Dimostrazione numero 1

Criterio della radice per la convergenza delle serie a termini positivi

Enunciato

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi $a_n > 0 \; \forall n$. Se

$$\sqrt[n]{a_n} \to l \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leqslant l < 1 \end{cases}$$

Dimostrazione

Caso 1 - $0 \leqslant l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l \qquad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall \, B_\varepsilon(l) \; \exists \, M \mid \forall \, n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo ε in modo che $\varepsilon < 1 - l$ da M in poi. Dunque,

$$\begin{aligned} l - \varepsilon < b_n &< l + \varepsilon \qquad (< 1) \\ \sqrt[n]{a_n} &< l + \varepsilon \qquad (< 1) \\ a_n &< (l + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

Applico il **criterio del confronto** tra $\sum a_n$ e $\sum (l + \varepsilon)^n$, dove $\sum (l + \varepsilon)^n$ è la geometrica di ragione $q = l + \varepsilon$, con $-1 < q < 1$. Essendo quest'ultima convergente, possiamo concludere che anche la serie di partenza **converge**.

Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria b_n come

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò possiamo dedurre che

$$\forall\, n \quad \sqrt[n]{a_n} = 1 + k$$

con $k > 0$.

Questo ci permette di dividere la serie di partenza in una somma di due serie distinte:

$$\sum a_n = \sum 1 + \sum k$$

Ma, poiché $\sum 1$ diverge a $+\infty$ e $\sum k > 0$, perciò sicuramente non diverge a $-\infty$, sicuramente la serie risultante dalla loro somma, ovvero la serie di partenza, diverge a $+\infty$, c.v.d.