Matemática Discreta - Números de Fibonacci

Julio C. Barros
Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de Río Cuarto. 2 de septiembre de 2025.

1 Sucesión de Fibonacci

Recordemos que los Número de Fibonacci están dados por una sucesión definida por recurrenccia en la forma que sigue:

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \ n \geq 2 \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Si escribimos los 8 primeros términos de esta sucesión resultan

$$F_1 = 1, \ F_2 = 1, \ F_3 = 2, \ F_4 = 3, \ F_5 = 5, \ F_6 = 8, \ F_7 = 13, \ F_8 = 21, \ \cdots$$

es fácil expresar en lenguaje natural la regla de obtención de los Número de Fibonacci, esto es, dados dos números de Fibonacci rotulados con subíndices consecutivos el siguiente se obtiene sumando estos dos números. Se dice que la Sucesión de Fibonacci es una **sucesión de recurrencia de orden 2**.

2 Propiedades de los Números de Fibonacci

1. Suma de los primeros n Números de Fibonacci. Si se quiere sumar los primeros n números de Fibonacci, es decir, se quiere obtener

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n \tag{2}$$

por ejemplo $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_8 = 54$. Nos preguntamos si hay alguna relación con la fórmula de recurrencia dada en (1) y esta suma para un n arbitrario. Para contestar esta pregunta se puede ver que a partir de (1) , podemos expresar para los $n \geq 2$ las siguientes identidades,

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n \tag{3}$$

de donde se desprende

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned} \tag{4}$$

sumado el primer miembro de las identidades de (4) se obtiene

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2$$

es decir

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,\ n \geq 2 \tag{5}$$

Observar que la fórmula obtenida en (5) se verifica para el caso $F_1+F_2+F_3+\cdots+F_8 = 54 = F_{10} - 1$. Todo el desarrollo ralizado corresponde a la **heurística del problema**, esto es, como inferimos una dada fórmula o proposición en general. Ahora para formalizar la fórmula dada en (5) usamos el **Principio de Inducción,** puesto que la proposición propuesta se debe demostrar para $n \geq 2$, entoces utilizamos el **Teorema 1.4.5 (Principio de Inducción Completa)**.

i) Caso base: debemos probar que $P(2)$ es verdadera, esto es, queremos ver si se satisface $F_1+F_2 = F_4-1$. Puesto que $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ y $F_4 = 3,$ enonces

$$F_1 + F_2 = F_4 - 1 \leftrightarrow 1 + 1 = 3 - 1$$

con lo cual se satisface el caso base.

ii) Hipótesis Inductiva: suponemos que $P(h)$ es verdadera para todo $2 \leq h \leq k$ esto dice,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_h = F_{h+2} - 1,\ 2 \leq h \leq k$$

con esta Hipótesis Inductiva debemos probar que se cumple el paso inductivo, es decir, probar la Tesis Inductiva que se foemula de la siguiente forma.

iii) Tesis Inductiva: Si se cumple que $P(h)$ es verdadera para todo $2 \leq h \leq k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera, para nuestro caso.

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+3} - 1 \tag{6}$$

iv) Paso Inductivo: Basados en la Hipótesis Inductiva debemos probar que es válida la fórmula (6), para ver esto, observemos que, el lado izquierdo de la igualdad (6), se escribe en la forma

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k + F_{k+1} = \underbrace{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k}_{=F_{k+2}-1} + F_{k+1}$$

donde se usa la Hipótesis Inductiva con $h = k$, de esta forma obtenemos la siguiente

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$$

por propiedad conmutativa y asociativa de la suma se tiene

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k+1} - 1$$

ahora si recordamos la fórmula de recurrencia dada en (1), $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geq 2$ y tomando $n = k+2$ se tiene, $F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1}$ esto dice que,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

con lo cual queda probada la Tesis Inductiva.

v) Conclusión: Por el Principio de Inducción Completa la igualdad (afirmación) es verdadera para todo $n \geq 2$,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,\ \forall\ n \geq 2$$

$\square$

3 Demostrar las siguientes propiedades de los Números de Fibonacci

a) Empleando la fórmula de recurrencia (3) demostar que la suma de los Números de Fibonacci de subíndice impar cumplen con la propiedad

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n},\ \forall\ n \geq 1$$

b) Empleando la fórmula de recurrencia (3) demostar que la suma de los Números de Fibonacci de subíndice par cumplen con la propiedad

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,\ \forall\ n \geq 1$$

c) Demostrar por inducción que el término genral de la sucesión de Fibonacci está dado por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \forall n \geq 1$$