

Analisi Matematica II

Mattia Martelli

Indice

I	Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine	3
I	Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine	4
II	Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili	5
III	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	7

Indice delle Definizioni e dei Teoremi

1	Definizione (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine)	4
2	Definizione (Forma normale di una EDO)	4
3	Definizione (Integrale generale e particolare di una EDO)	4
4	Definizione (EDO a variabili separate)	5
1	Teorema (Risoluzione di EDO a variabili separabili)	5
5	Definizione (EDO lineari del primo ordine)	7
2	Teorema (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine)	7

PARTE I

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

Definizione 1 (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine). *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita $y(x)$, dove $x \in \mathbb{R}$, e la sua derivata prima $y'(x)$:*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

In altre parole, una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione.

Definizione 2 (Forma normale di una EDO). *Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma*

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Definizione 3 (Integrale generale e particolare di una EDO). *Data la EDO*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

*chiamiamo **integrale generale** dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

*Si chiama **integrale particolare** dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.*

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo

$$y'(x) = f(x),$$

cioè EDO del primo ordine in forma normale con $f(x, y(x))$, basta integrare:

$$y(x) = \int f(x) \, dx.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare y conoscendo delle informazioni relative a y' . Da qui il nome *integrale generale*.
- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

CAPITOLO II

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

Definizione 4 (EDO a variabili separate). *Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Cioè $f(x, y) = h(x) \times g(y)$ è il prodotto di una funzione che dipende solo da x per una funzione che dipende solo da y .

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 1 (Risoluzione di EDO a variabili separabili). *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

1. Se $g(D) = 0$ per qualche $D \in \mathbb{R}$ allora la funzione costante $y(x) = D$, $\forall x$ è soluzione.
2. Se $g(y) \neq 0, \forall y$ in un certo intervallo, una soluzione $y(x)$ è definita implicitamente dall'equazione

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$;
- H è una primitiva di h ;
- Γ è una primitiva di $\frac{1}{g}$.

Se Γ non è invertibile otteniamo eslicitamente

$$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + c),$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le categorie:

1. Sia $g(D) = 0$ e $y(x) = D, \forall x$. L'identità è soddisfatta:

(a) Sinistra: $y'(x) = 0$;

(b) Destra: $h(x)g(y(x)) = h(x)g(D) = h(x) \times 0 = 0$.

2. Prendiamo un intervallo $[x_0, x]$ in cui la funzione $g(y)$ non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Dati $x_0 < x$, con $x_0, x \in J_1$, integriamo:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{x_0}^x h(r) dr = H(x) + c.$$

Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$

$$y'(r) = dk,$$

quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$

$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

Dunque,

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)} dk = \Gamma(y(x)) + c.$$

Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

□

CAPITOLO III

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

Definizione 5 (EDO lineari del primo ordine). *Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma*

$$c(x) y'(x) + a(x) y(x) = b(x),$$

con $c, a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue su J .

Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 2 (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine). *Date $a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula

$$y(x) = e^{-A(x)} [B(x) + c],$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$;
- $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$: $A = \int a$;
- $B(x)$ è una qualunque primitiva di $e^{A(x)} b(x)$: $A = \int e^{\int a} b$.