

Отчет по лабораторной работе №2 по теме: "Задача о распаде разрыва для системы уравнений акустики"

Латарцев Павел Б05-9026 группа

2023

1 Условие

1.1 Задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$
$$u(0, x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$
$$p(0, x) = \begin{cases} p_L, & x < 0 \\ p_R, & x > 0 \end{cases}$$

1.2 Шаблон

Шаблон № 6, начальное условие «полуэллипс», $\sigma = 0.25$

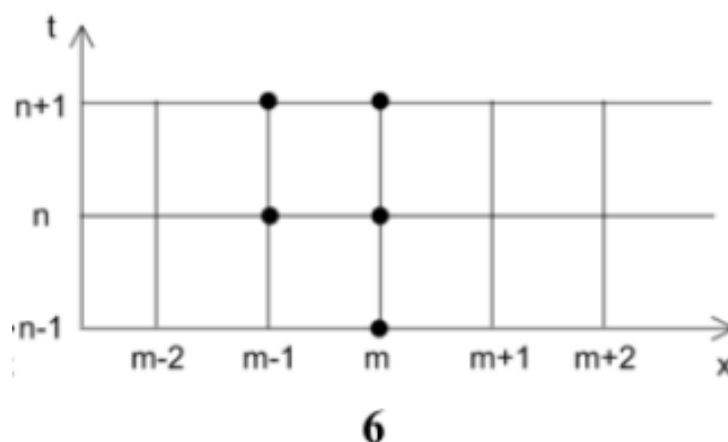


Рис. 1: Схема шаблона

Начальное условие «полуэллипс»:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - 100 \cdot (x - 0.5)^2} & \text{при } 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

2 Теоритическая часть

$$\alpha_{-1}^0 - \text{ось } x, \quad \alpha_0^0 - \text{ось } y$$

2.1 Система

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_{-1}^1 (1 + \sigma) + \alpha_{-1}^0 - \alpha_0^{-1} \sigma = \sigma \\ \alpha_{-1}^1 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_0^{-1} = 1 \\ \alpha_{-1}^1 (1 + 2\sigma + \sigma^2) + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^{-1} \sigma^2 = \sigma^2 \\ \alpha_{-1}^1 (1 + 3\sigma + 3\sigma^2 + \sigma^3) - \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^{-1} \sigma^3 = -\sigma^3 \end{cases}$$

2.2 Однопараметрическое множество схем 2-го порядка аппроксимации

$$\alpha_{-1}^0 = \frac{-\sigma - 1}{\sigma + 1} \alpha_0^0 + \frac{2}{\sigma + 1}$$

2.3 Единственная схема 3-го порядка аппроксимации

$$\alpha_{-1}^0 = \frac{2\sigma}{\sigma + 1}, \quad \alpha_0^0 = \frac{2(\sigma - 1)}{\sigma + 1}, \quad \alpha_0^{-1} = \frac{\sigma - 1}{2\sigma^2 + 3\sigma + 1}, \quad \alpha_{-1}^1 = \frac{2\sigma(\sigma - 1)}{(\sigma + 1)(2\sigma + 1)}$$

2.4 Аналитический вид схемы с минимальной «аппроксимационной вязкостью»

$$\alpha_{-1}^0 = \sigma, \quad \alpha_0^0 = 1 - \sigma$$

2.5 Наиболее близкая ко множеству положительных по Фридрихсу схем среди схем 2-го порядка аппроксимации

$$\alpha_{-1}^0 = 0.55, \quad \alpha_0^0 = 1.05$$

2.6 Симметричный шаблон

$$u_m^{n+1} = \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_0^{-1} u_m^{n-1} + \alpha_{+1}^0 u_{m+1}^n + \alpha_{+1}^1 u_{m+1}^{n+1}$$

2.7 Замены

$$\begin{cases} y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \\ z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \\ u = \frac{y+z}{2} \\ p = \rho_0 c_0 \frac{y-z}{2} \end{cases}$$

2.8 Система для симметричного шаблона

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_{+1}^1 (1 + \sigma) + \alpha_{+1}^0 - \alpha_0^{-1} \sigma = \sigma \\ \alpha_{+1}^1 + \alpha_{+1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_0^{-1} = 1 \\ \alpha_{+1}^1 (1 + 2\sigma + \sigma^2) + \alpha_{+1}^0 + \alpha_0^{-1} \sigma^2 = \sigma^2 \\ \alpha_{+1}^1 (1 + 3\sigma + 3\sigma^2 + \sigma^3) - \alpha_{+1}^0 + \alpha_0^{-1} \sigma^3 = -\sigma^3 \end{cases}$$

3 Практическая часть

3.1 Схема 1 порядка с минимальной вязкостью

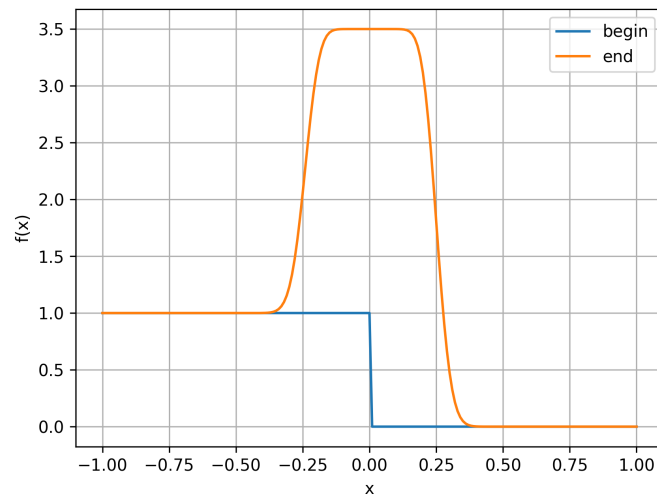


Рис. 2: График для u

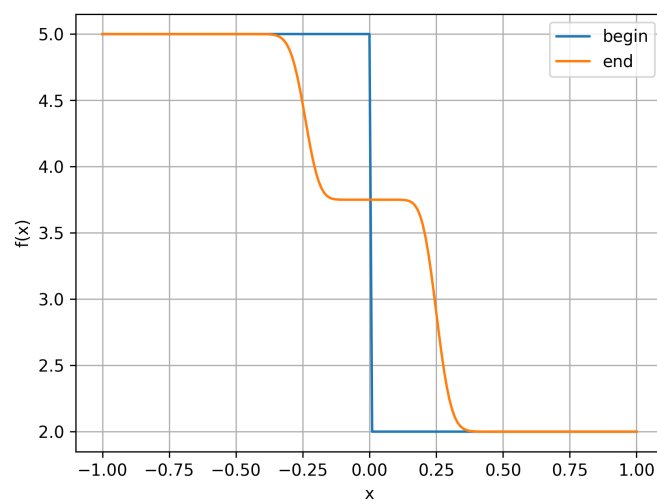


Рис. 3: График для p

3.2 Схема 2 ближайшая по Фридрихсу

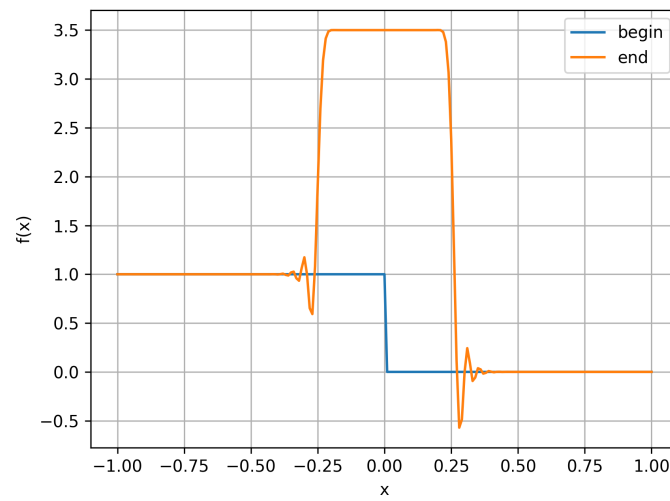


Рис. 4: График для u

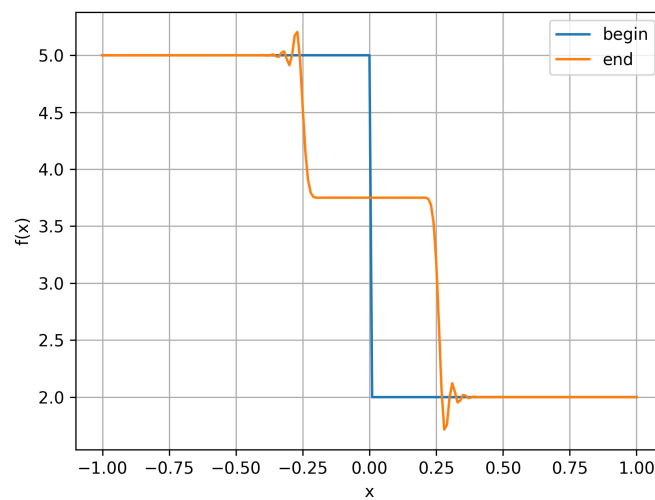


Рис. 5: График для p

3.3 Схема 3 порядка

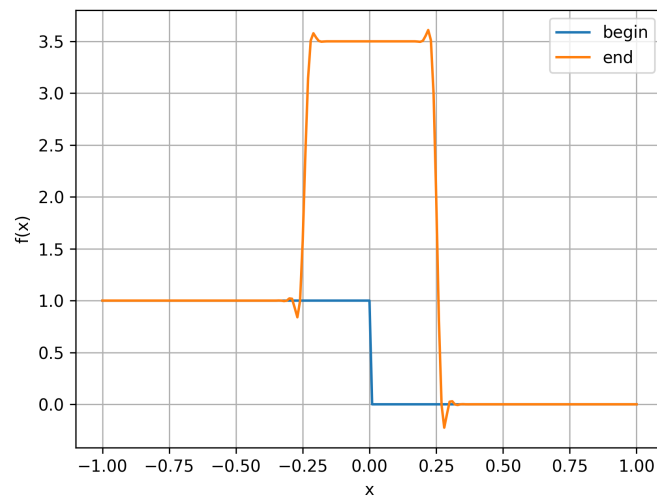


Рис. 6: График для u

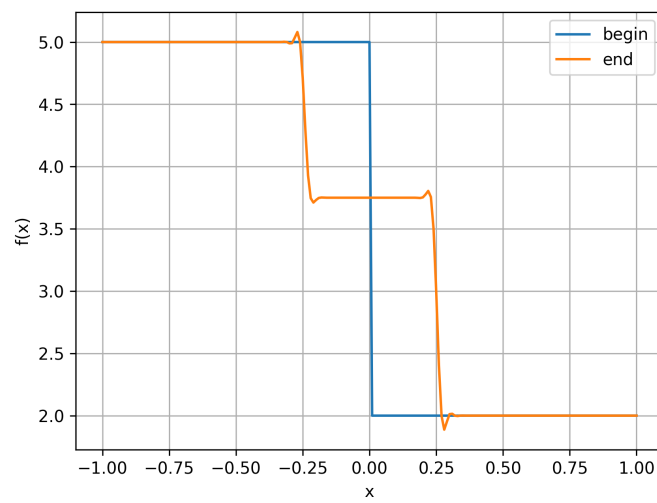


Рис. 7: График для p

3.4 Схема 1 порядка с минимальной вязкостью

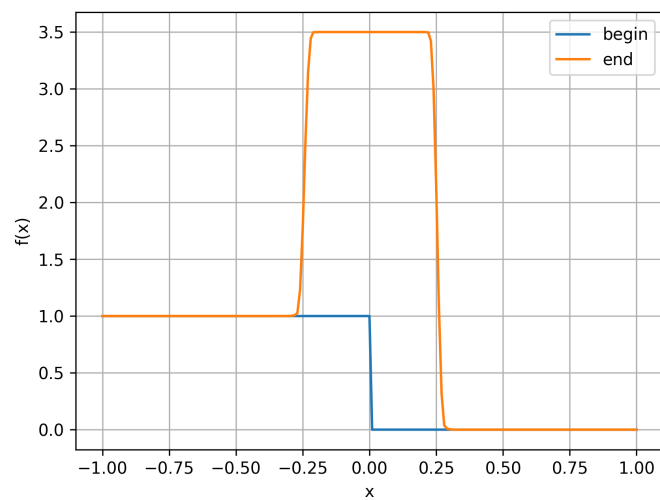


Рис. 8: График для u

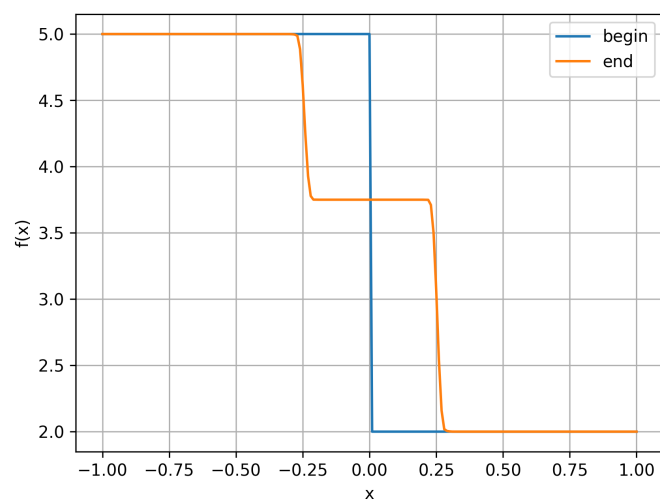


Рис. 9: График для p