## 1 Allgemeines

Dreiecksungleichung: $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\left|\vec{x}^\top \cdot \vec{y}\right| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$
Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Aritmetrische Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Geometrische Summenformel $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

**Wichtige Zahlen:**

$\pi \approx 3,14159 \qquad e \approx 2,71828 \qquad \sqrt{2} \approx 1,414 \qquad \sqrt{3} \approx 1,732$

**Fakultäten** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1! = 1$

## 2 Mengen

Eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Elemente zu einer Menge
explizite Angabe: $A = \{1; 2; 3\}$
Angabe durch Eigenschaft: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\}$

### 2.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

1. $\emptyset \subseteq B$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}\}$

Jede rationale Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ hat ein Dezimaldarstellung.
$0,25\overline{54} =: a \rightarrow 10000a - 100a = 2554 - 25 \Rightarrow a(9900) = 2529 \quad \Rightarrow a = \frac{2529}{9900} = \frac{281}{1100}$

## 3 Vollständige Induktion

Behauptung: $f(n) = g(n)$ für $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$
IA: $n = n_0$: Zeige $f(n_0) = g(n_0)$ =wahr.
IV: Behauptung gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ (Sei $f(n)$ =wahr)
IS: $n \rightarrow n+1$: Zeige $f(n+1) = \underbrace{f(n)}_{=wahr} \ldots = g(n+1)$

## 4 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = a + b\mathbf{i}$, $z \in \mathbb{C}a, b \in \mathbb{R}$ besteht aus einem Realteil $\Re(z) = a$ und einem Imaginärteil $\Im(z) = b$, wobei $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ die immaginären Einheit ist. Es gilt: $i^2 = -1 \quad i^4 = 1$

### 4.1 Kartesische Koordinaten

Rechenregeln:
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\mathbf{i}$

Konjugiertes Element von $z = a + b\mathbf{i}$:
$\overline{z} = a - b\mathbf{i} \qquad e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$
$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Inverses Element:
$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathbf{i}$

### 4.2 Polarkoordinaten

$z = a + b\mathbf{i} \neq 0$ in Polarkoordinaten:
$z = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)) = r \cdot e^{\varphi\mathbf{i}}$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b < 0 \end{cases}$$

**Multiplikation:** $z_1 \cdot z_2 = r_1 * r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
**Division:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

**n-te Potenz:** $z^n = r^n \cdot e^{n\varphi\mathbf{i}} = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi))$

**n-te Wurzel:** $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$
$k = 0, 1, \ldots, n-1$

**Logarithmus:** $\ln(z) = \ln(r) + \mathbf{i}(\varphi + 2k\pi)$ (Nicht eindeutig!)

Anmerkung: Addition in kartesische Koordinaten umrechnen(leichter)!

## 5 Funktionen

Eine Funktion $f$ ist eine Abbildung, die jedem Element $x$ einer Definitionsmenge $D$ genau ein Element $y$ einer Wertemenge $W$ zuordnet.
$f: D \rightarrow W,\ x \mapsto f(x) := y$

**Injektiv**: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
**Surjektiv**: $\forall y \in W \exists x \in D: f(x) = y$
(Alle Werte aus $W$ werden angenommen.)
**Bijektiv**: $f$ ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow f$ umkehrbar.

### 5.1 Symmetrie einer Funktion $f$

**Achsensymmetrie**(gerade Funktion): $f(-x) = f(x)$
**Punktsymmetrie**(ungerade Funktion): $f(-x) = -f(x)$

Regeln für gerade Funktion $g$ und ungerade Funktion $u$:
$g_1 \pm g_2 = g_3 \qquad u_1 \pm u_2 = u_3$
$g_1 \cdot g_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot u_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot g_1 = u_3$

### 5.2 Extrema, Monotonie und Krümmung von $f$

$$f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \begin{cases} f''(x_0) < 0 \rightarrow \text{ Maximum (lokal)} \\ f''(x_0) > 0 \rightarrow \text{ Minimum (lokal)} \end{cases}$$

$f'(x) \underset{(>)}{\geq} / \underset{(<)}{\leq} 0 \rightarrow f$ (streng) Monoton steigend/fallend. $x \in [a, b]$
$f''(x) \underset{(>)}{\geq} / \underset{(<)}{\leq} 0 \rightarrow f$ (strikt) konvex/konkav. $x \in [a, b]$

### 5.3 Asymptoten von $f$

Horizontal: $c = \lim\limits_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$
Vertikal: $\exists$ Nullstelle $a$ des Nenners : $\lim\limits_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$
Polynomasymptote $P(x)$: $f(x) := \frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \underbrace{\frac{B(x)}{Q(x)}}_{\rightarrow 0}$

### 5.4 Wichtige Sätze für <u>stetige</u> Fkt. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$

**Zwischenwertsatz:** $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a, b]: f(x) = y$
**Mittelwertsatz:** Falls $f$ diffbar, dann $\exists x_0: f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
**Satz von Rolle:** Falls $f(a) = f(b)$, dann $\exists x_0: f'(x_0) = 0$
**Regel von L'Hospital:** (Falls $\exists$ ein Grenzwert)
$\lim\limits_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

### 5.5 Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
Lösungen für $ax^2 + bx + c = 0$

| Mitternachtsformel: | Satz von Vieta: |
|---|---|
| $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ |

### 5.6 Trigonometrische Funktionen

$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0)$

$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$e^{ix} = cos(x) + i\,sin(x),\ e^{-ix} = sin(x) - i\,cos(x)$

**Additionstheoreme**

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

| $x$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ` | 0 | ` | 0 |

## 6 Matrizen

Eine Matrix ist eine Tabelle aus mathematischen Objekten. Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat $m$ Zeilen mit Index $i$ und $n$ Spalten mit Index $j$

### 6.1 Allgemeine Rechenregeln

**Merke:** Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc...)

1) $A + 0 = A$ 2) $1 \cdot A = A$
3) $A + B = B + A$ 4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im allg.)
5) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Multiplikation von $A \in \mathbb{K}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$: $AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$

### 6.2 Transponieren

Falls $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt: $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$
Regeln:
$(A + B)^\top = A^\top + B^\top \qquad (A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top \qquad (A^\top)^\top = A$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^\top$ ($\Rightarrow$ diagbar)
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A = -A^\top$
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist orthogonal(Spaltenvektoren=OGB), falls:
$AA^\top = E_n \qquad A^\top = A^{-1} \qquad \det A = \pm 1$
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist hermitesch, falls $A = \overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

### 6.3 Inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

für die inverse Matrix $A^{-1}$ von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt: $A^{-1}A = E_n$
$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A) \neq 0 \quad \vee \quad rg(A) = n$

Berechnen von $A^{-1}$ nach Gauß:
$AA^{-1} = E_n \quad \Rightarrow \quad (A|E_n) \overset{EZF}{\longrightarrow} (E_n|A^{-1})$

### 6.4 Elementare Zeilen/Spaltenumformungen(EZF/ESF)

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat $m$ Zeilen $z_i \in \mathbb{K}^n$ und $n$ Spalten $s_j \in \mathbb{K}^m$

- **Addition** ($\lambda \neq 0$): $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \quad / \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$
- Vertauschen von Zeilen/Spalten
- Multiplikation mit $\lambda \neq 0$: $\lambda \cdot z \quad / \quad \lambda \cdot s$

### 6.5 Rang einer Matrix $A$

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $r$ lin. unabhängige Zeilen und $l$ Nullzeilen":
Rang von $A$: $\mathrm{rg}(A) = m - l = r$
Vorgehensweise:
**Zeilenrang (A):** Bringe $A$ auf ZSF $\Rightarrow$ Zeilenrang$(A) = rg(A)$
**Zeilenraum (A):** $Z_A =$ Zeilen ungleich 0
**Spaltenrang:** Bringe Matrix auf Spaltenstufenform
**Kern:** $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \qquad \dim(\ker(A)) = n - r$
**Bild:** $A^T \Rightarrow EZF \Rightarrow$ Zeilen ($\neq 0$) bilden die Basis vom Bild. Die (lin. unabhängigen) Spalten von $A$ bilden eine Basis vom Bild.

### 6.6 Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax = b$ kurz $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ hat $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannte.

**Lösbarkeitskriterium:**
Ein LGS $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b))$
Die Lösung des LGS $(A|b)$ hat $\dim\ker A = n - \mathrm{rg}(A)$ frei wählbare Parameter.

Das homogene LGS: $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0
Das LGS hat eine Lsg. wenn $\det A \neq 0 \quad \rightarrow \exists A^{-1}$
Summen und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ sind wieder Lösungen.

### 6.7 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(A) = |A|$

- $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B \cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat $A$ zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwcklng. n. $i$ter Zeile.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist $A$ invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$:
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{K}^{2 \times 2} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

## 7 Vektorräume

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt $K$-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
**Linear Unabhängig:** Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus:
$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$

### 7.1 Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$

**Bilinear:** $\langle \lambda v + v', w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$

**Symmetrisch:** $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

**Positiv definit:** $\langle v, v \rangle \geq 0$

Skalarprodukt bezüglich **symmetrischer, quadratischer** und **positiv definite** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\langle v, w \rangle_A = v^T A w$
Matrix A positiv definit falls $\det(a_{11}) > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 \end{pmatrix} > 0 \wedge \ldots \wedge \det(A) > 0$
**Orthogonale Projektion** $p \in U^n$ von $q \in V^m$ auf $\sum u_i$:

$$p = \sum_{i=1}^{n} \left\langle q, \frac{u_i}{|u_i|} \right\rangle \frac{u_i}{|u_i|} \quad = q - p^\perp$$

**Winkel** $\left\langle\vec a,\vec b\right\rangle = a\cdot b\cdot\cos\phi \qquad \phi=\arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$

**Polynome** $<p(x),q(x)>=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$

### 7.2 Betrag von Vektoren

$$||\vec a|| = \sqrt{<\vec a,\vec a>} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$$

### 7.3 Orthogonalität

**Orthonormalisierungsvefahren von $n$ Vektoren nach Gram-Schmidt:**
1. $b_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2. $b_{k+1}=\frac{b'_{k+1}}{\|b'_{k+1}\|}$ mit $b'_{k+1}=v_{k+1}-\sum_{i=1}^k\langle v_{k+1},b_i\rangle\cdot b_i$

**Ausgleichsrechnung:**
Experiment: $(t_1,y_1),\ldots,(t_n,y_n)$
$f_1:\mathbb R\to\mathbb R, f_1(x)=1 \qquad f_2:\mathbb R\to\mathbb R, f_2(x)=x$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}f_1(t_1) & f_2(t_1)\\ \vdots & \vdots\\ f_1(t_n) & f_2(t_n)\end{pmatrix} \qquad v=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$A^\top Ax=A^\top v\to$ LGS lösen nach x
$f:\mathbb R\to\mathbb R, f(x)=x_1f_1(x)+\ldots+x_nf_n(x)$
**Orthogonale Projektion in UVR:**
1. Normiere Basis von $U$.
2. $u=\langle b_1,v\rangle\,b_1+\langle b_2,v\rangle\,b_2\ldots\Rightarrow u^\perp=v-u$
Abstand von $v$ zu $U$: $\left\|u^\perp\right\|$

### 7.4 Vektorprodukt

$$\vec a\times\vec b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \qquad \vec a,\vec b\in\mathbb R^3$$

$\vec a\times\vec b\perp\vec a,\vec b \qquad (\vec a\times\vec b=0 \Leftrightarrow \vec a;\vec b$ linear abhängig.
$||\vec a\times\vec b||=||\vec a||\cdot||\vec b||\cdot\sin\left(\measuredangle(\vec a;\vec b)\right)\,\widehat{=}$ Fläche des Parallelogramms
Graßmann-Identität: $\vec a\times(\vec b\times\vec c)\equiv\vec b\cdot(\vec a\cdot\vec c)-\vec c\cdot(\vec a\cdot\vec b)$

Spatprodukt:
$[a,b,c]:=\langle\vec a\times\vec b,\vec c\rangle=\det(a,b,c)\,\widehat{=}$ Volumen des Spates.
$[a,b,c]>0 \Rightarrow a,b,c$ bilden Rechtssystem
$[a,b,c]=0 \Rightarrow a,b,c$ linear abhängig

Orthogonale Zerlegung eine Vektors v längs a:
$v=v_a+v_{a^\perp}$ mit $v_a=\frac{\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle}*a$ und $v_{a^\perp}=v-v_a$

### 7.5 Basis (Jeder VR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge $B$ heißt Basis, von $V$ wenn gilt:
- $\langle B\rangle=V$ $B$ erzeugt $V$
- $B$ ist linear unabhängig

### 7.6 Dimension

$$n:=|B|\in\mathbb N_0 \text{ Dimension von } V \qquad \dim(V)=n$$

Mehr als $n$ Vektoren sind stehts linear abhängig.
Für jeden UVR $U\subset V$ gilt: $\dim(U)<\dim(V)$

## 8 Untervektorräume

Eine Teilmenge $U$ eines $K-$Vektorraums $V$ heißt Untervektorraum (U-VR) von $V$, falls gilt:
1. $U\neq\varnothing \qquad (0\in U)$
2. $u+v\in U \quad \forall u,v\in U$
3. $\lambda u\in U \quad \forall u\in U,\forall\lambda\in K$

Wegen (3.) enthält ein UVR $U$ stets den Nullvektor 0. Daher zeigt man (1.) meist, indem man $0\in U$ nachweist.

**Triviale UVR**: $U=\{0\}$ mit $B=\emptyset \qquad U=V$ mit $B_U=B_V$

## 9 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung $a:\mathbb N_0\to\mathbb R,\ n\to a(n)=:a_n$
explizite Folge: $(a_n)$ mit $a_n=a(n)$
rekursive Folge: $(a_n)$ mit $a_0=f_0,\ a_{n+1}=a(a_n)$

### 9.1 Monotonie

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie:
1. $a_{n+1}-a_n\gtrless(=)0$
2. $\frac{a_n}{a_{n+1}}\gtrless(=)1 \qquad\vee\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}\lessgtr(=)1$
3. Vollständige Induktion

### 9.2 Konvergenz

$(a_n)$ ist *Konvergent* mit *Grenzwert* $a$, falls: $\forall\epsilon>0\,\exists N\in\mathbb N_0$ : $|a_n-a|<\epsilon\forall n\geq N$
Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl $a$: $(a_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$

**Es gilt:**
- Der Grenzwert a einer Folge $(a_n)$ ist eindeutig.
- Ist $(a_n)$ Konvergent, so ist $(a_n)$ beschränkt
- Ist $(a_n)$ unbeschränkt, so ist $(a_n)$ divergent.
- *Das Monotoniekriterium*: Ist $(a_n)$ beschränkt und monoton, so konvergiert $(a_n)$
- *Das Cauchy-Kriterium:* Eine Folge $(a_n)$ konvergiert gerade dann, wenn:
  $\forall\epsilon>0\,\exists\,N\in\mathbb N_0:|a_n-n_m|<\epsilon\,\forall n,m\geq N$

Regeln für konvergente Folgen $(a_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$ und $(b_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}b$:
$(a_n+b_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}a+b \qquad (a_nb_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}ab \qquad (\frac{a_n}{b_n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{a}{b}$
$(\lambda a_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda a \qquad (\sqrt{a_n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt a \qquad (|a_n|)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}|a|$

### 9.3 Wichtige Regeln

$$a_n=q^n \quad\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad\begin{cases}0 & |q|<1\\ 1 & q=1\\ \pm\infty & q<-1\\ +\infty & q>1\end{cases}$$

$a_n=\frac{1}{n^k}\to0 \qquad \forall k\geq1$
$a_n=\left(1+\frac{c}{n}\right)^n\to e^c \qquad\qquad 2^n\geq n^2 \quad \forall n\geq4$

## 10 Reihen

$$\sum_{n=1}^\infty\frac1n=\infty \qquad\qquad \sum_{n=0}^\infty q^n=\frac{1}{1-q} \qquad |q|<1$$

Harmonische Reihe — Geometrische Reihe

### 10.1 Konvergenzkriterien

$\sum_{n=0}^\infty a_n$ divergiert, falls $a_n\not\to0$ oder
Minorante:$\exists\sum_{n=0}^\infty b_n(div) \quad\wedge\quad a_n\geq b_n\ \forall n\geq n_0$

$\sum_{n=0}^\infty(-1)^na_n$ konvergiert falls $(a_n)$ monoton fallende Nullfolge
oder Majorante: $\exists\sum_{n=0}^\infty b_n=b \quad\wedge\quad a_n\leq b_n\ \forall n\geq n_0$

Absolute Konvergenz($\sum_{n=0}^\infty|a_n|=a$ konvergiert), falls:
1. Majorante: $\exists\sum_{n=0}^\infty b_n=b \quad\wedge\quad |a_n|\leq b_n \quad \forall n\geq n_0$
2. Quotienten und Wurzelkriterium:

$$\rho:=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad\vee\qquad \rho:=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\text{Falls}\begin{cases}\rho<1\Rightarrow\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ konvergiert absolut}\\ \rho>1\Rightarrow\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ divergiert}\\ \rho=1\Rightarrow\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ keine Aussage möglich}\end{cases}$$

## 11 Potenzreihen

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_n\cdot(x-a)^n$$

Konvergenz:
$$\left|\frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-a|\overset{n\to\infty}{\to}q\cdot|x-a|$$

$$\text{Falls}\begin{cases}|x-a|<\frac1q & \text{konvergiert absolut}\\ |x-a|>\frac1q & \text{divergiert}\\ |x-a|=\frac1q & \text{keine Aussage möglich}\end{cases}$$

Konvergenzradius: $R=\frac1q$
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$e^z=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

## 12 Ableitung und Integral

$f$ diffbar, falls $f$ stetig und $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x)$ exist.

### 12.1 Ableitungsregeln:

Linearität: $(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x) \qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb R$
Produktregel: $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Quotientenregel$\left(\frac{\text{NAZ}-\text{ZAN}}{\text{N}^2}\right)$: $\left(\frac fg\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel: $(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$
Potenzreihe: $f:\underbrace{]-R+a,a+R[}_{\subseteq D}\to\mathbb R, f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\sum_{n=0}^\infty na_n(x-a)^{n-1}$
**Tangentengleichung:** $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

### 12.2 Newton-Verfahren:

$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert $x_0$

### 12.3 Integrationsmethoden:

- Anstarren + Göttliche Eingebung
- Partielle Integration: $\int uv'=uv-\int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)\,\mathrm dx}_{\mathrm dt}=\int f(t)\,\mathrm dt$
- Brechstange: $t=\tan(\frac x2) \qquad \mathrm dx=\frac{2}{1+t^2}\mathrm dt$
  $\sin(x)\to\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x)\to\frac{1-t^2}{1+t^2}$

### 12.4 Integrationsregeln:

$\int_a^b f(x)\mathrm dx=F(b)-F(a)$
$\int\lambda f(x)+\mu g(x)\,\mathrm dx=\lambda\int f(x)\,\mathrm dx+\mu\int g(x)\,\mathrm dx$

| $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $ln\|f(x)\|$ | $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$ |
| $\frac{1}{q+1}x^{q+1}$ | $x^q$ | $qx^{q-1}$ |
| $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$ | $\sqrt x$ | $\frac{1}{2\sqrt x}$ |
| $x\ln(x)-x$ | $\ln(x)$ | $\frac1x$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\frac{a^x}{\ln(a)}$ | $a^x$ | $a^x\ln(a)$ |
| $-\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $-\ln\|\cos(x)\|$ | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $\ln\|\sin(x)\|$ | $\cot(x)$ | $\frac{-1}{\sin^2(x)}$ |
| $x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$ | $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$ | $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x\arctan(x)-\frac12\ln\left\|1+x^2\right\|$ | $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

### 12.5 Rotationskörper

Volumen: $V=\pi\int_a^b f(x)^2\mathrm dx$
Oberfläche: $O=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm dx$

### 12.6 uneigentliches Integral

$\int\limits_{\text{ok}}^{\text{böse}}f(x)\mathrm dx=\lim\limits_{b\to\text{böse}}\int\limits_{\text{ok}}^{b}f(x)\mathrm dx$
Majoranten-Kriterium: $|f(x)|\leq g(x)$
$\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}\mathrm dx\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha\leq1\end{cases} \qquad \int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha}\mathrm dx\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1\\ \infty, & \alpha\geq1\end{cases}$

**Cauchy-Hauptwert:** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^{b}f(x)\mathrm dx$

### 12.7 Laplace-Transformation von $f:[0,\infty[\to\mathbb R,\ s\mapsto f(s)$

$$\mathcal L\ f(s)=F(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)\ \mathrm dt=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-st}f(t)\ \mathrm dt$$

### 12.8 Integration rationale Funktionen

Gegeben: $\int\frac{A(x)}{Q(x)}\mathrm dx \qquad A(x),Q(x)\in\mathbb R[x]$
1. Falls, $\deg A(x)\geq\deg Q(x)\Rightarrow$ Polynomdivision: $\frac{A(x)}{Q(x)}=P(x)+\frac{B(x)}{Q(x)}$ mit $\deg B(x)<\deg Q(x)$
2. Zerlege $Q(x)$ in unzerlegbare Polynome
3. Partialbruchzerlegung $\frac{B(x)}{Q(x)}=\frac{\cdots}{(x-a_n)}+\ldots+\frac{\cdots}{\cdots}$
4. Integriere die Summanden mit folgenden Funktionen

mit $\lambda=x^2+px+q, \quad \beta=4q-p^2$ und $p^2<4q$!

$$\int\frac{1}{(x-a)^m}\mathrm dx\begin{cases}\ln|x-a|\,, & m=1\\ \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} & m\geq2\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{(\lambda)^m}\mathrm dx\begin{cases}\frac{2}{\sqrt\beta}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt\beta}, & m=1\\ \frac{2x+p}{(m-1)(\beta)(\lambda)^{m-1}}+\frac{2(2m-3)}{(m-1)(\beta)}\int\frac{\mathrm dx}{(\lambda)^{m-1}}, & m\geq2\end{cases}$$

$$\int\frac{Bx+C}{(\lambda)^m}\mathrm dx\begin{cases}\frac B2\ln(\lambda)+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{\mathrm dx}{\lambda}, & m=1\\ \frac{-B}{2(m-1)(\lambda)^{m-1}}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{\mathrm dx}{(\lambda)^{m-1}}, & m\geq2\end{cases}$$

Auch wichtig: Schrödinger's Katze: