

### 1.8.3. Schräger Einfall auf leitende Grenzfläche

#### 1. Fall: Senkrechte Polarisation

$$E_i(y, z) = E e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)} \mathbf{u}_x$$

$$E_r(y, z) = E e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{u}_x$$

⇒ stehende Welle in  $z$ -Richtung und eine Wanderwelle in  $y$ -Richtung:

$$E_{tot}(y, z) = 2jE \sin(\beta \cos \theta) e^{-j\beta \sin \theta} y \mathbf{u}_x$$

#### 2. Fall: Parallel Polarisation

Parallel zur Ebene:

$$E_{iy}(y, z) = E \cos \theta e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)}$$

$$E_{ry}(y, z) = -E \cos \theta e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)}$$

Senkrecht zur Ebene:

$$E_{iz}(y, z) = E \sin \theta e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)}$$

$$E_{rz}(y, z) = E \sin \theta e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)}$$

⇒ stehende Welle in  $z$ -Richtung und eine Wanderwelle in  $y$ -Richtung:

$$E_{tot}(y, z) = 2jE \cos \theta \sin(\beta \cos \theta) e^{-j\beta y} \sin \theta$$

$$E_{tot}(z, y) = 2E \sin \theta \cos(\beta \cos \theta) e^{-j\beta y} \sin \theta$$

### 1.9. Zusammenfassung Reflexion, Transmission an Grenzflächen

- Die Reflexion (und Transmission) einer ebenen Welle an einer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung orientierten Grenzfläche folgt den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie bei einer (fehl-)abgeschlossenen TEM-Leitung. Dabei gilt:

Leitende Wand: Kurzschluss

Magnetische Wand: Leerlauf

Dielektrische Wand: Leitung mit anderem Wellenwiderstand

- Die Reflexion (und Transmission) einer ebenen Welle an einer schräg zur Ausbreitungsrichtung orientierten Grenzfläche lässt sich als Überlagerung zweier Wellen beschreiben:
- Die jeweiligen Teilwellen ergeben sich als Projektion des Wellenvektors auf (1) den Normalenvektor und (2) die Oberfläche der Grenzfläche
- Für die erste Teilwelle gelten die Reflexions- und Transmissionseigenschaften einer Welle bei senkrechtem Einfall
- Die zweite Teilwelle ist eine reflexionsfreie Oberflächenwelle entlang der Grenzfläche

### 1.10. Gauß'scher Strahl

$$E(x, y, z) = \frac{E_0 w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2} - jkz - j\pi \frac{(x^2+y^2)}{\lambda R(z)} + j\arctan \frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$$

- $E_0 = \sqrt{\frac{4k_0 Z_F P}{\pi b}}$ , mit  $k_0 = \frac{2\pi f}{c}$  (ungedämpft)
- $b = nk_0 w_0^2 [m]$ , mit Brechzahl  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ ,  $w_0$  ist nicht  $\omega_0$
- Strahldurchmesser (Abfall auf 1/e):  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{b}\right)^2}$
- Amplitudenterm:  $-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}$
- Phasenterm:  $-jkz$
- Krümmung der Phasenfronten:  $-\frac{j\pi(x^2+y^2)}{\lambda R(z)}$
- Korrekturfaktor (damits aufgeht):  $+j\arctan \frac{\lambda z}{\pi w_0^2}$

Für große Werte von  $|z|$  schmiegt sich das Hyperboloid asymptotisch einem Kegel an mit dem Öffnungswinkel:

$$\theta_0 = \arctan \frac{2w_0}{\pi b}$$

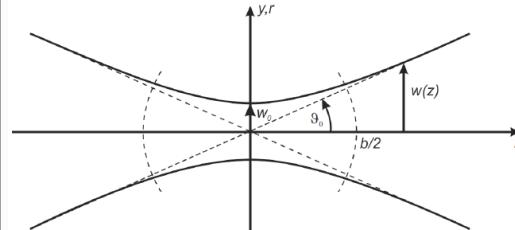
$$w(z) = z \tan \theta$$

$$\text{Für } z \gg b: \frac{w_0}{w(z)} \approx \frac{b}{2z}, w(z) = \frac{2z}{b}$$

Für kleine Öffnungswinkel erhalten wir näherungsweise:

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{2w_0}{b} = \frac{2}{nk_0 w_0} = \frac{\lambda_0}{\pi w_0 n}$$

$$b = \frac{2\lambda}{\pi w_0^2}$$



#### Leistungstransport des Strahls:

$$P = \frac{n}{2Z_F} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{00x}(x, y, z)|^2 dx dy$$

$$\text{Leistungsdichte im Maximum: } E_{00,\max} = \frac{\sqrt{4k_0 Z_F P}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{b}\right)^2}}$$

$$\text{Für } z \gg b: E_{00,\max} = \sqrt{\frac{4k_0 Z_F P}{\pi b}} \frac{b}{2z}$$

$$\text{Antennengewinn: } G = \frac{8\pi^2 w_0^2}{\lambda^2}$$

$$\text{Leistungsübertragung bei Empfangsfläche } A: P_E = P_S \frac{2\pi^2 r^2 w_0^2}{z^2 \lambda^2}$$

Konfokaler Parameter  $b$ :

Im konfokalen Abstand  $z = \pm b/2$  ist die doppelte Fläche beschiene:  $w(z) = \sqrt{2}w_0$ .

## 2. Leitungen

### 2.1. Telegraphengleichungen

Aus dem Ersatzschaltbild für die verlustlose Leitung  $R' = G' = 0$  bzw  $R' \ll \omega L'$  und  $G' \ll \omega C'$  werden die Telegraphengleichungen über KCL und KVl abgeleitet.

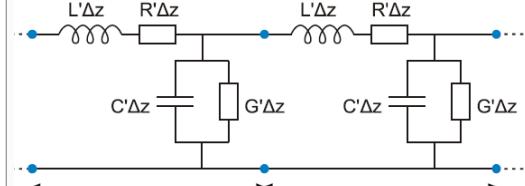
$$\begin{aligned} \text{Spannung: } & \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} - \frac{1}{L'C'} \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = 0 \\ \text{Strom: } & \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial t^2} - \frac{1}{L'C'} \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit: } c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

Das Verhältnis  $c/c_0$  wird als Verkürzungsfaktor bezeichnet.

$$\text{Typisch: } \frac{c}{c_0} \approx 0.66 \text{ bzw. } c \approx 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 2.2. Ersatzschaltbild Leitung und wichtige Parameter



Parameter	Koaxkabel	Zweidrahtleitung	Streifenleitung
$C\left(\frac{F}{m}\right)$	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln b/a}$	$\frac{\pi\epsilon}{\ln d/a}$	$\frac{b}{a}$
$G\left(\frac{F}{m}\right)$	$-\frac{\sigma_d}{\epsilon} C$	$\frac{\sigma_d}{\epsilon} C$	$-\frac{\sigma_d}{\epsilon} C$
$L'_{eff}\left(\frac{H}{m}\right)$	$\frac{\mu_{eff}}{2\pi} \frac{b}{a}$	$\frac{\mu_{eff}}{\pi} \frac{d}{a}$	$\frac{\mu}{\pi} \frac{a}{b}$
$R'\left(\frac{\Omega}{m}\right)$	$\frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{b}$

\* Überall gilt:  $L'_{eff} = R' \ln b/a$  und  $R_s = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 / 2\sigma_d}$ ,  $\sigma_d$  ist die Leitfähigkeit der Leiter (Beispiele 21.7/9 im Buch).

### 2.3. Lösung der Telegraphengleichungen

Ansatz:  $u, i \propto e^{j\omega t}$ . Damit werden wieder zu  $j\omega$  Ableitungen wieder zu  $j\omega$

$$\text{Spannung: } V(z) = V_+ e^{-j\beta z} + V_- e^{+j\beta z}$$

$$\text{Strom: } I(z) = \frac{V_+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_-}{Z_0} e^{+j\beta z}$$

$$\text{Phasenkonstante: } \beta = \omega \sqrt{L'/C'} = \frac{\omega}{c}, \lambda = \frac{c}{\omega \sqrt{L'C'}} = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\text{Charakteristische Impedanz: } Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

### 2.4. Zusammenfassung Leitungen

- Die ideale TEM-Leitung kann vollständig netzwerktheoretisch beschrieben werden. Es handelt sich dabei nicht um Wellenausbreitung im eigentlichen Sinne
- Die Netzwerkgrößen  $(V, I)$  und  $(V(t), I(t))$  stehen aber in einer räumlichen und zeitlichen Beziehung, gekennzeichnet durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die unabhängig von der Signalform ist.
- Dabei existieren immer zwei unabhängige Lösungen, die den beiden möglichen Transportrichtungen entsprechen.
- Die Leitungseigenschaften  $c$  und  $Z_0$  sind für beide Lösungen und an allen Orten der Leitung gleich und ausschließlich durch die Leitungsgeschwindigkeit und die Materialien festgelegt.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nur dann kleiner als  $c_0$ , wenn das elektrische und/oder magnetische Feld der Leitung dielektrische und/oder magnetisches Material durchdringt.
- Sämtliche Leitungseigenschaften lassen sich durch eine (quasi-)statische Analyse ermitteln ( $C'$  und  $L'$  sind auch für Gleichstrom definiert).

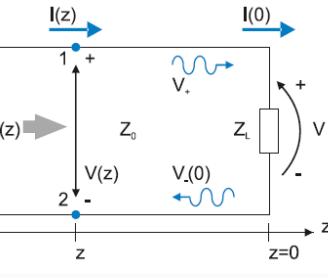
### 2.5. Abschluss einer Leitung

Ist der Abschluss der Leitung fehlt angepasst entsteht eine reflektierte Welle. Der Reflexionsfaktor ist das Verhältnis aus zurücklaufender Welle zu einfallender Welle.

$$\text{Reflexionsfaktor: } \rho(0) = \frac{V_-(0)}{V_+(0)}$$

Kurzschluss	$V = 0, \rightarrow V_+ = -V_- \rightarrow \rho = \frac{V_-}{-V_-} = -1$
Leerlauf	$I = 0, \rightarrow V_+ = V_-, \rightarrow V = 2V_+, \rho = +1$
Reflexionsfrei	$V_- = 0, \rightarrow V = V_+, \rho = 0$

$$\text{Im Lastwiderstand umgesetzte Leistung: } P_L = \frac{|V_+|^2}{Z_0} (1 - |\rho|^2)$$



**2.6. Zusammenhang Reflexionsfaktor und Leitungsimpedanz**  
Bei der Impedanz  $Z(\xi)$  liegt der Ursprung in der Last wird aber nach links und nicht nach rechts positiv gemessen d.h.:  $\xi = -z$

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad Z_L = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad Z(\xi) = Z_0 \frac{1 + \rho e^{-j2\beta\xi}}{1 - \rho e^{-j2\beta\xi}}$$

Leerlauf	$Z_L \rightarrow \infty, Z(\xi) = -j \cot \beta \xi, \text{ f. } \xi < \frac{\lambda}{4}: \text{kapazitiv}$
Kurzschluss	$Z_L = 0, Z(\xi) = j \tan \beta \xi, \text{ f. } \xi < \frac{\lambda}{4}: \text{induktiv}$
$\frac{\lambda}{4}$ Trans.	$\beta z = \pi/2 \text{ d.h. } \tan(\beta z) \rightarrow \infty$

$$\frac{\lambda}{4} \text{ Transformator: } \frac{Z(\frac{\lambda}{4})}{Z_0} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

$$\text{Anpassleitung: } Z_0 = \sqrt{Z(\lambda/4) \cdot Z_L}$$

$$\text{Stehwellenverhältnis: } \text{VSWR} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

$V_{max}$  und  $V_{min}$  an der Last gemessen.

### 2.7. Verlustbehaftete Leitung

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

#### Komplexe Ausbreitungskonstante:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

Im üblichen Fall  $R' \ll \omega L'$ ,  $G' \ll \omega C'$  erhält man:

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left( R' \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)$$

$$G' \rightarrow 0: \alpha \approx \frac{1}{2} \frac{R'}{Z_0}, \beta \approx \omega \sqrt{L'C'}$$

- Ein Leitungsstück der Länge  $d$  weist dann die Dämpfung:  $\frac{V_2}{V_1} = e^{-\alpha d}$  auf
- $\ln(e^{-\alpha d}) = -\alpha d$  [Np]
- $20 \log(e^{-\alpha d}) = -20 \log(e) \alpha d$  [dB]
- 1Np = 8.685dB

### 2.8. Transformation ins Smith-Diagramm

Mit einer konformen Abbildung können Reflexionsfaktor und Leitungsimpedanz ineinander überführt werden.

$$z = \frac{Z_L}{Z_0}, \text{ dann } \begin{cases} \rho = \frac{z-1}{z+1} = \frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \\ z = \frac{1+\rho}{1-\rho} \end{cases}$$

## 2.9. Regeln Smith-Chart

- Die horizontale Achse entspricht reellen Widerständen bzw. Leitwerten
- Der Kurzschlusspunkt liegt links, der Leerlauf rechts
- Die Punkte auf dem Umfang entsprechen rein imaginären  $z$  bzw.  $y$ .
- Der Mittelpunkt ist der Anpasspunkt.
- Kreise um Mittelpunkte auf der horizontalen Achse (rechts von "M") entsprechen Widerständen mit konstantem Realteil
- Kreise um Mittelpunkte auf den Senkrechten durch  $O$  entsprechen Widerständen mit konstantem Imaginärteil
- Kreise um Mittelpunkte auf der horizontalen Achse (links von "M") entsprechen Leitwerten mit konstantem Realteil
- Kreise um Mittelpunkte auf den Senkrechten durch "S" entsprechen Leitwerten mit konstantem Imaginärteil
- Die obere Hälfte des Diagramms entspricht induktiven Reaktanzen bzw. kapazitiven Suszeptanzen
- Die untere Hälfte des Diagramms entspricht kapazitiven Reaktanzen bzw. induktiven Suszeptanzen
- Kreise um den Mittelpunkt entsprechen Leitungstransformationen in verlustlosen Leitungen: Bewegt man sich vom Abschlusswiderstand weg (Vergroßerung der Leitungslänge), dann bewegt man sich im Uhrzeigersinn.

## 2.10. Smithchart Tricks

Impedanz  $\rightarrow$  Bauteilwert

$$L = \frac{(z_L/j)Z_0}{\omega} \quad C = \frac{1}{(-z_C/j)Z_0\omega}$$

Admittanz  $\rightarrow$  Bauteilwert

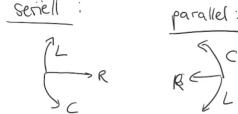
$$C = \frac{y_C/j}{Z_0\omega} \quad L = \frac{Z_0}{(-y_L/j)\omega}$$

Elektrische/Mechanische Wellenlänge:

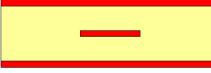
$$\text{Elektrisch: } \lambda = \frac{c_0}{f} \quad \text{Mechanisch: } \lambda_{eff} = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Nützlich für Leitung:

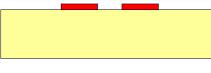
$$\frac{L}{\lambda} = X \rightarrow L = X \cdot \lambda = X \cdot \frac{c}{f} = X \cdot \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$



## 2.11. Planare Leitungen



Streifenleitung



Koplanare Streifenleitung



Mikrostreifenleitung



Koplanarleitung

- + einfache Fertigung
  - + verlustarm
  - + unempfindlich gg. Diskontinuitäten
  - + Serienelemente leicht integrierbar
  - + gute Wärmeabfuhr
  - Parallelemente schwierig
  - Leiterbreite nicht skalierbar
  - messtechnisch schwierig
  - Kontaktierung aufwendig
- + einseitige Metallisierung
  - + Leiterbreite skalierbar
  - + Serienelemente leicht integrierbar
  - + Parallelemente leicht integrierbar
  - mittlere Verluste
  - zwei Moden  $\rightarrow$  Leiterbrücken
  - empfindlich gg. Diskontinuitäten

Die einzige planare Leitung auf der eine TEM-Welle natürlich ausbreitfähig ist ist die Streifenleitung

## 3. Zwei- und Mehrtore

Bei höheren Frequenzen sind bei Zwei- und Mehrtoren die Zuleitungen zu berücksichtigen. Daher ist die Definition der Bezugsebenen (Tor 1 und Tor 2) erforderlich.

Die Verwendung von Strom ( $I_1$  bzw.  $I_2$ ) und Spannung ( $V_1$  und  $V_2$ ) als Torgrößen ist wenig sinnvoll. Betrag und Phase hängen empfindlich von der Länge der Zuleitung ab. Bei höheren Frequenzen werden fast ausschließlich komplexe Amplituden der hineinlaufenden Wellen ( $a_1$  bzw.  $a_2$ ) und der herauslaufenden Wellen ( $b_1$  bzw.  $b_2$ ) als Torgrößen verwendet. Amplituden auf den Zuleitungen konstant, lediglich Phasenänderung.

### 3.1. Komplexe Wellenamplituden

Spannung der hineinlaufenden Wellen:  
 $V_{+i} e^{-j\beta z_i} = \frac{1}{2}(V_i(z_i) + Z_0 \cdot I_i(z_i))$

Definition der Wellenamplituden über die Leistung:

$$P_{el} = \frac{1}{2} V \cdot V_{+i} \cdot I_{+i}^* = \frac{1}{2} V_{+i} \cdot \frac{V_{+i}^*}{Z_0} = \frac{V_{+i}}{\sqrt{2}Z_0} \cdot \frac{V_{+i}^*}{\sqrt{2}Z_0}$$

$P_{el} = |a_i(z_i) \cdot a_i^*(z_i)| = |a_i(z_i)|^2$  Analog für herauslaufende Welle, es ergibt sich

$$a_i(z_i) = \frac{V_{+i} e^{-j\beta z_i}}{\sqrt{2}Z_0}, \quad |a_i| = \sqrt{W}$$

$$b_i(z_i) = \frac{V_{-i} e^{-j\beta z_i}}{\sqrt{2}Z_0}, \quad |b_i| = \sqrt{W}$$

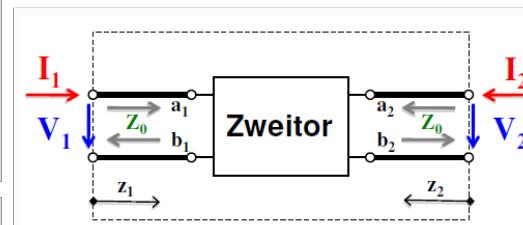
$$V_i(z_i) = \sqrt{2Z_0} \cdot (a_i(z_i) + b_i(z_i))$$

$$I_i(z_i) = \frac{2}{Z_0} \cdot (a_i(z_i) - b_i(z_i))$$

Definition über Klemmspannungen und -ströme: (Ströme hineinlaufend)

$$a_k = \frac{1}{2\sqrt{2Z_0}} (U_k + Z_0 \cdot I_k)$$

$$b_k = \frac{1}{2\sqrt{2Z_0}} (U_k - Z_0 \cdot I_k)$$



### 3.2. Streuparameter (S-Parameter)

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

Matrizedarstellung:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Zusammenhang mit Reflexionsfaktor:

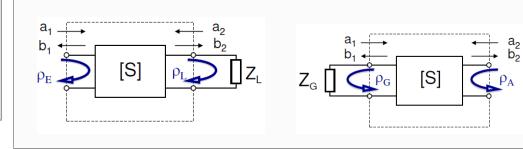
$$\text{Eingangsreflexionsfaktor: } \rho_E = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_L}{1-S_{22}\rho_L}$$

$$\rho_L = \frac{a_2}{b_2} \rightarrow \frac{1}{\rho_L} = S_{22} + \frac{a_1}{a_2} \cdot S_{21}$$

$$\rho_A = \frac{b_2}{a_2}, \quad \rho_G = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\text{Ausgangsreflexionsfaktor: } \rho_A = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_G}{1-S_{11}\rho_G}$$

Falls Zweitor rückwirkungsfrei:  $S_{12} = 0 \rightarrow \rho_E = S_{11}, \quad \rho_A = S_{22}$



## 3.3. Stabilität von Zweitoren

Absolute Stabilität: Die Tore verhalten sich unabhängig von der Beschaltung passiv d.h.  $Re\{Z_E\} > 0$  und  $Re\{Z_A\} > 0$ .

Für die Reflexionsfaktoren muss gelten:

$$|\rho_E| \leq 1 \text{ und } |\rho_A| \leq 1 \text{ für} \\ |\rho_L| \leq 1 \text{ und } |\rho_G| \leq 1$$

## 3.4. Anpassung, Reziprozität, Symmetrie, Verlustfreiheit

Anpassung:  $S_{ii} = 0 \forall i$

Reziprozität:  $[S] = [S]^T \quad ([Y] = [Y]^T)$

Symmetrie:  $[S] = [S]^T$  und  $S_{ii} = S_{jj} \forall i, j$

Verlustfreiheit:  $[S]^T [S]^* = [E]$

Verlustfreiheit erfordert, dass die Betragssquare der Spalten 1 ergeben.

Verlustfreies, reziprokes allseits angepasstes 3-Tor nicht realisierbar.

### 3.5. Alternative Netzwerkdarstellungen

Transmissionsmatrix:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = [\Sigma] \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \sum_p = \sum_1 \sum_2 \sum_3$$

$$[\Sigma] = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} -\Delta_S & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{bmatrix} \quad [S] = \frac{1}{S_{22}} \begin{bmatrix} \Sigma_{12} & \Delta_S \\ 1 & -\Sigma_{21} \end{bmatrix}$$

Determinante:  $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

Kettenmatrix:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \downarrow u_1 \\ \xrightarrow{i_2} \\ \downarrow u_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{i_1} \\ \downarrow u_1 \\ \xleftarrow{i_2} \\ \downarrow u_2 \end{array}$$

Mit normierten Größen  $u, i$  [ $\sqrt{W}$ ]:

$$u = U/\sqrt{Z_0} \text{ und } i = I/\sqrt{Z_0}$$

$$u_{1,2} = a_{1,2} + b_{1,2}, \quad i_{1,2} = a_{1,2} - b_{1,2}$$

$$S_{11} = \frac{A+B-C-D}{A+B+C+D}$$

$$S_{21} = \frac{2}{A+B+C+D}$$

$$A = \frac{-\Delta_S + S_{11} - S_{22} + 1}{2S_{21}}$$

$$C = \frac{\Delta_S - S_{11} - S_{22} + 1}{2S_{21}}$$

$$S_{12} = \frac{2\Delta_A}{A+B+C+D}$$

$$S_{22} = \frac{-A+B-C+D}{A+B+C+D}$$

$$B = \frac{\Delta_S + S_{11} + S_{22} + 1}{2S_{21}}$$

$$D = \frac{-\Delta_S - S_{11} + S_{22} + 1}{2S_{21}}$$

### 3.6. Kettenmatrizen häufiger 2-Tore

Vorteil: die Kettenmatrix mehrerer hintereinander geschalteter Vierpole ist gleich dem Produkt der einzelnen Kettenmatrizen

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R}{Z_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Längswiderstand}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ GZ_0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Querleitwert}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta l & j \frac{Z_1}{Z_0} \sin \beta l \\ j \frac{Z_0}{Z_1} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \quad \text{Verlustlose Leitung } Z_1$$

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma l & \frac{Z_1}{Z_0} \sinh \gamma l \\ \frac{Z_1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \quad \text{Verlustbehaftete Leitung } Z_1 \gamma$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \quad \text{Ideal Übertrager, } n = N_1/N_2$$

## 3.7. Eingangswiderstände unter verschiedenen Anschlüssen

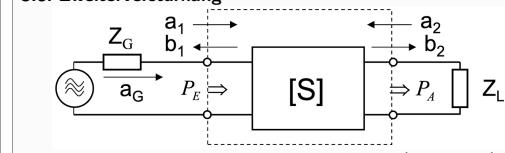
$$\text{Abschluss } Z_0: \quad Z_{in} = \frac{A+B}{C+D} Z_0$$

$$\text{Kurzschluss: } Z_{in}^K = \frac{B}{D} Z_0$$

$$\text{Leerlauf: } Z_{in}^L = \frac{A}{C} Z_0$$

$$\text{Abschluss } Z_I: \quad \tilde{Z}_{in} = \frac{AZ_I+BZ_0}{CZ_I+DZ_0}$$

## 3.8. Zweitortverstärkung



Eingangsleistung:  $P_E = |a_1|^2 - |b_1|^2 = |a_1|^2 \cdot (1 - |\rho_E|^2)$

Ausgangsleistung:  $P_A = |b_2|^2 - |a_2|^2 = |b_2|^2 \cdot (1 - |\rho_L|^2)$

Zusammenhang mit Generatorurwelle:  $a_1 = \frac{a_G}{1 - \rho_G \rho_E}$

Leistungsabgabe im Generator:  $P_G = P_E = |a_G|^2 \cdot \frac{1 - |\rho_E|^2}{|1 - \rho_G \rho_E|^2}$

Maximale/verfügbare Generatorleistung für Anpassung ( $\rho_E = \rho_G^*$ ):  $P_{GV} = \frac{|a_G|^2}{1 - |\rho_E|^2}$

Übertragungsverhalten:  $\frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{1 - \rho_L S_{22}}$

Tatsächliche Leistungsverstärkung:

$$V_P = \frac{P_A}{P_E} = \frac{|b_2|^2 \cdot (1 - |\rho_L|^2)}{|a_1|^2 \cdot (1 - |\rho_E|^2)} = \frac{|S_{21}|^2}{|1 - \rho_L S_{22}|^2} \cdot \frac{1 - |\rho_L|^2}{1 - |\rho_E|^2}$$

Übertragungsleistungsverstärkung/Gewinn (Ausgangsleistung bezogen auf verfügbare Generatorleistung):

$$G = \frac{P_A}{P_{GV}} = \frac{1 - |\rho_G|^2}{|1 - \rho_G \rho_E|^2} \cdot \frac{|S_{21}|^2}{|S_{21}|^2} \cdot \frac{1 - |\rho_L|^2}{|1 - \rho_L S_{22}|^2}$$

Wenn  $Z_G = Z_L = Z_0 \rightarrow$  Anpassung:  $\rho_G = \rho_L = 0 \rightarrow G = |S_{21}|^2$

Maximale Leistungsverstärkung (maximaler Gewinn) bei Wirkleistungsanpassung am Eingang und Ausgang:  $\rho_G = \rho_E^* = S_{11}^*$ ;  $\rho_L = \rho_A^* = \rho_G^* = S_{22}^*$

$$G_{max} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |S_{11}|^2) \cdot (1 - |S_{22}|^2)}$$

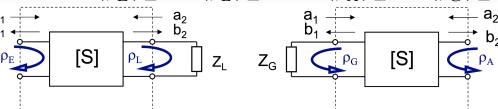
## 3.9. Anpassnetzwerke

- Für maximalen Gewinn ist Wirkleistungsanpassung erforderlich
- HF-Verstärker haben frequenzabhängige und stark reaktive Ein/Ausgangsimpedanzen, die angepasst werden müssen
- Problem: Reaktive Anpassungen in der Regel schmalbandig
- Lösung: Breitbandigkeit durch Anpassung mit resistiven Bauteilen, die jedoch eine Dämpfung verursachen.
- Problem: Reflexionen können zu Stabilitätsproblemen führen

### 3.10. Absolute Stabilität

- Die Tore verhalten sich unabhängig der passiven Beschaltung passiv
- Der Verstärker ist unabhängig von der Beschaltung stabil

Mathematisch:  $|p_E| \leq 1$  für  $|p_L| \leq 1$   $\wedge$   $|p_A| \leq 1$  für  $|p_G| \leq 1$



5 notwendige und hinreichende Bedingungen für absolute Stabilität:

- $|S_{11}| < 1$  und  $|S_{22}| < 1$
- $|S_{12} \cdot S_{21}| < 1 - |S_{22}|^2$  und  $|S_{12} \cdot S_{21}| < 1 - |S_{11}|^2$
- $K > 1$

Stabilitätsfaktor:

$$K = \frac{1 + |S_{11}| \cdot S_{22} - S_{12} \cdot S_{21}|^2 - |S_{11}|^2 \cdot |S_{22}|^2}{|2 \cdot S_{12} \cdot S_{21}|}$$

### Stabilitätskreise:

Zur Überprüfung wird die Ortskurve  $|p_L| = 1$  bzw  $|p_G| = 1$  zum Ein-/Ausgang transformiert:

$$|p_E| = |s_{11} + \frac{s_{12} \cdot s_{21} p_L}{1 - s_{22} p_L}| \stackrel{!}{=} 1 \quad (\rho_L\text{-Ebene})$$

$$|p_A| = |s_{22} + \frac{s_{12} \cdot s_{21} p_G}{1 - s_{11} p_G}| \stackrel{!}{=} 1 \quad (\rho_G\text{-Ebene})$$

$C_L, R_L$ : alle  $p_L$  auf Kreis ( $C_L, R_L$ ) ergeben einen Eingangsreflexionsfaktor  $|\rho_E| = 1$

$C_G, R_G$ : alle  $p_G$  auf Kreis ( $C_G, R_G$ ) ergeben einen Eingangsreflexionsfaktor  $|\rho_A| = 1$

Bild des Eingangsreflexionsfaktors in der Lastebene:

$$C_L = \frac{(s_{22} - \Delta_S s_{11}^*)^*}{|s_{22}|^2 - |\Delta_S|^2}, R_L = \left| \frac{s_{12} s_{21}}{|s_{22}|^2 - |\Delta_S|^2} \right|$$

Bild des Ausgangsreflexionsfaktors in der Eingangsebene:

$$C_G = \frac{(s_{11} - \Delta_S s_{22}^*)^*}{|s_{11}|^2 - |\Delta_S|^2}, R_G = \left| \frac{s_{12} s_{21}}{|s_{11}|^2 - |\Delta_S|^2} \right|$$

With  $\Delta_S = \det(S) = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$

Kriterium für die Wahl der stabilen Seite hinzufügen.

Einfügen von Widerständen zur Stabilisierung hinzufügen.

Finden eines Punktes der stabil sein muss. Das ist bei Anpassung z.B.  $p_L = S_{22}^*$

### S-Parameter in dB:

$$S = a + jb$$

$$S[\text{dB}] = 10 \cdot \log(|S|^2), \quad |S|^2 = a^2 + b^2$$

### 3.11. Leitungskoppler

- Innenleiter zweier Leitungssysteme werden über Strecke  $l$  aufeinander angenähert und parallel geführt
- Verwendung von TEM Leitungen  $\rightarrow$  Phasengeschwindigkeiten der verschiedenen Eigenwellen sind gleich wesentliche Eigenschaft
- Homogenes Dielektrikum zwischen den Platten
- Doppelte Symmetrie ermöglicht Gleich/Gegentaktanalyse
- Alle Koppler mit doppelter Symmetrie und  $z_e z_d = 1$  sind allseits angepasst und  $S_{31} = S_{13} = 0$
- Alle verlustfreien angepassten Koppler mit doppelter Symmetrie sind  $90^\circ$  Koppler
- Können zur Signaldämpfung eingesetzt werden



### Gleich/Gegentaktanalyse:

Für  $a_2 = a_3 = 0$  werden Wellen in Tor 1 und 4 eingespeist. Aufgrund der Symmetrie muss nur ein Ast des Kopplers betrachtet werden.

Gleichtakt:  $a_1^+ = a_4^+ = \frac{a_1}{2} \rightarrow$  Tor 1 sieht Leitung mit Impedanz  $Z_e$ .

Gegentakt:  $a_1^- = -a_4^- = \frac{a_1}{2} \rightarrow$  Tor 1 sieht Leitung mit  $Z_d$ .

Bei Überlagerung gilt  $a_4 = 0$  und dank doppelter Symmetrie  $S_{ii} = S_{jj}$ ,  $S_{12} = S_{21} = S_{34} = S_{43}$  usw. kann  $[S]$  bestimmt werden.

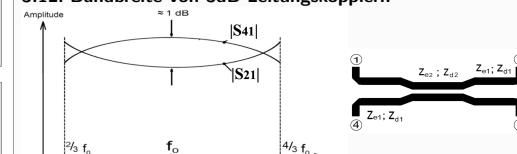
Koppelgrößen für  $z_e z_d = 1$ :

$$S_{21} = \frac{2}{2 \cos \beta l + j(z_e + \frac{1}{z_e}) \sin \beta l}$$

$$S_{41} = \frac{j(z_e - \frac{1}{z_e}) \sin \beta l}{2 \cos \beta l + j(z_e + \frac{1}{z_e}) \sin \beta l}$$

- $S_{11} = S_{31} = 0$  frequenzunabhängig
- $S_{21}$  und  $S_{41}$  unterscheiden sich frequenzunabhängig um  $90^\circ$

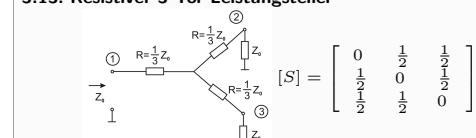
### 3.12. Bandbreite von 3dB-Leitungskopplern



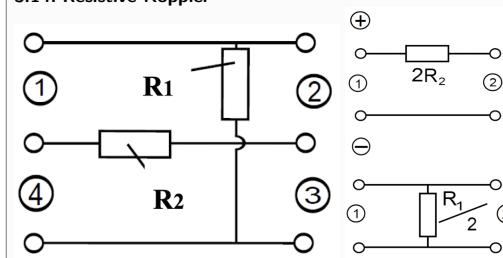
Etwas eine halbe Oktave Bandbreite, bei max. 1dB Unterschied.  
Mehrstufige Koppler verbessern die Bandbreite.

Zirkulator: Ein Dreitor, dessen S-Parametertmatrix verlustfrei und allseitig reflexionsfrei angepasst ist.

### 3.13. Resistiver 3-Tor Leistungsteiler



### 3.14. Resistive Koppler



Schließt man alle Tore mit  $Z_0$  ab, ergibt sich eine Wheatstone-Brücke.

Mit  $R_1 R_2 = Z_0^2$ :

Anpassung:  $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$

Isolation:  $S_{31} = S_{13} = S_{42} = S_{24} = 0$

Übertragung:  $S_{21} = \frac{Z_0}{Z_0 + R_2}, \quad S_{41} = \frac{R_2}{Z_0 + R_2}$

## 4. Einige Theoreme der Elektromagnetischen Feldtheorie

### 4.1. Energiedichte im Feld

Herleitung aus der mechanischen Arbeit durch Annäherung von Ladung auf dem Unendlichen.

Energiedichte des elektrischen Felds:

$$w_e = \int_0^d \underline{\epsilon}' \cdot d\underline{a}' = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{1}{2} |\underline{a}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 |\underline{e}|^2$$

Energiedichte des magnetischen Felds:

$$w_m = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \int_0^d \underline{b}' \cdot d\underline{b}' = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{1}{2} |\underline{b}|^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 |\underline{h}|^2$$

(Die letzten beiden Umformungen gelten für lineares isotropes Material.)

### 4.2. Elektromagnetische Energiebilanz im Zeitbereich

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \underbrace{p_\kappa}_{\substack{\text{zeitliche Änderung der} \\ \text{in V gespeicherten Energie}}} + \underbrace{p_s}_{\substack{\text{Verlustleistung} \\ \text{aus (+) oder} \\ \text{eingebaute (-) Leistung}}}$$

Stationäres Feld:  $-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = 0 \rightarrow p_\kappa = -p_s$

d. austretende Leist.:  $p_s = \oint \underline{e} \times \underline{h} \cdot d\underline{A} = \oint \underline{s} \cdot d\underline{A}$

ohmsche Verlustleistung:  $p_\kappa = \iint_V [\underline{k} \underline{e} \cdot \underline{e}] dv$

elektrische Energie in V:  $W_e = \iint_V [\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 |\underline{e}|^2] dv = \iint_V w_e dv$

magnetische Energie in V:  $W_m = \iint_V [\frac{1}{2} \mu_r \mu_0 |\underline{h}|^2] dv = \iint_V w_m dv$

Mit Pointing Vektor (Leistungflussvektor):  $\underline{s} = \underline{e} \times \underline{h} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$

(Herl. über Erweiterung der MWG mit  $\underline{e}$ ,  $\underline{h}$ , Satz v. Gauss und Subtr.)

### 4.3. Elektromagnetische Energiebilanz in Zeigerdarstellung

$$-\oint \underline{S} \cdot d\underline{A} = P_V - 2j\omega (W_e - \bar{W}_m)$$

Gilt nur in Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit.

Realteil: Der Wirkleistungsfloss durch die Hülle A entspricht der umgesetzten Verlustleistung im Volumen V.

Imaginärteil: Differenz der mittleren elektrischen und magnetischen Feldenergie im Volumen V.

Wirkleistungsfloss durch A (Verlustleistung in V):  $P_V = P_\kappa + P_\epsilon + P_\mu = Re \{ \oint \underline{S} \cdot d\underline{A} \}$

$$(W_e - \bar{W}_m) = \frac{1}{2\omega} Im \{ \oint \underline{S} \cdot d\underline{A} \}$$

ohmsche Verlustleistung:  $P_\kappa = \frac{1}{2} \iint_V [\underline{\kappa} \underline{E} \cdot \underline{E}^*] dv$

dielektrische Verlustleistung:  $P_\epsilon = \frac{1}{2} \iint_V [\omega \epsilon_r'' \epsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E}^*] dv$

magnetische Verlustleistung:  $P_\mu = \frac{1}{2} \iint_V [\omega \mu_r'' \mu_0 \underline{H} \cdot \underline{H}^*] dv$

mittlere elektrische Energie:  $\bar{W}_e = \frac{1}{4} \iint_V [\epsilon_r' \epsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E}^*] dv$

mittlere magnetische Energie:  $\bar{W}_m = \frac{1}{4} \iint_V [\mu_r' \mu_0 \underline{H} \cdot \underline{H}^*] dv$

Komplexer Pointing Vektor:  $\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^*$

$$\frac{1}{2} Re \{ \underline{E} \times \underline{H}^* \} = \overline{\underline{e}(t)} \times \underline{h}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T (\underline{e}(t)) \times \underline{h}(t) dt$$

Bei Gleichstrom  $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$

ideal elektrische leitende Wände  $\Rightarrow$  Randbedingung:  $E_{tm} = n \times \underline{E} = 0$   
Hohlraum mit verlustfreiem Dielektrikum  $\Rightarrow P_v = 0$

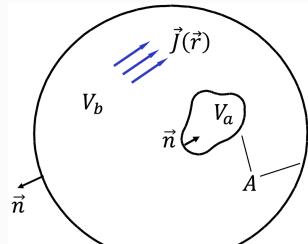
S-Parameter:

$$[S] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

symmetrisch, reziprok, angepasst

#### 4.4. Eindeutigkeitstheorem

Frage: Unter welchen Voraussetzungen (Randbedingungen) ist die Feldlösung in einem durch  $A$  geschlossenen Lösungsgebiet für eine Anregung eindeutig bestimmt?



**Ansatz:** Nehme an, es gäbe zwei Feldlösungen der MWG  $\underline{E}_1, \underline{H}_1$  und  $\underline{E}_2, \underline{H}_2$  im gleichen Gebiet  $V_b$  mit gleicher Anregung  $\underline{J}, \underline{M}$ . Durch Differenzbildung der Lösungen, Einsetzen in die MWG (1-2), und Erweiterung mit  $\delta \underline{H}^*$  bzw.  $\delta \underline{E}$ , Differenzbildung, Satz v. Gauß ergibt sich:  $\iiint_{V_b} \nabla \cdot (\delta \underline{E}(\mathbf{r}) \times \delta \underline{H}^*(\mathbf{r})) dv = \oint_A (\delta \underline{E}(\mathbf{r}) \times \delta \underline{H}^*(\mathbf{r})) \cdot d\underline{A} = \iiint_{V_b} [-j\omega\mu(\mathbf{r})|\delta \underline{H}(\mathbf{r})|^2 + j\omega\varepsilon^*(\mathbf{r})|\delta \underline{E}(\mathbf{r})|^2] dv$ .

Oberflächenintegral verschwindet für:

1. Vorgabe von  $\underline{n} \times \underline{E}$  auf  $A$
2. Vorgabe von  $\underline{n} \times \underline{H}$  auf  $A$
3. Vorgabe von  $\underline{n} \times \underline{E}$  auf Teilen v.  $A$  und  $\underline{n} \times \underline{H}$  auf dem Rest

Bei verschwindendem Oberflächenintegral:

⇒ Für  $\mu''(\mathbf{r}) > 0$  und/oder  $\varepsilon''(\mathbf{r}) > 0$  ist die Feldlösung eindeutig.  
⇒ Für verlustfreie Medien (ideale Resonatoren) oder negativen Materialien existieren mehrere Lösungen.

#### 4.5. Reziprozität der Green'schen Funktion beweisen

Beweis hier beispielhaft für  $G_J^E$   
Reziprozität:  $\iiint_V \underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 dv = \iiint_V \underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 dv$

Einsetzen:

$$E_{1,2} = \iiint_V G_J^E(r, r') J_{1,2}(r') dv' \\ J_1 = I l \delta(r - r_{1,2}) e_{a,b,c} \quad J_2 = I l \delta(r - r_{1,2}) e_{d,e,f}$$

Lösen der Integrale:  $G_J^E(r_1, r_2)_{abc,def} = G_J^E(r_2, r_1)_{def,abc}$

#### 4.6. Reziprozität

Umkehrbarkeit: In einem System die Position von Ursache und Wirkung vertauscht. Die Reaktion des Feldes  $a$  auf Quelle von  $b$  ist gleich der Reaktion des Feldes  $b$  auf die Quelle von  $a$ .

$$\underline{J}, \underline{M} \rightarrow \underline{E}, \underline{H} \rightarrow \underline{E}, \underline{H} \rightarrow \underline{J}, \underline{M}$$

Betrachte Quellen  $\underline{J}_1, \underline{M}_1$  mit dem Feld  $\underline{E}_1, \underline{H}_1$  und  
Betrachte Quellen  $\underline{J}_2, \underline{M}_2$  mit dem Feld  $\underline{E}_2, \underline{H}_2$  mit MWG:

$$(1) \nabla \times \underline{H}_1 = j\omega\varepsilon \underline{E}_1 + \underline{J}_1 \quad (3) \nabla \times \underline{H}_2 = j\omega\varepsilon \underline{E}_2 + \underline{J}_2 \\ (2) \nabla \times \underline{E}_1 = -j\omega\mu \underline{H}_1 - \underline{M}_1 \quad (4) \nabla \times \underline{E}_2 = -j\omega\mu \underline{H}_2 - \underline{M}_2$$

**Annahmen:** Materialien sind isotrop (trotzdem gg. ortsabhängig).

**Ansatz:** Berechne (3)  $\cdot \underline{E}_1 - (2) \cdot \underline{H}_2 - ((1) \cdot \underline{E}_2 - (4) \cdot \underline{H}_1)$ . RHS liefert Beiträge nur in Quelleregionen. Satz v. Gauss. Ergebnis:

$$-\oint_A (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot d\underline{A} = \iiint_V (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 + \underline{H}_2 \cdot \underline{M}_1 - \underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 - \underline{H}_1 \cdot \underline{M}_2) dv$$

Für Quellefreie Gebiete:  
Diff. Form:  $-\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = 0$   
Integralform:  $\oint_A (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot d\underline{A} = 0$

Wähle  $A(V)$  als die Fernkugeloberfläche  $r \rightarrow \infty$  (lokale ebene Welle).  $E_\vartheta = Z H_\varphi$ .  $U_\varphi = -Z H_\vartheta$ , das Oberflächenintegral verschwindet:

$$\iiint_V (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 - \underline{H}_1 \cdot \underline{M}_2) dv = \iiint_V (\underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 - \underline{H}_2 \cdot \underline{M}_1) dv$$

Für idealen elektrischen Leiter (PEC):

Da keine mag. Ströme existieren:  $\underline{M}_1 = \underline{M}_2 = 0$ .

$$\underline{n} \times \underline{E} = 0$$

Für idealen magnetischen Leiter (PMC):

$$\underline{n} \times \underline{H} = 0$$

$$\iiint_V (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2) dv = \iiint_V (\underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1) dv$$

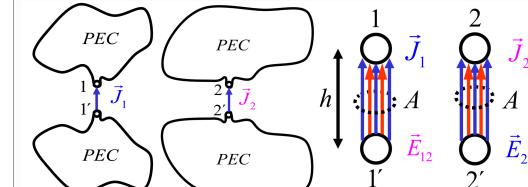
Eingeprägter Strom  $\underline{J}_1$  nur im PEC und  $\underline{E}_2 = 0$  im PEC → Integral ist 0 → beliebige Wahl von  $\underline{J}_2$  erfordert  $\underline{E}_1 = 0$  für alle  $r$ .

⇒ Elektrischer Strom  $\underline{J}$  auf/in PEC strahlt kein Feld ab.  
⇒ Magnetischer Strom  $\underline{M}$  auf/in PMC strahlt kein Feld ab.

#### 4.7. Reziprozität von Antennen

Senderverhalten = Empfangsverhalten

Betrachte zwei beliebige metallische PEC Antennen (auch für nicht-PEC):



Nutze  $\iiint_V (\underline{E}_{12} \cdot \underline{J}_1) dv = \iiint_V (\underline{E}_{21} \cdot \underline{J}_2) dv$ .

Weitere Annahmen:  $\underline{J}_1 \neq f(h)$  u.  $\underline{E}_{12} = \text{konst.}$  in  $A$   
 $\Rightarrow \int \underline{E}_{12} \cdot d\underline{h} = -U_{10} \quad \iint \underline{J}_1 \cdot d\underline{A} = I_1$

$$\frac{U_{10}}{I_2} = Z_{12} = \frac{U_{20}}{I_1} = Z_{21}$$

#### 4.8. Elektromagnetische Potentiale

Zerlegung in elektrische und magnetische Felder:

$$\underline{E} = \underline{E}_e + \underline{E}_m \quad \underline{H} = \underline{H}_e + \underline{H}_m$$

##### Elektrische Ströme

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H}_e &= j\omega\varepsilon \underline{E}_e + \underline{J} & -\nabla \times \underline{E}_m &= j\omega\mu \underline{H}_m + \underline{M} \\ \nabla \times \underline{E}_e &= -j\omega\mu \underline{H}_e & \nabla \times \underline{H}_m &= j\omega\varepsilon \underline{E}_m \\ \nabla \cdot (\varepsilon \underline{E}_e) &= \rho & \nabla \cdot (\mu \underline{H}_m) &= \rho_m \\ \nabla \cdot (\mu \underline{H}_e) &= 0 & \nabla \cdot (\varepsilon \underline{E}_m) &= 0 \end{aligned}$$

Felddarstellung über Potentiale:

$$\underline{H}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A}(\mathbf{r}) \quad \underline{E}_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \underline{F}(\mathbf{r})$$

$$\underline{E}_e(\mathbf{r}) = -j\omega \underline{A} - \nabla \phi \quad \underline{H}_m(\mathbf{r}) = -j\omega \underline{F} - \nabla \psi \\ = -j\omega \left( \underline{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \underline{A}(\mathbf{r}) \right) = -j\omega \left( \underline{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \underline{F}(\mathbf{r}) \right)$$

Lorenz-Eichung:

$$\nabla \cdot \underline{A}(\mathbf{r}) + j\omega \mu \varepsilon \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \cdot \underline{F}(\mathbf{r}) + j\omega \mu \varepsilon \psi(\mathbf{r}) = 0$$

Helmholtz-Gleichungen:

$$\Delta \underline{A}(\mathbf{r}) + k^2 \underline{A}(\mathbf{r}) = -\mu \underline{J}(\mathbf{r}) \quad \Delta \underline{F}(\mathbf{r}) + k^2 \underline{F}(\mathbf{r}) = -\varepsilon \underline{M}(\mathbf{r})$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \Delta \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_m(\mathbf{r})}{\mu}$$

Idee: Kurze Beschreibung der Vorteile der Darstellung (Entkopplung v. Gleichungen, Entfernen von Redundanz in MWG, Modellierungsfreiheit, Green'sche Funktionen skalar)

#### 4.10. Green'sche Funktionen

$\underline{r}$ : Beobachtungsvektor,  $\underline{r}'$ : Quellvektor,  $k = \frac{\omega}{c} = \varepsilon\mu\omega^2$

Green'sche Funktion des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mu \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \hat{\underline{I}}$$

Green'sche Funktion des elektrischen Vektorpotentials

$$\underline{G}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varepsilon \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \hat{\underline{I}}$$

Elektrischen Feldes bei Anregung mit elektrischen Strömen

$$\underline{G}_J^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \left( \hat{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \hat{\underline{I}} \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Magnetischen Feldes bei Anregung mit elektrischen Strömen

$$\underline{G}_J^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \hat{\underline{I}}$$

Elektrisches Feld, Anregung mit magnetischen Strömen

$$\underline{G}_M^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \hat{\underline{I}}$$

Magnetisches Feld, Anregung mit magnetischen Strömen

$$\underline{G}_M^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega \left( \hat{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \hat{\underline{I}} \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Beispiel:  $\underline{E}(\mathbf{r}) = \iiint_V \underline{G}_J^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \underline{J}(\mathbf{r}') dv$

$$\underline{A}(\mathbf{r}) = \iiint_V \underline{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \underline{J}(\mathbf{r}') dv$$

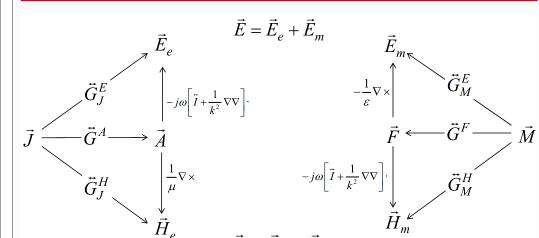
Elektrisches Feld, Anregung mit elektrischen Strömen. Ist das magnetische Vektorpotential gegeben, gilt für das elektrische Feld

$$\underline{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \left[ \underline{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \underline{A}(\mathbf{r}) \right]$$

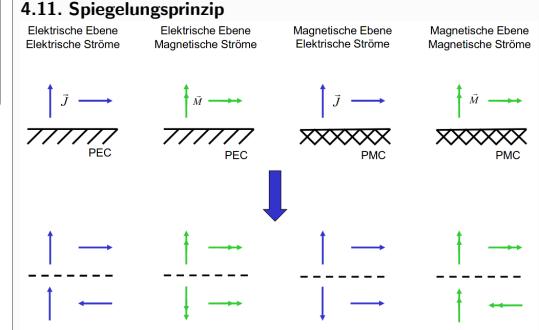
$$\underline{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \left[ \hat{\underline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \hat{\underline{I}} \right] \cdot \underline{A}(\mathbf{r}) \text{ mit } k = \frac{\omega}{c} = \varepsilon\mu\omega^2$$

Magnetisches Feld, Anregung mit elektrischen Strömen. Ist das magnetische Vektorpotential gegeben, gilt für das magnetische Feld

$$\underline{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A}(\mathbf{r})$$



#### 4.11. Spiegelungsprinzip



## 4.12. Huygens'sches Prinzip

Idee: Das Feld einer Primärquelle im Gebiet  $V_A$  kann durch äquivalente Oberflächenströme  $\underline{J}_A$ ,  $\underline{M}_A$  auf der Grenzfläche  $A(V_b)$  ersetzt werden.  $V_a$  wird dadurchfeldfrei und kann mit beliebigen Materialien (z.B. PEC) gefüllt werden. Die Flächenströme sind Sekundärquellen, die zur Berechnung des Feldes in  $V_b$  verwendet werden können.

$$\underline{E}(\underline{r}) = \iiint_{V_b} [\overleftrightarrow{G}_J^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') + \overleftrightarrow{G}_M^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{M}(\underline{r}') ] d\underline{v}' \\ + \iint_{A(V_b)} [\overleftrightarrow{G}_J^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_A(\underline{r}') + \overleftrightarrow{G}_M^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{M}_A(\underline{r}') ] da'$$

$$\underline{J}_A(\underline{r}) = \underline{n} \times \underline{H}(\underline{r}) \\ \underline{M}_A(\underline{r}) = -\underline{n} \times \underline{E}(\underline{r}) \\ \rightarrow \text{Felder in } V_a \text{ verschwinden.}$$

**Eindeutigkeitsprinzip:** Das Feld in  $V_b$  ist eindeutig über die Quellen und die tangentialen Ströme auf  $A(V_b)$  gegeben (außer im Fall von Resonanzen). Der Beitrag der äußeren Hüllfläche entfällt, falls im Unendlichen.

**Äquivalente Formulierungen:** Da die Felder in  $V_a$  verschwinden, kann  $V_a$  mit beliebigen Materialien gefüllt werden. Gängige Materialien:

Freiraum:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \iint_A [\overleftrightarrow{G}_{J,0}^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_A(\underline{r}') + \overleftrightarrow{G}_{M,0}^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{M}_A(\underline{r}') ] da'$$

PMC:  $\underline{E}(\underline{r}) = \iint_A [\overleftrightarrow{G}_{J,1}^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}_A(\underline{r}') ] da'$

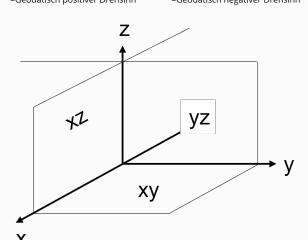
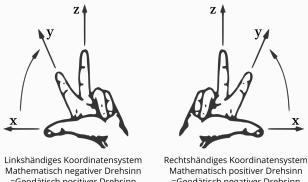
PEC:  $\underline{E}(\underline{r}) = \iint_A [\overleftrightarrow{G}_{M,2}^E(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{M}_A(\underline{r}') ] da'$

**Nutze Spiegelungsprinzip bei PEC/PMC Halbräumen:**

PMC:  $M_A = 0$ ,  $2J_A$  strahlt in freien Raum

PEC:  $J_A = 0$ ,  $2M_A$  strahlt in freien Raum

## 4.13. Rechte Hand und Kartesisches Koordinatensystem



**Wichtig für das Kreuzprodukt bei TEM-Wellen:**

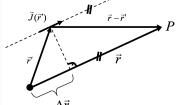
Der Ausbreitungsvektor  $\underline{k}$  und das  $\underline{E}$ -Feld geben vor, wo das  $\underline{H}$ -Feld liegt.

$$\underline{H} = \frac{1}{Z_F} \underline{k} \times \underline{E} \text{ oder } \underline{E} = -Z_F \underline{k} \times \underline{H}$$

Wenn z.B. Ausbreitung in  $\underline{e}_z$  Richtung erfolgt und das  $\underline{E}$ -Feld  $x$ -polarisiert ist muss  $\underline{H}$  in  $\underline{e}_y$  Richtung zeigen.

$$\underline{H} = \frac{1}{Z_F} \underline{e}_z \times \underline{E}_0 \underline{e}_x = \frac{1}{Z_F} E_0 \underline{e}_y$$

## 4.14. Nah- und Fernfeld (im Freien Raum)



Approximiere  $\underline{A}(\underline{r})$  unter den Annahmen  $r = |\underline{r}| \gg |\underline{r}'|$ ,  $r \gg \Delta r$ .  
 $\rightarrow |\underline{r} - \underline{r}'| \approx r$  im Nenner, und  $|\underline{r} - \underline{r}'| \approx r - \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}$  im Exp.

$$\underline{A}(\underline{r}) = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \underline{J}(\underline{r}') e^{+jk \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} dv' \\ \underline{F}(\underline{r}) = \epsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \underline{M}(\underline{r}') e^{+jk \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} dv'$$

$$\overleftrightarrow{G}^A(\underline{r}, \underline{r}') = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{+jk \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} \overleftrightarrow{I} \\ \overleftrightarrow{G}^F(\underline{r}, \underline{r}') = \epsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{+jk \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} \overleftrightarrow{I}$$

Einheitsdyade ist karthesisch:  $\overleftrightarrow{I} = \underline{e}_x \underline{e}_x + \underline{e}_y \underline{e}_y + \underline{e}_z \underline{e}_z$ .

Rotationsoperator im Fernfeld:

$$\nabla \times \underline{A} \approx -jk \underline{e}_r \times \underline{A}$$

Divergenzoperator im Fernfeld:

$$\nabla \cdot \underline{A} \approx -jk \underline{e}_r \cdot \underline{A}$$

Im Fernfeld sollten immer Kugelkoordinaten für  $\underline{r}$  verwendet werden. Damit lässt sich das Skalarprodukt  $\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}$  wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \underline{r}'$$

Der Quellvektor  $\underline{r}'$  muss entsprechend angepasst werden! Bei Flächenströmen können auch mehr als eine Komponente  $\neq 0$  sein!

## 4.15. Sphärische Feldkomponenten im Fernfeld

Felder aufgrund elektr. Ströme:

$$\underline{H}_1(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r}) = -j\omega \underline{A}(\underline{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) \\ \approx -jk \underline{e}_r \times \underline{A}(\underline{r}) \\ H_{r1} = 0 \\ H_{\vartheta 1} = \frac{jk}{\mu} A_{\varphi} \\ H_{\varphi 1} = -\frac{jk}{\mu} A_{\vartheta}$$

Felder aufgrund magnet. Ströme:

$$\underline{E}_2(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \underline{F}(\underline{r}) \approx \frac{jk}{\epsilon} \underline{e}_r \times \underline{F}(\underline{r}) \\ E_{r2} = 0 \\ E_{\vartheta 2} = -\frac{jk}{\epsilon} F_{\varphi} = Z_F H_{\varphi 2} \\ E_{\varphi 2} = \frac{jk}{\epsilon} F_{\vartheta} = -Z_F H_{\vartheta 2}$$

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\omega \mu}{k} \text{ im Freiraum } \approx 120\pi \Omega \approx 377\Omega$$

**4.16. TEM Wellen**  
 $Z_F = 120\pi \approx 377\Omega$   
 $\underline{H} = \frac{1}{Z_F} \underline{e}_z \times \underline{E}$   
 $\underline{E} = -Z_F \underline{e}_z \times \underline{H}$   
 $\underline{E} \perp \underline{H} \perp \underline{e}_z$ ,  $\underline{e}_z$  ist Ausbreitungsrichtung.  
Nutze Rechte-Hand-Regel für schnelle Berechnung von Kreuzprodukten.

## 5. Hohlleiter

### 5.1. Hohlleiter

Charakteristisch in einem Hohlleiter ist: E(TM)-Welle kein H-Feld in Ausbreitungsrichtung, H(TE)-Welle kein E-Feld in Ausbreitungsrichtung.

Anregung unterhalb der Grenzfrequenz (evanescente Wellen/Moden) kommt es zu keinem Wirkleistungstransport, sondern Blindleistung klingt exponentiell ab. Oberhalb der Grenzfrequenz wird Wirkleistung transportiert.

Dispersionsrelation (Eigenwertgleichung) in kartesischen Koordinaten:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \\ q^2 = k_x^2 + k_y^2 \\ \text{Rechteck-Hohlleiter: } k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

Wellenzahl im Freiraum:  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Wellenzahl in z-Richtung:  $k_z = \sqrt{k^2 - q^2}$

q: geometriechabhängiger Eigenwert einer Mode

Dispersion: frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ausbreitungskonstante in z-Richtung:  $\gamma = \alpha + j\beta = jk_z$

Wellenzahl in z-Richtung:  $k_z = \beta - j\alpha$

Grenzfrequenz  $f_c$ :

Unterhalb  $f_c$  ist keine Wellenausbreitung möglich  $\rightarrow k_z = 0$  bei  $f = f_c$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

Ausbreitungstyp  $q \leq k$  bzw.  $f_c \leq f$ :

$$\gamma = j\beta, \alpha = 0, \beta = k_z = \sqrt{k^2 - q^2}, Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\omega \mu}{k}$$

$$Z_{F0} = 120\pi \quad Z_F = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\epsilon r}}, k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\frac{k_z}{k} = \frac{\lambda}{\lambda_G} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \\ \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - q^2}} = \frac{2\pi}{k_z} \geq \lambda \text{ (g: guided, z)} \\ Z_{FH} = \frac{j\omega \mu}{\beta_H} = \frac{\omega \mu}{\beta_H} = \frac{k}{k_z} Z_F = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \\ Z_{FE} = \frac{j\omega \epsilon}{\beta \omega_c} = \frac{\beta \omega}{\omega_c} = \frac{k_z}{k} Z_F = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} Z_F$$

H-Mode:  $Z_{FH} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} > Z_F$

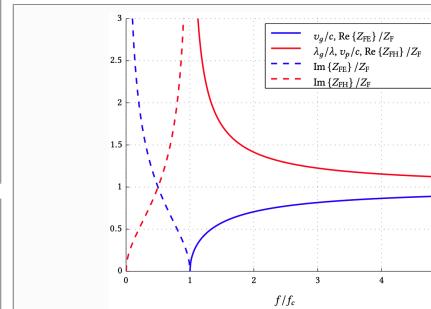
E-Mode:  $Z_{FE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} < Z_F$

Wellenwiderstand im freien Raum (TEM):  $Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\omega \mu}{k}$   
Die Feldwellenwiderstände sind ortsunabhängig konstant.

Dämpfungstyp  $k < q$  bzw.  $f < f_c$ :  $\gamma = \alpha, \beta = 0$

$$\alpha = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$$

siehe Abschnitt: Dämpfungstyp



## 5.2. Geschwindigkeiten

### Phasengeschwindigkeit

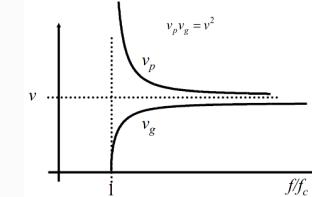
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow \frac{v_p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > 1$$

Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{v_g}{c} = \frac{k_z}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < 1$$

Reziproker Zusammenhang:  $v_g v_p = c^2$

- $v_p > c$  ( $c$  ist Lichtgeschwindigkeit im freien Raum)
- $v_g < c$  (maßgeblich für Energie- und Informationstransport)



## 5.3. Dämpfungstyp (evanescente Moden)

kein Leistungstransport:  $Z_{FH}$  bzw.  $Z_{FE}$  ist imaginär  $\rightarrow 90^\circ$  zwischen Querfeldstärken

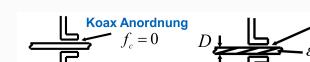
Exponentieller Dämpfungsfaktor:

$$\alpha = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_c}}_{\alpha_c} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

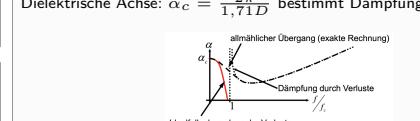
Dämpfung einer Schirmung:

$$\frac{\alpha}{N_P} = \alpha(a)l = \underbrace{\frac{\pi}{a}}_{\alpha_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{HEW}}\right)^2} l$$

Spezialfall: Achse durch Gehäuse



Dielektrische Achse:  $\alpha_c = \frac{2\pi}{1,71D}$  bestimmt Dämpfung



## 5.4. Übersicht 5-Komponenten Felder

Ansatz: trenne Welle in longitudinalen und transversalen Anteil auf (Ausbreitung in +z-Richtung):

$$\underline{E}(u, v, z) = [\underline{E}_t(u, v) + \underline{e}_z E_z] e^{-\gamma z}$$

$$\underline{H}(u, v, z) = [\underline{H}_t(u, v) + \underline{e}_z H_z] e^{-\gamma z}$$

Resultierende Differentialoperatoren:

$$\nabla = \nabla_t + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Je nach Ansatz ergeben sich E (TM)- und H (TE)-Moden:

E (TM) - Moden / Feldtypen

$$\underline{A} = \underline{e}_z \psi_E, \quad \underline{F} = 0$$

$$\psi_E = \psi_{Et} e^{-\gamma_E z}$$

$$\rightarrow H_z = 0$$

$$\underline{E}_t = -\frac{\gamma_E}{j\omega\mu} \nabla_t \psi_E$$

$$\underline{H}_t = -\underline{e}_z \times \frac{1}{\mu} \nabla_t \psi_E$$

$$\underline{e}_z \times \underline{E}_t = Z_{FE} \underline{H}_t$$

$$\underline{e}_z \times \underline{E}_t = Z_{FH} \underline{H}_t$$

Feldwellen(typ) widerstand:

$$Z_{FE} = \frac{\gamma_E}{j\omega\epsilon}$$

$$Z_{FH} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_H}$$

Kenntnis der z-Komponente reicht zur Berechnung der übrigen 4 Komponenten.

## 5.5. E (TM) und H (TE)-Moden in kartesischen Koordinaten

E (TM)-Moden

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \underline{e}_z \psi_E, \quad \hat{F} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_E + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_E + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_E + k^2 \psi_E &= 0 \\ E_x &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_E \quad H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \psi_E \quad H_z = 0 \\ E_y &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_E \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \psi_E \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \psi_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_E + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_E + (\gamma_E^2 + k^2) \psi_E &= 0 \\ E_x &= -\frac{\gamma_E}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} \psi_E \quad H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \psi_E \quad H_z = 0 \\ E_y &= -\frac{\gamma_E}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} \psi_E \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \psi_E \quad E_z = 0 \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left( \gamma_E^2 + k^2 \right) \psi_E \end{aligned}$$

## 5.6. E (TM) und H (TE)-Moden in Zylinderkoordinaten

E (TM)-Moden

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \underline{e}_z \psi_E, \quad \hat{F} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi_E + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_E + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi_E + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_E + k^2 \psi_E &= 0 \\ E_\rho &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_E \quad H_\rho = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_E \\ E_\phi &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_E \quad H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_E \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + k^2 \right) \psi_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi_E + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_E + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi_E + (\gamma_E^2 + k^2) \psi_E &= 0 \\ E_\rho &= -\frac{\gamma_E}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} \psi_E \quad H_\rho = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_E \\ E_\phi &= -\frac{\gamma_E}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_E \quad H_\phi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_E \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left( \gamma_E^2 + k^2 \right) \psi_E \end{aligned}$$

## 5.7. Übergang zu TEM

E (TM) - Moden/Feldtypen:

$$\gamma_E = jk \rightarrow q_E = 0 \rightarrow \Delta_t \psi_{Et} = 0 \rightarrow E_z = H_z = 0$$

H (TE) - Moden/Feldtypen:

$$\gamma_H = jk \rightarrow q_H = 0 \rightarrow \Delta_t \psi_{Ht} = 0 \rightarrow E_z = H_z = 0$$

Für  $\psi_E = \psi_H$  stehen die Felder beider Typen senkrecht aufeinander.  
→ Die E- und H- Felder beider Typen sind miteinander vertauscht. Der auftretende Feldtyp wird durch die Randbedingungen bestimmt.

## 5.8. Ansatz im Rechteck Hohlleiter

Randbedingungen:  $E_{tan} = 0$  auf  $x = [0; a]$  und  $y = [0; b]$   
Separationsansatz:  $\psi_{Ht}(x, y) = H_0 X(x) Y(y)$  bzw.  $\psi_{Et}(x, y) = E_0 X(x) Y(y)$   
→ unabhängige Lösung von  $X(x)$  und  $Y(y)$

TM(E)-Moden:

$$\psi_{Et} = \frac{j\omega\mu}{q_E^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

TE(H)-Moden:

$$\psi_{Ht} = \frac{j\omega\mu}{q_H^2} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

## 5.9. TE(H)-Moden im Rechteck Hohlleiter

$H_{mn}$ -Mode:

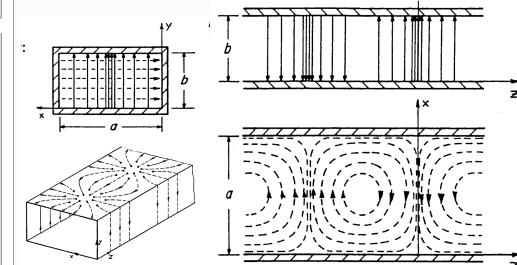
m: nebeneinander, n: übereinander

$$E_z = 0$$

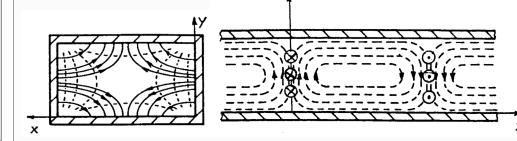
$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \\ H_y &= j \frac{\beta}{\mu} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j\beta z} \\ H_x &= j \frac{\beta}{\mu} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \\ E_y &= -H_x Z_{FH} \\ E_x &= H_y Z_{FH} \end{aligned}$$

H<sub>10</sub>-Mode:

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} \\ H_{-x} &= \frac{E_y}{Z_{FH}} \\ H_z &= j \frac{E_0}{Z_F} \lambda_{HEW} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} \end{aligned}$$



H<sub>11</sub>-Mode:



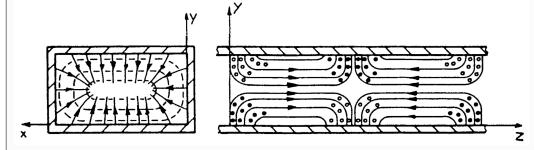
## 5.10. TM(E)-Moden im Rechteck Hohlleiter

$E_{mn}$ -Mode:  $m, n \geq 1$

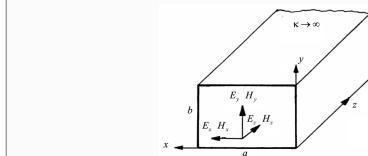
$$H_z = 0$$

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ E_s &= -j \frac{\beta}{\mu} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ E_y &= -j \frac{\beta}{\mu} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_x &= \frac{-E_y}{Z_{FE}} \\ H_y &= \frac{E_x}{Z_{FE}} \end{aligned}$$

E<sub>11</sub>-Mode:



## 5.11. Rechteck Hohlleiter



Dispersionsrelation:

$$\begin{aligned} k^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2 \\ k &= \frac{2\pi f}{c_0} \text{ und } k_x = \frac{m\pi}{a} \text{ und } k_y = \frac{n\pi}{b} \\ q^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c}{2a} \text{ für TE10} \\ \lambda_g &= \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}, \quad \beta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}, \quad \alpha_c = \frac{c}{f_c} \end{aligned}$$

In der Nähe der Grenzfrequenz wird der Hohlleiter extrem dispersiv → Betriebsbereich von 1.25 bis 1.9 der unteren Grenzfrequenz.

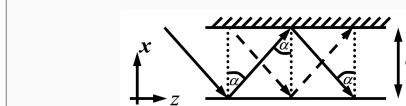
Nützliche Umformungen:

$$\frac{Z_F}{\omega\mu} = \frac{1}{k}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad k \triangleq \left[ \frac{1}{m} \right]$$

Wahl der Geometrie:

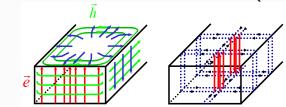
- meist nur einwelliger Betrieb sinnvoll (Dispersion) → nur TE(H)<sub>10</sub>
- maximale Leistung erfordert maximales b
- minimale Verluste erfordert maximales a und b
- maximaler Einwelligkeitsbereich erfordert minimales b  
⇒ b = a/2 für maximalen Einwelligkeitsbereich und optimalen Leistungsfestigkeit

Interpretation als Überlagerung ebener Wellen:

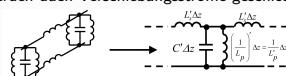


$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{HEW}}{2a}\right)^2}, \quad \cos \alpha = \frac{\lambda_{HEW}}{2a}$$

## 5.12. Stromkreise im Rechteck Hohlleiter (H<sub>10</sub>-Mode)



Stromkreise werden durch Verschiebungströme geschlossen.

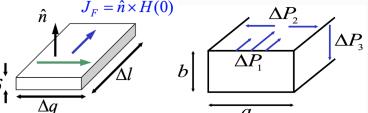


Resonanzfrequenz des Parallelresonators = Cut-off Frequenz  $f_c$

- Bestimme Feldverteilung unter Annahme idealer Leitfähigkeit
- Berechne transportierte Leistung

$$P = \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a \operatorname{Re}\{S_z\} dx dy$$

- Betrachte Strom im differentiellen Skin-Schicht Element ringsrum



- Berechne differentielle Verluste im Volumenelement (verwende  $R_\square$ )

- Integriere entlang der Seitenwände des Querschnitts →  $\Delta P_{1,2,3}/\Delta z$

- Bestimme Dämpfungskonstante (mit  $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$ ):  
 $P(z) = P(0)e^{-2\alpha z}$

$$\rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = P(0)(-\alpha)2e^{-2\alpha z} = -\alpha 2P(z)$$

$$\rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \frac{dP(z)}{dz} \frac{1}{P(z)}$$

In H<sub>10</sub>:

$$\text{Transportierte Leistung: } \rightarrow = \frac{ab}{4} \frac{|E_0|^2}{\operatorname{Re}\{Z_{FH}\}}$$

Differentielle Verluste (nach Integration über Querschnitt):

$$\Delta P_1 = -\frac{1}{4} R_\square a \frac{|E_0|^2}{|Z_{FH}|^2} \Delta z$$

$$\Delta P_2 = -\frac{1}{4} R_\square a \frac{|E_0|^2}{|Z_{F0}|^2} \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \Delta z$$

$$\Delta P_3 = -\frac{1}{2} R_\square b \frac{|E_0|^2}{|Z_{F0}|^2} \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \Delta z$$

Dämpfungskonstante:

$$\alpha = \frac{R_\square}{Z_{F0}} \frac{\frac{1}{b} + \frac{2}{a} \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$$

$$P(z) = P(0)e^{-2\alpha z}$$

Längsverluste  $\Delta P_1$ :  $\alpha \sim \sqrt{f}$  wegen  $R_\square = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}$

Querverluste  $\Delta P_2, \Delta P_3$ :  $\alpha \sim R_\square \lambda_0^2 \sim \frac{\sqrt{f}}{f^2} |f \rightarrow \infty \rightarrow 0$

Bei steigenden Frequenzen überwiegen die Längsverluste, die Querverluste gehen langesam gegen 0.

## 5.14. Dielektrische Verluste

Dielektrische Verluste sind bereits perfekt über die feldtheoretischen Ansatz abgedeckt.

Sie sind von Bedeutung in substratintegrierten Hohlleitern.

$$\alpha_D \approx \frac{1}{2} \beta_0 \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta \frac{f}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_e}\right)^2 - 1}}$$

$$\text{mit } \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda c_0} = \frac{2\pi f}{c_0}, \text{ Dämpfung: } d = 10 \log \left( e^{-2\alpha_D l_{RHL}} \right)$$

## 5.15. Runde Hohlleiter

Separationsansatz führt auf Bessel'sche Differentialgleichung

H-Feld Typen:

$$\psi_{Ht} = \frac{j\omega\mu}{q_H^2} H_0 R(\rho) \cos(m\varphi - \varphi_0)$$

Randbedingung:  $\left. \frac{\partial}{\partial \rho} R(\rho) \right|_{\rho=D/2} = 0$

$$\text{Lösung: } H_z = H_0 J_m(\beta_c \rho) \cos(m\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

TE(H)<sub>11</sub>-Mode TE(H)<sub>01</sub>-Mode

$$\lambda_c = 1,71D$$

$$H_z = H_0 J_1(\beta_c \rho) \cos(\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = j \frac{\beta}{\beta_c \rho} H_0 J_0(\beta_c \rho) \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

$$H_\phi = -j \frac{\beta}{\beta_c} H_0 J'_0(\beta_c \rho) \cos(\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

$$E_\phi = -H_\rho Z_{FH}$$

$$E_\phi = H_0 Z_{FH}$$

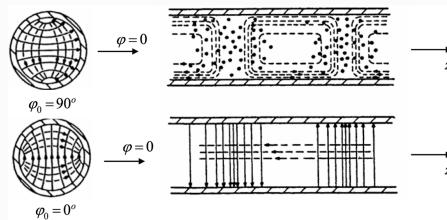
TE(H)<sub>11</sub>-Mode:

magnetischer Grundwellentyp

11: m=1 und 1. Nullstelle der Ableitung der Besselfkt 1. Ordnung

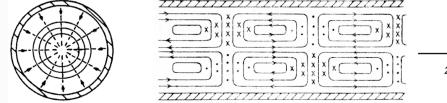
Technisch relevant für die Speisung von Hörnern

$\phi = 0$  und  $\phi = \pi/2$  ergeben symmetrische orthogonale Wellen:



TE(H)<sub>01</sub>-Mode:

rotationssymmetrisch, fehlende Längsströme  $\rightarrow$  geringe Dämpfung



TH(E)<sub>mn</sub>-Mode

$$E_z = E_0 J_n(\beta_c \rho) \cos(m\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

$$E_\phi = j \frac{m\beta}{\beta_c^2 \rho} E_0 J_m(\beta_c \rho) \sin(m\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

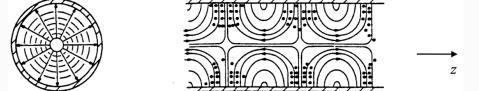
$$E_\rho = -j \frac{\beta}{\beta_c} E_0 J'_m(\beta_c \rho) \cos(m\varphi - \varphi_0) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = \frac{E_\phi}{Z_{FE}}$$

$$H_\phi = -\frac{E_\rho}{Z_{FE}}$$

TH(E)<sub>01</sub>-Mode:

rotationssymmetrisch  $\rightarrow$  Rotationskopplungen



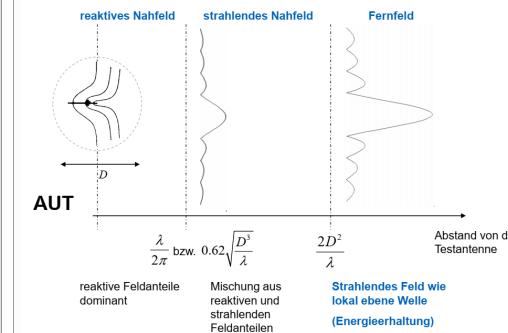
**entartete Moden:** Entartete Moden besitzen die gleiche Grenzfrequenz.

## 6. Antennen

Antennen sind Wellentypwandler, der geführte Leitungswelle in sich frei ausbreitende Welle umwandelt und umgekehrt. Ziele bei Antennendesigns:

- keine Reflexion
- keine Verluste

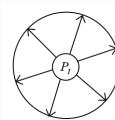
Charakterisierung der Antenneneigenschaften unter **Fernfeldbedingungen**.  $D$  ist der Durchmesser der minimalen Hüllfläche, welche die Antenne umschließt. Antennenfeldzonen:



### 6.1. Isotroper Kugelstrahler

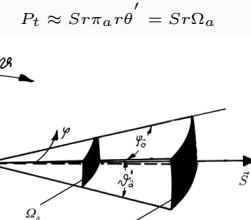
Beim isotropen Kugelstrahler verteilt sich der Leistungsfluss gleichmäßig auf eine umschließende Kugeloberfläche. Isotroper Kugelstrahler kann nicht realisiert werden. Abgestrahlte Leistung:  $4\pi r^2 S_I = P_t$

$$S_I = \frac{P_t}{4\pi r^2}$$



### 6.2. Sektorstrahler

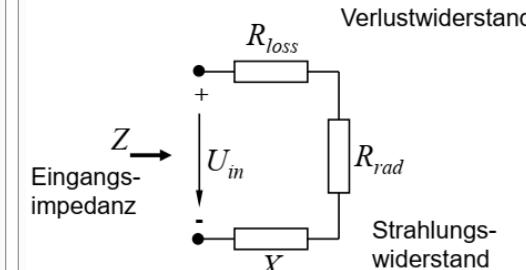
Ein Sektorstrahler mit scharfen Kanten kann auch nicht realisiert werden! Leistung wird über einen Sektor gleichmäßig verteilt:



## 6.3. Ersatzschaltbilder- Sendeantenne

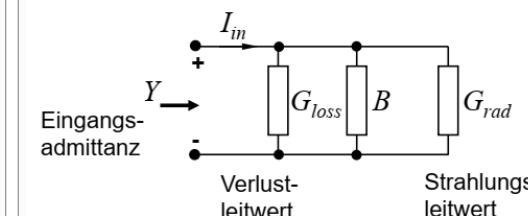
### Impedanz (Helmholtz-Thévenin)

#### Ersatzschaltung



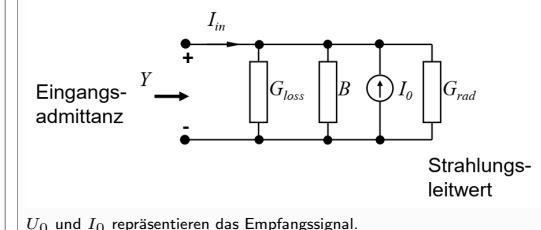
### Admittanz (Mayer-Norton)

#### Ersatzschaltung



### Admittanz (Mayer-Norton)

#### Ersatzschaltung



### 6.5. Strahlungscharakteristik

Die Strahlungscharakteristik für Empfangs- und Sendeantenne sind identisch. Dies folgt aus dem Reziprozitätstheorem:

$$C_t(\vartheta, \varphi) = C_r(\vartheta, \varphi)$$

Gewinn der Transmittantenne Tx:

$$G_t = \left( \frac{S}{S_I} \right)_{P_{t0}} \frac{g_t}{dBi} = 10 \lg G_t$$

Richtfaktor, Directivity von Tx:

$$D_t = \left( \frac{S}{S_I} \right)_{P_t} = \frac{1}{\eta} G_t \frac{d_t}{dBi} = 10 \lg D_t$$

Abgestrahlte Leistung von Tx:

$$P_t = \iint_{\text{Sphere}} S(\vartheta, \varphi) \cdot dA$$

$$P_t = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{\max} |C(\vartheta, \varphi)|^2 r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

Berechnung von D aus Strahlungscharakteristik C(theta, phi):

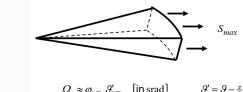
$$D = \frac{S_{\max}}{S_I} = \frac{S_{\max} 4\pi r^2}{P_t} \quad S_I = \frac{P_t}{4\pi r^2}$$

$$D = \frac{4\pi}{\iint |C(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = d\Omega$$

$$\iint |C(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \Omega_a \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_a}$$

$$D \approx \frac{4\pi}{\varphi_3 \text{ dB} \vartheta'_3 \text{ dB}}$$

Nimmt man den 3dB Abfall der Leistung als scharfe Grenze kann man ein Antennendiagramm in einen 3D-Sektorstrahler überführen.



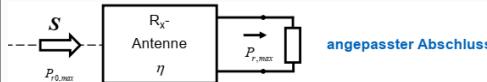
$$\Omega_a \approx \phi_{\max} \vartheta'_{\max} \text{ [in srad]}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G} - \xi$$

$$S(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} S_{\max} & \text{in } \Omega_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad D \approx \frac{4\pi}{\varphi_3 \text{ dB} \vartheta'_3 \text{ dB}}$$

## 6.6. Effektive Wirkfläche

Einer Antenne kann eine effektive Wirkfläche zugeordnet werden, da sie aus dem Poynting-Vektor gemäß der Wirkfläche Leistung zieht.  
 $P_{r,\max} = A_e S$ .



$$\text{Effektive Wirkfläche: } A_e = \frac{P_{r,\max}}{S}$$

$$A_e(\vartheta, \varphi) = A_{e,\max} |C_r(\vartheta, \varphi)|^2$$

Theoretische Wirkfläche (maximale Wirkfläche):

$$A_0 = \frac{P_{r,0,\max}}{S}$$

Maximale Empfangsleistung:  $P_{r,0,\max}$

Reziprozität:

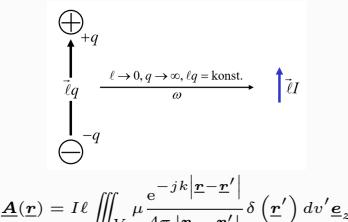
$$A_0(\vartheta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\vartheta, \varphi), A_e(\vartheta - \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\vartheta, \varphi) = \eta A_0(\vartheta, \varphi)$$

## 6.7. Hertz'scher Dipol

Es wird eine negative und eine positive Ladung im Abstand von  $\ell$  im Raum angebracht. Zusammen bilden die Ladungen einen elektrischen Dipol, der sich im Ursprung befindet. Für  $\ell \rightarrow 0$  und  $q \rightarrow \infty$ , aber  $\ell q = \text{konst}$  ergibt sich der ideale elektrische Dipol.

Der Hertz'sche Dipol ist ein idealer elektrische Dipol, welcher mit der Frequenz  $\omega$  oszilliert. Die oszillierenden Ladungen erzeugen einen Strom  $I = j\omega q$ . Somit ist die Amplitude des Hertz'schen Dipols  $\bar{I}\ell = j\omega q\ell$ .

$$\underline{J}(\underline{r}) = j\omega q\ell\delta(\underline{r})\underline{e}_z = I\ell\delta(\underline{r})\underline{e}_z$$



$$\underline{A}(\underline{r}) = \mu I\ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underline{e}_z$$

Komplette Lösung des elektrischen Feldes  $\underline{E}$  und magnetischen Feldes  $\underline{H}$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -j\omega \left( \underline{A} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \underline{A} \right) \\ &= Z_F k I \ell \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \left( \frac{1}{kr} + \frac{1}{jk^2 r^2} \right) \cos \vartheta \underline{e}_r \\ &\quad + j Z_F k I \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \vartheta \underline{e}_\vartheta \\ \underline{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} = jk I \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) \sin \vartheta \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

## 6.8. Hertz'scher Dipol - Fernfeld

Im Fernfeld gilt  $r \gg \lambda$  oder  $kr \gg 2\pi$ . Es können damit alle Terme mit  $1/r^2$  oder höher vernachlässigt werden. Das elektrische Feld  $\underline{E}$  und magnetische Feld  $\underline{H}$  im Fernfeld besitzen somit folgende Formen:

$$\underline{E} \approx 0\underline{e}_r + j Z_F k I \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \vartheta \underline{e}_\vartheta$$

$$\underline{H} \approx jk I \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \vartheta \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = Z_F k^2 \frac{|I|^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \vartheta \underline{e}_r$$

Effektiv bedeutet das, dass im Fernfeld  $\underline{E}$  und  $\underline{H}$  senkrecht aufeinander stehen und ein reiner Wirkleistungstransport stattfindet!

$\Delta\phi = 0^\circ$ ,  $\underline{E} \perp \underline{H}$ ,  $E_r = H_r = R_r = 0$ , reine Wirkleistung  
 Die Amplituden von elektrischen und magnetischen Feld sind über den Feldwellenwiderstand verknüpft:

$$E_\vartheta = Z_F H_\varphi$$

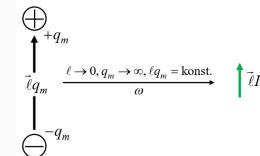
Für den Hertz'schen Dipol im Fernfeld lässt sich ein Strahlungswiderstand ermitteln. **Strahlungswiderstand**

$$R_r = \frac{2P}{|I|^2} = Z_F \frac{k^2 \ell^2}{6\pi} = 80\pi^2 \frac{\ell^2}{\lambda^2}$$

## 6.9. Fitzgerald Dipol

Der Fitzgerald Dipol ist das duale Element zum Hertzschen Dipol. Anstatt elektrischer Ladung werden hier zwei magnetische Ladungen  $q_m$  im Abstand von  $\ell$  im Raum angebracht. Die magnetische Stromdichte ist:  $I_m \ell$ .

$$\underline{M}(\underline{r}) = j\omega q_m \ell \delta(\underline{r}) \underline{e}_z = I_m \ell \delta(\underline{r}) \underline{e}_z$$



## Elektrisches Vektorpotential

$$\underline{F}(\underline{r}) = \epsilon I_m \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \underline{e}_z$$

Komplette Lösung des Feldes für Fitzgerald Dipol:

$$\underline{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \underline{F} = -jk I_m \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) \sin \vartheta \underline{e}_r$$

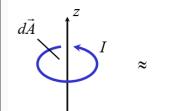
$$\begin{aligned} \underline{H} &= -j\omega \left( \underline{F} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \underline{F} \right) \\ &= \frac{k I_m \ell}{Z_F} \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \left( \frac{1}{kr} + \frac{1}{jk^2 r^2} \right) \cos \vartheta \underline{e}_r \\ &\quad + j \frac{k I_m \ell}{Z_F} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \vartheta \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

## 6.10. Äquivalenz Ringstrom - Stromelement

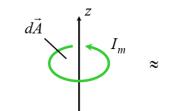
Ein elektrischer Ringstrom mit Amplitude  $I$ , welcher die Fläche  $A$  umschließt ist für:  $A \rightarrow 0$ ,  $I \rightarrow \infty$  und  $AI = \text{konst}$  äquivalent zu einem magnetischen Stromelement.

Analog ist ein magnetischer Ringstrom  $I_m$  äquivalent zu einem elektrischen Stromelement, wenn die Grafik wie unten gezeigt gilt:

$$I_m \bar{\ell} = j\omega \mu I d\bar{A}$$



$$I \bar{\ell} = j\omega \epsilon I_m d\bar{A}$$



Elektrisches und magnetisches Feld des elektrischen Stromelements sind:

$$\underline{E}(\underline{r}) = j Z_F k I \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

$$\left[ \left( \frac{2}{jkr} - \frac{2}{k^2 r^2} \right) \cos \vartheta \underline{e}_r + \left( 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \vartheta \underline{e}_\vartheta \right]$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = jk I \ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) \sin \vartheta \underline{e}_\varphi$$

## 6.11. Basics schonmal vorab für Altklausuren

$$P_R = P_0 (1 - |r|^2) G_t G_r \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2$$

$$G_{\text{dBi}} = 10 \lg(G/10)$$

$$S_{ij,\text{dB}} = 20 \lg(S_{ij}/10)$$

$$\frac{\lambda}{2}\text{-Dipol} \rightarrow G_r = 1,61$$

## 6.14. Empfangen

Empfangene Leistung (ohne Verluste)  $P_{r,0}$

$$P_r$$

$$C_r(\vartheta, \varphi) = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \Big|_{S=\text{konst.}}$$

$$A_0 = \frac{P_{r,0,\max}}{S} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_r$$

$$\text{effektive Wirkfläche (mit Verlusten)} \quad A_e = \frac{P_{r,\max}}{S} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

$$\eta_r = \frac{A_e}{A_0}$$

$$\text{effektive Wirkfläche } A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

Sendeantenne optimal ausgerichtet:

$$|C_t(\vartheta, \varphi)| = 1 \Rightarrow S(r, \vartheta, \varphi) = S_{\max}(r)$$

Empfangsantenne optimal ausgerichtet:

$$|C_r(\vartheta, \varphi)| = 1 \Rightarrow P_r = P_{r,\max}$$

Beispiel:

$$P_{r,\max} = A_e |C_r(\vartheta, \varphi)|^2 \frac{1}{4\pi r^2} |C_t(\vartheta, \varphi)|^2 G_t P_{t,0}$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \frac{1}{4\pi r^2} G_t P_{t,0}$$

$$= \frac{\lambda^2}{16\pi^2 r^2} G_r G_t P_{t,0}$$

Optimal ausgerichtet  $\rightarrow C_r$  und  $C_t = 1$

$$P_{RX} = \left( 1 - |r|^2 \right) P_0 G_{TX} G_{RX} \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2$$

## 6.12. Charakteristische Größen von Antennen

In den nachfolgenden Abschnitten gilt folgende Indizierung:

t:=Sendefall  
 r:=Empfangsfall,  
 0:=ohne Verluste,  
 max := Hauptstrahlrichtung/-empfangsrichtung.

## 6.13. Senden

Gesendete Leistung (ohne Verluste)  $P_{t,0}$

$$P_t$$

$$Gesendete Leistung \quad P_t = \frac{1}{2} |I_a|^2 R_r$$

$$Leistungsflossdichte \quad S(r, \vartheta, \varphi)$$

$$Leistungsflossdichte \quad S_i(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

(isotrop)

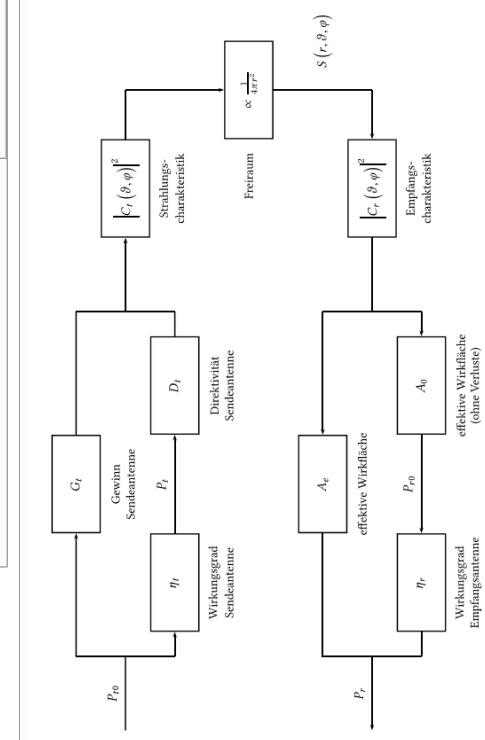
$$Strahlungscharakteristik \quad C_t(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} \Big|_{r=\text{konst}}$$

$$Direktivität \quad D_t = \frac{S_{\max}}{S_i} \Big|_{P_t} = \frac{4\pi r^2 S_{\max}}{P_t}$$

$$G_t = \frac{S_{\max}}{S_i} \Big|_{P_{t,0}} = \frac{4\pi r^2 S_{\max}}{P_{t,0}}$$

$$\eta_t = \frac{G_t}{D_t}$$

$$S(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2 Z_{F,0}} |E(\vartheta, \varphi)|^2$$



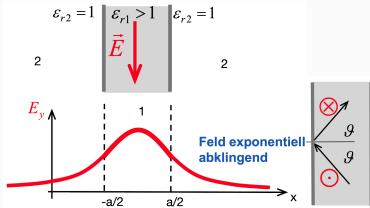
## 7. Tricks aus Altklausuren

### 7.1. Näherungen

$$w/2 \text{ sehr klein: } \int_{-w/2}^{w/2} f(x') dx' \approx wf(0)$$

Vergroßerung der Apertur führt in der Regel zu einer Vergrößerung der Richtwirkung.

### 7.2. Dielektrische Wellenleiter



Totalreflexion:  $\vartheta < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$  (Metall:  $\vartheta = 0$ )  
Wellenleitung ist nur im totalreflektierenden Bereich möglich

### E (TM) – Moden / Feldtypen H (TE) – Moden / Feldtypen

$$\psi_{E1,2} = \psi_{E1,2} e^{-\gamma_E z}$$

$$\psi_{H1,2} = \psi_{H1,2} e^{-\gamma_H z}$$

$$\gamma_E = j\beta$$

$$\gamma_H = j\beta$$

$$\Delta_i \psi_{E1,2} + (k_{1,2}^2 - \beta^2) \psi_{E1,2} = 0$$

$$\Delta_i \psi_{H1,2} + (k_{1,2}^2 - \beta^2) \psi_{H1,2} = 0$$

Grenz und Stetigkeitsbedingungen:

$$x = \pm \frac{a}{2} \rightarrow \underline{H}_1 \times \underline{e}_x = \underline{H}_2 \times \underline{e}_x \quad \underline{E}_1 \times \underline{e}_x = \underline{E}_2 \times \underline{e}_x$$

$$x \rightarrow \pm \infty \rightarrow \underline{H}_2 \rightarrow 0 \quad \underline{E}_2 \rightarrow 0$$

### 7.3. Dielektrische Wellenleiter: y-unabhängige und ungerade (in x) Moden Links TM, rechts TE

$$\begin{aligned} \psi_{E11} &= A \cos(k_x x) \\ \psi_{E12} &= B e^{-\alpha|x|} \\ \psi_{H11} &= A \cos(k_x x) \\ \psi_{H12} &= B e^{-\alpha|x|} \end{aligned}$$

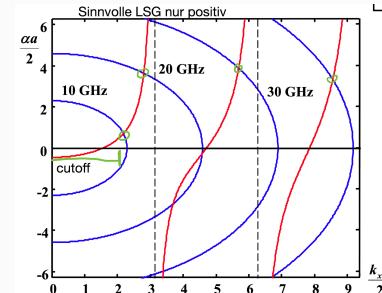
$$\begin{aligned} E_{x1} &= A \frac{k_x \beta}{\alpha \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \sin(k_x x) e^{-j\beta z} & E_{x2} &= 0 \\ E_{y1} &= 0 & E_{y2} &= -A \frac{k_x \beta}{\epsilon_0} \sin(k_x x) e^{-j\beta z} \\ E_{z1} &= A \frac{k_x^2 \epsilon_r - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \cos(k_x x) e^{-j\beta z} & E_{z2} &= 0 \\ E_{x1} &= A \frac{\beta k_x}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} \sin(k_x x) e^{-j\beta z} & H_{x2} &= \pm B \frac{\alpha \beta}{\alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} \\ H_{x1} &= 0 & H_{x2} &= 0 \\ H_{y1} &= A \frac{k_x}{\mu_0} \sin(k_x x) e^{-j\beta z} & H_{y2} &= 0 \\ H_{y1} &= \pm B \frac{\alpha}{\mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} & H_{y2} &= 0 \\ H_{z1} &= 0 & H_{z2} &= A \frac{k_x^2 \epsilon_r - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} \cos(k_x x) e^{-j\beta z} \\ H_{z1} &= B \frac{k_x^2 - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} & H_{z2} &= B \frac{k_x^2 - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_x^2 &= k_0^2 \epsilon_r - \beta^2 \\ \alpha^2 &= \beta^2 - k_0^2 \\ \alpha &= \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow k_x \frac{a}{2} \cot(k_x \frac{a}{2}) &= -\frac{\alpha a}{2} \epsilon_r \\ \alpha &= \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_x^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow k_x \frac{a}{2} \cot(k_x \frac{a}{2}) = -\alpha \frac{a}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_x^2}$$



$$f_c = \frac{n c_0}{2 a \sqrt{\epsilon_r - 1}} \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

### 7.4. Dielektrische Wellenleiter: y-unabhängige und gerade (in x) Moden Links TM, rechts TE

$$\begin{aligned} \psi_{E11} &= A \sin(k_x x) \\ \psi_{E12} &= \pm B e^{-\alpha|x|} \\ \psi_{H11} &= A \sin(k_x x) \\ \psi_{H12} &= \pm B e^{-\alpha|x|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{x1} &= -A \frac{k_x \beta}{\alpha \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \cos(k_x x) e^{-j\beta z} & E_{x2} &= 0 \\ E_{y1} &= 0 & E_{y2} &= A \frac{k_x}{\epsilon_0} \cos(k_x x) e^{-j\beta z} \\ E_{z1} &= 0 & E_{z2} &= -B \frac{\alpha}{\epsilon_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} \\ E_{x1} &= A \frac{k_x^2 \epsilon_r - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r} \sin(k_x x) e^{-j\beta z} & E_{x2} &= 0 \\ E_{y1} &= \pm B \frac{k_x^2 - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} & E_{y2} &= 0 \\ E_{z1} &= -A \frac{\beta k_x}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} \cos(k_x x) e^{-j\beta z} & E_{z2} &= -B \frac{\alpha \beta}{\alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} \\ H_{x1} &= 0 & H_{x2} &= 0 \\ H_{y1} &= 0 & H_{y2} &= 0 \\ H_{z1} &= -A \frac{k_x^2 \epsilon_r - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} \sin(k_x x) e^{-j\beta z} & H_{z2} &= \pm B \frac{k_x^2 - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} \\ H_{z1} &= B \frac{k_x^2 - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} & H_{z2} &= B \frac{k_x^2 - \beta^2}{j \alpha \epsilon_0 \mu_0} e^{-\alpha|x|} e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

$$k_x^2 = k_0^2 \epsilon_r - \beta^2$$

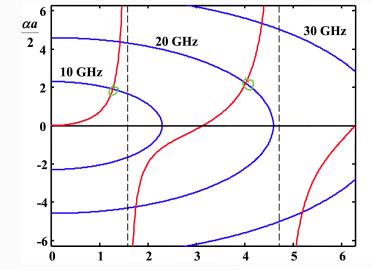
$$\alpha^2 = \beta^2 - k_0^2$$

$$\alpha = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_x^2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow k_x \frac{a}{2} \tan(k_x \frac{a}{2}) &= \frac{\alpha a}{2} \epsilon_r \\ \alpha &= \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_x^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow k_x \frac{a}{2} \tan(k_x \frac{a}{2}) = \alpha \frac{a}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_x^2}$$



$$f_c = \frac{v c_0}{a \sqrt{\epsilon_r - 1}} = \frac{n c_0}{2 a \sqrt{\epsilon_r - 1}} \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 0, 2, 4, 6, \dots$$