Modelo de primer parcial

Lautaro Luna

Coloreo de Grafos

Pregunta (a) [2 puntos]
Proponga un grafo con al menos 4 (cuatro) nodos, al menos 6 (seis) aristas, y una forma de colorear dicho grafo con una cantidad mínima de colores.

Pregunta (b) [3 puntos]
Mostrar formalmente que el grafo propuesto en la pregunta (a) satisface las siguientes restricciones de coloreo:

(R1) El coloreo es entre nodos y colores:
$\forall n, c : \text{ coloring2}(n, c) \rightarrow (\text{node1}(n) \wedge \text{color1}(c))$

(R2) Todo nodo tiene un único color:

(a) $\forall n : \text{ node1}(n) \rightarrow (\exists c : \text{ coloring2}(n, c))$

(b) $\forall n, c, c' : (\text{coloring2}(n, c) \wedge \text{coloring2}(n, c')) \rightarrow \text{eq2}(c, c')$

Pregunta (c) [2 puntos]
Teniendo en cuenta los predicados `node1` y `edge2`, y quizás otros, formalizar las siguientes propiedades:

(P1) Todo nodo es adyacente a un nodo llamado `proxy`.

(P2) Todo nodo puede alcanzar a cualquier otro nodo en 2 pasos.

Pregunta (d) [3 puntos]]
Mostrar formalmente si el grafo propuesto en la pregunta (a) satisface, o no satisface, las propiedades formalizadas en la pregunta (c).

Pregunta (e) [1 punto]
Sea k el número mínimo de colores propuesto en la pregunta (a), justificar que el grafo propuesto en esa misma pregunta no puede colorearse con menos colores.

1 Pregunta (a)

Se propone el siguiente modelo, que consta de 4 nodos y 6 aristas. La mínima cantidad de colores (k) con la que se puede resolver es 2.

Δ
1
2
3
4
5
6

	$node_1$
1	1
2	1
3	1
4	1
5	0
6	0

	$color_1$
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	1

Constantes	
a	1
proxy	2
c	3
d	4
c_1	5
c_2	6

$edge_2$

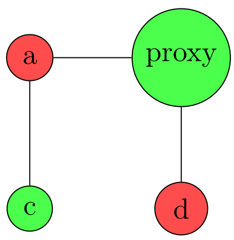
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

$coloring_2$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

eq_2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1



1.1 Formulas a valuar

- $(\forall n, c :: coloring_2(n, c) \Rightarrow (node_1(n) \wedge color_1(c)))$
- $(\forall n :: node_1(n) \Rightarrow (\exists c :: coloring_2(n, c)))$
- $(\forall n, c, c' :: coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c') \Rightarrow eq_2(c, c'))$
- $(\forall n :: node_1(n) \Rightarrow edge_2(n, 2))$
- $(\forall n, m :: node_1(n) \wedge node_1(m) \Rightarrow (\exists p :: edge_2(n, p) \wedge edge_2(p, m)))$
- $(\exists c :: color_1(c) \Rightarrow (\forall n :: coloring_2(n, c)))$

2 Pregunta (b)

2.1 R1

1 $[\![(\forall n, c :: coloring_2(n, c) \Rightarrow (node_1(n) \wedge color_1(c)))]\!]$

2 min

3 $[\![coloring_2(n, c) \Rightarrow node_1(n) \wedge color_1(c)]\!]$ cuando $[n = 1$ y $c \in [1, 4] \cup [6]]$, o bien
cuando $[n \in [2, 3]$ y $c \in [1, 5]]$, o bien
cuando $[n = 4$ y $c \in [1, 4] \cup [6]]$, o bien
cuando $[n \in [5, 6]$ y $c \in [1, 6]]$

4 $max(1 - [\![coloring_2(n, c)]\!], [\![node_1(n) \wedge color_1(c)]\!])$

5 $[\![coloring_2(n, c)]\!]$

6 0

7 1

8 $[\![coloring_2(n, c) \Rightarrow node_1(n) \wedge color_1(c)]\!]$ cuando $[n = 1$ y $c = 5]$, o bien
cuando $[n \in [2, 3]$ y $c = 6]$, o bien
cuando $[n = 4$ y $c = 5]$

9 $max(1 - [\![coloring_2(n, c)]\!], [\![node_1(n) \wedge color_1(c)]\!])$

10 $[\![coloring_2(n, c)]\!]$

11 1

12 $[\![node_1(n) \wedge color_1(c)]\!]$

13 $min([\![node_1(n)]\!], [\![color_1(c)]\!])$

14 $[\![node_1(n)]\!]$

15 1

16 $[\![color_1(c)]\!]$

17 1

18 1

19 1

Esta deducción muestra que $coloring_2(n, c)$ sólo es verdadera cuando n es un nodo válido y c un color válido. En todos los casos posibles, la implicación $coloring_2(n, c) \Rightarrow node_1(n) \wedge color\_1(c)$ se verifica, cumpliendo así con la restricción (R1).

2.2 R2

2.2.1 (a)

1	$\llbracket(\forall n :: node_1(n) \Rightarrow (\exists c :: coloring_2(n,c)))\rrbracket$
2	min
3	$\llbracket node_1(n) \Rightarrow (\exists c :: coloring_2(n,c))\rrbracket$ cuando $[n \in [5] \cup [6]]$
4	$max(1 - \llbracket node_1(n)\rrbracket, \llbracket \exists c :: coloring_2(n,c)\rrbracket)$
5	$\llbracket node_1(n)\rrbracket$
6	0
7	1
8	$\llbracket node_1(n) \Rightarrow (\exists c :: coloring_2(n,c))\rrbracket$ cuando $[n = 1$ y $c = 5]$, o bien cuando $[n \in [2,3]$ y $c = 6]$, o bien cuando $[n = 4$ y $c = 5]$
9	$max(1 - \llbracket node_1(n)\rrbracket, \llbracket \exists c :: coloring_2(n,c)\rrbracket)$
10	$\llbracket node_1(n)\rrbracket$
11	1
12	$\llbracket(\exists c :: coloring_2(n,c)\rrbracket$
13	1
14	1
15	1

Esta deducción verifica que todo nodo válido n está asociado al menos a un color mediante $coloring_2(n,c)$. Incluso cuando $node_1(n)$ es falso, la implicación sigue siendo verdadera por vacuidad. Así, se cumple la restricción (R2a).

2.2.2 (b)

1	$[\![(\forall n, c, c' :: coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c') \Rightarrow eq_2(c, c'))]\!]$
2	min
3	$[\![coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c') \Rightarrow eq_2(c, c')]\!]$ cuando $[n = 1,\ c \in [1, 4] \cup [6]$ y $c' = c]$, o bien cuando $[n \in [2, 3],\ c \in [1, 5]$ y $c' = c]$, o bien cuando $[n = 4,\ c \in [1, 4] \cup [6]$ y $c' = c]$, o bien cuando $[n \in [5, 6],\ c \in [1, 6]$ y $c' = c]$
4	$max(1 - [\![coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c')]\!], [\![eq_2(c, c')]\!])$
5	$[\![coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c')]\!]$
6	$min([\![coloring_2(n, c)]\!], [\![coloring_2(n, c')]\!])$
7	$[\![coloring_2(n, c)]\!]$
8	0
9	0
10	1
11	$[\![coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c') \Rightarrow eq_2(c, c')]\!]$ cuando $[n = 1,\ c = 5,$ y $c' = c]$, o bien cuando $[n \in [2, 3],\ c = 6$ y $c' = c]$, o bien cuando $[n = 4,\ c = 5$ y $c' = c]$
12	$max(1 - [\![coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c')]\!], [\![eq_2(c, c')]\!])$
13	$[\![coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c')]\!]$
14	$min([\![coloring_2(n, c)]\!], [\![coloring_2(n, c')]\!])$
15	$[\![coloring_2(n, c)]\!]$
16	1
17	$[\![coloring_2(n, c')]\!]$
18	1
19	$[\![eq_2(c, c')]\!]$
20	1
21	1
22	1

Esta deducción confirma que si un nodo n está coloreado con dos colores c y c', entonces esos colores deben ser iguales. En todos los casos posibles, $coloring_2(n, c) \wedge coloring_2(n, c') \Rightarrow eq_2(c, c')$ se cumple, garantizando que cada nodo tiene un único color asignado, como exige la restricción (R2b).

3 Pregunta (c)

3.1 (P1)

Todo nodo es adyacente a un nodo llamado proxy.
$(\forall n :: node_1(n) \Rightarrow edge_2(n, 2)) \quad (\text{proxy} = 2)$

3.2 (P2)

Todo nodo puede alcanzar a cualquier otro nodo en 2 pasos.
$(\forall n, m :: node_1(n) \wedge node_1(m) \Rightarrow (\exists p :: edge_2(n, p) \wedge edge_2(p, m)))$

4 Pregunta (d)

4.1 (P1)

1	$[\![(\forall n :: node_1(n) \Rightarrow edge_2(n, 2))]\!] \quad (\text{proxy} = 2)$
2	min
3	$\quad [\![node_1(n) \Rightarrow edge_2(n, 2)]\!]$ cuando $[n = 3]$
4	$\quad max(1 - [\![node_1(n)]\!], [\![edge_2(n, 2)]\!])$
5	$\qquad [\![node_1(n)]\!]$
6	$\qquad 1$
7	$\qquad [\![edge_2(n, 2)]\!]$
8	$\qquad 0$
9	$\quad 0$
10	0

Esta deducción muestra que la propiedad (P1) no se cumple, ya que existe al menos un nodo válido $n = 3$ que no es adyacente al nodo `proxy` (nodo 2). Por lo tanto, la implicación $(node_1(n) \Rightarrow edge_2(n, 2))$ es falsa para ese caso.

4.2 (P2)

1 $\llbracket (\forall n, m :: node_1(n) \wedge node_1(m) \Rightarrow (\exists p :: edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m))) \rrbracket$

2 min

3 $\quad \llbracket node_1(n) \wedge node_1(m) \Rightarrow (\exists p :: edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m)) \rrbracket$ cuando $[n = 3$ y $m = 4]$

4 $\quad max(1 - \llbracket node_1(n) \wedge node_1(m) \rrbracket, \llbracket (\exists p :: edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m) \rrbracket)$

5 $\quad\quad \llbracket node_1(n) \wedge node_1(m) \rrbracket$

6 $\quad\quad min(\llbracket node_1(n) \rrbracket, \llbracket node_1(m) \rrbracket)$

7 $\quad\quad\quad \llbracket node_1(n) \rrbracket$

8 $\quad\quad\quad 1$

9 $\quad\quad \llbracket node_1(m) \rrbracket$

10 $\quad\quad 1$

11 $\quad\quad \llbracket (\exists p :: edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m)) \rrbracket$

12 $\quad\quad max$

13 $\quad\quad\quad \llbracket edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m) \rrbracket$ cuando $[p = 1]$

14 $\quad\quad\quad min(\llbracket edge_2(n,p) \rrbracket, \llbracket edge_2(p,m) \rrbracket)$

15 $\quad\quad\quad\quad \llbracket edge_2(n,p) \rrbracket$

16 $\quad\quad\quad\quad 1$

17 $\quad\quad\quad \llbracket edge_2(p,m) \rrbracket$

18 $\quad\quad\quad 0$

19 $\quad\quad\quad \llbracket edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m) \rrbracket$ cuando $[p \in [2,6]]$

20 $\quad\quad\quad min(\llbracket edge_2(n,p) \rrbracket, \llbracket edge_2(p,m) \rrbracket)$

21 $\quad\quad\quad\quad \llbracket edge_2(n,p) \rrbracket$

22 $\quad\quad\quad\quad 0$

23 $\quad\quad\quad 0$

24 $\quad\quad 0$

25 $\quad 0$

26 0

Esta deducción muestra que la propiedad (P2) no se cumple, ya que existen nodos válidos $n = 3$ y $m = 4$ para los cuales no se encuentra ningún nodo intermedio p tal que $edge_2(n,p) \wedge edge_2(p,m)$. Por lo tanto, no todos los nodos pueden alcanzarse mutuamente en dos pasos.

5 Pregunta (e)

$[\![(\exists c :: color_1(c) \wedge (\forall n :: coloring_2(n, c)))]\!]$

max

$[\![color_1(c) \wedge (\forall n :: coloring_2(n, c)]\!]$ cuando $[c \in [1, 4]]$

$min([\![color_1(c)]\!], [\![(\forall n :: coloring_2(n, c))]\!])$

$[\![color_1(c)]\!]$

0

0

$[\![color_1(c) \wedge (\forall n :: coloring_2(n, c)]\!]$ cuando $[c = 5]$

$min([\![color_1(c)]\!], [\![(\forall n :: coloring_2(n, c))]\!])$

$color_1(c)$

1

$[\![(\forall n :: coloring_2(n, c))]\!]$

min

$[\![coloring_2(n, c)]\!]$ cuando $n = 2$

0

0

0

$[\![color_1(c) \wedge (\forall n :: coloring_2(n, c)]\!]$ cuando $[c = 6]$

$min([\![color_1(c)]\!], [\![(\forall n :: coloring_2(n, c))]\!])$

$color_1(c)$

1

$[\![(\forall n :: coloring_2(n, c))]\!]$

min

$[\![coloring_2(n, c)]\!]$ cuando $n = 1$

0

0

0

0

Esta deducción demuestra que no existe un solo color c tal que todos los nodos estén coloreados con él. Se evaluaron todos los colores posibles y en ningún caso se cumple $\forall n : coloring_2(n, c)$. Por lo tanto, el grafo no puede colorearse con menos de k colores, justificando que la cantidad propuesta en la pregunta (a) es mínima.