

1. Reaktive Elemente

1.1. Die vier zentralen Größen u, i, q, Φ

... beschreiben die Wirkungsweise von elektronischen Bauelementen.

Spannung u : Potentialdifferenz. Hohes zu niedrigem Potential

Strom i : Bewegte Ladung. Bewegungsrichtung positiver Ladung

Ladung q : Grundeigenschaft von Materie.

Magnetischer Fluss Φ : Grundeigenschaft von elektr. magn. Feldern

1.1.1 Allgemeine Zusammenhänge u, i, q, Φ

Ladung und Strom beschreiben den Zustand der Materie.

Spannung und magn. Fluss beschreiben den Zustand des elektr. magn. Feldes.

Kondensator ist u -gesteuert (q -gesteuert), falls für ein u (q) nur ein q (u) existiert.

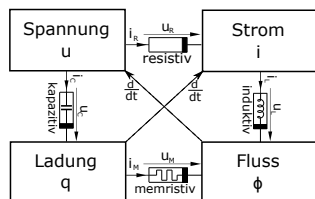
Induktivität ist i -gesteuert (ϕ -gesteuert), falls für ein i (ϕ) nur ein ϕ (i) existiert.

$i(t) = \dot{q}(t)$	$[i] = A$
$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$	$[q] = As = C$
$u(t) = \dot{\Phi}(t)$	$[u] = V$
$\Phi = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$	$[\Phi] = Vs = Wb$

1.1.2 Arten von Bauelementen

Art	Symbol	Beschr.	linear
Resistivität		$f_R(u, i)$	$u = U_0 + R \cdot i$
Kapazität		$f_C(u, q)$	$q = Q_0 + C \cdot u$
Induktivität		$f_L(i, \Phi)$	$\Phi = \Phi_0 + L \cdot i$
Memristivität		$f_M(q, \Phi)$	$\Phi = \Phi_0 + M \cdot q$

1.1.3 Zusammenhang der Bauelemente



1.1.4 Eigenschaften von Reaktanzen

Linearität: siehe Eintore

Differentialgleichung: $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$, $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Gedächtnis: Verhalten durch vorhergehende Klemmengrößen bestimmt.

Stetigkeit: $u_C(t)$, $i_L(t)$ stetig in (t_a, t_b) , wenn Torgrößen endlich

Verlustfreiheit: $W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t) dt = \int_{q_1}^{q_2} X(q) dt$ (Arbeit)

Falls linear: $W = \frac{Cu^2}{2} = \frac{Li^2}{2}$

Periodisch: $u(t+T) = u(t)$, $q(t+T) = q(t)$

Graphisch: Falls keine geschlossenen Schleifen in q/u , Φ/i -Diagramm existieren (Hysteresefrei)

Energie (nicht linearer Fall):

- Kapazität: $W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t) dt = \int_{q_1}^{q_2} u(q) dq$

- Induktiv: $W_L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t) dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} i(\Phi) d\Phi$

Energie (linearer Fall):

- Kapazität: $W_C = \frac{C}{2} u^2 = \frac{1}{2C} q^2$

- Induktiv: $W_L = \frac{L}{2} i^2 = \frac{1}{2L} \Phi^2$

Graphisch: Fläche zwischen der Kennlinie und der q/Φ -Achse

Relaxationspunkte (=Ruhepunkte): Betriebspunkte, in dem die in einer Reaktanz gespeicherte Energie minimal ist. Kandidaten sind: Extremwerte, Wendepunkte, Knicke, Schnittpunkte mit q/Φ -Achse

1.1.5 Verschaltung von Reaktanzen

- Parallelschaltung: $C_p = C_1 + C_2$, $L_p = L_1 || L_2 = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$

- Serienschaltung: $C_p = C_1 || C_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, $L_p = L_1 + L_2$

Merke: Am Kondensator eilt der Strom **vor**, bei Induktivitäten wird er sich **verspäten**.

Merke: Ist das Mädchen brav, bleibt der Bauch konkav, hat das Mädchen Sex, wird der Bauch konvex.

1.1.6 Dualität

$u \rightarrow R_d \cdot i^d$, $i \rightarrow \frac{1}{R_d} u^d$

$\Phi \rightarrow R_d \cdot q^d$, $q \rightarrow \frac{1}{r_d} \cdot \Phi^d$

1.2. Populationswachstum

Zustandsgleichung: $\dot{p} = \alpha p(t)$

Zeitkonstante $\tau = -\frac{1}{\alpha}$

Mit Anfangswert $p_0 = p(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 ist die Lösung des Gleichungssystems: $p(t) = p_0 e^{\alpha(t-t_0)}$

2. Systeme ersten Grades

I. Resistives ESB bestimmen

	Kapazität	Induktivität
ESB-Typ	Helmholtz-Thévenin	Mayer-Norton
Zustandsgröße	$x(t) = u_C(t)$	$x(t) = i_L(t)$
Zeitkonstante	$\tau = RC$	$\tau = GL$

II. Aufstellen DGL (kanonische Form)

$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} x(t) + \frac{1}{\tau} v$ mit der Erregung v

III. Lösen der DGL

Konstante Erregung: $x(t) = x_\infty + (x_0 - x_\infty) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$

Allgemeine Erregung: $x(t) = \underbrace{x_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} v(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'}_{\text{zero-state-response}}$

mit $u_{C,\infty} = U_0$ bzw. $i_{L,\infty} = I_0$

IV. Dynamischer Pfad

Kapazität	Induktivität
$i < 0$: u wird größer	$u < 0$: i wird größer
$i > 0$: u wird kleiner	$u > 0$: i wird kleiner
$i = 0$: GGP	$u = 0$: GGP

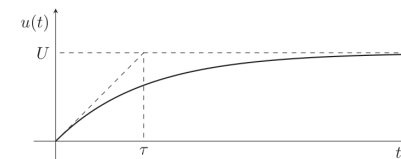
Toter Punkt: kein GGP, aber Pfad kann nicht fortgesetzt werden \rightarrow Sprung der nicht stetigen Größe (i_C oder u_L)

Gleichgewichtspunkt (GGP):

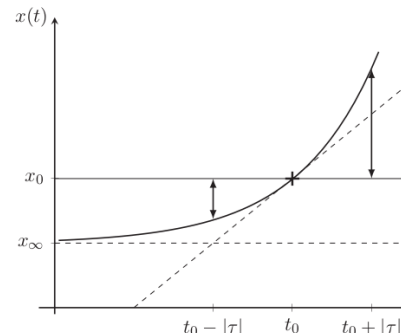
Kapazität	Induktivität
$\frac{d}{dt} u_F = 0 \rightarrow i_F = 0$	$\frac{d}{dt} i_F = 0 \rightarrow u_F = 0$

- stabil, falls der Pfad nicht aus diesem Punkt herausläuft
- instabil, falls der Pfad aus dem Punkt herausläuft
- virtuell, falls der Pfad in einen toten Punkt auf dem verlängerten Pfad auf der Achse läuft

2.1. Stabile Schaltung ($\tau > 0$)



2.2. Instabile Schaltung ($\tau < 0$)



2.3. Dynamischer Pfad

2.4. Sprung- und Impulsantwort

2.4.1 Sprungantwort

Sprungfunktion: $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

Sprungantwort: $x_\sigma(t) = (1 - \exp(-\frac{1}{\tau}))\sigma(t)$

2.4.2 Impulsantwort

rechteckförmiger Signalverlauf der Erregung

Einheitsimpuls: $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \text{ und } \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_2} \delta(t) dt = 1 \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \end{cases}$

Impulsantwort: $h(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{1}{\tau})\sigma(t) = \frac{d}{dt} \sigma$

2.5. Sprungphänomene

Tritt auf, falls Pfad in einen toten Punkt läuft.

Führt zu einer sprunghaften Fortsetzung des dynamischen Pfades auf einem anderen Kennlinienast (Stetigkeitsregel beachten).

Beispiele: Relaxationsoszillator, astabiler Multivibrator

3. Systeme zweiten Grades

3.1. Differentialgleichungssystem aufstellen

I. Schaltung umzeichnen

Zeichne die Schaltung so um, dass beide Reaktanzen an den äußeren Seiten sind.

II. Matrix aufstellen (Quellen vernachlässigen)

- zwei Kapazitäten: Leitwertmatrix G
- zwei Induktivitäten: Widerstandsmatrix R
- Kapazität (Tor 1) und Induktivität (Tor 2): Inverse Hybridmatrix H'
- Induktivität (Tor 1) und Kapazität (Tor 2): Hybridmatrix H

III. Quellenvektor aufstellen

IV. Differentialgleichungssystem aufstellen

3.2. Phasenportraits

3.2.1 Zeichnen des Phasenportraits

I. Bestimmung der Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren q_i

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{tr}(\mathbf{A})^2}{4} - \det(\mathbf{A})}$$

$$a_{12} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_i \end{bmatrix} \quad a_{21} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_i \\ -a_{21} \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = a_{21} = 0 \Rightarrow \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Falls Eigenvektoren komplex: $\mathbf{q}_r = \text{Re}\{\mathbf{q}_1\}$ $\mathbf{q}_i = \text{Im}\{\mathbf{q}_1\}$

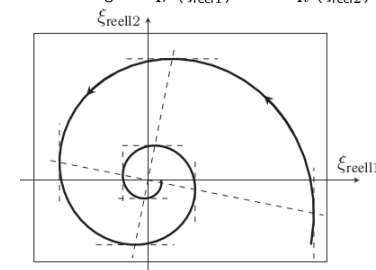
II. Bestimmung des Fixpunktes

$\mathbf{A}\mathbf{x}_\infty + \mathbf{B}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_\infty = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}$

III. Art des Phasenportraits

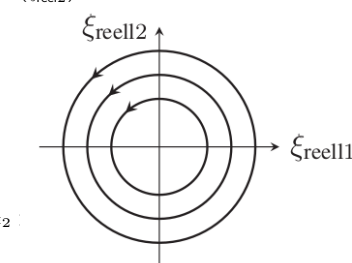
Strudel

$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta j$, $\alpha \neq 0$: Je nach $\text{sgn}(\alpha)$ (in-)stabiler Strudel in Drehrichtung von \mathbf{q}_r ($\xi_{\text{reel}1}$) nach $-\mathbf{q}_i$ ($\xi_{\text{reel}2}$)



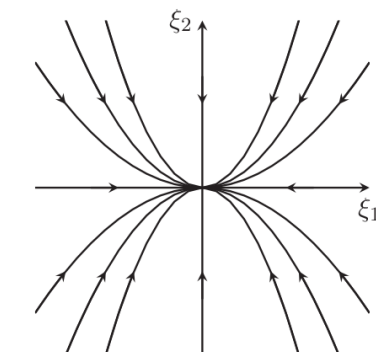
Wirbelpunkt

$\lambda_{1/2} = \pm \beta j$: Wirbel in Drehrichtung von \mathbf{q}_r ($\xi_{\text{reel}1}$) nach $-\mathbf{q}_i$ ($\xi_{\text{reel}2}$)

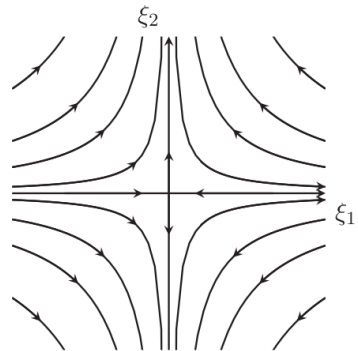


Knotenpunkt

$\lambda_{1,2} < 0$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$: Trajektorien von Richtung (Eigenvektor) des schnelleren Eigenwerts (\mathbf{q}_2, ξ_2) schmiegen sich an an Richtung des langsameren Eigenwerts (\mathbf{q}_1, ξ_1).



Sattelpunkt
 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Zwei Geraden in Eigenrichtungen, von stabiler Richtung zu GGP, zu instabiler Richtung. Restliche Trajektorien Hyperbeln mit Geraden als Asymptoten.



IV. Einzeichnen von Fixpunkt und Eigenvektoren
Die Eigenvektoren werden ausgehend vom Fixpunkt eingezeichnet. Bei konjugierten Eigenvektoren zeichnet man den Realteil und den negierten Imaginärteil.

3.2.2 Isokline

Kurve, auf der die Steigung der Trajektorie konstant ist.
 $m = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}$, falls $m = 0$: $\dot{x}_2 = 0$ bzw. $m = \infty$: $\dot{x}_1 = 0$

3.2.3 Separatrix

Kurve, die Gebiete mit verschiedenem Langzeitverhalten trennt.

3.3. Lösung der Zustandsgleichungen

3.3.1 Homogener Fall

Transformation autonom (konst. Erregung) \Rightarrow homogener Fall mit:
 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{q}_2$
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} (\mathbf{1} + (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})t) [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2]^T$
komplexe Eigenwerte: $c_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{q}_{\text{reell}} - \sin(\beta t) \mathbf{q}_{\text{imag}}) + c_2 e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \mathbf{q}_{\text{reell}} + \cos(\beta t) \mathbf{q}_{\text{imag}})$

3.3.2 Transformation auf Normalform

Gegeben: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$
Normalgleichung: $\dot{\xi} = \Lambda \xi$
Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ berechnen
 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2]$

$$\Lambda = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \xi = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} \xi(t) = \mathbf{Q} \exp(\Lambda(t - t_0)) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}(t_0)$$

3.3.3 Transformation auf Jordan-Normalform

Gegeben: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, \mathbf{A} ist keine Diagonalmatrix
 $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}' = [\mathbf{q}'_1 \ \mathbf{q}'_2]$, $\xi'(t) = \mathbf{Q}'^{-1} \mathbf{x}(t)$

Zustandsgleichung in Jordan-Normalform: $\dot{\xi}'(t) = \mathbf{J} \xi'(t)$
Lösung der Zustandsgleichung:
 $\xi'(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda(t - t_0)) \xi'_1(t_0) + (t - t_0) \exp(\lambda(t - t_0)) \xi'_2(t_0) \\ \exp(\lambda(t - t_0)) \xi'_2(t_0) \end{bmatrix}$

Rücktransformation: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}' \xi'(t) = \mathbf{q}'_1 \xi'_1(t) + \mathbf{q}'_2 \xi'_2(t)$

3.3.4 Transformation auf reellwertige Normalform

Gegeben: $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\beta$, $\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_i$

$$\Lambda_{\text{reell}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q}_{\text{reell}} = [\mathbf{q}_r \ -\mathbf{q}_i]$$
$$\mathbf{x}_{\text{reell}} = \mathbf{Q}_{\text{reell}}^{-1} e^{\Delta t} \mathbf{Q}_{\text{reell}}$$
$$\xi_{\text{reell}}(t) = \Lambda_{\text{reell}} \xi_{\text{reell}}(t)$$

3.4. Zeitverlauf der Zustandsvariablen

Eigenwerte: $\lambda_i = \alpha + j\beta$ mit Dämpfung α und Schwingung β
Stabilität: stabil, falls $\alpha < 0$, sonst instabil
Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega = \beta$

Fall	Schwingungsart
$\alpha = 0, \beta \neq 0$	ungedämpfte Schwingung
$\alpha < 0, \beta \neq 0$	schwach gedämpfte Schwingung
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \beta = 0$	aperiodischer Grenzfall
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \beta = 0$	stark gedämpfte Schwingung

3.5. Sprung- und Impulsantwort (analog zu 2.4)

Zustandsgleichung der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}v(t)$.
Ausgangsgleichung der Form $y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + dv(t)$.

3.5.1 Sprungantwort

Sprungantwort
 $y_\sigma(t) = (d - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \sigma(t) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{b} \sigma(t)$
mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$

Für ein stabiles System mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{0}$ ($\lambda_{\text{real}} < 0$)

konvergiert die Sprungantwort wie folgt: $y_{\sigma, \infty} = d + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

3.5.2 Impulsantwort

$$h(t) = \frac{d}{dt} y_\sigma(t)$$
$$h(t) = d \delta(t) + \mathbf{c}^T \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{b} \sigma(t)$$

3.6. Steady-State- und Transientenantwort

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{trans}}(t) + \mathbf{x}_{\text{steady}}(t)$$

3.6.1 Steady-State-Antwort

$$\mathbf{x}_{\text{steady}}(t) = \text{Re}\{Y(j\omega) e^{j\omega t}\}$$
$$X_{\text{steady}}(t) = H(j\omega) \cdot U_{\text{in}}$$

3.6.2 Transientenantwort

Die Summe der Polstellen von $H(j\omega)$ ist die Transientenantwort.
 $\mathbf{x}_{\text{trans}}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \cdot \mathbf{x}_{\text{trans}}(t)$

4. Nichtlineare dynamische Systeme

- Alle Fixpunkte bestimmen $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\infty) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$
- Jacobimatrix bestimmen
- Fixpunkte in Jacobimatrix einsetzen und Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen
- Überprüfen des **Satzes von Hartmann/Grobmann**:
Für alle Eigenwerte gilt $\text{Re}\{\lambda_i\} \neq 0$
- Phasenportrait zeichnen (lokale Phasenportraits stetig verbinden)

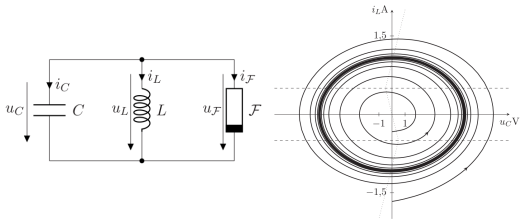
4.1. Energiefunktion

Eigenschaften: stetig, lokal nicht konstant, auf jeder Trajektorie konstant
Schaltung ist **konservativ**, falls:
 $\dot{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial E(\mathbf{x})}{\partial x_n} \dot{x}_n = 0$
Erweiterung des Satzes von Hartmann/Grobmann: Jacobimatrix hat nur imaginäre Eigenwerte und Schaltung ist konservativ \Leftrightarrow GGP ist Wirbelpunkt

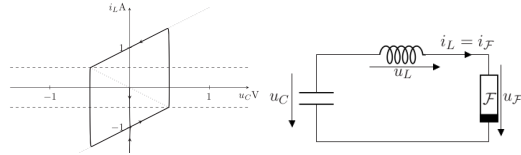
4.2. Oszillatoren

Schaltung mit periodischem Verlauf der Zustandsgrößen
Voraussetzung: nichtlinear, nur ein Fixpunkt (instabil)

Van der Pol-Oszillator:



Relaxationsoszillator:



5. Dynamische Schaltungen beliebigen Grades

5.1. Verallgemeinerte Zustandsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{N}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_1, \mathbf{N}_1$: Elementgleichungen der reaktiven Elemente

$\mathbf{M}_0, \mathbf{N}_0$: Elementgleichungen aus Tableau

\mathbf{B} : KVL, \mathbf{A} : KCL

($e = 0 \Leftrightarrow$ keine Quellen enthalten)

6. Komplexe Wechselstromrechnung

Voraussetzung: lineares, eingeschwungenes System mit sinusförmiger Erregung $x(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$

6.1. Komplexe Zeigergrößen

Zeitfunktion	$a(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$
Zeiger	$A = \alpha + j\beta = A_m \cdot e^{j\phi}$ $= A_m \cdot (\cos \phi + j \sin \phi)$
Maximum	$A_m = A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{A A^*}$
Phase	$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{\beta}{\alpha} & \alpha > 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} + \pi & \alpha < 0 \end{cases}$

Differentialoperator: $\frac{d}{dt} = j\omega$ $\frac{d}{dt} e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \cdot e^{j(\omega t + \phi)}$

	Widerstand	Kondensator	Spule
Impedanz $Z = \frac{U}{I}$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
Admittanz $Y = \frac{I}{U}$	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$
$\Delta \varphi = \varphi_u - \varphi_i$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

6.2. Komplexe Leistungsrechnung

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m$$

Momentanleistung: $p(t) = u(t)i(t)$

Energie einer Periode: $E = \int_0^T u(t)i(t)dt$

Leistungsmittelwert: $P_w = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt$

Komplexe Leistung: $P = \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} U_m \cdot e^{j\phi_u} \cdot I_m \cdot e^{-j\phi_i} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot e^{j(\phi_u - \phi_i)}$

Scheinleistung: $S = |P|$

Wirkleistung: $P_w = \text{Re}\{P\}$

Blindleistung: $P_B = \text{Im}\{P\}$

7. Analyse dynamischer Systeme im Frequenzbereich

7.1. Laplace-Transformation

Für kausale Funktionen mit $f(t) = 0$ für $t < 0$:

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

Rücktransformation:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(p) e^{-pt} dt$$

7.1.1 Rechenregeln

- Linearität: $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(p) + \beta G(p)$
- Differentiationssatz: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
- Faltung: $\mathcal{L}\{(a * b)(t)\} = A(p)B(p)$

7.1.2 Wichtige Laplace-Transformationen

$$\mathcal{L}\{\alpha e^{\beta t}\} = \frac{\alpha}{p - \beta}$$
$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{1}{p\mathbf{1} - \mathbf{A}}$$

Allgemeine Lösung im Frequenzraum:

$$\mathbf{x}(p) = \frac{1}{p\mathbf{1} - \mathbf{A}} \mathbf{x}_0 + \frac{1}{p\mathbf{1} - \mathbf{A}} \mathbf{b}V(p)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{\mathbf{A}t} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-t')} \mathbf{b}v(t') dt'$$

7.2. Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}}$$

Nullstellen des Ausgangs werden als $p_{0,i}$ bezeichnet

Nullstellen des Eingangs werden als **Eigenfrequenzen** $p_{\infty,i}$ bezeichnet

Polstellen $p_{\infty,i}$ von $H(j\omega)$ sind die Eigenwerte der Systemmatrix

Bestimmung der Differentialgleichung:

$$H(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{e_0 + e_1 j\omega + e_2 (j\omega)^2}$$

$$U_A(e_0 + e_1 j\omega + e_2 (j\omega)^2) = U_E(a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2)$$

$$e_0 u_a(t) + e_1 \dot{u}_a(t) + e_2 \ddot{u}_a(t) = e_0 u_e(t) + e_1 \dot{u}_e(t) + e_2 \ddot{u}_e(t)$$

$$\text{3dB-Grenzfrequenz: } |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$$

Stabilität: $\text{Re}\{p_{\infty,i}\} < 0 \quad \forall i$

Darstellung einer Schaltung in Abhängigkeit der Frequenz

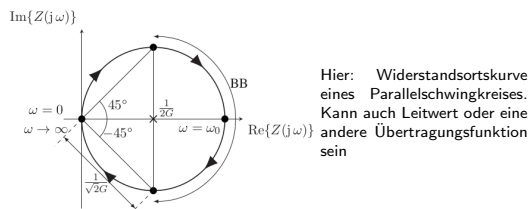
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \exp(j\angle H(j\omega))$$

$$\phi(\omega) = \angle H(j\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} & \text{für } \text{Re}\{H(j\omega)\} \geq 0 \\ \arctan \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} + \pi & \text{für } \text{Re}\{H(j\omega)\} < 0 \end{cases}$$

logarithmierte Darstellung des Betrages: $v(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$

7.3. Bodediagramm

- Übertragungsfunktion faktorisieren
 $H(j\omega) = K \cdot \prod_{n=1}^n \left(x_n + \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{z_n} \quad z_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
 - Logarithmierte Beträge der einzelnen Faktoren aufstellen
 - Konstanter Faktor: $v = 20 \cdot \log_{10}(K)$ dB
 - Falls $x_n = 0$: Gerade durch $(\omega_n, 0$ dB)
 - Falls $z_n < 0$: Bis ω_n Funktion gleich 0 dB, dann linear um $20 \cdot \log_{10}(x_n)$ dB pro Dekade fallend
 - Falls $z_n > 0$: Bis ω_n Funktion gleich 0 dB, dann linear um $20 \cdot \log_{10}(x_n)$ dB pro Dekade steigend
 - Phase der Faktoren bestimmen
 - Logarithmierte Beträge und Phasen aufaddieren
 - Separates Zeichnen des Betrages $v(\omega)$ und der Phase $\phi(\omega)$ in zwei Diagramme
- 7.4. Ortskurve**
- Bestimmung von diversen Werten der Übertragungsfunktion
 - Eintragen in der komplexen Ebene
 - Punkte stetig verbinden



7.5. Filtertypen

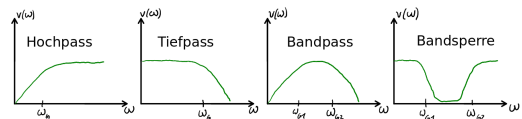
Hochpass: $|H(j0)| = 0, |H(j\omega)| \rightarrow c$ für $\omega \rightarrow \infty$

Tiefpass: $|H(j0)| = c, |H(j\omega)| \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty$

Bandpass: $|H(j0)| = 0, |H(j\omega)| \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty, |H(j\omega_0)| = c$

Bandsperre: $|H(j0)| = c, |H(j\omega)| \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty, |H(j\omega_0)| = 0$

Allpass: $|H(j0)| = c$ (Phase kann sich trotzdem abhängig von ω ändern!)



7.6. Schwingkreis

Resonanzfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Gütefaktor: $Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\sqrt{C}}{G\sqrt{L}}$

Eigenfrequenzen: $p_{\infty,1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$

8. SPICE

8.1. Bauteile

- L<Name> <Knoten1> <Knoten2> <Wert>: Spule zwischen Knoten <Knoten1> und Knoten <Knoten2> mit Induktivität <Wert>
- C<Name> <Knoten1> <Knoten2> <Wert>: Kondensator zwischen Knoten <Knoten1> und Knoten <Knoten2> mit Kapazität <Wert>
- R<Name> <Knoten1> <Knoten2> <Wert>: Widerstand zwischen Knoten <Knoten1> und Knoten <Knoten2> mit Widerstandswert <Wert>
- U<Name> <Knoten1> <Knoten2> <Wert>: Spannungsquelle zwischen Knoten <Knoten1> und Knoten <Knoten2> mit Spannung <Wert> (Spannung positiv bei <Knoten1>)
- I<Name> <Knoten1> <Knoten2> <Wert>: Stromquelle zwischen Knoten <Knoten1> und Knoten <Knoten2> mit Stromstärke <Wert> (Strom in Richtung <Knoten2>)

8.2. Parameterbefehle

- .step param <Param> <Start> <End> <Step>: Alle Parameter {<Param>} werden vom Startwert <Start> bis <End> während der Simulation als Treppenfunktion mit Schrittweite <Step> eingesetzt.
- .step param <Param> list <Wert1> <Wert2> ...: Simulation wird n mal für jeden Parameterwert durchgeführt.
- .step oct param <Param> <Start> <End> <StepsPerOct>

8.3. Analysearten

- .tran <Endtime>: Transientenanalyse im Zeitbereich von $t = 0$ bis $t = \text{<Endtime>}$. Bsp.: .trans 60us

9. Simulink

TODO