Matemática Discreta, Principio deAdición y Principio de la Multiplicación.

Julio C. Barros
Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de Río Cuarto. 11 de septiembre de 2025.

1 Principio de Adición

Supongamos que A y B no son conjuntos disjuntos es decir $A \cap B \neq \emptyset$ supongamos que $|A \cap B| = I$ es el cardinal de la intersección y que $|A| = a + I$ es el número de elementos de A en este caso el número a representa la cantidad de elementos que está propiamente en el conjunto A y que no están en el conjunto B. De forma similar tomamos $|B| = b+I$ (ver Figura 1). Entonces

$$|A| + |B| = a + I + b + I$$

$$|A| + |B| = a + b + 2I$$

por otro lado, si contamos el número de elementos de la unión

$$|A \cup B| = a + b + I$$

luego,

$$|A \cup B| = \underbrace{a + b + 2I}_{=|A|+|B|} - \underbrace{I}_{=|A \cap B|}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$\square$

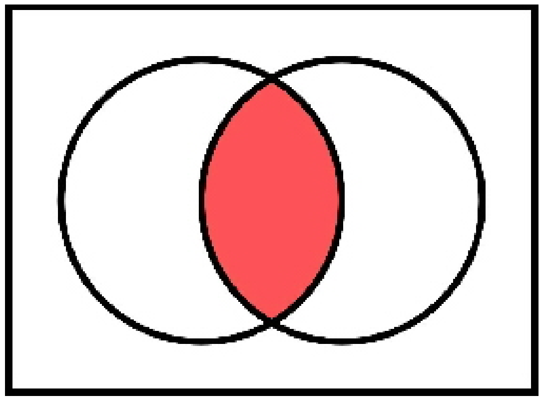

Figure 1: Figura 1

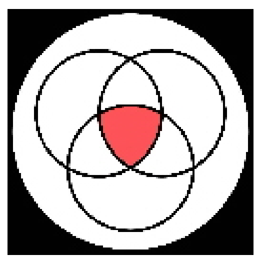

Figure 2: Figura 2

Ejercicio: Deducir que para tres conjuntos se verifica la siguiente fórmula para calcular el cardinal de la unión. Supongamos que A, B y C no son conjuntos disjuntos (ver Figura 2). entonces,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$\square$

2 Principio de la Multiplicación

Ejemplo: Sea $X = \{1, 2, 3\}$, de cuántas formas se pueden elegir dos de estos números en forma ordenada? En otras palabras cuántos pares ordenados podemos formar con los elementos del conjunto X.

$$\left(\underbrace{--}_{3 \text{ posibilidades}} \underbrace{--}_{3 \text{ posibilidades}} \right)$$

por el principio de la multiplicación se tiene

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

□

Ejemplo: Cuántas formas de elegir tres números en forma ordenada hay en el intervalo natural $[1,3]=\{1,2,3\}$

$$\left(\underbrace{--}_{\text{3 posibilidades}}\underbrace{--}_{\text{3 posibilidades}}\underbrace{--}_{\text{3 posibilidades}}\right)$$

por el principio de la multiplicación se tiene

$$3\cdot 3\cdot 3=3^3=27$$

Proposición 2.2.1

Idea de la demostracoión. Sea $A=[1,\ldots,n]=\{1,\ldots,n\}$

$$\left(\underbrace{\underbrace{--}_{n-\text{posibilidades}}\quad\cdots\quad\underbrace{--}_{n-\text{ posibilidades}}}_{m\text{-upla}}\right)$$

tenemos por elprincipio de multiplicación

$$\underbrace{n\cdots n}_{m-\text{factores}}=n^m$$

□

Ejemplo: Conjunto de partes. Sea $X=\{a,b,c\}$ entonces, $|X|=3$ y el conjunto de partes de X resulta

$$\mathcal{P}(X)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

observar que en el conjunto $\mathcal{P}(X)$ si aparece un subconjunto A del conjunto X, entonces en $\mathcal{P}(X)$ también aparece el complemento del subconjunto A respecto de X, es decir, A^C. El cardinal de $\mathcal{P}(X)$ está dado por

$$|\mathcal{P}(X)|=8=2^3=2^{|X|}$$

□

3 El Factorial

$$(n+1)!=(n+1)\cdot\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{n!}$$

$$(n+1)!=(n+1)\,n!=n!\,(n+1)$$

Ejemplo: Sea $[1,2,3] = \{1,2,3\}$ entonces el númro de las selecciones de 3 elementos en forma ordenada y sin repetición de $[1,2,3]$ son exactamente

$$\left(\underbrace{\underbrace{--}_{3-\text{posibilidades}} \quad \underbrace{--}_{2-\text{posibilidades}} \quad \underbrace{--}_{1-\text{ posibilidad}}}_{\text{3-upla}} \right)$$

tenemos por elprincipio de multiplicación

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Si escribimos por extensión todas estas ternas son

$$123, \ 132, \ 213, \ 231, \ 312, \ 321$$

$\square$