/ /

حركة الشحنات في الحقول: علي شمس

① شحنة نقطية في حقل مغناطيسي:

الحقل $\vec{B} = B_0 \hat{z}$

السرعة الابتدائية $\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$ (عمودية على الحقل).

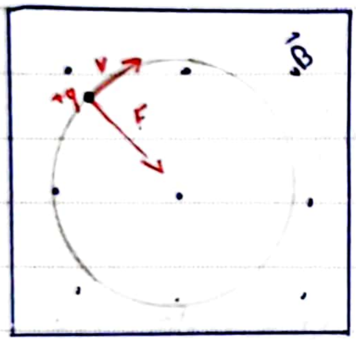
الشحنة: (m, q)

A- الدراسة المباشرة: إن الحقل المغناطيسي:

① تطبق قوة عمودية على سرعة الشحنة

② لا تقوم بعمل ← سرعة الشحنة ثابتة ~~...~~ طويلة.

← المسار دائري.



ويمكن حساب نصف قطره:

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\boxed{r = \frac{mV}{qB}}$$

وسرعته الزاوية (تواتره الدوراني)

$$\boxed{\omega = \frac{V}{r} = \frac{m}{qB}}$$ cyclotron angular freq.

* إذا كانت سرعة الجسم غير عمودية على الحقل فإن المركبة العمودية عليه تسبب دوراناً بينما ~~*~~ بالمستوى العمودي على الحقل و تبقى المركبة ~~...~~ الموازية للحقل متحمل على شكل لولبي (helix) مثل سلك الدنتر.

B-1. الحساب الرياضي المباشر:

وبحساب بشكل عام نعرف $\vec{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ $\vec{V}_0(u_x\ u_y\ u_z)$

$$\vec{F} = q\,\vec{V} \times \vec{B} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q\dot{y}B\\ -q\dot{x}B\\ 0\end{pmatrix}$$

/ /

وبقانون نيوتن الثاني :

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} \qquad \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\dot{z} = u_z = const$$

$$\boxed{z = u_z t + z_0}$$

إن حل جملة المعادلتين التفاضليتين معقد نسبياً، ولكن هناك طريقة عامة عند وجود معادلة تفاضلية تشمل متحولين مرتبطين ببعضهما البعض

إذ : ① نعرف $\eta = x + iy$

② نضرب المعادلة الثانية بـ i ونجمعهما فنحصل على

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{qB}{m}\dot{y}\\ i\ddot{y} &= -\frac{iqB}{m}\dot{x}\end{aligned}\right] \Rightarrow \ddot{\eta} = \frac{qB}{m}(\dot{y} - i\dot{x})$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{iqB}{m}(\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{iqB}{m}\dot{\eta}$$

يمكن حل هذه المعادلة بفصل المتغيرات لكنها ستجعلنا نتعامل مع تكاملات عقدية وليست من ما نحتاجه إذ تكفي أن نختار حلاً من الشكل $\dot{\eta} = \dot{\eta}_0 e^{\alpha t}$

فنجد

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_0 e^{-\frac{iqB}{m}t} \quad \text{حيث} \quad \dot{\eta}_0 = u_x + iu_z$$

$$\Rightarrow \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta = \int_0^t \dot{\eta}_0 e^{-\frac{iqB}{m}t}\, dt$$

$t=0$, t

$$\eta = \eta_0 + \frac{im}{qB}\dot{\eta}_0 + \frac{im}{qB}\dot{\eta}_0 e^{-\frac{iqB}{m}t}$$

$$\eta = \underbrace{\left(x_0 + \frac{mu_y}{qB}\right) + i\left(y_0 - \frac{mu_x}{qB}\right)}_{\text{محور ثابتة}} + \underbrace{\frac{m}{qB}\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\, e^{-i\left(\frac{qB}{m}t + \phi\right)}}_{\text{شعاع يدور بسرعة زاوية } \frac{qB}{m}}$$

حيث $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{u_x}{u_y}\right)$

/ /

$$x = \mathrm{Re}(\eta) = x_0 + \frac{m u_y}{qB} + \frac{m\sqrt{u_x^2+u_y^2}}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t+\phi\right)$$

$$y = \mathrm{Im}(\eta) = y_0 - \frac{m u_x}{qB} - \frac{m\sqrt{u_x^2+u_y^2}}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t+\phi\right)$$

حيث $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{u_x}{u_y}\right)$

② حركة شحنة في حقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ متعامدين:

A - الدراسة المباشرة:

$\vec{E} = (0, E, 0)$

$\vec{B} = (0, 0, B)$

$\vec{u} = (u_x, u_y, v_z)$

$\vec{P}_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y}$$

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = u_z t + z_0$$

إن حل هذه المعادلات طويل نسبياً" ولكن بملاحظة أنه إذا كانت $\vec{V} = \dot{x} = \frac{E}{B}$

فإن القوى المغناطيسية الساكنة والكهربائية الساكنة تلغيان بعضهما

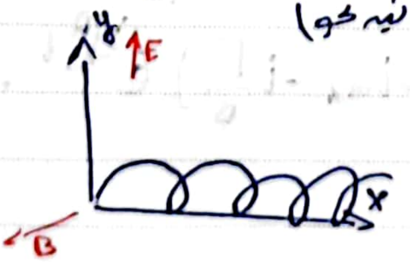
بالتالي فإن في حال تسير بسرعة $\vec{u}_d = \frac{E}{B}\hat{x}$

فإن الشحنة تخضع فقط لحقل مغناطيسي وبالتالي تدور كما شرحنا في القسم الأول.

وبإهمال ($u_z = 0$) نجد أن حركة الجسم في جملة المخبر هي دوران

بتواتر $\omega = \frac{qB}{m}$ وانسحاب بسرعة u_D

ويكون المسار (منحني سيكلوئيدي)



/ /

B - الحل الرياضي: نضرب $\ddot{y} \times i$
وجمعها إلى $\ddot{x}$ نجد

$$① \quad \ddot{\eta} = -\frac{iqB}{m}\dot{\eta} + \frac{iqE}{m}$$

معادلة تفاضلية مضاف لها حد ثابت ~~حلها~~ حلها مجموع للحل الخاص والحل العام:

← الحل العام ~~هو~~ هو حل $\ddot{\eta} = -\frac{iqB}{m}\dot{\eta}$

$$\dot{\eta} = A \cdot e^{-\frac{iqB}{m}t}$$

← لسنتخدم نفسها $\dot{\eta}_0$

⇐ و نجد A من الشروط الابتدائية للحل

② الحل الخاص هو حد ثابت يحقق المعادلة:
وهو $\dot{\eta} = \frac{E}{B}$ *

فيكون الحل $\dot{\eta} = Ae^{-i\frac{qB}{m}t} + \frac{E}{B}$

من الشرط الابتدائي $\dot{\eta}\big|_{t=0} = \dot{\eta}_0$

فإن $A = \left(\dot{\eta}_0 - \frac{E}{B}\right)$

بالمكاملة:

$$\eta = \eta_0 + \frac{i q B}{m}\left(\dot{\eta}_0 - \frac{E}{B}\right)\left(e^{-\frac{iqB}{m}t} - 1\right) + \frac{E}{B}t$$

حيث $\eta_0 = x + iy$ $\quad \dot{\eta}_0 = u_x + iu_y$

$$\eta = x_0 + iy_0 + \frac{m}{qB}\left(iu_y + iu_x - i\frac{E}{B}\right)e^{\frac{iqB}{m}t} + \frac{E}{B}t - \frac{m}{qB}\left(-u_y + iu_x - i\frac{E}{B}\right)$$

حيث $\phi = \tan^{-1} \frac{u_x - \frac{E}{B}}{u_y}$ ، $\quad -u_y + i\left(u_x - \frac{E}{B}\right) = \sqrt{u_y^2 + \left(u_x - \frac{E}{B}\right)^2}\, e^{-i\phi}$

حيث يكون:

$$\eta = \underbrace{X_0 + \frac{m u_y}{qB}}_{\text{حدود ثابتة}} + \underbrace{\frac{E}{B}t}_{\boxed{\vec{u}_D \times t}} + \underbrace{i\left[y_0 - \frac{m\left(u_x - \frac{E}{B}\right)}{qB}\right]}_{\text{حدود ثابتة}} + \underbrace{\frac{m\sqrt{\left(u_x - \frac{E}{B}\right)^2 + u_y^2}}{qB}}_{\text{دوران}}\, e^{-i\left(\frac{qB}{m}t + \phi\right)}$$

الانتقال الخطي للحملة

$\omega = \frac{qB}{m}$ $\quad$ * نصف قطر

$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\left(u_x - \frac{E}{B}\right)^2 + u_y^2}$ $\quad$ بفرض السرعة الابتدائية صفر تكون

$R = \frac{mE}{qB^2}$ $\quad$ وسرعة مركز الدوران $\vec{V}_D = \frac{E}{B}\hat{x}$

③ تيار حلقي في حقل مغناطيسي: