Отчет по лабораторной реботе по теме: "Численные методы решения уравнения переноса"

Латарцев Павел Б05-902б группа

2023

1 Условие

Шаблон № 6, начальное условие «полуэллипс», $\sigma = 0.25$

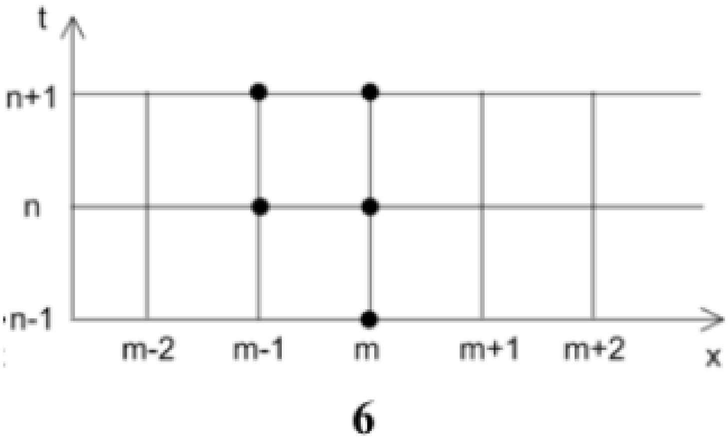

Рис. 1: Схема шаблона

Начальное условие «полуэллипс»:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - 100 \cdot (x - 0.5)^2} & \text{при } 0.4 \leqslant x \leqslant 0.6 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

2 Теоритическая часть

$$\alpha_{-1}^{0} - \text{ось x}, \quad \alpha_{0}^{0} - \text{ось y}$$

2.1 Система

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_{-1}^{1} (1 + \sigma) + \alpha_{-1}^{0} - \alpha_{0}^{-1} \sigma = \sigma \\ \alpha_{-1}^{1} + \alpha_{-1}^{0} + \alpha_{0}^{0} + \alpha_{0}^{-1} = 1 \\ \alpha_{-1}^{1} (1 + 2\sigma + \sigma^2) + \alpha_{-1}^{0} + \alpha_{0}^{-1} \sigma^2 = \sigma^2 \\ \alpha_{-1}^{1} (1 + 3\sigma + 3\sigma^2 + \sigma^3) - \alpha_{-1}^{0} + \alpha_{0}^{-1} \sigma^3 = -\sigma^3 \end{cases}$$

2.2 Область монотонности положительных по Фридрихсу $\alpha_\mu^\nu \geqslant 0$ схем

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^0 \geqslant 0 \\ \alpha_0^0 \geqslant 0 \\ \alpha_0^{-1} = \frac{1}{1+2\sigma} - \frac{\sigma}{1+2\sigma}\alpha_{-1}^0 - \frac{1+\sigma}{1+2\sigma}\alpha_0^0 \geqslant 0 \\ \alpha_{-1}^1 = \frac{2\sigma}{1+2\sigma} - \frac{1+\sigma}{1+2\sigma}\alpha_{-1}^0 - \frac{\sigma}{1+2\sigma}\alpha_0^0 \geqslant 0 \end{cases}$$

2.3 Однопараметрическое множество схем 2-го порядка аппроксимации

$$\alpha_{-1}^0 = \frac{-\sigma - 1}{\sigma + 1}\alpha_0^0 + \frac{2}{\sigma + 1}$$

2.4 Единственная схема 3-го порядка аппроксимации

$$\alpha_{-1}^0 = \frac{2\sigma}{\sigma+1}, \;\; \alpha_0^0 = \frac{2(\sigma-1)}{\sigma+1}, \;\; \alpha_0^{-1} = \frac{\sigma - 1}{2\sigma^2 + 3\sigma + 1}, \;\; \alpha_{-1}^1 = \frac{2\sigma(\sigma-1)}{(\sigma+1)(2\sigma+1)}$$

2.5 Аналитический вид схемы с минимальной «аппроксимационной вязкостью»

$$\alpha_{-1}^0 = \sigma, \;\; \alpha_0^0 = 1 - \sigma$$

2.6 Наиболее близкая ко множеству положительных по Фридрихсу схем среди схем 2-го порядка аппроксимации

$$\alpha_{-1}^0 = 0.55, \;\; \alpha_0^0 = 1.05$$

2.7 Рисунок для заданного шаблона и числа Куранта

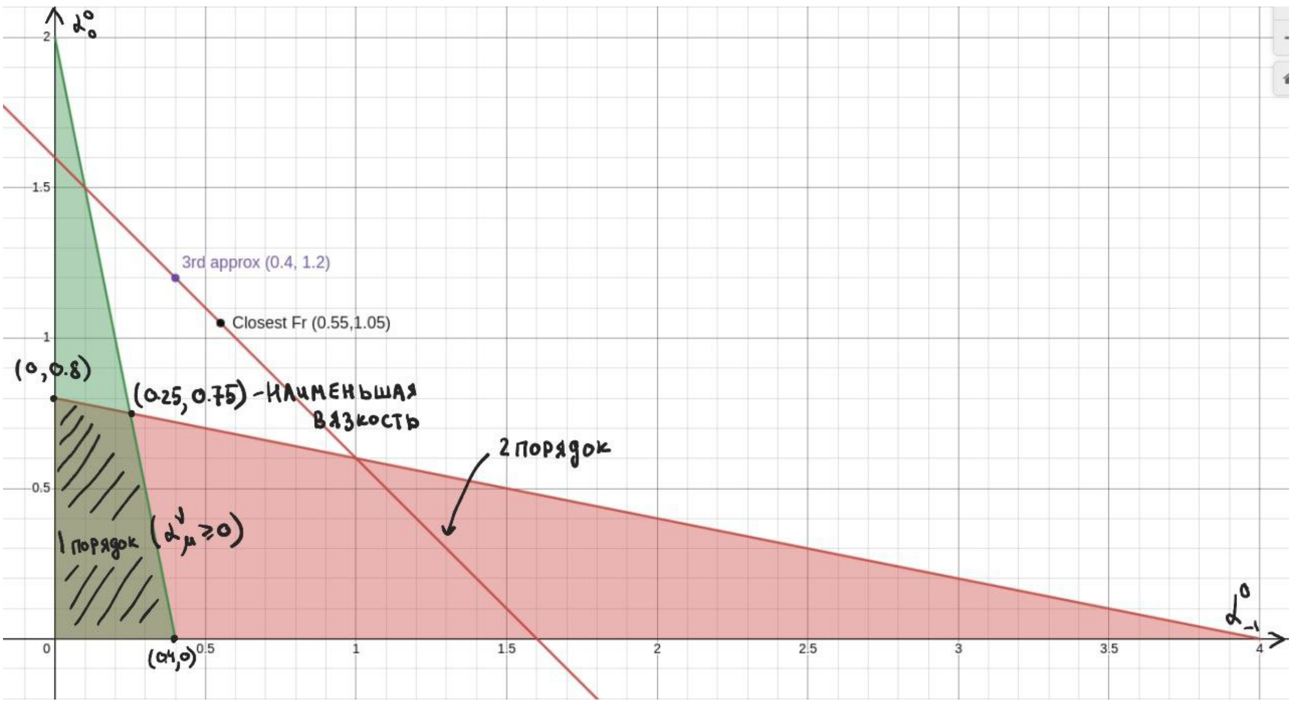

Рис. 2: Рисунок для заданного шаблона и числа Куранта $\sigma = 0.25$

3 Практическая часть

3.1 Четыре вершины области монотонных схем первого порядка аппроксимации

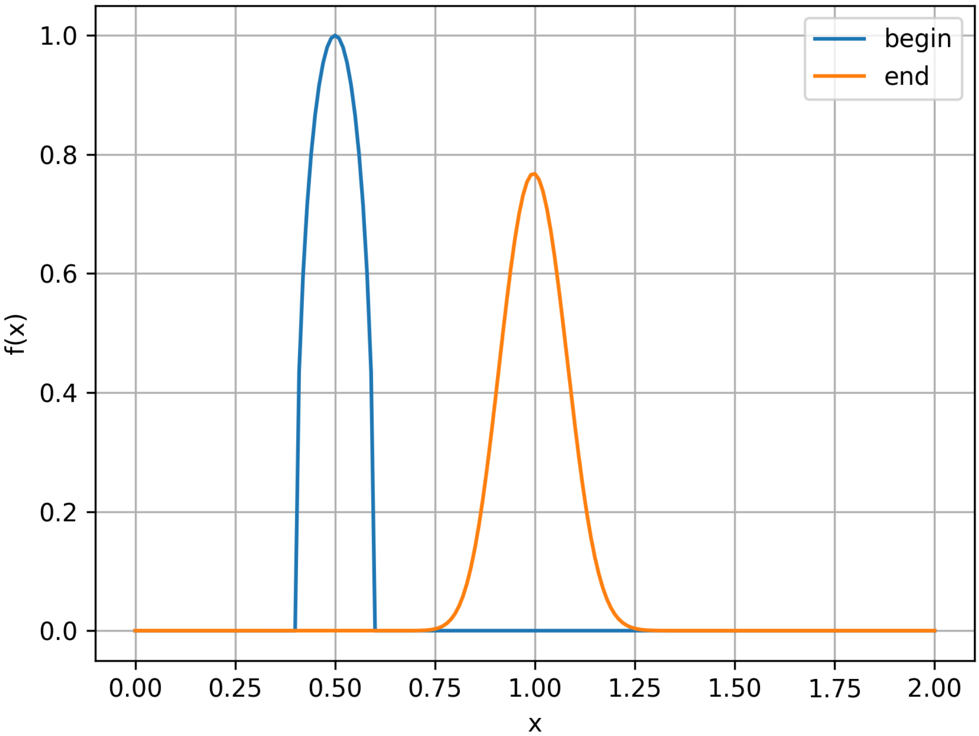

Рис. 3: Схема: $u_m^{n+1} = 0 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.25 \cdot u_{m-1}^{n} + 0.75 \cdot u_m^n + 0 \cdot u_m^{n-1}$

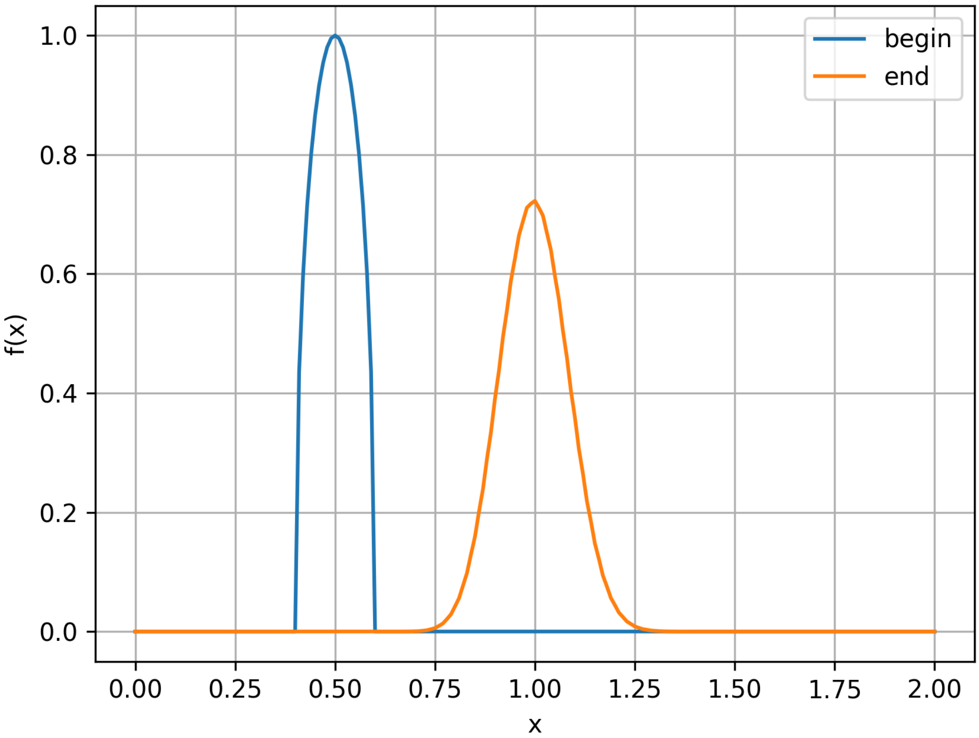

Рис. 4: Схема: $u_m^{n+1} = 0 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.4 \cdot u_{m-1}^{n} + 0 \cdot u_m^n + 0.6 \cdot u_m^{n-1}$

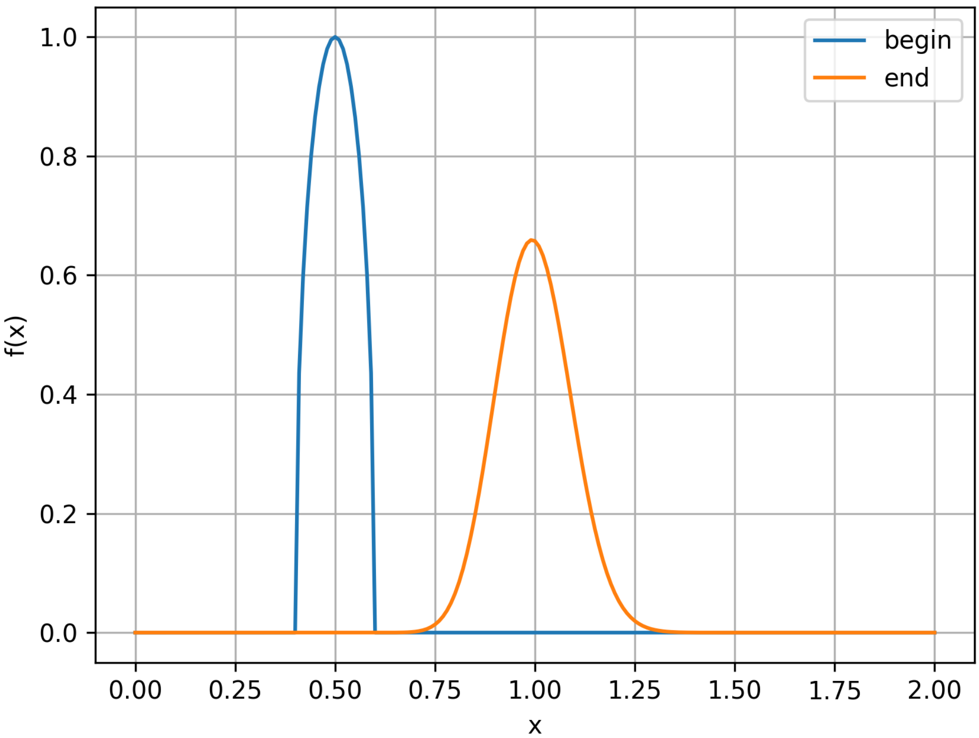

Рис. 5: Схема: $u_m^{n+1} = 0.2 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0 \cdot u_{m-1}^{n} + 0.8 \cdot u_m^n + 0 \cdot u_m^{n-1}$

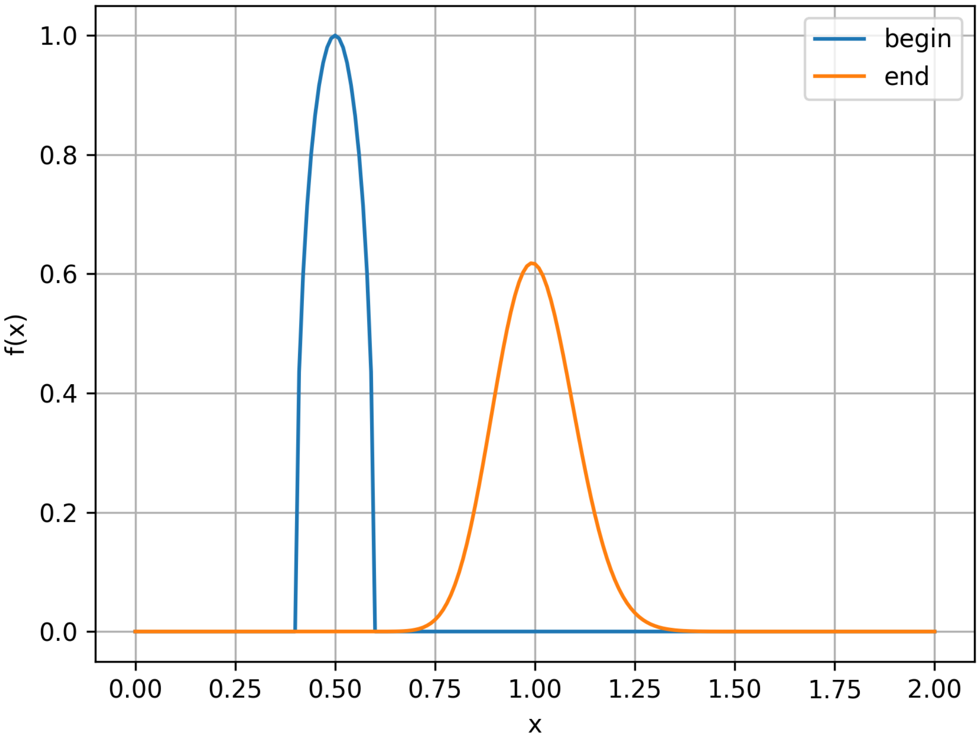

Рис. 6: Схема: $u_m^{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0 \cdot u_{m-1}^{n} + 0 \cdot u_m^n + \frac{2}{3} \cdot u_m^{n-1}$

3.2 Наименее осциллирующая на разрывных решениях схема 2-го порядка аппроксимации из 2.6 (Наиболее близкая ко множеству положительных по Фридрихсу схем)

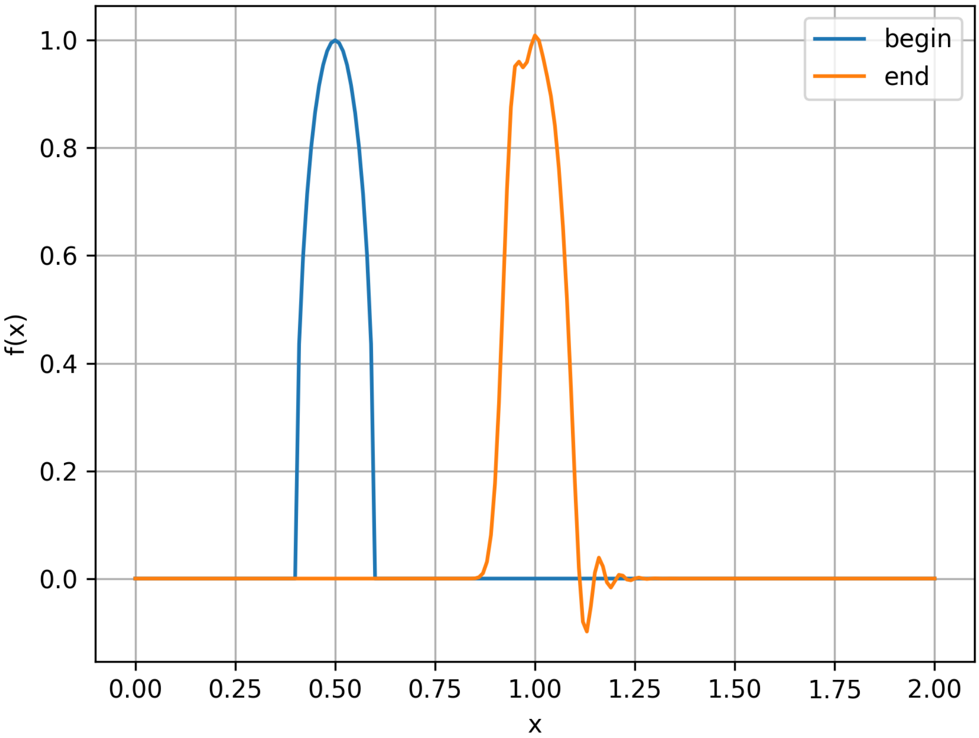

Рис. 7: Схема: $u_m^{n+1} = -0,3 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.55 \cdot u_{m-1}^n + 1.05 \cdot u_m^n + -0.3 \cdot u_m^{n-1}$

3.3 Две схемы 2-го порядка аппроксимации, лежащие на прямой – однопараметрическом множестве схем 2-го порядка аппроксимации – по разные стороны от схемы из 2.6

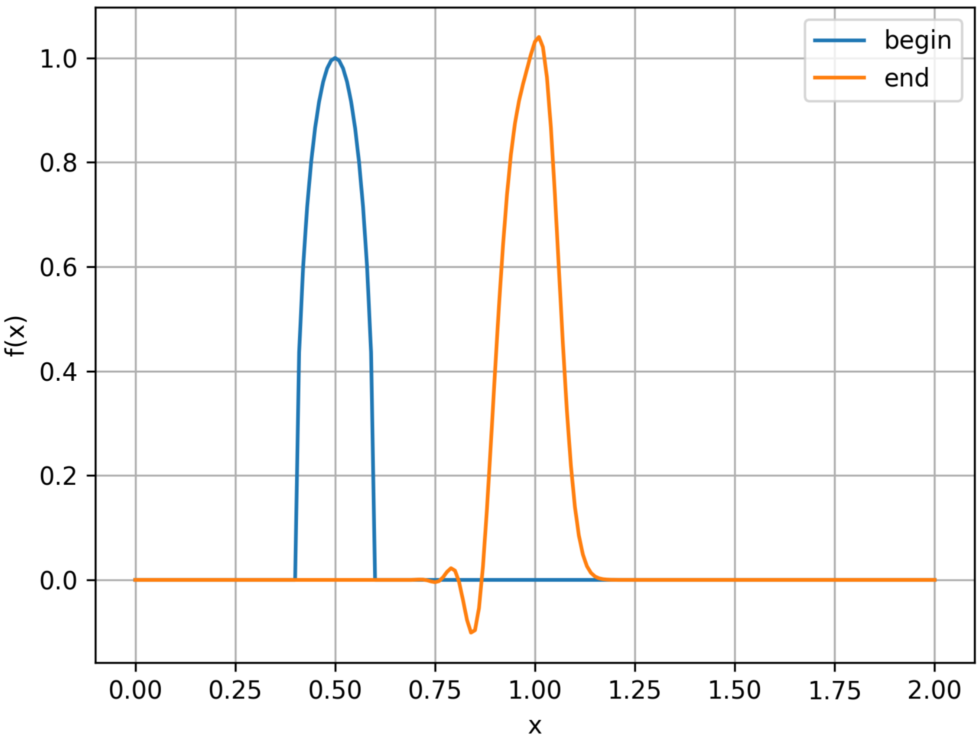

Рис. 8: Схема: $u_m^{n+1} = 0 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.1 \cdot u_{m-1}^n + 1.5 \cdot u_m^n + -0.6 \cdot u_m^{n-1}$

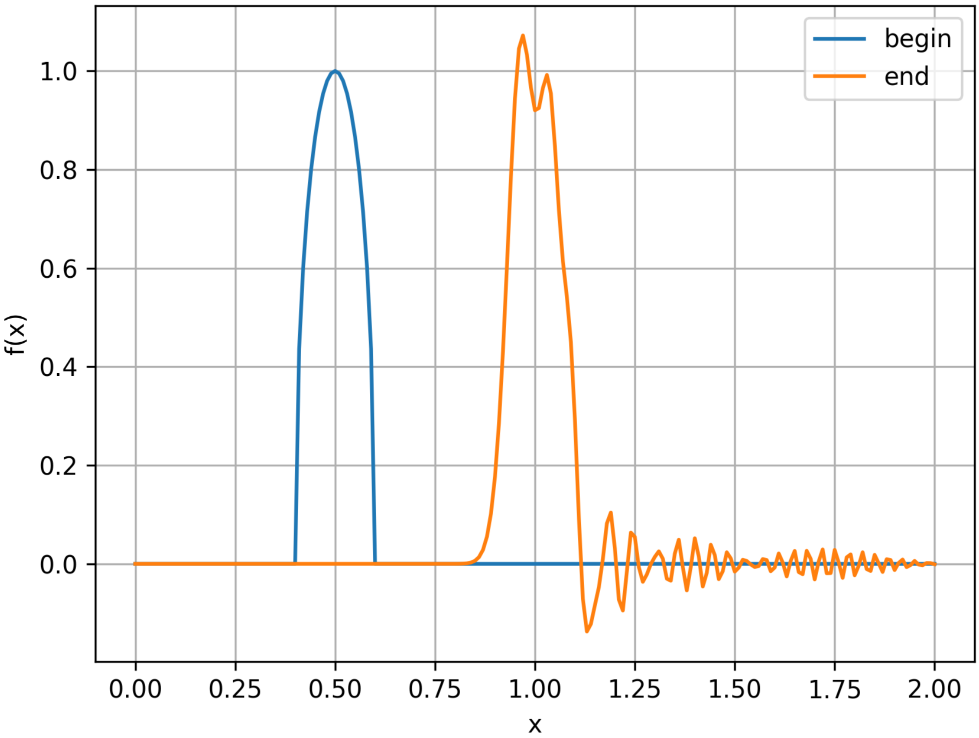

Рис. 9: Схема: $u_m^{n+1} = -0,6 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 1 \cdot u_{m-1}^{n} + 0.6 \cdot u_m^n + 0 \cdot u_m^{n-1}$

3.4 Схема 3-го порядка аппроксимации

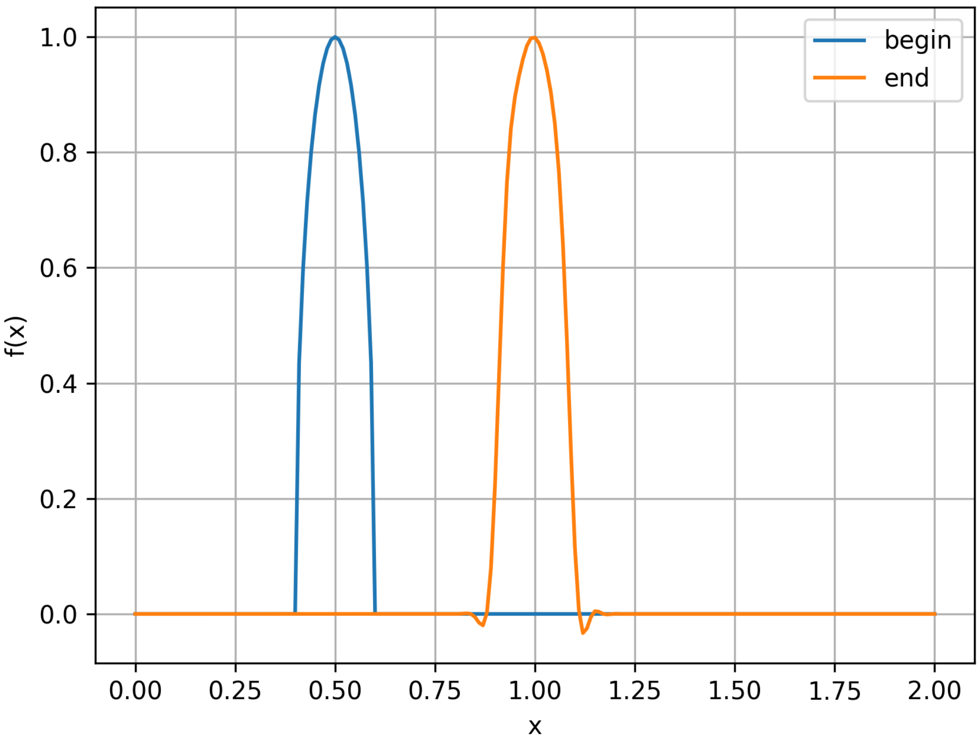

Рис. 10: Схема: $u_m^{n+1} = -0,2 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.4 \cdot u_{m-1}^{n} + 1.2 \cdot u_m^n + -0.4 \cdot u_m^{n-1}$

3.5 Гибридная схема, полученная с использованием схем из пункта 3.3 и сеточно-характеристического критерия монотонности

Схемы, использованные здесь:

$$u_m^{n+1} = 0 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.1 \cdot u_{m-1}^{n} + 1.5 \cdot u_m^{n} + -0.6 \cdot u_m^{n-1}$$

$$u_m^{n+1} = -0,6 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 1 \cdot u_{m-1}^{n} + 0.6 \cdot u_m^{n} + 0 \cdot u_m^{n-1}$$

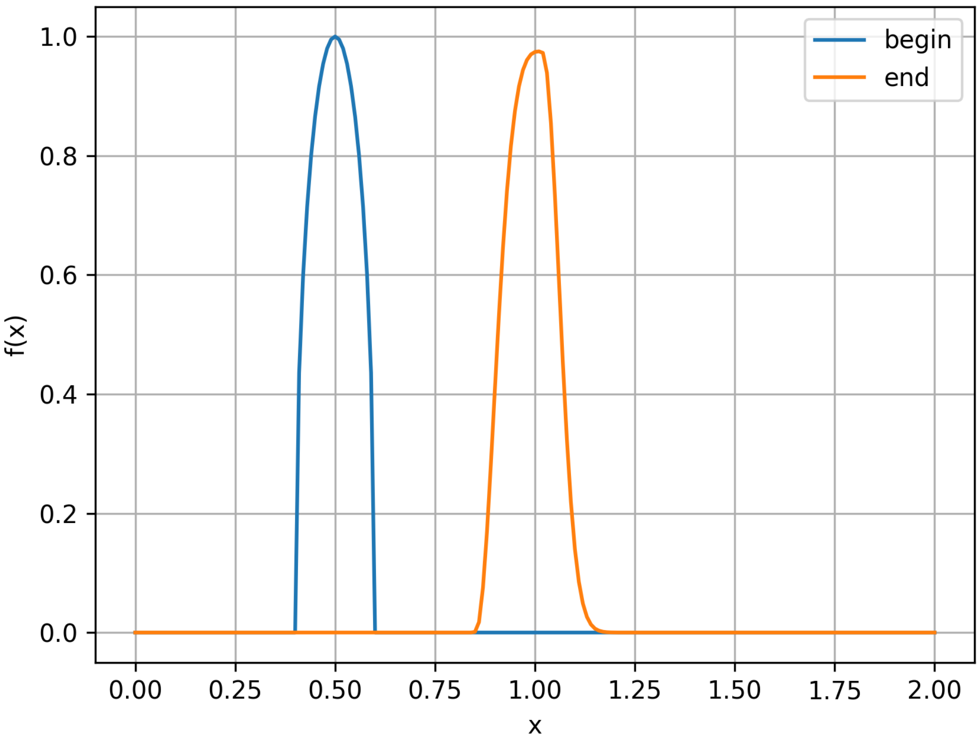

Рис. 11: Гибридная схема из 3.5

3.6 Гибридные схемы, полученные с использованием одной из схем из пункта 3.3, схемы из пункта 3.4 и сеточно-характеристического критерия монотонности

Схемы, использованные здесь:

$$u_m^{n+1} = -0,2 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.4 \cdot u_{m-1}^{n} + 1.2 \cdot u_m^n + -0.4 \cdot u_m^{n-1}$$

$$u_m^{n+1} = 0 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.1 \cdot u_{m-1}^{n} + 1.5 \cdot u_m^n + -0.6 \cdot u_m^{n-1}$$

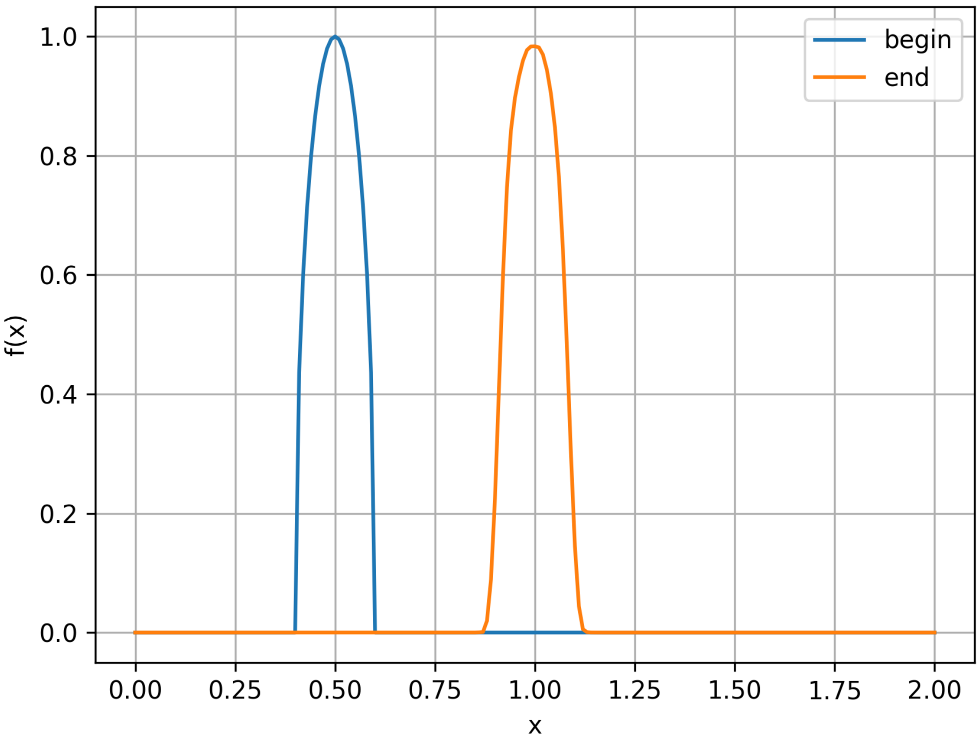

Рис. 12: Гибридная схема из 3.6

Схемы, использованные здесь:

$$u_m^{n+1} = -0,2 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.4 \cdot u_{m-1}^{n} + 1.2 \cdot u_m^n + -0.4 \cdot u_m^{n-1}$$

$$u_m^{n+1} = -0,6 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 1 \cdot u_{m-1}^{n} + 0.6 \cdot u_m^n + 0 \cdot u_m^{n-1}$$

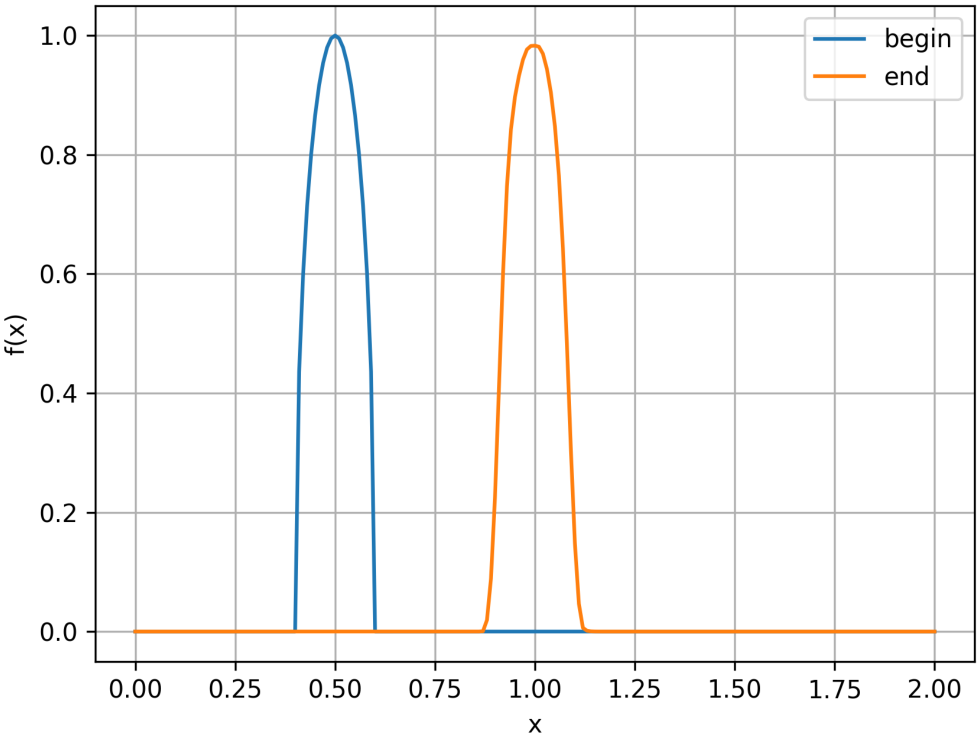

Рис. 13: Гибридная схема из 3.6

3.7 Гибридная схема, полученной с одновременным использованием двух схем из пункта 3.3, схемы из пункта 3.4 и сеточно-характеристического критерия монотонности

Схемы, использованные здесь:

$$u_m^{n+1} = -0,2 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.4 \cdot u_{m-1}^n + 1.2 \cdot u_m^n + -0.4 \cdot u_m^{n-1}$$

$$u_m^{n+1} = 0 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 0.1 \cdot u_{m-1}^n + 1.5 \cdot u_m^n + -0.6 \cdot u_m^{n-1}$$

$$u_m^{n+1} = -0,6 \cdot u_{m-1}^{n+1} + 1 \cdot u_{m-1}^n + 0.6 \cdot u_m^n + 0 \cdot u_m^{n-1}$$

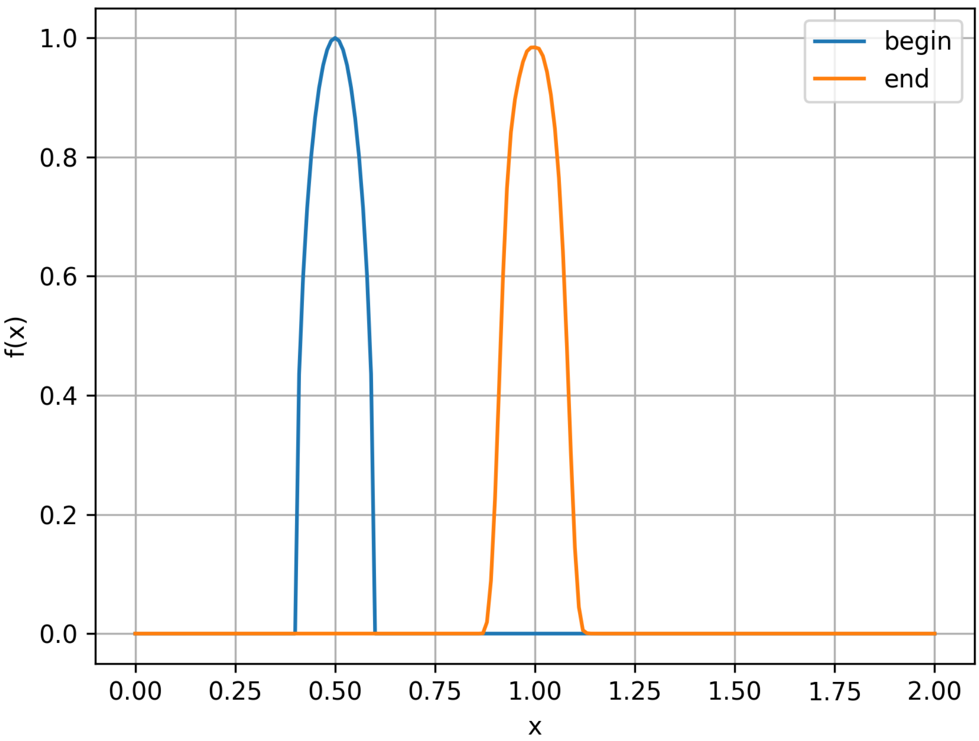

Рис. 14: Гибридная схема из 3.7