Höhere Mathematik 2

1 Nützliches Wissen $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$

1.1 Trigonometrische Funktionen

1.1.1 sinh, cosh $\quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \operatorname{arsinh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \operatorname{arcosh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$	

1.1.2 sin, cos $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

1.2 log $\quad \log(1) = 0$

$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \ln x \leq x - 1$

1.3 Integrale:

- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\,\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2 \right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^{(x)}(x-1)$	$x \cdot e^{(x)}$	$e^x(x+1)$
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}x + \sinh^{-1}(x)\right)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.4 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D)$

Hat $\boldsymbol{A}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$

Entwicklung. n. $i$ter Zeile: $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$

1.5 Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \overset{\lvert q\rvert<1}{=} \frac{1}{1-q}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$
Harmonische Reihe	Geometrische Reihe	Exponentialreihe

2 Normen

Ist V ein $\mathbb{R}$-VR, so ist $\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ eine Norm, falls

- Definitheit: $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- Homogenität: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Dreiecks-Ungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

2.1 l^p-Normen für $v \in \mathbb{K}^n$

$p = 1$ **Betragsnorm:** $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|$

$p = 2$ **Euklidische Norm:** $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

$p \to \infty$ **Maximumsnorm:** $\|v\|_\infty = \max\{|v_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$

2.2 Matrixnormen für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Man nennt eine Matrixnorm $\|.\|$ des $\mathbb{K}^{n\times n}$

- **submultiplikativ**, falls $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$
- **verträglich** mit einer Vektornorm $\|.\|_V$ des $\mathbb{K}^n$, falls
$$\|Av\|_V \leq \|A\| \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in \mathbb{K}^n, \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$$
- **natürlich** bzw. **induziert** durch eine Vektornorm $\|.\|_V$ des $\mathbb{K}^n$, falls
$$\|A\| := \sup \frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V} \qquad V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \qquad \|E_n\| = 1$$

Frobeniusnorm: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$

Zeilensummennorm $\|A\|_{(\infty)} = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Spaltensummennorm: $\|A\|_{(1)} = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Spektralnorm: $\|A\|_{(2)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^\top \cdot A)}$

3 Taylor-Entwicklung

Man approximiert eine m-mal diffbare Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ mit dem m-ten Taylorpolynom:

$$\boxed{T_{m,f,x_0}(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}$$

Taylor-Entw. von Polynomen/Potenzreihen sind die Funktionen selbst.
Für $m \to \infty$: Taylorreihe.

Konvergenzradius: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

3.1 Das Restglied - die Taylorformel

Für $(m + 1)$-mal stetig diffbare Funktionen gilt $\forall x \in I$:

$\boxed{R_{m+1}(x) := f(x) - T_{m,f,x_0}(x)} =$

$= \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^m f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t \quad$ (Integraldarst.)

$= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1} \qquad \xi \in [x, x_0]$ (Lagrange) zur Berechnung der Genauigkeit

3.2 Landau-Notation

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = O(g(x))$ für $x \to a \Leftrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|$ für $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ u. $C > 0$
oder $0 \leq \limsup\limits_{x\to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$

Bei **Taylor-Entwicklung**:

- $R_{m+1,f,x_0}(h) = f(x_0 + h) - T_{m,f,x_0}(h) = o(h^m)$
f muss m-mal differenzierbar sein
- $R_{m+1,f,x_0}(h) = f(x_0 + h) - T_{m,f,x_0}(h) = O(h^{m+1})$
f muss $(m + 1)$-mal differenzierbar sein

3.2.1 Rechenregeln

- $f = O(f)$
- $f = o(g) \quad \Rightarrow \quad f = O(g)$
- $f_1 = o(g)$ u. $f_2 = o(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = o(g)$
- $f_1 = O(g)$ u. $f_2 = O(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = O(g)$
- $f_1 = O(g)$ u. $f_2 = O(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$
- $f_1 = O(g)$ u. $f_2 = o(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$

3.2.2 Elementarfunktionen

- Exponentialfunktion
$e^x = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + O(x^{m+1})$
- Trigonometrische Funktionen
$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2m+3})$
$\cos x = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2m+2})$
- Logarithmusfunktion
$\ln(1 + x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + O(x^{m+1})$

4 Iterationsverfahren

Mit Iterationsverfahren werden Nullstellen bestimmt.

4.1 Fixpunktiteration

1. $f(x) = 0$ auf Form $g(x) = x$ bringen
2. Konvergenz zeigen (Banach'scher Fixpunktsatz)
   - $g : I = [a; b] \mapsto I$ ist differenzierbar
   - $|g'(x)| \leq L \quad \forall x \in I$ mit $0 \leq L < 1$
3. Nullstelle mit Folge $x_{n+1} = g(x_n)$ und Startwert x_0 annähern

Abschätzungen: (Nullstelle x*)

- $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$ 'a priori'
- $|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$ 'a posteriori'
- $|x_n - x^*| \leq L |x_{n-1} - x^*| \to$ Lineare Konvergenz

4.2 Newton-Verfahren

Quadratische Konvergenz: $|x_n - x^*| \leq C |x_{n-1} - x^*|^2$ mit $C > 0$

Formel: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ mit Startwert x_0

Voraussetzungen:

- $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ist **2-mal** stetig differenzierbar
- $m := \min\limits_{a\leq x\leq b} |f'(x)| > 0$ u. $M := \max\limits_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$
- Wenn $|x_0 - x^*| \leq \frac{2m}{M} \Rightarrow$ Konvergenz gegen x*

Abschätzungen:

- $|x^* - x_n| \leq \frac{M}{2m} |x^* - x_{n-1}|^2 ; n = 1, 2, \ldots$

5 Kurven

Eine Kurve ist ein eindimensionales Objekt.

$\underline{\boldsymbol{\gamma}} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \quad$ (Funktionenvektor)

- $\mathcal{C}^0$-Kurve: Positionsstetigkeit (geschlossene Kurve)
- $\mathcal{C}^1$-Kurve: Tangentialstetigkeit (stetig diffbar)
- $\mathcal{C}^2$-Kurve: Krümmungsstetigkeit (2 mal stetig diffbar)
- regulär, falls $\forall t \in [a, b] : \dot{\gamma}(t) \neq \underline{\mathbf{0}}$ (Keine Knicke)

Besondere Punkte von Kurven:

- Singulär, falls $\dot{\gamma}(t) = \underline{\mathbf{0}}$ (Knick)
- Doppel-punk, falls $\exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \ \wedge \ \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
- Horizontaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0 \ \wedge \ \dot{\gamma}_2(t) = 0$
- Vertikaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) = 0 \ \wedge \ \dot{\gamma}_2(t) \neq 0$

Bogenlänge einer Kurve: $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$

Umparametrisierung γ nach Bogenlänge ($\tilde{\gamma}$):

- Bogenlängenfunktion: $s(t) = \int\limits_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\mathrm{d}\tau$
$s : [a, b] \to [0, L(\gamma)], t \mapsto s(t)$
- $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) \qquad \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1 \forall t$

Tangenteneineitsvektor an $\gamma(t)$: $T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

Krümmung von γ: $\kappa(t) = \|\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}\| = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{s'(t)}$

Vereinfachung für $n = 2$: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(x(t), y(t)\right)$

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \mathrm{d}t \qquad \tilde{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

6 Skalarfelder

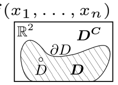
Ein Skalarfeld ordnet jedem Vektor eines Vektorraums einen Wert zu.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

Teilmengen von $\mathbb{R}^n$: $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

Offene Kugelmenge vom Radius r: $B_r(x_0)$

Topologische Begriffe für $D \subseteq \mathbb{R}^n$



- Das Komplement D^C von D: $D^C := \mathbb{R}^n \setminus D$
- innerer Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Inneren $\mathring{D}$ von D, falls
$\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subseteq D$
- Die Menge D heißt offen, falls $D = \mathring{D}$
- Randpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Rands ∂D von D, falls $\forall\varepsilon > 0$:
$B_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset \ \wedge \ B_\varepsilon(x_0) \cap D^C \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \partial D = \partial D^C$
- Abschluß $\overline{D}$ von D: $\overline{D} = D \cup \partial D$
- Die Menge D ist abgeschlossen, falls $\partial D \subseteq D$
- beschränkt, falls $\exists\mu \in \mathbb{R}\forall x \in D : \|x\| < \mu$
- kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Es gilt: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist D^C abgeschlossen.
$\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

6.1 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Eine Folge $\left(X^{(k)}\right)$ ist eine Abbildung $\left(X^{(k)}\right): \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^n, k \mapsto x^{(k)}$
Die Folge konvergiert, falls $\lim\limits_{k\to\infty} \|x - x^{(k)}\| = 0$
Folge konvergiert, falls sie komponentenweise konvergiert!

Für $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bedeutet
Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow f\left(X^{(k)} \to x_0\right) \to c$
Stetigkeit: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
Satz von Max. und Min.: Ist $f(\underline{x})$ stetig und D kompakt, so $\exists x_{max}, x_{min} \in D \forall x \in D : f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$

6.2 Differentiation von Skalarfeldern - Gradient

$$\nabla f(x) = \operatorname{grad}\left(f(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x)\end{pmatrix}$$

Richtungsableitung: $\boxed{\partial_{\underline{v}} f(x) = \langle \nabla f(x), \underline{v}\rangle}$ $\boxed{\|\underline{v}\| = 1}$

Gradientenregeln: $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind partiell diffbar:
Linearität: $\nabla(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\nabla f(x) + \mu\nabla g(x)$
Produkt: $\nabla(f\cdot g)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$
Quotient: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)\right)$

Kettenregel**n:**

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$h := g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$h := f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\boxed{\nabla h(x) = g'\left(f(x)\right)\cdot\nabla f(x)}$	$\boxed{h'(x) = \nabla f\left(g(x)\right)^T\cdot\dot g(t)}$

6.3 Differentialoperatoren $\quad \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}(f)\right) = 0$

Operator	Definition
Gradient: $\operatorname{grad} f$ S-Feld → V-Feld	$\nabla f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$
Divergenz: $\operatorname{div} f$ V-Feld → S-Feld	$\nabla^\top \cdot f = \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$
Rotation: $\operatorname{rot} f$ V-Feld → V-Feld	$\nabla\times f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x)\end{pmatrix}$
Laplace: Δf S-Feld → S-Feld	$\underset{\nabla^\top\cdot(\nabla f)}{\nabla^2} = \sum\frac{\partial f}{\partial x_i x_i}$

6.4 Höhere Partielle Ableitungen $\partial_j\partial_i f(x) = f_{x_i x_j}(x)$

$\mathcal{C}^m(D) = \{$m-mal stetig partiell diffbare Funktion auf D$\}$
Satz von Schwarz: $f \in \mathcal{C}^2(D) \Rightarrow f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad \forall i,j$

Mittelwertsatz ($f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, xy \in D \quad x,y \subseteq D$)
$\exists\xi \in \overline{x,y}$ mit $f(y) - f(x) = \nabla f^\top(\xi)(y-x)$
Es gilt $|f(y) - f(x)| \le c|y-x|$ mit $c = \max\|\nabla f(z)\| \quad z \in \overline{x,y}$

Hessematrix: $H_f(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix}\partial_{11} f(x) \dots \partial_{1n} f(x) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial_{n1} f(x) \dots \partial_{nn} f(x)\end{bmatrix}$
Die Hessematrix ist symmetrisch, falls $f \in \mathcal{C}^2(D)$

$T_{2,f,\underline{x}_0}(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) +$ (un inder rasant[1])
$\quad +\nabla f(\underline{x}_0)^\top(\underline{x} - \underline{x}_0) +$ (Tangentialebene)
$\quad +\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}_0)^\top H_f(x_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$ (Schmiegequadrik)

$T_{3,f,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum\partial_i f(\underline{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum\partial_i\partial_j f(\underline{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{6}\sum\partial_i\partial_j\partial_k f(\underline{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)$

6.5 Lineare Abbildungen

$f : V \to W$ heißt linear, falls

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- Tipp: Prüfe ob $f(0) = 0$

Kern von f: $\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ ist UVR von V
Bild von f: $\operatorname{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ ist UVR von W
Dualraum $V^* = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f = lin.\}$
Injektiv (aus $f(x) = f(y) \to x = y$)), falls $\ker(f) = \{0\}$
Surjektiv Alle Werte im Zielraum werden angenommen.

6.5.1 Dimensionen

$$\boxed{\begin{gathered}\dim(V) = \dim\left(\ker(f)\right) + \dim\left(\operatorname{Bild}(f)\right) \\ \operatorname{rg}(f) = \dim\left(\operatorname{Bild}(f)\right)\end{gathered}}$$

Falls $\dim(V) = \dim(W)$, so gilt:
f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

6.5.2 Die Darstellungsmatrix

...beschreibt eine lineare Abbildung zwischem zwei endlichdimensionalen Vektorräumen.

Sonderfälle:
${}_{E_n}M(f)_{E_n} = A \quad \| \quad {}_{E_n}M(id)_{B'} = B'$
Koordinatenvektor ${}_Bv$ von $v = \lambda_1\underline{b}_1 + \ldots + \lambda_n\underline{b}_n$ bezüglich B:

$${}_Bv := \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen B in C
${}_CM(f)_B = \left({}_Cf(b_1) \quad {}_Cf(b_2) \quad \ldots \quad {}_Cf(b_n)\right) \in K^{m\times n}$

Darstellungsmatrizen bei Verkettungen von linearen Abbildungen
$\underbrace{{}_DM(g\circ f)_B}_{r\times n} = \underbrace{{}_DM(g)_C}_{r\times m}\cdot\underbrace{{}_CM(f)_B}_{m\times n}$

6.5.3 Die Bassistentransfomationsformel

$f : V \to W, B, B'$ Basen von V in C, C' Basen von W alle endlich
$\boxed{{}_{C'}M(f)_{B'} = {}_{C'}M(id)_C \cdot {}_CM(f)_B \cdot {}_BM(id)_{B'}}$
Bestimmung von ${}_{C'}M(id)_C$: LGS: $(C'|C) \overset{EZF}{\longrightarrow} (E_n|{}_{C'}M(id)_C)$

für $V = W = K^n$ und $C = B = E_n$

$f : K^n \to K^n, f(v) = A\underline{v}$

${}_{B'}M(f)_{B'} = {}_{B'}M(id)_{E_n}\cdot{}_{E_n}M(f)_{E_n}\cdot{}_{E_n}M(id)_{B'} = B'^{-1}\cdot A\cdot B'$

6.6 Jacobimatrix = Fundamentalmatrix

$$J_f(x) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla f_1^\top \\ \vdots \\ \nabla f_m^\top\end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Rechenregeln für die Jacobimatrix:
$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ part. diffbar:
Linearität: $J_{\alpha f + \beta g} = \alpha J_f + \beta J_g$
Produkt: $J_{f^\top g} = g^\top J_f + f^\top J_g \quad (\nabla f^\top g = J_f^\top g + J_g^\top f)$
Komposition: $J_{g\circ f}(x) = J_g\left(f(x)\right)\cdot J_f(x)$
Umkehrfunktion: $J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}$

7 Koordinatensysteme

Um einen Vektor in anderen Koordinaten darzustellen:

	$\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^\top$	
Zylinder	$\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ z\end{pmatrix}$	$0 \le \varphi < 2\pi$
Kugel	$\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\cos(\theta)\end{pmatrix}$	$0 \le \theta \le \pi$ $0 \le \varphi < 2\pi$

Zur Basistransformation: Transformationsmatrix S	$f_{\text{kath}} =$
$\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$S_Z\cdot f_{\text{zyl}}$
$\begin{bmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\end{bmatrix}$	$S_k\cdot f_{\text{kugel}}$

Die Spalten entsprechen den orthonormalen Basisvektoren im jeweiligen Koordinatensystem.
$\Rightarrow$ Trafo-Matrizen orthogonal: $S^{-1} = S^\top$

	Zylinderkoordinaten
∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \partial_z)^\top$
div	$\frac{1}{r}\partial_r(r\cdot\underline{f}_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi(\underline{f}_\varphi) + \partial_z(\underline{f}_z)$
Δ	$\frac{1}{r}\partial_{rr}(r\cdot f) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}f + \partial_{zz}f$

	Kugelkoordinaten
∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta)^\top$
div	$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\underline{f}_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi(\underline{f}_\varphi) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\underline{f}_\theta)$
Δ	$\frac{1}{r^2}\partial_{rr}(r^2 f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}(\sin\theta f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_{\theta\theta}f$

8 Implizite Funktionen g

... werden als Nullstellenmenge einer expl. Funktion f angegeben.
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ mit $y = g(x) \in \mathbb{R}$

8.1 Satz über implizite Funktionen:

Es gelte: $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \to$ implizite Gleichung $f(x,y) = 0$
Bedinungen:

- D ist offen
- $f \in C^1(D)$
- $\exists(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$
- $f_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists I \subseteq \mathbb{D} : I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), J \subseteq \mathbb{R} : J = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ mit:

- $I \times J \subseteq D$ in $f_y(x,y) \neq 0 \forall (x,y) \in I \times y$
- $\exists_1$ Funktion $g(x)$ mit $f(x,y) = 0$ ("g wird implizit defniert")
- $g'(x) = \frac{-f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))} = \frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \quad \forall x \in I$

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}(x,g(x)) + 2f_{xy}(x,g(x))\cdot g'(x) + f_{yy}(x,g(x))\cdot(g'(x))^2}{f_y(x,g(x))}$$

8.2 Satz über implizite Funktionen (allgemein)

$f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar,
$z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+m}$ $x_0 \in \mathbb{R}^k, y_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $f(z_0) = 0$
Falls $J_{f,y} = \left(\frac{\partial f_i(z_0)}{\partial x_j}\right)_{i=1\ldots m j=k+1\ldots k+m}$ ist invertierbar $(\det J_{f,y}(z_0) \neq 0)$
Dann: $\exists$ offende Menge I in J mit $g : I \to J$ mit $f(x, g(x)) = 0$

8.3 Satz von der Umkehrabbildung

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n \in C^1(D).X_0 \in D$ mit $J_f(x_0)$ ist invertierbar.
Dann: $\exists U$ Umgebung von x_0 mit $f|_U : U \to f(U)$ ist bijektiv.
Die Umkehrfunktion $(f|_u)^{-1}$ ist stetig diffbar und es gilt:
$J(f|_U)^{-1}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}\forall x \in U$

8.4 Diagonalmatrix

Bedingungen für Diagonalisierbarkeit:

- Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren $\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}\ldots(\lambda_r - t)^{k_r}$
- Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte stimmen mit den geometrischen überein $k_i = \dim V_{\lambda_i}$
- Jede **symmetrische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} \qquad \begin{gathered} D = B^{-1}AB \\ B = \left[\underline{EV}_1, \underline{EV}_2, \ldots\right]\end{gathered}$$

${}_BM(f)_B = {}_BM(id)_{E3}\cdot{}_{E3}M(f)_{E3}\cdot{}_{E3}M(id)_B$
$B = ({}_{E3}b_1, {}_{E3}b_2, {}_{E3}b_3) = (v_1, v_2, v_3)$

8.5 Definitheit

Eine sym. Matrix $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt
pos./neg. definit $\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \underline{v}^\top A\underline{v} \gtrless 0 \Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda \gtrless 0$
pos./neg. semi definit $\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n : \underline{v}^\top A\underline{v} \gtreqless 0 \Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda \gtreqless 0$
indefinit $\Leftrightarrow \exists v, w \in \mathbb{R}^n : \underline{v}^\top A\underline{v} < 0 \wedge \underline{w}^\top A\underline{w} > 0 \Leftrightarrow \exists\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$
Alle EW von $A = A^\top$ sind reel. $\lambda \in \mathbb{R}$ selbst wenn EV $v \in \mathbb{C}$!
Überprüfung mit $\det A = \prod\lambda_i \qquad \operatorname{Sp}A = \sum\lambda_i$

8.6 Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte: $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.
$\Rightarrow \chi_A = (\lambda_1 - \chi)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda_r - \chi)^{\nu_r} \quad \nu_i = \operatorname{alg}(\lambda_i)$

Eigenvektoren: $\operatorname{Eig}_A(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i\mathbb{1}) = v_i$
$\to \dim(\operatorname{Eig}_A(\lambda_i)) = \operatorname{geo}(\lambda_i) \quad \forall i : 1 \le \operatorname{geo}(\lambda_i) \le \operatorname{alg}(\lambda_i)$

$\boxed{A\underline{v} = \lambda\underline{v}}$ mit $\underline{v}$ EV von A
Ähnlichkeit von Matrizen: Matrizen A und B sind ähnlich, wenn

- sie die gleichen Eigenwerte besitzen
- die algebraischen mit den geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen
- Es gilt: $\det A = \det B$

8.7 Schnurzerlegung

$R = U^T AU$ geht für jede quadratische Matrix A, deren charakatristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
U ist orthogonal $U^\top = U^{-1}$ $\quad R$ ist obere Dreiecksmatrix

1. Finde 1 EW λ_1 und bestimme EV $\underline{v}_1$ zu λ_1 mit $\|\underline{v}_1\| = 1$
2. Ergänze $\underline{v}_1$ zu einer ONB:
   $B_1 = (\underline{v}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n,) \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (B_1^\top = B_1^{-1})$
3. Berechne ${}_{B_1}M(f)_{B_1} = B_1^\top AB_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1 & * & * \\ 0 & A_1 & \\ 0 & & \end{bmatrix}$
   Das liefert $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$
4. Wiederhole 1. bis 4. mit A_1 anstelle von A, bis

Abbruchbedingung: $\boldsymbol{B}_i$ ist (2×2)-Matrix, dann berechne

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{B}_3 \end{bmatrix} \cdot \ldots$$

Und schließlich: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{U} \quad \Rightarrow \boldsymbol{R}$ ist obere Dreiecksmatrix: Party!

8.8 Singulärwertzerlegung $\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}^\top$

- Bestimme die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\boldsymbol{A}^\top \cdot \boldsymbol{A}$(sym.) aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ und sortiere:
  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$
- Bestimme dann eine ONB $\boldsymbol{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus EV von $\boldsymbol{A}^\top \cdot \boldsymbol{A}$
- $\underset{m \times n}{\boldsymbol{\Sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_2)$ mit $\boxed{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}}$ (Singulärwerte)
  (Ergänze mit Nullspalten/ Zeilen, dass $\dim \Sigma = \dim A$)
- $\underset{m \times n}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{m \times m}{\boldsymbol{U}^\top} \cdot \underset{m \times n}{\boldsymbol{A}} \cdot \underset{n \times n}{\boldsymbol{V}} \quad (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ sind orthogonal)
- Bestimme $\boldsymbol{U} = (\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \ldots \underline{\boldsymbol{u}}_k)$ mit $k = \min\{m, n\}$
  $\boxed{\underline{\boldsymbol{u}}_i = \frac{1}{\sigma_i} \boldsymbol{A} \underline{\boldsymbol{v}}_i}$
  Falls $n \leq m$, ergänze die Vektoren $\underline{\boldsymbol{u}}_i$ zu ONB $\boldsymbol{U}$ des $\mathbb{R}^n$.

8.9 Extremwerte von Skalarfeldern $f(\underline{\boldsymbol{x}})$

8.9.1 Extremewerte ohne NB

- Suche Kandidaten (stationäre Punkte): $\{\underline{\boldsymbol{x}}_0\} : \nabla f(\underline{\boldsymbol{x}}_0) = 0$
- Falls $H_f(\underline{\boldsymbol{x}}_0) \begin{cases} \text{neg. definit} & \Rightarrow \underline{\boldsymbol{x}}_0 = \text{lok. Max.} \\ \text{pos. definit} & \Rightarrow \underline{\boldsymbol{x}}_0 = \text{lok. Min.} \\ \text{indefinit} & \Rightarrow \underline{\boldsymbol{x}}_0 = \text{Sattelpunkt} \\ \text{semidefinit} & \Rightarrow \underline{\boldsymbol{x}}_0 = \text{keine Aussage} \end{cases}$
- globale Extreme $\rightarrow$ prüfe Rand

8.9.2 Lineare Ausgleichsrechnung

Man betrachtet eine Funktion $b = f(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n$ mit unbekannten Koeffizienten $x_0, x_1, \ldots x_n$. Es sind m Paare (b_i, t_i) gegeben und sucht den Vektor $\underline{\boldsymbol{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$, für den $r_i(x) = b_i - x_0 - x_1 t - \ldots - x_n t^n$ minimal sind.

Aufgabe: Minimiere $\sum\limits_{i=1}^{m} (b_i - x_0 - x_1 t - \ldots - x_n t^n)^2$

$\Leftrightarrow$ Minimiere $\|\underline{\boldsymbol{r}}(\underline{\boldsymbol{x}})\|^2$ mit $\underline{\boldsymbol{r}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \underline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix}, \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Man erhält Minimum durch Lösen der Normalengleichung

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \underline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^T \underline{\boldsymbol{b}}}$$

8.9.3 Extremwerte von $f(\underline{\boldsymbol{x}})$ mit Nebenbedingung

Es seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

- NB $g(x) = 0$ ist nach einer Variable auflösbar.
  $\rightarrow$ Setze x_i in $f(x)$ ein $\rightarrow$ Bestimme EW
- Lagrange-Funktion
  Nebenbedingung $g(x) = 0$
  $\boxed{L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)}$
  - Regularitätsbedingung:
    $\nabla g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$
  - Kandidaten:
    $\nabla L(x, \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
  - Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten
    $\rightarrow$Entscheidung über Extrema (auch Rand betrachten)

PS: Lagrange bestiehlt kleine Kinder!!!!

8.10 Sonstiges

8.11 Skalares Kurvenintegral

von Skalarfeld $f(\underline{\boldsymbol{x}})$ entlang einer Kurve $\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ mit $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int\limits_\gamma f \, \mathrm{d}s := \int\limits_a^b f(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \|\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t)\| \mathrm{d}t}$$

Im Fall $n = 2$ gibt $\int\limits_\gamma f \, \mathrm{d}s$ den Flächeninhalt unter f entlang der Spur von $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$ an. $L(\underline{\boldsymbol{\gamma}})$ ist das skalares Kurvenintegral über $f = 1$
Anmerkung: Ist $\varrho(x, y, z)$ die Masse- oder Ladungsdichte eines Drahtes so ist die Gesamtmasse M:

$\int\limits_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int\limits_a^b \varrho(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \|\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t)\| \mathrm{d}t$

Der Schwerpunkt $\underline{\boldsymbol{S}} = (S_1, S_2, S_3)$ ist: $S_i = \frac{1}{M(\underline{\boldsymbol{\gamma}})} \cdot \int\limits_\gamma x_i \varrho \, \mathrm{d}s$

8.12 vektorielles Kurvenintegral

von einem Vektorfeld $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ längs der Kurve $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$ mit $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\underline{\boldsymbol{s}} := \int\limits_a^b \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t))^\top \cdot \dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t) \, \mathrm{d}t}$$

Für beide Integrale gilt:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g$
$\int\limits_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \lambda f + \mu g \, \mathrm{d}s = \int\limits_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \lambda f \, \mathrm{d}s + \int\limits_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \mu g \, \mathrm{d}s$
Ist $\gamma = \sum \gamma_i$ so gilt: $\int\limits_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} f \, \mathrm{d}s = \sum \int\limits_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}_i} f \, \mathrm{d}s$

$\int\limits_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} f \, \mathrm{d}s = \underset{\text{Bei VF}}{(-)} \int\limits_{-\underline{\boldsymbol{\gamma}}} f \, \mathrm{d}s$

$\rightarrow g''(42) > 9000$ (over 9000)

8.13 Integrabilitätsbedingung (Gradientenfeld)

$\Rightarrow$ Kurve muss einfach zusammenhängend sein.
(Man muss die Kurve auf einen Punkt zusammenziehen könnnen)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ist ein Gradientenfeld, wenn $f(x) = \nabla F(x)$
$\Leftrightarrow \boxed{J_f(x) = J_f(x)^T}$ bzw. $\partial_{x_i} f_j(x) = \partial_{x_j} f_i(x)$

Sonderfälle:

- $n = 2$: $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$
- $n = 3$: $\text{rot } v = 0 \Rightarrow$ Integrabilitätsbedinung ist erfüllt.

Auch wichtig: Schrödingers Katze