Analisi Matematica II

Mattia Martelli

Indice

Indice delle Definizioni e dei Teoremi

PARTE I

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

CAPITOLO I

Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

Definizione 1 (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine)**.** *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita $y(x)$, dove $x \in \mathbb{R}$, e la sua derivata prima $y'(x)$:*

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0.$$

In altre parole, ***una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione****.*

Definizione 2 (Forma normale di una EDO)**.** *Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma*

$$y'(x) = f\left(x,\, y(x)\right).$$

Definizione 3 (Integrale generale e particolare di una EDO)**.** *Data la EDO*

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0,$$

chiamiamo ***integrale generale*** *dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

Si chiama ***integrale particolare*** *dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.*

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo

  $$y'(x) = f(x),$$

  cioè EDO del primo ordine in forma normale con $f\left(x,\, \cancel{y(x)}\right)$, basta integrare:

  $$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare y conoscendo delle informazioni relative a y'. Da qui il nome *integrale generale*.

- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

CAPITOLO II

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

Definizione 4 (EDO a variabili separate)**.** *Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Cioè $f(x, y) = h(x) \times g(y)$ *è il prodotto di una funzione che dipende solo da* x *per una funzione che dipende solo da* y*.*

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 1 (Risoluzione di EDO a variabili separabili)**.** *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

1. *Se* $g(D) = 0$ *per qualche* $D \in \mathbb{R}$ *allora la funzione costante* $y(x) = D, \forall\, x$ *è soluzione.*

2. *Se* $g(y) \neq 0, \forall\, y$ *in un certo intervallo, una soluzione* $y(x)$ *è definita implicitamente dall'equazione*

   $$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

   dove

   - $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
   - H *è una primitiva di* h*;*
   - Γ *è una primitiva di* $\frac{1}{g}$*.*

   Se Γ *non è invertibile otteniamo eslicitamente*

   $$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + \mathrm{c}),$$

   con $c \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le categorie:

1. Sia $g(D) = 0$ e $y(x) = D$, $\forall\, x$. L'identità è soddisfatta:
   (a) Sinistra: $y'(x) = 0$;
   (b) Destra: $h(x)\, g(y(x)) = h(x)\, g(D) = h(x) \times 0 = 0$.
2. Prendiamo un intervallo $[x_0, x]$ in cui la funzione $g(y)$ non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

   Dati $x_0 < x$, con x_0, $x \in \mathrm{J}_1$, integriamo:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{x_0}^{x} h(r)\, \mathrm{d}r = H(x) + \mathrm{c}.$$

   Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$
$$y'(r) = \mathrm{d}k,$$

   quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$
$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

   Dunque,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)}\, \mathrm{d}k = \Gamma(y(x)) + \mathrm{c}.$$

   Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

   con $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.

$\square$

CAPITOLO III

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

Definizione 5 (EDO lineari del primo ordine)**.** *Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma*

$$c(x)\,y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x),$$

con $c, a, b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue su* J.

Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 2 (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine)**.** *Date* $a, b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x).$$

L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[B(x) + \mathrm{c}\right],$$

dove

- $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
- $A(x)$ *è una qualunque primitiva di* $a(x)$*:* $A = \int a$*;*
- $B(x)$ *è una qualunque primitiva di* $\mathrm{e}^{A(x)}\,b(x)$*:* $A = \int \mathrm{e}^{\int a}\, b$*.*

PARTE II

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

CAPITOLO IV

Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Un'equazione differenziale del secondo ordine si presenta nella forma

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t),$$

con $t \in \mathrm{I}$. Definiamo dunque una sua soluzione.

Definizione 6 (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine)**.** *Si dice **soluzione dell'equazione differenziale** nell'intervallo* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ *una funzione* $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ***derivabile due volte** per cui, sostituendo nell'equazione differenziale i valori effettivi di* $y(t)$*,* $y'(t)$ *e* $y''(t)$*, si ottiene che*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t) \quad \forall\, t \in \mathrm{I},$$

cioè un'identità su I.

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha soluzioni infinite. Queste vengono racchiuse nella loro totalità in dipendenza da due parametri all'interno dell'integrale generale. Se a questo aggiungiamo una coppia di condizioni iniziali otteniamo una soluzione specifica. Il sistema formato dall'integrale generale e le condizioni iniziali è detto **problema di Cauchy** ed il teorema che garantisce l'unicità della soluzione è detto **teorema di Cauchy**.

Teorema 3 (Teorema di Cauchy)**.** *Data l'equazione differenziale*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t),$$

con $t \in \mathrm{I}$*,* a*,* b*,* c *e* d *funzioni continue in* I *e* $a \neq 0$*, allora,* $\forall\, t_0 \in \mathrm{I}$ *e* $\forall\, (y_0,\, v_0) \in \mathbb{R}^2$*, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

*ha **una ed una sola** soluzione definita su **tutto l'intervallo*** I.

Introduciamo dunque un importante teorema che sfrutta la linearità delle equazioni: il principio di sovrapposizione.

Teorema 4 (Principio di sovrapposizione)**.** *Se* y_1 *è soluzione di* $a\, y'' + b\, y' + c\, y = f_1$ *ed* y_2 *è soluzione di* $a\, y'' + b\, y' + c\, y = f_2$*, allora la funzione*

$$y(t) = \mathrm{C}_1\, y_1(t) + \mathrm{C}_2\, y_2(t)$$

è soluzione di

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = \mathrm{C}_1\, f_1 + \mathrm{C}_2\, f_2.$$

Prendiamo ora un'equazione differenziale omogenea, ovvero con $f = 0$. Possiamo a questo punto notare che l'insieme S delle soluzioni forma uno **spazio vettoriale** di dimensione due. Da questo ricaviamo il teorema di struttura.

Teorema 5 (Teorema di struttura)**.** *L'integrale generale di*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = 0,$$

con a, b e c continue su I *e $a(t) \neq 0$, è dato da tutte le combinazioni lineari*

$$y(t) = \mathrm{C}_1\, y_1(t) + \mathrm{C}_2\, y_2(t) \quad \forall\, \mathrm{C}_1,\, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1 ed y_2 sono due ***soluzioni linearmente indipendenti*** *dell'equazione stessa.*

Osserviamo adesso un'equazione con $f \neq 0$. Questa è detta completa o **non omogenea**. Se poniamo $f = 0$, otteniamo dunque l'equazione **omogenea associata**. Definendo y_P come una particolare soluzione dell'equazione completa e y_0 come una particolare soluzione dell'equazione omogenea associata, notiamo che queste soddisfano il principio di sovrapposizione. Con queste premesse possiamo dunque estendere il teorema di struttura alle equazioni non omogenee.

Teorema 6 (Teorema di struttura per equazioni complete)**.** *L'integrale generale di*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t),$$

con a, b, c e f continue su I *e $a(t) \neq 0$, è dato da* ***tutte e sole*** *le funzioni*

$$y(t) = \mathrm{C}_1\, y_1(t) + \mathrm{C}_2\, y_2(t) + y_P(t) \quad \forall\, \mathrm{C}_1,\, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1 ed y_2 sono due ***soluzioni linearmente indipendenti*** *dell'equazione omogenea associata*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = 0$$

e y_P è una ***soluzione particolare*** *dell'equazione completa*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t).$$