بسم الله الرحمن الرحيم

/ /

رامية نسبية:

* فرضيات النسبية الخاصة:

- القوانين الفيزيائية تكون نفسها في جميع الجمل العطالية (تسارع / تباطؤ ....)
- سرعة الضوء في الخلاء ثابتة في جميع الجمل العطالية مهما كانت سرعتها.

← التحويل بين مراقبين لا يتعلق إلا بالسرعة النسبية بينهما

← التحويل بين جملتين لحل مسائل الجملة.

* الحركة في النسبية الخاصة:

- تحويل لورنتز:

- معامل لورنتز: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- مصفوفات التحويل: طريقة أسهل لكتابة جميع المعادلات التحويلية معاً"

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

فيكون:

$$x = \gamma x' + \gamma\beta ct'$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \gamma(x' + vt')}$$

$$ct = \gamma\beta x' + \gamma ct'$$

$$= \gamma\left(\frac{v}{c}x' + ct'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)}$$

والمصفوفة المعاكسة تكون

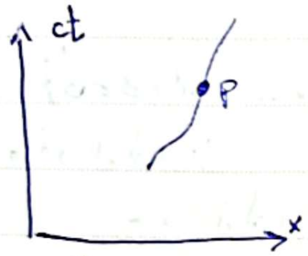
$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

حيث x و t هي الإحداثيات في جملة S، و x' و t' هي الإحداثيات لجملة S' تتحرك بسرعة v بالنسبة لـ S

١٠ الأحداث:

- الحدث هو أي شيء يرتبط بإحداثي زماني ومكاني (x, ct) وفي جملة أخرى متحركة بالنسبة للجملة الأولى تكون الحدث له إحداثيات مختلفة (x', ct') نحول بينها بتحويلات لورنتز.
- التفكير بمفهوم الأحداث سيسهل التعامل مع النسبية. (بدلاً من التعامل مع الاستمرار).

• مخططات مينكاوسكي:



الفواصل x والتراتيب ct.

نسمي مجموعة النقاط التي يمر بها جسم الـ (world line)

والحدث يكون نقطة منه. P مثلاً

- أي ~~جسم~~ فوتون يكون الـ world line الخاص به بزاوية 45° (واضحة)

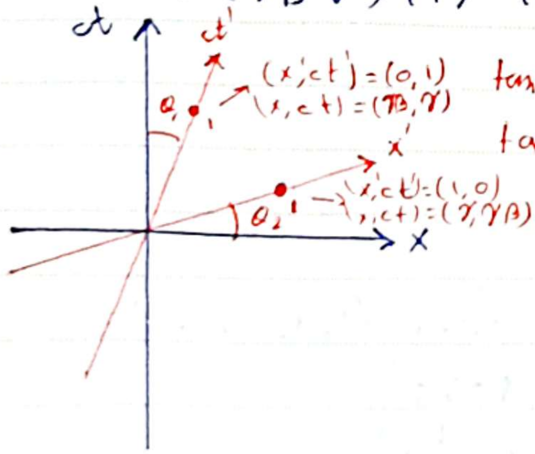
⟵ لتسهيل الحساب نختار مبدأ الزمان والمكان $(0,0)$ للجملتين ذاته.

▪ تحويل لورنتز بمخططات مينكاوسكي:

~~يمكن~~ يمكن أن نعرف الـ (1) من x' و (1) من ct'

أصبح بالإمكان رسم المخططين فوق بعضهما.

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix}$$



$\tan\theta_2 = \beta \qquad \theta_2 = \theta_1$

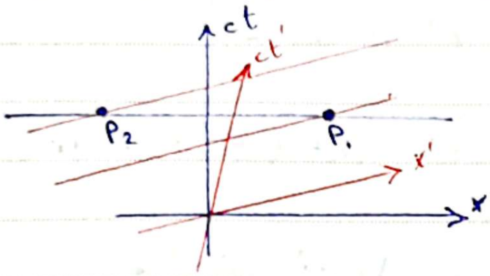
$\tan\theta_1 = \beta$

فيمكن استخدامها لحل المسائل هندسياً بإيجاد الإسقاطات.

/ /

P_1 و P_2

• التواقت: نقول عن حدثين أنهما متواقتين، إذا كان $t_1 = t_2$، يقعان على نفس الخط الموازي للمحور x.



P_1 و P_2 متواقتين في S
لكنهما غير متواقتين في S'
يمكننا الحصول على ذلك من تحويل لورنتز أيضاً

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ ct_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ ct \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ ct_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ct \end{pmatrix}$$

$$ct_2' = \gamma(ct - \beta x_2) \qquad ct_1' = \gamma(ct - \beta x_1)$$

$t_1 = t_2 = t$ إلا أن $t_2' \neq t_1'$

• تأخر الزمن / تمدد الزمن:

- لدينا حدثين P_1 و P_2 حدثا في نفس الـ x من جملة S لزمنين t_1 و t_2
ليكن $\Delta t = t_2 - t_1$ فإن $\Delta t' = t_2' - t_1'$

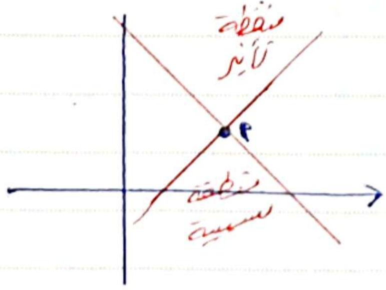
$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

• ~~تمدد~~ تقلص الأطوال

- لدينا حدثين P_1 و P_2 حدثا في نفس الـ t من جملة S لموضعين مختلفين x_1 و x_2
$\Delta x = x_2 - x_1$ وليكن $\Delta x' = x_2' - x_1'$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

• السببية والتأثر:
لا نحتاج لشرح، دمة تيكفي



• حجم الفضاء العامل الذي لا يتغير (بوحيد الكثير من المعاملات يستمر عليها لاحقاً.

- العامل الإضافي غير المتغير:

$$|\Delta S|^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$
$$= c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = const$$ (بغض النظر عن الحركة)

• إضافة السرعات:

$$\begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = c\,\frac{\gamma dx' + \gamma\beta c dt'}{\gamma\beta dx' + \gamma c dt'}$$

$$v = \frac{\gamma(v' + u)}{\gamma(\frac{v'u}{c^2} + 1)} = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}}$$

إذا كانت s' تتحرك بـ u بالنسبة لـ s

وكانت سرعة جسم a في s' v'، كانت سرعته بالنسبة لـ s هي:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}}$$

ملاحظات $v' = c \Leftarrow v = c$

$uv' \ll c^2 \Leftarrow v = u + v'$ (غاليليو)

☆

★ الديناميك والحركة في النسبية الخاصة

- الشعاع الرباعي : 4-Vector

يكون له ثلاث عناصر مكانية وعنصر زماني

مثال الشعاع الرباعي للإحداثيات هو (x, y, z, ict)

ممكن أن نكتب بعدة صور ، مثلاً (ct, x, y, z)

ويكون مداه السلمي مثل أي شعاع

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = const \text{ (لكل الجمل)}$$

له تعريف خاص لجداءه السلمي ليحقق ثباته

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = const$$

- أي تركيب خطي من أشعة رباعية هو شعاع رباعي.

+ الزخم الرباعي : 4-momentum

- أولاً : تذكر : $E = Pc = \frac{hc}{\lambda} = hf$

$P = \gamma m_0 v$

$E = \gamma m_0 c^2$

$E^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ i\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}.\underline{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \frac{E^2}{c^2}$$

$$= P^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{ثابت في كل الجمل}$$

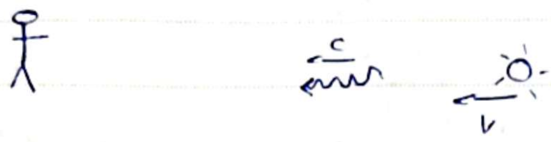
لذا إذا أخذنا جملة مركز الثقل $P_x = P_y = P_z = 0$ ، كان

$$\underline{P}\underline{P} = -m_0^2c^2$$

$$\Rightarrow P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2$$

$$p^2c^2 + m_0^2c^4 = E^2$$

• تأثير دوبلر النسبي :



نفرض أن النجم يصدر نبضتين متتاليتين بفارق $\Delta t'$ (في جملته)

$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'$

المسافة بين النبضتين أثناء مسيرهما نحو المراقب (بالنسبة للمراقب)

$$\Delta x = c\Delta t - v\Delta t = (c-v)\gamma\Delta t'$$

$$\Delta T = \frac{\Delta x}{c} = \frac{(c-v)\gamma\Delta t'}{c} = \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\Delta t'$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\Delta t' \Rightarrow f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,f'$$

$\beta > 0$ مقترب ⇐ زيادة تواتر ⇐ انزياح أزرق

$\beta < 0$ مبتعد ⇐ نقصان " ⇐ انزياح أحمر

• العجلة؟ : Rapidity ← الـ proper تسارع (التسارع في الجملة اللحظية)

التسارع:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

← التسارع لم يعد خطياً

نعرفه "العجلة": rapidity

$$\tanh\phi = \beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \cosh\phi$$

$$\gamma\beta = \sinh\phi$$

إذا كان لمركبة تسارع a ثابت

$$V(t+dt) = \frac{V(t) + a\,dt}{1 + \frac{V(t)\,a\,dt}{c^2}}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \frac{\cancel{V(t)} + a\,dt - \cancel{V(t)} - \frac{V^2\,a\,dt}{c^2}}{dt\left(1 + \frac{V a\,dt}{c^2}\right)}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a}{dt}\left(\frac{dt - \frac{V^2}{c^2}dt}{1 + \frac{Va}{c^2}dt}\right) = a\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$dV = a\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)dt \Longrightarrow \frac{dV}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = a\,dt$$

$$\cancel{c\,\tanh^{-1}\left(\frac{V}{c}\right) = a\,t}$$

$$\Longrightarrow c^2 \frac{dV}{c^2 - V^2} = at \Longrightarrow c^2 \frac{1}{c}\tanh^{-1}\left(\frac{V}{c}\right) = at$$

$$\Longrightarrow V = c\tanh\left(\frac{at}{c}\right)$$

$$\tanh\phi = \beta = \tanh\left(\frac{at}{c}\right)$$

$$\boxed{\phi = \frac{1}{c}\int_0^t a\,dt}$$

- نعوض ϕ ← نحصل على γ و $\gamma\beta$ و β . بدلالة الزمن

$$\cosh(\phi) \quad \sinh(\phi) \quad \tanh(\phi)$$

A- مفارقات:

1- مفارقة السلم ، شخص يركض بسلم طوله 3m على طوله بسرعة 0.8c يدخل به نحو حظيرة طولها 2m . تكون بابها مفتوحا" البداية:

١- أوجد γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{0.36}} = \frac{10}{6}$$

2- كم ترى الحظيرة طول السلم ، وطول الحظيرة

$$L_{\ell} = \frac{3.6}{10} = 1.8\ m$$
$$L_b' = 2m$$

3- كم يرى السلم طول السلم والحظيرة

$$L_{\ell}' = 3m$$
$$L_b = \frac{2.6}{10} = 1.2\ m$$

4- هل يمكن للحظيرة حجز السلم بنجاح؟

نعم

2- مفارقة التوأم ، معروف النص ، السؤال لماذا يرى من بقي على الأرض المسافر شاباً.

ـ المشكلة هنا ، أن كل الشخصين يرى الآخر هو المتحرك ويبرهن على سكون نفسه ، لكن هذا لو كان الشخصين في حالة عطالية ، وبمجرد أن [illegible] الشخصين أصبح قادراً أن يعرف أنه ليس في جملة عطالية فهو أصبح قادراً على معرفة أنه هو من تحرك ،

وقد قام المسافر بذلك حين تسارع عندما قام بقلب شعاع سرعته . للعودة إلى الأرض .

3- مفارقة ~~حركة~~ القطار

قطار طوله $2L$ يسير على سرعة $\gamma = 2$ ورصيف محطة القطار طوله L ، لمراقب على الرصيف طول القطار L لذا يمكنه ان يتسع للقطار ، لكن مراقب في القطار يرى الرصيف $\frac{L}{2}$.

كيف؟

- الفكرة هي في اختلاف التواقت ، قلت سابقاً فكر بالأحداث لأنها أسهل.

- الحدث الأول تماس مقدمة ~~الحركة~~ القطار مع مقدمة الرصيف والثاني ذيل القطار مع ذيل الرصيف .

في جملة الرصيف يحدثان معاً (متواقتان)

! لا انهما غير متواقتين في جملة القطار بل بينهما فارق

$\cancel{\beta^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$

$\beta^2 = \frac{3}{4}$

$$\Delta\tau = \frac{2L v \cancel{\gamma}}{c^2} = \frac{4Lv}{c^2}$$

المسافة المقطوعة في هذا الزمن

$$\Delta x = \frac{\cancel{the}\,\Delta\tau}{\gamma} = 2L\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{2}L = 1.5L$$

وهو الفرق بين طول القطار والرصيف وهو المطلوب .

تمارين :

1- مركبتان المسافة بينهما $L = 10^{12} \cdot 2.52\,m$ وسرعة كل منهما $V_1 = 0.6c$ و $V_2 = 0.8c$

a - كم بأخذان ليصطدمان في جملة

b - = = = في جملة V_2

-a

$$L = (V_1 + V_2)t$$

$$t = \frac{L}{V_1 + V_2} = \frac{2.52 \times 10^{12}}{1.4 \times 3 \times 10^8} =$$

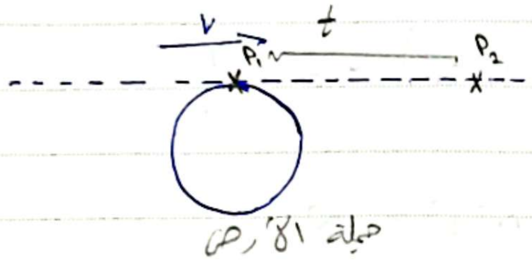
-b

$$V_1' = \frac{V_1 + V_2}{1 - \frac{V_1 V_2}{c}}$$

$$t = \frac{L}{\gamma_2 \left(\frac{V_1 + V_2}{1 - \frac{V_1 V_2}{c}}\right)}$$

2- مدرس فيزياء في مركبة فضائية بسرعة v، عندما يمر بالأرض ترسل إشارة لبدء الامتحان، تريد لطلابها أن تستمر بالامتحان لمدة T، متى يجب أن ترسل إشارة الانتهاء حتى يتوقف طلابها على الأرض بعد زمن T من البدء

الحل:



$$T = t + \frac{vt}{c}$$

$$t = \frac{T}{1+\beta}$$

في جملة المركبة

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, T$$

الجواب وكان ممكن إيجاده من دوبلر.

3- أوجد θ

$$\underline{P}_1 = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ mc \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}_1' = \begin{pmatrix} P'\cos\theta \\ P'\sin\theta \\ 0 \\ \left(\frac{E}{2c} + \frac{mc}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_2' = \begin{pmatrix} P'\cos\theta \\ -P'\sin\theta \\ 0 \\ \left(\frac{E}{2c} + \frac{mc}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$P = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}$$

$$\underline{P}_1'^{\,2} = -m^2c^2$$

$$\cancel{\frac{P^2}{2^2} - \frac{1}{4}\left(E^2 + 2Emc^2 + m^2c^2\right) = -m^2c^2}$$

$$\underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \underline{P}_1' + \underline{P}_2'$$

$$P'\cos\theta = \frac{P}{2}$$

$$E' = \frac{E}{2} + \frac{mc^2}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{P}_1' = \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ P\tan\theta \\ 0 \\ \frac{1}{2c}(E+mc^2) \end{pmatrix}$$

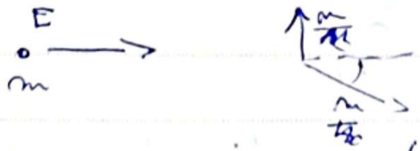
$$\frac{P^2}{4} + P^2\tan^2\theta - \frac{1}{4c^2}\left(E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4\right) = -m^2c^2$$

$$\frac{P^2}{4} + P^2\tan^2\theta - \frac{E^2}{4c^2} - \frac{Em}{2} - \frac{1}{4}m^2c^2 = -m^2c^2$$

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{E^2}{4c^2} - \frac{3}{4}m^2c^2 - \frac{P^2}{4}}{P^2}$$

$$= \frac{\frac{E^2}{4c^2} - \frac{3}{4}m^2c^2 - \frac{E^2}{4c^2} + \frac{m^2c^2}{4}}{\frac{E^2}{4c^2} - \frac{m^2c^2}{4}}$$

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{2}m^2c^4}{E^2 - mc^4} = \frac{m^2c^4}{E^2 - mc^4}$$



$? = e_1 , e_2$ — 4

$$\underline{P}_4 = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ E/c \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ P_1 \\ 0 \\ e_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{2x} \\ -P_{2y} \\ 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$P_{2x} = P$

$P_1 + P_{2y} = 0$

$E = e_1 + e_2$

$P_{2x} = P = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - M^2c^2}$

$\sqrt{P_{2y}^2 + P_{2x}^2} = P_2 = \sqrt{\frac{e_2^2}{c^2} - m_2c^2}$

$P_1 = \sqrt{\frac{e_1^2}{c^2} - m_1c^2}$

$$P_1^2 - P_2^2 = \frac{e_1^2 - e_2^2}{c^2}$$

$$\cancel{P_1^2} - P_{2x}^2 - \cancel{P_{2y}^2} = \frac{e_1^2 - e_2^2}{c^2}$$

$$P_{2x}^2 = \frac{e_1^2 - e_2^2}{c^2}$$

$$P^2 = \cancel{e_1 e_2} \cdot E(e_1 - e_2)$$

$$e_1 - e_2 = \frac{P^2 c^2 C^2}{E}$$

$$e_1 + e_2 = E$$

$$e_1 = \frac{P^2c^2}{2E} + \frac{E}{2}$$

$$e_2 = \frac{E}{2} - \frac{P^2c^2}{2E}$$

$$e_1 = \frac{E^2 - Mc^4 + E^2}{2E} = E - \frac{Mc^4}{2E}$$

$$e_2 = \frac{E^2 - E^2 + Mc^4}{2E} = \frac{Mc^4}{2E}$$

5 - جسم mo يسير بسرعة بحيث طاقته الآلية ضعف السكونية
ويصدم جسم mo ساكن ليندمجان ويشكلان جسم واحد
أوجد كتلة الجسم الجديد

$$E_1 = 2m_oc^2 \qquad E_2 = m_oc^2$$

$$P_1 = \sqrt{4m_o^2c^2 - m_o^2c^2} = m_oc\sqrt{3} \qquad P_2 = 0$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} m_oc\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 2m_oc^4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_oc \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P} \Rightarrow \begin{array}{l} P = \sqrt{3}\, m_oc \\ E = 3m_oc^2 \end{array}$$

$$P^2c^2 = E^2 - M^2c^4$$

$$M^2 = \frac{9m_o^2c^4 - 3m_o^2c^4}{c^4}$$

$$M = m_o\sqrt{6}$$

6- صاروخ يتحرك من نقطة A إلى B بزمن t_1 ومسافة d_1 في جملة
جملة ساكنة بالنسبة لـ A و B ترى t_2 و d_2 ، اربط t_1 و t_2 ، d_1 و d_2
وأوجد سرعة الصاروخ

$$\begin{pmatrix} d_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ ct_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{P}{E} = \frac{V}{c^2}$$

/ /

مسائل نسبية زيادة :

اولش ملاحظة: اذا اعطاني بشوف شو بدو بجملته proper acc. elsewhere

$$a'_x = \frac{a_{px}}{\gamma^3} \qquad a'_y = \frac{a_{py}}{\gamma^2}$$

اذا الشي متحرك بحلة v

$$a'_x = \frac{a}{\gamma^3\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^3}$$

- جسم بدور في حلقة بسرعة u ونصف قطر r

اوجد تسارعه في حلقة خارجية

$$\boxed{a'_y = \gamma^2 \frac{u^2}{r}}$$