Analisi Matematica II

Mattia Martelli

Indice

Indice delle Definizioni e dei Teoremi

PARTE I

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

CAPITOLO I

Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

Definizione 1 (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine)**.** *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita $y(x)$, dove $x \in \mathbb{R}$, e la sua derivata prima $y'(x)$:*

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0.$$

In altre parole, ***una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione****.*

Definizione 2 (Forma normale di una EDO)**.** *Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma*

$$y'(x) = f\left(x,\, y(x)\right).$$

Definizione 3 (Integrale generale e particolare di una EDO)**.** *Data la EDO*

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0,$$

chiamiamo ***integrale generale*** *dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

Si chiama ***integrale particolare*** *dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.*

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo

  $$y'(x) = f(x),$$

  cioè EDO del primo ordine in forma normale con $f\left(x,\, \cancel{y(x)}\right)$, basta integrare:

  $$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare y conoscendo delle informazioni relative a y'. Da qui il nome *integrale generale*.

- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

CAPITOLO II

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

Definizione 4 (EDO a variabili separate)**.** *Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Cioè $f(x, y) = h(x) \times g(y)$ *è il prodotto di una funzione che dipende solo da* x *per una funzione che dipende solo da* y*.*

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 1 (Risoluzione di EDO a variabili separabili)**.** *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

1. *Se* $g(D) = 0$ *per qualche* $D \in \mathbb{R}$ *allora la funzione costante* $y(x) = D, \forall\, x$ *è soluzione.*

2. *Se* $g(y) \neq 0, \forall\, y$ *in un certo intervallo, una soluzione* $y(x)$ *è definita implicitamente dall'equazione*

   $$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

   dove

   - $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
   - H *è una primitiva di* h*;*
   - Γ *è una primitiva di* $\frac{1}{g}$*.*

   Se Γ *non è invertibile otteniamo eslicitamente*

   $$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + \mathrm{c}),$$

   con $c \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le categorie:

1. Sia $g(D) = 0$ e $y(x) = D$, $\forall\, x$. L'identità è soddisfatta:
   (a) Sinistra: $y'(x) = 0$;
   (b) Destra: $h(x)\, g(y(x)) = h(x)\, g(D) = h(x) \times 0 = 0$.
2. Prendiamo un intervallo $[x_0, x]$ in cui la funzione $g(y)$ non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

   Dati $x_0 < x$, con x_0, $x \in \mathrm{J}_1$, integriamo:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{x_0}^{x} h(r)\, \mathrm{d}r = H(x) + \mathrm{c}.$$

   Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$
$$y'(r) = \mathrm{d}k,$$

   quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$
$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

   Dunque,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)}\, \mathrm{d}k = \Gamma(y(x)) + \mathrm{c}.$$

   Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

   con $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.

□

CAPITOLO III

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

Definizione 5 (EDO lineari del primo ordine)**.** *Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma*

$$c(x)\, y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x),$$

con $c, a, b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue su* J.

Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 2 (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine)**.** *Date* $a, b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x).$$

L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[B(x) + \mathrm{c} \right],$$

dove

- $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
- $A(x)$ *è una qualunque primitiva di* $a(x)$*:* $A = \int a$*;*
- $B(x)$ *è una qualunque primitiva di* $\mathrm{e}^{A(x)}\, b(x)$*:* $A = \int \mathrm{e}^{\int a}\, b$*.*

PARTE II

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

CAPITOLO IV

Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Un'equazione differenziale del secondo ordine si presenta nella forma

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t),$$

con $t \in \mathrm{I}$. Definiamo dunque una sua soluzione.

Definizione 6 (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine)**.** *Si dice* ***soluzione dell'equazione differenziale*** *nell'intervallo* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ *una funzione* $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ***derivabile due volte*** *per cui, sostituendo nell'equazione differenziale i valori effettivi di* $y(t)$*,* $y'(t)$ *e* $y''(t)$*, si ottiene che*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t) \quad \forall\, t \in \mathrm{I},$$

cioè un'identità su I*.*

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha soluzioni infinite. Queste vengono racchiuse nella loro totalità in dipendenza da due parametri all'interno dell'integrale generale. Se a questo aggiungiamo una coppia di condizioni iniziali otteniamo una soluzione specifica. Il sistema formato dall'integrale generale e le condizioni iniziali è detto **problema di Cauchy** ed il teorema che garantisce l'unicità della soluzione è detto **teorema di Cauchy**.

Teorema 3 (Teorema di Cauchy)**.** *Data l'equazione differenziale*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t),$$

con $t \in \mathrm{I}$*,* a*,* b*,* c *e* d *funzioni continue in* I *e* $a \neq 0$*, allora,* $\forall\, t_0 \in \mathrm{I}$ *e* $\forall\, (y_0,\, v_0) \in \mathbb{R}^2$*, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

ha ***una ed una sola*** *soluzione definita su* ***tutto l'intervallo*** I*.*