

# Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

# Indice

<b>1</b>	<b>Disuguaglianza di Bernoulli</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teorema di Fermat</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Teorema di Rolle</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Teorema di Lagrange</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Test di monotonia di <math>f</math> su un intervallo aperto</b>	<b>8</b>

## Dimostrazione numero 1

# Disuguaglianza di Bernoulli

### Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n+1$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

## Dimostrazione numero 2

# Teorema di Fermat

### Ipotesi preliminari

Supponiamo che:

- $x_0$  è un punto stazionario se  $f'(x_0) = 0$ ;
- $x_0$  è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- $x_M$  è un punto di massimo locale se  $M = f(x_M) \geq f(x) \forall x \in A$  dove  $M$  è il valore massimo locale;
- $x_m$  è un punto di minimo locale se  $m = f(x_m) \leq f(x) \forall x \in A$  dove  $m$  è il valore minimo locale.

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $x_0 \in A$ ;
2.  $f$  sia derivabile in  $A$ ;
3.  $x_0$  sia un punto di ottimo.

#### Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero  $x_0$  è un punto stazionario

## Dimostrazione

### Caso 1 - $x_0$ è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \geq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leq 0 \text{ dove } L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geq 0 \text{ dove } L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

### Caso 2 - $x_0$ è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geq 0 \text{ dove } L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leq 0 \text{ dove } L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 3

# Teorema di Rolle

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f$  è continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ ;
2.  $f(a) = f(b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti  $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$ .

#### Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di  $f(x)$  su  $A$  e essendo  $A$  un intervallo chiuso e limitato, vale il teorema di **Weierstrass**.

$$\exists M, m / f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in A$$

e almeno uno tra  $x_m$  e  $x_M$  è interno ad  $(a, b)$  dato che  $m \neq M$  ( $f$  non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists x_0 \in (a, b) / f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 4

# Teorema di Lagrange

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che  $f$  sia continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta passante  $a$  e  $b$ .

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $g(x)$  così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che  $g$  ha la regolarità di  $f$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned}g(a) &= f(a) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\&= f(a) - \left[ f(a) + 0 \right] \\&= f(a) - f(a) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(b) &= f(b) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\&= f(b) - \left[ f(a) + f(b) - f(a) \right] \\&= f(b) - f(b) = 0\end{aligned}$$

Da cui  $g(a) = g(b)$ .

Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su  $A$ :

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi  $g'(x)$ :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.



## Dimostrazione numero 5

# Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto

## Enunciato

### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f$  sia derivabile su  $(a, b)$ ;

### Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su  $A$ .

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su  $A$ .

## Dimostrazione

### Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$

Siano  $x_1, x_2 \in A / a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il teorema di **Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) > 0$  e anche  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è strettamente monotona crescente. c.v.d.

**Caso 2** -  $f'(x) < 0 \ \forall x \in A$

Siano  $x_1, x_2 \in A / a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il teorema di **Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) < 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è strettamente monotona decrescente. c.v.d.