

Conjunto dominante independente aberto (OIND-set) em grafos cúbicos e em produtos lexicográficos

Lauane M. O. de Moraes, Erika M. M. Coelho

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Campus Samambaia – Goiânia – GO – Brazil
(2024)

lauanemateus@discente.ufg.br, erikamorais@inf.ufg.br

Abstract. For a graph $G = (V(G), E(G))$, a set $S \subseteq V(G)$ is an open-independent dominating set, or OIND-set, if for every $v \in S$, we have $|N(v) \cap S| \leq 1$, and for every $v \in V(G)$, we have $|N[v] \cap S| \geq 1$. The minimum cardinality of the OIND-set of G is called $\gamma_{oind}(G)$. We present some results of $\gamma_{oind}(G \circ H)$ for the lexicographic product between two graphs G and H , and we present results of γ_{oind} for two cubic graphs subclass: circular ladder and möbius ladder.

Resumo. Para um grafo $G = (V(G), E(G))$, um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um conjunto dominante independente aberto, ou conjunto OIND, se para todo $v \in S$, temos que $|N(v) \cap S| \leq 1$, e para todo $v \in V(G)$, temos que $|N[v] \cap S| \geq 1$. A cardinalidade mínima do conjunto OIND de G é chamada de $\gamma_{oind}(G)$. Neste trabalho mostramos alguns resultados de $\gamma_{oind}(G \circ H)$ em produto lexicográfico entre dois grafos G e H , e nós mostramos valores de γ_{oind} para duas classes de grafos cúbicos: circular ladder e möbius ladder.

1. Introdução

Grafo é uma estrutura usada para representar conexões e relações entre elementos e seu uso pode ser visto facilmente no dia a dia em diversas situações, como mapas, árvores genealógicas, redes de comunicação, etc. Um grafo é um par ordenado $G = (V(G), E(G))$, no qual $V(G)$ é um conjunto de vértices e $E(G)$ é um conjunto formado por pares de $V(G)$, chamados de arestas. Veja a Figura 1 e 2 para um exemplo. Muitos problemas de natureza discreta podem ser modelados usando Teoria dos Grafos.

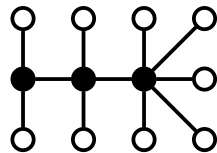


Figura 1. Vértices em preto são sensores que compõem um conjunto dominante

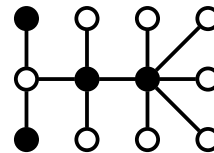


Figura 2. Vértices em preto são sensores que compõem um conjunto OIND

Considere uma situação no qual deseja-se monitorar a ocorrência de incêndio, por meio da instalação de sensores que detectam a presença de fogo. Cada sensor consegue

alcançar locais específicos e o objetivo é determinar o número mínimo de sensores a serem instalados de modo a monitorar todo local, ou seja, independente de onde o foco de incêndio aparecer, algum sensor será disparado. Esse cenário pode ser modelado por meio de grafos e é um exemplo de aplicação de conjunto dominante. Suponha, agora, uma restrição desse contexto, no qual os sensores podem ser vizinhos de no máximo um outro sensor, para que não haja interferência de sinais. Nesse caso, o conjunto de sensores a serem escolhidos para fazer o monitoramento é um conjunto dominante específico chamado de conjunto OIND.

Neste trabalho, iremos estudar a cardinalidade mínima do conjunto OIND em grafos cúbico em grafos gerados por produto lexicográfico.

2. Definições e preliminares

Vamos considerar somente grafos finitos e não direcionados. Denotamos a aresta formada por dois vértices vizinhos v e w como vw e, em grafos não direcionados, vw é mesma aresta wv . A *vizinhança aberta* de um vértice v é $N(v) = \{w \in V(G); vw \in E(G)\}$ e a *vizinhança fechada* é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. *Grau* de um vértice v é o número $|N(v)|$. O subgrafo G' de G é chamado de subgrafo de G *induzido* por $V(G')$, se para todo $v, u \in V(G')$, $vu \in E(G)$ implica que $vu \in E(G')$. Para $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o subgrafo de G induzido por S . O vértice v está a uma distância d do vértice u se o número mínimo de arestas do menor caminho para ir de v até u no grafo é d . Um vértice $v \in V(G)$ é um *vértice universal* se $N[v] = V(G)$. Um grafo é *conexo* se existe pelo menos um caminho entre cada par de vértices do grafo.

Um grafo k -*regular* é o grafo cujo todos os vértices tem grau k . Um grafo *completo* de n vértices, denotado por K_n , é o grafo que contém exatamente uma aresta entre cada par de vértices distintos. Um grafo *bipartido* $K_{n,m}$ é o grafo tal que $V(K_{n,m}) = V_1 \cup V_2$, $|V_1| = n$, $|V_2| = m$, $|V(K_{n,m})| = n + m$ e $E(K_{n,m}) = \{vu \mid v \in V_1 \text{ e } u \in V_2\}$. Um grafo *caminho* de n vértices, denotado por P_n , é o grafo tal que $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. Um grafo *cíclico* de n vértices, denotado por C_n , é o grafo tal que $V(C_n) = V(P_n)$ e $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_1 v_n\}$.

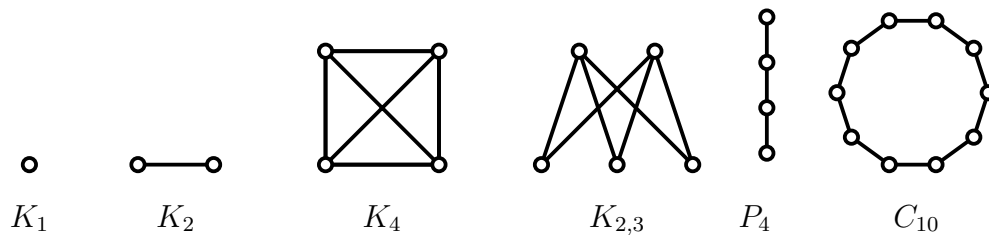


Figura 3. Exemplos de grafos completos, bipartido completo, caminho e cíclico.

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante* se todo vértice de $V \setminus S$ é adjacente a pelo menos um vértice em S . Ou seja, para todo $v \in V(G)$, temos que $|N[v] \cap S| \geq 1$. Note que um conjunto S é dominante se $\bigcup_{v \in S} N[v] = V(G)$. Dizemos que um vértice do conjunto dominante domina seus vizinhos e a si mesmo. Dado um conjunto dominante S , dizemos que um conjunto A está sendo dominado se todos vértices em A estão sendo dominados por S . Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *dominante aberto* se para

todo $v \in V(G)$, $|N(v) \cap S| \geq 1$. Nesse caso, dizemos que um vértice do conjunto dominante aberto não domina a si mesmo, mas domina apenas seus vizinhos.

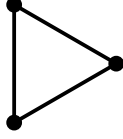


Figura 4. Vértices em preto em cada grafo representam um conjunto dominante aberto.

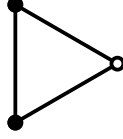
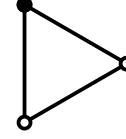


Figura 5. Vértice em preto representam um conjunto dominante.



Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto independente* quando cada um de seus vértices não possuem vizinhos também pertencentes a S , ou seja, para todo $v \in S$, $|N[v] \cap S| \leq 1$. Já S é um conjunto *independente aberto* se para todo $v \in S$, $|N(v) \cap S| \leq 1$, dessa forma é permitido para cada vértice do conjunto S ter no máximo um vizinho que também pertence a S .

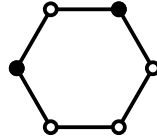


Figura 6. Vértices em preto representam um conjunto independente

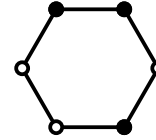


Figura 7. Vértices em preto representam um conjunto independente aberto

Um conjunto que é, ao mesmo tempo, dominante e independente é um *conjunto dominante independente*. Observe que os subgrafos conexos induzidos por um conjunto dominante independente serão sempre K_1 . A cardinalidade mínima de um conjunto dominante independente num grafo G é chamada de número de dominação independente e denotada por $i(G)$. Conjuntos dominantes independentes foram introduzidos por [Cockayne and Hedetniemi 1974, Cockayne and Hedetniemi 1977]. O conceito de número de dominação independente vem sido muito estudado na literatura, com enfoque maior em grafos regulares, como podemos ver em [Goddard and Henning 2013, Abrishami and Henning 2018, Brause and Henning 2019, Akbari et al. 2022].

Um conjunto que é dominante e também é independente aberto é chamado de *conjunto dominante independente aberto* ou *conjunto OIND*. Todo grafo admite algum conjunto OIND e o interesse é determinar um conjunto OIND de cardinalidade mínima em um dado grafo G , denotada por $\gamma_{oind}(G)$. Observe que os subgrafos conexos induzidos por um conjunto OIND serão K_1 ou K_2 . Note também que um conjunto dominante independente também é um conjunto OIND, mas não se pode afirmar o contrário. Além disso, temos que $\gamma_{oind}(G) \leq i(G)$.

Conjuntos OINDs foram introduzidos por [Seo and Slater 2017] e, posteriormente, poucos resultados foram estabelecidos para conjuntos OIND. Em 2019, o trabalho de [Melo and Coelho 2019] apresentou apenas limites superiores de $\gamma_{oind}(G)$ para grafos mais restritos, a citar K_n , C_n , P_n , e apresentou resultados para o produto lexicográfico entre essas classes e grafos gerais.



Figura 8. Grafo G no qual os vértices pretos representam, à esquerda, um conjunto OIND, e à direita, um conjunto dominante independente, tal que $\gamma_{oind}(G) = 5$ e $i(G) = 7$.

Para as próximas duas subseções, iremos definir as duas classes de grafos na qual analisaremos o número OIND: produto lexicográfico e grafos cúbicos.

2.1. Produto Lexicográfico

Considere G e H dois grafos com conjunto de vértices $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ e $V(H) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. O *produto lexicográfico* entre G e H , denotado por $G \circ H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ e conjunto de arestas $E(G \circ H) = \{(g_i, h_j)(g_k, h_l) \mid g_i g_k \in E(G), \text{ ou } g_i = g_k \text{ e } h_j h_l \in E(H)\}$. Veja a Figura 9 para um exemplo. Existem muitos resultados sobre conjuntos dominantes e suas variações em produto lexicográfico entre dois grafos [Gözüpek et al. 2017, Maheswari and Parvathi 2017, Sitthiwiratham 2013, Zhang et al. 2011]. Apesar disso, como já mencionado, há poucos resultados gerais para o número OIND em produtos lexicográficos.

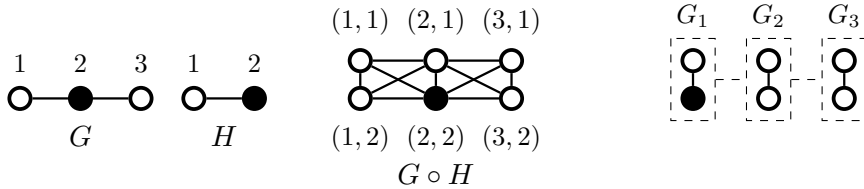


Figura 9. Dois grafos G e H , o produto lexicográfico e suas componentes G'_i s.

Considere o conjunto $X_i = \{(g_i, h_j) \in V(G \circ H) \mid 1 \leq j \leq m\}$. Para as demonstrações dos resultados em produto lexicográfico, vamos denotar a *componente* G'_i como o subgrafo de $G \circ H$ induzido por X_i , ou seja $G'_i = (G \circ H)[X_i]$. Na representação das Figura 9, 12 e 13, as arestas tracejadas indicam que há arestas entre todos os vértices de uma componente para os vértices das componentes vizinhas.

No nosso teorema principal de produto lexicográfico - Teorema 5 - iremos usar o conceito de *conjunto dominante emparelhado induzido*. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *dominante aberto e independente aberto*, ou *conjunto dominante emparelhado induzido*, se para todo $v \in S$, $|N(v) \cap S| \leq 1$ e para todo $v \in V(G)$, $|N(v) \cap S| \geq 1$. Assim, um conjunto dominante emparelhado induzido é ao mesmo tempo um conjunto dominante aberto e um conjunto independente aberto. Conjuntos dominante emparelhado induzidos foram introduzidos por [Haynes and Slater 1995, Haynes and Slater 1998].

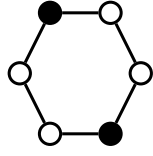


Figura 10. C_6 e os vértices do conjunto dominante independente aberto, com $\gamma_{oind}(C_6) = 2$.

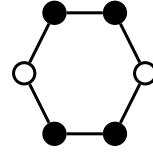


Figura 11. C_6 e os vértices do conjunto dominante emparelhado induzido, com $\gamma^{ip}(C_6) = 4$.

Denotamos a cardinalidade mínima de um conjunto dominante emparelhado induzido por $\gamma^{ip}(G)$. Observe que os subgrafos conexos induzidos por um conjunto dominante emparelhado induzido serão sempre K_2 , logo todo conjunto dominante emparelhado induzido é um conjunto OIND. Também note que nem todo grafo admite conjunto dominante emparelhado induzido, a exemplo o grafo C_5 .

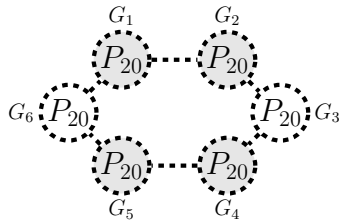


Figura 12. Representação de $C_6 \circ P_{20}$, com $\gamma_{oind}(C_6 \circ P_{20}) = 4$.

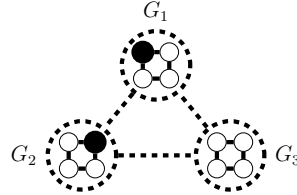


Figura 13. Representação de $C_3 \circ C_4$, com $\gamma_{oind}(C_3 \circ C_4) = \gamma^{ip}(C_3 \circ C_4) = 2$.

2.2. Grafos Cúbicos

Grafos cúbicos são grafos 3-regulares, ou seja, todos seus vértices têm grau 3. Como mencionado na seção 2, o número de dominação independente é muito explorado na literatura em grafos regulares, mas até o momento não há resultados para o número γ_{oind} nessas classes. Neste trabalho, estudaremos duas classes específicas de grafos cúbicos: circular ladder e möbius ladder.

Considere dois grafos H e H' isomorfos a C_n tal que $V(H) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ e $V(H') = \{g_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_{2n}\}$. *Circular ladder* é grafo G cujo conjunto de vértices é $V(G) = V(H) \cup V(H')$ e cujo conjunto de arestas é $E(G) = E(H) \cup E(H') \cup \{g_i g_{n+i} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

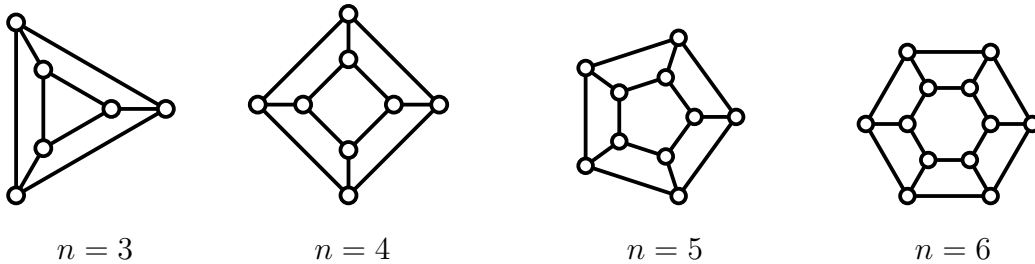


Figura 14. Alguns grafos circular ladder, com $|V(G)| = 2 \cdot n$

Möbius ladder é o grafo G cujo conjunto de vértices é $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_{2n}\}$ e cujo conjunto de arestas é $E(G) = \{g_i g_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 2n - 1\} \cup \{g_1 g_{2n}\} \cup \{g_i g_{i+n} \mid i + n \leq |V(G)|\}$.

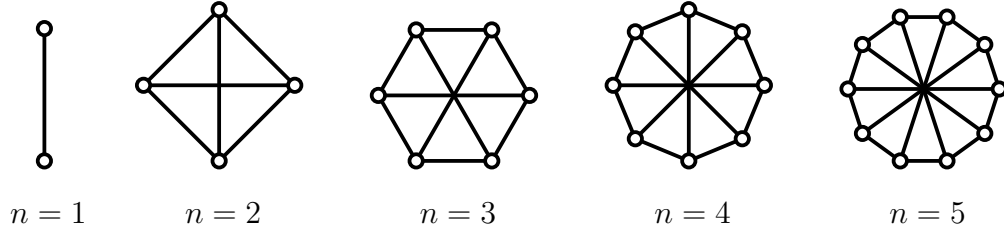


Figura 15. Alguns grafos möbius ladder, com $|V(G)| = 2 \cdot n$

3. Metodologia

Primeiramente, a aluna estudou os conceitos fundamentais de independência e dominância, com base principalmente nos artigos [Goddard and Henning 2013] e [Seo and Slater 2017]. Em seguida, aprofundou nos conceitos de conjuntos OIND e conjuntos dominantes emparelhados induzidos, com foco em produto lexicográfico, utilizando como principais referências os trabalhos [Melo and Coelho 2019] e [Coelho and Frota 2021]. Para consolidar o entendimento, foram realizadas demonstrações de proposições e teoremas, incluindo a Proposição 1 e os Teoremas 1 e 2, visando familiarizar-se com a metodologia de demonstração em grafos.

Após a fase teórica, a estudante implementou algoritmos para determinar o número OIND e a cardinalidade mínima do conjunto dominante emparelhado induzido, quando existente. Diversos testes foram conduzidos utilizando grafos do repositório "House of Graphs", o que resultou nas conjecturas que deram origem aos teoremas da subseção 5.1.

Tabela 1. Resultados dos testes em grafos cúbicos.

nº de grafos	nº de vértices	nº de arestas	γ_{oind}	γ^{ip}
1	4	6	1	2
2	6	9	2	2
2	8	12	3	4
3	8	12	2	4
1	10	15	3	6
10	10	15	3	4
4	12	18	4	6
5	12	18	3	4
5	12	18	3	6
8	12	18	4	4
19	14	21	4	6
1	14	21	5	6
1	14	21	6	8

Concluída a análise de produto lexicográfico, o foco foi direcionado para grafos cúbicos. Primeiramente, foram realizados testes em um total de 62 grafos do mesmo repositório, revelando que grafos cúbicos com o mesmo número de vértices e arestas não possuem necessariamente o mesmo número γ_{oind} . Em resposta a essa observação, foram selecionadas e analisadas classes específicas de grafos cúbicos, em específico os grafos circular ladder e möbius ladder, com o objetivo de obter resultados exatos para γ_{oind} . Foram realizados testes adicionais nessas classes e, posteriormente, levantadas e provadas conjecturas que culminaram nos Teoremas 7 e 8. Durante todo o processo, a aluna e a orientadora realizaram reuniões semanais para discutir o progresso da pesquisa e ajustar os resultados conforme necessário.

4. Implementação

A implementação dos códigos foram feitas utilizando a técnica backtracking, que se baseia na geração de todas possibilidades de um determinado conjunto, calculando em tempo total de complexidade exponencial. Assim, o código gera todos possíveis conjuntos OIND's e todos possíveis conjuntos dominantes emparelhados induzidos, a fim de salvar a cardinalidade mínima dentre todos eles e imprimir ambos na tela. No caso de não achar nenhum conjunto dominante emparelhado induzido, o código calcula, para todos conjuntos OIND's, qual a quantidade exata de subgrafos K_1 e K_2 induzidos por cada conjunto gerado e retorna a quantidade em relação ao conjunto OIND que gera a menor número de subgrafos K_1 . A linguagem utilizada foi C++ e os códigos podem ser encontrados em [de Moraes 2023].

5. Resultados

5.1. Produto Lexicográfico

Nesta seção, nós provamos algumas igualdades de $\gamma_{oind}(G \circ H)$ quando restringimos o número de vértices de G e apresentamos limites considerando $\gamma^{ip}(G)$ e considerando γ_{oind} de G e H separadamente. Primeiramente, apresentaremos alguns resultados mais básicos obtidos de γ_{oind} .

Proposição 1. *Um grafo G possui vértice universal se e somente se $\gamma_{oind}(G) = 1$.*

Demonstração. O vértice u é um vértice universal se e somente se $|N[u]| = |V(G)|$. Além disso, $|N(u) \cap \{u\}| \leq 1$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $|N[v] \cap \{u\}| \geq 1$ se e somente se $\{u\}$ é um conjunto OIND. Portanto $\gamma_{oind}(G) = 1$. \square

Teorema 1. *Seja $K_{n,m}$ um grafo bipartido completo. Se $K_{n,m}$ não possui vértice universal, então $\gamma_{oind}(K_{n,m}) = 2$.*

Demonstração. Se $K_{n,m}$ não possui vértice universal, significa que $|N[v]| < |V(K_{n,m})|$ para todo $v \in K_{n,m}$. Considere que A seja uma das partições de $K_{n,m}$ tal que $|A| = n$ e B seja a outra partição tal que $|B| = m$. Como $K_{n,m}$ não possui vértice universal, note que pela Proposição 1, $\gamma_{oind}(K_{n,m}) > 1$. Assim, considere $D = \{a, b\}$ um conjunto tal que $a \in A$ e $b \in B$. Como $K_{n,m}$ é um grafo bipartido completo, note que para todo $v \in D$, $|N(v) \cap D| \leq 1$ e para todo $v \in V(K_{n,m})$, $|N[v] \cap D| \geq 1$. Logo D é um conjunto OIND de $K_{n,m}$ e como $\gamma_{oind}(K_{n,m}) > 1$ e $|D| = 2$, D é um conjunto OIND de cardinalidade mínima. \square

Em [Goddard and Henning 2013], $i(G)$ é mostrado com o valor $\frac{n}{3}$ para caminhos e grafos cíclicos. Em [Melo and Coelho 2019] é mostrado esse mesmo valor como um limite superior para γ_{oind} nessas classes e nós provamos o limite inferior, fazendo com que $\gamma_{oind} = i$ em caminhos e grafos cíclicos.

Teorema 2. *Seja $G = C_n$ ou $G = P_n$, então $\gamma_{oind}(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Suponha, por contradição, que $\gamma_{oind}(G) < \lceil \frac{n}{3} \rceil$ e que D seja um conjunto OIND tal que $|D| = \gamma_{oind}(G)$. Observe que nos grafos P_n e C_n cada vértice domina no máximo 3 vértices (ele mesmo e dois vizinhos), ou seja, $|N[v] \cap V(G)| \leq 3$ para todo $v \in D$. Logo,

$$3 \cdot \gamma_{oind}(G) \geq n \quad (1)$$

Agora, considere 2 casos:

Caso 1: $n \bmod 3 \neq 0$. Por suposição, $\gamma_{oind}(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Multiplicando por 3 a expressão anterior, temos que $3 \cdot \gamma_{oind}(G) \leq 3 \cdot \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Isso implica que $3 \cdot \gamma_{oind}(G) < n$, o que entra em contradição com a Equação 1.

Caso 2: $n \bmod 3 = 0$. Novamente por suposição, $\gamma_{oind}(G) < \frac{n}{3}$. Multiplicando por 3 a equação anterior, temos que $3 \cdot \gamma_{oind}(G) < 3 \cdot \frac{n}{3}$. Isso implica que $3 \cdot \gamma_{oind}(G) < n$, o que entra em contradição com a Equação 1.

Logo, $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Pelo Teorema 2.1 provado em [Melo and Coelho 2019], $\gamma_{oind}(C_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$, e pelo Teorema 2.2 em [Melo and Coelho 2019], $\gamma_{oind}(P_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Portanto, $\gamma_{oind}(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. \square

Os próximos resultados estão relacionados ao produto lexicográfico $G \circ H$ entre dois grafos. Começaremos investigando casos especiais e, no fim dessa seção, generalizaremos para dois casos gerais.

Teorema 3. *Se $\gamma_{oind}(H) = 1$, então $\gamma_{oind}(G \circ H) = \gamma_{oind}(G)$.*

Demonstração. Considere D um conjunto OIND tal que $\gamma_{oind}(G \circ H) = |D|$, e G_i a componente i do grafo G . Desde que $\gamma_{oind}(H) = 1$, pela Proposição 1, sabemos que H possui um vértice universal e que, por isomorfismo, G_i também possui vértice universal. Vamos provar que para todo i , $|V(G_i) \cap D| = 1$. Suponha, por contradição, que para algum i , $|V(G_i) \cap D| > 1$. Agora, vamos definir um conjunto OIND D' tal que $|D'| < |D|$. Considere $(g_u, h_v) \in V(G_i)$ um vértice universal tal que $|D \cap V(G_i)| > 1$. Escolha exatamente um vértice (g_u, h_v) de cada componente, caso ele exista, para fazer parte do conjunto D' . Observe que para todo vértice $(g_i, h_l) \in D'$, temos que $|N((g_i, h_l)) \cap D'| \leq 1$, e para todo $(g_i, h_l) \in V(G \circ H)$, temos que $|N[(g_i, h_l)] \cap D'| \geq 1$. Logo, D' é um conjunto OIND. Desde que, existe pelo menos uma componente G_i , tal que $|V(G_i) \cap D| > 1$, temos que $|D'| < |D|$. Uma contradição. Logo, todo conjunto mínimo OIND D satisfaz que, para todo i , $|V(G_i) \cap D| = 1$. Por definição de conjunto OIND, sabemos que para todo $(g_i, h_l) \in D$, $|N((g_i, h_l)) \cap D| \leq 1$, e para todo $(g_i, h_l) \in V(G \circ H)$, $|N[(g_i, h_l)] \cap D| \geq 1$. Considere o conjunto $S = \{g_i | (g_i, h_l) \in D\}$. Por construção de D ,

sabemos que para todo $g_i \in S$, $|N(g_i) \cap D| \leq 1$, e para todo $g_i \in V(G)$, $|N[g_i] \cap D| \geq 1$. Portanto, S é um conjunto OIND de G e $\gamma_{oind}(G \circ H) \geq \gamma_{oind}(G)$.

Agora, considere S_1 um conjunto OIND de G tal que $\gamma_{oind}(G) = |S_1|$ e considere $S_2 = \{h_1\}$ um conjunto OIND de H tal que $\gamma_{oind}(H) = |S_2|$. Construa um conjunto $D''' = \{(g_i, h_1) | (g_i, h_1) \in V(G \circ H) \text{ e } g_i \in S_1\}$. Por construção D''' é um conjunto OIND de $G \circ H$ e $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma_{oind}(G)$. \square

Nos três resultados seguintes, abordaremos mais alguns casos especiais para achar a cardinalidade mínima do conjunto OIND do produto lexicográfico $G \circ H$ quando G está restrito em relação à sua quantidade de vértices.

Proposição 2. Se $|V(G)| = 1$, então $\gamma_{oind}(G \circ H) = \gamma_{oind}(H)$.

Demonstração. Se $|V(G)| = 1$, então, por definição de produto lexicográfico, $G \circ H$ é isomorfo a H . Logo, $\gamma_{oind}(G \circ H) = \gamma_{oind}(H)$. \square

Teorema 4. Se $|V(G)| = 2$ ou $|V(G)| = 3$, então $\gamma_{oind}(G \circ H) = \min(\gamma_{oind}(H), 2)$.

Demonstração. Seja D um conjunto OIND de $G \circ H$ tal que $|D| = \gamma_{oind}(G \circ H)$. Considere 2 casos:

Caso 1: $|V(G)| = 2$. Se $\gamma_{oind}(H) = 1$, pelo Teorema 3, $|D| = \gamma_{oind}(G)$. Desde que G é conexo e que $|V(G)| = 2$, então $G = P_2$. Assim, pelo Teorema 2, $|D| = \lceil \frac{2}{3} \rceil = 1$, o que implica $\gamma_{oind}(G \circ H) = 1 = \gamma_{oind}(H)$. Caso $\gamma_{oind}(H) \neq 1$, escolha um vértice $(g_i, h_l) \in D$. Pela Proposição 1, sabemos que (g_i, h_l) não é universal, logo $N[(g_i, h_l)] \cap D \neq V(G_i)$. Isso significa que para algum $(g_u, h_v) \in V(G \circ H)$, $|N[(g_u, h_v)] \cap \{(g_i, h_l)\}| < 1$. Dessa forma, $D \neq \{(g_i, h_l)\}$ e $|D| > 1$. Agora, considere $D' = \{(g_1, h_1), (g_2, h_1)\}$. Por construção de D' , para todo $(g_z, h_w) \in D'$, $|N((g_z, h_w)) \cap D'| \leq 1$ e para todo $(g_z, h_w) \in V(G \circ H)$, $|N[(g_z, h_w)] \cap D'| \geq 1$. Logo, D' é um conjunto OIND mínimo tal que $|D| = |D'| = 2$. Portanto, $\gamma_{oind}(G \circ H) = \min(\gamma_{oind}(H), 2)$.

Caso 2: $|V(G)| = 3$. Se $\gamma_{oind}(H) = 1$, pelo Teorema 3, $|D| = \gamma_{oind}(G)$. Sabendo que $|V(G)| = 3$, então $G = P_3$ ou $G = C_3$. Assim, pelo Teorema 2, $|D| = \lceil \frac{3}{3} \rceil = 1$, o que implica $\gamma_{oind}(G \circ H) = 1 = \gamma_{oind}(H)$. Caso $\gamma_{oind}(H) \neq 1$, escolha um vértice $(g_i, h_l) \in D$. Pela Proposição 1, sabemos que (g_i, h_l) não é universal, logo $N[(g_i, h_l)] \cap D \neq V(G_i)$. Isso significa que para algum $(g_u, h_v) \in V(G \circ H)$, $|N[(g_u, h_v)] \cap \{(g_i, h_l)\}| < 1$. Dessa forma, $D \neq \{(g_i, h_l)\}$ e $|D| > 1$. Agora, considere $D' = \{(g_1, h_1), (g_2, h_1)\}$. Por construção de D' , para todo $(g_z, h_w) \in D'$, $|N((g_z, h_w)) \cap D'| \leq 1$, e para todo $(g_z, h_w) \in V(G \circ H)$, $|N[(g_z, h_w)] \cap D'| \geq 1$. Logo, D' é um conjunto OIND mínimo e $|D| = |D'| = 2$. Portanto, $\gamma_{oind}(G \circ H) = \min(\gamma_{oind}(H), 2)$. \square

Por fim, os últimos dois teoremas dizem respeito a resultados gerais. No próximo resultado, dado o produto lexicográfico $G \circ H$, associamos a cardinalidade mínima do conjunto OIND de $G \circ H$ com a cardinalidade mínima do conjunto dominante emparelhado induzido de G .

Teorema 5. Se G admite conjunto dominante emparelhado induzido, com $|V(G)| > 3$, e $\gamma_{oind}(H) > 1$, então $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma^{ip}(G)$.

Demonstração. Seja G um grafo simples com n vértices, D um conjunto dominante emparelhado induzido, tal que $|D| = \gamma^{ip}(G)$, e G_i a componente i do grafo $G \circ H$. Construa o conjunto $D' = \{(g_i, h_1) \in V(G_i) | g_i \in D\}$. Nós vamos mostrar que D' é um conjunto OIND do produto lexicográfico $G \circ H$. Dado que D é um conjunto dominante emparelhado induzido de G , então sabemos que $|N(g_k) \cap D| \geq 1$, para todo $g_k \in V(G)$ e $|N(g_i) \cap D| \leq 1$, para todo $g_i \in D$. Assim, por construção de D' , $|N((g_k, h_l)) \cap D'| \geq 1$, para todo $(g_k, h_l) \in G \circ H$, o que resulta em $|N[(g_k, h_l)] \cap D'| \geq 1$, para todo $(g_k, h_l) \in G \circ H$. Além disso, $|N((g_i, h_1)) \cap D'| \leq 1$, para todo $(g_i, h_1) \in D'$. Logo, $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma^{ip}(G)$. \square

Teorema 6. $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$.

Demonstração. Considere S_1 um conjunto OIND de G tal que $\gamma_{oind}(G) = |S_1|$ e considere S_2 um conjunto OIND de H tal que $\gamma_{oind}(H) = |S_2|$. Agora construa um conjunto $D = \{(g_i, h_l) | (g_i, h_l) \in V(G \circ H), |N(g_i) \cap S_1| = 0 \text{ e } g_i \in S_1 \text{ e } h_l \in S_2\} \cup \{(g_i, h_l) | (g_i, h_l) \in V(G \circ H), |N(g_i) \cap S_1| = 1 \text{ e } g_i \in S_1\}$. Por construção de D , observe que para todo vértice $(g_i, h_l) \in D$, temos que $|N((g_i, h_l)) \cap D| \leq 1$ e para todo $(g_i, h_l) \in V(G \circ H)$, temos que $|N[(g_i, h_l)] \cap D| \geq 1$. Logo D é um conjunto OIND de $G \circ H$.

Considere G_i a componente i do grafo $G \circ H$. Construa o conjunto $A = \{G_k | |V(G_k) \cap D| \geq 1\}$. Observe que A contém somente componentes de $G \circ H$ que contenham ao menos um vértice de D . Dessa forma, a construção mostra que $|V(G_k) \cap D| \leq |S_2|$, uma vez que G_k é isomorfo a H . Além disso, por construção, temos que $|A| = |S_1|$. Assim, como $\bigcup_{k=1}^{|A|} V(G_k) \cap D = D$, temos que $|D| = |A| \cdot |V(G_k) \cap D| \leq |S_1| \cdot |S_2| \leq \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$. Portanto, $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$. \square

Note que há casos no qual $\gamma_{oind}(G \circ H) < \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$. Considere os grafos $G = P_6$ e $H = P_9$, observe que $\gamma_{oind}(P_6) = 2$ e $\gamma_{oind}(P_9) = 3$, enquanto que $\gamma_{oind}(G \circ H) = 4 < 2 \cdot 3 = 6$.

5.2. Grafos Cúbicos

Nesta seção, traremos dois resultados principais, Teorema 7 e 8, os quais determinam um número exato para γ_{oind} em duas classes dos grafos cúbicos: circular ladder e mobius ladder.

Em [Berge 1973] e outros apresentaram um limite inferior para o número de dominação independente em grafos regulares, estabelecendo que $i(G) \geq \lceil \frac{V(G)}{k+1} \rceil$. Primeiramente mostraremos, por meio do Lema 1 e do Corolário 1, que esse mesmo limite é válido para os conjuntos OIND's de grafos regulares. Esses dois resultados servirão de base para a demonstração dos Teoremas 7 e 8.

Lema 1. Seja G um grafo k -regular. Então, $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{V(G)}{k+1} \rceil$.

Demonstração. Seja D um conjunto de G tal que $|D| = \gamma_{oind}(G)$. Por definição de conjunto dominante, sabemos que $\bigcup_{v \in D} N[v] = V(G)$. Além disso, para todo $v \in V(G)$, $|N[v]| = k + 1$. Dessa forma, $\sum_{v \in D} |N[v]| = \gamma_{oind}(G) \cdot (k + 1) \geq |V(G)|$, o que implica em $\gamma_{oind}(G) \geq \frac{|V(G)|}{k+1}$. Portanto, como $\gamma_{oind}(G) \in \mathbb{Z}$ concluímos que $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{k+1} \rceil$. \square

Corolário 1. *Seja G um grafo k -regular e D um conjunto OIND tal que $\gamma_{oind}(G) = |D|$. Então $\gamma_{oind}(G) = \frac{|V(G)|}{k+1}$ se e somente se, para todo $u, v \in D$ tal que $u \neq v$, temos que $N[u] \cap N[v] = \emptyset$.*

Demonstração. Pela demonstração do Lemma 1, sabemos que $\sum_{v \in D} |N[v]| \geq |V(G)|$. Note que $\sum_{v \in D} |N[v]| > |V(G)|$ se e somente se, para algum $u, v \in D$ tal que $u \neq v$, $|N[u] \cap N[v]| \geq 1$. Além disso, também sabemos pela demonstração do Lemma 1 que $\sum_{v \in D} |N[v]| = \gamma_{oind}(G) \cdot (k + 1) \geq |V(G)|$. Logo, $\gamma_{oind}(G) = \frac{|V(G)|}{k+1}$ se e somente se $|N[u] \cap N[v]| < 1$, ou seja, $N[u] \cap N[v] = \emptyset$. \square

Teorema 7. *Seja G um grafo circular ladder. Então,*

$$\gamma_{oind}(G) = \begin{cases} \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1 & , \text{ se } |V(G)| \equiv 4 \pmod{8} \\ \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Demonstração. Considere a construção do grafo circular ladder dada em 2.2. Note que $|V(G)| = 2 \cdot n$. Observe também que cada g_i terá a vizinhança $N(g_i) = \{g_{i+1}, g_{i-1}\} \cup \{g_{i+n} \text{ se } i+n \leq |V(G)| \text{ ou } g_{i-n} \text{ caso contrário}\}$. Além disso, considere o conjunto $D = \{g_i \in V(H) | i \equiv 1 \pmod{4}\}$ e o conjunto $D' = \{g_{n+i} \in V(H') | i \equiv 3 \pmod{4}\}$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $|V(G)| \not\equiv 4 \pmod{8}$. Note que, por construção de G , para todo $g_i \in V(D \cup D')$, temos que $|N(g_i) \cap (D \cup D')| \leq 1$, e para todo $g_i \in V(G)$, temos que $|N[g_i] \cap (D \cup D')| \geq 1$. Logo, $D \cup D'$ é um conjunto OIND de G . Agora, vamos analisar a cardinalidade do conjunto $D \cup D'$. Observe que se $n \equiv 0 \pmod{4}$, temos que $|D| = |D'| = \frac{n}{4}$ e $|D \cup D'| = |D| + |D'| = \frac{2 \cdot n}{4} = \frac{|V(G)|}{4} = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Já, se $n \equiv 1 \pmod{4}$, temos que $|D| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 = \frac{n-1}{4} + 1 = \frac{n+3}{4}$, $|D'| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \frac{n-1}{4}$ e $|D \cup D'| = |D| + |D'| = \frac{n+3}{4} + \frac{n-1}{4} = \frac{2 \cdot n + 2}{4}$. Como $2 \cdot n \equiv 2 \pmod{4}$, então $\frac{2 \cdot n + 2}{4} = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Por fim, se $n \equiv 3 \pmod{4}$ temos que $|D| = |D'| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 = \frac{n-3}{4} + 1$ e $|D \cup D'| = |D| + |D'| = \frac{2 \cdot n + 2}{4}$. Como $2 \cdot n \equiv 2 \pmod{4}$, então $\frac{2 \cdot n + 2}{4} = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Logo, $\gamma_{oind}(G) \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Pelo Lema 1 concluímos que $\gamma_{oind}(G) = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$.

Caso 2: $|V(G)| \equiv 4 \pmod{8}$. Seja o conjunto $S = D \cup D' \cup \{g_{2 \cdot n}\}$. Note que, por construção de G , para todo $g_i \in V(S)$, temos que $|N(g_i) \cap (S)| \leq 1$, e para todo $g_i \in V(G)$, temos que $|N[g_i] \cap (S)| \geq 1$. Logo, S é um conjunto OIND de G . Como $n \pmod{4} = 2$, temos que $|D| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 = \frac{n-2}{4} + 1$, $|D'| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \frac{n-2}{4}$ e $|S| = |D| + |D'| + |\{g_{2 \cdot n}\}| = (\frac{n-2}{4} + 1) + \frac{n-2}{4} + 1 = \frac{2 \cdot n + 4}{4} = \frac{2 \cdot n}{4} + 1$. Além disso, sabemos que $2 \cdot n \pmod{4} = 0$, então $\frac{2 \cdot n}{4} + 1 = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$. Portanto, $\gamma_{oind}(G) \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$.

Agora, iremos mostrar o limite inferior, ou seja, vamos mostrar que $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$ se $|V(G)| \equiv 4 \pmod{8}$. Seja S um conjunto OIND de G tal que $|S| =$

$\gamma_{\text{oind}}(G)$. Suponha, por contradição, que $|S| < \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$, ou seja, $|S| \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Observe que $V(G) \equiv 4 \pmod{8}$ implica que $V(G)$ é divisível por 4. Então, $|S| \leq \frac{|V(G)|}{4}$. Pelo Lemma 1, isso resulta em $|S| = \frac{|V(G)|}{4}$. Vamos tentar construir esse conjunto S satisfazendo o Corolário 1, ou seja escolhendo vértices g_i e $g_j \in S$ tal que $N[g_i] \cap N[g_j] = \emptyset$. Vamos iniciar selecionando um vértice arbitrário g_k de $V(H)$, isto é, $g_k \in S$. Desde que $N[g_k] \cap N[g_l] = \emptyset$, para todo $g_l \in V(G) \setminus g_k$, sabemos por construção de G que os vértices a uma distância $d \leq 2$ de g_k não podem fazer parte do conjunto S . Assim, para S ser dominante o vértice g_{k+2+n} , com distância 3 de g_k , é obrigado estar em S , caso contrário o vértice g_{k+2} não seria dominado. Por conseguinte, com o vértice g_{k+2+n} no conjunto, o vértice g_{k+4} também é obrigado a estar em S , caso contrário g_{k+4+n} não seria dominado. Observe que esse processo construtivo implica em formar o conjunto $S = \{g_i \in V(H) | i - k + 1 \equiv 1 \pmod{4}\} \setminus \{g_{k-2}\} \cup \{g_{i+n} \in V(H') | i - k + 1 \equiv 3 \pmod{4}\}$. Note que g_{k-2} não pode fazer parte do conjunto S , uma vez que g_{k-2} está a uma distância igual a 2 de g_k .

Por fim, vamos mostrar que um conjunto $A \subseteq V(G)$ de vértices não está sendo dominado. Seja $A = \{g_{k-2}, g_{k-3}, g_{k-1+n}, g_{k-2+n}\}$. Observe que, todo vértice $v \in \bigcup_{u \in A} N[u]$ está a uma distância $d \leq 2$ dos vértices $g_k, g_{k-4+n} \in S$. Logo para todo $u \in A$, $N[u] \cap S = \emptyset$, o que implica que os vértices em A não estão sendo dominados por S . Logo S não é um conjunto OIND, uma contradição. Note que a construção de S poderia ser iniciada por algum vértice do conjunto $V(H')$, e de forma análoga é possível mostrar que S não forma um conjunto OIND. Logo, $\gamma_{\text{oind}}(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$ e portanto $\gamma_{\text{oind}}(G) = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$

□

Teorema 8. *Seja G um grafo möbius ladder. Então,*

$$\gamma_{\text{oind}}(G) = \begin{cases} \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1 & , \text{ se } |V(G)| \equiv 0 \pmod{8} \\ \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil & , \text{ senão} \end{cases}$$

Demonstração. Considere a construção do grafo möbius ladder dada em 2.2. Note que $|V(G)| = 2 \cdot n$. Além disso, cada g_i terá a vizinhança $N(g_i) = \{g_{i+1}, g_{i-1}\} \cup \{g_{i+n} \text{ se } i + n \leq |V(G)| \text{ ou } g_{i-n} \text{ caso contrário}\}$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $|V(G)| \not\equiv 0 \pmod{8}$. Vamos construir um conjunto OIND D tal que $|D| \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Primeiro, considere $n \equiv 1 \pmod{4}$. Construa D tal que $D = \{g_i \in V(G) \mid i \leq n \text{ e } i \equiv 1 \pmod{4}\} \cup \{g_{n+i} \in V(G) \mid i \equiv 3 \pmod{4}\}$. Observe que $|D| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \frac{n-1}{4} + 1 + \frac{n-1}{4} = \frac{2 \cdot n + 2}{4} = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Agora, considere $n \equiv 2 \pmod{4}$ e construa D tal que $D = \{g_i \in V(G) \mid i \equiv 1 \pmod{4}\}$. Observe que $|D| = \frac{2 \cdot n}{4} = \frac{|V(G)|}{4} = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Por fim, considere $n \equiv 3 \pmod{4}$ e considere D tal que $D = \{g_i \in V(G) \mid i \leq n \text{ e } i \equiv 1 \pmod{4}\} \cup \{g_i \in V(G) \mid i > n \text{ e } i \equiv 2 \pmod{4}\}$. Note que $|D| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \frac{n-3}{4} + 1 + \frac{n-3}{4} + 1 = \frac{2 \cdot n + 2}{4} = \frac{|V(G)| + 2}{4} = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Em todos os casos D é um conjunto OIND tal que $|D| \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Logo, pelo Lemma 1 concluímos que $\gamma_{\text{oind}}(G) = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$.

Caso 2: $|V(G)| \equiv 0 \pmod{8}$. Construa D tal que $D = \{g_i \in V(G) \mid i \leq n \text{ e } i \equiv 1 \pmod{4}\} \cup \{g_i \in V(G) \mid i > n \text{ e } i \equiv 3 \pmod{4}\} \cup \{g_n\}$. Note que, por construção de

G , para todo $g_i \in V(D)$, temos que $|N(g_i) \cap D| \leq 1$, e para todo $g_i \in V(G)$, temos que $|N[g_i] \cap D| \geq 1$. Logo, D é um conjunto OIND de G . Ademais, como $n \equiv 0 \pmod{4}$, observe que $|D| = \frac{n}{4} + \frac{n}{4} + 1 = \frac{|V(G)|}{4} + 1 = \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$. Portanto, $\gamma_{oind}(G) \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$.

Agora, iremos mostrar o limite inferior, ou seja, vamos mostrar que $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$ se $|V(G)| \equiv 0 \pmod{8}$. Seja S um conjunto OIND de G tal que $|S| = \gamma_{oind}(G)$. Suponha, por contradição, que $|S| < \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$, ou seja, $|S| \leq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$. Observe que $V(G) \equiv 0 \pmod{8}$ implica que $V(G)$ é divisível por 4. Então, $|S| \leq \frac{|V(G)|}{4}$. Pelo Lemma 1, isso resulta em $|S| = \frac{|V(G)|}{4}$. Vamos tentar construir esse conjunto S satisfazendo o Corolário 1, ou seja escolhendo vértices g_i e $g_j \in S$ tal que $N[g_i] \cap N[g_j] = \emptyset$. Vamos iniciar selecionando um vértice arbitrário g_k de $V(G)$, isto é, $g_k \in S$. Desde que $N[g_k] \cap N[g_l] = \emptyset$, para todo $g_l \in V(G) \setminus g_k$, sabemos por construção de G que os vértices a uma distância $d \leq 2$ de g_k não podem fazer parte do conjunto S . Assim, para S ser dominante, o vértice g_{k+2+n} ou o vértice g_{k+3} , com distância 3 de g_k , é obrigado estar em S , caso contrário o vértice g_{k+2} não seria dominado.

Então, considere o primeiro cenário em que $g_k, g_{k+3} \in S$. Vamos mostrar que o conjunto $A = \{g_{k+1+n}, g_{k+2+n}\}$ não está sendo dominado. Observe que, por construção de G , todo vértice $v \in \bigcup_{u \in A} N[u]$ está a uma distância $d \leq 2$ dos vértices $g_k, g_{k+3} \in S$. Logo para todo $u \in A$, $N[u] \cap S = \emptyset$, o que implica que os vértices em A não estão sendo dominados e S não é um conjunto OIND. Uma contradição. Portanto, $|S| \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$ se $g_{k+3} \in S$.

Por fim, considere o segundo cenário em que $g_k, g_{k+2+n} \in S$. Para o vértice g_{k+3} ser dominado, g_{k+4} precisa pertencer a S uma vez que todos os vértices de $N[g_{k+3}] \setminus g_{k+4}$ estão a uma distância $d \leq 2$ de g_k ou de g_{k+2+n} . Note que agora $S = \{g_k, g_{k+4}, g_{k+2+n}\}$. A construção de S segue, incluindo novos vértices para dominar $|V(G)|$ e satisfazendo o Lema 1. Assim, os vértices g_{k+6+n} e g_{k+8} serão incluídos para dominar respectivamente os vértices g_{k+5+n} e g_{k+7} . Observe que esse processo construtivo implica em formar o conjunto $S = \{g_i \in V(G) \mid i - k + 1 < n \text{ e } i - k + 1 \equiv 1 \pmod{4}\} \cup \{g_i \in V(G) \mid i - k + 1 \geq n \text{ e } i - k + 1 \equiv 3 \pmod{4}\} \setminus g_{k-2}$. Note que g_{k-2} não pode fazer parte do conjunto S , uma vez que g_{k-2} está a uma distância igual a 2 de g_k . Agora, vamos mostrar que um conjunto $A \subseteq V(G)$ de vértices não está sendo dominado. Considere $A = \{g_l, g_{k-2}\}$, com $l - k + 1 = n - 1$. Observe que, por construção de G , todo vértice $v \in \bigcup_{u \in A} N[u]$ está a uma distância $d \leq 2$ de algum vértice de S . Logo para todo $u \in A$, $N[u] \cap S = \emptyset$, o que implica que os vértices em A não estão sendo dominados por S . Logo S não é um conjunto OIND, uma contradição. Portanto, $|S| \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$ se $g_{k+2+n} \in S$. Dessa forma, em ambos cenários $|S| \geq \frac{|V(G)|}{4} + 1$, o que implica $\gamma_{oind}(G) = \frac{|V(G)|}{4} + 1$.

Conclui-se, portanto, que $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil + 1$, se $|V(G)| \equiv 0 \pmod{8}$, e $\gamma_{oind}(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{4} \rceil$ senão.

□

Observe que embora em alguns grafos circular ladder e möbius ladder, $\gamma_{oind}(G) = i(G)$, no geral para esses grafos não podemos afirmar que o número dominante independente é igual a γ_{oind} . Veja a figura 16 para um exemplo.

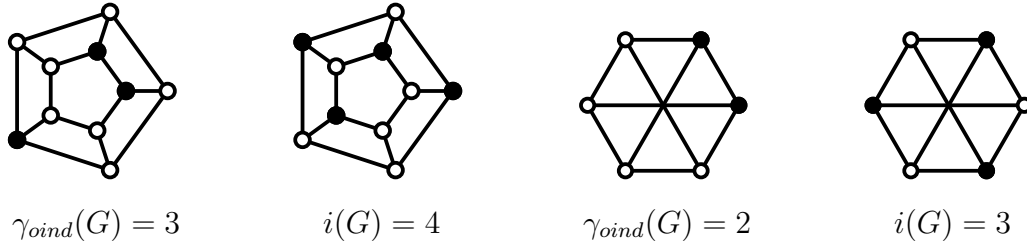


Figura 16. Exemplos de grafos möbius ladder e circular ladder tal que $\gamma_{oind}(G) \neq i(G)$

6. Conclusão

Conclui-se que conjunto OIND é um conceito que tem muito a ser explorado na literatura e, com esse trabalho, conseguimos dar contribuições para a comunidade científica ao trazer resultados do número γ_{oind} em grafos cúbicos e em grafos gerados por produto lexicográfico. Como trabalho futuro, deseja-se provar que γ_{oind} é um problema NP -completo, e assim, deseja-se encontrar algoritmos eficientes para achar γ_{oind} em grafos cúbicos e em outras classes de grafos. Como fruto dessa pesquisa, obteve-se duas submissões aceitas para apresentar os resultados parciais em dois congressos: 9º Encontro da Teoria da Computação (ETC) e 11th Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG). Por fim, os resultados obtidos no relatório irão compor um artigo completo que vai ser submetido num periódico especializado da área.

7. Considerações finais

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Centro de Excelência em Inteligência Artificial (CEIA) pelo apoio à pesquisa.

Referências

- Abrishami, G. and Henning, M. A. (2018). Independent domination in subcubic graphs of girth at least six. In *Discrete Mathematics*, pages 155–164.
- Akbari, A., Akbari, S., Doosthosseini, A., Hadizadeh, Z., and Naraghi, A. (2022). Independent domination in subcubic graphs. In *Jornal of Combinatorial Optimization*, pages 28–41.
- Berge, C. (1973). *Graphs and hypergraphs*.
- Brause, C. and Henning, M. A. (2019). Independent domination in bipartite cubic graphs. In *Graphs and Combinatorics*, page 881–912.
- Cockayne, E. J. and Hedetniemi, S. T. (1974). Independence graphs. In *Graph Theory and Computing, Utilitas Math*, pages 471–491. Conference on Combinatorics.
- Cockayne, E. J. and Hedetniemi, S. T. (1977). Towards a theory of domination in graphs. In *Networks* 7, pages 247–261.
- Coelho, E. M. M. and Frota, I. C. L. (2021). *Induced-Paired Dominating Sets in Lexicographic Product of Graphs*. *Matemática Contemporânea*.

- de Moraes, L. M. O. (2023). Graph-parameters-oind-set-ipd-set roject title. <https://github.com/lauanemateus/Graph-parameters-OIND-set-IPD-set>.
- Goddard, W. and Henning, M. A. (2013). Independent domination in graphs: A survey and recent results. In *Discrete Mathematics*, pages 839–854.
- Gözüpek, D., Hujdurović, A., and Milanič, M. (2017). In *Characterizations of minimal dominating sets and the well-dominated property in lexicographic product graphs*, pages 1–17. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.
- Haynes, T. W. and Slater, P. J. (1995). *Paired domination and the paired-domatic number*. Congressus Numerantium.
- Haynes, T. W. and Slater, P. J. (1998). *Paired domination in graphs*. Networks.
- Maheswari, S. U. and Parvathi, M. S. (2017). In *Independent Dominating Sets of Lexicographic Product Graphs of Cayley Graphs with Arithmetic Graphs*, pages 160–166. International Journal of Advanced in Management, Technology and Engineering Sciences.
- Melo, L. F. and Coelho, E. M. M. (2019). *Conjuntos dominantes independentes abertos no produto Lexicográfico de alguns grafos*. Anais do XVI Congresso de Ensino Pesquisa e Extensão da UFG.
- Seo, S. J. and Slater, P. J. (2017). In *Open-independent, open-locating-dominating sets*, pages 179–193. Elec. Journal of Graph Theory and Applications.
- Sitthiwiratham, T. (2013). In *Domination on Lexicographical Product of Complete Graph*, pages 745–750. International Journal of Pure and Applied Mathematics.
- Zhang, X., Liu, J., and Meng, J. (2011). In *Domination in lexicographic product graphs*, pages 251–256. Ars Combinatoria.