

1 Demostraciones de cálculo de ecuaciones

1.1 (principio de explosión)

$$\vdash \perp \rightarrow \varphi$$

1. $\perp \rightarrow \varphi \equiv (\text{implicación})$
2. $\perp \vee \varphi \equiv \varphi \equiv (\text{idempotencia})$
3. $\perp \vee \varphi \equiv \varphi \vee \perp \equiv (\text{distributividad})$
4. $(\perp \equiv \perp) \vee \varphi \equiv (\text{bivalencia})$
5. $(\neg \top \equiv \perp) \vee \varphi \equiv (\text{neq})$
6. $\neg(\top \equiv \varphi) \vee \varphi \equiv (\text{neutro})$
7. $\neg\varphi \vee \varphi \equiv (\text{neutro})$
8. $\neg\varphi \vee \varphi \equiv \top$

1.2 absorvente

$$\vdash \varphi \vee \top \equiv \top$$

1. $\varphi \vee \top$
2. $\varphi \vee (\varphi \equiv \varphi) (\text{neutro}) \top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
3. $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \varphi (\text{distributiva de la disyuncion})$
4. $\top (\text{neutro}) (\varphi \equiv \varphi) \equiv \top$

1.3 T9. (neutro) $\vdash \varphi \vee \perp \equiv \varphi$

1. $\varphi \vee \perp$
2. $\varphi \vee \neg \top$ (Teorema 5) $\perp \equiv \neg \top$
3. $\varphi \vee \neg(\varphi \equiv \varphi)$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
4. $\varphi \vee (\neg \varphi \equiv \varphi)$ (neq) $\neg(\varphi \equiv \psi) \equiv (\neg \varphi \equiv \psi)$
5. $\varphi \vee \neg \varphi \equiv \varphi \vee \varphi$ (distributiva)
6. $\top \equiv \varphi \vee \varphi$ (tercero excluido: $\varphi \vee \neg \varphi \equiv \top$)
7. $\top \equiv \varphi$ (idempotencia: $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$)
8. φ (neutro: $(\top \equiv \varphi) \equiv \varphi$)

1.4 T12. (neutro) $\vdash \varphi \wedge \top \equiv \varphi$

1. $\varphi \wedge \top$
2. $\varphi \equiv \top \equiv \varphi \vee \top$ (regla dorada)
3. $\varphi \equiv \top \equiv \top$ T8. (absorvente)
4. $\varphi \equiv \top$ (neutro)
5. φ (neutro)

1.5 T13. (conmutatividad) $\vdash \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$

1. $\varphi \wedge \psi$
2. $(\varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \vee \psi$ (regla dorada)
3. $(\psi \equiv \varphi) \equiv \varphi \vee \psi$ (conmutatividad de \equiv)
4. $(\psi \equiv \varphi) \equiv \psi \vee \varphi$ (conmutatividad de \vee)
5. $\psi \wedge \varphi$ (regla dorada)

1.6 T14. (idempotencia) $\vdash \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

1. $\varphi \wedge \varphi$
2. $(\varphi \equiv \varphi) \equiv \varphi \vee \varphi$ (regla dorada)
3. $\top \equiv \varphi \vee \varphi$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
4. $\top \equiv \varphi$ (idempotencia \vee)
5. φ (neutro)

1.7 T15. (absorción) $\vdash \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$

1. $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$
2. $\varphi \vee ((\varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \vee \psi)$ (regla dorada)
3. $\varphi \vee (\varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \vee (\varphi \vee \psi)$ (distributividad de \vee con \equiv)
4. $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee (\varphi \vee \psi)$ (distributividad de \vee con \equiv)
5. $\varphi \equiv \varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee (\varphi \vee \psi)$ (idempotencia)
6. $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$ (regla dorada)
7. φ (Teorema 16)

1.8 T16. (absorción) $\vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$

1. $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
2. $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee (\varphi \vee \psi)$ (regla dorada)
3. $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \varphi) \vee \psi$ (asociatividad de \vee)
4. $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \psi$ (idempotencia)
5. $\varphi \equiv (\varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \psi)$ (asociatividad de \equiv)
6. $\varphi \equiv \top$ (neutro) $(\varphi \equiv \varphi) \equiv \top$
7. $\top \equiv \varphi$ (conmutatividad de \equiv)
8. φ (neutro)

1.9 T17. (absorción) $\vdash \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \vee \psi$

1. $\varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi)$
2. $\varphi \vee ((\neg \varphi \equiv \psi) \equiv \neg \varphi \vee \psi)$ (regla dorada)
3. $\varphi \vee (\neg \varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \vee (\neg \varphi \vee \psi)$ (distributiva de \vee con \equiv)
4. $(\varphi \vee \neg \varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee (\neg \varphi \vee \psi)$ (distributiva de \vee con \equiv)
5. $(\varphi \vee \neg \varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \neg \varphi) \vee (\varphi \vee \psi)$ (distributiva de \vee con \equiv)
6. $(\top \equiv \varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \neg \varphi) \vee (\varphi \vee \psi)$ (tercero excluido)
7. $(\top \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \top \vee (\varphi \vee \psi)$ (tercero excluido)
8. $(\top \equiv \varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \top$ (conmutativa de \vee)
9. $(\top \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \top$ (Teorema 8)
10. $\varphi \vee \psi \equiv \top$ (neutro)
11. $\top \equiv \varphi \vee \psi$ (conmutativa de \equiv)
12. $\varphi \vee \psi$ (neutro)

1.10 T18. (absorción) $\vdash \varphi \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \wedge \psi$

1. $\varphi \wedge (\neg\varphi \vee \psi)$
2. $\varphi \wedge ((\varphi \equiv \perp) \vee \psi)$ (Teorema 4) $\neg\varphi \equiv (\varphi \equiv \perp)$
3. $\varphi \wedge (\psi \vee (\varphi \equiv \perp))$ (conmutatividad de \vee)
4. $\varphi \wedge (\psi \vee \varphi \equiv \psi \vee \perp)$ (distributividad de \vee con \equiv)
5. $\varphi \wedge (\psi \vee \varphi \equiv \psi)$ (Teorema 9) $\varphi \vee \perp \equiv \varphi$
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \vee (\psi \vee \varphi \equiv \psi)$ (regla dorada)
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \varphi) \equiv \varphi \vee \psi)$ (distributividad de \vee con \equiv)
8. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi) \equiv (\varphi \vee (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \psi)$ (conmutatividad de \vee)
9. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi) \equiv ((\varphi \vee \varphi) \vee \psi \equiv \varphi \vee \psi)$ (asociatividad de \vee)
10. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi) \equiv (\varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \psi)$ (idempotencia)
11. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi) \equiv \top$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
12. $\top \equiv \varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi)$ (conmutatividad de \equiv)
13. $\varphi \equiv (\psi \vee \varphi \equiv \psi)$ (neutro)
14. $\varphi \equiv (\psi \equiv \psi \vee \varphi)$ (conmutatividad de \equiv)
15. $(\varphi \equiv \psi) \equiv \psi \vee \varphi$ (asociatividad de \equiv)
16. $\varphi \wedge \psi$ (regla dorada)

1.11 T19 $\vdash \varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \neg\psi \equiv \varphi$

1. $\varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \neg\psi$
2. $\varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee (\psi \equiv \perp)$ (Teorema 4)
3. $\varphi \vee \psi \equiv (\varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \perp)$ (distributividad de \vee con \equiv)
4. $(\varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \perp$ (asociatividad de \equiv)
5. $\top \equiv \varphi \vee \perp$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
6. $\varphi \vee \perp$ (neutro)
7. φ (neutro) $\varphi \vee \perp \equiv \varphi$

1.12 T20 (De Morgan) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

1. $\neg(\varphi \wedge \psi)$
2. $\neg((\varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \vee \psi)$ (regla dorada)
3. $\neg((\psi \equiv \varphi) \equiv \varphi \vee \psi)$ (conmutatividad de \equiv)
4. $\neg(\psi \equiv (\varphi \equiv \varphi \vee \psi))$ (asociatividad de \equiv)
5. $\neg(\psi \equiv \varphi \vee \neg\psi)$ (Teorema 19) $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \neg\psi$

6. $\neg\psi \equiv \varphi \vee \neg\psi$ (neq)
7. $\neg\psi \equiv \neg\psi \vee \varphi$ (conmutatividad de \vee)
8. $\neg\psi \vee \neg\varphi$ (Teorema 19) $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \neg\psi$

1.13 T21 (De Morgan) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

1. $\neg\varphi \wedge \neg\psi$
2. $(\neg\varphi \equiv \neg\psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ (regla dorada)
3. $(\neg\varphi \equiv \neg\psi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$ (conmutatividad de \vee)
4. $\neg\varphi \equiv (\neg\psi \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi)$ (asociatividad de \equiv)
5. $\neg\varphi \equiv (\neg\psi \vee \neg\neg\varphi)$ (Teorema 19) $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \neg\psi$
6. $\neg\varphi \equiv (\neg\psi \vee \varphi)$ (Teorema 3)
7. $\neg\varphi \equiv (\varphi \vee \neg\psi)$ (conmutatividad de \vee)
8. $\neg(\varphi \equiv (\varphi \vee \neg\psi))$ (neq)
9. $\neg(\varphi \vee \psi)$ (Teorema 19) $(\varphi \equiv \varphi \vee \neg\psi) \equiv \varphi \vee \psi$

1.14 T22 (distributividad $\vee\vee$) $\vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee (\varphi \vee \chi)$

1. $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$
2. $(\varphi \vee \varphi) \vee (\psi \vee \chi)$ (idempotencia)
3. $(\varphi \vee (\varphi \vee (\psi \vee \chi)))$ (asociatividad \vee)
4. $(\varphi \vee ((\varphi \vee \psi) \vee \chi))$ (asociatividad \vee)
5. $(\varphi \vee (\chi \vee (\varphi \vee \psi)))$ (conmutatividad \vee)
6. $(\varphi \vee \chi) \vee (\varphi \vee \psi)$ (asociatividad \vee)
7. $(\varphi \vee \psi) \vee (\varphi \vee \chi)$ (conmutatividad \vee)

1.15 T23 (distributividad $\wedge\wedge$) $\vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge (\varphi \wedge \chi)$

1. $(\varphi \wedge \psi) \wedge (\varphi \wedge \chi)$
2. $(\varphi \wedge (\psi \wedge \varphi)) \wedge \chi$ (asociatividad \wedge)
3. $(\varphi \wedge (\varphi \wedge \psi)) \wedge \chi$ (conmutatividad \wedge)
4. $((\varphi \wedge \varphi) \wedge \psi) \wedge \chi$ (asociatividad \wedge)
5. $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (Teorema 14)
6. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ (asociatividad \wedge)

1.16 T24 (distributividad $\wedge \vee$) $\vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

1. $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$
2. $(\varphi \equiv (\psi \vee \chi)) \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

1.17 T25 (distributividad $\vee \wedge$) $\vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

1. $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
2. $((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \chi)) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee (\varphi \vee \chi)$ (regla dorada)
3. $((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \chi)) \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ (Teorema 22)
4. $\varphi \vee (\psi \equiv \chi) \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ (distributividad de \vee con \equiv)
5. $\varphi \vee ((\psi \equiv \chi) \equiv (\psi \vee \chi))$ (distributividad de \vee con \equiv)
6. $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ (regla dorada)

1.18 T26 (reflexividad) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1. $\varphi \rightarrow \varphi$
2. $(\varphi \vee \varphi \equiv \varphi)$ (implicacion)
3. $(\varphi \equiv \varphi)$ (idempotencia)
4. \top (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$

1.19 T27 $\vdash \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$

1. $\varphi \rightarrow \psi$
2. $(\varphi \vee \psi \equiv \psi)$ (implicacion)
3. $(\psi \equiv \varphi \vee \psi)$ (conmutatividad de \equiv)
4. $(\psi \equiv \psi \vee \varphi)$ (conmutatividad de \vee)
5. $\psi \vee \neg \varphi$ (Teorema 19) $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \neg \psi$
6. $\neg \varphi \vee \psi$ (conmutatividad de \vee)

1.20 T28 $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg \psi$

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$
2. $\neg(\varphi \vee \psi \equiv \psi)$ (implicacion)
3. $\neg(\psi \equiv \varphi \vee \psi)$ (conmutatividad de \equiv)
4. $\neg(\psi \equiv \psi \vee \varphi)$ (conmutatividad de \vee)
5. $\neg(\psi \vee \neg \varphi)$ (Teorema 19) $(\varphi \equiv \varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \neg \psi$
6. $\neg(\neg \varphi \vee \psi)$ (conmutatividad de \vee)
7. $\neg \neg \varphi \wedge \neg \psi$ (Teorema 21)
8. $\varphi \wedge \neg \psi$ (Teorema 3)

1.21 T29 $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

1. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
2. $(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi \equiv \varphi$ (implicacion)
3. $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$ (conmutatividad de \vee)
4. $\varphi \equiv \varphi$ (Teorema 15)
5. \top (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$

1.22 T30 $\vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$

1. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
2. $\varphi \vee (\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \psi)$ (implicacion)
3. $(\varphi \vee \varphi) \vee \psi \equiv (\varphi \vee \psi)$ (asociatividad de \vee)
4. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \psi)$ (idempotencia)
5. \top (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$

1.23 T31 $\vdash \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

1. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
2. $\neg\psi \vee \neg\varphi \equiv \neg\varphi$ (implicacion)
3. $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi) \equiv \neg\neg\varphi$ (Teorema 6, contrapositiva)
4. $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi) \equiv \varphi$ (Teorema 3, Doble neg.)
5. $\neg\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \varphi$ (Teorema 2, De Morgan)
6. $(\psi \wedge \varphi) \equiv \varphi$ (Teorema 3, Doble neg.)
7. $(\psi \equiv \varphi \equiv \psi \vee \varphi) \equiv \varphi$ (regla dorada)
8. $\varphi \equiv (\psi \equiv \varphi \equiv \psi \vee \varphi)$ (conmutatividad de \equiv)
9. $\varphi \equiv (\varphi \equiv \psi \equiv \psi \vee \varphi)$ (conmutatividad de \equiv)
10. $(\varphi \equiv \varphi) \equiv \psi \equiv \psi \vee \varphi$ (asociatividad de \equiv)
11. $\top \equiv \psi \equiv \psi \vee \varphi$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
12. $\psi \equiv \psi \vee \varphi$ (neutro)
13. $\psi \vee \varphi \equiv \psi$ (conmutatividad de \equiv)
14. $\varphi \vee \psi \equiv \psi$ (conmutatividad de \vee)
15. $\varphi \rightarrow \psi$ (implicacion)

1.24 T32 $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \equiv \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$
2. $\neg\varphi \vee (\psi \rightarrow \chi)$ (Teorema 27)
3. $\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)$ (Teorema 27)
4. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \chi$ (asociatividad de \vee)
5. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi$ (Teorema 20, De Morgan)
6. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (Teorema 27) $\neg\phi \vee \psi \equiv \phi \rightarrow \psi$

1.25 T33 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$
2. $\neg((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$ (Teorema 27)
3. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\psi \rightarrow \chi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$ (Teorema 20)
4. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\psi \rightarrow \chi) \vee (\neg\varphi \vee \chi)$ (Teorema 27)
5. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\chi) \vee (\neg\varphi \vee \chi)$ (Teorema 28)
6. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \vee \chi) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (conmutatividad)
7. $(\varphi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (distributividad $\vee \wedge$)
8. $((\varphi \vee \neg\varphi) \vee \chi) \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (asociatividad)
9. $(\top \vee \chi) \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (idempotencia)
10. $\top \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (Teorema 8)
11. $\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \chi) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (Teorema 12)
12. $(\neg\psi \vee \neg\varphi \vee \chi) \vee (\psi \wedge \neg\chi)$ (asociatividad)
13. $(\neg\psi \vee \neg\varphi \vee \chi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi \vee \chi \vee \neg\chi)$ (distributividad $\vee \wedge$)
14. $((\neg\psi \vee \psi) \vee \neg\varphi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi \vee (\chi \vee \neg\chi))$ (conmutatividad y asociatividad)
15. $(\top \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \top))$ (tercero excluido y asociatividad)
16. $\top \wedge \top$ (Teorema 8)
17. \top (Teorema 12)

1.26 T34 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$
2. $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$ (Teorema 27)
3. $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$ (Teorema 27)
4. $(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\psi \vee \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$ (regla dorada)
5. $(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\varphi \vee (\psi \vee (\neg\psi \vee \varphi))) \equiv \varphi \equiv \psi$ (asociatividad)

6. $(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi) \vee \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$ (asociatividad)
7. $(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\varphi \vee (\top \vee \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$ (idempotencia)
8. $(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv \neg\varphi \vee \top \equiv \varphi \equiv \psi$ (Teorema 8)
9. $(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv \top \equiv \varphi \equiv \psi$ (Teorema 8)
10. $\top \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\psi \vee \varphi) \equiv \varphi \equiv \psi$ (distributividad)
11. $\neg\varphi \vee \psi \equiv \neg\psi \vee \varphi \equiv \varphi \equiv \psi$ (neutro)
12. $\neg\varphi \vee \psi \equiv (\neg\psi \vee \varphi \equiv \varphi) \equiv \psi$ (asociatividad)
13. $\neg\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi \equiv \psi$ (Teorema 19)
14. $\psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$ (distributividad)
15. $(\psi \equiv \neg\varphi \vee \psi) \equiv \psi \vee \varphi$ (asociatividad)
16. $(\psi \equiv \psi \vee \neg\varphi) \equiv \psi \vee \varphi$ (conmutatividad)
17. $\psi \vee \varphi \equiv \psi \vee \varphi$ (Teorema 19)
18. \top (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$

1.27 T35 $\vdash \varphi \wedge (\varphi \equiv \psi) \equiv \varphi \wedge \psi$

1. $\varphi \wedge (\varphi \equiv \psi)$
2. $(\varphi \equiv (\varphi \equiv \psi)) \equiv \varphi \vee (\varphi \equiv \psi)$ (regla dorada)
3. $((\varphi \equiv \varphi) \equiv \psi) \equiv \varphi \vee (\varphi \equiv \psi)$ (asociatividad de \equiv)
4. $(\top \equiv \psi) \equiv \varphi \vee (\varphi \equiv \psi)$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
5. $\psi \equiv \varphi \vee (\varphi \equiv \psi)$ (neutro)
6. $\psi \equiv \varphi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$ (distributividad de \vee)
7. $\psi \equiv \varphi \equiv \varphi \vee \psi$ (idempotencia)
8. $\varphi \equiv \psi \equiv \varphi \vee \psi$ (conmutatividad de \equiv)
9. $\varphi \wedge \psi$ (regla dorada)

1.28 T36 (modus ponens) $\vdash \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

1. $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$
2. $\varphi \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi$ (Teorema 27)
3. $(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ (distributividad $\wedge \vee$)
4. $\perp \vee (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ (crear teorema) $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp$
5. $(\varphi \wedge \psi) \vee \perp \rightarrow \psi$ (conmutatividad de \vee)
6. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ (Teorema 9, neutro)
7. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \psi$ (Teorema 27)

8. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \psi$ (Teorema 20, De Morgan)
9. $\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \psi)$ (asociatividad de \vee)
10. $\neg\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)$ (conmutatividad de \vee)
11. $\neg\varphi \vee \top$ (tercero excluido)
12. \top (Teorema 8, absorbente)

1.29 T36.5 (contradiccion) $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp$

1. $\varphi \wedge \neg\varphi$
2. $\varphi \equiv \neg\varphi \equiv \varphi \vee \neg\varphi$ (regla dorada)
3. $\varphi \equiv \neg\varphi \equiv \top$ (tercero excluido)
4. $\top \equiv \varphi \equiv \neg\varphi$ (conmutatividad de \equiv)
5. $\varphi \equiv \neg\varphi$ (neutro)
6. $\neg\varphi \equiv \varphi$ (conmutatividad de \equiv)
7. $\neg(\varphi \equiv \varphi)$ (neq)
8. $\neg\top$ (neutro) $\top \equiv (\varphi \equiv \varphi)$
9. \perp (Teorema 5)

1.30 T37 (modus tollens) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
2. $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (Teorema 27)
3. $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$ (T24, distributividad $\wedge \vee$)
4. $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee \perp \rightarrow \neg\varphi$ (T36.5: contradicción $\psi \wedge \neg\psi \equiv \perp$)
5. $\neg\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (Teorema 9, neutro)
6. $\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi$ (Teorema 20, De Morgan)
7. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (Teorema 31)
8. $\neg\varphi \vee (\varphi \vee \psi)$ (Teorema 27)
9. $(\neg\varphi \vee \varphi) \vee \psi$ (asociatividad de \vee)
10. $(\varphi \vee \neg\varphi) \vee \psi$ (conmutatividad de \vee)
11. $\top \vee \psi$ (tercero excluido)
12. $\psi \vee \top$ (conmutatividad de \vee)
13. \top (Teorema 9, neutro)

1.31 T38 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \chi \rightarrow \psi \wedge \chi)$

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \chi \rightarrow \psi \wedge \chi)$
2. $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$ (Teorema 27, aplicada dos veces)
3. $\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$ (Teorema 27)
4. $(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$ (Teorema 21, De Morgan)
5. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$ (Teorema 3, doble negación)
6. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \vee \neg\chi) \vee (\psi \wedge \chi)$ (Teorema 20, De Morgan)
7. $((\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi) \vee (\neg\chi \vee (\psi \wedge \chi))$ (asociatividad de \vee)
8. $((\neg\varphi \vee \varphi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \vee (\neg\chi \vee (\psi \wedge \chi))$ (distributividad $\vee \wedge$)
9. $((\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \vee (\neg\chi \vee (\psi \wedge \chi))$ (conmutatividad de \vee)
10. $(\top \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \vee (\neg\chi \vee (\psi \wedge \chi))$ (Teorema 20: $\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$)
11. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\neg\chi \vee (\psi \wedge \chi))$ (Teorema 12, neutro)
12. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\psi \vee \neg\chi) \wedge (\chi \vee \neg\chi)$ (distributividad $\vee \wedge$)
13. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\psi \vee \neg\chi) \wedge \top$ (Teorema 20)
14. $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\psi \vee \neg\chi)$ (Teorema 12)
15. $(\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee (\psi \vee \neg\chi)$ (conmutatividad de \vee)
16. $(\neg\psi \vee \psi) \vee (\neg\varphi \vee \neg\chi)$ (conmutatividad y asociatividad de \vee)
17. $(\psi \vee \neg\psi) \vee (\neg\varphi \vee \neg\chi)$ (conmutatividad de \vee)
18. $\top \vee (\neg\varphi \vee \neg\chi)$ (tercero excluido)
19. $(\neg\varphi \vee \neg\chi) \vee \top$ (conmutatividad de \vee)
20. \top (Teorema 8, absorbente)

1.32 T39 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \vee \chi \rightarrow \psi \vee \chi)$

1. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \vee \chi \rightarrow \psi \vee \chi)$
2. $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \vee \chi) \vee (\psi \vee \chi))$ (T27 aplicada dos veces)
3. $\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg(\varphi \vee \chi) \vee (\psi \vee \chi))$ (Teorema 27)
4. $(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg(\varphi \vee \chi) \vee (\psi \vee \chi))$ (Teorema 21: De Morgan)
5. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg(\varphi \vee \chi) \vee (\psi \vee \chi))$ (Teorema 3: doble negación)
6. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi) \vee (\psi \vee \chi)$ (Teorema 21: De Morgan)
7. $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \vee \chi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi)$ (conmutatividad)
8. $((\varphi \wedge \neg\psi) \vee \psi) \vee (\chi \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi))$ (asociatividad)
9. $(\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) \vee (\chi \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi))$ (conmutatividad)
10. $((\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \vee (\chi \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi))$ (distributividad $\vee \wedge$)

11. $((\psi \vee \varphi) \wedge \top) \vee (\chi \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi))$ (idempotencia)
12. $(\psi \vee \varphi) \vee (\chi \vee (\neg\varphi \wedge \neg\chi))$ (Teorema 12)
13. $(\psi \vee \varphi) \vee ((\chi \vee \neg\varphi) \wedge (\chi \vee \neg\chi))$ (distributividad $\vee \wedge$)
14. $(\psi \vee \varphi) \vee ((\chi \vee \neg\varphi) \wedge \top)$ (idempotencia)
15. $(\psi \vee \varphi) \vee (\chi \vee \neg\varphi)$ (Teorema 12)
16. $(\psi \vee (\varphi \vee (\chi \vee \neg\varphi)))$ (asociatividad)
17. $(\psi \vee (\varphi \vee (\neg\varphi \vee \chi)))$ (conmutatividad)
18. $(\psi \vee ((\varphi \vee \neg\varphi) \vee \chi))$ (asociatividad)
19. $(\psi \vee (\top \vee \chi))$ (idempotencia)
20. $(\psi \vee (\chi \vee \top))$ (conmutatividad)
21. $\psi \vee \top$ (Teorema 8)
22. \top (Teorema 8)

1.33 T40 $\vdash \varphi \rightarrow \perp \equiv \neg\varphi$

1. $\varphi \rightarrow \perp$
2. $\neg\varphi \vee \perp$ (Teorema 27)
3. $\neg\varphi$ (Teorema 9)

1.34 T(A) $\vdash (\forall i : \varphi : \psi) \wedge (\forall i : \chi : \psi) \equiv (\forall i : \varphi \vee \chi : \psi)$

1. $(\forall i : \varphi : \psi) \wedge (\forall i : \chi : \psi)$

1.35 T(A) $\vdash (\forall i : \varphi : \psi) \wedge (\forall i : \chi : \psi) \equiv (\forall i : \varphi \vee \chi : \psi)$

1. $(\forall i : \varphi \vee \chi : \psi)$