

# Analisi Matematica II

Mattia Martelli

# Indice

<b>I</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine</b>	<b>3</b>
I	Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine	4
<b>II</b>	<b>Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili</b>	<b>5</b>
<b>III</b>	<b>Equazioni differenziali lineari del primo ordine</b>	<b>7</b>
<b>IV</b>	<b>Equazioni differenziali non lineari del primo ordine risolvibili esplicitamente</b>	<b>10</b>
I	Equazioni differenziali ordinarie non lineari omogenee . . . . .	10
II	Equazioni di Bernoulli . . . . .	11
<b>V</b>	<b>Modelli di crescita delle popolazioni</b>	<b>12</b>
I	Modello di Malthus . . . . .	12
II	Equazione logistica . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Serie di funzioni, serie di potenze e serie di Fourier</b>	<b>15</b>
<b>VI</b>	<b>Serie di funzioni</b>	<b>16</b>
<b>VII</b>	<b>Serie di potenze in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>18</b>
<b>VIII</b>	<b>Serie di Taylor</b>	<b>22</b>
<b>III</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine</b>	<b>23</b>
<b>IX</b>	<b>Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine</b>	<b>24</b>
<b>X</b>	<b>Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti</b>	<b>26</b>
I	Il caso $\Delta > 0$ . . . . .	26
II	Il caso $\Delta < 0$ . . . . .	27
III	Il caso $\Delta = 0$ . . . . .	27
IV	Tabella riassuntiva . . . . .	28

# Indice delle Definizioni e dei Teoremi

1	Definizione (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine) . . . . .	4
2	Definizione (Forma normale di una EDO) . . . . .	4
3	Definizione (Integrale generale e particolare di una EDO) . . . . .	4
4	Definizione (EDO a variabili separate) . . . . .	5
1	Teorema (Risoluzione di EDO a variabili separabili) . . . . .	5
5	Definizione (EDO lineari del primo ordine) . . . . .	7
2	Teorema (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine) . . . . .	7
6	Definizione (Equazione omogenea associata ad una EDO del primo ordine) . . . . .	8
3	Teorema (Principio di sovrapposizione per EDO lineari omogenee del primo ordine) . . . . .	8
4	Teorema (Struttura dell'integrale generale di EDO lineari del primo ordine) . . . . .	8
7	Definizione (Problema di Cauchy) . . . . .	9
8	Definizione (EDO non lineari omogenee) . . . . .	10
9	Definizione (Equazione di Bernoulli) . . . . .	11
10	Definizione (Serie di funzioni) . . . . .	16
11	Definizione (Convergenza puntuale di una serie di funzioni) . . . . .	16
12	Definizione (Insieme di convergenza puntuale e somma della serie) . . . . .	16
13	Definizione (Convergenza assoluta di una serie di funzioni) . . . . .	16
14	Definizione (Convergenza totale di una serie) . . . . .	17
15	Definizione (Serie di potenze) . . . . .	18
5	Teorema (Raggio di convergenza di una serie di potenze reale) . . . . .	18
6	Teorema (Calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze reale) . . . . .	19
16	Definizione (Serie esponenziale) . . . . .	20
17	Definizione (Serie logaritmica) . . . . .	20
7	Teorema (Convergenza totale per una serie di potenze reale) . . . . .	20
8	Teorema (Integrabilità e derivabilità termine a termine per una serie di potenze reale) . . . . .	20
18	Definizione (Serie di Taylor) . . . . .	22
19	Definizione (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine) . . . . .	24
9	Teorema (Teorema di Cauchy) . . . . .	24
10	Teorema (Principio di sovrapposizione) . . . . .	24
11	Teorema (Teorema di struttura) . . . . .	25
12	Teorema (Teorema di struttura per equazioni complete) . . . . .	25

---

---

# PARTE I

---

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

---

## Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

---

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

**Definizione 1** (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine). Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita  $y(x)$ , dove  $x \in \mathbb{R}$ , e la sua derivata prima  $y'(x)$ :

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

In altre parole, **una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione.**

**Definizione 2** (Forma normale di una EDO). Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

**Definizione 3** (Integrale generale e particolare di una EDO). Data la EDO

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

chiamiamo **integrale generale** dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Si chiama **integrale particolare** dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo

$$y'(x) = f(x),$$

cioè EDO del primo ordine in forma normale con  $f(x, y(x))$ , basta integrare:

$$y(x) = \int f(x) dx.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare  $y$  conoscendo delle informazioni relative a  $y'$ . Da qui il nome *integrale generale*.
- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

## CAPITOLO II

---

### Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

---

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

**Definizione 4** (EDO a variabili separate). Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con  $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Cioè  $f(x, y) = h(x) \times g(y)$  è il prodotto di una funzione che dipende solo da  $x$  per una funzione che dipende solo da  $y$ .

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

**Teorema 1** (Risoluzione di EDO a variabili separabili). *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con  $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

*Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:*

- I. Se  $g(D) = 0$  per qualche  $D \in \mathbb{R}$  allora la funzione costante  $y(x) = D, \forall x$  è soluzione.*
- II. Se  $g(y) \neq 0, \forall y$  in un certo intervallo, una soluzione  $y(x)$  è definita implicitamente dall'equazione*

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$ ;
- $H$  è una primitiva di  $h$ ;
- $\Gamma$  è una primitiva di  $\frac{1}{g}$ .

*Se  $\Gamma$  non è invertibile otteniamo eslicitamente*

$$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + c),$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambe le categorie:

I. Sia  $g(D) = 0$  e  $y(x) = D, \forall x$ . L'identità è soddisfatta:

(a) Sinistra:  $y'(x) = 0$ ;

(b) Destra:  $h(x)g(y(x)) = h(x)g(D) = h(x) \times 0 = 0$ .

II. Prendiamo un intervallo  $[x_0, x]$  in cui la funzione  $g(y)$  non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Dati  $x_0 < x$ , con  $x_0, x \in J_1$ , integriamo:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{x_0}^x h(r) dr = H(x) + c.$$

Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$

$$y'(r) = dk,$$

quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$

$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

Dunque,

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)} dk = \Gamma(y(x)) + c.$$

Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

□

---

## Equazioni differenziali lineari del primo ordine

---

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

**Definizione 5** (EDO lineari del primo ordine). Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma

$$c(x) y'(x) + a(x) y(x) = b(x),$$

con  $c, a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue su  $J$ .

Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

**Teorema 2** (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine). *Date  $a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

*L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula*

$$y(x) = e^{-A(x)} [B(x) + c],$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$ ;
- $A(x)$  è una qualunque primitiva di  $a(x)$ :  $A = \int a$ ;
- $B(x)$  è una qualunque primitiva di  $e^{A(x)} b(x)$ :  $A = \int e^{\int a} b$ .

*Dimostrazione.* Moltiplichiamo tutto per  $e^A$

$$\underbrace{y' e^A + a y e^A}_{(y e^A)'} = b e^A,$$

infatti

$$(y e^A)' = y' e^A + y (e^A)' = y' e^A + y e^A A' = y' e^A + y e^A a.$$

Quindi la nostra equazione è uguale a

$$(y(x) e^{A(x)})' = e^{A(x)} b(x).$$



Ora integriamo tra  $x_0$  e  $x$ :

$$\int_{x_0}^x \left( y(s) e^{A(s)} \right)' ds = \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds.$$

Uso il teorema fondamentale del calcolo integrale per il lato sinistro:

$$y(x) e^{A(x)} \underbrace{- y(x_0) e^{A(x_0)}}_{-c} = \underbrace{\int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds}_{B(x)}.$$

Per ottenere la formula è sufficiente moltiplicare questa equazione per  $e^{-A(x)}$ . □

Introduciamo ora le EDO omogenee del primo ordine con alcuni importanti teoremi.

**Definizione 6** (Equazione omogenea associata ad una EDO del primo ordine). Data una EDO lineare del primo ordine nella forma

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x),$$

si chiama **equazione omogenea associata** la EDO

$$y'(x) + a(x) y(x) = 0.$$

**Teorema 3** (Principio di sovrapposizione per EDO lineari omogenee del primo ordine). *Data  $a : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, consideriamo la EDO omogenea*

$$y'(x) + a(x) y(x) = 0.$$

*Se  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni di questa equazione e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , allora*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

*è anch'essa soluzione dell'equazione.*

*Dimostrazione.* Sapendo che

$$y_1'(x) + a(x) y_1(x) = y_2'(x) + a(x) y_2(x) = 0,$$

dobbiamo dimostrare che

$$(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))' + a(x) (\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = 0.$$

Possiamo riarrangiare i termini per linearità:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))' + a(x) (\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \\ &= \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + a(x) \alpha_1 y_1(x) + a(x) \alpha_2 y_2(x) \\ &= \alpha_1 (y_1'(x) + a(x) y_1(x)) + \alpha_2 (y_2'(x) + a(x) y_2(x)) \\ &= \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

□

**Teorema 4** (Struttura dell'integrale generale di EDO lineari del primo ordine). *Siano  $a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue:*

*I. L'integrale generale dell'equazione omogenea*

$$y'(x) + a(x) y(x) = 0$$

*è uno spazio vettoriale di dimensione unitaria, cioè*

$$y_O(x) = C \times \overline{y_O}(x),$$

*con  $C \in \mathbb{R}$ .*

II. L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

equivale a

$$y(x) = y_O(x) + y_P(x),$$

dove

- $y_O(x)$  è l'integrale dell'equazione omogenea, come al punto I;
- $y_P(x)$  è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Introduciamo infine il concetto di problema di Cauchy.

**Definizione 7** (Problema di Cauchy). Data la EDO del primo ordine in forma normale

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ed assegnata la coppia  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  nella quale  $f$  è ben definita, si chiama **problema di Cauchy** il problema di determinare  $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

# CAPITOLO IV

---

## Equazioni differenziali non lineari del primo ordine risolvibili esplicitamente

---

Non tutte le equazioni differenziali non lineari del primo ordine sono risolvibili esplicitamente. Quelle che possono essere risolte sono:

- I. EDO a variabili separabili,
- II. EDO non lineari omogenee,
- III. Equazioni di Bernoulli.

Le equazioni a variabili separabili sono già state trattate nel **relativo capitolo**. Discutiamo dunque delle EDO non lineari omogenee.

### I Equazioni differenziali ordinarie non lineari omogenee

Partiamo dalla definizione.

**Definizione 8** (EDO non lineari omogenee). Una EDO non lineare omogenea è della forma

$$y'(x) = \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))},$$

con  $P$  e  $Q$  polinomi omogenei, ovvero composti solamente da monomi di uno stesso grado  $n$ .

Delineiamo quindi una strategia di risoluzione:

- I. Dividiamo ciascun monomio per  $x^n$ .
- II. Eseguiamo il cambio di variabile con

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

- III. Otteniamo dunque un'equazione a variabili separabili che possiamo facilmente risolvere.
- IV. Infine torniamo alla variabile iniziale  $y$ , tenendo a mente che  $y(x) = xz(x)$ , in base al cambio di variabile precedentemente fatto.

## II Equazioni di Bernoulli

L'ultima categoria è quella delle equazioni di Bernoulli. Partiamo anche in questo caso dalla definizione.

**Definizione 9** (Equazione di Bernoulli). Chiamiamo equazione di Bernoulli una EDO non lineare del tipo

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)y(x)^\alpha,$$

con  $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha \notin \{0, 1\}$ .

Le condizioni su  $\alpha$  sono state imposte in quanto:

- Per  $\alpha = 0$ , l'equazione diventa  $y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$ , la quale è lineare;
- Per  $\alpha = 1$ , l'equazione diventa  $y'(x) = (f(x) + g(x))y(x)$ , la quale è lineare a variabili separabili.

Delineiamo ora la strategia di risoluzione:

I. Cerchiamo le soluzioni costanti:

- Se  $\alpha > 1$  poniamo

$$f(x)y + g(x)y^\alpha = 0,$$

che possiamo riscrivere come

$$y(f(x) + g(x)y^{\alpha-1}) = 0,$$

che implica

$$y(x) = 0 \quad \forall x.$$

- Se  $0 < \alpha < 1$  poniamo

$$f(x)y + g(x)y^\alpha = 0,$$

che possiamo riscrivere come

$$y^\alpha(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)) = 0,$$

che implica

$$y(x) = 0 \quad \forall x.$$

- Se  $f$  e  $g$  sono delle costanti in  $\mathbb{R}$ , troviamo un'ulteriore soluzione costante come

$$y(x) = \left(-\frac{f}{g}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad \forall x.$$

II. Per cercare le soluzioni non costanti, dividiamo l'equazione per  $y^\alpha(x)$ , ottenendo

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} = \frac{f'(x)}{y^{\alpha-1}(x)} + g(x).$$

Dunque l'equazione diventa

$$\frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)} \right)' = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)} + g(x).$$

III. Effettuiamo il cambio di variabili con

$$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)}.$$

Sostituendo si ottiene

$$\frac{1}{1-\alpha} z'(x) = f(x)z(x) + g(x),$$

o, più esplicitamente,

$$z'(x) - (1-\alpha)f(x)z(x) = (1-\alpha)g(x),$$

la quale è una EDO lineare con

- $a(x) = -(1-\alpha)g(x)$ ,
- $b(x) = (1-\alpha)f(x)z(x)$ .

IV. Si risolve l'equazione lineare in  $z$  e poi si torna alla variabile  $y(x)$ .

---

## Modelli di crescita delle popolazioni

---

Tramite le equazioni differenziali, possiamo definire dei semplici modelli di crescita. In particolare, trattiamo il modello di Malthus e l'equazione logistica.

### I Modello di Malthus

Il modello di Malthus è stato il primo modello di dinamica delle popolazioni a essere introdotto, per la precisione verso la fine del 1700, ed è il più semplice modello di crescita esponenziale. Il modello deve il suo nome al reverendo Thomas Robert Malthus, uno dei primi ad essersi dedicati allo studio demografico.

Il modello è il seguente: supponiamo che la densità di una certa popolazione possa essere rappresentata da una funzione regolare

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\} \\ x &\mapsto y(x) \end{aligned},$$

dove  $y(x)$  rappresenta la densità di popolazione al tempo  $x$ . Secondo Malthus la popolazione cresce ad un tasso proporzionale al suo numero di individui secondo la formula

$$y'(x) = k y(x),$$

dove

- $y'(x)$  rappresenta il tasso di crescita,
- $k$  è detta *costante di crescita* e dipende dalla natalità e dalla mortalità,
- il tasso di crescita di  $y$  è proporzionale a  $y$  stesso.

Possiamo dunque risolvere questa equazione. Innanzitutto troviamo la soluzione costante

$$y(x) = 0 \quad \forall x.$$

Concentriamoci dunque sulle soluzioni non triviali:

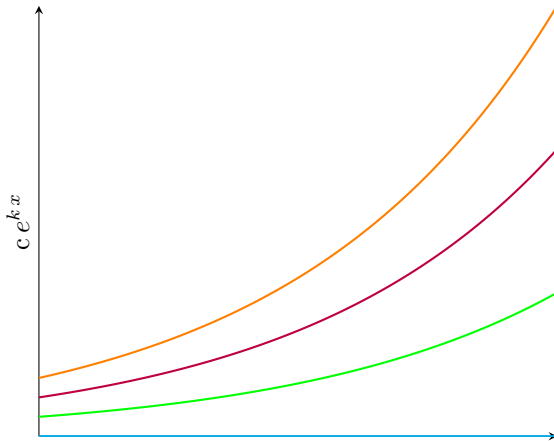
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{y(s)} \, ds &= \int_{x_0}^x k \, ds \\ [\ln y(s)]_{x_0}^x &= k(x - x_0) \\ \ln \frac{y(x)}{y(x_0)} &= k(x - x_0) \\ y(x) &= y(x_0) e^{k(x-x_0)} \\ y(x) &= c e^{kx}, \end{aligned}$$

con

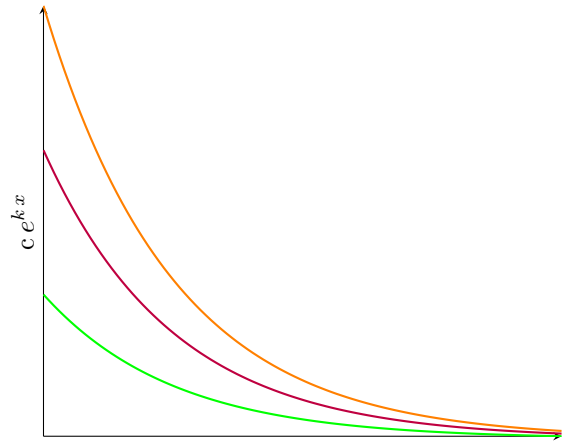
- $c \in \mathbb{R}$ ,
- $c = y(x_0) e^{-k x_0}$ ,
- $x > 0$ .

Studiamo graficamente l'andamento:

**Fissato  $k \geq 0$**



**Fissato  $k < 0$**



Riassumendo, questo modello prevede tre comportamenti possibili, in base a  $k$ :

- Se  $k > 0$ , cioè la natalità è superiore alla mortalità, la popolazione aumenta esponenzialmente;
- Se  $k = 0$ , cioè la natalità è equivalente alla mortalità, la popolazione resta costante;
- Se  $k < 0$ , cioè la natalità è inferiore alla mortalità, la popolazione si estingue esponenzialmente.

## II Equazione logistica

L'equazione logistica è stata introdotta dal matematico francese Pierre François Verhulst verso la metà del 1800. Questa è più articolata rispetto alla precedente.

La formulazione è la seguente: al crescere della popolazione, diventa più difficile procurarsi il cibo. Possiamo dunque definire un'equazione

$$y'(x) = k y(x) - g(y(x)),$$

con  $g$  funzione opportuna. una buona scelta di  $g$  risulta

$$g(s) = h s^2,$$

con  $h$  costante positiva. Dunque, l'equazione logistica diventa

$$y'(x) = k y(x) - h y^2(x).$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con soluzioni:

- Soluzioni costanti:

$$y = 0,$$
$$y = \frac{k}{h};$$

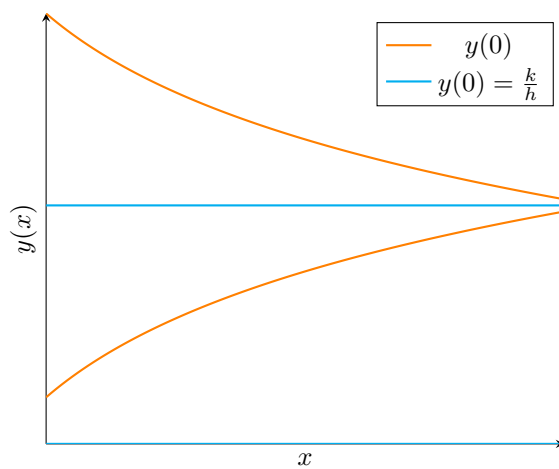
- Soluzioni non costanti:

$$y(x) = \frac{k e^{k x}}{c + h e^{k x}},$$

dove  $x > 0$  e  $c \in \mathbb{R}$  e con

$$y(0) = \frac{k}{c + h}.$$

Studiamo graficamente l'andamento:



---

---

## PARTE II

---

### SERIE DI FUNZIONI, SERIE DI POTENZE E SERIE DI FOURIER



---

## Serie di funzioni

---

Introduciamo il concetto di serie di funzione.

**Definizione 10** (Serie di funzioni). Dato un intervallo  $J \subseteq \mathbb{R}$ , siano,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$  delle funzioni. La serie di funzioni di termine generale  $f_n(x)$  è la successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f_0(x), \\ S_1(x) &= f_0(x) + f_1(x), \\ &\dots \\ S_k(x) &= \sum_{n=0}^k f_n(x). \end{aligned}$$

*Osservazione.* Fissato un punto  $\bar{x} \in J$ , si ha che la serie di termine generale  $f_n(\bar{x})$  è una serie numerica. Abbiamo quindi infinite serie numeriche, una per ogni  $x \in J$ .

Parliamo dunque della convergenza.

**Definizione 11** (Convergenza puntuale di una serie di funzioni). Diciamo che la serie di funzioni di termine generale  $f_n(x)$ ,  $x \in J$ , **converge puntualmente** o semplicemente nel punto  $\bar{x} \in J$  se la serie numerica di termine generale  $f_n(\bar{x})$  è convergente, ovvero se esiste finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k f_n(\bar{x}).$$

*Osservazione.* Una serie di funzioni può essere convergente per alcuni  $x \in J$ , divergente od indeterminata per altri  $x \in J$ .

Da questa ultima osservazione deriva la prossima definizione.

**Definizione 12** (Insieme di convergenza puntuale e somma della serie). L'insieme  $E \subseteq J$  dei punti  $x$  in cui la serie converge è detto **insieme di convergenza puntuale** della serie. Nell'insieme  $E$  risulta definita la **somma della serie**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(x), \quad \text{con } x \in E.$$

Un altro tipo di convergenza, simile a quella puntuale, è quella assoluta: per ogni fissato  $\bar{x} \in J$  guardiamo la convergenza della serie numerica  $|f_n(\bar{x})|$ .

**Definizione 13** (Convergenza assoluta di una serie di funzioni). Diciamo che la serie di funzioni di termine generale  $f_n(x)$ , con  $x \in J$ , **converge assolutamente** nel punto  $\bar{x} \in J$  se la serie numerica di termine generale  $|f_n(\bar{x})|$  è convergente.

*Osservazione.* La convergenza assoluta implica quella semplice, ovvero, se una serie converge assolutamente in  $\bar{x}$  allora  $\bar{x}$  appartiene al suo insieme di convergenza puntuale.

Esiste un altro tipo di convergenza, che prende in considerazione un intervallo.

**Definizione 14** (Convergenza totale di una serie). La serie di termine generale  $f_n(x)$ , con  $x \in J$ , **converge totalmente** in  $I \subseteq J$  se:

- I. si ha  $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in I, n \in \mathbb{N}$ ,
- II. la serie numerica di termine generale  $a_n$  è convergente.

*Osservazione.* La convergenza totale in  $I$  implica la convergenza assoluta per ogni  $\bar{x} \in I$ , che a sua volta implica quella puntuale. Questa implicazione non si applica però all'inverso.

*Osservazione.* Se le  $f_n$  sono continue e la serie converge totalmente, allora la funzione somma è continua ed integrabile termine a termine.

## CAPITOLO VII

---

### Serie di potenze in $\mathbb{R}$

---

Introduciamo il concetto di serie di potenze.

**Definizione 15** (Serie di potenze). Una serie di potenze reale è una serie di funzioni nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots,$$

con  $a_n \in \mathbb{R}$  **coefficienti** della serie e  $x_0 \in \mathbb{R}$  **centro** della serie.

*Osservazione.* Stiamo adottando la convenzione che, nel caso  $x = x_0$  e  $n = 0$ , si ha

$$a_0 (x_0 - x_0)^0 = a_0 \times 1 = a_0.$$

Si tratta di una convenzione, in quanto la scrittura  $0^0$  in realtà non è determinata.

In particolare, nel caso  $x = x_0$  e  $n$  generico si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \dots = a_0,$$

dunque tutte le serie di potenze convergono in  $x = x_0$ .

L'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un intervallo centrato in  $x_0$ . Questo ci porta al nostro prossimo teorema.

**Teorema 5** (Raggio di convergenza di una serie di potenze reale). *Data una serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

*si verifica sempre una tra tre condizioni:*

- I. la serie converge solo per  $x = x_0$ , dunque si ha un raggio di convergenza nullo;*
- II. la serie converge assolutamente su tutto  $\mathbb{R}$ , dunque si ha un raggio di convergenza infinito;*
- III. esiste un numero reale  $R > 0$  tale che:*

- la serie converge assolutamente per ogni  $x$  con  $|x - x_0| < R$ ,*
- la serie non converge per  $|x - x_0| > R$ ,*

*dunque si ha un raggio di convergenza  $R$ .*

*Osservazione.* Per quanto riguarda il caso numero tre, nulla è detto riguardo ai punti  $x = x_0 \pm R$ , perciò vanno analizzati caso per caso.

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare due cose:

- I. l'insieme di convergenza semplice è un intervallo “privo di buchi” centrato in  $x_0$ ;
- II. nell'intervallo di convergenza, la convergenza è assoluta.

Partiamo dal punto primo. Chiamiamo  $E$  l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze data. È sufficiente dimostrare l'implicazione

$$x \in E \implies \forall y \mid |y - x_0| < |x - x_0|, y \in E. \quad (*)$$

Data  $y$  che soddisfa l'implicazione, devo dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (y - x_0)^n$$

converge.

Per prima cosa osserviamo che  $x \in E$  implica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n (x - x_0)| = 0, \quad (**)$$

in quanto, poiché la serie numerica  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  converge, il suo termine generale tende a zero. Poi calcoliamo

$$|a_n (y - x_0)^n| = \underbrace{|a_n (x - x_0)^n|}_{\leq 1 \text{ per } n \text{ grande grazie a } (**)} \times \left| \frac{(y - x_0)^n}{(x - x_0)^n} \right|.$$

Quindi,

$$|a_n (y - x_0)^n| \leq \left| \frac{y - x_0}{x - x_0} \right|^n$$

per  $n$  grande.

Grazie a (\*), la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{y - x_0}{x - x_0} \right|^n$$

è convergente, in quanto è una geometrica con ragione  $q < 1$ . Quindi, per il teorema del confronto, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n (y - x_0)^n|$$

è convergente, cioè  $y \in E$ . Abbiamo dunque dimostrato il punto primo. Il punto secondo è stato anch'esso dimostrato, in quanto sono stati usati i valori assoluti.  $\square$

Introduciamo ora il teorema che sancisce come calcolare questo raggio di convergenza.

**Teorema 6** (Calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze reale). *Data la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

*possiamo calcolare il raggio di convergenza  $R$  come*

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

*o, alternativamente, come*

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

*dove  $R$  esiste ed appartiene all'insieme  $[0, +\infty]$ .*

*Osservazione.* Il criterio del rapporto ed il criterio della radice per le serie numeriche forniscono  $\frac{1}{R}$ .

A questo punto, definiamo un paio di serie importanti.

**Definizione 16** (Serie esponenziale). La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots,$$

avente  $x_0 = 0$  e  $a_n = \frac{1}{n!}$ , è detta **serie esponenziale**.

Il suo raggio di convergenza è dato da

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} (n+1)! = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty.$$

La serie esponenziale converge dunque assolutamente  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 17** (Serie logaritmica). La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots,$$

avente  $x_0 = 0$  e  $a_n = \frac{1}{n}$ , con  $n \geq 1$ , è detta **serie logaritmica**.

Il suo raggio di convergenza è dato da

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left| \sqrt[n]{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

La serie logaritmica converge dunque assolutamente per  $|x| < 1$  e non converge per  $|x| > 1$ . Per quanto riguarda il caso  $|x| = 1$ , se  $x = 1$  la serie è una serie armonica divergente, mentre con  $x = -1$  la serie converge per il criterio di Leibniz.

In conclusione, la serie logaritmica ha insieme di convergenza semplice  $[-1, 1)$  ed insieme di convergenza assoluta  $(-1, 1)$ .

Terminiamo il capitolo introducendo gli ultimi teoremi.

**Teorema 7** (Convergenza totale per una serie di potenze reale). *Data una generica serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

avente raggio di convergenza  $0 < R \leq +\infty$ , si ha:

- Se  $R = +\infty$ , la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso  $[a, b]$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ .
- Se  $0 < R < +\infty$ , la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso  $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ .

**Teorema 8** (Integrabilità e derivabilità termine a termine per una serie di potenze reale). *Sia data una generica serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

avente raggio di convergenza  $0 < R \leq +\infty$  e somma  $f(x)$ , con  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . Allora:

I. Per ogni  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  si ha

$$\int_{x_0}^x f(s) \, ds := \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (s - x_0)^n \, ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{x_0}^x (s - x_0)^n \, ds$$

ed il raggio di convergenza della serie integrata è anch'esso  $R$ .

II.  $f(x)$  è derivabile, dunque in particolare anche continua, in  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . Inoltre,

$$f'(x) := \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n (x - x_0)^n)'$$

ed il raggio di convergenza della serie derivata è anch'esso  $R$ .

*Osservazione.* La serie di potenze è in realtà derivabile ad ogni ordine, mantenendo il raggio di convergenza.

*Osservazione.* Il comportamento della serie in  $x = x_0 \pm R$  può variare, dunque va studiato separatamente.

# CAPITOLO VIII

---

## Serie di Taylor

---

Prendiamo ora una funzione derivabile infinite volte  $f$  e chiediamoci: esiste una serie di potenze la cui somma sia proprio  $f$ ?

Spezziamo questa domanda in tre sotto-domande:

I. Qual è la serie candidata?

II. Qual è il raggio di convergenza della serie candidata?

III. La serie candidata converge a  $f$  ovunque dentro il raggio di convergenza?

Partiamo dalla prima. Ricordiamo che, data  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile infinite volte, il suo polinomio di Taylor centrato in  $x_0 \in I$  di ordine  $m$  è

$$T_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m.$$

Come già visto nel corso di Analisi Matematica I, se  $f$  è derivabile infinite volte, vale lo sviluppo di Taylor all'ordine  $m$ ,  $\forall m$ ,

$$f(x) = T_m(x) + o(|x - x_0|^m),$$

dove  $o(|x - x_0|^m)$  è tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(|x - x_0|^m)}{|x - x_0|^m} = 0.$$

**Definizione 18** (Serie di Taylor). Sia  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile infinite volte in  $x_0 \in I$ . Si chiama **serie di Taylor con centro  $x_0$  della funzione  $f$**  la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

I numeri  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$  sono detti **coefficienti di Taylor** e se  $x_0 = 0$  la serie è anche detta **serie di McLaurin**.

Passiamo ora alla seconda domanda. Come per tutte le serie di potenze, il raggio di convergenza può essere:

- $R = 0$ , dunque la serie converge solo in  $x_0$  e dunque non seguiamo,
- $R > 0$ , compreso il caso  $R = +\infty$ , e dunque possiamo proseguire.

Passiamo dunque alla terza domanda.

---

---

## PARTE III

---

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE



# CAPITOLO IX

---

## Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

---

Un'equazione differenziale del secondo ordine si presenta nella forma

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

con  $t \in I$ . Definiamo dunque una sua soluzione.

**Definizione 19** (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine). Si dice **soluzione dell'equazione differenziale** nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  una funzione  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  **derivabile due volte** per cui, sostituendo nell'equazione differenziale i valori effettivi di  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , si ottiene che

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \quad \forall t \in I,$$

cioè un'identità su  $I$ .

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha soluzioni infinite. Queste vengono racchiuse nella loro totalità in dipendenza da due parametri all'interno dell'integrale generale. Se a questo aggiungiamo una coppia di condizioni iniziali otteniamo una soluzione specifica. Il sistema formato dall'integrale generale e le condizioni iniziali è detto **problema di Cauchy** ed il teorema che garantisce l'unicità della soluzione è detto **teorema di Cauchy**.

**Teorema 9** (Teorema di Cauchy). *Data l'equazione differenziale*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

*con  $t \in I$ ,  $a, b, c$  e  $d$  funzioni continue in  $I$  e  $a \neq 0$ , allora,  $\forall t_0 \in I$  e  $\forall (y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ , il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

*ha una ed una sola soluzione definita su tutto l'intervallo  $I$ .*

Introduciamo dunque un importante teorema che sfrutta la linearità delle equazioni: il principio di sovrapposizione.

**Teorema 10** (Principio di sovrapposizione). *Se  $y_1$  è soluzione di  $a y'' + b y' + c y = f_1$  ed  $y_2$  è soluzione di  $a y'' + b y' + c y = f_2$ , allora la funzione*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

*è soluzione di*

$$a y'' + b y' + c y = C_1 f_1 + C_2 f_2.$$

Prendiamo ora un'equazione differenziale omogenea, ovvero con  $f = 0$ . Possiamo a questo punto notare che l'insieme  $S$  delle soluzioni forma uno **spazio vettoriale** di dimensione due. Da questo ricaviamo il teorema di struttura.

**Teorema 11** (Teorema di struttura). *L'integrale generale di*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0,$$

*con  $a, b$  e  $c$  continue su  $I$  e  $a(t) \neq 0$ , è dato da tutte le combinazioni lineari*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

*dove  $y_1$  ed  $y_2$  sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione stessa.*

Osserviamo adesso un'equazione con  $f \neq 0$ . Questa è detta completa o **non omogenea**. Se poniamo  $f = 0$ , otteniamo dunque l'equazione **omogenea associata**. Definendo  $y_P$  come una particolare soluzione dell'equazione completa e  $y_0$  come una particolare soluzione dell'equazione omogenea associata, notiamo che queste soddisfano il principio di sovrapposizione. Con queste premesse possiamo dunque estendere il teorema di struttura alle equazioni non omogenee.

**Teorema 12** (Teorema di struttura per equazioni complete). *L'integrale generale di*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

*con  $a, b, c$  e  $f$  continue su  $I$  e  $a(t) \neq 0$ , è dato da **tutte e sole** le funzioni*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_P(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

*dove  $y_1$  ed  $y_2$  sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione omogenea associata*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

*e  $y_P$  è una **soluzione particolare** dell'equazione completa*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t).$$

---

## Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

---

Per studiare un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti, possiamo sfruttare il teorema di struttura. Partiamo innanzitutto definendo il **polinomio caratteristico**: data una generica equazione differenziale  $a y'' + b y' + c y = 0$ , il polinomio caratteristico associato è

$$P(\lambda) = a \lambda^2 + b \lambda + c.$$

Possiamo dunque facilmente definire l'equazione caratteristica come  $P(\lambda) = 0$ , o, più esplicitamente,

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0.$$

Abbiamo dunque ricondotto la ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea a quella delle radici del polinomio caratteristico, ovvero alla risoluzione dell'equazione caratteristica. La natura delle radici dipende chiaramente dal discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

### I Il caso $\Delta > 0$

Nel caso di un discriminante positivo, possiamo ricavare due radici **reali e distinte** tramite la classica formula

$$\lambda_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

da cui ricaviamo le due soluzioni dell'equazione differenziale come

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) &= e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

linearmente indipendenti poiché  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Possiamo dunque sfruttare il teorema di struttura ed ottenere l'integrale generale dell'equazione di partenza come

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

## II Il caso $\Delta < 0$

Nel caso di un discriminante negativo, possiamo ricavare due radici **complesse e coniugate** definite come

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta,\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-b}{2a}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a},\end{aligned}$$

ricavabili dalla formula classica. Prendendo la generica soluzione  $y(t) = e^{\lambda t}$  e ricordando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso  $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)$ , possiamo dunque scrivere le soluzioni come

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta), \\ y_2(t) &= e^{\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta).\end{aligned}$$

Ma poiché cerchiamo soluzioni reali, dobbiamo definire due funzioni che chiameremo  $u$  come

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2}, \\ u_2(t) &= \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i},\end{aligned}$$

che possono dunque essere generalizzate come

$$\begin{aligned}u_1(t) &= e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ u_2(t) &= e^{\alpha t} \sin(\beta t).\end{aligned}$$

L'integrale generale è dunque

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

## III Il caso $\Delta = 0$

Nel caso di un discriminante nullo, possiamo ricavare due radici **reali e coincidenti** definite come

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

come si può facilmente ricavare dalla formula classica. Poiché abbiamo una sola soluzione, abbiamo bisogno di cercare una funzione  $C(t)$  tale che

$$\begin{aligned}y_2(t) &= C(t) e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t)' &= e^{\lambda_1 t} (C'(t) + \lambda_1 C(t)), \\ y_2(t)'' &= e^{\lambda_1 t} (C''(t) + 2\lambda_1 C'(t) + \lambda_1^2 C(t)).\end{aligned}$$

Se sostituiamo nell'equazione differenziale ci accorgiamo che tutti i termini contenenti  $C(t)$  e  $C'(t)$  si semplificano, risultando nell'equazione

$$C''(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La più semplice funzione che soddisfa l'equazione è la funzione identità, ovvero  $C(t) = t$ . Possiamo dunque generalizzare quanto trovato definendo l'integrale generale come

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}.$$

## IV Tabella riassuntiva

Riassumiamo quanto trovato in una tabella.

$\Delta$	Radici	Soluzioni		Integrale generale
		$y_1(t)$	$y_2(t)$	$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}$	$e^{\lambda_2 t}$	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}$	$t e^{\lambda_2 t}$	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$

Queste formule generali valgono per la risoluzione di equazioni **omogenee**, siano esse associate o meno, con **coefficienti costanti**. Non si applicano se queste due condizioni non sono verificate.