تدريب التفاضل و التكامل

الألمبياد العلمي السوري

الفريق الوطني للفيزياء

علي شميس

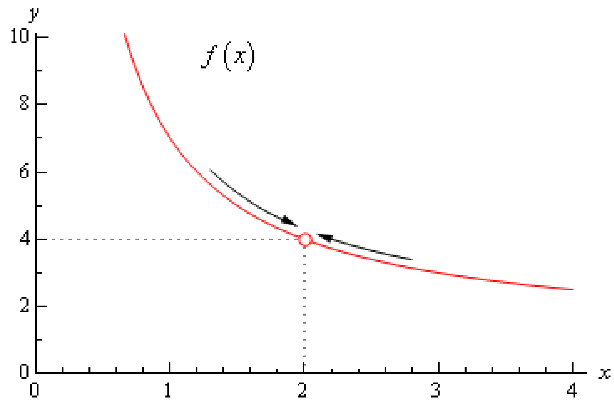
هذا الملف مخصص للمراجعة و القراءة السريعة لذلك يجب أن تدرس التفاضل و التكامل بعمق أكثر من باقي الملفات

التفاضل والتكامل :

التفاضل والتكامل هو أحد أعمدة الرياضيات الحديثة، ويُستخدم في تحليل الظواهر الطبيعية، الاقتصادية، والهندسية. نشأ هذا الفرع من الرياضيات في القرن السابع عشر على يد نيوتن ولايبنتز، وقد تطور ليصبح أداة لا غنى عنها في فهم العالم من حولنا. يُستخدم التفاضل لفهم كيفية تغير الكميات، بينما يُستخدم التكامل لتجميع هذه التغيرات وتحليلها. يُعد هذا المجال أساسًا لفروع متعددة مثل الفيزياء النظرية، الإحصاء، الذكاء الاصطناعي، وحتى علوم الحياة، حيث يُستخدم في نمذجة العمليات الحيوية مثل تدفق الدم أو انتشار الفيروسات.

النهايات :

النهاية هي مفهوم أساسي في التفاضل والتكامل، وتُستخدم لتحديد سلوك التابع عند اقتراب المتغير من قيمة معينة، حتى لو لم يكن التابع معرف عند تلك النقطة, أي بمعنى آخر النهاية هي سلوك التابع عندما يقترب من رقم معين بينما قد يعطي التابع قيمة محددة عند قيمة ما للمتغير و لكن بالإقتراب من التابع قد يعطي سلوكا مختلفا جدا عندما لا ياخذ المتغير هذه القيمة تماما بل يأخذ قيم مجاورة. تُستخدم النهايات في تعريف المشتق والتكامل، كما أنها ضرورية لفهم الاستمرارية والاستقلال في التوابع. من خلال النهايات، يمكننا التحقق من وجود فجوات أو قفزات في التابع، مما يساعد في تحليل سلوكه بدقة.



مثال: نهاية تابع غير معرفة عند نقطة

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

عند $x = 1$، يكون التابع غير معرف لأن المقام يصبح صفراً. لكن بتحليل البسط:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

نلغي العامل المشترك $x - 1$، وبجميع قيم $x \neq 1$، يصبح التابع ببساطة $f(x) = x + 1$. إذاً:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

هذا المثال يُظهر كيف يمكن استخدام التحليل الجبري لفهم سلوك التابع عند نقطة غير معرفة، ويُبرز أهمية النهايات في تجاوز العقبات الظاهرية في التعريف الجبري.

لكن و رغم ذلك يجب أن نعلم أن كون التابع غير معرف عند عذه النقطو يعني أنه ليس له قيمة عندها, و لكن بالإقتراب منها نرى أن له قيم تقترب من النهاية و هي ال 2

مثال مهم: نهاية مثلثية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

هذه النهاية تُستخدم كثيراً في حساب مشتقات التوابع المثلثية، وهي نتيجة أساسية في التحليل الرياضي، وتُعد من اللبنات الأساسية في إثبات العديد من النظريات المتعلقة بالتوابع الدورية.

حساب النهايات:

- **التعويض المباشر:** إذا كانت التابع معرفة عند النقطة، يمكن تعويض قيمة المتغير مباشرة.
- **التبسيط الجبري:** إذا كان التعويض المباشر يعطي شكل غير محدد مثل $\frac{0}{0}$، يمكن تبسيط التعبير الجبري.
- **التحليل إلى عوامل:** تحليل البسط والمقام إلى عوامل قد يُزيل الشكل غير المحدد.
- **القوانين الخاصة:** مثل $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- **الحصر:** إذا كانت لدينا ثلاث توابع $f(x)$, $g(x)$, و $h(x)$ بحيث:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

لكل x في مجال معين حول a وكانت:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

فإنه يمكننا القول:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

- **قاعدة لوبيتال:** عندما نحاول حساب نهاية تابع وتعطينا شكلًا غير محدد مثل:

$$\frac{0}{0} \quad \text{أو} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

يمكننا استخدام قاعدة لوبيتال، والتي تنص على أنه إذا كانت التابعان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق في مجال حول النقطة a، وكان:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ أو } \frac{\infty}{\infty}$$

فإنه يمكننا كتابة:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بشرط أن تكون النهاية في الطرف الأيمن موجودة.

مثال :

احسب:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

الحل: بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\frac{0}{0} \quad \text{شكل غير محدد}$$

نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

النتيجة: النهاية تساوي 1

مثال : استخدام الحصر لحساب نهاية

احسب:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

مثال : نهاية باستخدام قاعدة خاصة

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

هذه نهاية مشهورة تُستخدم كثيراً في حساب المشتقات.

تمارين النهايات:

-1

A.1 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to 2}(8 - 3x + 12x^2)$$

الجواب: $8 - 3(2) + 12(2)^2 = 8 - 6 + 48 = 50$

-2

A.2 احسب النهاية:

$$\lim_{t\to -3} \frac{6 + 4t}{t^2 + 1}$$

الجواب: $\frac{6+4(-3)}{(-3)^2+1} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$

-3

A.3 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x^2+2x-15}$$

الجواب: تحليل البسط والمقام:

$$\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-3)} = \frac{x-5}{x-3} \Rightarrow \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}$$

-4

A.4 احسب النهاية:

$$\lim_{z\to 8} \frac{2z^2-17z+8}{8-z}$$

الجواب: التعويض المباشر يعطي:

$$\frac{2(64)-136+8}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{شكل غير محدد}$$

نقوم بالتحليل:

$$\frac{(2z-1)(z-8)}{8-z} = \frac{-(2z-1)}{1} = -(2z-1) \Rightarrow -(2(8)-1) = -15$$

-5

A.5 احسب النهاية:

$$\lim_{y\to 7} \frac{y^2-4y-21}{3y^2-17y-28}$$

الجواب: تحليل البسط والمقام:

$$\frac{(y-7)(y+3)}{(3y+4)(y-7)} = \frac{y+3}{3y+4} \Rightarrow \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

-6

A.6 احسب النهاية:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(6+h)^2-36}{h}$$

الجواب:

$$\frac{36+12h+h^2-36}{h} = \frac{12h+h^2}{h} = 12+h \Rightarrow 12$$

-7

A.7 احسب النهاية:

$$\lim_{z\to 4}\frac{\sqrt{z}-2}{z-4}$$

الجواب: شكل غير محدد، نضرب بالمرافق:

$$\frac{\sqrt{z}-2}{z-4}\cdot\frac{\sqrt{z}+2}{\sqrt{z}+2}=\frac{z-4}{(z-4)(\sqrt{z}+2)}=\frac{1}{\sqrt{z}+2}\Rightarrow\frac{1}{4}$$

-8

A.8 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{2x+22}-4}{x+3}$$

الجواب: شكل غير محدد، نضرب بالمرافق:

$$\frac{\sqrt{2x+22}-4}{x+3}\cdot\frac{\sqrt{2x+22}+4}{\sqrt{2x+22}+4}=\frac{(2x+22-16)}{(x+3)(\sqrt{2x+22}+4)}=\frac{2x+6}{(x+3)(\sqrt{2x+22}+4)}\Rightarrow\frac{-6}{6\cdot 4}=-\frac{1}{4}$$

-9

A.9 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x+9}{1}$$

الجواب: التعويض المباشر:

$$0-0+9=9$$

-10

التابع المعرفة:

$$f(x)=\begin{cases}7-4x & x<1\\ x^2+2 & x\geq 1\end{cases}$$

A.10 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to -6}f(x)$$

الجواب: لأن $x<1\Rightarrow f(x)=7-4x\Rightarrow 7-4(-6)=31$

-11

التابع المعرفة:

$$f(x) = \begin{cases} 7-4x & x<1 \\ x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

A.11 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

الجواب:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 7-4(1) = 3, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^2+2 = 3 \Rightarrow \text{ النهاية موجودة وتساوي }3$$

-12

التابع المعرفة:

$$h(z) = \begin{cases} 6z & z \leq -4 \\ 1-9z & z > -4 \end{cases}$$

A.12 احسب النهاية:

$$\lim_{z\to 7} h(z)$$

الجواب: لأن $z > -4 \Rightarrow h(z) = 1-9z \Rightarrow 1-9(7) = -62$

-13

A.13 احسب النهاية:

$$\lim_{z\to -4} h(z)$$

الجواب:

$$\lim_{z\to -4^-} h(z) = 6(-4) = -24, \quad \lim_{z\to -4^+} h(z) = 1-9(-4) = 37 \Rightarrow \text{ النهاية غير موجودة}$$

-14

A.14 احسب النهاية:

$$\lim_{x\to 5}(10+|x-5|)$$

الجواب:

$$|x-5|\to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 5}(10+|x-5|)=10$$

-15

A.15 احسب النهاية:

$$\lim_{t\to -1}\frac{t+1}{|t+1|}$$

الجواب:

$$\lim_{t\to -1^-}\frac{t+1}{|t+1|}=\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}=-1,\quad \lim_{t\to -1^+}\frac{t+1}{|t+1|}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=1\Rightarrow \text{النهاية غير موجودة}$$

-16

A.16 معطى أن:

$$x^3-6x^2+12x-3\le f(x)\le x^2-4x+9,\quad \text{لـ}\, x\le 3$$

احسب:

$$\lim_{x\to 2}f(x)$$

الجواب:

$$\lim_{x\to 2}x^3-6x^2+12x-3=8-24+24-3=5,\quad \lim_{x\to 2}x^2-4x+9=4-8+9=5$$

$$\Rightarrow \text{باستخدام نظرية الحصر:}\ \lim_{x\to 2}f(x)=5$$

-17

A.17 استخدم نظرية الحصر لحساب:

$$\lim_{x\to 0}x^4\sin(\pi x)$$

الجواب:

$$-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1 \Rightarrow -x^4 \leq x^4 \sin(\pi x) \leq x^4 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^4 \sin(\pi x) = 0$$

-18

A.18 احسب النهاية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$$

الجواب:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5\sin(5x)}{5x} = 5$$

-19

A.19 احسب النهاية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$$

الجواب:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

-20

A.20 احسب النهاية:

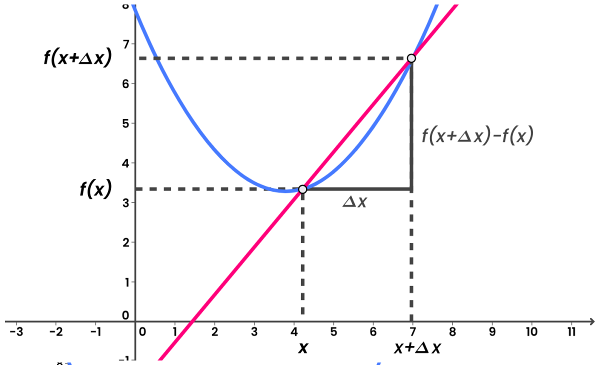
$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(4x)}{x^2}$$

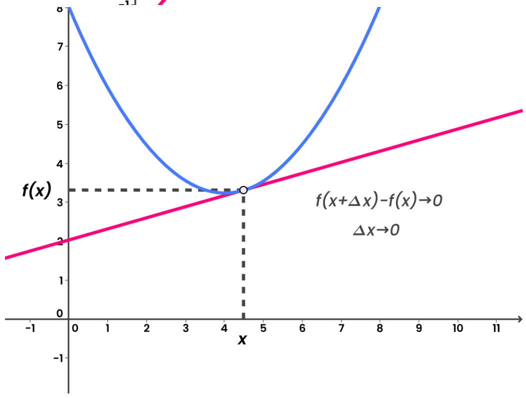
الجواب:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(4x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(2x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sin^2(2x)}{4x^2} = 4$$

المشتقات :

المشتق يعبر عن معدل التغير اللحظي للتابع، وهي أداة قوية لفهم كيفية تغير الكميات في الزمن أو المكان. تُستخدم المشتقات في الفيزياء لحساب السرعة والتسارع، وفي الاقتصاد لتحليل التغيرات في الأسعار أو الإنتاج، وفي الهندسة لتحديد ميل الأسطح والمنحنيات. كما تُستخدم في علم الأحياء لفهم معدلات النمو والانحدار في الكائنات الحية، وفي علوم الحاسوب لتحسين أداء الخوارزميات عبر تحليل تغيرات الأداء.
نقول عن المشتق أنه يمثل ميل المماس لنقطة ما من التابع و أنه أيضا يمثل معدل (سرعة) تغير التابع عند هذه النقطة





تعريف:
إذا كانت $f(x)$ تابع قابل للاشتقاق، فإن مشتقتها تُعرف بـ:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \equiv \frac{dy}{dx}$$

حيث نرى أن dy تمثل التغير الحاصل في قيم التابع مقسوما على dx و التي تمثل تغيرا حاصلا على المتغير و من الرسمك نجد أنها فعلا تمثل ميل (tan) المماس للخط.
هذا التعريف يُظهر كيف يحسب المشتق باستخدام الفرق بين قيم التابع عند نقطتين متقاربتين، ويُعد أساسًا لفهم الحركة والتغير في النظم الديناميكية.

و من هذا التعريف يمكننا من خلال التعويض أن نوجد مجموعة قوانين الإشتقاق التي سنقدمها لاحقا كمبرهنات, يمكنك إثباتها بنفسك و للمساعدة حاول اللجوء إلى تجاهل الحدود الصغيرة جدا عندما تصبح معرقلة لحساباتك و تأكد أن تجاهلها منطقي عندما تفعل ذلك.

مثال: مشتق تابع كثير حدود

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2hx - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx}{h} = 2x$$

حيث أهملنا الحد h^2 لأنه إذا كان h صغيرا جدا فإن مربعه أصغر برتبتين و التالي يمكن تجاهله (يمكنك رؤية أن التربيع يجعل الأعداد الصغير أصغر بتربيع 0.1 لتجد أنه أصبح 0.01)
عند $x = 3$، يكون الميل 6، مما يعني أن التابع يرتفع بمعدل ست واحدات لكل تغير بواحدة في المتغير عند هذه القيمة للمتغير. هذا المثال يُظهر كيف تُستخدم المشتقات لفهم سلوك التوابع التربيعية، ويُستخدم في تطبيقات مثل تصميم المنحنيات في الرسوم الهندسية.

مثال: مشتق تابع مثلثي

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sin(x)cos(h) + sin(h)cos(x) - sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sin(h)}{h} cos(x) = \cos(x)$$

عند $x = \frac{\pi}{2}$، يكون الميل صفراً لأن $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. هذا يُشير إلى أن منحنى التابع يكون أفقياً عند تلك النقطة، وهو أمر مهم في دراسة الحركة الدورية والاهتزازات.

قواعد الاشتقاق :

قواعد الاشتقاق تُسهل عملية حساب المشتقات للتوابع المعقدة، وتُستخدم لتفكيك التوابع المركبة إلى عناصر أبسط. هذه القواعد تُعد أدوات أساسية في التحليل الرياضي، وتُستخدم في حل المعادلات التفاضلية، و هي جميعا مستنتجة من العلاقة التعريفية.

قواعد أساسية:

- قاعدة القوة: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
- قاعدة الضرب: $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$
- قاعدة القسمة: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
- قاعدة السلسلة: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- مشتق اللوغاريتم: $\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}$
- مشتق التابع الأسي: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

مثال: اشتقاق تابع مركب

$$f(x) = \ln(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

مثال: اشتقاق حاصل ضرب

$$f(x) = x^2e^x \Rightarrow f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

القيم القصوى و لدنيا للتابع على مجال:

نقطة التحول هي النقطة التي يتغير فيها شكل تقعر التابع من تقعر للأعلى إلى تقعر للأسفل أو العكس. رياضياً، تحدث نقطة التحول عندما:

$f''(x) = 0$ ويكون هناك تغير في إشارة $f''(x)$

أي أن المشتق الثاني ينعدم، ويجب التأكد من تغير الإشارة حول تلك النقطة.

مثال 1: تابع كثير حدود

لتكن:

$$f(x) = x^3$$

نحسب المشتق الثاني:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

نحل:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نلاحظ أن:
- عندما $x < 0$، فإن $f''(x) < 0 \Rightarrow$ تقعر للأسفل
- عندما $x > 0$، فإن $f''(x) > 0 \Rightarrow$ تقعر للأعلى
إذن:

$$x = 0 \quad \text{نقطة تحول}$$

مثال 2: تابع جبري

لتكن:

$$f(x) = x^4 - 4x^2$$

نحسب المشتق الثاني:

$$f'(x) = 4x^3 - 8x, \quad f''(x) = 12x^2 - 8$$

نحل:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

نقوم باختبار تغير الإشارة حول هذه القيم، فنجد أن الإشارة تتغير بالفعل، وبالتالي:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{نقطتا تحول}$$

معادلة المماس و التقريب الخطي:

معادلة المماس: إذا كان لدينا تابع قابل للاشتقاق $f(x)$ عند النقطة $x = a$، فإن معادلة المماس لمنحنى التابع عند تلك النقطة تُعطى بالعلاقة:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

وهي تمثل الخط المستقيم الذي يلامس المنحنى عند النقطة $(a, f(a))$ ويأخذ نفس الميل $f'(a)$.

التقريب الخطي: يُستخدم هذا التعبير أيضًا لتقريب قيمة التابع $f(x)$ عندما يكون x قريبًا من a. فنقول أن:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

وهذا يُعرف بالتقريب الخطي، لأنه يُقرب التابع غير الخطي بخط مستقيم حول النقطة a.

مثال:

لتقريب $\sqrt{4.1}$ باستخدام التقريب الخطي عند $a = 4$:
نأخذ $f(x) = \sqrt{x}$, إذاً:

$$f(4) = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f(4.1) \approx f(4) + f'(4)(4.1 - 4) = 2 + \frac{1}{4}(0.1) = 2.025$$

وهذا تقريب جيد للقيمة الحقيقية $\sqrt{4.1} \approx 2.0249$.

تمارين الاشتقاق :

1-

A.1 أوجد مشتق التابع:

$$f(x) = 6x^3 - 9x + 4$$

الجواب: $f'(x) = 18x^2 - 9$

2-

A.2 أوجد مشتق التابع:

$$y = 2t^4 - 10t^2 + 13$$

الجواب: $y' = 8t^3 - 20t$

3-

A.3 أوجد مشتق التابع:

$$g(z) = 4z^7 - 3z - 7 + 9z$$

الجواب: $g'(z) = 28z^6 + 6$

-4

A.4 أوجد مشتق التابع:

$$h(y) = y^{-4} - 9y^{-3} + 8y^{-2} + 12$$

الجواب: $h'(y) = -4y^{-5} + 27y^{-4} - 16y^{-3}$

-5

A.5 أوجد مشتق التابع:

$$y = \sqrt{x+8} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x}$$

الجواب: باستخدام قاعدة الضرب والمشتقات للقوى الكسرية:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x} + \sqrt{x+8} \cdot \frac{1}{3(x-2)^{2/3}} \cdot \sqrt[4]{x} + \sqrt{x+8} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot \frac{1}{4x^{3/4}}$$

-6

A.6 أوجد مشتق التابع:

$$f(x) = 10x^{3/5} - x^{7/2} + 6x^{8/3} - 3$$

الجواب:

$$f'(x) = 6x^{-2/5} - \frac{7}{2}x^{5/2} + 16x^{5/3}$$

-7

A.7 أوجد مشتق التابع:

$$f(t) = \frac{4t-1}{6t^3 + 8t^5}$$

الجواب: باستخدام قاعدة القسمة:

$$f'(t) = \frac{(4)(6t^3 + 8t^5) - (4t-1)(18t^2 + 40t^4)}{(6t^3 + 8t^5)^2}$$

8-

A.8 أوجد مشتق التابع:

$$R(z) = \frac{6\sqrt{z^3+1}}{8z^4 - \frac{1}{3}z^{10}}$$

الجواب: باستخدام قاعدة القسمة وسلسلة المشتقات:

$$R'(z) = \frac{6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{z^3+1}} \cdot 3z^2 \cdot (8z^4 - \frac{1}{3}z^{10}) - 6\sqrt{z^3+1} \cdot (32z^3 - \frac{10}{3}z^9)}{(8z^4 - \frac{1}{3}z^{10})^2}$$

9-

A.9 أوجد مشتق التابع:

$$z = x(3x^2 - 9)$$

الجواب: باستخدام قاعدة الضرب:

$$z' = 1 \cdot (3x^2 - 9) + x \cdot (6x) = 3x^2 - 9 + 6x^2 = 9x^2 - 9$$

10-

A.10 أوجد مشتق التابع:

$$g(y) = (y-4)(2y + y^2)$$

الجواب: باستخدام قاعدة الضرب:

$$g'(y) = (1)(2y + y^2) + (y-4)(2+2y) = 2y + y^2 + (y-4)(2+2y)$$

11-

A.11 أوجد مشتق التابع:

$$h(x) = \frac{4x^3 - 7x + 8}{x}$$

الجواب: باستخدام قاعدة القسمة:

$$h'(x) = \frac{(12x^2 - 7)(x) - (4x^3 - 7x + 8)(1)}{x^2}$$

-12

A.12 أوجد مشتق التابع:

$$f(y) = \frac{y^5 - 5y^3 + 2y}{y^3}$$

الجواب: تبسيط أولًا:

$$f(y) = y^2 - 5 + \frac{2}{y^2} \Rightarrow f'(y) = 2y - \frac{4}{y^3}$$

-13

A.13 حدد أين تكون التابع:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 48x + 2$$

غير متغيرة (أي مشتقتها صفر).

الجواب:

حل المعادلة لإيجاد النقاط الثابتة $f'(x) = 3x^2 + 18x - 48 = 0 \Rightarrow$

-14

A.14 حدد أين تكون التابع:

$$y = 2z^4 - z^3 - 3z^2$$

غير متغيرة.

الجواب:

حل المعادلة لإيجاد النقاط الثابتة $y' = 8z^3 - 3z^2 - 6z = 0 \Rightarrow$

-15

A.15 أوجد معادلة المماس للتابع:

$$g(x) = 16x - 4\sqrt{x}$$

عند $x = 4$

الجواب:

$$g'(x) = 16 - \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow g'(4) = 16 - 1 = 15 \Rightarrow \text{:المماس} y - g(4) = 15(x-4)$$

-16

A.16 أوجد معادلة المماس للتابع:

$$f(x) = 7x^4 + 8x - 6 + 2x$$

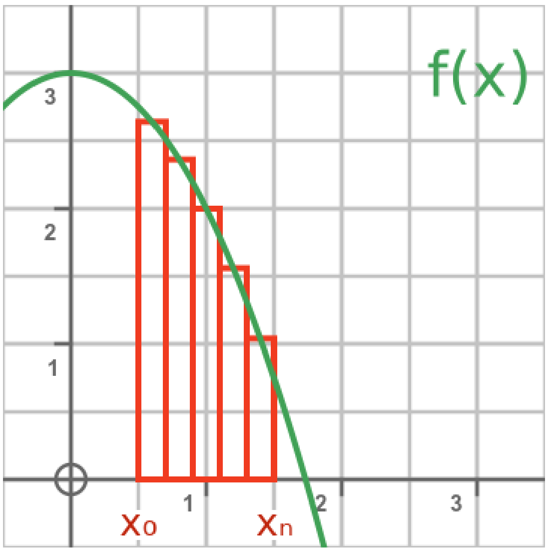
عند $x = -1$

الجواب:

$$f'(x) = 28x^3 + 10 \Rightarrow f'(-1) = -28 + 10$$

التكاملات :

ربما فكرت مسبقا أنه كيف يمكننا حساب الانتقال باستخدام $x = vt$ لسرعة متغيرة, فالحل هنا هو أن نأخذ قيمة محددة ل v و نعتبرها ثابتة لفترة قصيرة جدا تكون كافية لكي نعتبر أنها لم تتغير dt و نحسب $dx = vdt$ حيث dx هو التغير الضئيل الذي حدث في هذ الزمن الضئيل ثم نزيد السرعة قليلا بعد هذا الزمن و نعيد حساب التغير الضئيل في الموضع ثم نجمعه مع التغير السابق ,
لاحظ أنه بفعل ذلك نحن نقوم بجمع مساحات المستطيلات الصغيرة الموضحة في الشكل.



و بالمثل فإن التكامل يُستخدم لحساب المساحات، الحجوم، والعمل الفيزيائي، وهو أداة لا غنى عنها في تحليل الظواهر المستمرة. التكامل غير المحدد يُعطي تابع أصلي، بينما التكامل المحدد يُعطي قيمة عددية تُعبر عن مجموع التغيرات. يُستخدم التكامل أيضًا في معالجة الإشارات، وفي تحليل الصور، وفي حساب الطاقة المستهلكة أو المنتجة في الأنظمة الفيزيائية.

نظرية أساسية:
إذا كانت $F(x)$ هو التابع الأصلي لـ $f(x)$، فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

وهذا يُعرف بـ **نظرية أساسية في التفاضل والتكامل**، وهي تربط بين الاشتقاق والتكامل، وتُستخدم لحساب القيم الدقيقة للتكاملات المحددة.

حساب التكامل :

لحساب التكاملات، يمكن استخدام الطرق التالية:

- **التكامل المباشر:** عندما تكون التابع بسيطة ومعروفة، نستخدم القوانين الأساسية.

التابع	التكامل	ملاحظات
$\int a\,dx$	$ax + C$	a عدد ثابت
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$	تابع لوغاريتمية
$\int e^x\,dx$	$e^x + C$	تابع أسية
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$	تابع مثلثية
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$	تابع مثلثية
$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x + C$	مشتق $\tan x$
$\int \csc^2 x\,dx$	$-\cot x + C$	مشتق $\cot x$
$\int \sec x \tan x\,dx$	$\sec x + C$	مشتق $\sec x$
$\int \csc x \cot x\,dx$	$-\csc x + C$	مشتق $\csc x$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\sin^{-1} x + C$	تابع عكسية مثلثية
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\tan^{-1} x + C$	تابع عكسية مثلثية
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$\sec^{-1} x + C$	تابع عكسية مثلثية

جميع هذه القوانين مستنتجة من مجموع ريمان, و يطلب منك البحث عنه و التعرف عليه و فهمه كفكرة.

- **التكامل بالتعويض:** يُستخدم عندما تحتوي التابع على تركيب داخلي. نُغير المتغير لتبسيط التكامل.

$$u = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)\,dx$$

وبالتالي يتحول التكامل إلى:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

مثال :

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx$$

نقوم بالتعويض:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

فيصبح التكامل:

$$\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

- **التكامل بالتجزئة:** يُستخدم عندما تكون التابع حاصل ضرب تابعين. نطبق قاعدة التجزئة:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال : تكامل غير محدد مباشر

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

مثال : تكامل محدد

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

مثال : تكامل بالتعويض

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx$$

نضع $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$, فيصبح:

$$\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

مثال : تكامل بالتجزئة

$$\int x\sin(x)\,dx$$

نأخذ $u = x \Rightarrow du = dx$, و $dv = \sin(x)\,dx \Rightarrow v = -\cos(x)$, فنحصل على:

$$-x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

مثال: تكامل غير محدد

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

حيث C هو ثابت التكامل، ويُعبر عن جميع التوابع التي لها نفس المشتق، مما يُظهر الطبيعة العائلية للحلول في التكامل.

يمكن استخدام التكاملات لحساب المساحات و الحجوم , فببساطة الرسم في بداية الفصل نلاحظ أن يمسح المساحة بين التابع و المحور الأفقي, و يمكننا إستخدام ذلك لحساب مساحات و حجوم.

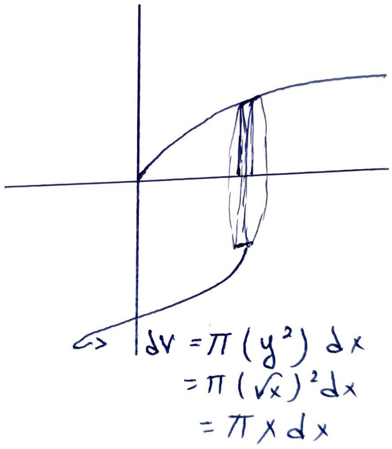
مثال 1 : حساب مساحة تحت المنحنى

نحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$:

$$\text{المساحة} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

مثال 2 : حساب حجم الدوران باستخدام طريقة الأقراص

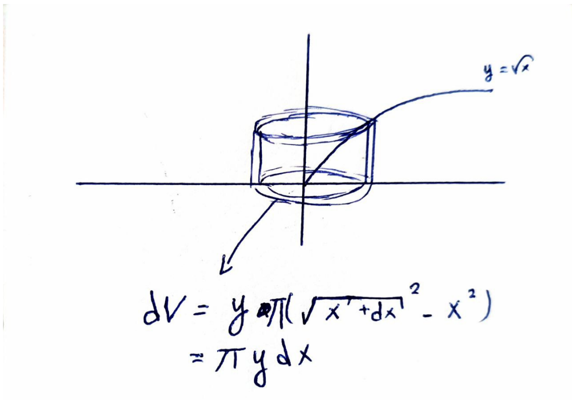
نحسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ حول المحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$:



$$\text{الحجم} = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi$$

مثال 3 : حساب حجم الدوران باستخدام طريقة القشرة الأسطوانية

نحسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ حول المحور y من $x = 0$ إلى $x = 1$:



$$\text{الحجم} = \pi \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \pi \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \pi \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

هنا سنذكر أمثلة منالفيزياء يمكنك تجاهل المحتوى النظري الفيزياء و ركزفقط على الحسابات لانن سنعود لكل منها في وقتها.

مثال 1: طاقة النابض
في هذا المثال نستخدم التكامل لحساب الطاقة الكامنة المخزنة في نابض عند تمديده. القوة المؤثرة تتغير مع الإزاحة، لذا نحتاج إلى جمع العمل المبذول عبر كل جزء صغير من التمدد:

$$F = -kx$$

$$dU = -F\,dx = kx\,dx$$
$$U = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

مثال 2: الإزاحة من السرعة
السرعة هي معدل تغير الموقع، لذا فإن التكامل عبر الزمن يعطينا الإزاحة الكلية:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int v\,dt$$

$$x = \int v(t)\,dt$$

مثال 4: تمدد غاز مثالي
في عملية تمدد متساوي الحرارة، نحسب العمل المبذول من خلال التكامل:

$$pV = nRT$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

مثال 5: الطاقة الكامنة للجاذبية
نحسب الطاقة الكامنة لجسم في مجال جاذبية كوني باستخدام التكامل من اللانهاية:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$U = -\int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2}\,dr = -\frac{GMm}{r}$$

مثال 6: مقاومة قشرة كروية
نحسب المقاومة الكلية لقشرة كروية باستخدام التكامل عبر نصف القطر:

$$dR = \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \int_a^b \frac{\rho}{4\pi r^2}\, dr = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

مثال 7: تفاضل التسارع
نستخدم قاعدة السلسلة لإعادة كتابة التسارع بدلالة السرعة والموقع:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \cdot \frac{d\dot{x}}{dx}$$

سنحتاج هذه كثيرا في الحركة، تذكرها جيدا!!

مثال 8: عزم القصور الذاتي لاسطوانة
نحسب العزم حول مركز الاسطوانة باستخدام التكامل عبر توزيعه الكلي:

$$dI = r^2\, dm$$

$$dm = \frac{M}{L}\, dx$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L}\, dx = \frac{1}{12} M L^2$$

مثال 9: مساحة في الإحداثيات القطبية
نحسب المساحة باستخدام التكامل في الإحداثيات القطبية:

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} r^2\, \theta$$

مثال 10: شكل سطح الماء

نحسب شكل السطح الناتج عن دوران الأسطوانة باستخدام توازن الضغط:

$$dp = \rho\omega^2 r\, dr$$

$$dp = \rho g\, dy \Rightarrow \frac{dy}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r$$

$$y = y_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

هناك تكاملات أخرى و المزيد من الأفكار التي سنتعلمها و نعود إليها عندما نحتاجها في الفيزياء متل التكاملات الغاوسية و غيرها

متوسط قيم تابع بالتكامل:

المتوسطات باستخدام التكامل

يُعد المتوسط التكاملي طريقة دقيقة لحساب متوسط دالة رياضية على فترة معينة، ويعتمد على مفهوم المساحة تحت المنحنى. بدلاً من أخذ متوسط قيم منفصلة، نقوم بحساب متوسط القيمة المستمرة للدالة عبر الفترة المحددة. يُعطى المتوسط التكاملي للدالة $f(x)$ على الفترة من a إلى b بالعلاقة:

$$\text{المتوسط} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

هذا التعبير يُمثل المساحة تحت المنحنى بين a و b، مقسومة على طول الفترة، مما يعطينا "الارتفاع المتوسط" الذي لو كانت الدالة ثابتة عنده لأنتجت نفس المساحة. بمعنى آخر، هو القيمة التي لو رسمنا بها مستطيل بعرض $b-a$ وارتفاع يساوي هذا المتوسط، لكانت مساحته مساوية تماماً للمساحة تحت منحنى $f(x)$ في تلك الفترة.

مثال: لحساب متوسط الدالة $f(x) = 0.5x^2 + 1$ من $x = 3$ إلى $x = 8$، نطبق الصيغة:

$$\text{المتوسط} = \frac{1}{8-3}\int_3^8 (0.5x^2+1)\,dx$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$\int_3^8 (0.5x^2+1)\,dx = \left[\frac{0.5}{3}x^3 + x\right]_3^8 = 126.25$$

ثم نقسم على طول الفترة:

$$\text{المتوسط} = \frac{126.25}{5} = 25.25$$

وهكذا، فإن القيمة المتوسطة للدالة على تلك الفترة هي 25.25.

هذا النوع من المتوسطات يُستخدم كثيرًا في الفيزياء والهندسة لتحليل السلوك العام للأنظمة المستمرة، مثل متوسط درجة الحرارة، أو متوسط السرعة، أو متوسط كثافة الشحنة.

تمارين التكامل :

-1

A.1 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int (3x^2 - 4x + 7)\,dx$$

الجواب: $x^3 - 2x^2 + 7x + C$

-2

A.2 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

الجواب: $-\frac{1}{x} + C$

-3

A.3 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \sqrt{x}\, dx$$

الجواب: $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

-4

A.4 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \frac{1}{x}\, dx$$

الجواب: $\ln|x| + C$

-5

A.5 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int e^{2x}\, dx$$

الجواب: $\frac{1}{2}e^{2x} + C$

-6

A.6 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \cos(3x)\, dx$$

الجواب: $\frac{1}{3}\sin(3x) + C$

-7

A.7 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \sec^2(x)\, dx$$

الجواب: $\tan(x) + C$

-8

A.8 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

الجواب: $\tan^{-1}(x)+C$

-9

A.9 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int \ln(x)\,dx$$

الجواب: $x\ln(x)-x+C$

-10

A.10 أوجد التكامل غير المحدود:

$$\int xe^x\,dx$$

الجواب: $(x-1)e^x+C$

-11

A.11 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^2 (3x^2-4x+1)\,dx$$

الجواب: $[x^3-2x^2+x]_0^2 = 8-8+2 = 2$

-12

A.12 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

الجواب: $\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$

-13

A.13 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

الجواب: $[-\cos(x)]_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$

-14

A.14 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^{1} e^{2x}\, dx$$

الجواب: $\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

-15

A.15 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_1^{2} \frac{1}{x}\, dx$$

الجواب: $[\ln|x|]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

-16

A.16 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^{1} x^3\, dx$$

الجواب: $\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

-17

A.17 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx$$

الجواب: $[\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$

18-

A.18 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^1 xe^x \, dx$$

الجواب: باستخدام التكامل بالتجزئة: $[(x-1)e^x]_0^1 = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 0 + 1 = 1$

19-

A.19 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^1 \ln(x) \, dx$$

الجواب: $x \ln(x) - x\Big|_0^1 = -1$

20-

A.20 أوجد التكامل المحدود:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

الجواب: $[\tan^{-1}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

المعادلات التفاضلية : و سيكون لهذه ملف منفصل ولكننا سنمر فقط على بعض الأمثلة هنا

مثال: معادلة تفاضلية بسيطة للنمو الأسي

المعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

نستخدم فصل المتغيرات:

$$\frac{1}{y}\, dy = k\, dx$$

نقوم بالتكامل للطرفين:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dx \Rightarrow \ln|y| = kx + C$$

نأخذ الأس للطرفين:

$$y = Ce^{kx}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة.

مثال: قانون نيوتن للتبريد

المعادلة:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{room}})$$

نستخدم فصل المتغيرات:

$$\frac{1}{T - T_{\text{room}}}\, dT = -k\, dt$$

نقوم بالتكامل للطرفين:

$$\int \frac{1}{T - T_{\text{room}}}\, dT = \int -k\, dt \Rightarrow \ln|T - T_{\text{room}}| = -kt + C$$

نأخذ الأس للطرفين:

$$T - T_{\text{room}} = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = T_{\text{room}} + (T_0 - T_{\text{room}})e^{-kt}$$

حيث T_0 هي درجة الحرارة الابتدائية عند $t = 0$.

مثال: معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية (نظام نابض-كتلة)

المعادلة:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الدرجة الثانية. نحلها باستخدام الحل العام للمعادلات من الشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

الحل العام هو:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

حيث A و B يُحددان من الشروط الابتدائية.

متسلسلات تايلور :

متسلسلات تايلور تُستخدم لتقريب التوابع المعقدة بواسطة كثيرات حدود، .
حيث تكتب سلسلة تايلور حول نقطة ما aبالشكل الآتي و تكون تعبر عن تقريب للتابع حول هذه القيم .

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

من الواضح أن هذا الشكل لا نهائي سيكون صعب التعامل معه لذلك نأخذ الحدود التي تكون كافية للحفاظ على الرتبة, فإذا كان أكبر ما نتعامل معه هو x^2 فنكتفي بأخذ الحد التربيعي عندما نكون نتعامل مع هذه القيم قرب a.

متسلسلة تايلور لـ e^x حول الصفر $a = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

-1

A.1 اكتب متسلسلة تايلور للتابع $\sin(x)$ حول الصفر.

الجواب:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

-2

A.2 اكتب متسلسلة تايلور للتابع $\cos(x)$ حول الصفر.

الجواب:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

-3

A.3 اكتب متسلسلة تايلور للتابع $\ln(1+x)$ حول الصفر.

الجواب:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

عدد إلى الأمثلة المتعلقة بالنهايات و التمارين , و بالتحديد الى التي تحوي نفس التوابع التي اخذنا تقريباتها للتو و تأكد من أن تعويض أول بضعة حدود حتى تصل إلى أعلى رتبة موجودة في النهاية و سيعطي نفس الحل و بطريقة أبسط.

بالتوفيق