Dimostrazione numero 1

Test di monotonia di f su un intervallo aperto

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f sia derivabile su (a,b);

Tesi

$$f'(x) > 0 \; \forall \, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su A.

$$f'(x) < 0 \; \forall \, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su A.

Dimostrazione

Caso 1 - $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \,/\, a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists \, x_0 \in (x_1, x_2) \,/\, f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) > 0$ e anche $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall \, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è strettamente monotona crescente. c.v.d.

Caso 2 - $f'(x) < 0\ \forall\, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A\,/\,a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)\,/\,f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è strettamente monotona decrescente. c.v.d.