

# ChatGPT



Qu'est-ce que la transformée en Z en électronique ?



La transformée en Z est un outil mathématique essentiel en électronique, notamment dans l'automatique et le traitement du signal. Elle permet de convertir un signal discret dans le temps en une représentation complexe dans le domaine fréquentiel, facilitant ainsi l'analyse et la conception des systèmes numériques. Considérée comme l'équivalent discret de la transformée de Laplace, elle est particulièrement utile pour résoudre des équations aux différences et évaluer la stabilité des systèmes discrets.

[Wikipédia](#)

La définition formelle de la transformée en Z d'un signal discret causal  $x(n)$  est donnée par la série suivante :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

où  $z$  est une variable complexe.

[Mon Lycée Numérique](#)

Cette transformation est largement utilisée pour analyser les systèmes linéaires, discrets et invariants dans le temps, en offrant une représentation complexe qui simplifie l'étude des systèmes dynamiques.

[StudySmarter](#)

En résumé, la transformée en Z est un outil fondamental en électronique pour l'analyse et la conception de systèmes numériques, permettant de passer du domaine temporel discret au domaine fréquentiel complexe.

Sources



Peut-on représenter un filtre passe bas en transformée en Z ?



Oui, un filtre passe-bas peut être représenté à l'aide de la transformée en Z. En traitement du signal numérique, les filtres sont souvent caractérisés par leur fonction de transfert dans le domaine Z, ce qui permet d'analyser et de concevoir des filtres avec des spécifications particulières.

La fonction de transfert d'un filtre numérique est généralement exprimée sous la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

où :

- $H(z)$  est la fonction de transfert dans le domaine Z,
- $Y(z)$  et  $X(z)$  sont les transformées en Z du signal de sortie  $y[n]$  et du signal d'entrée  $x[n]$ ,
- $b_k$  et  $a_k$  sont les coefficients du filtre.

Pour un filtre passe-bas simple, tel qu'un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) de premier ordre, la fonction de transfert peut être :

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

Ce qui correspond à une moyenne des échantillons actuels et précédents, atténuant ainsi les hautes fréquences.

Pour un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle infinie (IIR) de premier ordre, la fonction de transfert peut être :

$$H(z) = \frac{1-a \cdot z^{-1}}{1-b \cdot z^{-1}}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes déterminant les caractéristiques du filtre.

La transformée en Z est donc un outil essentiel pour représenter et analyser les filtres passe-bas en électronique, facilitant leur conception et leur mise en œuvre dans les systèmes numériques.

Sources



Comment déterminer les coefficients de la transformée en fonction des paramètres du filtre ?



Pour déterminer les coefficients d'un filtre passe-bas dans le domaine de la transformée en Z, il est courant de partir d'un filtre analogique prototype et de le convertir en un filtre numérique. Cette conversion peut être réalisée en utilisant des méthodes telles que la transformation bilinéaire ou l'invariance de l'impulsion.

### 1. Transformation bilinéaire :

Cette méthode mappe le plan  $s$  (analogique) au plan  $z$  (numérique) en utilisant la relation :

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage.

En substituant cette expression dans la fonction de transfert analogique  $H(s)$ , on obtient la fonction de transfert numérique  $H(z)$ .

#### Étapes :

- **Partir de la fonction de transfert analogique  $H(s)$ .**
- **Appliquer la transformation bilinéaire** en remplaçant  $s$  par l'expression ci-dessus.
- **Simplifier** pour obtenir  $H(z)$  sous la forme :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

Les coefficients  $b_k$  et  $a_k$  sont alors déterminés en fonction des paramètres du filtre analogique et de la période d'échantillonnage.

## 2. Invariance de l'impulsion :

Cette méthode consiste à échantillonner la réponse impulsionnelle du filtre analogique pour obtenir la réponse impulsionnelle du filtre numérique.

### Étapes :

- **Calculer la réponse impulsionnelle**  $h(t)$  du filtre analogique.
- **Échantillonner**  $h(t)$  à des intervalles  $T$  pour obtenir  $h[n] = h(nT)$ .
- **La transformée en Z** de  $h[n]$  donne la fonction de transfert numérique  $H(z)$ .

Cette méthode préserve la forme de la réponse impulsionnelle, mais peut introduire des effets d'aliasing en fréquence.

### Exemple :

Considérons un filtre passe-bas analogique de premier ordre avec la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{1}{s + \omega_c}$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure.

### Avec la transformation bilinéaire :

- Substituer  $s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  dans  $H(s)$  :
- $$H(z) = \frac{1}{\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \omega_c}$$
- Simplifier pour obtenir  $H(z)$  sous la forme désirée et identifier les coefficients  $b_k$  et  $a_k$ .

En résumé, la détermination des coefficients d'un filtre passe-bas dans le domaine de la transformée en Z dépend de la méthode de conversion choisie et des spécifications du filtre analogique initial.

Sources



Supposons que la fréquence d'échantillonnage est de 10kHz. Pouvez-vous me donner la fonction de transfert en Z d'un filtre passe-bas de 1er ordre avec une fréquence de coupure de 500Hz.



Pour concevoir un filtre passe-bas numérique du premier ordre avec une fréquence de coupure de 500 Hz et une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz, on peut utiliser la transformation bilinéaire pour convertir un filtre analogique en un filtre numérique équivalent.

### Étapes de conception :

#### 1. Définir le filtre analogique prototype :

Un filtre passe-bas analogique de premier ordre a pour fonction de transfert :

$$H_a(s) = \frac{1}{s + \omega_c}$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure en radians par seconde.

Pour une fréquence de coupure  $f_c = 500$  Hz :

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \times 500 \approx 3142 \text{ rad/s}$$

## 2. Appliquer la transformation bilinéaire :

La transformation bilinéaire substitue  $s$  par :

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage :

$$T = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001 \text{ s}$$

En substituant  $s$  dans  $H_a(s)$  :

$$H_d(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \omega_c}$$

Simplifions cette expression :

$$H_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(\frac{2}{T}(1-z^{-1}) + \omega_c(1+z^{-1})\right)} = \frac{1+z^{-1}}{\left(\frac{2}{T} + \omega_c\right) + \left(\omega_c - \frac{2}{T}\right)z^{-1}}$$

En posant  $K = \frac{2}{T}$ , on obtient :

$$H_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{(K + \omega_c) + (\omega_c - K)z^{-1}}$$

## 3. Calculer les coefficients :

Avec  $K = \frac{2}{T} = 20\,000$  rad/s et  $\omega_c \approx 3142$  rad/s :

$$H_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{(20\,000+3142) + (3142-20\,000)z^{-1}} = \frac{1+z^{-1}}{23\,142 - 16\,858z^{-1}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par 23,142 pour normaliser le dénominateur :

$$H_d(z) = \frac{\frac{1}{23\,142}(1+z^{-1})}{1 - \frac{16\,858}{23\,142}z^{-1}} = \frac{4,32 \times 10^{-5}(1+z^{-1})}{1 - 0,728z^{-1}}$$

Les coefficients du filtre numérique sont donc :

- $b_0 = b_1 = 4,32 \times 10^{-5}$
- $a_1 = 0,728$

La fonction de transfert en Z du filtre passe-bas numérique est :

$$H_d(z) = \frac{4,32 \times 10^{-5}(1+z^{-1})}{1 - 0,728z^{-1}}$$

## Conclusion :

En utilisant la transformation bilinéaire, nous avons conçu un filtre passe-bas numérique du premier ordre avec une fréquence de coupure de 500 Hz et une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz. La fonction de transfert obtenue permet de mettre en œuvre ce filtre dans un système de traitement numérique du signal.

Sources



Pouvez-vous me donner la formule en fonction de la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  ?



Pour concevoir un filtre passe-bas numérique du premier ordre avec une fréquence de coupure  $f_c$  et une fréquence d'échantillonnage  $f_s$ , on peut utiliser la transformation bilinéaire pour convertir un filtre analogique en un filtre numérique équivalent.

## Étapes de conception :

### 1. Définir le filtre analogique prototype :

Un filtre passe-bas analogique de premier ordre a pour fonction de transfert :

$$H_a(s) = \frac{1}{s + \omega_c}$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure en radians par seconde, donnée par :

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

### 2. Appliquer la transformation bilinéaire :

La transformation bilinéaire substitue  $s$  par :

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage :

$$T = \frac{1}{f_s}$$

En substituant cette expression dans  $H_a(s)$  :

$$H_d(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \omega_c}$$

Simplifions cette expression :

$$H_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(\frac{2}{T} + \omega_c\right) + \left(\omega_c - \frac{2}{T}\right)z^{-1}}$$

En posant  $K = \frac{2}{T} = 2f_s$ , on obtient :

$$H_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{(K + \omega_c) + (\omega_c - K)z^{-1}}$$

### 3. Calculer les coefficients :

Les coefficients du filtre numérique sont alors :

$$\begin{aligned} \circ b_0 &= b_1 = \frac{1}{K + \omega_c} = \frac{1}{2f_s + 2\pi f_c} \\ \circ a_1 &= \frac{K - \omega_c}{K + \omega_c} = \frac{2f_s - 2\pi f_c}{2f_s + 2\pi f_c} = \frac{f_s - \pi f_c}{f_s + \pi f_c} \end{aligned}$$

La fonction de transfert en  $Z$  du filtre passe-bas numérique est donc :

$$H_d(z) = \frac{\frac{1}{2f_s + 2\pi f_c}(1+z^{-1})}{1 - \frac{f_s - \pi f_c}{f_s + \pi f_c}z^{-1}}$$

## Conclusion :

En utilisant la transformation bilinéaire, nous avons conçu un filtre passe-bas numérique du premier ordre avec une fréquence de coupure  $f_c$  et une fréquence d'échantillonnage  $f_s$ . La fonction de transfert obtenue permet de mettre en œuvre ce filtre dans un système de traitement numérique du signal.

Sources