Cátedra de: ALGORITMOS GENÉTICOS

"FRACTALES"

Adscripto: Juan M. Rinaudo
Profesor asesor: Ing. Daniela Diaz

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

Año: 2017

Glosario

- **Geometría euclidiana:** es aquella que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. Es aquella que estudia las propiedades geométricas del plano euclídeo y del espacio euclídeo tridimensional mediante el método sintético, introduciendo los cinco postulados de Euclides.
- **Geometría fractal:** rama que busca y estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala.
- **Escala:** proporción que existe entre las dimensiones de un dibujo, mapa, plano, etc., y las de la realidad que representa.
- **Dimensión:** magnitud que, junto con otras, sirve para definir un fenómeno físico; especialmente, magnitud o magnitudes que se consideran en el espacio para determinar el tamaño de las cosas.
- **Congruente:** en matemáticas, dos figuras geométricas son congruentes si tienen los lados iguales y el mismo tamaño, o si existe una isometría que los relaciona: una transformación que puede ser de traslación, rotación y/o reflexión.
- **Factor de ampliación:** multiplicador constante aplicado a las dimensiones nominales de un objeto geométrico para obtener las dimensiones reales a las que se ha de producir.
- **Algoritmo de tiempo de escape:** algoritmo utilizado en representación gráfica computarizada, en el cual cada pixel se colorea según el número de iteraciones necesarias para escapar del inifinto. Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos que no han escapado tras un número grande y prefijado de iteraciones.
- **Movimiento browniano:** movimiento aleatorio que se observa en las partículas que se hallan en un medio fluido (líquido o gas), como resultado de choques contra las moléculas de dicho fluido.
- **Compresión con pérdida:** procedimiento de codificación que tiene como objetivo representar cierta cantidad de información utilizando una menor cantidad de la misma, siendo imposible una reconstrucción exacta de los datos originales.

Índice

Introducción

Naturalmente podemos ubicar la geometría fractal en ese gran continente del mundo de la matemática llamado geometría. La geometría euclidiana es la geometría clásica que empezamos a estudiar desde la escuela primaria; es punto de partida para las otras clases de geometría y la primera en orden cronológico. Casi tan antigua como el hombre mismo, dado que su gestación es, en buena parte, consecuencia de la necesidad e inquietud natural del ser humano por conocer, analizar y medir lo que encuentra en el mundo, la geometría en general busca, de una u otra manera, el modelar objetos y fenómenos de la naturaleza y hallar un orden en el universo. Sin embargo, las formas y figuras que estudia la geometría euclidiana son bastante ideales, suaves, regulares, es decir más bien alejadas de las que realmente se encuentra en la naturaleza. Como afirma el propio B. Mandelbrot, considerado padre de los fractales:
"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son circunferencias y la corteza de un árbol no es lisa, como tampoco es cierto que la luz viaje en línea recta".
La geometría fractal pretende acercarse un poco más a las formas, objetos y fenómenos de la naturaleza; de hecho, uno de los libros clásicos de Mandelbrot lleva el sugestivo título *"La geometría fractal de la naturaleza"*. Pensemos por ejemplo en un árbol. Quizá una representación aproximada de un árbol, usando figuras de la geometría euclidiana, sería como la que se muestra en la Figura 1, mientras que usando los principios básicos de la geometría fractal, una representación de un árbol sería como la de la Figura 2.

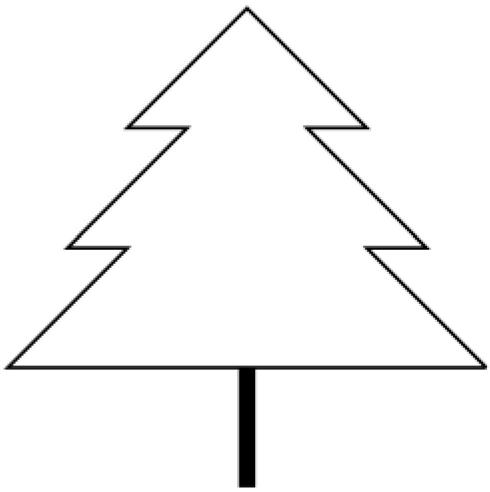

Figura 1: Geometría euclidiana

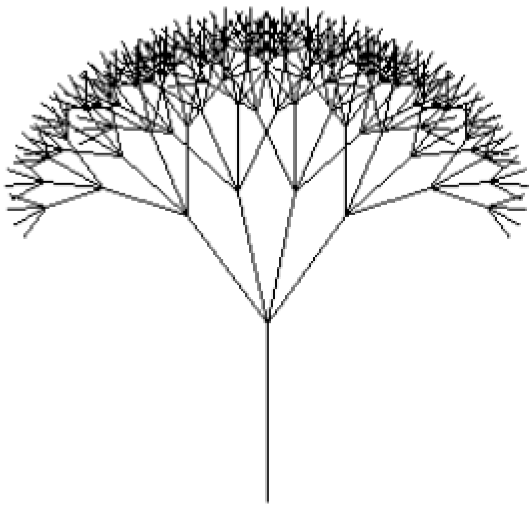

Figura 2: Geometría fractal

Justamente esta característica (la de constituir una geometría más cercana a la naturaleza) es una de las razones por las cuales la geometría fractal actualmente llama la atención. Existen, en nuestro concepto, al menos otros tres atractivos que posee esta geometría, a saber: la belleza o vistosidad de las figuras que estudia, las numerosas aplicaciones que se le vienen encontrando en muy diversas ramas de la ciencia y aun del arte (física, biología, química, geología, medicina, pintura, arquitectura, música, literatura, diseño, entre otras), y por otra parte, dado que constituye un área de estudio relativamente nueva, se encuentra aún en ella una buena cantidad de problemas abiertos y preguntas sin respuestas conocidas.

Definición de Fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît

Mandelbrot en 1975 y deriva del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número no entero.

Requerimientos para obtener un Fractal

La palabra fractal, referida a conjuntos matemáticos, apareció por primera vez en el año 1975 cuando Mandelbrot la utilizó en su libro[1] para referirse a ciertos conjuntos con todas o algunas de las siguientes propiedades:

- Tienen detalles a todas las escalas, entendiendo por esto que mirados a cualquier nivel de escala (zoom) manifiestan detalles ya observados a nivel global.
- Son autosemejantes, es decir, que están formados por partes que son semejantes al conjunto total.
- Tienen una descripción algorítmica simple, entendiendo por ello que su construcción se basa en un algoritmo sencillo.

Características de los Fractales

Ciertamente existen dos propiedades fundamentales que de alguna forma identifican lo que es un fractal, y son: la autosimilitud (o autosemejanza) y la dimensión "extraña".

La autosimilitud

Consideremos un triángulo cualquiera junto con su interior, es decir "relleno". Unamos los puntos medios de los lados del triángulo de modo que su interior queda dividido en cuatro triángulos, de los cuales eliminamos el triángulo central. En cada uno de los tres triángulos que quedan repetimos la misma construcción (unir los puntos medios de los lados y eliminar el triángulo central) obteniéndose nueve triangulitos (véase la Figura 3), en cada uno de los cuales repetimos la construcción para obtener 27 triangulitos y así sucesivamente. De esta manera obtenemos una sucesión de figuras, la "última" de las cuales se conoce con el nombre de triángulo de Sierpiń ski.

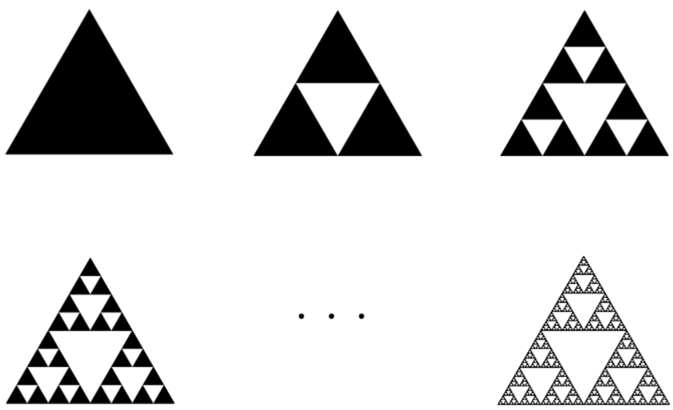

Figura 3: Construcción geométrica del triángulo de Sierpiń ski.

Por supuesto que no es correcto decir la "última" figura, dado que, en teoría, el proceso de construcción descrito anteriormente nunca va a terminar; sin embargo, la sucesión de figuras sí parece acercarse a una figura en particular y es posible y correcto hablar de la "figura límite".

[1] Benoit B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.

Una buena representación de cómo sería la figura límite o triángulo de Sierpiń ski, se muestra en la Figura 4. Ahora, observando detenidamente este conjunto, inmediatamente se aprecian en él muchísimas copias más pequeñas de sí mismo. En realidad, si recordamos el proceso de construcción concluimos que son infinitas copias. De esta forma podemos afirmar que el triángulo de Sierpiń ski está formado por infinitas copias de sí mismo, solo que reducidas y colocadas en diferente posición. Esta propiedad es llamada autosimilitud o autosemejanza, y es la primera propiedad que debemos destacar como una propiedad esencial de los fractales.

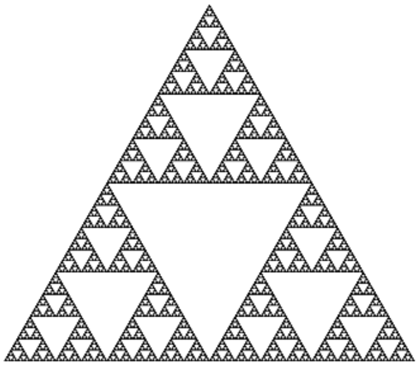

Figura 4: Triángulo de Sierpiń ski.

La noción intuitiva de autosemejanza en realidad es muy sencilla y natural; muy seguramente todos la hemos percibido en algún momento y de alguna manera en muy diversos contextos: por ejemplo al observar diferentes objetos de la naturaleza como algunas clases de plantas, árboles, una cabeza de coliflor, las nubes, las olas del mar, un relámpago, entre muchos otros. Se encuentra también, claro está, en el contexto de las matemáticas: algunas fracciones continuas, conjuntos cuyos elementos son conjuntos, filtros cuyos elementos son filtros y numerosos conjuntos, hoy ejemplos clásicos de conjuntos autosemejantes como el triángulo de Sierpiń ski, del que acabamos de hablar, o el conjunto de Cantor o la curva de Koch, de los cuales hablaremos un poco más adelante. En todos los entes anteriores se percibe de alguna forma y en mayor o menor grado la siguiente característica: *el todo está formado por varias copias de sí mismo, solo que reducidas y puestas en diferente posición*; o, dicho de otra manera: el todo es igual a sus partes, salvo un factor de escala.
Se mencionarán tres tipos diferentes de autosimilitud:

- Autosimilitud exacta: es el tipo más restrictivo y exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas (sistemas de funciones iteradas). Ejemplo: conjunto de Cantor, triángulo de Sierpiń ski, copo de nieve de Koch y otros.
- Cuasiautosimilitud: exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas (fractales definidos por relaciones de recurrencia). Ejemplo: conjunto de Julia, conjunto de Mandelbrot y otros.
- Autosimilitud estadística: es el tipo más débil y exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala (fractales aleatorios). Ejemplo: el vuelo de Levy, paisajes fractales, árboles brownianos y otros.

Volviendo a nuestro triángulo de Sierpiń ski, es claro que de las infinitas copias que contiene de sí mismo, hay tres de ellas que son “maximales” (véase la Figura 5a). Cada una de estas tres copias está a su vez formada por otras tres subcopias, y cada una de estas por tres “subsubcopias”, etc. Otra manera de visualizar la propiedad de autosemejanza es imaginando que se pone una lupa o efecto de “zoom” en cualquier parte o región del triángulo, y observar que, no importa lo pequeña que sea la región observada, siempre se encontrará una copia reducida del conjunto total (Figura 5b).

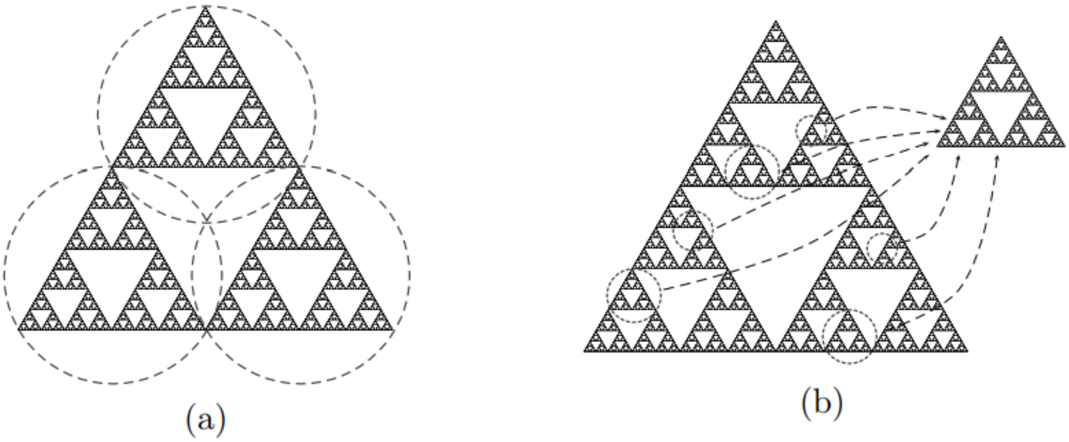

Figura 5: Autosimilitud en el triángulo de Sierpiński.

Sin embargo, notemos que un conjunto de la geometría clásica euclidiana también puede ser autosemejante; por ejemplo, un segmento de recta se puede ver como la unión de dos copias de sí mismo, o un cuadrado como la unión de cuatro copias de sí mismo. Entonces, ¿en dónde radica la diferencia entre los objetos de la geometría fractal y los objetos de la geometría euclidiana clásica? Aquí es donde abordaremos la segunda propiedad esencial de los fractales.

La dimensión extraña

Para la mayoría de las personas es intuitivamente claro y natural, de acuerdo con lo aprendido en la escuela primaria y secundaria, que las figuras o conjuntos geométricos tienen dimensión 0, 1, 2 o 3. Así, un punto o un conjunto discreto de puntos tiene dimensión 0; una línea dimensión 1; una figura en el plano como un cuadrado o un triángulo (con su interior) tiene dimensión 2, y las figuras en el espacio como una esfera o un cubo tienen dimensión 3. En principio, para la mayoría de las personas estas serían las únicas posibilidades que puede tomar el valor de la dimensión de un objeto o ente geométrico. ¿Qué pensaría usted si le dijeran que un conjunto tiene dimensión 0,458?, o dimensión 1,753, por ejemplo? Seguramente le parecería al menos un poco extraño. Pues bien, nuestro triángulo de Sierpiński tiene dimensión aproximadamente igual a 1,584 (más exactamente su dimensión es ln 3/ ln 2).

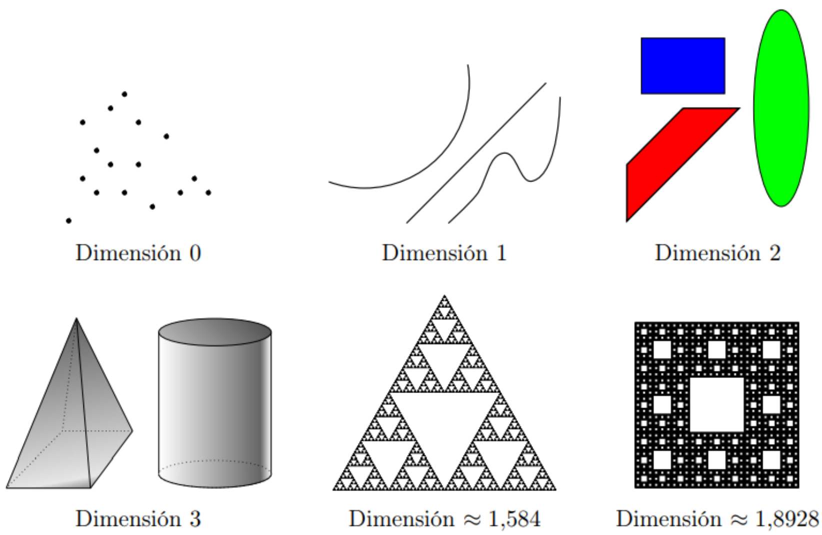

Figura 6: Algunos objetos y su dimensión

Justificar plenamente esta afirmación requeriría tener unos buenos conocimientos de teoría de la medida y teoría de la dimensión, que ciertamente constituyen campos relativamente sofisticados

de la matemática, fuera del alcance del presente texto. Intentaremos de todas maneras, dar una pequeña explicación que al menos nos aproxime un poco a este fenómeno.
Analicemos un poco lo que ocurre con un segmento o con un cuadrado. El segmento lo podemos "romper" en dos segmentos congruentes, y cada uno de ellos se puede ampliar por un factor de 2 para obtener el segmento original. Claro que también se puede romper en 4 segmentos congruentes, de modo que cada uno de ellos al ampliarlo por un factor de 4, reproduce el original y, en general podríamos romper el segmento en n segmentos congruentes y con un factor de ampliación de n, obtener el segmento original. El caso de un cuadrado es un poco diferente. Podemos descomponer un cuadrado en 4 cuadrados congruentes y el factor de la ampliación es 2. Alternativamente podemos descomponer el cuadrado en 9 cuadrados congruentes con el factor de ampliación 3, o 25 pedazos con factor 5. Así, en general el cuadrado se puede descomponer en n^2 copias de sí mismo, cada una de las cuales se puede ampliar por un factor n para alcanzar la figura original. Finalmente podemos descomponer un cubo en n^3 pedazos iguales, cada uno de los cuales tiene factor de ampliación n.
En todos los casos se cumple la "fórmula" $n^D = N$, donde n es el factor de ampliación, N el número de copias y D la dimensión. En consecuencia,

$$D = \frac{ln\ N}{ln\ n} = \frac{ln\ (número\ de\ copias\ semejantes\ a\ la\ figura\ original)}{ln\ (factor\ de\ ampliación\ para\ obtener\ la\ figura\ original)}$$

Así, para nuestro triángulo de Sierpiń ski tenemos que N = 3 y $n = 2$, y por tanto,

$$D_S = \frac{ln\ 3}{ln\ 2} \approx 1{,}584$$

De esta manera $1 < D_S < 2$, lo que puede interpretarse como que no es exactamente ni una curva clásica, ni una superficie, sino "algo intermedio" entre estos dos entes. Expresado de manera informal e intuitiva, el triángulo de Sierpiń ski llena el espacio más que una curva clásica, pero menos que una superficie.

Dimensiones Fractales

En primer lugar debemos aclarar que existen varias clases de dimensión; por ejemplo la dimensión topológica, la dimensión de Hausdorf y la llamada precisamente dimensión fractal. Conceptualmente cada una determina una propiedad distinta del objeto geométrico sobre el que la medimos. Podemos hacer tres grandes grupos:

1. **Dimensión topológica**: nos habla de la conectividad de los puntos del objeto de medida. Nos dice si nuestro objeto es una arista, un plano, un volumen, un hipervolumen, etc. Su valor es siempre entero.
2. **Dimensión fractal:** se refiere a cómo el objeto geométrico llena el espacio en el que está inmerso. Las dimensiones fractales pueden ser enteras o fraccionarias. La dimensión de Hausdorff es un tipo de dimensión fractal.

3. **Dimensión de inmersión:** se refiere al espacio que contiene al objeto de estudio. Puede ser de nuevo entera o fraccionaria.

En el caso de un segmento, tanto la dimensión topológica como la de Hausdorff coinciden en el valor de 1, en el cuadrado también coinciden pero en el valor de 2, para el triángulo de Sierpiń ski la dimensión topológica es 1 mientras que la de Hausdorff es ln 3/ ln 2, y para la pirámide de Sierpiń ski (versión en R^3 del triángulo de Sierpiń ski) la dimensión topológica también es 1, mientras que la de Hausdorff es 2. Lo que ocurre, en el caso de los conjuntos que tienen características fractales, es que su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica, y hecha esta observación, pasamos entonces a escribir la definición de fractal desde el punto de vista matemático, tal cual la enunció Mandelbrot: *Un fractal es un conjunto autosemejante y cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica.*

Ventajas y desventajas del análisis Fractal

Ventajas

- Los objetos fractales, más allá de ser elementos matemáticos que requieren un alto grado de abstracción, permiten modelar de manera visualmente interesante gran cantidad de sistemas naturales.
- La dimensión fractal, que también parece ser una medida totalmente abstracta, ya que no es tan fácil generarse la idea de una dimensión fraccionaria teniendo como base nuestros conceptos tradicionales de dimensión euclídea, puede representar y darnos un parámetro de determinados sistemas con mucha más precisión y realidad de lo que lo hacen técnicas de análisis tradicionales.
- El análisis fractal se ha convertido en una potente herramienta de investigación para diferentes áreas de la ciencia aplicada, que van desde la medicina, biología, sociología, física, economía hasta el arte o la arquitectura.

Desventajas

- Los objetos fractales requieren una gran cantidad de datos para poder realizar las iteraciones correspondientes.
- Se requiere de un software especializado que requiere tanto de una alta inversión, así como de personal capacitado.
- Es un modelo de difícil implementación en organizaciones de tamaño pequeño o mediano en relación a las aplicaciones respectivas.

Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es el fractal por excelencia, y también el primero conocido. Fue ideado por Georg Cantor en 1883 como ejemplo de conjunto de longitud cero cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita). Para su construcción se parte de un segmento de longitud 1. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central abierta (es decir, sin incluir los extremos). Cada una de las otras dos se divide en tres partes iguales y se eliminan las partes centrales (abiertas) en cada una de ellas. Se procede igual con cada uno de los cuatro segmentos que quedan. Yse repite el proceso infinitas veces.

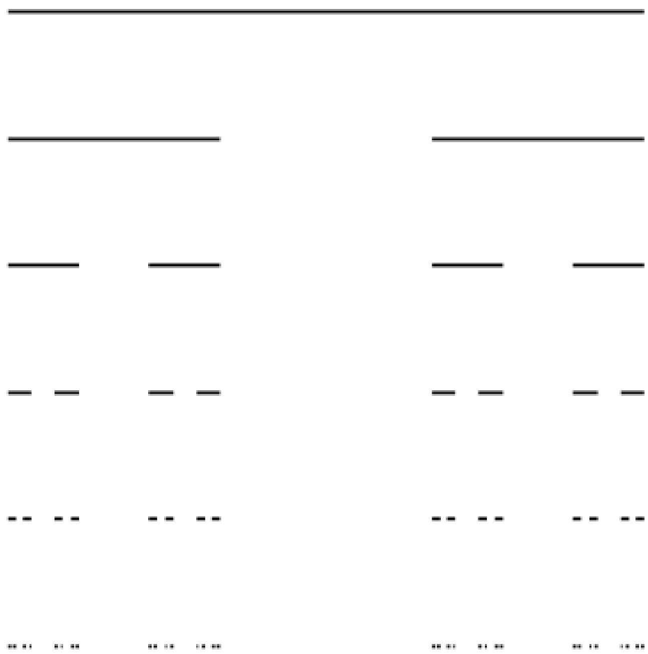

Figura 7: Primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor.

Como se observa en la Figura 7, y se repetirá en el resto de fractales, la construcción se obtiene después de infinitas repeticiones de un algoritmo geométrico sencillo: dividir un segmento en tres partes iguales y eliminar la parte central (es decir, quedarnos con las dos partes de los extremos). Para implementar la construcción mediante software se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Construir una función que divida un segmento en tres partes iguales: se dibuja un segmento y aplicando, por ejemplo, la regla de Thales, se obtienen los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. El objeto inicial de la función es el segmento original y el objeto final los dos puntos obtenidos.
2. Construir una función que dibuje un segmento al que se le aplica la función del punto 1, la cual lo divide en tres partes iguales. De los tres segmentos obtenidos, dibujamos los dos de los extremos. El objeto inicial de la función es el segmento original y el objeto final los dos segmentos de los extremos.
3. Se dibuja un segmento inicial al que se aplica la función del punto 2 para obtener los dos segmentos del primer paso de la construcción del conjunto de Cantor. Aplicando repetidamente dicha función a estos segmentos y a sus descendientes se puede avanzar tanto como se desee en la construcción del conjunto de Cantor.

Curva o copo de nieve de Koch

La curva de Koch fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto. Su construcción se hace mediante un proceso similar al del conjunto de Cantor. Se parte de un segmento de longitud 1. El primer paso consiste en dividirlo en tres intervalos iguales, construir un triángulo equilátero sobre el intervalo central y suprimir la base de dicho triángulo, como indica la Figura 8. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los cuatro intervalos que han resultado. Y se repite el proceso infinitas veces. La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

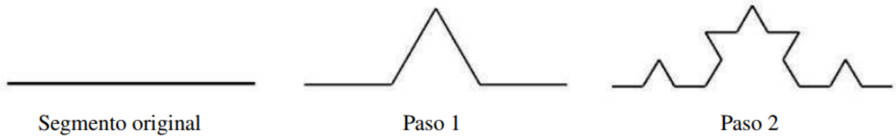

Figura 8: Primeros pasos de la construcción de la curva de Koch

La curva de Koch se obtiene después de infinitas repeticiones de un algoritmo geométrico sencillo: dividir un segmento en tres partes iguales y sustituir la parte central por los otros dos lados de un triángulo equilátero que se construye sobre ella.
Para implementar la construcción de la curva de Koch en el software elegido se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Construir una función que dibuje un segmento al que se le aplica la función escrita en el punto 1 del conjunto de Cantor que lo divide en tres partes iguales, y sobre el segmento central se construye un triángulo equilátero. El objeto inicial de la función es el segmento original y el objeto final son los dos segmentos de los extremos y los dos lados superiores del triángulo.
2. Se dibuja un segmento inicial al que se aplica la función del punto anterior para obtener los cuatro segmentos del primer paso de la construcción de la curva de Koch. Aplicando repetidamente dicha función a estos segmentos y a sus descendientes se puede avanzar tanto como se desee en la construcción de la curva de Koch.

Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales y el más estudiado. Se conoce así en honor al matemático Benoît Mandelbrot (1924-2010), que investigó sobre él en los años setenta.
Este conjunto se define así, en el plano complejo:
Sea c un número complejo cualquiera. A partir de c, se construye una sucesión por recursión:

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 & \text{(término inicial)} \\ z_{n+1} & = & z_n^2 + c & \text{(relación de inducción)} \end{cases}$$

Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que c pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo.

Por ejemplo, si $c = 1$ obtenemos la sucesión 0, 1, 2, 5, 26… que diverge. Como no está acotada, 1 no es un elemento del conjunto de Mandelbrot.
En cambio, si $c = -1$ obtenemos la sucesión 0, –1, 0, –1,… que sí es acotada, y por tanto, –1 sí pertenece al conjunto de Mandelbrot.
A menudo se representa el conjunto mediante el algoritmo de tiempo de escape. En ese caso, los colores de los puntos que no pertenecen al conjunto indican la velocidad con la que diverge la sucesión correspondiente a dicho punto.
Por otra parte, se sabe que los puntos cuya distancia al origen es superior a 2, es decir, $\{x^2 + y^2 \geq 4\}$no pertenecen al conjunto. Por lo tanto basta encontrar un solo término de la sucesión que verifique $|z_n| > 2$ para estar seguro de que c no está en el conjunto.

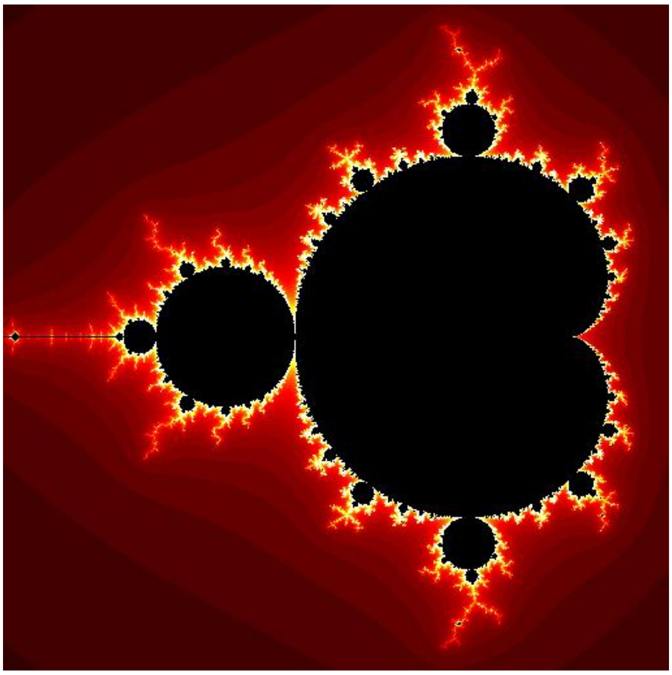

Figura 9: Representación del conj. de Mandelbrot mediante el algoritmo de tiempo de escape

Atractores extraños

El atractor es uno de los conceptos fundamentales de la teoría del Caos, que se utiliza para representar la evolución en un sistema dinámico en un tiempo suficientemente largo.
En los sistemas dinámicos, un atractor es un conjunto de valores numéricos hacia los cuales tiende un sistema a evolucionar, dada una gran variedad de condiciones iniciales en el sistema. Geométricamente, un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad en el caso de tratarse de un sistema estable. Por lo contrario, si hablamos de un sistema caótico el atractor es una complicada estructura fractal conocido como atractor extraño. Existen distintos tipos de atractores, dependiendo de su la naturaleza:

- Atractores clásicos, todas las trayectorias convergen en un solo punto.
- Atractores extraños, tienen naturaleza fractal, es decir su estructura está producida por sucesivos plegamientos del espacio de fases sobre sí mismo. Tiene como característica que los puntos nunca se repiten y las órbitas nunca se interceptan. Los atractores extraños tienen estructura a todas las escalas. Un atractor es extraño si tiene dimensión de Hausdorff no entera (o fractal) o si la dinámica en el atractor es caótica.

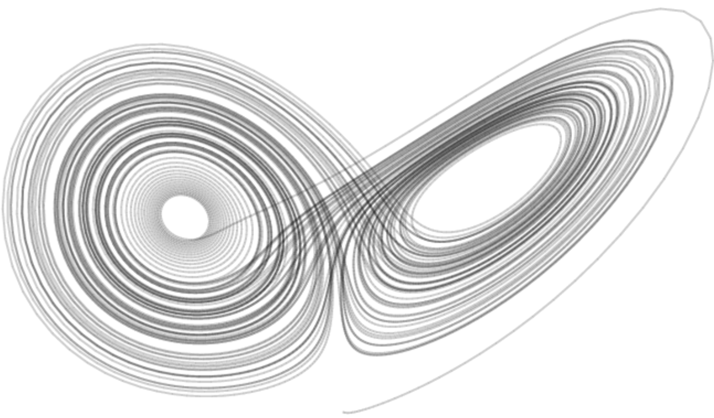

Figura 10: Atractor de Lorentz, ejemplo de atractor extraño.

Aplicaciones de los Fractales

Durante los primeros años de su existencia, los fractales eran meras curiosidades matemáticas, sin ninguna utilidad, pero con el paso del tiempo se han encontrado múltiples aplicaciones de la geometría fractal en campos muy diversos como pueden ser la biología, la geografía, la medicina, psicología, informática, finanzas, música, arte, etc. No nos extenderemos mucho explicando de forma detallada las numerosas aplicaciones, ya que podría ser interminable y este no es el objetivo de este texto, pero sí que daremos una pincelada a las más importantes.

Uso en biología

Los fractales han tenido gran repercusión en este campo. El sistema de venas y arterias se rige por una geometría fractal. Por otro lado se cree adivinar cierta similitud entre los fractales y el código genético. Otra utilización de los fractales en las ciencias naturales es para estudiar las relaciones alométricas, es decir cómo se escalan unas cantidades respecto a las otras, a modo de ejemplo el metabolismo de los animales, el consumo de energía de los animales, o la fuerza de los animales en función de su peso, ninguno cumple una relación lineal, sino que aumentan a un ritmo menor.

Uso en medicina

La dimensión fractal de la superficie celular permite caracterizar las células de diferentes tipos. Es posible distinguir células cancerosas de células sanas con ayuda de esta característica. Ya se ha aplicado para diferenciar células de pacientes con leucemia de células normales.

Uso en topografía

La formación de una costa o de la orilla de un río son procesos físicos similares y pueden ser simulados mediante modelos matemáticos que dan lugar a objetos fractales. Se establece el contacto y la interacción entre el agua y la tierra y se producen grandes modificaciones en los perfiles de las mismas. Por ejemplo, la formación de una costa se puede simular mediante la Curva de Koch.

Las líneas costeras, montañas y relieves poseen geometría fractal. Una de las aplicaciones de los fractales en la geografía es para calcular la distancia entre dos puntos. También permite elaborar mapas en 3 dimensiones más detallados, con más precisión y con una imagen que se asemeja hasta un 99,9% a la realidad. También se puede predecir fenómenos geográficos (Ej: Mandelbrot, padre de la geometría fractal, predijo las crecidas del Río Nilo).

Uso en el cine

Una de las más triviales aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No solamente engañan la vista, sino que también de algún modo confunden a la mente. Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos.

Uso en la música

La utilización de procedimientos fractales para la composición de música, donde a cada punto del fractal se le asocia una nota, creando de este modo música fractal.

Uso en informática

Permite el desarrollo de distintas técnicas. La aplicación más común es la transformación fractal, proceso inverso a la construcción de un fractal, en lugar de crear una imágen partir de un conjunto de ecuaciones, se busca el conjunto de ecuaciones que describen aproximadamente una imagen. Este proceso se basa en tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI), que es un conjunto de funciones que describen partes de un fractal y que al unirlas recrean dicho fractal. La imagen puede mostrarse rápidamente y un zoom proporciona infinitos detalles. Es de gran utilidad para comprimir imágenes y videos de forma que ocupen menos peso (bytes) y puedan ser transmitidos por la red más rápidamente y a menor coste.

Uso en las finanzas

Se aplican al análisis técnico es el estudio de los movimientos del mercado, básicamente a través de gráficos “charts”. En los años 30 Ralph Nelson Elliot (1871- 1948) desarrolló su teoría, basada en la observación de los movimientos de precios. Los movimientos tendenciales del mercado y sus posibles cambios, seguían unas pautas de comportamiento identificable y repetitivo en forma de patrones. Según Elliot la estructura completa está formada por cinco ondas en el sentido de la tendencia principal y tres ondas en una fase correctiva posterior. Esta estructura está provocada por el comportamiento psicológico humano (el miedo a la pérdida y la ambición a ganar). Sin proponérselo, y ni tan sólo conocer el concepto, Elliot descubrió la naturaleza fractal de los gráficos de precios. Las formaciones de estos gráficos tienen estructura fractal, ya que cumplen las siguientes propiedades:

- Son autosimilares, es decir si miramos un gráfico de precios, sin escalas en los ejes, no sabremos distinguir si la serie de precios es diaria, mensual, anual, etc.
- Muestran elevada sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que a partir de condiciones similares muestran un comportamiento totalmente distinto.
- Tienen dimensión fractal, su dimensión es no entera, superior a 1 e inferior a 2.

Uso en arquitectura y diseño

La utilización de los algoritmos como herramienta de diseño, permiten generar permutaciones infinitas, inviables a partir del enfoque manual, ya que los procesos son abordados con una escala y complejidad que brindan los beneficios de profundidad y amplitud. Estos proyectos tratan de explorar los algoritmos y la computación como una herramienta de diseño generativo, combinados a los actuales procesos de diseño produciendo una nueva e inusual forma arquitectónica, que se suele denominar “Arquitectura Fractal”. No obstante la reciente aparición referida, se pueden observar aplicaciones fractales en obras arquitectónicas construidas hace siglos.

Aplicaciones de los Fractales al ámbito financiero regional

Con el fin de explicar de manera teórica lo que sería un análisis estadístico, probabilístico y fractal aplicable en el ámbito bursátil de Argentina, se han realizado estudios de series de tiempo tanto en índices bursátiles como en divisas e incluso niveles de volatilidad, estableciendo los siguientes pasos que cumplirán la hipótesis de que el mercado financiero sigue un movimiento browniano fraccionario capaz de ser estudiado con el análisis fractal:

- Selección de series para el análisis
- Análisis estadístico de las series
- Determinar si la rentabilidad de las series cumple una distribución normal
- Estimación del coeficiente de Hurst
- Cálculo de la dimensión fractal
- Identificar la invarianza a escala
- Conclusiones

Tras el estudio del análisis estadístico y fractal de las series de retorno de distintos activos como índices, divisas y volatilidad es posible mostrar que no siguen un comportamiento aleatorio puro, sino que están sesgados, es decir, siguen lo que se llama un comportamiento browniano fraccionario.

Por tanto se puede llegar a la conclusión de que las herramientas derivadas de la geometría fractal nos permiten realizar un análisis de mercado más realista en cuanto a sus supuestos y con mayor consistencia en las observaciones empíricas. Los mercados financieros distan mucho de ajustarse al comportamiento postulado por los modelos tradicionales y a la hipótesis de los mercados eficientes, es por eso que los estudios basados en ella distan mucho de la realidad, y por tanto de ser completamente confiables.
En los mercados financieros emergen patrones inesperados, por esta razón, los modelos fractales se constituyen como una opción científica para quienes operan en las bolsas de valores, por su capacidad para analizar el valor de una sola variable que evoluciona a lo largo del tiempo.
En un futuro muy lejano, el análisis fractal podría configurar una herramienta muy útil dentro del análisis técnico que al poder determinar los comportamientos e incluso los patrones ayude a mejorar y crear nuevos modelos de trading.

Relación entre los Fractales y los Algoritmos Genéticos

Se ha propuesto una técnica de compresión fractal de imágenes utilizando algoritmos genéticos. La compresión fractal es un método de compresión con pérdida para imágenes digitales, basado en fractales. El método es el más apropiado para texturas e imágenes naturales, basándose en el hecho de que partes de una imagen, a menudo, se parecen a otras partes de la misma imagen. Utilizando la propiedad de autosimilitud de una imagen natural, los operadores genéticos son adaptados de acuerdo con el proceso evolutivo realizado en los bloques de rango. Tal método puede acelerar el codificador y también preservar la calidad de la imagen. Las simulaciones muestran que el tiempo de codificación a partir de algoritmos genéticos es 100 veces más rápido que el del método de búsqueda completo, mientras que la calidad de la imagen recuperada sigue siendo aceptable. Las simulaciones también muestran que la aplicación de los algoritmos genéticos a la compresión es superior tanto en la relación de aceleración como en la calidad recuperada.

Bibliografía

"Fractales", Miguel Reyes. Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid.
https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionMadrid2009/fractales.pdf

"Los fractales y el diseño en las construcciones", Rufino Iturriaga & Carina Jovanovich.
http://www5.uva.es/trim/TRIM/TRIM5_files/FRACTALES.pdf

"Una introducción a la geometría fractal", Sonia Sabogal & Gilberto Arenas.
http://matematicas.uis.edu.co/sites/default/files/paginas/archivos/GMM.pdf

"Fractales en los mercados financieros", Anna Batlle Joher & Sandra Grèbol Montoro.
http://www.barcelonaschoolofmanagement.upf.edu/documents/Tesina-Fractales-en-los-mercados-financieros.pdf

"Análisis Fractal y Algoritmos Genéticos aplicado a la Administración de Riesgos", Dr. Oscar Ugalde Hernández.
http://www.ulacit.ac.cr/files/careers/105_anlisisdefractalesyalgoritmosgeneticosdr.oscarugalde.pdf

Conjunto de Mandelbrot. (2017, 15 de mayo). Wikipedia, La enciclopedia libre.
https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot

"Fractales. Geometría del caos", José María Sorando.
http://matematicasentumundo.es/NATURALEZA/Fractales.pdf

Historial de versiones

Fecha	Versión	Autor	Descripción
24/07/2017	1.0	Juan M. Rinaudo	Versión inicial.
03/09/2017	1.1	Daniela Diaz Juan M. Rinaudo	Modificaciones varias propuestas por profesor asesor.