

Dimostrazione numero 1

Teorema del resto secondo Peano

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ($T_n^f(x)$) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^n(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x - x_0)^n)$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per $n = 1$:

$$f \in C^1(A)$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \stackrel{?}{=} o((x - x_0))$$

Per la definizione di o -piccolo una funzione $(f(x))$ è o -piccolo di un'altra $(g(x))$ quando il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) \rightarrow 0$$

Quindi $F(1)$ è vera.

Ipotesi induttiva: $F(n - 1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\forall g \in C^{n-1}(A)$$

$$g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

Verifica per $F(n)$

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di o -piccolo:

$$B_\epsilon(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

Questa è però una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$ per risolverla, le applico il **teorema de l'Hospital**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - [T_n^f(x)]'}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Calcolo $[T_n^f(x)]'$ a parte:

$$\begin{aligned} [T_n^f(x)]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} 3(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} n(x - x_0)^{n-1} \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \\ &= T_{n-1}^{f'}(x) \end{aligned}$$

Infatti se $f \in C^n(A) \Rightarrow f' \in C^{n-1}$.

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che $f' \in C^{n-1}$ e che $g \in C^{n-1}$ poniamo quindi $g = f'$. Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

c.v.d.