

Dimostrazione numero 1

Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrato

Definizioni necessarie

Si ricorda che è detta **funzione integrale** la funzione G :

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad G : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Prima Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione **limitata e Riemann-integrabile**:

$$f : A = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto y = f(t)$$

Tesi

G è una funzione **continua**.

Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall x_0 \in [a, b] \quad G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$$

Caso 1 - $a < x_0 < x < b$

Consideriamo quindi il limite da destra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_a^x f(t) dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$ fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$ è *infinitesimo*:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \text{accumulo tra} \quad x_0 \text{ ed } x$$

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Caso 2 - $a < x < x_0 < b$

Consideriamo quindi il limite da sinistra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_a^x f(t) dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[\int_a^{x_0} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[G(x_0) - \int_x^{x_0} f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$ fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$ è *infinitesimo*:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \text{accumulo tra} \quad x \text{ ed } x_0$$

$$m(x_0 - x) \leq \int_x^{x_0} f(t) dt \leq M(x_0 - x)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Nel *Caso 1* abbiamo dimostrato che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$ e *Caso 2* che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$ quindi abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) \quad \forall x_0 \in [a, b]$$

Che dimostra la continuità di $G(x)$. c.v.d.

Seconda Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione **continua**:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Tesi

G è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a, b]) \quad e \quad G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione

Sia $x_0 \in (a, b)$, vogliamo dimostrare che G è derivabile in x_0

Caso 1 - $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt && \text{VMI dif su } [x_0, x_0 + h] \\ \exists \theta \in (x_0, x_0 + h) \mid &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo $G(x)$ è derivabile su (a, b) data l'arbitrarietà di x_0 , ma anche che la derivata di $G(x)$ è $f(x)$. c.v.d.

Caso 2 - $h < 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{-h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt && \text{VMI dif su } [x_0 + h, x_0] \\ \exists \theta \in (x_0 + h, x_0) \mid &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0^- \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo $G(x)$ è derivabile su (a, b) data l'arbitrarietà di x_0 , ma anche che la derivata di $G(x)$ è $f(x)$. c.v.d.