

# Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Virginia Longo, Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

# Indice

|  |               |
|--|---------------|
| <b>I</b>   | <b>3</b>      |
| 1 Progressione geometrica  | 4             |
| 2 Formule di De Morgan   | 5             |
| 3 Disuguaglianza di Bernoulli  | 6             |
| 4 Binomio di Newton  | 7             |
| 5 Cardinalità dell'insieme delle parti                                     | 8             |
| 6 Estrazione di radice complessa   | 9             |
| 7 Irrazionalità di $\sqrt{2}$  | 10            |
| <br><b>II</b>  | <br><b>12</b> |
| 8 Teorema di Fermat  | 13            |
| 9 Teorema di Rolle   | 15            |
| 10 Teorema di Lagrange   | 16            |
| 11 Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto                        | 18            |
| 12 Teorema di Cauchy   | 20            |
| 13 Teorema di de l'Hôpital   | 22            |
| 14 Teorema del resto secondo Peano   | 23            |
| 15 Teorema del resto secondo Lagrange                                      | 26            |
| 16 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale                        | 29            |
| 17 Teorema valor medio integrale   | 31            |
| 18 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale                      | 33            |
| 19 Condizione necessaria per la convergenza di una serie                   | 36            |
| 20 Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi | 38            |

|    |   |    |
|----|---|----|
| 21 | Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi | 40 |
| 22 | Criterio della radice per la convergenza delle serie a termini positivi   | 42 |
| 23 | Giustificazione della formula di Eulero con l'esponenziale complesso      | 44 |
|    | Dimostrazioni aggiuntive  | 50 |
| A1 | Cardinalità di $\mathbb{R}^n$   | 50 |

# Parte I

## Dimostrazione numero 1

# Progressione geometrica

### Enunciato

$$F(n) : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 1$ :

$$\sum_{k=0}^1 q^k = q^0 + q^1 = 1 + q$$

Allo stesso modo

$$\frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 1 + q$$

Che corrisponde al risultato della sommatoria

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+1+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Abbiamo quindi dimostrato la progressione geometrica.

## Dimostrazione numero 2

# Formule di De Morgan

### Prima formula

La prima formula è

$$(A \cup B)^{\complement} \equiv A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

La dimostreremo in entrambe le direzioni:

- se  $x \in (A \cup B)^{\complement}$ , allora  $x \notin A \cup B$ , quindi  $x \notin A \wedge x \notin B$ , perciò  $x \in A^{\complement} \wedge x \in B^{\complement}$ , dunque  $x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$ ;
- se  $x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$ , allora  $x \in A^{\complement} \wedge x \in B^{\complement}$ , quindi  $x \notin A \wedge x \notin B$ , perciò  $x \notin A \cup B$ , dunque  $x \in (A \cup B)^{\complement}$ .

Abbiamo quindi dimostrato la prima formula.

### Seconda formula

La seconda formula è

$$(A \cap B)^{\complement} \equiv A^{\complement} \cup B^{\complement}$$

Anche questa la dimostreremo in entrambe le direzioni:

- se  $x \in (A \cap B)^{\complement}$ , allora  $x \notin A \cap B$ , quindi  $x \notin A \vee x \notin B$ , perciò  $x \in A^{\complement} \vee x \in B^{\complement}$ , dunque  $x \in A^{\complement} \cup B^{\complement}$ ;
- se  $x \in A^{\complement} \cup B^{\complement}$ , allora  $x \in A^{\complement} \vee x \in B^{\complement}$ , quindi  $x \notin A \vee x \notin B$ , perciò  $x \notin A \cap B$ , dunque  $x \in (A \cap B)^{\complement}$ .

Abbiamo quindi dimostrato anche la seconda formula.

## Dimostrazione numero 3

# Disuguaglianza di Bernoulli

### Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n+1$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

## Dimostrazione numero 4

# Binomio di Newton

### Enunciato

Il binomio di Newton è

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} \\ 1 &= \binom{0}{0} a^0 b^0 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato il binomio di Newton.



## Dimostrazione numero 5

# Cardinalità dell'insieme delle parti

### Enunciato

Dato un insieme  $\overline{X}$ , l'insieme delle parti  $\mathcal{P}(\overline{X})$  ha cardinalità pari a  $2^n$ , dove  $n$  è il numero di elementi dell'insieme.

### Dimostrazione

Prendiamo un generico insieme  $\overline{X}$ . Questo ha sicuramente come sottoinsiemi  $\emptyset$  e se stesso.

Chiediamoci ora: quanti sottoinsiemi di un elemento possiede?  $C_{n,1} = \binom{n}{1}$

Quanti sottoinsiemi di due elementi possiede?  $C_{n,2} = \binom{n}{2}$

...

Quanti sottoinsiemi di  $n - 1$  elementi possiede?  $C_{n,n-1} = \binom{n}{n-1}$

A questo punto possiamo dire che

$$|\mathcal{P}(\overline{X})| = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1$$

che corrisponde a

$$|\mathcal{P}(\overline{X})| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

secondo la regola del binomio di Newton. c.v.d.

## Dimostrazione numero 6

# Estrazione di radice complessa

Dati due numeri,  $z, z^* \in \mathbb{C}$ , definiti come  $\sqrt[n]{z^*} = z$  vogliamo estrarre la radice di  $z^*$ , quindi calcolare  $z^* = z^n$ .

Partiamo definendo i numeri:

$$\begin{aligned}z &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ z^* &= \rho^*(\cos \vartheta^* + i \sin \vartheta^*)\end{aligned}$$

Dall'uguaglianza  $z^* = z^n$  possiamo quindi ricavare

$$\rho^*(\cos \vartheta^* + i \sin \vartheta^*) = \rho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

Questa uguaglianza è valida a meno di multipli di  $2\pi$ .

Possiamo quindi ricavare il sistema

$$\begin{cases} \rho^* = \rho^n \\ \vartheta_k = k \times 2\pi = n\vartheta \end{cases} \quad \text{da cui si ricava} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho^*} \\ \vartheta = \frac{\vartheta^*}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

## Dimostrazione numero 7

# Irrazionalità di $\sqrt{2}$

### Enunciato

$\sqrt{2}$  è un numero irrazionale. È pertanto impossibile scriverlo come frazione.

### Dimostrazione

Dimostriamo l'enunciato per assurdo. Partiamo quindi prendendo due numeri coprimi  $p, q \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \sqrt{2} \\ p &= \sqrt{2}q \\ p^2 &= 2q^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi tre casi:

$p, q$  **dispari**:  $p$  sarà uguale a

$$p = 2^0 \times \dots = p^2$$

$q$  sarà uguale a

$$\begin{aligned}q &= 2^0 \times \dots = q^2 \\ 2q &= 2^1 \times \dots\end{aligned}$$

Perciò,  $p^2 \neq 2q^2$ .

$p$  **dispari**,  $q$  **pari**:  $p$  sarà uguale a

$$p = 2^0 \times \dots = p^2$$

$q$  sarà uguale a

$$\begin{aligned}q &= 2^k \times \dots \\ q^2 &= 2^{2k} \times \dots \\ 2q &= 2^{2k+1} \times \dots\end{aligned}$$

Perciò,  $p^2 \neq 2q^2$ .

$p$  **pari**,  $q$  **dispari**:  $p$  sarà uguale a

$$\begin{aligned}p &= 2^k \times \dots \\ p^2 &= 2^{2k} \times \dots\end{aligned}$$

$q$  sarà uguale a

$$q = 2^0 \times \dots = q^2$$
$$2q = 2^1 \times \dots$$

Perciò,  $p^2 \neq 2q^2$ .

c.v.d.

## Parte II

## Dimostrazione numero 8

# Teorema di Fermat

### Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- $x_0$  è un punto stazionario se  $f'(x_0) = 0$ ;
- $x_0$  è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- $x_M$  è un punto di massimo locale se  $M = f(x_M) \geq f(x) \forall x \in A$  dove  $M$  è il valore massimo locale;
- $x_m$  è un punto di minimo locale se  $m = f(x_m) \leq f(x) \forall x \in A$  dove  $m$  è il valore minimo locale.

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $x_0 \in A$ ;
2.  $f$  sia derivabile in  $A$ ;
3.  $x_0$  sia un punto di ottimo.

#### Tesi

$$f'(x_0) = 0$$

ovvero  $x_0$  è un punto stazionario

## Dimostrazione

### Caso 1 - $x_0$ è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leq 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geq 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

### Caso 2 - $x_0$ è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geq 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leq 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 9

# Teorema di Rolle

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f$  è continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ ;
2.  $f(a) = f(b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti  $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$ .

#### Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di  $f(x)$  su  $A$  e essendo  $A$  un intervallo chiuso e limitato, vale il **teorema di Weierstrass**.

$$\exists M, m \mid f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in A$$

e almeno uno tra  $x_m$  e  $x_M$  è interno ad  $(a, b)$ , dato che  $m \neq M$  ( $f$  non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

c.v.d.



## Dimostrazione numero 10

# Teorema di Lagrange

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che  $f$  sia continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta passante per  $a$  e  $b$ .

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $g(x)$  così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che  $g$  ha la regolarità di  $f$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\ &= f(a) - [f(a) + 0] \\ &= f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\ &= f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] \\ &= f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$$

Da cui  $g(a) = g(b)$ .

Posso quindi applicare il **teorema di Rolle** su  $A$ :

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi  $g'(x)$ :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 11

# Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che  $f$  sia derivabile su  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su  $A$ .

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su  $A$ .

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$

Siano  $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il **teorema di Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \mid f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) > 0$  e anche  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è monotona strettamente crescente, c.v.d.

**Caso 2 -  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in A$**

Siano  $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il **teorema di Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) < 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è monotona strettamente decrescente, c.v.d.

## Dimostrazione numero 12

# Teorema di Cauchy

### Enunciato

#### Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre  $f, g$  continue in  $A$  e derivabili in  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$\exists x^* \in (a, b) \mid \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $h(x)$  così definita:

$$h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$$

Notiamo che  $h$  ha la regolarità di  $f$  e di  $g$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Verifico se su  $h$  nell'intervallo  $[a, b]$  vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)] g(a) - [g(b) - g(a)] f(a) \\ h(a) &= f(b) g(a) - f(a) g(a) - f(a) g(b) + f(a) g(a) \\ h(a) &= f(b) g(a) - f(a) g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)] g(b) - [g(b) - g(a)] f(b) \\ h(b) &= f(b) g(b) - f(a) g(b) - f(b) g(b) + f(b) g(a) \\ h(b) &= f(b) g(a) - f(a) g(b) \end{aligned}$$

$h(a) = h(b)$ , quindi posso applicare il **teorema di Rolle**, da cui si deriva che  $h$  ha un punto stazionario  $x^*$

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] g'(x) - [g(b) - g(a)] f'(x)$$

$$h'(x^*) = 0$$

E quindi infine

$$h'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)] g'(x^*) - [g(b) - g(a)] f'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)] g'(x^*) = [g(b) - g(a)] f'(x^*)$$

$$\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 13

# Teorema di de l'Hôpital

### Enunciato

#### Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1.  $f, g$  continue in  $A$  e derivabili in  $(a, b)$ ;
2.  $f, g$  infinitesime in  $x_0 \in (a, b)$ .

#### Tesi

$$\text{Se } l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ allora } l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

### Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists \theta \in (a, b) \Rightarrow \theta \in (x_0, x)$$

Aggiungo  $f(x_0)$  che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo  $(x_0, x)$ :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 14

# Teorema del resto secondo Peano

### Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f \in C^n(A)$ ;
2.  $x_0 \in A$ .

#### Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x - x_0)^n)$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

#### Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 1$ :

$$f \in C^1(A)$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \stackrel{?}{=} o((x - x_0))$$



Per la definizione di  $o$ -piccolo una funzione  $(f(x))$  è  $o$ -piccolo di un'altra  $(g(x))$  quando il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) \rightarrow 0$$

Quindi  $F(1)$  è vera.

**Ipotesi induttiva:**  $F(n - 1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\forall g \in C^{n-1}(A)$$

$$g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

**Verifica per  $F(n)$**

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di  $o$ -piccolo:

$$B_\varepsilon(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

Questa è però una forma di indeterminazione  $\left[\frac{0}{0}\right]$  per risolverla, le applico il **teorema de l'Hospital**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - [T_n^f(x)]'}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Calcolo  $[T_n^f(x)]'$  a parte:

$$\begin{aligned} [T_n^f(x)]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} 3(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} n(x - x_0)^{n-1} \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \\ &= T_{n-1}^{f'}(x) \end{aligned}$$

Infatti se  $f \in C^n(A) \Rightarrow f' \in C^{n-1}$ .

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che  $f' \in C^{n-1}$  e che  $g \in C^{n-1}$  poniamo quindi  $g = f'$ . Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 15

# Teorema del resto secondo Lagrange

### Definizioni necessarie

Si ricorda che il **polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f \in C^{n+1}(A)$ ;
2.  $x_0 \in A$ .

#### Tesi

$$\exists \theta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

### Dimostrazione

Considero due **funzioni ausiliarie**  $g(x), w(x)$  così definite:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - T_n(x) & g(x) &\in C^{n+1}(A) \\ w(x) &= (x - x_0)^{n+1} & w(x) &\in C^\infty(A) \end{aligned}$$

Calcolo  $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n+1)}(x_0)$ :

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0) - \left[ \frac{f(x_0)}{0!} 1 + \frac{f'(x_0)}{1!} (x_0 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x_0 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_0 - x_0)^n \right] = 0 \\
g'(x_0) &= f'(x_0) - \left[ \frac{f'(x_0)}{1!} 1 + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x_0 - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(x_0 - x_0)^{n-1} \right] = 0 \\
g''(x_0) &= 0 \\
&\dots \\
g^{(n)}(x_0) &= 0 \\
g^{(n+1)}(x_0) &= f^{(n+1)}(x_0) - 0 = f^{(n+1)}(x_0)
\end{aligned}$$

Calcolo  $w(x_0), w'(x_0), \dots, w^{(n+1)}(x_0)$ :

$$\begin{aligned}
w(x_0) &= (x_0 - x_0)^{n+1} = 0 \\
w'(x_0) &= (n+1)(x_0 - x_0)^n = 0 \\
w'(x_0) &= (n+1)(n)(x_0 - x_0)^{n-1} = 0 \\
&\dots \\
w^{(n)}(x_0) &= [(n+1)!](x_0 - x_0) = 0 \\
w^{(n+1)}(x_0) &= [(n+1)!]1 = (n+1)!
\end{aligned}$$

Toniamo ora su ciò che dobbiamo dimostrare:

$$\exists \theta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Notiamo che  $\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)}$  quindi utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{w(x)} &= \frac{g(x) - g(x_0)}{w(x) - w(x_0)} \\
\exists x_1 \in (x_0, x) &= \frac{g'(x_1)}{w'(x_1)} = \frac{g'(x_1) - g'(x_0)}{w'(x_1) - w'(x_0)} \\
\exists x_2 \in (x_0, x_1) &= \frac{g''(x_2)}{w''(x_2)} = \frac{g''(x_2) - g''(x_0)}{w''(x_2) - w''(x_0)} \\
\exists x_3 \in (x_0, x_2) &= \frac{g'''(x_3)}{w'''(x_3)} = \dots \\
\exists \theta \in (x_0, x_n) &= \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{w^{(n+1)}(\theta)} \quad \text{Iterando } n \text{ volte}
\end{aligned}$$

Notiamo anche che possiamo fare questo perché da come abbiamo dimostrato prima calcolandolo,  $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n)}(x_0)$  e  $w(x_0), w'(x_0), \dots, w^{(n)}(x_0)$  sono infinitesimi.

Quindi le derivate  $(n+1)$ -esime dal precedente calcolo di  $g(x)w(x)$  sono:

$$\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{w^{(n+1)}(\theta)} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Quindi per come abbiamo definito  $g(x)$  e  $w(x)$ :

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{w^{(n+1)}(\theta)} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} \\ f(x) - T_n^f(x) &= \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 16

# Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

## Enunciato

### Ipotesi

Sia  $f(t)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t). \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $G$  sia primitiva di  $f$  su  $(a, b)$ ;
2.  $f(t)$  sia Riemann-integrabile su  $(a, b)$

### Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = G(b) - G(a)$$

## Dimostrazione

Posti  $a = t_0$  e  $b = t_n$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(t_0) - G(t_n) \\ &= G(t_n) - G(t_{n-1}) + G(t_{n-1}) + \dots - G(t_i) + G(t_i) + \dots - G(t_1) + G(t_1) - G(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (G(t_i) - G(t_{i-1})) \end{aligned}$$

A  $G$  possiamo applicare il **teorema di Lagrange** su  $[t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} \exists \theta_i \in (t_{i-1}, t_i) \mid G'(\theta_i) &= \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^n G'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow S \end{aligned}$$

Con  $S$  output cumulativo. Si tratta quindi di una somma di Riemann.  
c.v.d.

## Dimostrazione numero 17

# Teorema valor medio integrale

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione limitata tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $m = \min f$  su  $[a, b]$ ;
2.  $M = \max f$  su  $[a, b]$ .

#### Definizione

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$

purché  $f$  sia Riemann-integrabile.

### Proprietà 1

$$m \leq VMI \leq M$$

#### Dimostrazione

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b]$$

Integrale definito

$$\int_a^b m \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b M \, dt$$

Per la monotonia:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt \leq M \end{aligned}$$



## Proprietà 2

Se  $f \in C^0([a, b])$  allora:

$$\exists \theta \in [a, b] \mid f(\theta) = VMI$$

## Dimostrazione

Valendo Weierstrass e Darboux:

$$m \leq VMI \leq M$$

## Dimostrazione numero 18

# Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

## Definizioni necessarie

Si ricorda che è detta **funzione integrale** la funzione  $G$ :

$$\begin{aligned} G : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

## Prima Forma

### Enunciato

#### Ipotesi

Data una funzione **limitata** e **Riemann-integrabile**:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

#### Tesi

$G$  è una funzione **continua**.

## Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall x_0 \in [a, b] \quad G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$$

**Caso 1** -  $a < x_0 < x < b$

Consideriamo quindi il limite da destra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_a^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[ \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[ G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$  fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$  è *infinitesimo*:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \text{accumulo tra} \quad x_0 \text{ ed } x$$

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

**Caso 2** -  $a < x < x_0 < b$

Consideriamo quindi il limite da sinistra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_a^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[ \int_a^{x_0} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[ G(x_0) - \int_x^{x_0} f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$  fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$  è *infinitesimo*:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \text{accumulo tra} \quad x \text{ ed } x_0$$

$$m(x_0 - x) \leq - \int_x^{x_0} f(t) dt \leq M(x_0 - x)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Nel *caso 1* abbiamo dimostrato che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$  e *caso 2* che  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$  quindi abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) \quad \forall x_0 \in [a, b]$$

Che dimostra la continuità di  $G(x)$ , c.v.d.

## Seconda Forma

### Enunciato

#### Ipotesi

Data una funzione **continua**:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

#### Tesi

$G$  è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a, b]) \quad \text{e} \quad G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

### Dimostrazione

Sia  $x_0 \in (a, b)$ , vogliamo dimostrare che  $G$  è derivabile in  $x_0$ .

#### Caso 1 - $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt && \text{VMI di } f \text{ su } [x_0, x_0 + h] \\ \exists \theta \in (x_0, x_0 + h) \mid &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo  $G(x)$  è derivabile su  $(a, b)$  data l'arbitrarietà di  $x_0$ , ma anche che la derivata di  $G(x)$  è  $f(x)$ . c.v.d.

#### Caso 2 - $h < 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0+h} f(t) dt + \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{-h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt && \text{VMI di } f \text{ su } [x_0 + h, x_0] \\ \exists \theta \in (x_0 + h, x_0) \mid &= f(\theta) \longrightarrow f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0^- \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo  $G(x)$  è derivabile su  $(a, b)$  data l'arbitrarietà di  $x_0$ , ma anche che la derivata di  $G(x)$  è  $f(x)$ , c.v.d.

## Dimostrazione numero 19

# Condizione necessaria per la convergenza di una serie

## Definizioni necessarie

- Data la successione:

$$\begin{aligned}a_n &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n\end{aligned}$$

Si dice **serie**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- La successione  $a_n$  è detta *argomento* della serie;
- La **successione delle somme parziali** è così definita:

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

- Il *carattere* (o la *natura*) della **serie** è il *carattere* (o la *natura*) della sua **successione delle somme parziali**.

## Enunciato

### Ipotesi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge}$$

### Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \rightarrow 0$$

## Dimostrazione

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge allora:

$$L = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

## Osservazione

Posso definire  $S_N$  ricorsivamente:

$$\begin{cases} S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \\ S_0 = a_0 \end{cases}$$

Noto che anche:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{N+1} &= L \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N &= L \end{aligned}$$

Essendo i due limiti finiti posso fare il limite della loro differenza:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = L - L = 0$$

Dalla definizione ricorsiva che ho dato di  $S_N$  posso riscrivere il tutto come:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N + a_{N+1} - S_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1}$$

Da quanto detto sopra sappiamo che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = 0$ , quindi:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1} = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 20

# Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi

### Enunciato

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi  $a_n > 0 \forall n$ . Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $0 \leq l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \quad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall B_\varepsilon(l) \exists M \mid \forall n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo  $\varepsilon$  in modo che  $\varepsilon < 1 - l$  da  $M$  in poi. Dunque,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n < l + \varepsilon$$

$$a_{n+1} < a_n(l + \varepsilon)$$

*Disuguaglianza ricorsiva che vale **definitivamente***

$$a_{M+2} < a_{M+1}(l + \varepsilon)$$

$$a_{M+3} < a_{M+2}(l + \varepsilon) < a_{M+1}(l + \varepsilon)^2$$

$$a_{M+4} < a_{M+3}(l + \varepsilon) < a_{M+1}(l + \varepsilon)^3$$

...

$$a_{M+n+1} < a_{M+1}(l + \varepsilon)^n$$

Ho **maggiorato** definitivamente la serie di partenza con una serie

$$\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_{M+1}(l + \varepsilon)^n$$

Applico il **criterio del confronto** con la geometrica con ragione

$$-1 < q = l + \varepsilon < 1$$

che *converge*, quindi anche la serie di partenza  $\sum a_n$  **converge**, c.v.d.

## Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria  $b_n$  come

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò si può dedurre che

$$\forall n \quad a_{n+1} > a_n$$

Da questo possiamo stabilire che la successione  $b_n$  è monotona strettamente crescente. Ma, poiché la successione  $b_n$  è stata definita in funzione della successione  $a_n$ , significa che anche questa ultima è monotona strettamente crescente. In tal caso, significa che la serie ad essa associata  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty$ , c.v.d.



## Dimostrazione numero 21

# Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi

## Enunciato

### Ipotesi

Siano

$$\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$$

tali che:

1.  $\exists M_1 \mid \forall n \geq M_1, a_n > 0 \wedge b_n > 0$ ;
2.  $\exists M_2 \mid \forall n \geq M_2, a_n \leq b_n$ .

### Tesi

1. Se  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$  diverge, allora anche  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$  diverge;
2. Se  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$  converge, allora anche  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$  converge.

## Dimostrazione

### Parte 1 - Divergenza

Siano  $A_N = \sum_{n=\dots}^N a_n$  e  $B_N = \sum_{n=\dots}^N b_n$ . Se  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$  diverge significa che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N = +\infty$  quindi per definizione di limite:

$$\forall B_r(+\infty) \exists R \mid \forall N > R \quad A_N > R$$

Ricordiamo che:

$$a_n \leq b_n \quad (\forall n > M_2)$$

Con le sommatorie:

$$\begin{aligned} \sum_{n=\max(M_1, M_2)}^{+\infty} a_n &\leq \sum_{n=\max(M_1, M_2)}^{+\infty} b_n \\ A_N &\leq B_N \end{aligned}$$

Da cui:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} B_N = +\infty$$

$$B_N > R \Rightarrow \text{Quindi } \sum b_n \text{ diverge a } +\infty$$

c.v.d.

## Parte 2 - Convergenza

Se  $\sum_{n=...}^{+\infty} b_n$  converge significa che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} B_N = L$  ovvero per definizione di limite:

$$\forall B_r(L) \exists M_3 \mid \forall n > M_3 \quad B_N \in B_r(L) \quad L - r \leq B_N \leq L + r$$

$A_N \leq B_N$  inoltre  $A_N, B_N$  sono monotone, infatti:

$$A_{N+1} = A_N + a_{N+1} \text{ e } a_{N+1} > 0 \quad \text{perciò} \quad A_{N+1} > A_N$$

$A_N$  è strettamente crescente e limitata (dal valore di  $L$ ).

$$A_N \leq B_N \leq L$$

quindi per il teorema fondamentale delle successioni monotone  $A_N$  converge, c.v.d.

## Dimostrazione numero 22

# Criterio della radice per la convergenza delle serie a termini positivi

### Enunciato

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi  $a_n > 0 \forall n$ . Se

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $0 \leq l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \quad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall B_\varepsilon(l) \exists M \mid \forall n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo  $\varepsilon$  in modo che  $\varepsilon < 1 - l$  da  $M$  in poi. Dunque,

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \quad (< 1)$$

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \quad (< 1)$$

$$a_n < (l + \varepsilon)^n$$

Applico il **criterio del confronto** tra  $\sum a_n$  e  $\sum (l + \varepsilon)^n$ , dove  $\sum (l + \varepsilon)^n$  è la geometrica di ragione  $q = l + \varepsilon$ , con  $-1 < q < 1$ . Essendo quest'ultima convergente, possiamo concludere che anche la serie di partenza **converge**.

#### Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria  $b_n$  come

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò possiamo dedurre che

$$\forall n \quad \sqrt[n]{a_n} = 1 + k$$

con  $k > 0$ .

Questo ci permette di dividere la serie di partenza in una somma di due serie distinte:

$$\sum a_n = \sum 1 + \sum k$$

Ma, poiché  $\sum 1$  diverge a  $+\infty$  e  $\sum k > 0$ , perciò sicuramente non diverge a  $-\infty$ , sicuramente la serie risultante dalla loro somma, ovvero la serie di partenza, diverge a  $+\infty$ , c.v.d.

## Dimostrazione numero 23

# Giustificazione della formula di Eulero con l'esponenziale complesso

### Definizioni necessarie

- Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- Data la funzione:

$$\begin{aligned} f_k : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f_k(x) \end{aligned}$$

Si dice **serie di funzioni**:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Un esempio di **serie di funzioni** è il **Polinomio di Taylor** esteso a  $+\infty$ .

- La funzione  $f_k(x)$  è detta *argomento* della serie.
- La **successione delle somme parziali** è così definita:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

- Il *carattere* (o la *natura*) della **serie di funzioni** è il *carattere* (o la *natura*) della sua **successione delle somme parziali**.
- Se:

$$\forall x^* \in [a, b] \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x^*) = L(x^*)$$

La serie di funzioni converge puntualmente in tutto  $A = [a, b]$ .

## Enunciato

Ridefinendo le funzioni  $e^x, \sin x, \cos x$  nei complessi è possibile verificare la **formula di Eulero**:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

## Dimostrazione

### Parte 1 - $e^z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times x^k \quad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di  $e^x$  esteso all'infinito. Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k \quad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ;
- converge assolutamente puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$ .

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \left| \frac{1}{k!} \times z^k \right| = \sum_{k=\dots}^{+\infty} A_k$$

Applico il **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(z^*)^{k+1}|}{(k+1)k!} \times \frac{k!}{|(z^*)^k|} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{z^*}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} A_k$  converge puntualmente ( $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ) e la serie  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$  converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa  $f(z)$ .

Definiamo così la funzione:

$$e^z \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$$

Notiamo anche che se  $z = x + 0 \times i$  abbiamo:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times x^k$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di  $e^x$  esteso a  $+\infty$ . Abbiamo così definito la funzione esponenziale nei complessi.

Lo stesso tipo di procedimento può essere fatto per altre funzioni elementari.

## Parte 2 - $\sin z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times x^{2k+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di  $\sin x$  esteso a  $+\infty$ . Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \quad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$
- converge assolutamente puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k$$

Applico il **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{B_{k+1}}{B_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(-1)^{k+1} \times (z^*)^{2(k+1)+1}|}{[2(k+1)+1]!} \times \frac{(2k+1)!}{|(-1)^k \times (z^*)^{2k+1}|} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(z^*)^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\sum_{k=0}^{+\infty} B_k$  converge puntualmente ( $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ) e la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$  converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa  $f(z)$ .

Definiamo così la funzione:

$$\sin z \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$$

Notiamo anche che se  $z = x + 0 \times i$  abbiamo:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times x^{2k+1}$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di  $\sin x$  esteso a  $+\infty$ . Abbiamo così definito la funzione seno nei complessi.

## Parte 3 - $\cos z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times x^{2k} \quad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di  $\cos x$  esteso a  $+\infty$ . Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \quad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$
- converge assolutamente puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \right| = \sum_{k=\dots}^{+\infty} C_k$$

Applico **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(-1)^{k+1} \times (z^*)^{2(k+1)}|}{[2(k+1)]!} \times \frac{(2k)!}{|(-1)^k \times (z^*)^{2k}|} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(z^*)^2}{(2k+2)(2k+1)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} C_k$  converge puntualmente ( $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ) e la serie  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$  converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa  $f(z)$ .

Definiamo così la funzione:

$$\cos z \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$$

Notiamo anche che se  $z = x + 0 \times i$  abbiamo:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times x^{2k}$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di  $\cos x$  esteso a  $+\infty$ . Abbiamo così definito la funzione seno nei complessi.

## Parte 4 - La formula di Eulero

Abbiamo ora definito le funzioni  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  in  $\mathbb{C}$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \end{aligned}$$

Prendiamo ora  $z = i\theta$  (parte reale nulla) avremo:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times (i\theta)^k \\ &= \frac{1}{0!} \times (i\theta)^0 + \frac{1}{1!} \times (i\theta)^1 + \frac{1}{2!} \times (i\theta)^2 + \frac{1}{3!} \times (i\theta)^3 + \dots \quad (i^2 = -1) \\ &= 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{3!}\theta^3 i + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}\theta^5 i + \dots \end{aligned}$$



La convergenza assoluta autorizza ad usare le proprietà elementari della somma. Commuto quindi tutti i termini con la  $i$  in fondo e gli altri li porto avanti. Ottengo così:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times \theta^{2k} + i \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \theta^{2k+1} \right)$$

Da cui:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

c.v.d.

## Dimostrazioni aggiuntive

## Dimostrazione aggiuntiva numero 1

# Cardinalità di $\mathbb{R}^n$

### Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto.

### Enunciato

#### Ipotesi

$\mathbb{R}$  ha la cardinalità del continuo.

#### Tesi

$\mathbb{R}^n$  ha la cardinalità del continuo.

### Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo  $[0, 1]$ .

#### Iniettività

Dato un punto generico  $P(x_P, y_P)$  definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \text{ e } y_p = 0.y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$$

L'immagine di  $P$  su  $\mathbb{R}$  è  $Q$ , così definita:

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P^* \neq P \mid f(P^*) = f(P)$$

$$P^* = (0.x_1^* x_2^* x_3^* x_4^* \dots, 0.y_1^* y_2^* y_3^* y_4^* \dots)$$

allora

$$f(P^*) = Q = 0.x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* x_3^* y_3^* x_4^* y_4^* \dots$$

Ma visto che

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

ne deriva che

$$P = P^*$$

il che è assurdo. Quindi  $f$  è **iniettiva**.

## Suriettività

Dato

$$Q \in [0, 1] = 0.q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists? P^\circ \in [0, 1] \times [0, 1] \mid f(P^\circ) = Q$$

Sì,  $P^\circ$  è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1 q_3 q_5 \dots, 0.q_2 q_4 q_6 \dots)$$

Da cui si ricava che  $f$  è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.