

# Analisi Matematica II

Mattia Martelli

---

## Indice

---

I	Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine	3
II	Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili	4
III	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	6

---

## Indice delle Definizioni e dei Teoremi

---

1	Definizione (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine) . . . . .	3
2	Definizione (Forma normale di una EDO) . . . . .	3
3	Definizione (Integrale generale e particolare di una EDO) . . . . .	3
4	Definizione (EDO a variabili separate) . . . . .	4
1	Teorema (Risoluzione di EDO a variabili separabili) . . . . .	4
5	Definizione (EDO lineari del primo ordine) . . . . .	6
2	Teorema (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine) . . . . .	6

---

## Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

---

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

**Definizione 1** (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine). *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita  $y(x)$ , dove  $x \in \mathbb{R}$ , e la sua derivata prima  $y'(x)$ :*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

*In altre parole, una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione.*

**Definizione 2** (Forma normale di una EDO). *Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma*

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

**Definizione 3** (Integrale generale e particolare di una EDO). *Data la EDO*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

*chiamiamo **integrale generale** dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

*Si chiama **integrale particolare** dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.*

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo

$$y'(x) = f(x),$$

cioè EDO del primo ordine in forma normale con  $f(x, y(x)) = f(x)$ , basta integrare:

$$y(x) = \int f(x) dx.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare  $y$  conoscendo delle informazioni relative a  $y'$ . Da qui il nome *integrale generale*.
- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

## CAPITOLO II

---

### Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

---

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

**Definizione 4** (EDO a variabili separate). *Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con  $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Cioè  $f(x, y) = h(x) \times g(y)$  è il prodotto di una funzione che dipende solo da  $x$  per una funzione che dipende solo da  $y$ .

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

**Teorema 1** (Risoluzione di EDO a variabili separabili). *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con  $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

1. Se  $g(D) = 0$  per qualche  $D \in \mathbb{R}$  allora la funzione costante  $y(x) = D, \forall x$  è soluzione.
2. Se  $g(y) \neq 0, \forall y$  in un certo intervallo, una soluzione  $y(x)$  è definita implicitamente dall'equazione

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$ ;
- $H$  è una primitiva di  $h$ ;
- $\Gamma$  è una primitiva di  $\frac{1}{g}$ .

Se  $\Gamma$  non è invertibile otteniamo eslicitamente

$$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + c),$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambe le categorie:

1. Sia  $g(D) = 0$  e  $y(x) = D, \forall x$ . L'identità è soddisfatta:

(a) Sinistra:  $y'(x) = 0$ ;

(b) Destra:  $h(x)g(y(x)) = h(x)g(D) = h(x) \times 0 = 0$ .

2. Prendiamo un intervallo  $[x_0, x]$  in cui la funzione  $g(y)$  non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Dati  $x_0 < x$ , con  $x_0, x \in J_1$ , integriamo:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{x_0}^x h(r) dr = H(x) + c.$$

Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$

$$y'(r) = dk,$$

quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$

$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

Dunque,

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)} dk = \Gamma(y(x)) + c.$$

Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

□

## CAPITOLO III

---

### Equazioni differenziali lineari del primo ordine

---

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

**Definizione 5** (EDO lineari del primo ordine). *Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma*

$$c(x) y'(x) + a(x) y(x) = b(x),$$

con  $c, a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue su  $J$ .

*Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè*

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

**Teorema 2** (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine). *Date  $a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

*L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula*

$$y(x) = e^{-A(x)} [B(x) + c],$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$ ;
- $A(x)$  è una qualunque primitiva di  $a(x)$ :  $A = \int a$ ;
- $B(x)$  è una qualunque primitiva di  $e^{A(x)} b(x)$ :  $A = \int e^{\int a} b$ .