الموضوع : ....

حل المعادلات التفاضلية

مقدمة: - نتعلم حل المعادلات التفاضلية
- أحادية المتغير
- المرتبة الأولى
- الدرجة الأولى

* حل معادلة هو إيجاد التابع y الذي تحققه المعادلة

① معادلات تفاضلية قابلة للفصل

- فكرة فصل المتحولات: إذا أمكن عزل التابع وتغيره التفاضلي dy في طرف والمتغير وتغيره التفاضلي في طرف dx تكون المعادلة قابلة للفصل وحلها يكون بتكامل الطرفين بين الحدود.

مثال: $y' = axy$ أو (نكتبها)

$$f(x) = a f(x) x$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = a\,y\,x$$

فصل متحولات

$$\frac{dy}{y} = ax\,dx$$

تكامل

$$\ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = a\frac{x^2 - x_0^2}{2}$$

$$y = y_0\, e^{\frac{a x^2}{2} - \frac{a x_0^2}{2}}$$

ويمكن كتابتها

$$y = \frac{y_0}{e^{\frac{a x_0^2}{2}}} \cdot e^{\frac{a x^2}{2}}$$

$$y = k\, e^{a\frac{x^2}{2}}$$

تمرين:

حل المعادلة التفاضلية

1- $y' = \ln(a)\, x^3 y^2$

2- $y' = ax$

3- $y' = ay$

4- $y' = -ay$

② معادلات تفاضلية قابلة للفصل لكن تحتاج لحركة بسيطة. (تكون من مرتبة ثانية غالباً)

والفكرة هنا، هو كتابة المشتق الثاني بالشكل

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}$$

أو يمكن كتابتها بالشكل

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dy'^2}{dy}$$

حيث أن $d(y'^2) = 2y'\,dy'$

مثال:

مثال: حل المعادلة إذا علمت أن

$\dot y_0 = 0 \qquad y_0 = 0$

$\ddot y = g$

$\dot y \frac{d\dot y}{dy}$

$\frac{\dot y^2}{2} = gy$

$\dot y^2 = 2gy \to \dot y = \sqrt{2gy} \to \frac{dy}{\sqrt{2gy}} = dt$

تكامل

$\sqrt{\frac{2y}{g}} = t$

$\boxed{y = \frac{1}{2}gt^2}$

مثال 2: $y_0 = h \qquad \dot y_0 = 0$

نفس المعادلة السابقة

$v\frac{dv}{dy} = g$

$\frac{v^2}{2} = gy + C$

$\dot y_0 = 0 \Rightarrow C = -gh$

$v = \sqrt{2gy - 2gh}$

$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy - 2gh}$

$\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2gy - 2gh}} = \int_0^t dt$

$2\sqrt{y - h} = \sqrt{2g}\, t$

$y = h + \frac{1}{2}gt^2$

تمرين: حل المعادلة السابقة إذا كانت

$y_0 = h$

$\dot y_0 = v_0$

③ حل معادلات تفاضلية بعامل التكامل

الشكل العام للمعادلة التي تحل بعامل التكامل

A- $\dot y + f(x)\, y = g(x)$

الفكرة العامة

افرض أنه يوجد تابع $h(x)$

إذا ضربنا المعادلة به يكون الطرف الأيسر:

① $h(x)\{\dot y + f(x)\, y\} = \frac{d(h(x)y)}{dx}$

وتكون المعادلة

② $\frac{d(h(x).y)}{dx} = g(x)\, h(x)$

لاحظ من ① أن

$\frac{d(h(x).y)}{dx} = \dot y\, h(x) + h(x).f(x).y$

وبالمقارنة مع صيغة مشتق جداء نجد أن

$\frac{d(h(x))}{d(x)} = h(x)\, f(x)$

وهذه معادلة تابع أسي.

$h(x) = e^{\int f(x)dx + c}$

أو $= A\, e^{\int f(x)dx}$

الموضوع : ....

/ /

بدأن وجدنا صيغة $h(x)$

نعود إلى معادلة ②

$$\frac{d(h(x).y)}{dx} = g(x)\,h(x)$$

فيصبح حل المعادلة بالمكاملة

$$h(x)y = \int g(x)\,h(x)\,dx - h(x_0)y_0$$

$\cancel{y \int g(x)\, h(x)\, dx + c}$

$$y = \frac{\int g(x)\,h(x)\,dx + h(x_0)y_0}{h(x)}$$

تمارين:

مثال تعليمي:

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x}^2 = g(x)$$

هذه المعادلة يمكن تحويلها إلى معادلة (من شكل A -) نحل بها مل التكامل

حيث

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})^2}{dX}$$

ونضرب بـ 2

$$\frac{d\dot{x}^2}{dx} + 2f(x)\,\dot{x}^2 = 2g(x)$$

فيكون المتحول x والتابع $\dot{x}^2$

$$h(x) = e^{2\int f(x)\,dx + c}$$

والحل يعطينا

$$\dot{x}^2(x)$$

~~[illegible]~~ ويمكن منه إيجاد $\dot{X}(x)$ أو $\dot{x}(t)$ أو $X(t)$

تمرين:

حل المعادلات باستخدام عامل التكامل:

1- $f'(x) + (ax+b)f(x) = x^2 + 2x + 3$

أوجد $f(x)$ ثم $f'(x)$

2- $f'(x) + \sin(x)f(x) = \cos(x)$

أوجد $f(x)$

3- $e^{3x}y = 3e^{3x}\dot{y} + e^{x^2}$

أوجد y.

4- $5x\ddot{X} + 2x\dot{X}^2 + \sin(x) = 0$

أوجد $\dot{X}(x)$ ثم $X(t)$.