ und $y(t_{j+1})$ geeignet durch Taylorentwicklung, dann erhalten wir das wichtige Runge-Kutta-Verfahren (RK4)

Definition 13 (Das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung (RK4))

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(t_j, y_j) \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_{j+1}, y_j + h \cdot k_3) \end{aligned} \tag{24}$$

Man beachte, dass die Gewichtungen denen des Simpsonverfahrens ähneln und auch tatsächlich mit diesen verwandt sind!

Beobachtungen aus numerischen Beispielen in der Vorlesung:

Verfahren	Diskretisierungsfehler
Euler	$O(h)$
Heun	$O(h^2)$
mod. Euler	$O(h^2)$
RK4	$O(h^4)$

Im offiziellen Skript befinden sich noch zwei größere Beispiele zur numerischen Berechnung von DGLs, die aber in der Vorlesung nicht behandelt wurden.

Aber wie geht nun die mathematische Berechnung des Diskretisierungsfehlers?

2.1.5 Konvergenz und Konsistenz

Vereinheitlichte Notation für Einschrittverfahren

$$y_{j+1} = y_j + h\Phi(t_j, h_i y_j) \tag{25}$$

Definition 14 (Verfahrensfunktion von Einschrittverfahren) Die Funktion

$$\Phi(t, h, y)$$

heisst Verfahrensfunktion

Kann Φ explizit (d.h. formelmäßig) berechnet werden, dann ist das Verfahren explizit, ansonsten implizit.

Beispiel 17 (Verfahrensfunktion des Eulerverfahrens) $y_{j+1} = y_j + h \underbrace{f(t_j, y_j)}_{\Phi(t_j, h, y_j)} \Rightarrow \Phi(t_j, h, y_j) = f(t_j, y_j)$

Beispiel 18 (Verfahrensfunktion des Verfahren von Heun) $y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(t_j, y_j) + \underbrace{f(\underbrace{t_j + h}_{t_{j+1}}, y_j + hf(t_j, y_j))}_{h\Phi(t_j, h, y_j)})$
 $\Rightarrow \Phi(t, h, y) = \frac{1}{2} (f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)))$

Beispiel 19 (Verfahrensfunktion des mod. Euler) $\Phi(t, h, y) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y))$

Beispiel 20 (Verfahrensfunktion des impliziten Euler)

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j + h, y_{j+1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(t_j, h, y_j) &= f(t_j + h, y_{j+1}) \\ &= f(t_j + h, y_j + h\Phi(t_j, h, y_j)) \end{aligned}$$

$\Phi(t, h, y)$ ist implizit gegeben durch die Gleichung. Daher ist dieses Verfahren ein implizites Verfahren.

Folgende abschätzbare Grösse ist eng verknüpft mit den nicht direkt abschätzbaren Diskretisierungsfehler

Definition 15 (Konsistenzfehler eines Verfahrens) Der Ausdruck $\tau(t, h) = \frac{1}{h} (y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, h, y(t)))$ mit $y(t) = \text{Lösung}$ heisst lokaler Abbruchfehler oder Konsistenzfehler des Verfahrens an der Stelle t

Es gibt zwei Interpretationen von $\tau(t, h)$:

- $\tau(t, h) = \frac{1}{h} \cdot$ (Defekt bei Einsetzen der Lösung in die Verfahrensgleichung)
- $\tau(t, h) =$ Differenz der Sekantensteigung der Lösung auf $[t, t + h]$ und der Sekantensteigung der numerischen Lösung

Zur Veranschaulichung der zwei Interpretationen

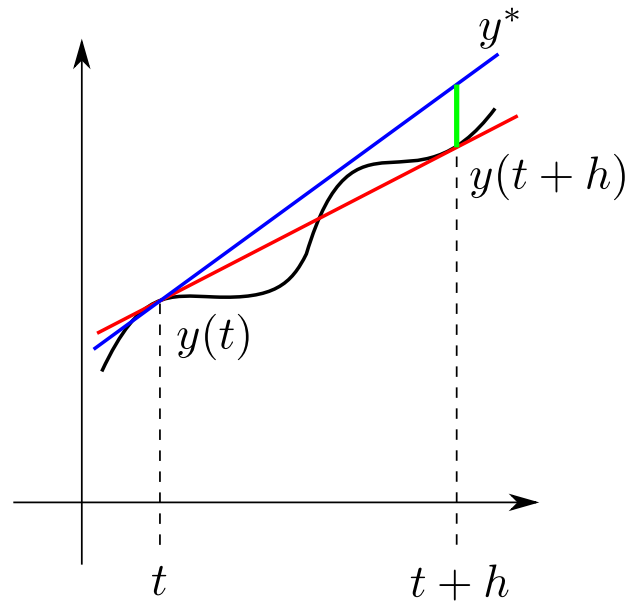


Figure 8: Grün ist der Konsistenzfehler des Verfahrens. y^* ist die Lösung des numerischen Verfahrens, das von der echten Lösung an $y(t + h)$ abweicht.

Sekantensteigung der Lösung $y \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$
 Sekantensteigung der num. Lösung $\frac{y^*-y(t)}{h} = \Phi(t, h, y(t))$

Definition 16 (Konsistenzordnung eines Verfahrens) Das Verfahren mit Verfahrensfunktion Φ heisst konsistent von der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ falls mit einer konstanten $C > 0$ gilt:

$$|\tau(t, h)| \leq Ch^p \text{ auf } [a, b] \text{ für } h \text{ hinreichend klein}$$

Definition 17 (Stabilität eines Verfahrens) Das Verfahren heisst stabil falls es auf $K > 0$ gibt mit

$$|\Phi(t, h, y_1) - \Phi(t, h, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \text{ für alle } t \in [a, b] \text{ und alle } y_1, y_2$$

Definition 18 (Konvergenzordnung eines Verfahrens) Das Verfahren

heisst konvergent mit der Ordnung p , falls es $M > 0$ und $H > 0$ gibt mit
 $|e_j| = |y(t_j) - y_j| \leq Mh^p, \forall j = 1, \dots, N$ auf alle N mit $h = \frac{b-a}{N} \leq H$

Bemerkung: Stabilität ist eine Lipschitzbedingung bezüglich y für Φ . Diese folgt üblicherweise aus der Lipschitzstetigkeit bezüglich y von f .

Zentral ist folgender Satz

Satz 5 (Zusammenhang zwischen Konsistenzordnung und Konvergenzordnung)
 Ein stabiles, konsistentes Verfahren ist konvergent. Ist die Konsistenzordnung p , so ist auch die Konvergenzordnung p .

Beispiel 21 (Konsistenzordnung des Eulerverfahrens) $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$ mit y als Lösung von $y' = f(t, y) \Rightarrow y'$ ist $C^1 \Rightarrow y$ ist C^2

Taylor

$$y(t+h) - y(t) = y'(t) \cdot h + \underbrace{\frac{1}{2}y''(t + \psi h)}_{\in [0,1] \text{ geeignet}} h^2 = f(t, y(t))h +$$

$$\frac{1}{2}y''(t + \psi h)h^2$$

$$\Rightarrow |\tau(t, h)| = \left| \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, h, y(t)) \right| = \frac{1}{2}|y''(t + \psi h)|h = O(h)$$

$$\Rightarrow \text{Konsistenzordnung } p = 1$$

$$\text{Konsistenzfehler } \tau(t, h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, h, y(t))$$

$$\text{Konsistenzordnung } p, \text{ falls } |\tau(t, h)| = O(h^p), (h \rightarrow 0)$$

Beispiel 22 (Modifiziertes Euler-Verfahren) $\Phi(t, h, y) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$

$$y(t+h) \stackrel{\text{Taylor}}{=}_{h=0} y(t) + y'(t)h + \frac{1}{2}y''(t)h^2 + \overbrace{\frac{1}{6}y'''(t + \xi h)h^3}^{R_3=O(h^3)}$$

$$= y(t) + f(t, y(t))h + \frac{1}{2}(f_t + f_y \cdot f)h^2 + R_3$$

$$\Phi(t, h, y(t)) = f\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t))\right)$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} f(t, y(t)) + \underbrace{f_t \cdot \frac{h}{2} + f_y \frac{h}{2} f(t, y(t))}_{\nabla_{t,y} f(t, y(t))^T} \left(\frac{h}{2} f(t, y(t)) \right)$$

$$\begin{aligned}
|\tau(t, h)| &= \left| \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, h, y(t)) \right| \\
&= \left| f + \frac{1}{2}f_t h + \frac{1}{2}f_y f h + \frac{1}{h}R_3 - \left(f + f_t \frac{1}{2} + f_y \frac{h}{2} + R_2 \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h}R_3 - R_2 \right| \\
&= O(h^2)
\end{aligned}$$

\Rightarrow Konsistenzordnung mind $p = 2$

$$\text{Nebenrechnung: } f\left(t + \underbrace{\frac{h}{2}}_s, \underbrace{y}_{y(t)} + \underbrace{\frac{h}{2}f}_d\right) = \nabla f(t, y)^T \begin{pmatrix} s \\ d \end{pmatrix} + O\left(\left\| \begin{pmatrix} s \\ d \end{pmatrix} \right\|^2\right)$$

Konsistenzordnung einiger Verfahren:

Verfahren	Konsistenzordnung
Expl. Euler-Verf.	1
Impl. Euler-Verf.	1
Verf. von Heun	2
Mod. Euler	2
RK4	4

2.1.6 Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Explizite RK-Verfahren haben folgende Form:

r-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren:

$$k_i = f\left(t + \gamma_i h, y + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, r \quad (26)$$

$$\Phi(t, h, y) = \sum_{i=1}^r \beta_i k_i \quad (27)$$

Bezeichnung: $k_i = k_i(t, h, y)$ heist i -te Stufe.

Kompakte Darstellung als Butcher-Schema

γ_1	0				
γ_2	α_{21}	0			
γ_3	α_{31}	α_{32}	0		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	
γ_r	α_{r1}	α_{r2}	\dots	$\alpha_{r,r-1}$	0
	β_1	β_2	\dots	β_{r-1}	β_r

Table 1: Man beachte, dass bei expliziten RK-Verfahren alle α_{ij} auf der Diagonale und oberhalb davon gleich Null sind.

Beispiel 23 (Butcher-Schema Expliziter Euler) $r = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Beispiel 24 (Butcher-Schema Mod Euler) $r = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Beispiel 25 (Butcher-Schema Von Heun) $r = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Beispiel 26 (Butcher-Schema Trapezregel) $r = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Beispiel 27 (Butcher-Schema RK4) $r = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Anmerkung: Ein bisschen Wiederholung (die folgende Vorlesung wurde nicht von Prof. Ulbrich gehalten)

Explizites Runge-Kutta-Verfahren

$$\varphi(t, h, y) = \sum_{i=1}^r \beta_i k_i$$

(r-stufig)

$$k_i = f(t + \gamma_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j)$$

Im Butcherschema heisst das, dass alle α_{ij} oberhalb der Diagonale gleich Null sind.

Beispiel 28 (Butcherschema für das Verfahren von Heun) *Verfahren von Heun*

$$\varphi(t, h, y) = \frac{1}{2}(f(t, y) + f(t + h, y + f(t, y))) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$\Rightarrow k_1 = f(t, y) = f(t + 0 \cdot h, y)$$

$$\Rightarrow k_2 = f(t + h, y + hk_1) = f(t + 1 \cdot h, y + hk_1)$$

0	0
1	1 0
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Mit diesem Ansatz lassen sich RK-Verfahren beliebiger Konsistenzordnung p erzeugen. Man muss dafür die Stufenzahl r gross genug wählen (bis zur Stufe 4 ist der Verhältnis linear, danach muss man immer mehr Stufen benutzen um die Konsistenzordnung zu verbessern)

Satz 6 (Konsistenzordnung expliziter RK-Verfahren) *Betrachte ein r -stufiges, explizites RKV mit*

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}, i = 1, \dots, r$$

Es besitzt genau dann für jede rechte Seite $f \in C^p([a, b] \times \mathbb{R})$ die Konsistenzordnung

$$\begin{aligned}
p \geq 1 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \beta_i = 1 \\
p \geq 2 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i = \frac{1}{2} \\
p \geq 3 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i^2 = \frac{1}{3} \\
& \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^r \alpha_{ij} \beta_i \gamma_i = \frac{1}{6} \\
p \geq 4 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i^3 = \frac{1}{4} \\
& \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^r \alpha_{ij} \beta_i \gamma_i \gamma_j = \frac{1}{8} \\
& \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^r \alpha_{ij} \beta_i \gamma_j^2 = \frac{1}{12} \\
& \text{und} \quad \sum_{i,j,k=1}^r \alpha_{ij} \beta_i \alpha_{ik} \gamma_k = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

2.1.7 Bemerkungen

Durch eine *adaptive, zeitabhängige Wahl der Schrittweite* h lässt sich der Aufwand der Verfahren stark verringern. Die Steuerung der Schrittweite erfordert eine Schätzung des *lokalen Fehlers*.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Hierzu verwendet man ein Verfahren mit zwei unterschiedlichen Schrittweiten (z.B. h und $\frac{h}{2}$) und vergleicht das Resultat.
2. Man verwendet Verfahren unterschiedlicher Ordnung.

2.1.8 Steife Differentialgleichungen

Steife DGLs kommen nur bei mehrdimensionalen Probleme vor. Der schnell fallende Teil der Lösung ist an sich für das Gesamtergebnis nicht wichtig, zwingt den numerischen Lösungsalgorithmus aber dazu, kleine Approximationsschritte zu machen. (Der aufmerksame Student bemerkt hier sofort die Parallelen zu Regelungssysteme 1, insbesondere Buss-Skript Kapitel 5.8)

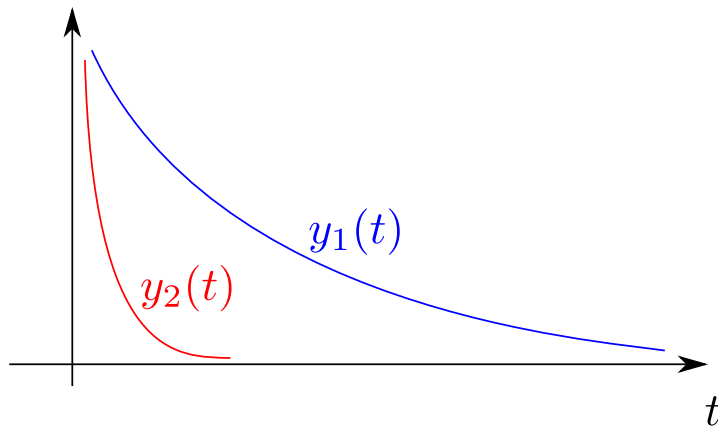


Figure 9: Der schnell abklingende, rote Teil der Lösung spielt bei der Gesamtlösung kaum eine Rolle (mit zunehmendem t verringert sich sein Anteil an der Lösung). Trotzdem zwingt die hohe Änderungsrate von $y_2(t)$ zu kleinen Integrationsschritten.

Ausgangsfunktion:

$$y'(t) = f(t, y(t)), t \in [a, b]$$

$$y(0) = y_0$$

$$y \in \mathbb{R}^n, f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n > 1$$

Der Begriff "steifes DGL-System" ist nicht einheitlich definiert, der wesentliche Punkt aller steifen DGL-System ist jedoch: *die Lösung ist zusammengesetzte aus langsam veränderlichen Teilen (die meist Abklingen) und Teilen, die im Vergleich dazu schnell abklingen.*

Definition 19 (Steife eines Systems) Ein System heisst steif, wenn gewisse Anteile der Lösung sehr viel schneller abklingen als andere.

Wichtiger Spezialfall: Lineare AWP

$$y' = Ay(t) + g(t), t \in [a, b], y(0) = y_0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Sei A diagonalisierbar mit den Eigenwerten λ_i und den Eigenvektoren v_i . Mit einer partikulären Lösung $y_p(t)$ ist dann die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

wobei

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

Für den Fall $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, i = 1, \dots, n$ konvergiert $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)

$$\Rightarrow y(t) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} y_p(t)$$

Hierbei klingen die Summanden in y_h mit $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \ll 0$ sehr schnell ab und Summanden mit $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ deutlich langsamer ab. Gibt es also Eigenwerten mit $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \ll 0$ und Eigenwerte mit $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ (schwach negativer Realteil) so nennt man das DGL-System *steif*.

Allgemeiner nichtlinearer Fall $y' = f(t, y)$:

Ein nichtlineares DGL-System heisst *steif* (in einer Umgebung von (t, y)), wenn die Jakobimatrix von f Eigenwerte mit $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \ll 0$ und $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ besitzt.

Problem an einem Bsp:

Beispiel 29 ($y' = Ay$)

$$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_2 \ll \lambda_1 < 0$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ sind Eigenwerten von A

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

\Rightarrow Der zweite Term spielt nach kürzester Zeit keine Rolle mehr. Der erste Term ist bestimmend und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen Null.

\Rightarrow In einem geeigneten Integrationsverfahren erwartet man, dass dieses Verhalten ohne grosse Einschränkungen an der Schrittweite wiedergespiegelt wird

$$\Rightarrow y_i \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$$

Mit dem expliziten Euler ($y_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$)

$$y_{j+1} = y_j + h A y_j = B(h) y_j$$

$$\Rightarrow y_j = B(h)^j y_0 = c_1 B(h)^j v_1 + c_2 B(h)^j v_2 = c_1 (1 + h \lambda_1)^j v_1 + c_2 (1 + h \lambda_2)^j v_2$$

Damit $y_j \rightarrow 0$ muss $|1+h\lambda_1| < 1$ und $|1+h\lambda_2| < 1$, z.B. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$

$$|1+h\lambda_1| = |1-h| < 1 \Leftrightarrow h < 2$$

$$|1+h\lambda_2| = |1-1000h| < 1 \Leftrightarrow h < 0.0002$$

Ein für steife DLG geeignetes Verfahren sollte hier für alle $h < 2$ $|y_j| \rightarrow 0$ liefern

Beispiel 30 (Nichtlinearer Fall) *Gradientenfluss einer Potentialfunktion*

Die Rosenbrockfunktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = 100(x_2 - x_1^2) + (1 - x_1)^2$$

Richtung des Steilsten Abstiegs $-\nabla\Phi = f$

$$f(x) = -\nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} 400x_1(x_2 - x_1^2) + 2(1 - x_1) \\ 200(x_1^2 - x_2) \end{pmatrix}$$

Weg $x(t) \rightarrow$ Fluss des steilsten Abstiegs : $x'(t) = f(x(t))$

Betrachte Jakobimatrix von f

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} 400x_2 - 1200x_1^2 - 2 & 400x_1 \\ 400x_1 & -200 \end{pmatrix}$$

Das "Tal" ist gegeben durch $x_2 = x_1^2$

\Rightarrow *Jacobimatrix im "Tal" durch einsetzen von $x_2 = x_1^2$*

$$JF(x) = \begin{pmatrix} -800x_1^2 & 400x_1 \\ 400x_1 & -200 \end{pmatrix}$$

Man berechne nun die Eigenwerte für verschieden (x_1, x_2) besonders in Nähe des Tals.

\Rightarrow *Problem ist steif in der Nähe des Tals.*

Die homogene Lösung einer linearen AWP ist für diagonalisierbares A zusammengesetzt aus Linearkombinationen von $e^{\lambda_i t} v_i$

\Rightarrow um Verfahren für steife DGL zu bewerten und zu analysieren, betrachtet man die folgende Modellgleichung (*dahlquist'sche Testgleichung*)

Definition 20 (Dahlquist'sche Testgleichung)

$$y' = \lambda y \tag{28}$$

$$y(0) = 1,$$

$$\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$$

Die Lösung ist

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

und wegen $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$

Forderung: Die numerisch gewonnenen Lösungen y_j sollen die Eigenschaften von $y(t)$ möglichst gut widerspiegeln. Ich kann also mit dieser Gleichung die Qualität eines numerischen Verfahrens testen.

Definition 21 (Stabilität) Ein Verfahren heißt

A-stabil, wenn angewendet auf das Modellproblem die Lösungen y_j die Bedingung

$$|y_{j+1}| \leq |y_j| \quad \forall j \geq 0, h > 0$$

erfüllt.

L-stabil wenn es A-stabil ist und zusätzlich $|y_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Bei vielen Einschritt-Verfahren gilt bei Anwendung auf das Modellproblem der Zusammenhang über die *Stabilitätsfunktion*

Definition 22 (Stabilitätsfunktion R)

$$\begin{aligned} R &: D \rightarrow \mathbb{C} \\ q &= h\lambda \\ y_{j+1} &= R(q) y_j \end{aligned}$$

Definition 23 (Stabilität als Funktion der Stabilitätsfunktion)

$$\begin{aligned} A\text{-stabil} &\Leftrightarrow |R(q)| \leq 1 \quad \forall q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\{q\} < 0 \\ L\text{-stabil} &\Leftrightarrow |R(q)| < 1 \quad \forall q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\{q\} < 0 \end{aligned}$$

Definition 24 (Stabilitätsgebiet S)

$$S = \{q \in \mathbb{C} \mid |R(q)| < 1\}$$

Satz 7 (Zusammenhang Stabilitätsgebiet und L-Stabilität)

$$L\text{-stabil} \Leftrightarrow \{q \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\{q\} < 0\} \subset S$$

Beispiel 31 (Stabilität des expliziten Euler-Verfahrens)

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j) \\&= y_j + h\lambda y_j \\&= (1 + \lambda h)y_j \Rightarrow R(q) = 1 + q\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \{q \in \mathbb{C} \mid |1 + q| < 1\}$$

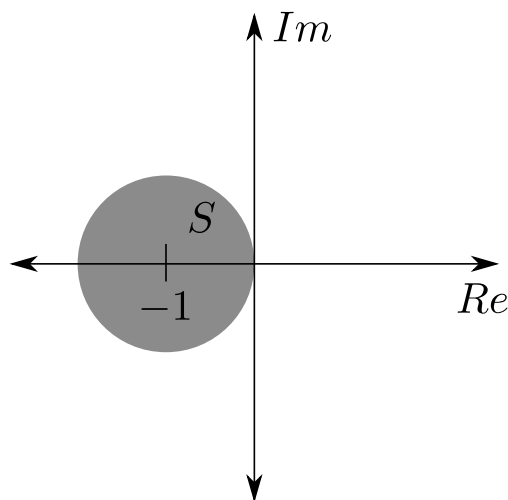


Figure 10: Das Stabilitätsgebiet des expliziten Euler-Verfahrens ist ein Kreis um -1 mit dem Radius 1. Achtung, das Stabilitätsgebiet ist eine offene Menge, d.h. der Rand des Kreises ist nicht Teil von S .

Das Explizite Eulerverfahren ist nicht A-stabil, und damit auch nicht L-stabil!

Satz 8 (A-Stabilität expliziter RK-Verfahren) *Alle expliziten Runge-Kutta Verfahren sind nicht A-stabil!*

Beispiel 32 (Stabilität des impliziten Euler-Verfahrens)

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1}) \\
 &= y_j + h\lambda y_{j+1} \\
 \Leftrightarrow y_{j+1} &= \frac{1}{1 - h\lambda} y_j \\
 \Rightarrow R(q) &= \frac{1}{1 - q}
 \end{aligned}$$

$$S = \{q \in \mathbb{C}; |1 - q| > 1\} \supset \{q \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(q) < 0\}$$

TODO: Ich glaube die Graphik ist nicht ganz richtig.

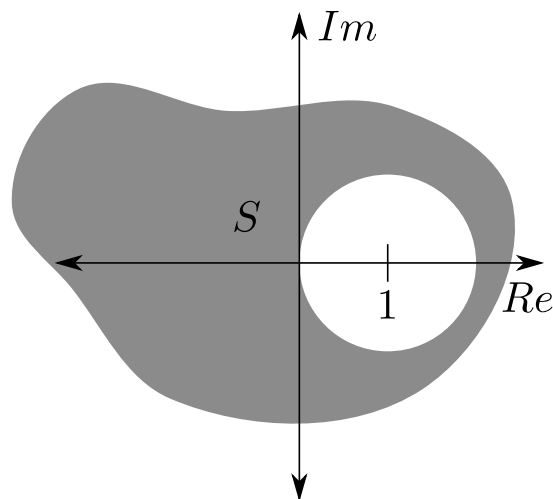


Figure 11: Das Stabilitätsgebiet des impliziten Euler-Verfahrens ist die ganze komplexe Ebene \mathbb{C} ohne den Kreis mit Radius 1 um 1. Der Rand des Kreises ist *nicht* Teil von S .

Da die komplexe Halbebene $\operatorname{Re}\{q\} < 0$ Teil von S ist, mathematisch ausgedrückt

$$\{q \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\{q\} < 0\} \subset S$$

ist das implizite Eulerverfahren L -stabil!

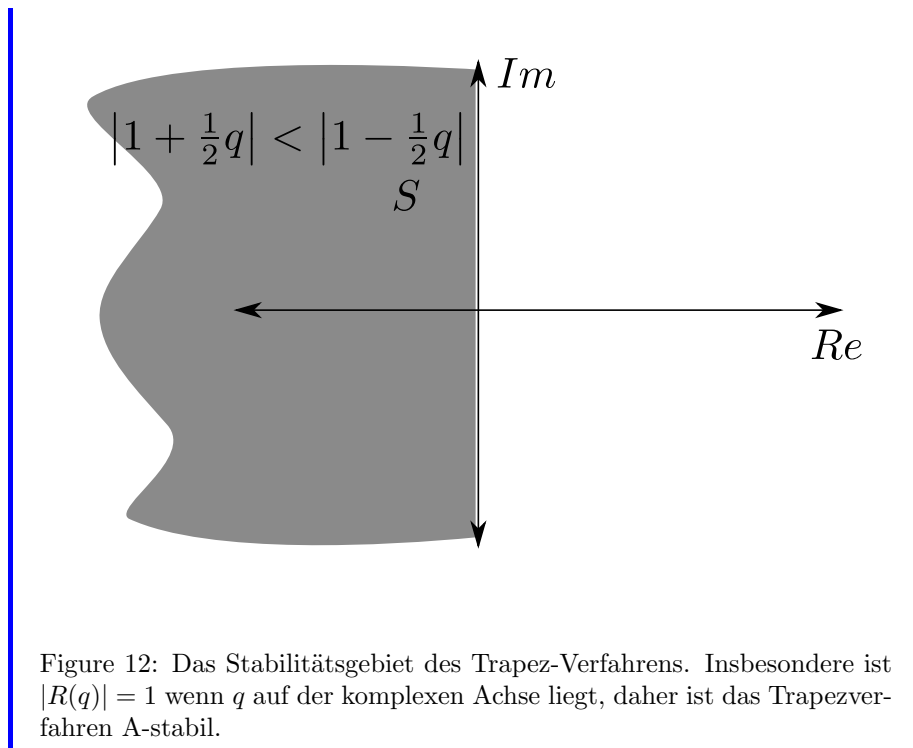
Interpretation(aus praktischer Beobachtung): Des Verfahren ist sehr stabil. Manchmal sogar "zu" stabil (Erinnerung: in einer der Übungen wurde die Approximation des Kreises zu stark gedämpft und die Funktion ist gegen Null konvergiert, anstatt auf dem Einheitskreis zu bleiben.)

Beispiel 33 (Stabilität des Trapez-Verfahrens)

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2} (f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})) \\&= y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j) + \frac{h}{2} f(t_{j+1}, y_{j+1}) \\&= y_j + \frac{h}{2} \lambda y_j + \frac{h}{2} \lambda y_{j+1} \\ \Leftrightarrow y_{j+1} - \frac{h}{2} \lambda y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2} \lambda y_j \\ \Rightarrow y_{j+1} &= \frac{1 + \frac{h}{2} \lambda}{1 - \frac{h}{2} \lambda} y_j \\ \Rightarrow R(q) &= \frac{1 + \frac{1}{2} q}{1 - \frac{1}{2} q}\end{aligned}$$

Für das Stabilitätsgebiet S muss wie wir bereits wissen, gelten

$$\begin{aligned}|R(q)| &< 1 \\ \left| \frac{1 + \frac{1}{2} q}{1 - \frac{1}{2} q} \right| &< 1 \\ \frac{|1 + \frac{1}{2} q|}{|1 - \frac{1}{2} q|} &< 1 \\ \left| 1 + \frac{1}{2} q \right| &< \left| 1 - \frac{1}{2} q \right| \\ \Rightarrow S = \left(q \in \mathbb{C} \mid \left| 1 + \frac{1}{2} q \right| &< \left| 1 - \frac{1}{2} q \right| \right) &= \{q \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(q) < 0\}\end{aligned}$$



2.1.9 Implizite Runge-Kutta-Verfahren

Besonders gut geeignet für steife DGL

$$\Phi(t, h, y) = \sum_{i=1}^r \beta_i k_i$$

$$k_i = f(t + \gamma_i h, y + h \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} k_j), i = 1, \dots, r$$

Butscher-Schema

γ_1	α_{11}	α_{12}	\dots	\dots	α_{1r}
γ_2	α_{21}	α_{22}			
γ_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	
γ_r	α_{r1}	α_{r1}	\dots	$\alpha_{r,r-1}$	$\alpha_{r,r}$
	β_1	β_1	\dots	β_{r-1}	β_r

Table 2: Hier sind alle α_{ij} im Butscherschema nutzbar im Gegensatz zu Tabelle ?? auf Seite ??

\Rightarrow nichtlineares Gleichungssystem für die k_i

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t + \gamma_1 h, y + \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} k_j) \\ \vdots \\ f(t + \gamma_r h, y + \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} k_j) \end{pmatrix}$$

Dadurch, dass ich mehr Parameter α_{ij} zur Verfügung habe \Rightarrow bei impliziten r -stufen RK-Verfahren kann man die Koeffizienten $\gamma_i, \beta_i, \alpha_{ij}$ so wählen, dass ein L-stabiles Verfahren der Ordnung $p = 2r$ entsteht.

2.2 Lösung nichtlinearer Gleichungssystem

In der Praxis treten häufig nichtlineare Gleichungssysteme auf

$$F(x) = 0 \text{ mit } F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Beispiel 34 ($y' = f(t, y)$)

$$y(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit dem impliziten Eulerverfahren:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

$$\Rightarrow x = y_{k+1}$$

löst das Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = x - y_k - hf(t_{k+1}, x)$$

Gleichungssysteme hängen also eng mit *Fixpunktgleichungen* zusammen

Definition 25 (Fixpunktgleichung)

$$x = G(x)$$

mit $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine *Fixpunktgleichung*. x^* heißt *Fixpunkt* von G .

$$G \Leftrightarrow x^* = G(x^*)$$

Beispiel 35 (Fixpunkt impliziter Euler)

$$x = y_{k+1}$$

ist *Fixpunkt* von

$$G(x) = y_k + hf(t_{k+1}, x)$$

Zur Äquivalenz von Fixpunktgleichungen und Gleichungssystemen

$$x = G(x) \Leftrightarrow x - G(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0 \text{ mit } F(x) = x - G(x)$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = x - F(x) \Leftrightarrow x = G(x) \text{ mit } G(x) = x - F(x)$$

Verallgemeinert: Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, dann

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow MF(x) = 0 \Leftrightarrow x = G(x)$$

mit $G(x) = x - MF(x)$

M spielt hier die Rolle eines *Vorkonditionierers*.

2.2.1 Fixpunktiteration und Fixpunktsatz von Banach

Fixpunktiteration $x_0 \in D$ gegeben. Für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{k+1} = G(x_k)$$

Gesucht werden minimale Voraussetzungen an G , so dass

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$$

und

$$x^* = G(x^*)$$

Bemerkung: Die *Picard-Iteration* ist eine Fixpunkt-Iteration über Funktionen statt Vektoren.

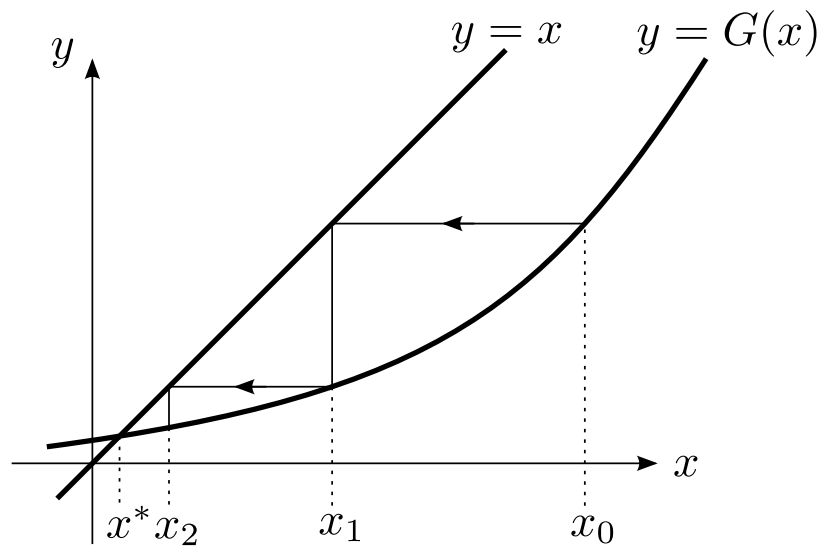


Figure 13: Diese Bild zeigt *monotone Konvergenz*, d.h wir nähern uns mit jeder Iteration dem Fixpunkt x^* *von einer Seite* an. Ausserdem wird hier und in den folgenden Abbildungen, der Vorgang der Fixpunktiteration graphisch dargestellt. Man beginnt mit einem Startwert x_0 und wertet diesen mit $G(x_0)$ aus. Dieses $G(x_0)$ ist mein erster Iterationsschritt x_1 . Um die Position von x_1 graphisch zu bestimmen, nutzen wir die Gerade $y = x$. Dort wo sich die Funktionen $y = G(x)$ und $y = x$ schneiden, also an dem Punkt $G(x) = x$ befindet sich der Fixpunkt x^*

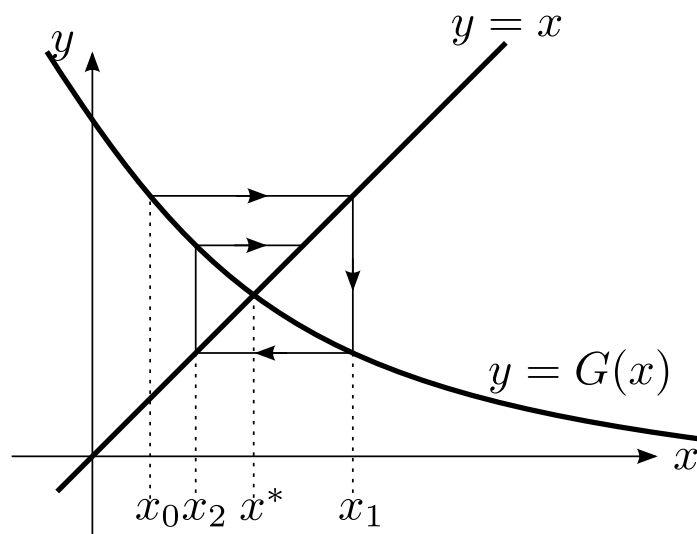


Figure 14: Auch hier konvergiert das Verfahren gegen den Fixpunkt x^* , allerdings nicht mehr von einer Seite. Die Iterationsschritte sind nun alternierend größer oder kleiner als der Fixpunkt.

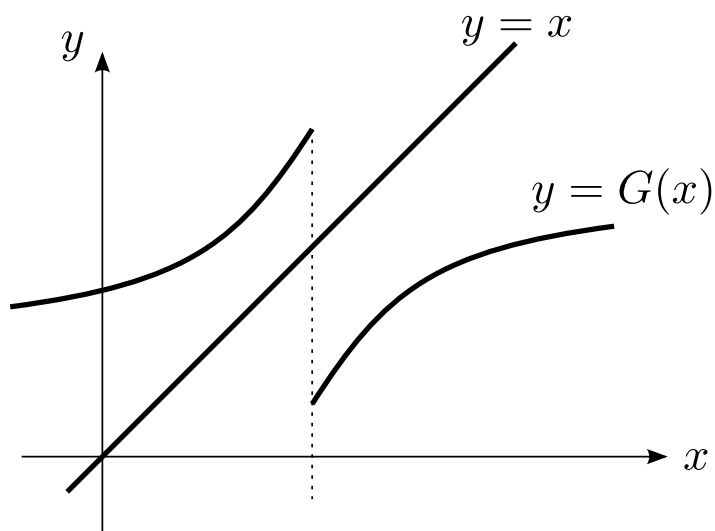


Figure 15: Die Graphik veranschaulicht, dass Stetigkeit am Fixpunkt eine Voraussetzung für Konvergenz ist.

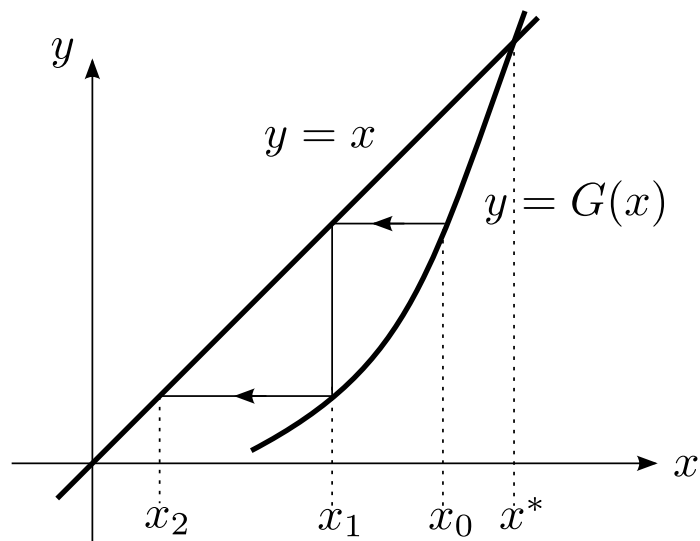


Figure 16: In diesem Fall konvergiert das Verfahren *nicht*. Mit jedem Iterationsschritt entfernen wir uns weiter vom Fixpunkt x^* . Der Grund hierfür ist die starke Steigung der Funktion, so dass für die Lipschitzkonstante L gilt: $L > 1$. Gleiches gilt auch für den Fall $L < -1$

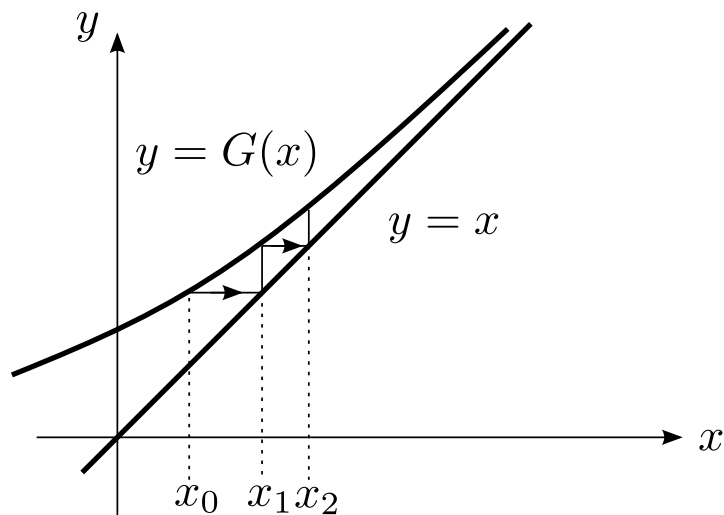


Figure 17: Auch bei *asymptotischer Annäherung* der Funktion $y = G(x)$ an $y = x$ konvergiert das Verfahren *nicht*, obwohl die Lipschitzkonstante die Bedingung $L < 1$ erfüllt.

Anmerkung: Besonders schnelle Konvergenz hat man, wenn die Steigung von G am Fixpunkt gleich Null ist. Dies heißt *superlineare Konvergenz*.

Die obigen Abbildungen motivieren folgenden Satz

Satz 9 (Fixpunktsatz von Banach) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\neq \emptyset$, und $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

1. $G(D) \subseteq D$ d.h. $\forall x \in D : G(x) \in D$ (Selbstabbildungseigenschaft)
2. G ist eine Kontraktion, d.h. es gibt $0 < L < 1$ mit

$$\|G(x) - G(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

Dann gilt

1. Für jedes $x_0 \in D$ ist die Fixpunktiteration wohldefiniert und erzeugt die Folge $(x_r) \subset D$
2. (x_r) konvergiert gegen ein $x^* \in D$
3. x^* ist ein Fixpunkt: $x^* = G(x^*)$
4. x^* ist der einzige Fixpunkt von G auf D

5. Fehlerabschätzung

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k+1}\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \forall k \geq 1$$

Bemerkung: Ist \bar{x} ein Fixpunkt von G und ist G eine Kontraktion auf $D = K_r(\bar{x}) = \{x \mid \|x - \bar{x}\| \leq r\}$, dann gilt $G(K_r(\bar{x})) \subset K_r(\bar{x})$

Denn: $\forall x \in K_r(\bar{x}) : \|G(x) - \bar{x}\| = \|G(x) - G(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\| \leq Lr < r$

Nachweise des Fixpunktsatzes von Banach:

1. Durchführbarkeit für bel. $x_0 \in D$ folgt aus $G(D) \subset D$
2. z.z.: $x_r \rightarrow x^* \in D$ Hier steckt die Hauptarbeit: Für bel $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|G(x_k) - G(x_{k-1})\| \\ &\leq L\|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq L^2\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \\ &\leq \dots \\ &\leq L^k\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Für beliebige $l > k$ folgt:

$$\begin{aligned} \|x_l - x_k\| &= \|(x_l - x_{l-1}) + (x_{l-1} - x_{l-2}) + \dots \\ &\quad \dots + (x_{k+2} - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x_k)\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j=k}^{l-1} \|x_{j+1} - x_j\| \\ &\stackrel{s.o.}{\leq} \sum_{j=k}^{l-1} L^j \|x_1 - x_0\| \\ &\leq L^k \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{\infty} L^i \\ &\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Somit $\|x_l - x_k\| \xrightarrow{l, r \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (x_k)$ ist eine *Cauchy-Folge* und besitzt in \mathbb{R}^n einen Grenzwert x^* . Mit D abgeschlossen $D \ni (x_k) \rightarrow x^* \Rightarrow x^* \in D$

3. z.z.:

$$\underbrace{x_{k+1}}_{\rightarrow x^*} = \underbrace{G(x_k)}_{\rightarrow x^*} \quad \blacksquare$$

$\rightarrow G(x^*), \text{ da } G \text{ stetig (Iteration)}$

4. z.z.: x^* ist der einzige Fixpunkt in D . Annahme: $\bar{x} \in D, \bar{x} \neq x^*$ erfüllt ebenfalls $\bar{x} = G(\bar{x})$ Dann:

$$\|\bar{x} - x^*\| = \|G(\bar{x}) - G(x^*)\| \leq \underbrace{L}_{< 1} \|\bar{x} - x^*\| < \|\bar{x} - x^*\|$$

Das ist aber ein Widerspruch! \blacksquare

5. Fehlerabschätzungen:

$$\|x_l - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|, \quad \forall l > k$$

mit $l \rightarrow \infty$ nähert sich x_l dem Fixpunkt x^* an

$$l \rightarrow \infty : \|x^* - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|, \quad \forall k$$

speziell für $k = 1$ gilt:

$$k = 1 : \|x^* - x_1\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

Daher gilt allgemein:

$$\|x^* - \underbrace{x_k}_{\text{ersetzt } x_1}\| \leq \frac{L}{1-L} \left\| \underbrace{x_k}_{\text{ersetzt } x_1} - \underbrace{x_{k-1}}_{\text{ersetzt } x_0} \right\| \quad (29)$$

Gleichung ?? ist die *aposteriori* Abschätzung (da ich die Abschätzung des Fehlers in Schritt k auf dem Fehler im Schritt $k-1$ basiere, und dieser erst berechnet werden muss). Wir hatten

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \|x_1 - x_0\|$$

mit einem *Indexshift* in k

$$\begin{aligned} \|x_k - x_{k-1}\| &\leq L^{k-1} \|x_1 - x_0\| \\ \Rightarrow \|x^* - x_k\| &\leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

diese Abschätzung ist *apriori* da ich mit dieser Fehlerabschätzung schon nach einem Iterationschritt eine Obergrenze für den Fehler habe.

Bemerkung: Die *aposteriori*-Abschätzung ist genauer als die *apriori* Abschätzung und kann als *Abbruchbedingung* verwendet werden.

Hilfsmittel zur Abschätzung von L : Ist D abgeschlossen und konvex, dann gilt:

$$\|G(x) - G(y)\| \leq L \|x - y\|$$

mit

$$L = \max_{x \in D} \|G'(x)\|$$

wobei

$$G'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{Jakobimatrix}$$

und Matrixnorm

$$\|M\| = \max_{\|v\|=1} \|Mv\|$$

Begründung: Setze

$$\phi(t) = G(y + t(x - y))$$

Dann ist

$$G(x) - G(y) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt = \int_0^1 G'(y + t(x - y))(x - y) dt$$

und

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \underbrace{\int_0^1 \underbrace{\|G'(y + t(x - y))\|}_{\substack{\in D \\ \leq L}} \cdot \|x - y\| dt}_{\leq L} \leq L \|x - y\|$$

Beobachtung: Ist $x^* = G(x^*)$ und $\|G'(x^*)\| \ll 1$. Dann, falls G' stetig ist, folgt $\|G'(x)\| \ll 1$ in Umgebung von $x^* \Rightarrow$ sehr gute Kontraktion sobald die Fixpunktiteration in diese Umgebung eintritt.

Ideal (superlineare Konvergenz):

$$\|G'(x^*)\| = 0$$

Beispiel 36 (Lipschitzkonstante und Fehler von $G(x) = \frac{x^2}{4}$)

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, D = [0, 1], G(x) = \frac{x^2}{4}$$

Dann: $G([0, 1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$ d.h. Kontraktionsanforderung erfüllt

L-Konstante direkt abschätzen:

$$x, y \in [0, 1] : |G(x) - G(y)| = \frac{1}{4} |x^2 - y^2| = \frac{1}{4} \underbrace{|x + y|}_{\leq \frac{1}{2} =: L} |x - y|$$

L-Konstante über Ableitung abschätzen:

$$x \in [0, 1] \Rightarrow |G'(x)| = \left| \frac{x}{2} \right| \leq \frac{1}{2} =: L$$

(Anmerkung: Abschätzung über Ableitung üblicherweise schneller und einfacher!)

Fehlerabschätzungen:

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = G(x_0) = \frac{1}{4}$$

apriori

$$|\underbrace{x^*}_{=0} - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0| \stackrel{L=\frac{1}{2}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{4}$$

aposteriori

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| \stackrel{L=\frac{1}{2}}{=} |x_k - x_{k-1}|$$

Beispiel 37 (Impliziter Euler als Fixpunktgleichung) Anwendung auf impliziten Euler Schritt:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

Zeitschritt $y_j \rightarrow y_{j+1}$ mit impliziten Euler :

$$y_{j+1} = \underbrace{y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1})}_{=: G(y_{j+1})}$$

D.h $x = y_{j+1}$ ist Fixpunkt von

$$G(x) = y_j + hf(t_{j+1}, x)$$

Sei L_f die Lipschitzkonstant von f bzgl. y d.h

$$||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq L_f ||y_1 - y_2||$$

Dann

$$\begin{aligned} ||G(x_1) - G(x_2)|| &= h ||f(t_{j+1}, x_1) - f(t_{j+1}, x_2)|| \\ &\leq h L_f ||x_1 - x_2||, \quad \forall x_1, x_2 \end{aligned}$$

\Rightarrow wir können $L = hL_f$ wählen. Mit $h < \frac{1}{L_f} \Rightarrow L < 1$

Beispiel 38 (Bestimme L von $y'(t) = -99y(t) - \frac{y(t)}{1+y(t)^2}$)

$$y'(t) = -99y(t) - \frac{y(t)}{1+y(t)^2}, \quad y(0) = 1$$

Suche das Ergebnis y_1 des ersten impliziten Eulerschritts, d.h

$$y \approx y(\underbrace{t_1}_{=h})$$

Durch Anwenden des Fixpunktverfahrens. Hier

$$f(t, y) = -99y - \frac{y}{1+y^2}$$

Bestimmung von L_f :

$$|\partial_y f(t, y)| = \underbrace{\left| -99 + \overbrace{\frac{y^2 - 1}{(1 + y^2)^2}}^{|\cdot| \leq 1} \right|}_{\substack{\text{scharf}(y=0) \\ \leq}} 100$$

$$\Rightarrow L_f = 100 \Rightarrow L = hL_f = 100h \Rightarrow h < \frac{1}{L_f} = \frac{1}{100}$$

Nehmen wir zum Beispiel $h = \frac{1}{2L_f} = 0,005 \Rightarrow L = \frac{1}{2}$ und wählen $x_0 = y_0 = 1$ dann

k	$ x_{k+1} - x_k $
0	5.0 e-1
1	2.5 e-1
2	1.2 e-1
\vdots	\vdots
31	1.8 e-10
32	9.1e-11

Beobachtung:

- Das Fixpunktverfahren ist universell
- Konvergenz ist ernsthaften Einschränkungen unterworfen
- Konvergenzrate ist nur linear (Fehlerreduktion ca. um Faktor L pro Iteration)

Wunsch: Schnelleres Verfahren \rightarrow Newtonverfahren und Varianten

2.2.2 Das Newtonverfahren für nicht-lineare Gleichungssysteme

Nachteile der Fixpunktiteration

- oft keine Kontraktion \rightarrow Fixpunktverfahren konvergiert
- langsame Konvergenz

\Rightarrow Das Newtonverfahren ist Standard zur Nullstellensuche einer Funktion $F \in C^1$

Definition 26 (Das Gauss-Newtonverfahren in \mathbb{R})

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

$$F \in C^1$$

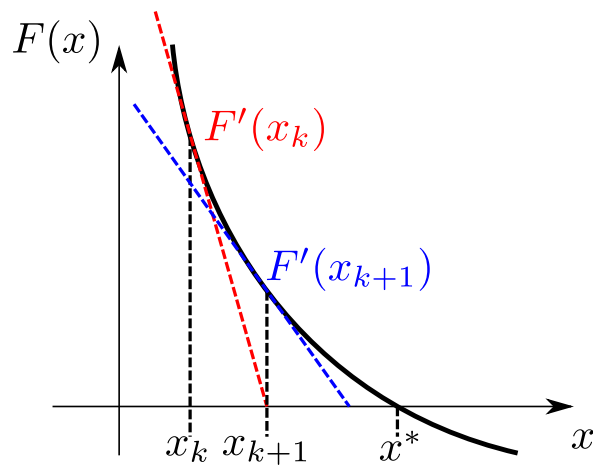


Figure 18: Die Idee des *Newtonverfahren* ist simpel. Man sucht den Punkt $F(x) = 0$ welcher x^* entspricht, indem man sich Schritt für Schritt mit den Nullstellen der linearen Approximation von $F'(x_k)$ an den jeweiligen x_k an x^* annähert.

Beispiel 39 (Anm. des Authors: Herleitung des Newtonverfahren)

Die Tangentengleichung an x_k lautet, für eine Schrittweite h

$$t(x_k + h) = f(x_k) + F'(x_k)h$$

Nun setzen wir unsere Schrittweite $h = x - x_k$ und setzen in die Tangentengleichung ein

$$t(x) = F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)$$

Wir wählen nun x_{k+1} so dass es die einzige Nullstelle dieser Tangente ist

$$\begin{aligned} t(x_{k+1}) = F(x_k) + F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} + x_{k+1} - x_k &= 0 \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \end{aligned}$$

Definition 27 (Das Gauss-Newtonverfahren im \mathbb{R}^n)

$$F(x) = 0, F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Idee: In jedem Iterationsschritt wird $F(x)$ durch eine lineare Approximation $\tilde{F}(x)$ ersetzt und die Nullstelle von $\tilde{F}(x)$ wird als Näherung für die Nullstelle x^ interpretiert.*

Linearisierung:

$$F(x) = \underbrace{F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)}_{=: \tilde{F}_k(x)} + o(\|x - x_k\|)$$

\rightarrow Newtonverfahren, falls $F'(x_k)^{-1}$ existiert:

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k)$$

Die Bestimmung der Inversen $F'(x_k)^{-1}$ ist meist zu aufwändig. \rightarrow bestimme Newton-Korrektur s_k so dass

$$F'(x_k)s_k = -F(x_k)$$

und setze

$$x_{k+1} = x_k + s_k$$

Man kann das Newton-Verfahren als Fixpunktverfahren mit Iterationsfunktion (falls $F'(x)^{-1}$ existiert)

$$G(x) = x - F'(x)^{-1} F(x)$$

auffassen und kann Konvergenz-, Existenz und Eindeutigkeitsaussagen beweisen.

Alternativ:

$$G_k(x) := x - \underbrace{F'(x_k)^{-1}}_{\text{Vorkonditionierung}} F(x)$$

Wir zeigen Konvergenz und Eindeutigkeit (Existenz setzen wir mal ohne Beweis voraus):

Satz 10 (Lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens)

$$\text{Sei } F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei mal stetig differenzierbar auf offener Menge

$$D \subset \mathbb{R}$$

Weiter sei x^ eine regläre Nullstelle von F (d.h. $\det(F'(x^*)) \neq 0$, d.h. $F'(x^*)$ regulär) Dann \exists Umgebung von x^**

$$K_\rho(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq \rho\} \subset D$$

so dass für die Folge der Newton-Iterierten bei beliebigem Startwert $x_0 \in K_\rho(x^*)$ gilt

$$x_k \in K_\rho(x^*) \forall k \geq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

(x_k) konvergiert quadratisch gegen x^* d.h. $\exists C > 0$:

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2$$

und x^* ist die einzige Nullstelle von F in $K_\rho(x^*)$

Beispiel 40 (Beweis des lokalen Konvergenzsatzes des Newtonverfahrens)

Skizze:

Wir zeigen:

1. \exists Umgebung $K_\rho(x^*)$, in der $(F')^{-1}$ stetig/beschränkt ist
2. Für ein $x_k \in K_\rho(x^*)$ definieren wir die Fixpunktiteration: $G_k(x) := x - F'(x_k)^{-1}F(x)$ und zeigen dass G_k eine Kontraktion auf $K_\rho(x^*) \forall k$ (mit 1 und Lipschitzstetigkeit von F')
3. $x_{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^* \forall x_0 \in K_\rho(x^*)$ mit (2)
4. $x_{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ quadratisch (mit Taylorrestglied)
5. x^* ist einzige Nullstelle von F ■

Erklärung für die schnelle Konvergenz des Newtonverfahrens:

Für $G(x) := x - F'(x)^{-1}F(x)$ gilt: $|G'(x)| = \dots = \left| \frac{F''(x)F(x)}{(F'(x))^2} \right| \leq C|F(x)|$ da $\frac{F''(x)}{(F'(x))^2}$ stetig ist in der Umgebung von x^* . Mit Taylor $C|F(x)| =$
 $C|F(x) - \underbrace{-F(x^*)}_{=0, \text{ weil Nullstelle}}| \stackrel{\text{Taylor}}{=} C|F'(x^* + t(x - x^*))(x - x^*)| \stackrel{F' \text{ stetig}}{\leq} C \cdot L_F|x - x^*|$ für ein $t \in [0, 1]$
 $\Rightarrow |G(x) - x^*| = |G(x) - G(x^*)| \leq |G'(x)||x - x^*| \leq CL_F|x - x^*||x - x^*| \Rightarrow$ die Kontraktionsrate wird kleiner, je näher man an der Nullstelle ist

Beispiel 41 ($y'(t) = -99y(t) - \frac{y(t)}{1+y(t)^2}$)

$$y(0) = 1$$

Mit impl. Euler für $h = 0,05 = \frac{5}{L_F}$

- Fixpunktiteration divergiert

- *Newton braucht nur 3 Iterationen*

Erklärung: $|G'(y_0)| \ll 1$ für $G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$

Variationen des Newtonverfahrens:

Definition 28 (Das vereinfachte Newtonverfahren)

$$F'(x_0)s_k = -F(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + s_k$$

Bei dieser Variation des Newtonverfahrens wird immer das gleiche $F'(x)^{-1}$ benutzt, welches normalerweise $F'(x_0)^{-1}$ ist.

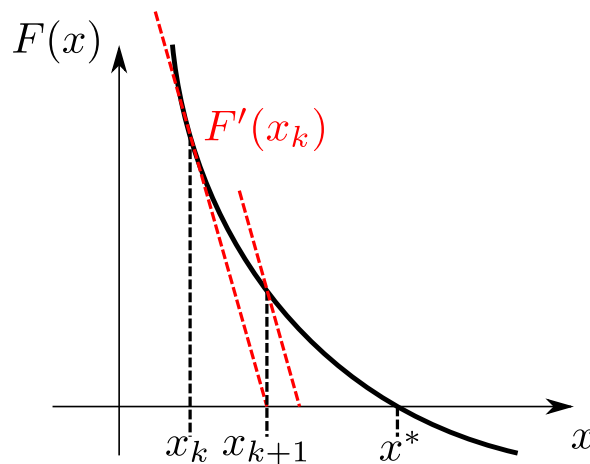


Figure 19: Das vereinfachte Gauss benutzt im Vergleich zu herkömmlichen GNV nur die Steigung bei x_0 . Dadurch entfällt die aufwändige Berechnung/invertierung der Ableitung bei jedem neuen Iterationsschritt. Vergleiche Abbildung ?? auf Seite ??

Der Nachteil ist, dass es nur linear konvergiert, dafür ist es aber nicht so aufwändig.

Definition 29 (Das Sekantenverfahren)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{F(x_k) - F(x_{k-1})} F(x_k)$$

Das Sekantenverfahren ist eine Variation des Newtonverfahrens.

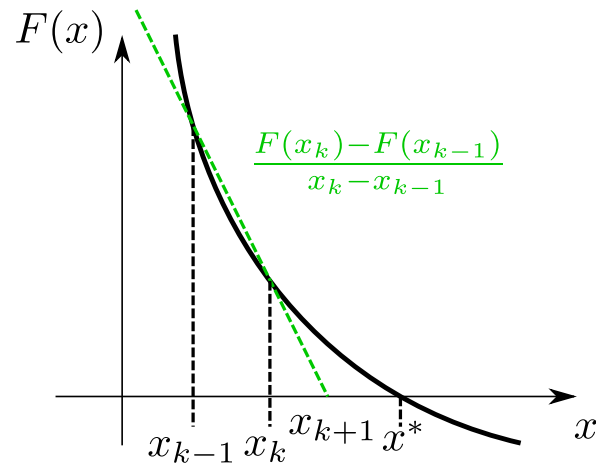


Figure 20: Eine Variation des Newtonverfahrens, das nicht mit der Ableitung $F'(x)$ arbeitet, sondern die Sekante benutzt

2.2.3 Ausgleichsprobleme

Anwendung: Bauteil mit unbekannter, nichtlinearer Kennlinie $k : [l, r] \rightarrow \mathbb{R}$

Zu Eingangssaten $u_1, \dots, u_m \in [l, r]$ stehen uns (fehlerbehaftete) Messungen zur Verfügung b_1, \dots, b_m d.h $k(u_i) = b_i + \text{Fehler in der } i\text{-ten Messung}$

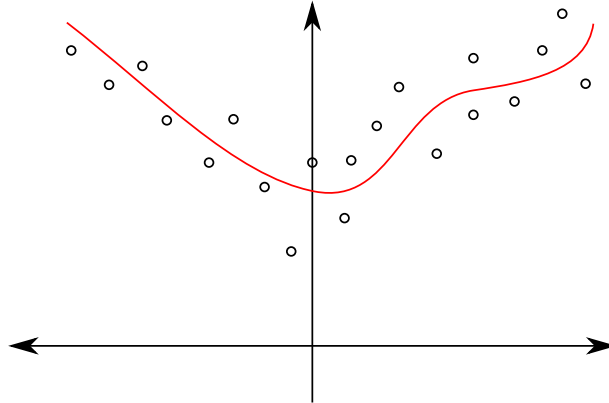


Figure 21: Die Datenpunkte sind mit einer Fehler behaftet, und spiegeln daher nicht die Werte der exakten Funktion wieder. Die "Rekonstruktion" der ursprünglichen Funktion aus den fehlerbehafteten Daten wird mittels Ausgleichrechnung gemacht.

Parametrischer Ansatz: z.B quadratisches Modell, d.h

$$g(x, u) = x_1 + x_2 u + x_3 u^2$$

Interpoliere die Daten: $g(x, u_i) = b_i, \forall i = 1, \dots, m$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_m & u_m^2 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b$$

Falls $m > 3$ ist das Gleichungssystem nicht lösbar $\rightarrow \min_x \|A_x - b\|$

Das ist ein lineares Ausgleichsproblem (kleinste Quadrate)

Alternativ statt Quadratisch:

$$g(x, u) = x_1 u + x_2 e^{x_3 u}$$

Das ist ein nicht lineares Gleichungssystem

$$F(x) = 0, F_i(x) = x_1 u_i + x_2 e^{x_3 u_i} - b_i$$

$\min_x \|F(x)\|_2$ Nichtlineares Ausgleichsproblem/ kleinste Quadrate Problem.

Allgemein:

Definition 30 (Lineares Ausgleichsproblem)

$$\begin{aligned} & \min_x \|Ax - b\|_2 \\ \Leftrightarrow & \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \\ \Leftrightarrow & \min_x \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (a_i^T x - b_i)^2 \\ & A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ & a_i = i\text{-te Zeile von } A \\ & b \in \mathbb{R}^m \\ & m \geq n \end{aligned}$$

Notwendige Optimierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= A^T A \text{ ist positivsemidefinit} \\ \Rightarrow & f \text{ konvex} \\ \Rightarrow & \text{hinreichend} \end{aligned}$$

Hinreichende Optimierungsbedingung

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow A^T Ax &= A^T b \text{ (Normalengleichung)} \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar, falls

$$\text{rang}(A) = n$$

Definition 31 (Nichtlineares Ausgleichsproblem)

$$\begin{aligned} & \min_x \|F(x)\|_2 \\ \Leftrightarrow & \min_x \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 \\ \Leftrightarrow & \min_x \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m F_i(x)^2 \\ & F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ & F \text{ stetig differenzierbar} \\ & m > n \end{aligned}$$

Beispiel 42 (Standardverfahren zur Lösung mit Gauss-Newton-Verfahren)

Idee: Ersetze F durch Linearisierung (in jedem Iterationsschritt)

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) + o(\|x - x_k\|_2) \\
&\rightarrow \min_x \|F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)\|_2
\end{aligned}$$

und das ist wieder ein lineares Ausgleichsproblem, dass mit der Normalengleichung gelöst werden kann (GNP = Gauss-Newton-Problem)
 Löse GNP mit Normalengleichung:

$$\begin{aligned}
F'(x_k)^T F'(x_k) s_k &= -F(x_k) \\
\text{setzte } x_{k+1} &= x_k + s_k
\end{aligned}$$

Beispiel 43 (Gauss-Newton-Verfahren)

- *Vorgehen*
 - Wähle x_0 (möglichst nahe an Lösung x^*)
 - Für $k = 0, \dots, n$
 - * löse $F'(x_k)^T F'(x_k) s_k = -F(x_k)$
 - * setze $x_{k+1} = x_k + s_k$
 - * brich ab, falls $F'(x_k)^T F(x_k)$ klein genug.
- *Eigenschaften und Voraussetzungen*
 - Das Gauss-Newton-Verfahren ist nur lokal konvergent
 - Es konvergiert umso schneller je kleiner $\|F(x^*)\|_2$ ist
 - Voraussetzung (ähnlich wie bei Newton):

$$F'(x^*)^T F'(x^*)$$

ist invertierbar

Beispiel 44 (Wiederholung Zusammenhang zwischen Newtonverfahren $F(x) = 0$ und Fixpunktverfahren)

Es gibt zwei Sichtweisen: Newtonschritt: Wir sitzen in x und machen den nächsten Schritt zu

$$x^+ = x - \underbrace{F'(x)^{-1} F(x)}_{\text{Newtonschritt } s}$$

Wenn ich nun

$$x - F'(x)^{-1} F(x) =: G(x)$$

setze, habe ich damit gleich die Fixpunktgleichung

$$x = G(x)$$

Wir stellen fest: Das Newtonverfahren ist die Fixpunktiteration für

$$G(x) = x - F'(x)^{-1}F(x)$$

Man kann folgendes zeigen:

$$F(\bar{x}) = 0 \Rightarrow G'(\bar{x}) = 0$$

Das Newtonverfahren konvergiert umso schneller, je näher wir an der Lösung sind. Der Grund dafür ist die Vorkonditionierung durch $F'(x)^{-1}$ die jedoch "teuer" zu berechnen sein kann.

D.h.: Geben wir uns ein beliebiges $L > 0$ vor, dann gibt es $\epsilon > 0$ mit $\|G'(x)\| \leq L \forall x$ mit $\|x - \bar{x}\| \leq \epsilon \Rightarrow$ Auf dieser Umgebung erzielen wir Kontraktionsrate L

Beispiel 45 (Wiederholung Ausgleichsproblemen) Gegeben sei ein Modell, das den Ausgang einer Messung beschreibt und Parameter $x \in \mathbb{R}^n$ enthält: $M_i(x) \in \mathbb{R}$ ist der zur i -ten Messung gehörende Modelloutput, wenn die Modellparameter x gewählt sind. $d_i \in \mathbb{R}$ sind die gemessenen Daten.

Ziel: Modelleichung, d.h. bestimme x so, dass alle $M_i(x)$ möglichst gut mit $d_i(x)$ übereinstimmen. Was heisst möglichst gut übereinstimmen? Wir lösen

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|M(x) - d\|$$

mit

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_1(x) \\ \vdots \\ M_n(x) \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Häufig sind die Messwerte eine Funktion von Systemparametern und Input

$$M_i(x) = k(x, \underbrace{z_i}_{\text{Input}})$$

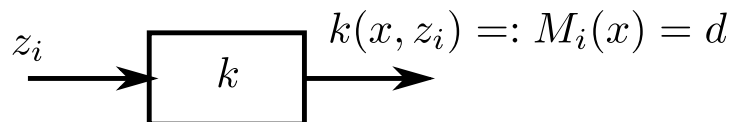


Figure 22: Veranschaulichung eines Messvorgangs

Günstigere aufgeschrieben als KQ-Problem (KQ = kleinste Quadrate):

$$\min_x \frac{1}{2} \|M(x) - d\|^2$$

bzw

$$\min_x \underbrace{\frac{1}{2} \|F(x)\|^2}_{=: f(x)}$$

mit

$$M(x) - d = F(x)$$

Optimalitätsbedingung:

$$\nabla f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x) \Rightarrow \nabla f(x) = F'(x)^T F(x)$$

Lineare KQ-Probleme:

$$F(x) = Ax - b \Rightarrow F'(x) = A \Rightarrow \nabla f(x) = A^T (Ax - b)$$

Somit: Lineares KQ-Problem:

$$\min_x \underbrace{\frac{1}{2} \|Ax - b\|^2}_{f(x)}$$

In diesem Fall ist $f(x)$ konvex und quadratisch, d.h.

$$\begin{aligned}\bar{x} & \text{ löst das Problem} \\ \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) & = 0 \\ \Leftrightarrow A^T A \bar{x} & = A^T b \text{ (Normalengleichung)}\end{aligned}$$

Im Fall eines nichtlinearen KQ-Problem kommt das Gauß-Newton-Verfahren zur Anwendung. Dieses erzeugt eine Folge (x_k)

Ist x_k berechnet, so linearisiere F um x_k :

$$F(x_k + s) \approx F(x_k) + F'(x_k)s$$

und berechne den Schritt s_k durch ein lineares KQ-Problem

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\| \underbrace{F(x_k)}_{=-b} + \underbrace{F'(x_k)}_{=A} s \right\|^2$$

dies entspricht der Normalengleichung

$$F'(x_k)^T F'(x_k) s_k = -F'(x_k)^T F(x_k)$$

und setze

$$x_{k+1} = x_k + s_k$$

2.3 Grundlagen zur Optimierung

Optimierungsprobleme haben die Form:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ unter Nebenbedingung } x \in X$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Zielfunktion bzw. Kostenfunktion

$X \subset \mathbb{R}^n$ zulässiger Bereich

Zahlreiche Anwendungen: KQ-Probleme, optimales Design (Schaltkreise, Materialien, Bauformen), optimale Steuerung (Roboter, Motoren, Satellitenbahnen, ...)
Wiederholung:

- \bar{x} ist das lokale Minimum von f auf X , falls es $\epsilon > 0$ gibt, mit $f(x) \geq f(\bar{x}) \forall x \in X, \|x - \bar{x}\| < \epsilon$
- \bar{x} ist das globale Minimum von f auf X mit $f(x) \geq f(\bar{x}) \forall x \in X$

Wir beschränken uns auf den unrestringierten Fall (d.h. ohne Nebenbedingung):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Mit der Voraussetzung dass f stetig differenzierbar ist.

Wiederholung:

- Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ist lokales Minimum von f in \mathbb{R}^n und f ist C^1 dann gilt

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

- Notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ist lokales Minimum von f in \mathbb{R}^n und f ist C^2 , dann gilt

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

und

$\nabla^2 f(\bar{x})$ (=Hessematrix) ist positiv semi-definit

- Hinreichende Optimierungsbedingung zweiter Ordnung: Voraussetzung ist, dass $f \in C^2$ ist $\nabla f(\bar{x}) = 0$ und $\nabla^2 f(\bar{x})$ positiv definit $\Rightarrow \bar{x}$ ist lokales Minimum von f (Hinreichende Bedingung ist *keine* notwendige Bedingung)

Definition 32 (Abstiegsrichtung) Die Steigung von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist definiert gemäß:

$$\left. \frac{d}{dt} f\left(x + t \frac{s}{\|s\|}\right) \right|_{t=0} = \nabla f(x)^T \frac{s}{\|s\|} = \frac{\nabla f(x)^T s}{\|s\|}$$

s heißt Abstiegsrichtung von f in Richtung x , falls die Steigung in Richtung $s < 0$ ist, d.h. falls $\nabla f(x)^T s < 0$

Naheliegende Fragen: Was ist das größte Gefälle von f in x und in welche Richtung tritt dies auf?

Abschätzung:

$$|\text{Steigung entlang } s| = \left| \frac{\nabla f(x)^T s}{\|s\|} \right| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}{\leq} \frac{\|\nabla f(x)\| \|s\|}{\|s\|} = \|\nabla f(x)\|$$

Speziell:

$$s = \nabla f(x) \Rightarrow \text{Steigung entlang } s = \nabla f(x) = \frac{\nabla f(x)^T \overbrace{\nabla f(x)}^{=s}}{\underbrace{\|\nabla f(x)\|}_{\|s\|}} = \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{\|\nabla f(x)\|} = \|\nabla f(x)\|$$

$\Rightarrow s = \nabla f(x)$ ist Richtung max. positiver Steigung

$\Rightarrow s = -\nabla f(x)$ ist Richtung steilsten Abstiegs

Beispiel 46 (Grundstruktur von Abstiegsverfahren)

1. In der aktuellen Iterierten $x_k \in \mathbb{R}^n$ wird eine Abstiegsrichtung s_k bestimmt

2. Entlang dieser Richtung wird eine Liniensuche durchgeführt: Finde Schrittweite $\sigma_k > 0$ mit $f(x_k + \sigma_k s_k) < f(x_k)$ und hinreichend guter f -Abnahmen
3. Neue Iterierte: $x_{k+1} := x_k + \sigma_k s_k$
4. Wiederhole dieses Vorgehen

Ziel: Wähle s_k und σ_k so, dass für jeden Häufungspunkt \bar{x} von (x_k) gilt:
 $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Noch offen: Wie wählen wir die Suchrichtungen s_k ?

- $s_k = -\nabla f(x_k)$ = Richtung des Steilsten Abstiegs
- $s_k = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$ = Newton-Schritt

Wie wählen wir die Schrittweite σ_k ? \rightarrow Armijo-Schrittweitenregel.

2.3.1 Schrittweitenregel

Ziel:

- f -Abnahmen $f(x_k) - f(x_k + \sigma_k s_k)$ möglichst groß
- Berechnung von σ_k nicht zu aufwändig

Einige Möglichkeiten:

Sei

$$\Phi_k(\sigma) := f(x_k + \sigma s_k)$$

Minimierungsregel: Wähle $\sigma > 0$ als Lösung von $\min_{\sigma > 0} \Phi_k(\sigma)$ (geht gut für quadratische f , für kubische f oder größer zu aufwändig)

erstes lokales Minimum: σ_k ist das erste lokale Minimum von Φ_k auf $(0, \infty) \rightarrow$ häufig ebenfalls zu aufwändig

Armijo-Regel : Ist die am häufigsten benutzte Regel. Bestimme das größte $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ für das gilt:

$$f(x_k + \sigma_k s_k) \leq f(x_k) + \gamma \sigma_k \nabla f(x_k)^T s_k$$

mit $\gamma \in (0, 1)$ fest (meist $\gamma \in [10^{-4}, 10^{-2}]$)

Interpretation der Armijo-Regel:

$$\text{Armijo-Regel} \Leftrightarrow \Phi_k(\sigma_k) \leq \Phi_k(0) + \gamma \Phi'_k(0) \sigma_k$$

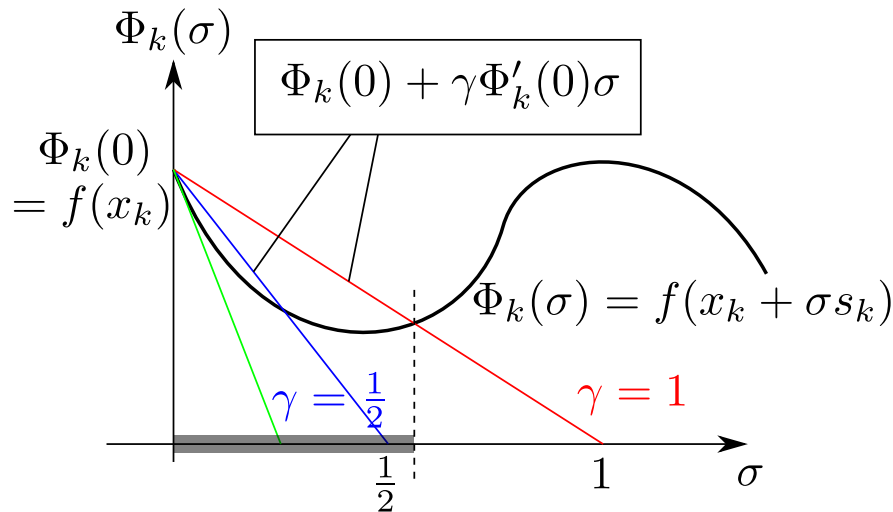


Figure 23: Gesucht wird die größte Schrittweite σ_k (im Bild σ) mit der die Armijo-Ungleichung noch erfüllt wird, d.h. die schwarze Funktion $\Phi_k(\sigma)$ ist kleiner als $\Phi_k(0) + \gamma \Phi'_k(0) \sigma$. Dazu probiert man nun mit dem Faktor γ verschiedenen Konfigurationen. Im Bild ist der Bereich, der die Armijo-Bedingung für $\gamma = 1$ erfüllt, auf der σ -Achse grau markiert.

σ_k Armijo-Schrittweite \Rightarrow f-Abnahme bei Schrittweite σ_k ist mindestens $\gamma \cdot$ Gefälle von Φ_k bei $\sigma = 0 \cdot$ Schrittweite σ_k
Das ist für Konvergenzbeweise und Praxis ausreichend.

2.3.2 Berechnung von Abstiegsrichtungen, Winkelbedingungen

Naheliegender und häufig verwendet: $s_k = -\nabla f(x_k)$. Das ist das *Gradientenverfahren* bzw. *Das Verfahren des steilsten Abstiegs* (meist mit Armijo-Regel)

Beobachtung in der Praxis: Das Gradientenverfahren ist häufig sehr ineffizient.

Erklärung hierfür (sogar unter Verwendung der besseren, aber aufwändigeren Minimierungsregel für die Schrittweite):

$$s_k = -\nabla f(x_k) =: -g_k$$

$$\text{Minimierungsregel} \Rightarrow \Phi'_k(\sigma_k) = 0, \text{ d.h. } \nabla f(\underbrace{x_k - \sigma_k g_k}_{x_{k+1}})^T \cdot \underbrace{(-g_k)}_{s_k} = -g_{k+1}^T g_k$$

Der neue Gradient steht also *senkrecht* zum alten Gradienten, daraus folgt, dass auch die neue Suchrichtung senkrecht zur alten Suchrichtung steht. Das ist unter Umständen schlecht (Siehe CG-Verfahren in Wikipedia).

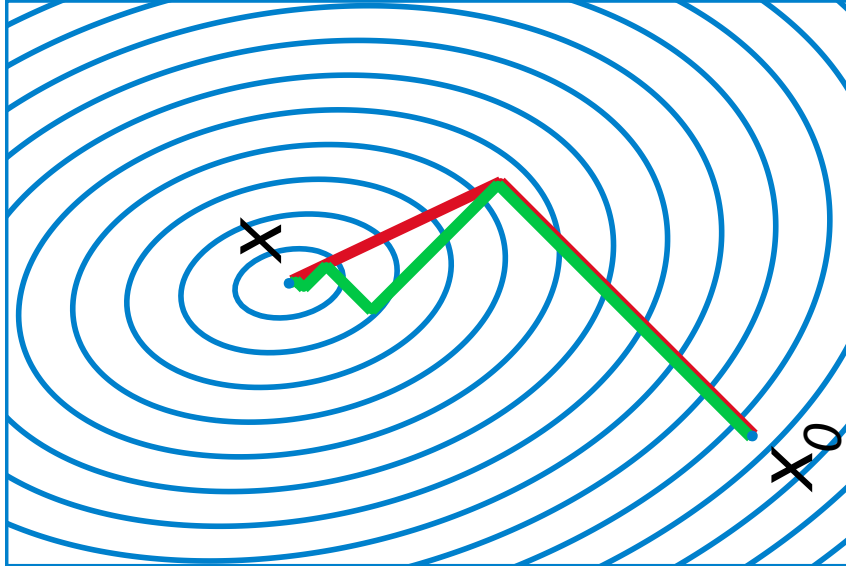


Figure 24: Hier sieht man, dass das Gradientenverfahren (grün) im Zick-Zack-Kurs gegen das Minimum konvergiert. Es ist offensichtlich, dass das CG-Verfahren (conjugated gradients) wesentlich schneller (in diesem Fall schon im zweiten Iterationsschritt!) konvergiert.

Beobachtung: Die Methode des steilsten Abstiegs

$$s_k = -g_k = -\nabla f(x_k)$$

kann ein Zick-Zack-Verhalten aufweisen und ist daher häufig ineffizient. Wir benötigen "bessere" Suchrichtungen. Diese müssen zumindest ein gewisses Mindestmaß an Abstieg aufweisen. Wie formulieren/quantifizieren wir das?

s_k ist eine Abstiegsrichtung $\Leftrightarrow g_k^T s_k < 0 \Leftrightarrow -g_k^T s_k > 0$

Steilstes Gefälle in x_k ist $-||g_k||$ (erzielt durch $d = -g_k$)

Steigung entlang s_k : $\frac{g_k^T s_k}{||s_k||} = \underbrace{\frac{-g_k^T s_k}{||s_k|| ||g_k||}}_{=: \rho(g_k, s_k)} \underbrace{(-||g_k||)}_{\text{steilstes Gefälle}}$

ρ = ist nach dieser Formel ein Bruchteil bzw. Faktor des maximalen Gefälles, das entlang s_k erzielt wird.

Interpretation von $\rho(g_k, s_k)$: Man kann zeigen, dass

$$\cos(\angle(v, w)) = \frac{v^T w}{||v|| ||w||}$$

$$v = -g_k$$

$$w = s_k$$

$$\Rightarrow \rho(g_k, s_k) = \cos \angle(-g_k, s_k)$$

Auf grund der letzten Gleichung heisst die Bedingung *Winkelbedingung*.

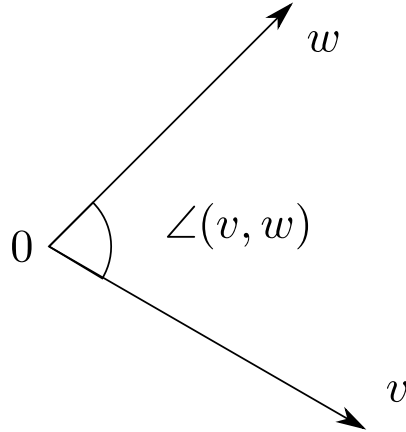


Figure 25: Veranschaulichung zur Herleitung des Winkelsatzes

Definition 33 (Winkelbedingung) Wir fordern einen gewissen Mindestabstieg entlang s_k durch folgende Winkelbedingung

$$\rho(g_k, s_k) \geq \eta \quad (30)$$

mit $\eta \in (0, 1)$ fest.

Interpretation:

$$\begin{aligned} \rho &\geq \eta \\ \Leftrightarrow \cos(\angle(-g_k, s_k)) &\geq \eta \\ \Leftrightarrow \angle(-g_k, s_k) &\leq \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Definition 34 (Verallgemeinerte Winkelbedingung) Man kann die Winkelbedingung $\rho \geq \eta$ verallgemeinern, indem man η von $\|g_k\|$ abhängig macht.

$$\rho(g_k, s_k) \geq \eta(\|g_k\|)$$

mit $\eta : \mathbb{R}_+ \Rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig, monoton wachsend mit $\eta(t) > 0 \ \forall t > 0$

Wir benötigen noch eine letzte Zutat:

Da die *Armijo-Regel* stets Schrittweiten ≤ 1 liefert, gilt $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|s_k\|$ und wir müssen daher sicherstellen, dass $\|s_k\|$ nicht zu klein im Vergleich zu $\|g_k\|$ wird (Eine kleine Schrittweite bedeutet, dass viele Iterationsschritte zum Erreichen des Ziels notwendig sind. Das wollen wir vermeiden)

Dies führt auf folgende Bedingung:

Definition 35 (Längenbedingung an die Schrittweite)

$$\|s_k\| \geq \kappa \|g_k\| \quad (31)$$

mit Konstante $\kappa > 0$

Bemerkung: Auch hier kann (??) verallgemeinert werden mit

$$\kappa \rightarrow \kappa(\|g_k\|)$$

$\kappa(t)$ muss die gleiche Bedingung wie $\eta(t)$ erfüllen

Wie wir sehen werden, ist ein Abstiegsverfahren mit Armijo-Regel und Wahl der Suchrichtungen so dass Gleichung (??) und Winkelbedingung (??) erfüllt sind (bzw deren Verallgemeinerungen) global konvergent gegen Punkte mit

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

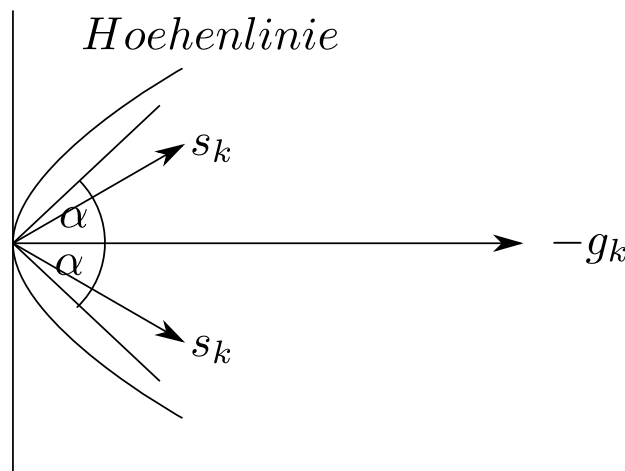


Figure 26: Veranschaulichung zur Winkelbedingung. Im Prinzip verlangen wir, dass sich der Winkel α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ befindet. Bei $\alpha = 0$ gilt $s_k = -g_k$ wir gehen also in Richtung des steilsten Abstiegs. Im schlimmsten Fall ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - dann bewegen wir uns im rechten Winkel zu $-g_k$ fort und bleiben gleich weit von der Lösung entfernt, wie zuvor.

Mögliche Wahl von geeigneten Suchrichtungen

- Richtung des steilsten Abstiegs
- Newtonschritt
- Newtonartige Schritte (z.B. BFGS)

Die verschiedenen Methoden werden nun etwas detaillierter besprochen.
Richtung des steilsten Abstiegs

$$s_k = -g_k$$

hat bekanntlich Nachteile, aber

- es erfüllt Winkelbedingung (??) $\forall \eta \in (0, 1]$
- es erfüllt die Längebedingung (??) $\forall x \in (0, 1]$

Der Newtonschritt: s_k löst TODO dann $\underbrace{\nabla^2 f(x_k)}_{F'(x_k)} s_k = - \underbrace{\nabla f(x_k)}_{\substack{g_k \\ F(x_k)}} (= \text{New-}$

tonverfahren für $\underbrace{\nabla f(x)}_{=: F(x)} = 0$)

Allerdings müssen wir prüfen, wann diese Methode die Winkelbedingung (??) und die Längebedingung (??) erfüllt.

Es sind zwei Voraussetzungen zu erfüllen

1. $\|\nabla^2 f(x_k)\| \leq C \forall k$
2. $0 < \lambda \leq \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x_k)) \forall k$

Aus den beiden Voraussetzungen folgen Winkelbedingung und Längenbedingung für geeignete Konstanten η und κ :

$$\|g_k\| = \|\nabla^2 f(x_k) s_k\| \quad (32)$$

$$\leq \|\nabla^2 f(x_k)\| \cdot \|s_k\| \quad (33)$$

$$\stackrel{\text{Voraussetzung 1}}{\leq} C \|s_k\| \quad (34)$$

$$\Rightarrow \|s_k\| \geq \frac{1}{C} \|g_k\| \quad (35)$$

$$\Rightarrow \|s_k\| \geq \kappa \|g_k\| \quad (36)$$

erfüllt falls $\kappa \leq \frac{1}{C}$

Zur Winkelbedingung (W)

$$\begin{aligned}
-g_k^T s_k &\stackrel{Newton}{=} s_k^T \nabla^2 f(x_k) s_k \\
&\geq \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x_k)) \|s_k\|^2 \\
&\geq \lambda \|s_k\|^2 \\
\Rightarrow \rho(g_k, s_k) &= \frac{-g_k^T s_k}{\|g_k\| \|s_k\|} \\
&\geq \frac{\lambda \|s_k\|^2}{\|g_k\| \|s_k\|} \\
&= \lambda \frac{\|s_k\|}{\|g_k\|} \\
&\geq \frac{\lambda}{C} \\
\Rightarrow \rho &> \eta
\end{aligned}$$

Diese Bedingung ist also erfüllt $\forall \eta \in (0, \frac{\lambda}{C}]$

Die beiden Bedingungen werden nicht immer erfüllt sein, d.h. eine Absicherung/Prüfung ist nötig (dazu später)

Newtonartige Schritte: Verwende statt $\nabla^2 f(x_k)$ eine Approximation

$$H_k = H_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow H_k s_k = -\nabla f(x_k)$$

Besonders wichtiges Beispiel ist das *BFGS-Verfahren*.

Beim BFGS-Verfahren wählt man eine symmetrische, positiv definite Startmatrix H_k um so s_0 und daraus x_1 zu berechnen. In der $(k+1)$ -ten Iterierten wird H_{k+1} aus H_k durch ein Rang-2-Update berechnet:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T d_k} - \frac{(H_k d_k)(H_k d_k)^T}{d_k^T H_k d_k}$$

$$d_k = x_{k+1} - x_k$$

$$y_k = g_{k+1} - g_k$$

$$\lambda_{\min}(M) = \min_{v \neq 0} \frac{v^T M v}{\|v\|^2} = \min_{\|v\|=1} v^T M v$$

$$M = U D U^T$$

mit

$$U = (u_1, \dots, u_n)$$

mit u_i Eigenvektor zum Eigenwert λ_i $\|u_i\| = 1$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\lambda_{\min}(M) = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

2.3.3 Ein globaler Konvergenzsatz

Beispiel 47 (Abstiegsverfahren mit Arminjo-Regel)

1. Wähle Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n, \epsilon \geq 0$ für $k = 0, 1, 2, \dots$
2. Stop, falls $\|g_k\| \leq \|\epsilon\|$
3. Berechne eine Suchrichtung s_k , welche die Winkelbedingung und Längenbedingung erfüllt (durch $s_k = -g_k$ oder s_k ist Newtonschritt mit BFGS-Regel)
4. Berechne die Schrittweite σ_k durch die Armijo-Regel
5. Setze $x_{k+1} := x_k + \sigma_k s_k$

Satz 11 (Globale Konvergenz) Sei

$$f \in C^1$$

und

$$\epsilon = 0$$

. Dann

- gibt es entweder ein k mit $\overbrace{\nabla f(x_k)}^{g_k} = 0$ oder
- das Abstiegsverfahren erzeugt eine Folge (x_k) , deren Häufungspunkte \bar{x} die Optimalitätsbedingung $\nabla f(\bar{x}) = 0$ erfüllen

2.3.4 Globalisiertes Newton-Verfahren

Hier wird s_k =Newton-Schritt gewählt, wann immer möglich (Winkelbedingung muss erfüllt sein) Andernfalls wird auf $s_k = -g_k$ ausgerichtet.

Beispiel 48 (Globalisiertes Newton-Verfahren)

1. Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0, 0 < \eta_1, \eta_2 < 1, \beta > 0$
für $k = 0, 1, \dots$
2. Berechne $g_k := \nabla f(x_k)$
3. Stop falls $g_k = 0$
4. Falls möglich, berechne den Newton-Schritt d_k durch

$$\nabla^2 f(x_k) d_k = -g_k$$

Ist d_k berechenbar und gilt die verallgemeinerte Winkelbedingung $\rho(g_k, d_k) \geq \underbrace{\min(\eta_1, \eta_2 \|g_k\|^\beta)}_{\eta(\|g_k\|)}$ so setze $s_k = d_k$, sonst setze $s_k = -g_k$

5. Berechnen Schrittweite σ_k mit Armijo-Regel

6. Setze $x_{k+1} := x_k + \sigma_k s_k$

Satz 12 (Konvergenz des globalisierten Newtonverfahren) Das globalisierte Newtonverfahren konvergiert im Sinne des vorherigen Konvergenzsatzes. Ist $\gamma < \frac{1}{2}$ in der Armijo-Regel und \bar{x} ein Häufungspunkt von (x_k) mit $\lambda_{\min}(\nabla^2 f(\bar{x})) \geq \lambda > 0$, dann geht das Verfahren irgendwann in das ungedämpfte ($\sigma_k = 1$) Newtonverfahren über \Rightarrow schnelle lokale Konvergenz

2.3.5 Globalisierung des Newtonverfahrens für Gleichungssysteme

Für das System $F(x) = 0$ verwenden wir zur Globalisierung die Winkelbedingung und die Armijo-Regel für die Zielfunktion $f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 (\Rightarrow \nabla f(x) = F'(x)^T F(x))$

Vorgehen wie im globalen Newton-Verfahren für Minimierungsprobleme, allerdings mit d_k aus $F'(x_k)d_k = -F(x_k)$. Alles andere bleibt unverändert und verwendet $f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2, \nabla f(x) = F'(x)^T F(x)$

3 Komplexe Funktionen

Wir beschäftigen uns hier mit den Eigenschaften von Funktionen

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit $U \subset \mathbb{C}$ offen

Definition 36 (Komplexe Exponentialfunktion)

$$e^z := e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$x = \operatorname{Re}(z),$$

$$y = \operatorname{Im}(z),$$

$$z = x + iy$$

wobei

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Reihendarstellung

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert auf ganz \mathbb{C}

Definition 37 (Komplexer Kosinus und Sinus)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3.1 Potenzreihen in \mathbb{C}

Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$$

Satz 13 (Konvergenz von Folgen in \mathbb{C}) Eine Potenzreihe heißt an der Stelle $z \in \mathbb{C}$ konvergent, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$$

für $n \rightarrow \infty$ in \mathbb{C} konvergiert.

Aus Mathe 1 und 2 wissen wir: Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gelten folgende Aussagen:

Es gibt einen $R \in (0, \infty]$ (Konvergenzradius) mit

- $R = 0 \rightarrow$ Reihe konvergiert für $z = z_0$
- $R \in (0, \infty) \rightarrow$ Reihe konvergiert für z mit $|z - z_0| < R$ absolut und divergiert für alle z mit $R < |z - z_0|$
- $R = \infty \rightarrow$ Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- Es gilt $R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$
- Es gilt $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ falls dieser Grenzwert existiert

3.2 Komplexe Differenzierbarkeit**Definition 38 (Komplexe Differenzierbarkeit)**

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$

heißt komplex differenzierbar in $z \in U$, falls der folgende Grenzwert existiert

$$f'(z) := \lim_{h \in \mathbb{C}, h \rightarrow 0} \liminf \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$f'(z)$ heisst Ableitung von f an der Stelle z
 Ist f in jedem Punkt $z \in U$ differenzierbar, dann heisst f analytisch
 bzw. holomorph

Bemerkung: Ist f in z komplex differenzierbar, dann folgt:

$$\frac{f(z+h) - f(z) - f'(z)h}{h} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow |f(z+h) - f(z) - f'(z)h| = o(|h|)$$

Satz 14 (Regeln für komplexes Differenzieren) Für komplex differenzierbare Funktionen gelten die Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregeln.

Beispiel 49 (Zeige $(\frac{1}{z})' = -\frac{1}{z^2}$)

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \frac{\frac{z-(z+h)}{(z+h)z}}{h} = -\frac{1}{(z+h)z} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{z^2}$$

Beispiel 50 (Zeige $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$) Durch Induktion: TODO

Beispiel 51 (Komplexe Differenzierbarkeit von $f(z) = \bar{z}$)

$$f(z) = \bar{z}$$

$$\frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

Betrachte zwei Nullfolgen $h \rightarrow 0$ in \mathbb{C}

$$h = it, t \in \mathbb{R}, t \rightarrow 0$$

$$\frac{\bar{h}}{h} = \frac{-it}{it} = -1$$

$$h = t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\bar{h}}{h} = \frac{t}{t} = 1$$

$\Rightarrow \frac{\bar{h}}{h}$ existiert nicht

D.h. $f(z) = \bar{z}$ ist nicht komplex differenzierbar

Beispiel 52 (Komplexe Differenzierbarkeit von $f(z) = \operatorname{Re}(z)$)

$$f(z) = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

ist auch nicht komplex differenzierbar (siehe vorheriges Beispiel)

Satz 15 (Konvergenzradius differenzierbarer Funktionen)

Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ Dann ist f auf $B_R(z_0)$ komplex differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Die Reihe für f' besitzt wieder den Konvergenzradius R

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Induktiv}}{\Rightarrow} f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} (k - n + 1) \dots k a_k (z - z_0)^{k-n} \\ &\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

Teilwiser Nachweis des Satzes: Formell durch summenweises Differenzieren (erfordert Konvergenz d. $f(z)$ -Reihe und gleichmäßige Konvergenz der $f'(z)$ -Reihe)

Konvergenz-Radius der f' -Reihe im Fall, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R$ existiert. Dann: Konvergenzradius von f' -Reihe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k-1}}{b_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k a_k}{(k+1) a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|}_{\rightarrow R} = R$$

Formel für a_n : $f^{(n)}(z) = 1 \dots n a_n (z - z_0)^0 + 2 \dots (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^1 + \dots \Rightarrow$
 $f^{(n)}(z_0) = \underbrace{1 \dots n}_{n!} a_n \cdot 1 = n! \cdot a_n$

Beispiel 53 (Ableiten von $f(z) = \frac{1}{1-z}$)

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$R = 1$$

$$z_0 = 0$$

Direktes Ableiten von $f(z)$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, (|z| < 1)$$

Ableiten der Reihe

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}, (|z| < 1)$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}, (|z| < 1)$$

Beispiel 54 (Ableiten von $f(z) = e^z$)

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, R = \infty, z_0 = 0$$

Ableiten der Reihe:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

3.2.1 Zusammenhang mit der reellen Differenzierbarkeit

Wir identifizieren eine Funktion

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit einer Funktion

$$\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \in U, z = x + iy \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \hat{=} \tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Sei f in z komplex differenzierbar.

Wir schreiben $f'(z) = a + ib, h = s + it \hat{=} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ Dann

$$f'(z)h = (a+ib)(s+it) = (as-bt) + i(at+bs) \hat{=} \begin{pmatrix} as-bt \\ at+bs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\text{Nun: } |f(z+h) - f(z) - f'(z)h| = o(|h|) \hat{=} ||\tilde{f}(x+s, y+t) - \tilde{f}(x, y) - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}|| = o(||\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}||)$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist reell differenzierbar in (x, y) mit

$$\tilde{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

wobei

$$a = \operatorname{Re}(f'(x+iy))$$

$$b = \operatorname{Im}(f'(x+iy))$$

$\Rightarrow \tilde{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ hat eine Jakobimatrix mit besonderer Struktur.

Wir folgern: Ist $f(\underbrace{x+iy}_z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex differenzierbar, dann

gelten die *Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen*

Definition 39 (Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen)

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)$$

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

Satz 16 (Komplexe Differenzierbarkeit)

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ist komplex differenzierbar in $x+iy$ genau dann, wenn $\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$

in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ differenzierbar und die Cauchy-Riemann-DGL'n gelten.

Es gilt die Formel

$$f'(x+iy) = \underbrace{u_x(x, y)}_{=a} - i \underbrace{u_y(x, y)}_{=-b} = \underbrace{v_y(x, y)}_{=a} + i \underbrace{v_x(x, y)}_{=-b}$$

Beispiel 55 (Komplexe Diff'barkeit von $f(z) = \bar{z}$ mit CR prüfen)

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$\Rightarrow u(x, y) = x, v(x, y) = -y$$

$$\Rightarrow u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

Das verletzt die erste CR-Gleichung
 $\Rightarrow z \rightarrow \bar{z}$ ist nicht komplex differenzierbar.

Beispiel 56 (Komplexe Diff'barkeit von $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ mit CR prüfen)

$$f(z) = \operatorname{Re}(z)$$

$$u = x$$

$$v = 0$$

$$u_x = 1 \neq 0 = v_y$$

Das verletzt die erste CR-Gleichung
 $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ ist nicht komplex differenzierbar.

Satz 17 (Eigenschaften analytischer Funktionen) f, g analytisch ($\hat{=}$ komplex differenzierbar) auf U mit $f = g' = 0$, dann folgt $f = g + \text{const.}$
 TODO: Interpretation

Satz 18 (Eigenschaften analytischer Funktionen) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf U mit $|f| \equiv \text{const.}$, dann folgt $f \equiv \text{const.}$ auf U
 Nachweis:

$$|f| \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

$$|f| \equiv C \neq 0 \text{ auf } U \Rightarrow f(z) \neq 0 \forall z \in U$$

und

$$f(z)\overline{f(z)} = |f(z)|^2 = C^2$$

Also

$$\overline{f(z)} = \frac{C^2}{f(z)}$$

komplex differentierbar auf U , da dies für $f(z)$ gilt.

$$f(z) = u + iv$$

$$\Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\overline{f(z)} = u - iv = \hat{u} + i\hat{v}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_x = \hat{v}_y, \hat{u}_y = -\hat{v}_x$$

$$\Rightarrow v_y = u_x = -v_y \Rightarrow v_y = 0 \Rightarrow u_x = 0$$

$$\Rightarrow -v_x = u_y = v_x \Rightarrow v_x = 0 \Rightarrow u_y = 0$$

$\Rightarrow u, v$ sind konstante Funktionen, d.h. f ist konstant

TODO: Interpretation

Interpretation der Ableitung als Drehstreckung: Polardarstellung

$$f'(z) = |f'(z)|e^{i\Phi}, h = |h|e^{i\alpha} \Rightarrow f'(z)h = |f'(z)||h|e^{i(\alpha+\Phi)}$$

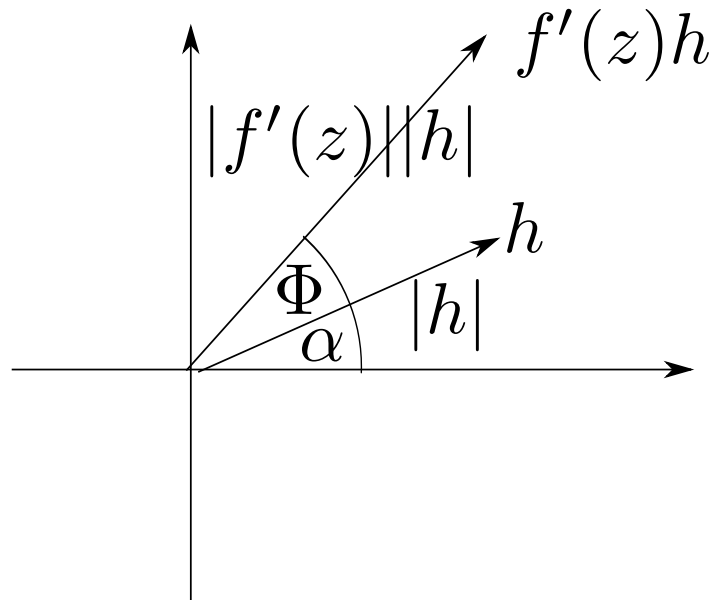


Figure 27: Eine Drehstreckung von h durch f' . Das entspricht einer Multiplikation in \mathbb{C}

Satz 19 (Konformität von analytischen Funktionen)

Jede analytische Funktion mit $f'(z) \neq 0$ auf U ist konform, d.h. winkeltreu und orientierungstreu.

Begründung:

Schneiden sich zwei C^{-1} -Kurven $w(t) \in \mathbb{C}$ und $k(t) \in \mathbb{C}$ im Punkt $\hat{z} = w(t_1) = k(t_2)$, dann haben sie dort die Tangenten $w'(t_1)$ bzw $k'(t_2)$

Die Tangenten der Bildkurven $f(w(t))$ bzw. $f(k(t))$ im Punkt $f(\hat{z})$ sind gegeben durch $\underbrace{f'(w(t_1))}_{f'(\hat{z})} w'(t_1)$ bzw. $\underbrace{f'(k(t_2))}_{f'(\hat{z})} k'(t_2)$

D.h. beide Tangenten werden um den gleichen Winkel gedreht und um den gleichen Faktor gestreckt.

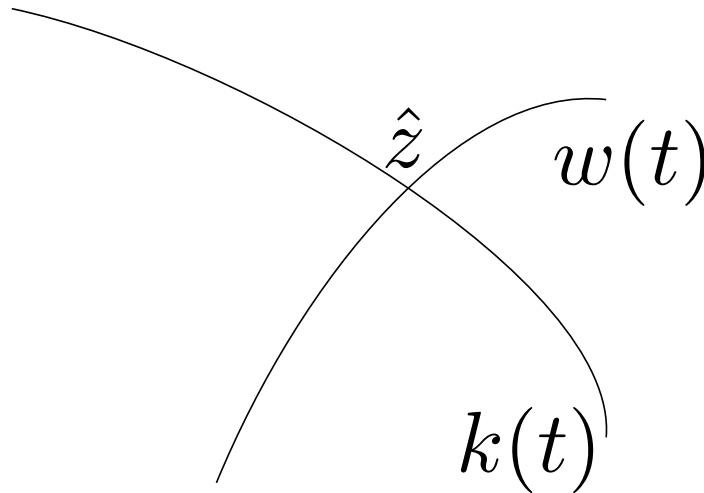


Figure 28: Die zwei Kurven w und k . Unter einer Abbildung (z.B. einer Multiplikation mit $e^{i\Phi}$ was einer Drehung entspricht) bleibt der Winkel zwischen den Tangenten w' und k' im Punkt \hat{z} erhalten.

Folgerung: Die Koordinatenlinien $x \equiv \text{const.}$ und $y \equiv \text{const.}$ sind orthogonal zueinander in der $z = x + iy$ -Ebene werden durch die holomorphe Abbildung $f = u + iv$ auf zueinander orthogonale Bildkurven abgebildet.

3.3 Komplexe Kurvenintegrale

Für $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $v(t) = v_1(t) + iv_2(t)$ definieren wir

$$\int_a^b v(t) dt := \int_a^b v_1(t) dt + i \int_a^b v_2(t) dt$$

Definition 40 (Aufteilung in Teilkurven)

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

sei stetig, U offen. Weiter sei $w : [a, b] \rightarrow U$

Dann ist das Integral von f entlang w definiert durch

$$\int_w f(z)dz := \int_a^b f(w(t))w'(t)dt$$

Besteht w aus endlich vielen stetig differenzierbaren Teilkurven

$$w_k : [a_k, b_k] \rightarrow U$$

dann definieren wir

$$\int_w f(z)dz := \sum_{k=1}^n \int_{w_k} f(z)dz$$

Interpretation über Kurvenintegrale um \mathbb{R}^2 :

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

$$w(t) = w_1(t) + iw_2(t)$$

$$\tilde{w}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

Dann

$$\int_w f(z)dz = \int_a^b f(w(t))w'(t)dt \quad (37)$$

$$= \int_a^b \underbrace{(u(\tilde{w}(t)) + iv(\tilde{w}(t)))}_{f(w(t))} (w'_1(t) + iw'_2(t)) \quad (38)$$

$$= \int_a^b [u(\tilde{w}(t))w'_1(t) - v(\tilde{w}(t))w'_2(t)]dt \quad (39)$$

$$+ i \int_a^b [v(\tilde{w}(t))w'_1(t) + u(\tilde{w}(t))w'_2(t)]dt \quad (40)$$

$$= \int_{\tilde{w}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot dx + i \int_{\tilde{w}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot dx \quad (41)$$

Daraus

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left(\int_{\tilde{w}} f(z)dz \right) = \int_{\tilde{w}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot dx = \text{Zirkulation von } q = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \text{ längs } \tilde{w}$$

Und

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \left(\int_{\tilde{w}} f(z)dz \right) = \int_{\tilde{w}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot dx = \text{Fluss von } q \text{ senkrecht durch } \tilde{w}$$

Es übertragen sich folgende Rechenregeln:

1. Linearität:

$$\int_w (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_w f(z)dz + \beta \int_w g(z)dz$$

2. Additivität:

$$\int_w f(z)dz := \sum_{k=1}^n \int_{w_k} f(z)dz$$

3. Abhängigkeit von Orientierung:

$$\int_w^* f(z)dz = - \int_w f(z)dz$$

wobei $w^*(t)$ die gleiche Kurve wie $w(t)$ ist, nur in andere Richtung durchlaufen

4. Abschätzung:

$$\left| \int_w f(z)dz \right| \leq L(w) \cdot \max_{a \leq t \leq b} |f(w(t))|$$

mit Kurvenintegral $L(w) = \int_a^b |w'(t)|dt$

5. Invarianz bei orientierungstreuer Uparametrisierung: Sind w und \hat{w} verschiedene Parametrisierungen der gleichen Kurve mit gleichem Durchlaufsinne, dann gilt

$$\int_w f(z)dz = \int_{\hat{w}} f(z)dz$$

Definition 41 (Doppelpunktfreie geschlossene Kurve) Ist $w \subset \mathbb{C}$ eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve, dann zerlegt w die komplexe Ebene in zwei Gebiete, ein beschränktes (das Innere) und ein unbeschränktes.

Das Innere wird von w positiv umlaufen, wenn das Innere in Durchlaufrichtung links liegt.

Bei positivem Umlauf schreiben wir

$$\oint_w f(z)dz := \int_w f(z)dz$$

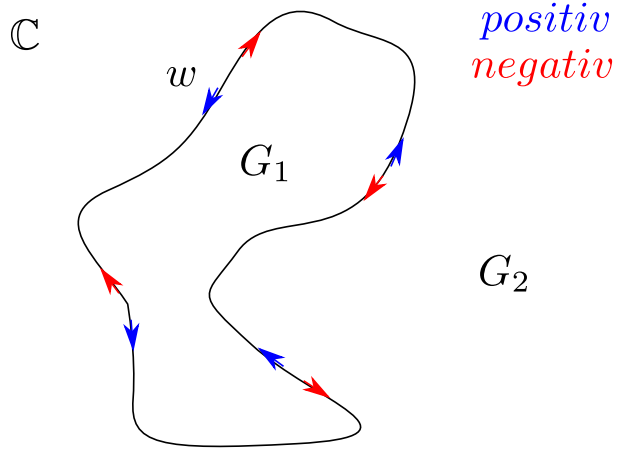


Figure 29:

Ein wichtiges Integral: Mit $m \in \mathbb{Z}$:

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

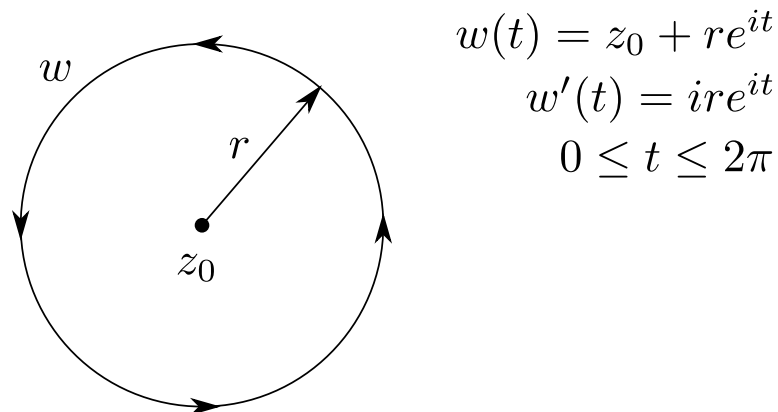


Figure 30: Veranschaulichung des Integrals $\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^m dz$ und seiner Parametrisierung

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{(re^{it})^m}_{(w(t)-z_0)^m} \underbrace{ire^{it} dt}_{w'(t)} = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{(m+1)it} dt$$

$m = -1$:

$$i \cdot 1 \cdot \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi i$$

$m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$:

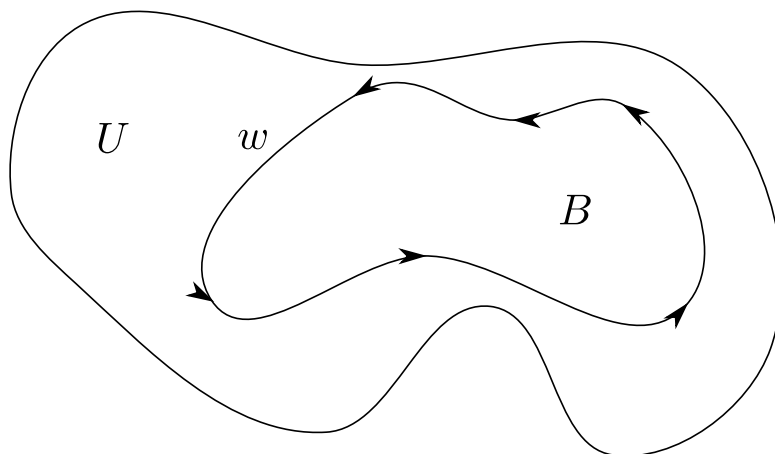
$$ir^{m+1} \frac{e^{(m+1)it}}{(m+1)i} \Big|_{t=0}^{2\pi} = ir^{m+1} (1 - 1) = 0$$

3.4 Der Integralsatz von Cauchy

Satz 20 (Integralsatz von Cauchy) Sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

komplex differenzierbar auf dem offenen einfach zusammenhängenden Gebiet U (d.h. keine "Löcher"). w sei eine in U verlaufende einfach geschlossene Kurve (ohne Doppelpunkte).



Dann gilt

$$\int_w f(z) dz = 0$$

Zusatz: Dieser Satz gilt auch, wenn w endlich viele Doppelpunkte hat.

Nachweis mit dem Satz von Green für den Fall dass f' stetig ist: Ohne Einschränkung sei w positiv orientiert. Das Innere heiße B .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\oint_w f(z) dz \right) &= \oint_{\tilde{w}=\partial \tilde{B}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot dx \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\tilde{B}} \nabla^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} df(x, y) \\ &= \int_{\tilde{B}} \underbrace{(-v_x - u_y)}_{=0 \text{ wegen CR-DGL}} dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\oint_w f(z) dz \right) &= \oint_{\tilde{w}=\partial \tilde{B}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot dx \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\tilde{B}} \nabla^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} df(x, y) \\ &= \int_{\tilde{B}} \underbrace{(u_x - v_y)}_{=0 \text{ wegen CR-DGL}} dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_w f(z) dz = 0$$

Bei endlich vielen Doppelpunkten: Zerlege die Schleife in einfach geschlossene Teilkurven

Bemerkung: Es ist zentral, dass U einfach zusammenhängend ist. Denn dann ist f holomorph auf dem inneren von B

Beispiel 57 (Cauchy auf nicht einfach zusammenhängendem Gebiet)

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Dann ist f holomorph auf U , aber U ist nicht einfach zusammenhängend.
Wir wissen

$$\frac{1}{z} = (z - z_0)^m \text{ mit } m = -1, z_0 = 0$$

$$\oint_{|z|=0} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

Beispiel 58 (Cauchy-Integralsatz für $f(z) = z^2$)

$$U = \mathbb{C}$$

$$f(z) = z^2$$

$$m = 2, z_0 = 0$$

Dann hatten wir berechnet: $\oint_{|z|=r} z^2 dz = 0$ Das liefert auch der Cauchy-Integralsatz.

Folgerung: $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf einfach zusammenhängendem, offenen Gebiet U . $w_1, w_2 \subset U$ verlaufen beiden von z_0 nach z_1 und $w_1 \cup w_2^*$ haben nur endlich viele Doppelpunkte. Dann

$$\int_{w_1} f(z) dz = \int_{w_2} f(z) dz$$

D.h. das Integral ist hier wegunabhängig.
Begründung:

$$0 = \int_{w_1 \cup w_2^*} f(z) dz = \int_{w_1} f(z) dz - \int_{w_2} f(z) dz$$

Wobei w_2^* die gleiche Kurven wie w_2 ist, nur in entgegengesetzte Richtung durchlaufen/parametrisiert.

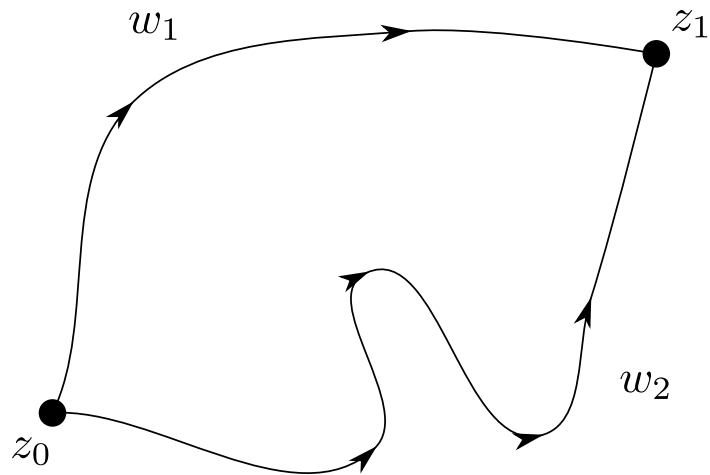


Figure 31: Skizze zum Nachweis bzw. Herleitung der komplexen Integration

Damit können wir komplexe Stammfunktionen berechnen.

Satz 21 (Komplexe Integration)

$$U \subset \mathbb{C}$$

einfach zusammenhängend, offen

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph auf U . Sei $z_0 \in U$ beliebig fest. Dann ist

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz = \int_w f(z) dz$$

mit w eine beliebige Kurven in U die z_0 mit z verbindet.

Nachweis:

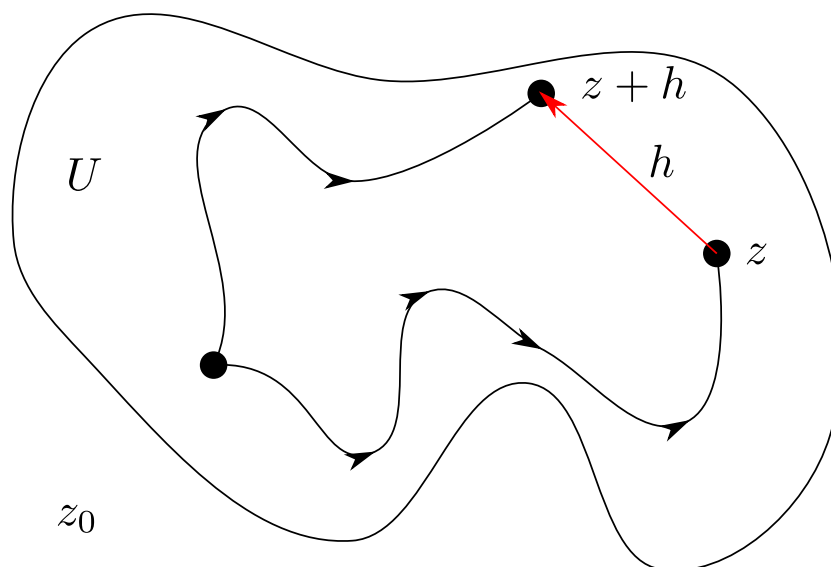


Figure 32: Skizze zum Nachweis bzw. Herleitung der komplexen Integration

$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{z_0}^{z+h} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \\
 &= \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \\
 &= \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \int_0^1 f(z+th) \cdot h dt
 \end{aligned}$$

mit

$$w(t) = z + ht, 0 \leq t \leq 1, w'(t) = h$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z) \Rightarrow F'(z) = f(z)$$

Berechnung von komplexen Integralen mit Hilfe der Stammfunktion:

Satz 22 ("Hauptsatz" der komplexen Integralrechnung) Ist f analytisch auf $U \subset \mathbb{C}$ und F eine Stammfunktion von f auf U , dann gilt für jede Kurve $w \subset U$:

$$\int_w f(z) dz = F(w(b)) - F(w(a))$$

wobei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Dies folgt aus

$$\frac{d}{dt}F(w(t)) = F'(w(t))w'(t) = f(w(t))w'(t)$$

Also

$$\int_w f(z)dz = \int_a^b f(w(t))w'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(w(t))dt = F(w(b)) - F(w(a))$$

3.5 Cauchy Integralformel

Anmerkung: Cauchy-Integralformel ist cooler, besser, schöner als der Cauchy Integralsatz!

Satz 23

$$U \subset \mathbb{C}$$

sei offen, aber eventuell nicht einfach zusammenhängend. Seien w_1, w_2 geschlossenen Kurven, die die Ausnahmemenge $A \subset \mathbb{C} \setminus U$ mit gleicher Orientierung umlaufen. Ist dann f auf U analytisch, dann gilt:

$$\int_{w_1} f(z)dz = \int_{w_2} f(z)dz$$

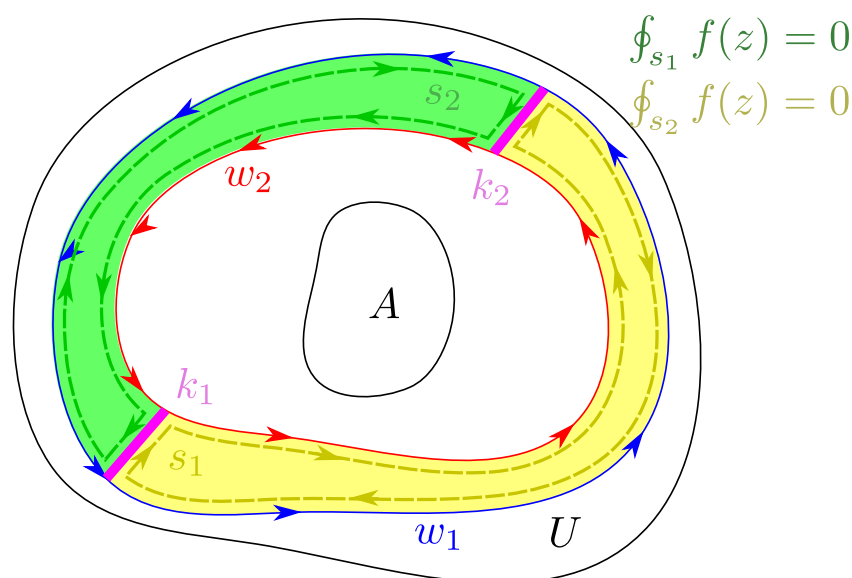


Figure 33: Zwei gleichorientierte Kurven w_1, w_2 durchlaufen U um das "Loch" A . Die zwei Kurven w_1, w_2 werden durch die "Schnitte" k_1, k_2 verbunden und es werden neue Kurven s_1, s_2 gebildet. Da sich die Linienintegrale s_1, s_2 auf den Schnitten gegenseitig aufheben (sie sind entgegengesetzt orientiert) entsprechen die Integrale von s_1, s_2 den Integralen von w_1, w_2 . Der Vorteil von s_1, s_2 ist, dass diese nun auf einfach zusammenhängenden Gebieten liegen und wir sie daher einfach berechnen können.

Denn (Bild)

$$\begin{aligned}
 0 & \stackrel{\text{Cauchy Integrals.}}{=} \int_{s_1} f(z) dz + \int_{s_2} f(z) dz \\
 &= \int_{w_1} f(z) dz - \int_{w_2} f(z) dz \\
 &\quad + \int_{k_1} f(z) dz - \int_{k_1} f(z) dz \\
 &\quad + \int_{k_2} f(z) dz - \int_{k_2} f(z) dz \\
 &= \int_{w_1} f(z) dz - \int_{w_2} f(z) dz
 \end{aligned}$$

Speziell sei jetzt: $f : U \rightarrow \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$ offen, f analytisch. Sei $z \in U$ mit hinreichend kleinem r gilt

$$K_r(z) = \{\xi \mid |\xi - z| < r\} \subset U$$

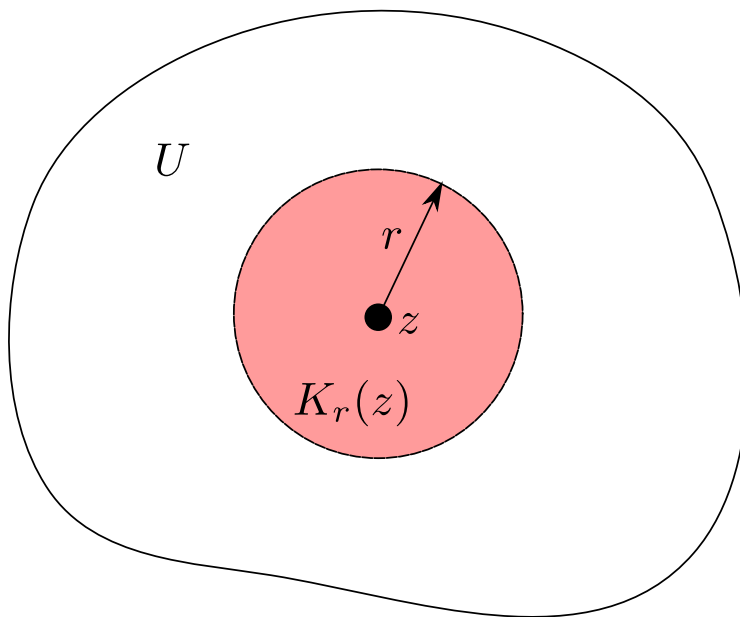


Figure 34: •

Die Funktion

$$g(\xi) := \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

ist dann holomorph auf $K_r(z) \setminus \underbrace{\{z\}}_{=A}$. Nach obigem Satz gilt dann, dass alle

Integrale

$$\oint_{|\xi-z|=\rho} g(\xi) d\xi$$

für $0 < \rho < r$ den gleichen Integralwert I haben.

Also:

$$\forall 0 < \rho < r :$$

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|\xi-z|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt \\ &\xrightarrow[\rightarrow]{\rho \rightarrow 0^+} 2\pi i f(z) \end{aligned}$$

wobei $w(t) = z + \rho e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, w'(t) = i \rho e^{it}$
dies führt zur wichtigen *Cauchy Integralfomel*

Definition 42 (Cauchy Integralfomel)

$$\oint_{|\xi-z|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = 2\pi i f(z)$$

$$\forall 0 < \rho < r$$

Satz 24 (Cauchy-Integralformel)

$$U \subset \mathbb{C}$$

ist ein offenes Gebiet. Und

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

sei holomorph. w sei eine einfach geschlossene Krue in U , deren Inneres vollständig in U liegt. Dann gilt für alle z im Inneren von B

$$\oint_w \frac{f_\eta}{\eta-z} d\eta = 2\pi i f(z)$$

Anmerkung: Wie sehen hier, dass die Kurve nicht unbedingt ein Kreis sein muss.

Bemerkung: Insbesondere folgt daraus:

Ist w die Randkrue eine offenen Gebiets W und f holomorph in Umgebung von \overline{W} ($\overline{W} = W \cup w$), dann ist f auf W vollstädnig durch die Werte auf $\partial W = w$ festgelegt.

Beispiel 59 (Berechnung eines Kruvenintegrals)

$$\oint_{|\zeta|=4} \frac{e^\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta} d\zeta$$

Mit Partialbruchzerlegung und Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta|=4} \frac{e^\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta} d\zeta &= \\ \oint_{|\zeta|=4} \frac{1}{3} \frac{e^\zeta}{\zeta} - \frac{1}{3} \frac{e^\zeta}{\zeta + 3} d\zeta &= \\ \oint_{|\zeta|=4} \frac{1}{3} \frac{e^\zeta}{\zeta} d\zeta - \oint_{|\zeta|=4} \frac{1}{3} \frac{e^\zeta}{\zeta + 3} d\zeta &= \\ \text{mit Cauchy Integralformel} & \\ \underbrace{\frac{1}{3} 2\pi i e^0}_{z=0, f(\zeta)=e^\zeta} - \underbrace{\frac{1}{3} 2\pi i e^{-3}}_{z=-3, f(\zeta)=e^\zeta} &= \frac{2}{3} \pi i (1 - e^{-3}) \end{aligned}$$

Weiter Folgerung aus Cauchy-Integralformel:

Satz 25 (Ableiten der Cauchy-Integralformel) *k-faches Ableiten von*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

nach z für alle $k \geq 0$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_w \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

3.6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel

3.6.1 Taylor-Entwicklung

Wir zeigen mit d. CIF (Cauchy-Integralformel): Ist f in Umgebung von z_0 komplex differenzierbar, dann lässt sie sich in einer Kreiseumgebung als Potenzreihe darstellen und ist daher ∞ oft komplex differenzierbar.

Wir verwenden eine Trick: Betrachte $z, z_0, \zeta \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$

Dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \end{aligned}$$

Wir setzen in CIF ein:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right)}_{a_k} (z - z_0)^k \end{aligned}$$

Satz 26 (Taylorreihe analytischer Funktionen)

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$$

offenes Gebiet, $r > 0, z_0 \in U$ so, dass $K_R(z_0) \subset U$

Ist dann $0 < \rho < r$, dann ist $f(z)$ auf $K_\rho(z_0)$ als Potenzreihe (=Taylor-Reihe) darstellbar

$\forall t \in K_\rho(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Insbesondere ist f in z unendlich oft differenzierbar.

Bemerkung: Taylor-Reihen sind eindeutig.

Beispiel 60 (Berechnung der Taylorreihe von $f(z) = \frac{1}{1+z}$ auf zwei Wegen)
Taylorreihe um $z_0 = 0$ via geometrischer Reihe.

$$|z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k}_{a_k} z^k$$

Taylorreihe via $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$$f'(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$$

$$f'''(z) = -\frac{6}{(1+z)^4}$$

$$f^{(k)}(z) = -\frac{(-1)^k k!}{(1+z)^{k+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^k k! \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

3.6.2 Identitätssatz

1. Vorgabe von allen Ableitungen in einem Punkt:

Satz 27

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, g : U \rightarrow \mathbb{C}$$

beide holomorph auf dem (zusammenhängenden) Gebiet und gebe es $z_0 \in U$ mit $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \forall k \geq 0$ dann gilt

$$f(z) = g(z)$$

$\forall z \in U$

2. Festlegung der Funktionswerte auf einer Krume

Satz 28

$$f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$$

sind holomorph auf dem (zusammenhängenden) Gebiet U und ist $w \in U$ eine Kurve mit $w(a) \neq w(b)$, so dass $f(w(t)) = g(w(t))$, $\forall t \in [a, b]$ dann gilt

$$f(z) = g(z), \forall z \in U$$

Folgerung: Stimmen holomorphe Funktionen auf $[a, b] \subset U$ ($a < b$) überein, so folgt

$$f \equiv g$$

Beispiel 61

$$\begin{aligned} f(z) = f(x + iy) &= \underbrace{[(x^2 - y^2)e^{3x}\cos(3y) - 2xye^{3x}\sin(3y)]}_{=u(x,y)} \\ &+ i \underbrace{[2xye^{3x}\cos(3y) + (x^2 - y^2)e^{3x}\sin(3y)]}_{=v(x,y)} \end{aligned}$$

Behauptung: f ist holomorph und es gilt $f(z) = z^2 e^{3z}$

Begründung: Auswerten für $x \in \mathbb{R}, y = 0$ gibt jeweils $f(x) = x^2 e^{3x}$

Cauchy-Rieman-DGL prüfen \Rightarrow holomorph \Rightarrow Gleichheit, wegen Übereinstimmung auf \mathbb{R}

3.6.3 Weiter Eigenschaften holomorpher Funktionen

Satz 29 Ist f auf \mathbb{C} holomorph, dann ist f entweder konstant oder unbeschränkt, d.h. $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f \equiv \text{const auf } \mathbb{C}$

Begründung:

$$\text{CIF: } |f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z|=\rho} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}}_{|\cdot| \leq \frac{M}{\rho^2}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{2\pi\rho}_{\text{Kurvenlänge}} \frac{M}{\rho^2} = \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$$

Satz 30 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nicht-konstante Polynom $p(z)$ besitzt auf \mathbb{C} mindestens eine Nullstelle.

Nachweis: $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0$

$|z| \rightarrow \infty \Rightarrow |p(z)| \rightarrow \infty$

Daher hat die stetige Funktion $z \mapsto |p(z)|$ ein Minimum z_m auf \mathbb{C}

Anmerkung:

$p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C} \rightarrow |p(z_n)| = \gamma > 0$ Dann: $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ ist holomorph.
 $|f(z)| \leq \frac{1}{\gamma} \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ beschränkt auf \mathbb{C} (und holomorph) $\Rightarrow f \equiv \text{const} \Rightarrow p \equiv \text{const}$ Das ist aber ein Widerspruch.

Weitere Eigenschaften

Definition 43 (Mittelwerteigenschaft)

$$f$$

holomorph auf $K_r(z_0)$, $0 < \rho < r \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt$

Definition 44 (Maximumsprinzip)

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph und nicht konstant auf dem offenen Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ dann hat $|f|$ auf U kein Maximum.

3.7 Laurentreihen

Laurentreihen "leben" auf Kreisringen

$$K_{r,R}(z) = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$$

auf denen f holomorph ist. $\overline{K_r(z_0)}$ darf Punkte enthalten, in denen f nicht holomorph ist.

Definition 45 (Laurent-Reihe von f)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

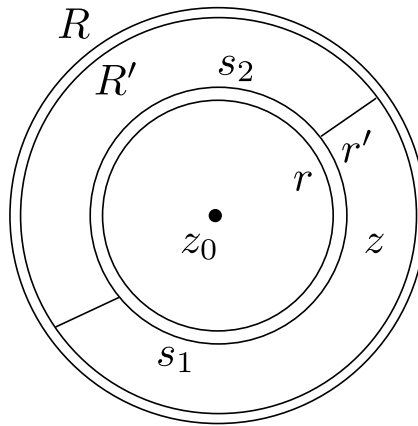


Figure 35: •

Satz 31 (Larent-Entwicklung auf Kreisring)

f

sei holomorph auf $K_{r,R}(z_0)$, $0 \leq r < R \leq \infty$ dann kann f auf $K_{r,R}(z_0)$ als Laurent-Reihe geschrieben werden

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \forall z \in K_{r,R}(z_0)$$

Wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{\zeta}{\zeta - z_0}^{k+1} d\zeta, \forall k \in \mathbb{Z}, r < \rho < R$$

Der Hauptteil konvergiert absolut und gleichmäßig auf $K_{r',\infty}(z_0)$ für $r' > r$ Der Nebenteil konvergiert absolut und gleichmäßig auf $K_{R'}(z_0)$ für $R' < R$

Herleitung der Laurentreihe: Wähle $0 < r < r' < R' < R$

Integrand $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$

mit $z \in K_{r',R'}(z_0)$

$$\text{CIF: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{s_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{s_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Zusammen

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{s_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{s_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =
\end{aligned}$$

Für $|\zeta - z| = R' > |z - z_0|$

$$\stackrel{Taylor}{\Rightarrow} \frac{1}{\zeta - z} = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

$$\text{Für } |\zeta - z_0| = r' \quad \frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \stackrel{geom. Reihe}{=} -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

4 Indices

4.1 Liste aller Definitionen

4.2 Liste aller Sätze

4.3 Liste aller Beispiele