# Stochastische Signale

## 1. Mengenalgebra

### 1.1. Mengen- und Boolsche Algebra

| | | |
|---|---|---|
| Kommutativ | $A \cap B = B \cap A$ | $A \uplus B = B \uplus A$ |
| Assoziativ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | |
| | $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$ | |
| Distributiv | $A \cap (B \uplus C) = (A \cap B) \uplus (A \cap C)$ | |
| | $A \uplus (B \cap C) = (A \uplus B) \cap (A \uplus C)$ | |
| Indempotenz | $A \cap A = A$ | $A \uplus A = A$ |
| Absorbtion | $A \cap (A \uplus B) = A$ | $A \uplus (A \cap B) = A$ |
| Neutralität | $A \cap \Omega = A$ | $A \uplus \emptyset = A$ |
| Dominant | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $A \uplus \Omega = \Omega$ |
| Komplement | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | $A \uplus \overline{A} = \Omega$ |
| | $\overline{\overline{A}} = A$ | $\overline{\Omega} = \emptyset$ |
| De Morgan | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \uplus \overline{B}$ | $\overline{A \uplus B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |

### 1.2. Kombinatorik

Mögliche Variationen/Kombinationen um $k$ Elemente von maximal $n$ Elementen zu wählen bzw. $k$ Elemente auf $n$ Felder zu verteilen:

| | Mit Reihenfolge | Reihenfolge egal |
|---|---|---|
| Mit Wiederholung | $n^k$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| Ohne Wiederholung | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |

Permutation von $n$ mit jeweils $k$ gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{5}{2} = 10$

### 1.3. Grundbegriffe

| | |
|---|---|
| Tupel | $(i, j) \neq (j, i)$ für $i \neq j$ |
| Ungeordnetes Paar | $\{i, j\} = \{j, i\}$ |
| Potenzmenge | $\mathsf{P}(\Omega)$ ist Menge aller Teilmengen von $\Omega$ |

### 1.4. Integralarten

| $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{q+1} x^{q+1}$ | $x^q$ | $q x^{q-1}$ |
| $\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$ | $\sqrt{ax}$ | $\frac{a}{2\sqrt{ax}}$ |
| $x \ln(ax) - x$ | $\ln(ax)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\frac{1}{a^2} e^{ax}(ax - 1)$ | $x \cdot e^{ax}$ | $e^{ax}(ax + 1)$ |
| $\frac{a^x}{\ln(a)}$ | $a^x$ | $a^x \ln(a)$ |

$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2 e^{at} \,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3} e^{at}$

$\int t e^{at} \,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2} e^{at}$ $\qquad \int x e^{ax^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$

### 1.5. Binome, Trinome

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

## 2. Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ besteht aus

- Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ :
  Menge aller möglichen **Ergebnisse** $\omega_i$
- Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ :
  Menge von Ereignisen $A_i \subseteq \Omega$
- Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathsf{P}$

### 2.1. Ereignisalgebra $\mathbb{F} \subseteq \mathsf{P}(\Omega)$

- $\Omega \in \mathbb{F}$
- $A_i \in \mathbb{F} \Rightarrow A_i^{\complement} \in \mathbb{F}$
- $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \geq 1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

Daraus folgt:

- $\emptyset \in \mathbb{F}$
- $A_i \backslash A_j \in \mathbb{F}$
- $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

$|\mathbb{F}| = 2^{\text{Anzahl disjunkter Teilmengen}}$ (muss endlich sein)

#### 2.1.1. $\sigma$-Algebra

Entwicklung $k \to \infty$. Unendlich viele Ergebnisse, aber jedes $A_i$ besteht aus abzählbar vielen Ergebnissen. Besitzt mindestens 2 Ereignisse.

### 2.2. Wahrscheinlichkeitsmaß P

$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\qquad \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$

#### 2.2.1. Axiome von Kolmogorow

| | |
|---|---|
| Nichtnegativität: | $\mathsf{P}(A) \geq 0 \Rightarrow \mathsf{P} : \mathbb{F} \mapsto [0, 1]$ |
| Normiertheit: | $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ |
| Additivität: | $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ |

#### 2.2.2. Weitere Eigenschaften

- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$
- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathsf{P}(\Omega) = 1$
- $\mathsf{P}(A \backslash B) = \mathsf{P}(A \cap B^c) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$
- $\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_i)$

## 3. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

### 3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit für $A$ falls $B$ bereits eingetreten ist:

$\mathsf{P}_B(A) = \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$

#### 3.1.1. Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Es muss gelten: $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \Omega$ für $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$

| | |
|---|---|
| Totale Wahrscheinlichkeit: | $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{i \in I} \mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)$ |
| Satz von Bayes: | $\mathsf{P}(B_k|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B_k)\,\mathsf{P}(B_k)}{\sum\limits_{i \in I} \mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)}$ |

#### 3.1.2. Multiplikationssatz

$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)$

Beliebig viele Ereignisse:

$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$

$= \mathsf{P}\left(A_{\pi(1)}\right) \mathsf{P}\left(A_{\pi(2)} | A_{\pi(1)}\right) \mathsf{P}\left(A_{\pi(3)} | A_{\pi(2)} \cap A_{\pi(1)}\right) \times$

$\cdots \times \mathsf{P}\left(A_{\pi(k)} | A_{\pi(k-1)} \cap \cdots \cap A_{\pi(1)}\right)$

### 3.2. Stochastische Unabhängigkeit

Ereignisse $A$ und $B$ sind unabhängig falls:

$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B) \Rightarrow \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$

**Allgemein:**

$\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{i \in J} A_i\right) = \prod\limits_{i \in J} \mathsf{P}(A_i)$ mit Indexmenge $I$ und $\emptyset \neq J \subseteq I$

## 4. Zufallsvariablen

### 4.1. Definition

$X : \Omega \mapsto \Omega'$ ist Zufallsvariable, wenn für jedes Ereignis $A' \in \mathbb{F}'$ im Bildraum ein Ereignis $A$ im Urbildraum $\mathbb{F}$ existiert, sodass $\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$

### 4.2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ sind stochastisch unabhängig, wenn für jedes $\vec{x} = [x_1, \cdots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{\mathsf{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\{X_i \leq x_i\})}$$

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

Gleichbedeutend:

$$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$$

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

### 4.3. Bedingte Zufallsvariablen

Bedingte Wahrscheinlichkeit für Zufallsvariablen:

| | |
|---|---|
| Ereignis A gegeben: | $F_{X\,|\,A}(x|A) = \mathsf{P}(\{X \leq x\}|A)$ |
| ZV $Y$ gegeben: | $F_{X\,|\,Y}(x|y) = \mathsf{P}(\{X \leq x\}|\{Y = y\})$ |
| | $p_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$ |
| | $f_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathrm{d}F_{X\,|\,Y}(x|y)}{\mathrm{d}x}$ |

## 5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

#### 5.0.1. Definition

$\mathsf{P}_X(A') = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in A'\}) = \mathsf{P}(\{X \in A'\}) \quad \forall A' \in \mathbb{F}'$

#### 5.0.2. Kumulative Verteilungsfunktion (KVF bzw. CDF)

$\boxed{F_X(x) = \mathsf{P}(\{X \leq x\})}$

**Eigenschaften**

- $F_X(x)$ ist monoton wachsend
- $F_X(x) \geq 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig:
  $\forall h > 0 : \lim\limits_{h \to 0} F_X(x + h) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ ; $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\mathsf{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\mathsf{P}(\{X > c\}) = 1 - F_X(c)$

#### 5.0.3. Verteilung diskreter Zufallsvariablen

| Bezeichnung | Abk. | Zusammenhang |
|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeitsmassenfkt. | pmf | $p_X(x) = \mathsf{P}(\{X = x\})$ |
| Kumulative Verteilungsfkt. | cdf | $F_X(x) = \sum\limits_{\xi \in \Omega' : \xi \leq x} p_X(\xi)$ |

#### 5.0.4. Verteilung stetiger Zufallsvariablen

| Bezeichnung | Abk. | Zusammenhang |
|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeitsdichtefkt. | pdf | $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$ |
| Kumulative Verteilungsfkt. | cdf | $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ |

**Berechnung von $f_X(x)$:**

$f_X(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{x}^{x+\epsilon} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathsf{P}(x \leq X \leq x + \epsilon)$

**Normiertheit**

$\sum p(x) + \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1$

### 5.1. Mehrdimensionale Verteilungen

#### 5.1.1. Mehrdimensionale Zufallsvariable:

$\vec{X} = [X_1, \cdots, X_n]^T$ mit $X_i$ Zufallsvariablen

#### 5.1.2. Gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \boxed{F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \mathsf{P}(\{\vec{X} \leq \vec{x}\})} =$

$\mathsf{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\})$

**Eigenschaften:**

- in jeder Koordinate Monoton wachsend
- rechtsseitig Stetig: $\forall h > 0 : \lim\limits_{h \to 0} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1 + h, \ldots, x_n + h) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\lim\limits_{x_i \to -\infty} (x_1, \ldots, x_n) = 0 \;\forall i = 1, \ldots, n$,
  $\lim\limits_{x_1 \to \infty} \cdots \lim\limits_{x_n \to \infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 1$

#### 5.1.3. Diskrete Zufallsvariablen:

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathsf{P}(\{\vec{X} = \vec{x}\})$ (joint probability mass function)

#### 5.1.4. Stetige Zufallsvariablen:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\cdots,X_n}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n \cdots \mathrm{d}\xi_1$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ $\qquad f_{X,Y} = f_{Y,X}$

(joint probability density function)

#### 5.1.5. Marginalisierung

Prinzip: Lasse alle vernachlässigbaren ZV gegen unendlich gehen.

$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty)$

**Randverteilung:**

Spezialfall der Marginalisierung um aus der mehrdimensionalen KVF die KVF für eine ZV zu erhalten.

$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \infty, \cdots, \infty)$

**Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse (PMF)**
(für diskrete ZV)

$p_{X_1}(x_1) = \sum\limits_{x_2,\cdots,x_n} p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)$

**Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte (WDF)**
(für stetige ZV)

$f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2$

## 6. Funktionen von Zufallsvariablen

$X : \Omega \to \Omega' = \mathbb{R}$ und jetzt $g : \Omega' \to \Omega'' = \mathbb{R}$

$\mathsf{P}(A'') = \mathsf{P}(Y \in A'') = \mathsf{P}(\{X \in \Omega' \,|\, g(X) \in A''\} = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in A''\}$

### 6.1. Transformation von Zufallsvariablen

Berechnung von $f_Y(y)$ aus $f_X(x)$

$g(x)$ streng monoton & differenzierbar:

$g^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion

$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left[\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=g^{-1}(y)}\right]^{-1}$

$g(x)$ nur differenzierbar:

$f_Y(y) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_X(x_i) \left[\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i}\right]^{-1}$ mit $i \in \{1, \ldots, N\}$

$x_i$ sind Nullstellen von $y - g(x) = 0$

#### 6.1.1. Beispiel: lineare Funktion

$Y = aX + b \Leftrightarrow g(x) = ax + b$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y - b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

### 6.2. Summe unabhängiger Zufallsvariablen

$Z = X + Y$ mit $X$ und $Y$ unabhängig.

$\Rightarrow f_{Z=X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y \,\mathrm{d}y$

# 7. Stochastische Standardmodelle

## 7.1. Begriffe

**Gedächtnislos**

Eine Zufallsvariable X ist gedächtnislos, falls:

$P(\{X > a+b\}|\{X > a\}) = P(\{X > b\}), \qquad a, b > 0$

## 7.2. Gleichverteilung

### 7.2.1. Diskret

$p_X(x) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad x \in \{1, \dots, |\Omega|\}$

**Beispiele:** Wurf einer fairen Münze, Lottozahlen

### 7.2.2. Stetig $(a, b : -\infty < a < b < \infty)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ Erwartungswert

$\mathrm{Var}[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ Varianz

$\varphi_X(s) = \dfrac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$ Charakt. Funktion

**Beispiele:** Winkel beim Flaschendrehen, Phase einer empf. Sinusschwingung

## 7.3. Bernoulliverteilung $(p \in [0,1])$

**Wahrscheinlichkeitsmasse**

2 Ereignisse: Erfolg und Misserfolg

$p$: Wahrscheinlichkeit

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1-p & 0 \le k < 1 \\ 1 & k \ge 1 \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = p$ Erwartungswert

$\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$ Varianz

$G_X(z) = pz + 1 - p$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

**Beispiele:** Einmaliger Wurf einer (unfairen) Münze

## 7.4. Binomialverteilung $\mathcal{B}(n,p)$ $(p \in [0,1], n \in \mathbb{N})$

Folge von $n$ Bernoulli-Experimenten

$p$: Wahrscheinlichkeit für Erfolg

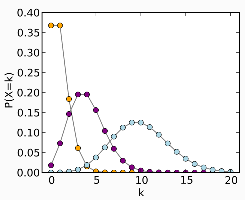
$k$: Anzahl der Erfolge

**Wahrscheinlichkeitsmasse**

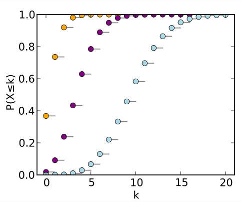
$$p_X(k) = B_{n,p}(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

**WMF/PMF:**



**KVF/CDF:**



$\mathrm{E}[X] = np$ Erwartungswert

$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$ Varianz

$G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

**Charakteristische Funktion** $\varphi_X(s) = (1 - p + pe^s)^n$

**Beispiele:** Anzahl der Übertragungsfehler in einem Datenblock endlicher Länge, Wiederholtes Werfen einer Münze

## 7.5. Poisson-Verteilung $(\lambda \ge 0)$

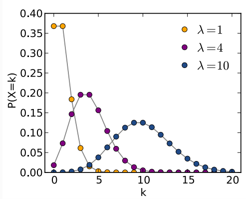
Asymptotischer Grenzfall der Binomialverteilung

$n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda \qquad p_X(k) = \lim_{n \to \infty} B_{n, \frac{\lambda}{n}}(k)$

$\lambda$: mittlere Wahrscheinlichkeit des Eintreten des Ereignisses von p

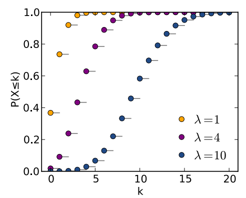
**WMF/PMF:**

$p_X[k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}_0$




**KVF/CDF:**

$F_X[k] =$ zu kompliziert




$\mathrm{E}[X] = \lambda$ Erwartungswert

$\mathrm{Var}[X] = \lambda$ Varianz

$G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

**Charakteristische Funktion** $\varphi_X(s) = \exp\left(\lambda(e^s - 1)\right)$

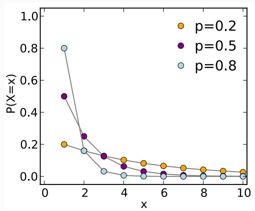
**Beispiele:** Zahl der Phänomene in einem Zeitintervall, Google-Anfragen in einer Stunde, Schadensmeldungen an Versicherungen in einem Monat

## 7.6. Geometrische Verteilung $(p \in [0,1])$

Erster Erfolg eines Bernoulli-Experiments beim $k$-ten Versuch, **Gedächtnislos**

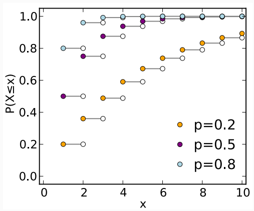
**WMF/PMF:**

$p_X[k] = (1-p)^{k-1} p, \ k \in \mathbb{N}$




**KVF/CDF:**

$F_X[k] = 1 - (1-p)^k, \ k \in \mathbb{N}$




$\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{p}$ Erwartungswert

$\mathrm{Var}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$ Varianz

$G_X(z) = \dfrac{pz}{1 - z + pz}$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

**Charakteristische Funktion** $\varphi_X(s) = \dfrac{pe^{\imath s}}{1 - (1-p)e^{\imath s}}$

**Beispiele:** diskrete Dauer bis ein technisches Gerät zum ersten Mal ausfällt, Anzahl der Würfe bis man eine "6" würfelt

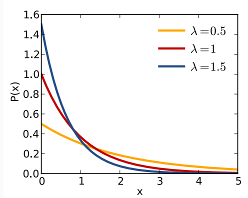
## 7.7. Exponentialverteilung $(\lambda > 0)$

Wie geometrische Verteilung für stetige Zufallsvariablen ("Lebensdauer"), **Gedächtnislos**

= Wartezeit bis zum ersten Auftreten eines Ereignisses

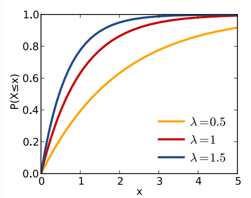
**WDF/PDF:**

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0$




**KVF/CDF:**

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0$




$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ Erwartungswert

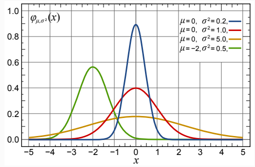
$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ Varianz

$\varphi_X(\omega) = \dfrac{\lambda}{\lambda - j\omega}$ Charakt. Funktion

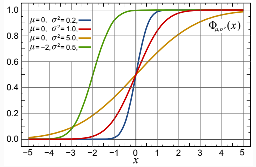
**Beispiele:** Lebensdauer von el. Bauteilen, Zeitdauer zwischen zwei Anrufen in einem Call-Center

## 7.8. Normalverteilung $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

**WDF/PDF:**



**KVF/CDF:**



**WDF**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{E}(X) = \mu$ Erwartungswert

$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ Varianz

$\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ Charakt. Funktion

**Schreibweise** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

**Beispiele:** Rauschen, Ort eines Teilchens relativ zu seiner Anfangsposition bei brownscher Molekularbewegung, abgefahrene Sachen, die man nicht genauer bestimmen will oder kann

### 7.8.1. Standartnormalverteilung

ist der Spezialfall $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Es gilt außerdem:

- $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

# 8. Erwartungswert

## 8.1. Erwartungswert

gibt den mittleren Wert einer Zufallsvariablen an

$$\mathrm{E}[X] = \underbrace{\sum_{x \in \Omega'} x \cdot \mathrm{P}_X(x)}_{\text{diskrete } X:\Omega \to \Omega'} \ \hat{=} \ \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x}_{\text{stetige } X:\Omega \to \mathbb{R}}$$

**Voraussetzung:**

$\sum |x| P(\{X = x\}) < \infty$

**Eigenschaften:**

| | |
|---|---|
| EW von Konstante: | $E[\alpha] = \alpha$ |
| Linearität: | $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$ |
| | $\Rightarrow E[X - E[X]] = 0$ |
| Monotonie: | $X \le Y \Rightarrow E[X] \le E[Y]$ |

Beweis mit der Definition und der Linearität des Integrals bzw. der Summe.

$\mathrm{E}[X\,Y] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$, falls $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig

Umkehrung nicht möglich: Unkorreliertheit $\not\Rightarrow$ Stoch. Unabhängig!

$\mathrm{E}[X\,Y] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot f_{X,Y}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

Spezialfall für $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$:

$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t) \, \mathrm{d}t$ (stetig) $\qquad \mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > k)$ (diskret)

### 8.1.1. Für Funktionen von Zufallsvariablen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{x \in \Omega'} g(x) \, \mathrm{P}_X(x) \ \hat{=} \ \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, \mathrm{d}x$

# 9. Varianz und Kovarianz

## 9.1. Varianz

ist ein Maß für die Stärke der Abweichung vom Erwartungswert

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$$

$\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X] \qquad \mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}[X, X]$

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{j \ne i} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

### 9.1.1. Standard Abweichung

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

## 9.2. Kovarianz

Maß für den linearen Zusammenhang zweier Variablen

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y, X]$$
$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[X\,Y] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$$

**Voraussetzung:** $\exists E[X], E[Y], E[XY]$ oder $\exists E[X^2], E[Y^2]$

$\mathrm{Cov}[\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta] = \alpha\gamma \, \mathrm{Cov}[X, Y]$

$\mathrm{Cov}[X + U, Y + V] = \mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{Cov}[X, V] + \mathrm{Cov}[U, Y] + \mathrm{Cov}[U, V]$

## 9.3. Unkorreliertheit

wenn gilt:

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{E}[X\,Y] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$$

Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

wenn ZV normalverteilt (sonst nicht!):
Unkorreliertheit $\Rightarrow$ stoch. Unabhängigkeit

bei paarweisen unkorrellierten Zufallsvariablen:

$\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i]$

### 9.4. Orthogonalität

$$\boxed{\mathrm{E}[X\,Y] = 0}$$

mit dem Korrelationswert $r_{X,Y} = \mathrm{E}[X\,Y]$

### 9.5. Korrelationskoeffizient

$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$ mit $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$

Korrelationskoeffizient von X und Y

$$\text{Es gilt: } \begin{cases} \text{negativ korreliert} & \rho_{X,Y} \in [-1, 0) \\ \text{unkorreliert} & \rho_{X,Y} = 0 \\ \text{positiv korreliert} & \rho_{X,Y} \in (0, 1] \end{cases}$$

### 9.6. Lineare Regression

affine Abbildung $\hat{Y} = \alpha\, X + \beta$ mit Fehler $\varepsilon = \hat{Y} - Y$

**Optimierungsproblem:**

$$\boxed{\min_{\alpha,\beta} E[\varepsilon^2] = \min_{\alpha,\beta} E\left[\left(\hat{Y} - Y\right)^2\right]}$$

**Lösung:**

$$\alpha = \frac{E[X\,Y] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - E[X]^2} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X^2} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X^2}\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y} = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

$$\beta = E[Y] - \alpha E[X] = E[Y] - \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}E[X]$$

$$\Rightarrow \hat{Y} = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E[X]) + E[Y]$$

**Kleinster mittlerer quadratischer Fehler:**

$$\mathrm{E}[\varepsilon^2] = \sigma_Y^2 - c_{Y,X}\sigma_X^{-2}c_{X,Y} = \sigma_Y^2 - c_{X,Y}^2\sigma_X^{-2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{X,Y}^2)$$

## 10. Erzeugende und charakter. Funktionen

### 10.1. Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

für $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$

$$\boxed{G_X(z) = \mathrm{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) z^k, \quad |z| \le 1}$$

**Anwendungen**

$$p_X(n) = \mathrm{P}(\{X = n\}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}G_X(z)\right]_{z=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathrm{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G_X(z)\right]_{z=1}$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G_X(z)\right]_{z=1}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G_X(z)\right]_{z=1} - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[X]$$

Für $X_i : \Omega \to \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, n\}$ stochastisch unabhängige, diskrete, nichtnegative ZV und $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$G_Z(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z)$$

### 10.2. Momenterzeugende Funktion

Mit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle ZV:

$$\boxed{M_X(s) = \mathrm{E}[e^{s\,X}], \quad s \in \mathbb{D} = \{s \in \mathbb{R}\}\mathrm{E}[e^{s\,X} < \infty]}$$

Potenzreihenentwicklung (mit $s \in ]-a, a[$):

$$M_X(s) = \mathrm{E}[e^{s\,X}] = \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}X^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\,\mathrm{E}\left[X^k\right]$$

Erwartungswert: $\mathrm{E}[X^n] = \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}M_X(s)\right]_{s=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Summe von ZV: $M_Z(s) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(s)$

### 10.3. Charakteristische Funktion

$$\boxed{\varphi_X(\omega) = E\left[e^{\imath\omega\,X}\right], \quad \omega \in \mathbb{R}} \qquad \varphi_X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$f_X(-x) \multimap \varphi(\omega)$

**Erwartungswert:**

$$\mathrm{E}[X^n] = \frac{1}{\imath^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]_{\omega=0}$$

**Summe von ZV:** $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\varphi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\omega)$$

### 10.4. Der zentrale Grenzwertsatz

**Definition**: Seien $X_i, i \in 1, \dots, n$, stochastisch unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvariablen und gelte $E[X_i] = \mu < \infty$ und $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Dann konvergiert die Verteilung der standardisierten Summe

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{(X - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

d.h $E[Z_n] = 0$ und $Var[Z_n] = 1$, für $n \to \infty$ gegen die Standartnormalverteilung.

Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le z) = \Phi(z)$$

## 11. Reelle Zufallsfolgen

Eine reelle Zufallsfolge ist ganz einfach eine Folge reeller Zufallsvariablen.

$X_n : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

| | $\omega$ variabel | $\omega$ gegeben |
|---|---|---|
| $n$ variabel | $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ (Zufallsfolge) | $x = X(\omega) = (X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ (Musterfolge) |
| $n$ gegeben | $X_n$ (Zufallsvariable zum Folgenindex $n$) | $x_n = X(\omega)$ (Realisierung zum Folgenindex $n$) |

**Ensemble**

$\mathrm{S}_n : \Omega_n \times \Omega_{n-1} \times \cdots \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$

$(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1) \mapsto s_n(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1), \quad n \in \mathbb{N}$

**Erklärung:** Jede Realisierung von $\mathrm{S}_n$ wird erzeugt durch die Menge (das Ensemble) aufeinanderfolgender Realisierungen $X_k$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$.

**Pfad**

$\vec{\mathrm{S}}_n = (\mathrm{S}_n, \mathrm{S}_{n-1}, \dots, \mathrm{S}_1) : \Omega^{(n)} \to \mathbb{R}^n$

$\vec{\omega}_n \mapsto \vec{s}_n(\vec{\omega}_n) = (s_n(\vec{\omega}_n), s_{n-1}(\vec{\omega}_n), \dots, s_1(\vec{\omega}_n)), \quad n \in \mathbb{N}$

**Erklärung:** Die Abfolge der Realisierungen von $\mathrm{S}_1$ bis $\mathrm{S}_n$ (also der Pfad von S) und somit auch jedes einzelne $\mathrm{S}_k$ kann als Ergebnis des Ereignisses $\vec{\omega}_n$ angesehen werden.

### 11.1. Verteilungen und Momente

| | |
|---|---|
| Erwartungswert | $\mu_X(n) = E[X_n]$ |
| Varianzfolge | $\sigma_X^2(n) = Var[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2$ |
| Autokorrelation | $r_X(k, l) = E[X_k\,X_l]$ |
| Autokovarianz | $c_X(k, l) = Cov[X_k, X_l] = r_X(k, l) - \mu_X(k)\mu_X(l)$ |

### 11.2. Random Walk

$n \in \mathbb{N}$ Schritte mit 2 möglichen Bewegungsrichtungen $X \in \{+\delta, -\delta\}$

$$\boxed{\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^n X_i} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{P}(\{X_i = +\delta\}) = p \\ \mathrm{P}(\{X_i = -\delta\}) = 1 - p \\ \text{symmetrisch} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2},\ \mu_{\mathrm{S}}(n) = 0 \end{array}$$

$E[S] = \mu_{\mathrm{S}}(n) = n(2p - 1)\delta \qquad E[X_i] = (2p - 1)\delta$

$Var[S] = \sigma_{\mathrm{S}}^2(n) = 4np(1 - p)\delta^2 \qquad Var[X_i] = 4p(1 - p)\delta^2$

### 11.3. Stationarität

Eine Zufallsfolge ist **stationär**, wenn um ein beliebiges $k$ ($k \in \mathbb{N}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen:

$F_{X_{i_1}, \dots, X_{i_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{i_1+k}, \dots, X_{i_n+k}}(x_1, \dots, x_n)$

Im **weiteren Sinne stationär (W.S.S.)**, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i + k)$

$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k) = r_X(i_1 - i_2)$

(verschiebungsinvariant)

stationär $\Rightarrow$ WSS (aber nicht anders herum!)

### 11.4. Konvergenz

**Fast sicher (almost surely):**

$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Leftrightarrow P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$

**in Wahrscheinlichkeit (in probability):**

$X_n \xrightarrow{\text{p.}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$

**im quadratischen Mittel (in the mean square sense):**

$X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E\left[(X_n(\omega) - X(\omega))^2\right] = 0$

**in Verteilung (in distribution):**

$X \xrightarrow{\text{d.}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

**Zusammenhänge**

- $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p.}} X$
- $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p.}} X$
- $P(\{|X_n| \le Y\}) = 1 \forall n \wedge E[Y^2] < \infty \wedge X_n \xrightarrow{\text{p.}} X$
  $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$
- $X_n \xrightarrow{\text{p.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{d.}} X$
- $X_n \xrightarrow{\text{a.s./p./m.s.}} X \wedge X_n \xrightarrow{\text{a.s./p./m.s.}} Y \Rightarrow P(\{X = Y\}) = 1$
- $X_n \xrightarrow{\text{d.}} X \wedge X_n \xrightarrow{\text{d.}} Y \Rightarrow X$ und $Y$ haben die gleiche Verteilung

### 11.5. Markow-Ungleichung

$$\boxed{\mathrm{P}(\{|X| \ge a\}) \le \frac{\mathrm{E}[|\,X\,|]}{a}}$$

### 11.6. Tschebyschow-Ungleichung

$$\boxed{\mathrm{P}(\{|X - \mathrm{E}[X]| \ge a\}) \le \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2}}$$

### 11.7. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Sei $(X_i : i \in \mathbb{N})$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit beschränkter Varianz:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathrm{E}[X_i]) \to 0$

Für stochastisch unabhängige und identisch verteilte Folgenelemente mit $E[X_i] = E[X]$ und $Var[X_i] = Var[X] < \infty$ gilt:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i) \to \mathrm{E}[X_i]$

## 12. Markowketten (bedingte Unabhängigkeit: Abschnitt 14)

### 12.1. Markowketten

#### 12.1.1. Allgemein

Eine Zufallsfolge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ heißt Markowkette, falls $\forall\, n_i \in \mathbb{N}$, $i \in 1, \dots k$ mit $n_1 < \cdots < n_k$ gilt:

$(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots X_{n_{k-2}}) \to X_{n_{k-1}} \to X_{n_k}$

$\Rightarrow$ Die Verteilung eines Folgeelements hängt nur vom direkten Vorgänger ab

$p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1})$
$= p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}})$

$f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1})$
$= f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}})$

#### 12.1.2. Zustandsübergang

**Zustandsübergangswahrscheinlichkeit:**

$$p_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n | x_{n-1})$$

Verbund-WMF:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1)\prod_{i=2}^n p_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i | x_{i-1})$$

**Zustandsübergangsdicht:**

$$f_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n | x_{n-1})$$

Verbund-WDF:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)\prod_{i=2}^n f_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i | x_{i-1})$$

Eine Markowkette heißt **homogen**, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit unabhängig vom Index ist

$p_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} | x_n) = p_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} | x_n)$

$f_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} | x_n) = f_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} | x_n)$

#### 12.1.3. Chapman-Kologorow Gleichung

2-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:

$p_{X_{n+2} \mid X_n}(x_{n+2} | x_n) =$
$\sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+2} \mid X_{n+1}}(x_{n+2} | \xi)\, p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi | x_n)$

m+l-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:

$p_{X_{n+m+l} \mid X_n}(x_{n+m+l} | x_n) =$
$\sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+m+l} \mid X_{n+m}}(x_{n+m+l} | x_{n+m})\, p_{X_{n+m} \mid X_n}(x_{n+m} | x_n)$

#### 12.1.4. Markowketten im endlichen Zustandsraum

$$\vec{p}_n \triangleq \begin{bmatrix} p_{X_n}(x_1) \\ p_{X_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_n}(x_N) \end{bmatrix} \in [0,1]^N \text{ mit } [\vec{p}_n]_i = p_{X_n}(x_i)$$

**Übergangsmatrix:** $\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{N1} & & p_{NN} \end{bmatrix} \in [0,1]^{N \times N}$

**Übergangswahrscheinlichkeit:** $p_{ij} = p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi_i | \xi_j)$
Spaltensumme muss immer 1 ergeben!

$\vec{p}_{n+1} = \Pi \vec{p}_n \quad n \in \mathbb{N}$
$\vec{p}_{n+m} = \Pi^m \vec{p}_n \quad n, m \in \mathbb{N}$

Eine Verteilung heißt **stationär**, wenn gilt:

$$\vec{p}_\infty = \Pi \vec{p}_\infty$$

# 13. Reelle Zufallsprozesse

## 13.1. Ensemble und Musterfunktion

- Ein Zufallsprozess kann als **Ensemble** einer nicht abzählbaren Menge von Zufallsvariablen $X_t$ mit $t \in \mathbb{R}$ interpretiert werden.
- Ein Zufallsprozess kann als **Schar von Musterfunktionen** $X_t(\omega) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, mit $X(\omega)$ als deterministische Funktion von $t$, mit einem gegebenen Ereignis $\omega \in \Omega$ interpretiert werden.

## 13.2. Verteilungen und Momente

Zeitlich, Kontinuierlich veränderliche Zufallsvariable $X_t$

**Erwartungswertfunktion:**
$\mu_X(t) = \mathsf{E}[X_t]$
**Autokorrelationsfunktion:**
$r_X(s,t) = \mathsf{E}[X_s X_t]$
**Autokovarianzfunktion:**
$c_X(s,t) = \mathsf{Cov}(X_s, X_t) = r_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

**Hinweis:** Bei Integration über $r_X$ immer darauf achten, dass $s - t > 0$. Bei Bedarf Integral aufteilen und Grenzen anpassen.

## 13.3. Stationarität

Ein Zufallsprozess ist **stationär**, wenn um ein beliebiges $s$ ($s \in \mathbb{R}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.

$$F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(x_1, \dots x_n) = F_{X_{t_1+s},\dots,X_{t_n+s}}(x_1, \dots x_n)$$

Im **weiteren Sinne stationär (WSS)**, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i+k) = \mu_X$
$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1+k, i_2+k) = r_X(i_1 - i_2)$

**Daraus folgt** mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathsf{E}[X_s X_t] = \mathsf{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(s-t) = r_X(\tau)$
Im **weiteren Sinne zyklisch stationär**, wenn:

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+T) \quad \wedge \quad r_X(t_1,t_2) = r_X(t_1+T, t_2+T)$$

stationär $\Rightarrow$ WSS $\Rightarrow$ im weiteren Sinne zyklisch stationär (aber nicht anders herum!)

## 13.4. Mehrere Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum

**Kreuzkorrelationsfunktion:**
$r_{X,Y}(s,t) = \mathsf{E}[X_s Y_t] = r_{Y,X}(t,s)$
**Kreuzkovarianzfunktion:**
$c_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s,t) - \mu_X(s)\mu_Y(t) = c_{Y,X}(t,s)$

### 13.4.1. Gemeinsame Stationarität

Zwei Zufallsprozesse auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum sind **gemeinsam stationär**, wenn die einzelnen ZPs jeweils selbst stationär sind und ihre gemeinsamen Verteilungen verschiebungsinvariant sind.

### 13.4.2. Gemeinsam im weiteren Sinne stationär

**Voraussetzung:** $X_t$ und $Y_t$ sind gemeinsam WSS wenn,

$X_t$ und $Y_t$ einzelnd WSS und
$r_{X,Y}(t_1, t_2) = r_{X,Y}(t_1 + s, t_2 + s)$
gemeinsam stationär $\Rightarrow$ gemeinsam WSS (aber nicht umgekehrt!)

**Daraus folgt** mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathsf{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(\tau) = r_X(-\tau) \qquad r_X(\tau) \le r_X(0)$
$r_{X,Y}(\tau) = \mathsf{E}[X_{t+\tau} Y_t] = \mathsf{E}[Y_t X_{t+\tau}] = r_{Y,X}(-\tau)$

### 13.4.3. Stochastische Unkorreliertheit

$c_{X,Y}(s,t) = 0 \Leftrightarrow r_{X,Y}(s,t) = \mu(s)\mu(t), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

### 13.4.4. Orthogonalität

$r_{X,Y}(s,t) = 0, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

## 13.5. Wiener-Prozess ($\sigma > 0$)

Als Basis benutzen wir den Random Walk. Durch Multiplikation mit einer Heaviside-Funktion wird der Random Walk zeitkontinuierlich:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \Rightarrow \qquad S_t = \sum_{i=1}^{n} X_i \, u(t - iT) \qquad T > 0$$

Für $n \to \infty$ und $T \to 0$, mit Schrittweite $\delta = \sqrt{\sigma^2 T}$ folgt der Wiener Prozess: $W_t$

$$f_{W_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

**Eigenschaften**
- Kein Zählprozess!
- $\mathsf{P}(\{W_0 = 0\}) = 1$
- hat unabhängige Inkremente $\to r_{xy}(s,t) = 0$
- $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t), \forall 0 \le t$
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)), \forall 0 \le s \le t$
- $W_t(\omega)$ ist eine stetige Musterfunktion mit Wahrscheinlichkeit 1

| | |
|---|---|
| Erwartungswertfunktion. | $\mu_W(t) = 0$ |
| Varianz | $\sigma_W^2(t) = \sigma^2 t$ |
| Autokorrelationsfunktion | $r_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$ |
| Autokovarianzfunktion | $c_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$ |

## 13.6. Poisson-Prozess ($N_t : t \in \mathbb{R}_+$)

Der Poisson-Prozess ist ein Zählprozess, bei dem der **Zeitpunkt** der Sprünge durch ZV modelliert wird, nicht die Amplitude.

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \quad T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$

$X_j$ ist exponentiell verteilt, $T_i$ ist Gamma-verteilt

$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$
$\mathsf{P}(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}_+$

**Eigenschaften**
- ist ein Zählprozess ($\mathbb{N}_t \in \mathbb{N}_0$, monoton steigend und stetig)
- hat unabhängige Inkremente
- $N_t - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Parameter ($\lambda(t-s)$ für alle $0 \le s \le t$
- hat eine Rate $\lambda$
- Zeitintervalle zwischen den Inkremetierungen sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \triangleq$ **gedächtnislos**

| | |
|---|---|
| Erwartungswertfunktion | $\mu_N(t) = \lambda t$ |
| Varianz | $\sigma_N^2(t) = \lambda t$ |
| Autokorrelationsfunktion | $r_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$ |
| Autokovarianzfunktion | $c_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$ |

# 14. Bedingte Unabhängigkeit

## 14.1. Bedingte Unabhängigkeit

A und C heißen bedingt unabhängig gegeben B, wenn gilt:
$\mathsf{P}(A \cap C | B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(C|B)$ bzw.
$\mathsf{P}(A | B \cap C) = \mathsf{P}(A|B)$

Dann gilt:
$p_{Z \mid Y,X}(y|y,x) = p_{Z \mid Y}(z|y)$
$f_{Z \mid Y,X}(z|y,x) = f_{Z \mid Y}(z|y)$
$X, Z$ sind bedingt unabhängig gegeben $Y$, kurz: $X \to Y \to Z$

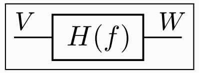
# 15. Zufallsprozesse(ZP) und lineare Systeme

## 15.1. Allgemeines

Im **Zeitbereich**:
$\mathsf{w}(t) = (h * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) v(\tau) \, d\tau$

**Erwartungswert:** $\mu_W = (\mu_V * h)(t)$ (nicht WSS)

Im **Frequenzbereich:**
$W(f) = H(f)V(f)$




| | |
|---|---|
| $W_t$ | Ausgang |
| $V_t$ | Eingang |
| $h(s,t)$ | Impulsantwort |

Falls Zufallsprozesse **WSS**:
**Erwartungswert:** $\mu_W = \mu_V \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \, dt$

**Kreuzkorrelationsfkt:** $r_{W,V}(\tau) = \mathsf{E}[W_s V_t] = (h * r_V)(\tau)$
**Autokorrelationsfkt:** $r_W(\tau) = \mathsf{E}[W_s W_t] = (\tilde{h} * h * r_V)(\tau)$
mit $\tilde{h}(\tau) = h(-\tau)$

## 15.2. Leistungsdichtespektrum (LDS)

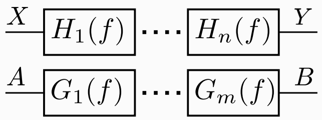
Nicht WSS $\Rightarrow$ Kein LDS

$$S_V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_V(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau$$

$r_V(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \; S_V(f)$
$r_{V,W}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \; S_{V,W}(f)$
$r_{V,W}(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \; S^*_{V,W}(f)$

Auf Frequenz bezogene Signalleistung für infitisimales Frequenzband.

$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$
$S_{Y,X}(f) = H(f) S_X(f)$
$S_{X,Y}(f) = H^*(f) S_X(f)$




$S_{Y,X}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f)) S_X(f)$

$S_{X,Y}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i^*(f)) S_X(f)$

$S_{Y,B}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f))(\prod_{j=1}^{m} G_j(f))^* S_{X,A}(f)$

$S_X(f) = S_X^*(f) \quad \& \quad S_{X,Y}(f) = S^*_{Y,X}(f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$
$S_X(f) = S_X(-f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \, df = r_X(0) = \mathsf{Var}[X] + \mathsf{E}[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$
$S_X(f) \ge 0, \quad \forall f \in \mathbb{R}$

Momenterzeugende Funktion, Multivariate Normalverteilung, Multivariate reelle Zufallsvariablen und Komplexe Zufallsvariablen waren im WS 2015/16 nicht prüfungsrelevant und werden hier deshalb nicht behandelt.
P.S. Stochastik ♡ dich.