Matemática Discreta - Año 2025
Facultad de Ciencias Exactas UNRC
Práctico 1

§ **Ejercicios complejos.** Los ejercicios marcados con (*) son para resolver como práctica para el parcial y ser consultados.

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones, donde a, b son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a) $a + a = a$ implica que $a = 0$.

b) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

c) $-a = (-1) \cdot a$.

d) Como siempre x^2 denota $x \cdot x$. Demostrar que dados dos enteros a y b tal que $a + b \neq 0$, entonces existe un único c tal que $(a + b)c = a^2 - b^2$.

(2) Idem (1), donde a, b, c son siempre números enteros.

a) $c < 0$ implica que $0 < -c$.

b) $a + c < b + c$ implica que $a < b$.

c) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$

(3) Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.

b) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.

(4) (*) Deducir de la proposición 1.2.3 que $n + 1$ es el menor entero mayor que n para todo n en $\mathbb{Z}$.

(5) Demostrar que si un conjunto X tiene mínimo, este es único. Dicho más formalmente: demostrar que si existen $c, c' \in X$ tal que $c \leq x$ y $c' \leq x$ para todo $x \in X$, entonces $c = c'$.

(6) Calcular, evaluando, las siguientes expresiones:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$ *b)* $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$

c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ *d)* $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$

(7) Usando las propiedades de las potencias, calcular:

a) $3^2 2^5 - 3^5 2^2$ *b)* $\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)$

(8) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $\left(2^{2^n}\right)^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $(2n+2)! = 2(n+1)!$.

(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

c) $^{(*)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i^2+1)i! = n(n+1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

(10) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11n + 3$, y usar el principio de inducción para probar dicha desigualdad.

(11) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ y $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que $u_n = 3^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(12) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + (n-1)(n-3)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(13) Sea q un número real distinto de $0, 1$ y u_n definida recursivamente por: $u_0 = 1$, $u_1 = q$, $u_n = (q-1)u_{n-1} + qu_{n-2}$ $\forall\ n \geq 2$.

a) Calcule u_2, u_3 y u_4

b) Proponga una fórmula para el término general u_n y pruébela por inducción.

(14) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

a) $n = n^2$, *b)* $3^n = 3^{n+2}$, *c)* $3^{3n} = 3^{n+2}$.

(15) Probar las siguientes afirmaciones usando el principio de inducción completa.

a) $2n + 1 < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

b) $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

c) El producto de tres números enteros positivos consecutivos es divisible por 6.