Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Virginia Longo, Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

Indice

Parte I

Dimostrazione numero 1

Progressione geometrica

Enunciato

$$F(n) : \sum_{k=0}^{n} q^k \; = \; \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad\qquad q \neq 1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} q^k \; = \; q^0 + q^1 \; = \; 1 + q$$

Allo stesso modo

$$\frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} \; = \; \frac{1 - q^2}{1 - q} \; = \; \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} \; = \; 1 + q$$

Che corrisponde al risultato della sommatoria
Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.

Dimostriamolo per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k \; &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} && \textit{Per ipotesi induttiva} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+1+1}}{1 - q} \\
&= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}
\end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} \; = \; \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Abbiamo quindi dimostrato la progressione geometrica.

Dimostrazione numero 2

Formule di De Morgan

Prima formula

La prima formula è

$$(A \cup B)^{\complement} \equiv A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

La dimostreremo in entrambe le direzioni:

- se $x \in (A \cup B)^{\complement}$, allora $x \notin A \cup B$, quindi $x \notin A \wedge x \notin B$, perciò $x \in A^{\complement} \wedge x \in B^{\complement}$, dunque $x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$;
- se $x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$, allora $x \in A^{\complement} \wedge x \in B^{\complement}$, quindi $x \notin A \wedge x \notin B$, perciò $x \notin A \cup B$, dunque $x \in (A \cup B)^{\complement}$.

Abbiamo quindi dimostrato la prima formula.

Seconda formula

La seconda formula è

$$(A \cap B)^{\complement} \equiv A^{\complement} \cup B^{\complement}$$

Anche questa la dimostreremo in entrambe le direzioni:

- se $x \in (A \cap B)^{\complement}$, allora $x \notin A \cap B$, quindi $x \notin A \vee x \notin B$, perciò $x \in A^{\complement} \vee x \in B^{\complement}$, dunque $x \in A^{\complement} \cup B^{\complement}$;
- se $x \in A^{\complement} \cup B^{\complement}$, allora $x \in A^{\complement} \vee x \in B^{\complement}$, quindi $x \notin A \vee x \notin B$, perciò $x \notin A \cap B$, dunque $x \in (A \cap B)^{\complement}$.

Abbiamo quindi dimostrato anche la seconda formula.

Dimostrazione numero 3

Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &\geqslant 1+0x \\ 1 &\geqslant 1 \end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.

Dimostriamolo per $n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geqslant (1+x)(1+nx) && \textit{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geqslant 1+x(n+1) && \textit{Per l'enunciato del teorema} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

Dimostrazione numero 4

Binomio di Newton

Enunciato

Il binomio di Newton è

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.
Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
1 &= \binom{0}{0} a^0\, b^0 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.
Dimostriamolo per $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato il binomio di Newton.

Dimostrazione numero 5

Cardinalità dell'insieme delle parti

Enunciato

Dato un insieme $\underline{\overline{\mathrm{X}}}$, l'insieme delle parti $\mathcal{P}\left(\underline{\overline{\mathrm{X}}}\right)$ ha cardinalità pari a 2^n, dove n è il numero di elementi dell'insieme.

Dimostrazione

Prendiamo un generico insieme $\underline{\overline{\mathrm{X}}}$. Questo ha sicuramente come sottoinsiemi $\emptyset$ e se stesso.
Chiediamoci ora: quanti sottoinsiemi di un elemento possiede? $\mathrm{C}_{n,1} = \binom{n}{1}$
Quanti sottoinsiemi di due elementi possiede? $\mathrm{C}_{n,2} = \binom{n}{2}$
...
Quanti sottoinsiemi di $n-1$ elementi possiede? $\mathrm{C}_{n,n-1} = \binom{n}{n-1}$
A questo punto possiamo dire che

$$\left|\mathcal{P}\left(\underline{\overline{\mathrm{X}}}\right)\right| = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1$$

che corrisponde a

$$\left|\mathcal{P}\left(\underline{\overline{\mathrm{X}}}\right)\right| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

secondo la regola del binomio di Newton. c.v.d.

Dimostrazione numero 6

Formule di de Moivre

Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi z_1 e z_2 definiti come

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \\ z_2 &= \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \end{aligned}$$

Il loro prodotto sarà uguale a

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\,\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 i\sin\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)] \end{aligned}$$

Quoziente di due numeri complessi

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1}{\rho_2\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2}\frac{\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2}{\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1 i\sin\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}{\cos^2\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 + \sin^2\vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{[\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)]}{\cos^2\vartheta_2 + \sin^2\vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)] \end{aligned}$$

Potenza di numero complesso

Enunciato

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

Dimostrazione

Lo dimostreremo per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 2$:

$$\begin{aligned} z^2 = z\,z &= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \\ &= \rho^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta) \end{aligned}$$

secondo la prima formula, con $z_1 = z_2 = z$. Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo $n - 1$.

Dimostriamolo per n:

$$\begin{aligned} z^{n-1} &= \rho^{n-1}(\cos(n-1)\vartheta + i\sin(n-1)\vartheta) \\ z^n \;=\; z^{n-1}z &= \rho^{n-1}(\cos(n-1)\vartheta + i\sin(n-1)\vartheta)\,\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \\ &= \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \end{aligned}$$

sempre secondo la prima formula.

Abbiamo perciò dimostrato anche la terza formula. c.v.d.

Dimostrazione numero 7

Estrazione di radice complessa

Dati due numeri, $z, z^* \in \mathbb{C}$, definiti come $\sqrt[n]{z^*} = z$ vogliamo estrarre la radice di z^*, quindi calcolare $z^* = z^n$.

Partiamo definendo i numeri:

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$z^* = \rho^*(\cos\vartheta^* + i\sin\vartheta^*)$$

Dall'uguaglianza $z^* = z^n$ possiamo quindi ricavare

$$\rho^*(\cos\vartheta^* + i\sin\vartheta^*) = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

Questa uguaglianza è valida a meno di multipli di 2π.

Possiamo quindi ricavare il sistema

$$\begin{cases} \rho^* = \rho^n \\ \vartheta_k = k \times 2\pi = n\vartheta \end{cases} \qquad \textit{da cui si ricava} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho^*} \\ \vartheta = \dfrac{\vartheta^*}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases}$$

Dimostrazione numero 8

Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Enunciato

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. È pertanto impossibile scriverlo come frazione.

Dimostrazione

Dimostriamo l'enunciato per assurdo. Partiamo quindi prendendo due numeri coprimi $p, q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \sqrt{2} \\ p &= \sqrt{2}q \\ p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi tre casi:

p, q **dispari:** p sarà uguale a

$$p = 2^0 \times \cdots = p^2$$

q sarà uguale a

$$\begin{aligned} q &= 2^0 \times \cdots = q^2 \\ 2q^2 &= 2^1 \times \ldots \end{aligned}$$

Perciò, $p^2 \neq 2q^2$.

p **dispari,** q **pari:** p sarà uguale a

$$p = 2^0 \times \cdots = p^2$$

q sarà uguale a

$$\begin{aligned} q &= 2^k \times \ldots \\ q^2 &= 2^{2k} \times \ldots \\ 2q^2 &= 2^{2k+1} \times \ldots \end{aligned}$$

Perciò, $p^2 \neq 2q^2$.

p **pari,** q **dispari:** p sarà uguale a

$$p = 2^k \times \dots$$
$$p^2 = 2^{2k} \times \dots$$

q sarà uguale a

$$q = 2^0 \times \dots = q^2$$
$$2q^2 = 2^1 \times \dots$$

Perciò, $p^2 \neq 2q^2$.

c.v.d.

Dimostrazione numero 9

Proprietà di $\sim$ ed o

Teorema fondamentale che li lega

Enunciato

Per $x \to x_0$,

$$f \sim q \iff f = g + o(g)$$

Dimostrazione

Lo dimostreremo in entrambe le direzioni. Partiamo da sinistra.

$$\begin{aligned}
f &= gh & h &\to 1 \\
f - g &= gh - g \\
f - g &= g(h-1) & H = h - 1 &\to 0 \\
f - g &= o(g) \\
f &= o(g) + g \\
f &\sim g
\end{aligned}$$

Partiamo ora da destra.

$$\begin{aligned}
f - g &= o(g) \\
f - g &= gh & h &\to 0 \\
f &= g + gh \\
f &= g(h+1) & H = h + 1 &\to 1 \\
f &\sim g
\end{aligned}$$

c.v.d.

Proprietà di o

$o(k\,g) = k\,o(g) = o(g)$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
f &= o(k\,g) \\
f &= g\,kh & h \to 0 \therefore kh &\to 0 \\
f &= o(g)
\end{aligned}$$

$o(g) \pm o(g) = o(g)$

Dimostrazione per $o(g) + o(g) = o(g)$

$$o(g) + o(g) = 2\,o(g) = o(g)$$

Dimostrazione per $o(g) - o(g) = o(g)$

$$o(g) - o(g) = o(g) + (-o(g)) = o(g) + o(g) = o(g)$$

$f\,o(g) = o(f\,g)$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
F &= o(g) \\
F &= gh && h \to 0 \\
f\,F &= f\,gh \\
f\,o(g) &= o(f\,g)
\end{aligned}$$

$(o(g))^n = o(g^n) \quad \forall n \in \mathbb{R}^+$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
G &= o(g) \\
G &= gh && h \to 0 \\
G^n &= g^n h^n && H = h^n \to 0 \\
(o(g))^n &= o(g^n)
\end{aligned}$$

Proprietà di $\sim$

Se $f \sim g$ **allora** $f^n \sim g^n$ ***dove*** $n \neq 0$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
f &= g\,h && h \to 1 \\
f^n &= g^n\,h^n && H = h^n \to 1
\end{aligned}$$

Se $f_1 \sim g_1$ **e** $f_2 \sim g_2$ **allora** $f_1\,f_2 \sim g_1\,g_2$ **e** $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
f_1 \sim g_1 \qquad f_1 &= g_1\,h_1 && h_1 \to 1 \\
f_2 \sim g_2 \qquad f_2 &= g_2\,h_2 && h_2 \to 1 \\
f_1\,f_2 &= g_1\,g_2\,H && H = h_1\,h_2 \to 1 \\
\frac{f_1}{f_2} &= \frac{g_1}{g_2}\,H && H = \frac{h_1}{h_2} \to 1
\end{aligned}$$

Dimostrazione numero 10

Numerabilità di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e non numerabilità di $\mathbb{R}$

Numerabilità di $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ è numerabile, in quanto è facilmente possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & n & -n & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & \dots
\end{array}$$

Dunque, $\mathbb{Z}$ è numerabile.

Numerabilità di $\mathbb{Q}$

Cominciamo a scrivere l'insieme $\mathbb{Q}$ come una tabella.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \dots \\
0 & 1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \dots \\
0 & -1/2 & -2/2 & -3/2 & -4/2 & -5/2 & \dots \\
0 & 1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \dots \\
0 & -1/3 & -2/3 & -3/3 & -4/3 & -5/3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Possiamo dunque costruire una successione, prendendo gli elementi sulle diagonali a partire dall'angolo in alto a sinistra, evitando i doppioni.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Q} & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1/2 & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots
\end{array}$$

Dunque, anche $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Non numerabilità di $\mathbb{R}$

Cominciamo scrivendo una sequenza infinita di numeri razionali $\in [0, 1]$.

$$
\begin{gathered}
0.1234\ldots \\
0.9876\ldots \\
0.1928\ldots \\
\ldots
\end{gathered}
$$

Se noi definiamo un nuovo numero, prendendo una cifra alla volta in diagonale ed incrementandola di uno, ad esempio $0.293\ldots$, questo sarà, per definizione, diverso da ogni altro numero della sequenza. Non è pertanto possibile mettere in corrispondenza biunivoca $\mathbb{R}$ con $\mathbb{N}$, dunque $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Dimostrazione numero 11

Teorema fondamentale delle successioni monotone

Si dimostrano diversi casi:

1. una successione monotona e limitata *converge*;
2. una successione monotona e illimitata
   - *diverge positivamente*, se crescente;
   - *diverge negativamente*, se decrescente.

Primo caso

Enunciato

Ipotesi

Fisso per comodità a_n monotona crescente

1. $a_n \leqslant a_{n+1}$ (ipotesi di monotonia);
2. $\{a_n\} \subset \mathrm{B}_r(0))$ con $r > 0$ (ipotesi di limitatezza).

Tesi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Dimostrazione

Essendo a_n limitata avrà un maggiorante in r e quindi avrà il sup. Dimostro che $L = \sup a_n$.
Definiamo un intorno ε di sup come $\mathrm{B}_\varepsilon(S)$: allora $\forall \varepsilon \geqslant 0$, $S - \varepsilon$ non è più né sup né maggiorante, quindi

$$\exists\, a_{n^*} \mid S - \varepsilon < a_{n^*} \leqslant S$$
$$\forall n > n^*,\, S - \varepsilon < a_{n^*} \leqslant a_n \leqslant S$$
$$a_n \in \mathrm{B}_\varepsilon(S)$$

Secondo caso

Enunciato

Consideriamo il caso della crescenza.

Ipotesi

Fisso per comodità a_n monotona crescente

1. $a_n \leqslant a_{n+1}$ (ipotesi di monotonia);
2. $\nexists\, \mathrm{B}_r(0) \supset \{a_n\} \quad \forall n$ (ipotesi di illimitatezza).

Tesi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

Dimostrazione

Essendo a_n illimitata

$$\forall\, \mathrm{B}_r(0),\ a_{n^*} \geqslant r$$

e per la monotonia

$$\forall n > n^*,\ a_{n^*} \leqslant a_n$$

quindi, definitivamente

$$a_n \in \mathrm{B}_r(+\infty)$$

e per la definizione di limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

Dimostrazione numero 12

Convergenza della successione che definisce e

Definizione

La successione che definisce il numero e è

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Questa è **monotona crescente** e **limitata**, quindi converge per il teorema fondamentale delle successioni monotone.

Verifica della monotonia crescente

Secondo la definizione, $\forall n$, $a_n \leqslant a_{n+1}$. Dunque

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant 1$$

Verifichiamo la disequazione:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&\geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, per passare ad una disguaglianza, è stata usata la disguaglianza di Bernoulli. In particolare,

$$x = -\frac{1}{n^2}$$

dunque,

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

Verifica della limitatezza

Innanzitutto, introduciamo una successione ausiliaria $\{b_n\}$ definita come

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>1}$$

Quindi, $\forall n$, $a_n < b_n$. Dimostriamo quindi che $\{b_n\}$ decresce, da cui segue che $\{a_n\}$ è limitata. La disequazione da verificare è dunque

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \leqslant 1$$

Verifichiamola:

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \\
&\leqslant \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1
\end{aligned}$$

Come nella verifica precedente, è stata usata la disguaglianza di Bernoulli. In particolare,

$$x = \frac{1}{n^2-1}$$

dunque,

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \geqslant 1+n\left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1+\frac{n}{n^2}$$

da cui

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{-n} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

Dimostrazione numero 13

Teorema di unicità del limite

Enunciato

Se una successione converge, il valore a cui converge è unico.

Dimostrazione

Sia $\{a_n\}$ una successione convergente ed ipotizziamo, per assurdo, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L_2$$

con $L_1 \neq L_2$.

Per la definizione di limite otteniamo

$$\forall\, \mathrm{B}_r(L_1),\ \exists\, M_1 \mid \forall n > M_1,\ a_n \in \mathrm{B}_r(L_1)$$
$$\forall\, \mathrm{B}_r(L_2),\ \exists\, M_2 \mid \forall n > M_2,\ a_n \in \mathrm{B}_r(L_2)$$

Scegliamo r come

$$\begin{aligned} r &< \frac{\operatorname{dist}(L_1, L_2)}{2} \\ &< \frac{|L_1 - L_2|}{2} \end{aligned}$$

così da avere

$$\mathrm{B}_r(L_1) \cap \mathrm{B}_r(L_2) = \emptyset$$

Da ciò otteniamo

$$\forall n > \max\{M_1, M_2\},\ n \in \mathrm{B}_r(L_1) \wedge n \in \mathrm{B}_r(L_2)$$

il che è assurdo, poiché l'intersezione è equivalente all'insieme vuoto.

Dimostrazione numero 14

Teorema di permanenza del segno

Enunciato

Se $\{a_n\}$ è definitivamente positiva e convergente allora il suo limite sarà non negativo.

Dimostrazione

Dalle ipotesi del teorema possiamo ricavare

$$\exists\, M \mid \forall n > M,\, a_n > 0$$
$$L = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Vogliamo dimostrare che $L \geqslant 0$. Procediamo per assurdo supponendo $L < 0$. Per la definizione di limite,

$$\forall\, \mathrm{B}_r(L),\, \exists\, M^* \mid \forall n > M^*,\, a_n \in \mathrm{B}_r(L)$$

Se definiamo r come

$$r < \frac{|L|}{2}$$

stiamo dicendo che la successione è definitivamente negativa da M^* in poi, il che è assurdo poiché contraddice l'ipotesi.

Dimostrazione numero 15

Teorema del confronto

Enunciato

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tali che definitivamente $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Inoltre, $\{a_n\}, \{c_n\}$ convergono a L. Allora,

$$L = \lim_{n \to +\infty} b_n$$

Dimostrazione

Dalle ipotesi del teorema possiamo ricavare

$$\begin{gathered} \exists\, M_1 \mid \forall n > M_1,\, a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \\ \forall\, \mathrm{B}_r(L),\, \exists\, M_2 \mid \forall n > M_2,\, a_n \in \mathrm{B}_r(L) \quad \textit{ovvero} \quad L - r < a_n < L + r \\ \forall\, \mathrm{B}_r(L),\, \exists\, M_3 \mid \forall n > M_3,\, c_n \in \mathrm{B}_r(L) \quad \textit{ovvero} \quad L - r < c_n < L + r \end{gathered}$$

Chiamiamo $M^* = \max\{M_1, M_2, M_3\}$. Dopo M^* valgono le tre precedenti relazioni. Dunque,

$$\forall n > M^*,\, L - r < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < L + r$$

da cui si deduce che

$$b_n \in \mathrm{B}_r(L)$$

ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = L$$

Dimostrazione numero 16

Teorema di Bolzano

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $A = [a, b]$ è un intervallo compatto;
2. f è continua su A;
3. $f(a)f(b) < 0$.

Tesi

$$\exists\, x^* \in (a, b) \mid f'(x^*) = 0$$

Dimostrazione

Per fissare le idee,

$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$

Procediamo per bisezione: definiamo x_1 uguale al punto medio, ovvero

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

A questo punto, valutiamo $f(x_1)$:

$$f(x_1) = \begin{cases} \text{se } f(x_1) = 0 & \textit{ho trovato lo zero} \\ \text{se } f(x_1) > 0 & a_1 = x_1 \wedge b_1 = b_0 \quad \textit{(studio l'intervallo destro)} \\ \text{se } f(x_1) < 0 & a_1 = a_0 \wedge b_1 = x_1 \quad \textit{(studio l'intervallo sinistro)} \end{cases}$$

Possiamo quindi proseguire fino a x_k, che sarà definito come

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$$

da cui

$$f(x_k) = \begin{cases} \text{se } f(x_k) = 0 & \textit{ho trovato lo zero} \\ \text{se } f(x_k) > 0 & a_k = x_k \wedge b_k = b_{k-1} \quad \textit{(studio l'intervallo destro)} \\ \text{se } f(x_k) < 0 & a_k = a_{k-1} \wedge b_k = x_k \quad \textit{(studio l'intervallo sinistro)} \end{cases}$$

Abbiamo dunque due succesioni:

$$a_k \textit{ monotona crescente}$$
$$b_k \textit{ monotona decrescente}$$

entrambe limitate, in quanto stanno in $[a, b]$, e convergenti, per il teorema fondamentale delle successioni monotone. Quindi,

$$\begin{matrix} a_k \to L \\ b_k \to M \end{matrix} \qquad \textit{ma } L = M \textit{ dato che } \operatorname{dist}(a_k, b_k) = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Prendiamo quindi $x^* = L = M$ e mostriamo che $f(x^*) = 0$:

$$\left.\begin{matrix} f(a_k) \textit{ converge ad un valore } \geqslant 0 \\ f(b_k) \textit{ converge ad un valore } \leqslant 0 \end{matrix}\right\} \textit{ per il teorema della permanenza del segno}$$

Uso la continuità di f: se $x \to x_0$, allora $f(x) \to f(x_0)$. Dunque,

$$\left.\begin{matrix} f(a_k) \to f(x^*) \geqslant 0 \\ f(b_k) \to f(x^*) \leqslant 0 \end{matrix}\right\} f(x^*) = 0$$

Dimostrazione numero 17

Teorema di Darboux

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $A = [a, b]$ è un intervallo compatto;
2. f è continua su A.

Tesi

$$\forall \lambda \mid m < \lambda < M, \exists x_\lambda \in A \mid f(x_\lambda) = \lambda$$

Dimostrazione

Valendo il teorema di Weirstrass sappiamo che esistono M, m, x_M e x_m tali che

$$f(x_m) = m \leqslant f(x) \leqslant M = f(x_M)$$

Introduciamo quindi una funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \lambda$$

Notare come g ha la stessa regolarità di f, infatti è continua. Inoltre g, studiata nell'intervallo $[x_m, x_M]$ soddisfa il teorema di Bolzano. Dunque,

$$\begin{aligned} g(x_m) &= f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0 \\ g(x_M) &= f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \exists x_\lambda \mid g(x_\lambda) &= 0 \\ f(x_\lambda) - \lambda &= 0 \\ f(x_\lambda) &= \lambda \end{aligned}$$

Dimostrazione numero 18

Derivate elementari con la definizione

Derivata di x^n

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^n\, h^{n-k} - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^n\, h^{n-k}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^n\, h^{n-k-1} \\
&= \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} + o(1) = n x_0^{n-1}
\end{aligned}
$$

Derivata di $\ln x$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{x_0} + o\left(\frac{1}{x_0}\right) \\
&= \frac{1}{x_0} + o(1) = \frac{1}{x_0}
\end{aligned}
$$

Derivata di e^x

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{h + o(h)}{h} \\
&= e^{x_0}(1 + o(1)) = e^{x_0}
\end{aligned}
$$

Dimostrazione numero 19

Derivabilità implica continuità

Enunciato

Se f è derivabile in un punto x_0 allora f è continua in x_0.

Dimostrazione

Per la definizione di derivata, se la funzione è derivabile in un punto x_0 significa che

$$\begin{gathered} m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \exists \text{ finito} \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{mh} = 1 \end{gathered}$$

Dunque, per la definizione di asintotico, con $h \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &\sim mh \\ f(x_0+h)-f(x_0) &= mh + o(mh) \\ f(x_0+h) &= f(x_0) + mh + o(mh) \end{aligned}$$

Bisogna perciò calcolare $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$. Eseguendo la sostituzione $x = x_0 + h$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + \underbrace{mh}_{\to 0} + \underbrace{o(mh)}_{\to 0} = f(x_0)$$

c.v.d.

Parte II

Dimostrazione numero 20

Teorema di Fermat

Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- x_0 è un punto stazionario se $f'(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geqslant f(x), \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_M è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leqslant f(x), \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x_0) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1 - x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leqslant 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geqslant 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$
$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2 - x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geqslant 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leqslant 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$
$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 21

Teorema di Rolle

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f è continua su A e derivabile su (a,b);
2. $f(a) = f(b)$.

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti $\forall x \in (a,b),\ f'(x) = 0$.

Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di $f(x)$ su A e essendo A un intervallo chiuso e limitato, vale il **teorema di Weierstrass**.

$$\exists\, M, m \mid f(x_m) = m \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M \quad \forall\, x \in A$$

e almeno uno tra x_m e x_M è interno ad (a,b), dato che $m \neq M$, poiché f non è costante.

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 22

Teorema di Lagrange

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia continua su A e derivabile su (a,b).

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante per a e b.

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $g(x)$ così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

Notiamo che g ha la regolarità di f su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a,b).

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right] \\ &= f(a) - [f(a) + 0] \\ &= f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] \\ &= f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] \\ &= f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$$

Da cui $g(a) = g(b)$.
Posso quindi applicare il **teorema di Rolle** su A:

$$\exists\ x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\
g'(x_0) &= 0 \\
f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 0 \\
f'(x_0) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}
\end{aligned}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 23

Test di monotonia di f su un intervallo aperto

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia derivabile su (a, b).

Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su A.

$$f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su A.

Dimostrazione

Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2) \mid f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) > 0$ e anche $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è monotona strettamente crescente, c.v.d.

Caso 2 - $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2) \,|\, f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è monotona strettamente decrescente, c.v.d.

Dimostrazione numero 24

Teorema di Cauchy

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & \quad\; y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre f, g continue in A e derivabili in (a, b).

Tesi

$$\exists\, x^* \in (a, b) \mid \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $h(x)$ così definita:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]\ g(x) - [g(b) - g(a)]\ f(x)$$

Notiamo che h ha la regolarità di f e di g su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a, b).

Verifico se su h nell'intervallo $[a, b]$ vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]\ g(a) - [g(b) - g(a)]\ f(a) \\ h(a) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(a) - f(a)\, g(b) + f(a)\, g(a) \\ h(a) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]\ g(b) - [g(b) - g(a)]\ f(b) \\ h(b) &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(b) - f(b)\, g(b) + f(b)\, g(a) \\ h(b) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) \end{aligned}$$

$h(a) = h(b)$, quindi posso applicare il **teorema di Rolle**, da cui si deriva che h ha un punto stazionario x^*

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]\ g'(x) - [g(b) - g(a)]\ f'(x)$$
$$h'(x^*) = 0$$

E quindi infine

$$h'(x^*) = 0$$
$$[f(b) - f(a)]\ g'(x^*) - [g(b) - g(a)]\ f'(x^*) = 0$$
$$[f(b) - f(a)]\ g'(x^*) = [g(b) - g(a)]\ f'(x^*)$$
$$\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 25

Teorema di de l'Hôpital

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1. f, g continue in A e derivabili in (a, b);
2. f, g infinitesime in $x_0 \in (a, b)$.

Tesi

$$\text{Se } l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ allora } l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists\, \vartheta \in (a, b) \Rightarrow \vartheta \in (x_0, x)$$

Aggiungo $f(x_0)$ che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo (x_0, x):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\vartheta)}{g'(\vartheta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\vartheta)}{g'(\vartheta)} = l$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 26

Teorema del resto secondo Peano

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor ($T_n^f(x)$)** è così definito:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^n(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x - x_0)^n)$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per $n = 1$:

$$f \in C^1(A)$$
$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \stackrel{?}{=} o((x - x_0))$$

Per la definizione di o-piccolo una funzione $(f(x))$ è o-piccolo di un altra $(g(x))$ quando il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{?}{=} 0$$
$$f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Quindi $F(1)$ è vera.

Ipotesi induttiva: $F(n-1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\forall\, g \in C^{n-1}(A)$$
$$g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

Verifica per $F(n)$

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di o-piccolo:

$$\mathrm{B}_\varepsilon(0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{?}{=} 0$$

Questa è però una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per risolverla, le applico il **teorema di de l'Hôpital**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left[f(x) - T_n^f(x)\right]'}{[(x - x_0)^n]'}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \left[T_n^f(x)\right]'}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Calcolo $\left[T_n^f(x)\right]'$ a parte:

$$\begin{aligned}
\left[T_n^f(x)\right]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}3(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}n(x - x_0)^n \\
&= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\
&= T_{n-1}^{f'}(x)
\end{aligned}$$

Infatti se $f \in C^n(A) \Rightarrow f' \in C^{n-1}$.
Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che $f' \in C^{n-1}$ e che $g \in C^{n-1}$. Poniamo quindi $g = f'$. Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 27

Teorema del resto secondo Lagrange

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **polinomio di Taylor ($T_n^f(x)$)** è così definito:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^{n+1}(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$\exists\, \vartheta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione

Considero due **funzioni ausiliarie** $g(x), w(x)$ così definite:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - T_n(x) \qquad & g(x) &\in C^{n+1}(A) \\ w(x) &= (x-x_0)^{n+1} \qquad & w(x) &\in C^{\infty}(A) \end{aligned}$$

Calcolo $g(x_0)\,,\, g'(x_0)\,,\, \dots\,,\, g^{(n+1)}(x_0)$:

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0) - \left[\frac{f(x_0)}{0!}1 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_0-x_0)^n\right] = 0\\
g'(x_0) &= f'(x_0) - \left[\frac{f'(x_0)}{1!}1 + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x_0-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x_0-x_0)^{n-1}\right] = 0\\
g''(x_0) &= 0\\
&\dots\\
g^{(n)}(x_0) &= 0\\
g^{(n+1)}(x_0) &= f^{(n+1)}(x_0) - 0 = f^{(n+1)}(x_0)
\end{aligned}$$

Calcolo $w(x_0)\,,\, w'(x_0)\,,\, \dots\,,\, w^{(n+1)}(x_0)$:

$$\begin{aligned}
w(x_0) &= (x_0-x_0)^{n+1} = 0\\
w'(x_0) &= (n+1)(x_0-x_0)^n = 0\\
w'(x_0) &= (n+1)(n)(x_0-x_0)^{n-1} = 0\\
&\dots\\
w^{(n)}(x_0) &= \big[(n+1)!\big](x_0-x_0) = 0\\
w^{(n+1)}(x_0) &= \big[(n+1)!\big]1 = (n+1)!
\end{aligned}$$

Toniamo ora su ciò che dobbiamo dimostrare:

$$\begin{gathered}
\exists\,\vartheta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\
\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}
\end{gathered}$$

Notiamo che $\frac{f(x)-T_n^f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)}$ quindi utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{w(x)} &= \frac{g(x)-g(x_0)}{w(x)-w(x_0)}\\
\exists\,x_1 \in (x_0, x) \qquad &= \frac{g'(x_1)}{w'(x_1)} = \frac{g'(x_1)-g'(x_0)}{w'(x_1)-w'(x_0)}\\
\exists\,x_2 \in (x_0, x_1) \qquad &= \frac{g''(x_2)}{w''(x_2)} = \frac{g''(x_2)-g''(x_0)}{w''(x_2)-w''(x_0)}\\
\exists\,x_3 \in (x_0, x_2) \qquad &= \frac{g'''(x_3)}{w'''(x_3)} = \dots\\
\exists\,\vartheta \in (x_0, x_n) \qquad &= \frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{w^{(n+1)}(\vartheta)} \qquad \textit{Iterando n volte}
\end{aligned}$$

Notiamo anche che possiamo fare questo perché da come abbiamo dimostrato prima calcolandolo, $g(x_0)\,,\, g'(x_0)\,,\, \dots\,,\, g^{(n)}(x_0)$ e $w(x_0)\,,\, w'(x_0)\,,\, \dots\,,\, w^{(n)}(x_0)$ sono infinitesimi.

Quindi le derivate $(n+1)$-esime dal precedente calcolo di $g(x)$ e $w(x)$ sono:

$$\frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{w^{(n+1)}(\vartheta)} = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

Quindi per come abbiamo definito $g(x)$ e $w(x)$:

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{w^{(n+1)}(\vartheta)} = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

Da cui:

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}$$
$$f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 28

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(t)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t). \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. G sia primitiva di f su (a,b);
2. $f(t)$ sia Riemann-integrabile su (a,b)

Tesi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

Posti $a = t_0$ e $b = t_n$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(t_0) - G(t_n) \\ &= G(t_n) - G(t_{n-1}) + G(t_{n-1}) + ... - G(t_i) + G(t_i) + ... - G(t_1) + G(t_1) - G(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (G(t_i) - G(t_{i-1})) \end{aligned}$$

A G possiamo applicare il **teorema di Lagrange** su $[t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} \exists\, \vartheta_i \in (t_{i-1}, t_i) \mid G'(\vartheta_i) &= \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} G'(\vartheta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\vartheta_i)(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow S \end{aligned}$$

Con S output cumulativo. Si tratta quindi di una somma di Riemann.

c.v.d.

Dimostrazione numero 29

Teorema valor medio integrale

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione limitata tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $m = \min f$ su $[a,b]$;
2. $M = \max f$ su $[a,b]$.

Definizione

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

purché f sia Riemann-integrabile.

Proprietà 1

$$m \leqslant VMI \leqslant M$$

Dimostrazione

$$m \leqslant f(t) \leqslant M \qquad \forall t \in [a,b]$$

Integrale definito:

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t$$

Per la monotonia:

$$m(b-a) \leqslant \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

Proprietà 2

Se $f \in C^0([a,b])$ allora:

$$\exists\, \vartheta \in [a,b] \mid f(\vartheta) = VMI$$

Dimostrazione

Valendo Weierstrass e Darboux:

$$m \leqslant VMI \leqslant M$$

Dimostrazione numero 30

Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizioni necessarie

Si ricorda che è detta **funzione integrale** la funzione G:

$$\begin{aligned} G : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Prima Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione **limitata** e **Riemann-integrabile**:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Tesi

G è una funzione **continua**.

Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall\, x_0 \in [a, b],\, G(x_0) = \lim_{x \to x_0} G(x)$$

Caso 1 - $a < x_0 < x < b$

Consideriamo quindi il limite da destra:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^+} G(x) &= \lim_{x\to x_0^+} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to x_0^+} \left[\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \lim_{x\to x_0^+} \left[G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

Se $\lim_{x\to x_0^+} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x\to {x_0}^+} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che $\lim_{x\to x_0^+} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è *infinitesimo*:

$$m \leqslant f(t) \leqslant M \qquad \text{accumulo tra} \qquad x_0 \text{ e } x$$
$$m(x-x_0) \leqslant \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(x-x_0)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Caso 2 - $a < x < x_0 < b$

Consideriamo quindi il limite da sinistra:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^-} G(x) &= \lim_{x\to x_0^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to x_0^-} \left[\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \lim_{x\to x_0^-} \left[G(x_0) - \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

Se $\lim_{x\to x_0^-} - \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x\to x_0^-} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che $\lim_{x\to x_0^-} - \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ è *infinitesimo*:

$$m \leqslant f(t) \leqslant M \qquad \text{accumulo tra} \qquad x \text{ e } x_0$$
$$m(x_0-x) \leqslant -\int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(x_0-x)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Nel *caso 1* abbiamo dimostrato che $\lim_{x\to x_0^+} G(x) = G(x_0)$ e *caso 2* che $\lim_{x\to x_0^-} G(x) = G(x_0)$ quindi abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0^-} G(x) = G(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} G(x) \qquad \forall\, x_0 \in [a,b]$$

Che dimostra la continuità di $G(x)$, c.v.d.

Seconda Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione **continua**:

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Tesi

G è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a,b]) \quad \text{e} \quad G'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

Dimostrazione

Sia $x_0 \in (a,b)$, vogliamo dimostrare che G è derivabile in x_0.

Caso 1 - $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt && \text{VMI di } f \text{ su } [x_0, x_0+h] \\ \exists\, \vartheta \in [x_0, x_0+h] \mid \quad &= f(\vartheta) \longrightarrow f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ & && \text{con } h \to 0^+ \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo $G(x)$ è derivabile su (a,b) data l'arbitrarietà di x_0, ma anche che la derivata di $G(x)$ è $f(x)$. c.v.d.

Caso 2 - $h < 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{VMI di } f \text{ su } [x_0+h, x_0] \\ \exists\, \vartheta \in [x_0+h, x_0] \mid \quad &= f(\vartheta) \longrightarrow f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ & && \text{con } h \to 0^- \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo $G(x)$ è derivabile su (a,b) data l'arbitrarietà di x_0, ma anche che la derivata di $G(x)$ è $f(x)$, c.v.d.

Dimostrazione numero 31

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Definizioni necessarie

- Data la successione:

$$\begin{aligned} a_n : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

  Si dice **serie**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- La successione a_n è detta *argomento* della serie;
- La **successione delle somme parziali** è così definita:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

- Il *carattere* (o la *natura*) della **serie** è il *carattere* (o la *natura*) della sua **successione delle somme parziali**.

Enunciato

Ipotesi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge}$$

Tesi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \to 0$$

Dimostrazione

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora:

$$L = \lim_{N \to +\infty} S_N$$

Osservazione

Posso definire S_N ricorsivamente:

$$\begin{cases} S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \\ S_0 = a_0 \end{cases}$$

Noto che anche:

$$\lim_{N \to +\infty} S_{N+1} = L$$
$$\lim_{N \to +\infty} S_N = L$$

Essendo i due limiti finiti posso fare il limite della loro differenza:

$$\lim_{N \to +\infty} (S_{N+1} - S_N) = L - L = 0$$

Dalla definizione ricorsiva che ho dato di S_N posso riscrivere il tutto come:

$$\lim_{N \to +\infty} (S_{N+1} - S_N) = \lim_{N \to +\infty} (S_N + a_{N+1} - S_N) = \lim_{N \to +\infty} a_{N+1}$$

Da quanto detto sopra sappiamo che $\lim_{N \to +\infty} (S_{N+1} - S_N) = 0$, quindi:

$$\lim_{N \to +\infty} (S_{N+1} - S_N) = \lim_{N \to +\infty} a_{N+1} = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 32

Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi

Enunciato

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi $a_n > 0 \; \forall \, n$. Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leqslant l < 1 \end{cases}$$

Dimostrazione

Caso 1 - $0 \leqslant l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l \qquad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall \, B_\varepsilon(l) \; \exists \, M \mid \forall \, n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo ε in modo che $\varepsilon < 1 - l$ da M in poi. Dunque,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n < l + \varepsilon$$

$$a_{n+1} < a_n(l + \varepsilon) \qquad \textit{Disuguaglianza ricorsiva che vale } \textbf{\textit{definitivamente}}$$

$$a_{M+2} < a_{M+1}(l + \varepsilon)$$

$$a_{M+3} < a_{M+2}(l + \varepsilon) < a_{M+1}(l + \varepsilon)^2$$

$$a_{M+4} < a_{M+3}(l + \varepsilon) < a_{M+1}(l + \varepsilon)^3$$

$$\dots$$

$$a_{M+n+1} < a_{M+1}(l + \varepsilon)^n$$

Ho **maggiorato** definitivamente la serie di partenza con una serie

$$\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_{M+1}(l + \varepsilon)^n$$

Applico il **criterio del confronto** con la geometrica con ragione

$$-1 < q = l + \varepsilon < 1$$

che *converge*, quindi anche la serie di partenza $\sum a_n$ **converge**, c.v.d.

Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria b_n come

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò si può dedurre che

$$\forall n \quad a_{n+1} > a_n$$

Da questo possiamo stabilire che la successione b_n è monotona strettamente crescente. Ma, poiché la successione b_n è stata definita in funzione della successione a_n, significa che anche questa ultima è monotona strettamente crescente. In tal caso, significa che la serie ad essa associata $\sum a_n$ diverge a $+\infty$, c.v.d.

Dimostrazione numero 33

Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi

Enunciato

Ipotesi

Siano

$$\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$$

tali che:

1. $\exists\, M_1 \mid \forall\, n \geqslant M_1\,,\ a_n > 0 \wedge b_n > 0$;
2. $\exists\, M_2 \mid \forall\, n \geqslant M_2\,,\ a_n \leqslant b_n$.

Tesi

1. Se $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$ diverge;
2. Se $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$ converge.

Dimostrazione

Parte 1 - Divergenza

Siano $A_N = \sum_{n=\dots}^{N} a_n$ e $B_N = \sum_{n=\dots}^{N} b_n$. Se $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$ diverge significa che $\lim_{N\to+\infty} A_N = +\infty$ quindi per definizione di limite:

$$\forall\, B_r(+\infty)\,\exists\, R \mid \forall\, N > R \quad A_N > R$$

Ricordiamo che:

$$a_n \leqslant b_n \qquad (\forall\, n > M_2)$$

Con le sommatorie:

$$\sum_{n=max(M_1,M_2)}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=max(M_1,M_2)}^{+\infty} b_n$$

$$A_N \leqslant B_N$$

Da cui:

$$\lim_{N\to+\infty} B_N = +\infty$$

$$B_N > R \Rightarrow \text{ Quindi } \sum b_n \text{diverge a} + \infty$$

c.v.d.

Parte 2 - Convergenza

Se $\sum_{n=...}^{+\infty} b_n$ converge significa che $\lim_{N\to+\infty} B_N = L$ ovvero per definizoone di limite:

$$\forall\, B_r(L)\, \exists\, M_3 \mid \forall\, n > M_3 \quad B_N \in B_r(L) \quad L - r \leqslant B_N \leqslant L + r$$

$A_N \leqslant B_N$ inoltre A_N, B_N sono monotone, infatti:

$$A_{N+1} = A_N + a_{N+1} \text{ e } a_{N+1} > 0 \quad \text{perciò} \quad A_{N+1} > A_N$$

A_N è strettamente crescente e limitata (dal valore di L).

$$A_N \leqslant B_N \leqslant L$$

quindi per il teorema fondamentale delle successioni monotone A_N converge, c.v.d.

Dimostrazione numero 34

Criterio della radice per la convergenza delle serie a termini positivi

Enunciato

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi $a_n > 0 \, \forall \, n$. Se

$$\sqrt[n]{a_n} \to l \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leqslant l < 1 \end{cases}$$

Dimostrazione

Caso 1 - $0 \leqslant l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l \qquad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall \, B_\varepsilon(l) \, \exists \, M \mid \forall \, n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo ε in modo che $\varepsilon < 1 - l$ da M in poi. Dunque,

$$\begin{aligned} l - \varepsilon < b_n &< l + \varepsilon \qquad (< 1) \\ \sqrt[n]{a_n} &< l + \varepsilon \qquad (< 1) \\ a_n &< (l + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

Applico il **criterio del confronto** tra $\sum a_n$ e $\sum (l+\varepsilon)^n$, dove $\sum (l+\varepsilon)^n$ è la geometrica di ragione $q = l + \varepsilon$, con $-1 < q < 1$. Essendo quest'ultima convergente, possiamo concludere che anche la serie di partenza **converge**.

Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria b_n come

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò possiamo dedurre che

$$\forall\, n \quad \sqrt[n]{a_n} = 1 + k$$

con $k > 0$.

Questo ci permette di dividere la serie di partenza in una somma di due serie distinte:

$$\sum a_n = \sum 1 + \sum k$$

Ma, poiché $\sum 1$ diverge a $+\infty$ e $\sum k > 0$, perciò sicuramente non diverge a $-\infty$, sicuramente la serie risultante dalla loro somma, ovvero la serie di partenza, diverge a $+\infty$, c.v.d.

Dimostrazione numero 35

Giustificazione della formula di Eulero con l'esponenziale complesso

Definizioni necessarie

- Si ricorda che il **Polinomio di Taylor ($T_n^f(x)$)** è così definito:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- Data la funzione:

$$\begin{aligned} f_k : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f_k(x) \end{aligned}$$

  Si dice **serie di funzioni**:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

  Un esempio di **serie di funzioni** è il **Polinomio di Taylor** esteso a $+\infty$.

- La funzione $f_k(x)$ è detta *argomento* della serie.
- La **successione delle somme parziali** è così definita:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_k(x)$$

- Il *carattere* (o la *natura*) della **serie di funzioni** è il *carattere* (o la *natura*) della sua **successione delle somme parziali**.
- Se:

$$\forall\, x^* \in [a, b] \qquad \lim_{N \to +\infty} S_N(x^*) = L(x^*)$$

  La serie di funzioni converge puntualmente in tutto $A = [a, b]$.

Enunciato

Ridefinendo le funzioni $e^x, \sin x, \cos x$ nei complessi è possibile verificare la **formula di Eulero**:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Dimostrazione

Parte 1 - e^z

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times x^k \qquad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di e^x esteso all'infinito. Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k \qquad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in $z^* \qquad \forall\, z^* \in \mathbb{C}$;
- converge assolutamente puntualmente in $z^* \qquad \forall\, z^* \in \mathbb{C}$.

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \left|\frac{1}{k!} \times z^k\right| = \sum_{k=\dots}^{+\infty} A_k$$

Applico il **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(z^*)^{k+1}\right|}{(k+1)k!} \times \frac{k!}{|(z^*)^k|} \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{z^*}{k+1} = 0\end{aligned}$$

Quindi $\sum_{k=\dots}^{+\infty} A_k$ converge puntualmente ($\forall\, z^* \in \mathbb{C}$) e la serie $\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$ converge assolutamente e semplicemente puntualmente.
Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa $f(z)$.
Definiamo così la funzione:

$$e^z \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$$

Notiamo anche che se $z = x + 0 \times i$ abbiamo:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times x^k$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di e^x esteso a $+\infty$. Abbiamo così definito la funzione esponenziale nei complessi.
Lo stesso tipo di procedimento può essere fatto per altre funzioni elementari.

Parte 2 - $\sin z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=\ldots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di $\sin x$ esteso a $+\infty$. Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=\ldots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in z^* $\qquad \forall\, z^* \in \mathbb{C}$
- converge assolutamente puntualmente in z^* $\qquad \forall\, z^* \in \mathbb{C}$

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\ldots}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \right| = \sum_{k=\ldots}^{+\infty} B_k$$

Applico il **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \frac{B_{k+1}}{B_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(-1)^{k+1} \times (z^*)^{2(k+1)+1}\right|}{[2(k+1)+1]!} \times \frac{(2k+1)!}{\left|(-1)^k \times (z^*)^{2k+1}\right|} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{(z^*)^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0
\end{aligned}$$

Quindi $\sum_{k=\ldots}^{+\infty} B_k$ converge puntualmente ($\forall\, z^* \in \mathbb{C}$) e la serie $\sum_{k=\ldots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$ converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa $f(z)$.

Definiamo così la funzione:

$$\sin z \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$$

Notiamo anche che se $z = x + 0 \times i$ abbiamo:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times x^{2k+1}$$

Che altro non è che lo sviluppo di Mac Laurin di $\sin x$ esteso a $+\infty$. Abbiamo così definito la funzione seno nei complessi.

Parte 3 - $\cos z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=\ldots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di $\cos x$ esteso a $+\infty$. Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=\ldots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \qquad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in z^* $\qquad \forall\, z^* \in \mathbb{C}$
- converge assolutamente puntualmente in z^* $\qquad \forall\, z^* \in \mathbb{C}$

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \right| = \sum_{k=\dots}^{+\infty} C_k$$

Applico **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(-1)^{k+1} \times (z^*)^{2(k+1)}\right|}{[2(k+1)]!} \times \frac{(2k)!}{|(-1)^k \times (z^*)^{2k}|} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{(z^*)^2}{(2k+2)(2k+1)} = 0
\end{aligned}$$

Quindi $\sum_{k=\dots}^{+\infty} C_k$ converge puntualmente ($\forall\, z^* \in \mathbb{C}$) e la serie $\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$ converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa $f(z)$.

Definiamo così la funzione:

$$\cos z \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$$

Notiamo anche che se $z = x + 0 \times i$ abbiamo:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times x^{2k}$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di $\cos x$ esteso a $+\infty$. Abbiamo così definito la funzione seno nei complessi.

Parte 4 - La formula di Eulero

Abbiamo ora definito le funzioni e^z, $\sin z$, $\cos z$ in $\mathbb{C}$ nel modo seguente:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$$

Prendiamo ora $z = i\vartheta$ (parte reale nulla) avremo:

$$\begin{aligned}
e^{i\vartheta} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times (i\vartheta)^k \\
&= \frac{1}{0!} \times (i\vartheta)^0 + \frac{1}{1!} \times (i\vartheta)^1 + \frac{1}{2!} \times (i\vartheta)^2 + \frac{1}{3!} \times (i\vartheta)^3 + \dots \qquad (i^2 = -1) \\
&= 1 + i\vartheta - \frac{1}{2}\vartheta^2 - \frac{1}{3!}\vartheta^3 i + \frac{1}{4!}\vartheta^4 + \frac{1}{5!}\vartheta^5 i + \dots
\end{aligned}$$

La convergenza assouluta autorizza ad usare le proprietà elementari della somma. Commuto quindi tutti i termini con la i in fondo e gli altri li porto avanti. Ottengo così:

$$e^{i\vartheta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times \vartheta^{2k} + i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \vartheta^{2k+1} \right)$$

Da cui:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$$

c.v.d.

Dimostrazioni aggiuntive

Dimostrazione aggiuntiva numero 1

Cardinalità di $\mathbb{R}^n$

Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto.

Enunciato

Ipotesi

$\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo.

Tesi

$\mathbb{R}^n$ ha la cardinalità del continuo.

Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo $[0, 1]$.

Iniettività

Dato un punto generico $P(x_P, y_P)$ definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1\,x_2\,x_3\,x_4\ldots \text{ e } y_p = 0.y_1\,y_2\,y_3\,y_4\ldots$$

L'immagine di P su $\mathbb{R}$ è Q, così definita:

$$Q = 0.x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\,x_4\,y_4\ldots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P^* \neq P \mid f(P^*) = f(P)$$

$$P^* = (0.x_1^*\,x_2^*\,x_3^*\,x_4^*\ldots, 0.y_1^*\,y_2^*\,y_3^*\,y_4^*\ldots)$$

allora

$$f(P^*) = Q = 0.x_1^*\, y_1^*\, x_2^*\, y_2^*\, x_3^*\, y_3^*\, x_4^*\, y_4^* \dots$$

Ma visto che

$$Q = 0.x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3\, x_4\, y_4 \dots$$

ne deriva che

$$P = P^*$$

il che è assurdo. Quindi f è **iniettiva**.

Suriettività

Dato

$$Q \in [0, 1] = 0.q_1\, q_2\, q_3\, q_4 \dots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists ?\, P^\circ \in [0, 1] \times [0, 1] \mid f(P^\circ) = Q$$

Sì, P° è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1\, q_3\, q_5 \dots, 0.q_2\, q_4\, q_6 \dots)$$

Da cui si ricava che f è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.