PRINCETON UNIVERSITY BULLETIN.

VOL. XIII. APRIL, 1902. No. 4.

## SUR LES PROBLEMES AUX DERIVEES PARTIELLES ET LEUR SIGNIFICATION PHYSIQUE.

PAR M. JACQUES HADAMARD.

"**La physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes . . . . elle nous fait pressentir la solution.**"—*Poincaré.*

Les principaux problèmes que les géomètres ont été conduits à se poser relativement aux équations aux dérivées partielles se ramènent à deux types généraux:—le problème de Dirichlet et ses analogues, dans lesquels la fonction inconnue, definie dans un certain domaine, doit vérifier, en chaque point de la frontière de ce domaine, *une* certaine condition (en supposant, pour fixer les idées, l'equation du second ordre); le problème de Cauchy, dans lequel les conditions à remplir en chaque point de la frontière sont au nombre de *deux*, l'une donnant la valeur de la fonction en ce point et l'autre la valeur d'une de ses dérivées premières.

Les deux problèmes ainsi posés se sont présentés dans toute sorte de questions de physique mathématique. D'autre part, on a pu trouver des cas très étendus dans lesquels l'un ou l'autre de ces problèmes se présentait comme parfaitement bien posé, je veux dire comme *possible* et *déterminé.*

Il est remarquable que ces deux circonstances soient intimement liées l'une à l'autre, et cela d'une manière assez étroite pour que deux problèmes tout-à-fait analogues en apparence puissent être l'un possible et l'autre impossible, suivant qu'ils correspondent ou non à une donnée physique.

Relativement à l'équation de Laplace

$$\text{(A)} \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}=0,$$

c'est le problème de Dirichlet (ou l'un de ses analogues) qui se présente dans les applications physiques. De fait, le problème de Dirichlet est un problème possible et déterminé. Considérons, au contraire, le problème de Cauchy relatif à l'équation (A), c'est-à-dire celui qui consiste à déterminer pour $x \geqslant 0$ une solution de cette équation telle que l'on ait pour $x=0$,

$$u=u_0, \quad \frac{\delta u}{\delta x}=u'_0,$$

$u_0$, et $u'_0$ étant deux fonctions données de $y$, $z$. Ce problème, dépourvu de signification physique, est toujours possible lorsque $u_0$ et $u'_0$ sont des fonctions analytiques. Mais on sait aujourd'hui qu'il en est tout autrement dans le cas général.

D'une manière plus précise, si l'on suppose donnée tout d'abord la fonction $u_0$, la fonction $u'_0$ est déterminée à une fonction analytique près, et la forme générale de $u'_0$ pourra s'obtenir aisément par le moyen suivant:

La fonction $u_0$ étant définie dans une certaine région du plan de $yz$, envisageons un cercle C de ce plan, entièrement situé dans la région en question, et la demisphère S qui a ce cercle comme grand cercle et est située du coté des $x$ positifs.

La fonction inconnue $u$ pourra être considérée comme déterminée par les valeurs que'lle prend dans le cercle C (savoir les valeurs $u_0$) et sur la surface hémisphérique S, et l'on peut former l'expression de $u$ à l'aide de ces quantités, car le volume S est un de ceux pour les quels la solution du problème de Dirichlet est connue. Il est aisé de voir que la partie qui correspond aux valeurs de $u$ sur S représente toujours une fonction de $x, y, z$ analytique aux environs de tout point intérieur au cercle C, de sorte que l'on a ce résultat:

Soit W le potentiel d'une double couche distribuée sur le plan de $yz$, l'épaisseur des cette double couche en chaque point étant représentée par $u_0$. Le problème de Cauchy n'est possible que si l'on a

$$u'_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{\delta W}{\delta x} + \phi,$$

$\phi$ étant une fonction *analytique* de $y$ et de $z$.

Considérons maintenant l'équation du son

$$\text{(B)} \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta_2 u}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = 0$$

L'étude de la propagation du son conduit à poser, pour cette équation, le problème de Cauchy, ce problème étant, ici, le suivant: déterminer pour $t \geq 0$, une solution $u$ de l'équation précedente, telle que l'on ait, pour $t=0$,

$$u = U, \quad \frac{\delta u}{\delta t} = U'$$

$U$, $U'$ étant des fonctions données de $x, y, z$. Un tel problème est en général, possible et déterminé. Sa solution est donnée par la formule de Poisson:

$$u\,(x, y, z, t) = \frac{\delta}{\delta t}\,[(U)\ t] + (U')\,t,$$

où $(U)$ et $(U')$ sont les valeurs moyennes de $U$ et de $U'$ sur la sphère de centre $x, y, z$ et de rayon $t$.

Mais il faudrait se garder d'énoncer cette conclusion sous la forme suivante: "Le problème de Cauchy, relatif à l'équation (B), est possible et déterminé."

En effet, si cette conclusion est vraie pour le problème que nous venons de considérer, *dans lequel on prend t pour variable principale*, elle est, au contraire, inexacte, *pour la même équation* (B), lorsque la variable principale est $x$, $y$ ou $z$, c'est-à-dire pour le problème suivant: Trouver pour $x \geq 0$, une solution $u$ de l'équation (B) telle que l'on ait, pour $x=0$,

$$u = u_0, \quad \frac{\delta u}{\delta x} = u'_0,$$

$u_0$ et $u'_0$ étant des fonctions données de $y$, $z$ et $t$.

Prenons, en effet, un cas particulier, celui où les fonctions $u_0$, $u'_0$ sont indépendantes de $t$. Dans ce cas, *si la solution cherchée u est unique*, elle sera certainement indépendante de $t$. Mais alors l'équation (B) se réduit à (A) et, d'après ce qui précède, le problème de Cauchy sera, en général, ìmpossible.

Reste a savoir s'il ne peut pas exister une infinité de solutions $u$ prenant, ainsi que $\frac{\delta u}{\delta x}$, les mêmes valeurs pour $z=0$. Il est clair que cette question revient à la suivante: L'équation (B) peut-elle admettre une solution $u$, définie pour $x \geq 0$ et s'annulant ainsi que $\frac{\delta u}{\delta x}$, pour $x=0$ (sans que $u$ soit identiquement nul.)

Une tèlle solution $u$ sera définie seulement pour les valeurs positives de $x$. Mais on pourra étendre sa définition aux valeurs negatives de cette variable, en posant

$$u(-x, y, z, t) = u(x, y, z, t),$$

et une telle extension respectera la continuité de $u$ et de ses dérivées pour $x = 0$.

Dès lors, on pourra considérer la fonction $u$ comme définie par ses valeurs $U$ et les valeurs $U'$ de sa dérivée par rapport à $t$, pour $t = 0$, et la représenter par la formule de Poisson, précédemment rappelée. Pour que l'expression ainsi écrite vérifie les conditions initiales données, il faudrait que l'on ait, pour $x = 0$,

$$(1) \qquad \frac{\delta}{\delta t}[(U).t]+(U').t=0,$$

$$(2) \qquad \frac{\delta}{\delta t}\left[\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right).t\right]+\left(\frac{\delta U'}{\delta x}\right).t=0.$$

Mais $(U)$ et $(U')$ sont évidemment des fonctions paires de $t$. Par conséquent, dans chacune des deux relations précédentes, les deux termes du premier membre devront être nuls séparément. Si l'on remarque encore que l'égalité $\frac{\delta}{\delta t}[(U).t]=0$ entraîne $(U)=0$ si l'on suppose (comme ce le cas ici) $U$ fini pour $t=0$, on voit que l'on est ramené au problème suivant:

*Comment doit être choisie une fonction continue $V(x, y, z)$ pour que l'intégrale double*

$$(3) \qquad \iint V\,dS$$

*étendue à la surface de la sphère $\Sigma$ qui a pour centre $(0, y_0, z_0)$ et pour rayon $t$ (autrement dit d'une sphère quelconque ayant son centre dans le plan $x=0$), soit nulle, quelsque soient $y_0$, $z_0$ et $t$?*

L'une quelconque des fonctions

$$U,\ U',\ \frac{\delta U}{\delta x},\ \frac{\delta U'}{\delta x}$$

devra vérifier la condition qui precède.

Pour résoudre le problème que nous venons de poser, laissons d'abord la fonction $V$ quelconque et désignons par $\phi(y_0, z_0, t)$ la quantité (3). Nous pouvons remarquer tout d'abord que la connaissance de la fonction $\phi$ entraîne celle de la fonction

$$\psi(y_0,\ z_0,\ t)=\iiint V\,dx\ dy\ dz,$$

où l'intégrale est étendue au volume de la sphère $\Sigma$. On a

$$(4) \qquad \psi(y_0, z_0, t)=\int_0^t \phi\ dt$$

Or on peut écrire

$$(5) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta y_0}=\frac{1}{t}\iint V(y-y_0)\ dS,$$

l'intégrale double étant toujours étendue à la surface de $\Sigma$. C'est, en effet, ce qui l'on reconnaît en considérant la différence des deux intégrales

$$\psi(y_0, z_0, t) \text{ et } \psi(y_0+\Delta y_0, z_0, t),$$

—lesquelles sont deux intégrales triples étendues à deux sphères $\Sigma$ et $\Sigma'$ de même rayon, mais de centres différents—, comme la différence algébrique de deux intégrales étendues, l'une à la région extérieure à $\Sigma$ et intérieure à $\Sigma'$, l'autre à la région exterieure á $\Sigma'$ et intérieure à $\Sigma$. Il est essentiel d'observer que *ce raisonnement ne suppose pour $V$ d'autre propriété que d'être continue.*

On aura de même

$$\frac{\delta\psi}{\delta z_0}=\frac{1}{t}\iint_\Sigma V(z-z_0)\ dS.$$

D'après cela, si la fonction $V$ est choisie de manière à annuler identiquement $\phi(y_0, z_0, t)$, elle annulera aussi les quantités.

$$\iint_\Sigma V(y-y_0)\ dS, \iint_\Sigma V(z-z_0)\ dS.$$

Mais on peut raisonner sur ces dernières comme sur la première et, en continuant ainsi, on voit que l'intégrale

$$\iint_\Sigma V(y-y_0)^h\ (z-z_0)^k\ dS$$

*est nulle quels que soient les entiers positifs $h$ et $k$.*

Or la fonction

$$\mu e^{-\mu^2[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]}$$

est (quelsque soient les nombres $y_1$, $z_1$ et $\mu$) développable en série entière par rapport à $y-y_1$ et $z-z_1$ et uniformément convergente. Si, comme nous le supposons, $V$ est partout fini, on pourra donc écrire

$$\iint_\Sigma \mu\ Ve^{-\mu^2[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]}dS=0.$$

Mais, si nous faisons tendre $\mu$ vers $+\infty$, la limite du premier membre (en supposant que la droite $y=y_1$, $z=z_1$, coupe $\Sigma$ et désignant par $\pm x$ l'abscisse du point d'intersection) est à un facteur indifférent près,

$$V(x_1, y_1, z_1)+V(-x_1, y_1, z_1).$$

Ceci devant être nul pour tous les systèmes de valeurs de $x_1$, $y_1$, $z_1$, *la fonction* $V$ *doit-être impaire par rapport à* $x$.

Inversement, s'il en ainsi, l'intégrale (3) sera bien nulle.

Revenons maintenant à nos fonctions $U$, $U'$. Il résulte de ce qui precède que $U$ est impair par rapport à $x$, et qu'il en est de même de $\frac{\delta U}{\delta x}$.

Or si $\frac{\delta U}{\delta x}$ est une fonction impaire, $U$ est une fonction paire. Donc $U$ est identiquement nul.

D'autre part, le même raisonnement s'applique à la quantité $U'$. Ces deux quantités faisant connaître la solution cherchée $u$, en vertu de la formule de Poisson, nous avons démontré la proposition suivante:

*La seule solution de l'équation* (B), *qui, pour* $x=0$, *satisfasse aux conditions* $u_0=u'_0=0$, *est identiquement nulle.*

Autrement dit, le problème de Cauchy relatif à l'équation (B), avec $z=0$ comme multiplicité initiale, ne peut être indéterminé. Il en résulte, comme nous l'avons vu, qu'il est en général impossible.

Ceci nous fournit la conclusion que nous nous proposions de mettre en évidence, je veux dire la profonde différence qui existe entre le problème de Cauchy relatif à l'équation (B), la multiplicité initiale étant $t=0$, et le problème analogue pour le cas où les données initiales sont relatives á $x=0$. La théorie de ce second problème, bien loin d'être identique à celle du premier, ce rapprochera, nous venons de le voir, de la théorie des équations à caractéristiques imaginaires.*

* Avant de livrer le present article à l'impression j'ai connaissance (Hamel, Uber die Geometrieen in denen die Geraden die Kürzesten sind, pp. 73 et suiv., Göttingen, 1901) d'une méthode proposée par M. Holmgren pour montrer l'unicité de la solution de certaines équations aux dérivées partielles, et qui s'appliquerait aisement au problème que nous venons de traiter. La méthode donné dans le texte a été indiquée dans ma *Notice sur mes travaux scientifiques*, Paris, Gauthier-Villars, février 1901.

## AN ELEMENTARY PROOF OF A THEOREM OF FOURIER AND BUDAN.

BY H. B. FINE.

*Let* $f(x)=0$ *be an algebraic equation of the nth degree, with real coefficients, and* $a$ *and* $b$, $a<b$, *any two real numbers.*

*The number of roots of* $f(x)=0$ *which lie between* $a$ *and* $b$ *is either the same as the difference between the number of variations of sign in*

$$f(a), f'(a), f''(a), \dots \overset{(n)}{f}(a)$$
$$\text{and } f(b), f'(b), f''(b), \dots \overset{(n)}{f}(b),$$

*or less than this difference by an even number.* (Fourier and Budan.)

This theorem admits of the following elementary proof:

As is well known, the equation whose roots are less than the roots of $f(x)=0$, (1) by any given number, as $c$, is

$$\frac{\overset{n}{f}(c)}{n!}x^n + \frac{\overset{n-1}{f}(c)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots + f'(c)\,x + f(c) = 0$$

The coefficients in (2) can be obtained by successive divisions. Thus, if $f(x)$ is divided by $x-c$, the remainder is $f(c)$, if the quotient thus obtained is divided by $x-c$, the remainder is $f'(c)$; and so on.

Now it can be readily shown that, if $Q$, and $r$ denote the quotient and remainder obtained by dividing any polynomial $f(x)$ by $x-c$, *c being positive*, then

1. If $r$ has the *same* sign as the constant term of $f(x)$, the number of variations in $Q$, $r$ is the same as that in $f(x)$ or less by an *even* number.

2. If $r$ is 0, or if its sign is *contrary* to that of the constant term of $f(x)$, the number of variations in $Q$, $r$ is less than that in $f(x)$ by *one* or some greater *odd* number.

And by applying these considerations to the successive divisions above described we arrive at the conclusions: