

# Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

# Indice

<b>1</b>	<b>Disuguaglianza di Bernoulli</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teorema di Fermat</b>	<b>3</b>

## Dimostrazione numero 1

# Disuguaglianza di Bernoulli

### Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n+1$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

## Dimostrazione numero 2

# Teorema di Fermat

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $x_0 \in A$ ;
2.  $f$  è derivabile in  $A$ ;
3.  $x_0$  è un punto di ottimo.

#### Tesi

$$f'(x) = 0$$

### Dimostrazione

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1 \end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n+1$ :

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.