

# Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Virginia Longo, Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

# Indice

<b>Parte I</b>	<b>3</b>
1 Progressione geometrica	4
2 Formule di De Morgan	5
3 Disuguaglianza di Bernoulli	6
4 Binomio di Newton	7
5 Cardinalità dell'insieme delle parti	8
6 Formule di de Moivre	9
7 Estrazione di radice complessa	11
8 Irrazionalità di $\sqrt{2}$	12
9 Proprietà di $\sim$ ed $o$	14
10 Numerabilità di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e non numerabilità di $\mathbb{R}$	16
11 Teorema fondamentale delle successioni monotone	18
12 Convergenza della successione che definisce $e$	20
13 Teorema di unicità del limite	22
14 Teorema di permanenza del segno	23
15 Teorema del confronto	24
16 Teorema di Bolzano	25
17 Teorema di Darboux	27
18 Derivate elementari con la definizione	28
19 Derivabilità implica continuità	30
<b>Parte II</b>	<b>31</b>
20 Teorema di Fermat	32

21 Teorema di Rolle	34
22 Teorema di Lagrange	35
23 Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto	37
24 Teorema di Cauchy	39
25 Teorema di de l'Hôpital	41
26 Teorema del resto secondo Peano	42
27 Teorema del resto secondo Lagrange	45
28 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale	48
29 Teorema valor medio integrale	50
30 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale	52
31 Condizione necessaria per la convergenza di una serie	55
32 Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi	57
33 Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi	59
34 Criterio della radice per la convergenza delle serie a termini positivi	61
35 Giustificazione della formula di Eulero con l'esponenziale complesso	63
 Dimostrazioni aggiuntive	 68
A1 Cardinalità di $\mathbb{R}^n$	69

# Parte I

## Dimostrazione numero 1

# Progressione geometrica

### Enunciato

$$F(n) : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 1$ :

$$\sum_{k=0}^1 q^k = q^0 + q^1 = 1 + q$$

Allo stesso modo

$$\frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 1 + q$$

Che corrisponde al risultato della sommatoria

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+1+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Abbiamo quindi dimostrato la progressione geometrica.

## Dimostrazione numero 2

# Formule di De Morgan

### Prima formula

La prima formula è

$$(A \cup B)^c \equiv A^c \cap B^c$$

La dimostreremo in entrambe le direzioni:

- se  $x \in (A \cup B)^c$ , allora  $x \notin A \cup B$ , quindi  $x \notin A \wedge x \notin B$ , perciò  $x \in A^c \wedge x \in B^c$ , dunque  $x \in A^c \cap B^c$ ;
- se  $x \in A^c \cap B^c$ , allora  $x \in A^c \wedge x \in B^c$ , quindi  $x \notin A \wedge x \notin B$ , perciò  $x \notin A \cup B$ , dunque  $x \in (A \cup B)^c$ .

Abbiamo quindi dimostrato la prima formula.

### Seconda formula

La seconda formula è

$$(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$$

Anche questa la dimostreremo in entrambe le direzioni:

- se  $x \in (A \cap B)^c$ , allora  $x \notin A \cap B$ , quindi  $x \notin A \vee x \notin B$ , perciò  $x \in A^c \vee x \in B^c$ , dunque  $x \in A^c \cup B^c$ ;
- se  $x \in A^c \cup B^c$ , allora  $x \in A^c \vee x \in B^c$ , quindi  $x \notin A \vee x \notin B$ , perciò  $x \notin A \cap B$ , dunque  $x \in (A \cap B)^c$ .

Abbiamo quindi dimostrato anche la seconda formula.

## Dimostrazione numero 3

# Disuguaglianza di Bernoulli

### Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n+1$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

## Dimostrazione numero 4

# Binomio di Newton

### Enunciato

Il binomio di Newton è

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.  
Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} \\ 1 &= \binom{0}{0} a^0 b^0 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .  
Dimostriamolo per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato il binomio di Newton.



## Dimostrazione numero 5

# Cardinalità dell'insieme delle parti

### Enunciato

Dato un insieme  $\overline{X}$ , l'insieme delle parti  $\mathcal{P}(\overline{X})$  ha cardinalità pari a  $2^n$ , dove  $n$  è il numero di elementi dell'insieme.

### Dimostrazione

Prendiamo un generico insieme  $\overline{X}$ . Questo ha sicuramente come sottoinsiemi  $\emptyset$  e se stesso.

Chiediamoci ora: quanti sottoinsiemi di un elemento possiede?  $C_{n,1} = \binom{n}{1}$

Quanti sottoinsiemi di due elementi possiede?  $C_{n,2} = \binom{n}{2}$

...

Quanti sottoinsiemi di  $n - 1$  elementi possiede?  $C_{n,n-1} = \binom{n}{n-1}$

A questo punto possiamo dire che

$$|\mathcal{P}(\overline{X})| = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1$$

che corrisponde a

$$|\mathcal{P}(\overline{X})| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

secondo la regola del binomio di Newton. c.v.d.

## Dimostrazione numero 6

# Formule di de Moivre

### Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  definiti come

$$z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

Il loro prodotto sarà uguale a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 i \sin \vartheta_2 + i \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)] \end{aligned}$$

### Quoziente di due numeri complessi

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 \cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1}{\rho_2 \cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1 \cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1}{\rho_2 \cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2} \frac{\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2}{\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1 i \sin \vartheta_2 + i \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\rho_2 \cos^2 \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 + \sin^2 \vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1 [\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)]}{\rho_2 \cos^2 \vartheta_2 + \sin^2 \vartheta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)] \end{aligned}$$

# Potenza di numero complesso

## Enunciato

$$z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

## Dimostrazione

Lo dimostreremo per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} z^2 &= z z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ &= \rho^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) \end{aligned}$$

secondo la prima formula, con  $z_1 = z_2 = z$ . Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n - 1$ .

Dimostriamolo per  $n$ :

$$\begin{aligned} z^{n-1} &= \rho^{n-1} (\cos(n-1)\vartheta + i \sin(n-1)\vartheta) \\ z^n &= z^{n-1} z = \rho^{n-1} (\cos(n-1)\vartheta + i \sin(n-1)\vartheta) \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ &= \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) \end{aligned}$$

sempre secondo la prima formula.

Abbiamo perciò dimostrato anche la terza formula. c.v.d.

## Dimostrazione numero 7

# Estrazione di radice complessa

Dati due numeri,  $z, z^* \in \mathbb{C}$ , definiti come  $\sqrt[n]{z^*} = z$  vogliamo estrarre la radice di  $z^*$ , quindi calcolare  $z^* = z^n$ .

Partiamo definendo i numeri:

$$\begin{aligned}z &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ z^* &= \rho^*(\cos \vartheta^* + i \sin \vartheta^*)\end{aligned}$$

Dall'uguaglianza  $z^* = z^n$  possiamo quindi ricavare

$$\rho^*(\cos \vartheta^* + i \sin \vartheta^*) = \rho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

Questa uguaglianza è valida a meno di multipli di  $2\pi$ .

Possiamo quindi ricavare il sistema

$$\begin{cases} \rho^* = \rho^n \\ \vartheta_k = k \times 2\pi = n\vartheta \end{cases} \quad \text{da cui si ricava} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho^*} \\ \vartheta = \frac{\vartheta^*}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

## Dimostrazione numero 8

# Irrazionalità di $\sqrt{2}$

### Enunciato

$\sqrt{2}$  è un numero irrazionale. È pertanto impossibile scriverlo come frazione.

### Dimostrazione

Dimostriamo l'enunciato per assurdo. Partiamo quindi prendendo due numeri coprimi  $p, q \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \sqrt{2} \\ p &= \sqrt{2}q \\ p^2 &= 2q^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi tre casi:

$p, q$  **dispari**:  $p$  sarà uguale a

$$p = 2^0 \times \dots = p^2$$

$q$  sarà uguale a

$$\begin{aligned}q &= 2^0 \times \dots = q^2 \\ 2q^2 &= 2^1 \times \dots\end{aligned}$$

Perciò,  $p^2 \neq 2q^2$ .

$p$  **dispari**,  $q$  **pari**:  $p$  sarà uguale a

$$p = 2^0 \times \dots = p^2$$

$q$  sarà uguale a

$$\begin{aligned}q &= 2^k \times \dots \\ q^2 &= 2^{2k} \times \dots \\ 2q^2 &= 2^{2k+1} \times \dots\end{aligned}$$

Perciò,  $p^2 \neq 2q^2$ .

$p$  **pari**,  $q$  **dispari**:  $p$  sarà uguale a

$$p = 2^k \times \dots$$

$$p^2 = 2^{2k} \times \dots$$

$q$  sarà uguale a

$$q = 2^0 \times \dots = q^2$$

$$2q^2 = 2^1 \times \dots$$

Perciò,  $p^2 \neq 2q^2$ .

c.v.d.

## Dimostrazione numero 9

# Proprietà di $\sim$ ed $o$

## Teorema fondamentale che li lega

### Enunciato

Per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f \sim g \iff f = g + o(g)$$

### Dimostrazione

Lo dimostreremo in entrambe le direzioni. Partiamo da sinistra.

$$\begin{aligned} f &= gh & h &\rightarrow 1 \\ f - g &= gh - g \\ f - g &= g(h - 1) & H = h - 1 &\rightarrow 0 \\ f - g &= o(g) \\ f &= o(g) + g \\ f &\sim g \end{aligned}$$

Partiamo ora da destra.

$$\begin{aligned} f - g &= o(g) \\ f - g &= gh & h &\rightarrow 0 \\ f &= g + gh \\ f &= g(h + 1) & H = h + 1 &\rightarrow 1 \\ f &\sim g \end{aligned}$$

c.v.d.

## Proprietà di $o$

$$o(kg) = k o(g) = o(g)$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned} f &= o(kg) \\ f &= gkh & h &\rightarrow 0 \therefore kh \rightarrow 0 \\ f &= o(g) \end{aligned}$$

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

**Dimostrazione per  $o(g) + o(g) = o(g)$**

$$o(g) + o(g) = 2 o(g) = o(g)$$

**Dimostrazione per  $o(g) - o(g) = o(g)$**

$$o(g) - o(g) = o(g) + (-o(g)) = o(g) + o(g) = o(g)$$

$$f o(g) = o(f g)$$

**Dimostrazione**

$$F = o(g)$$

$$F = gh$$

$$h \rightarrow 0$$

$$f F = f gh$$

$$f o(g) = o(f g)$$

$$(o(g))^n = o(g^n) \quad \forall n \in \mathbb{R}^+$$

**Dimostrazione**

$$G = o(g)$$

$$G = gh$$

$$h \rightarrow 0$$

$$G^n = g^n h^n$$

$$H = h^n \rightarrow 0$$

$$(o(g))^n = o(g^n)$$

## Proprietà di $\sim$

Se  $f \sim g$  allora  $f^n \sim g^n$  *dove*  $n \neq 0$

**Dimostrazione**

$$f = gh$$

$$h \rightarrow 1$$

$$f^n = g^n h^n$$

$$H = h^n \rightarrow 1$$

Se  $f_1 \sim g_1$  e  $f_2 \sim g_2$  allora  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$  e  $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

**Dimostrazione**

$$f_1 \sim g_1 \quad f_1 = g_1 h_1$$

$$h_1 \rightarrow 1$$

$$f_2 \sim g_2 \quad f_2 = g_2 h_2$$

$$h_2 \rightarrow 1$$

$$f_1 f_2 = g_1 g_2 H$$

$$H = h_1 h_2 \rightarrow 1$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} H$$

$$H = \frac{h_1}{h_2} \rightarrow 1$$



## Dimostrazione numero 10

# Numerabilità di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e non numerabilità di $\mathbb{R}$

## Numerabilità di $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$  è numerabile, in quanto è facilmente possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$ .

$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...	$n$	$-n$	...
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...	$2n-1$	$2n$	...

Dunque,  $\mathbb{Z}$  è numerabile.

## Numerabilità di $\mathbb{Q}$

Cominciamo a scrivere l'insieme  $\mathbb{Q}$  come una tabella.

0	1	2	3	4	5	...
0	-1	-2	-3	-4	-5	...
0	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$	...
0	$-1/2$	$-2/2$	$-3/2$	$-4/2$	$-5/2$	...
0	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$	...
0	$-1/3$	$-2/3$	$-3/3$	$-4/3$	$-5/3$	...
...	...	...	...	...	...	...

Possiamo dunque costruire una successione, prendendo gli elementi sulle diagonali a partire dall'angolo in alto a sinistra, evitando i doppioni.

$\mathbb{Q}$	0	1	2	-1	3	-2	$1/2$	...
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...

Dunque, anche  $\mathbb{Q}$  è numerabile.

## Non numerabilità di $\mathbb{R}$

Cominciamo scrivendo una sequenza infinita di numeri razionali  $\in [0, 1]$ .

0.1234...

0.9876...

0.1928...

...

Se noi definiamo un nuovo numero, prendendo una cifra alla volta in diagonale ed incrementandola di uno, ad esempio 0.293..., questo sarà, per definizione, diverso da ogni altro numero della sequenza. Non è pertanto possibile mettere in corrispondenza biunivoca  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{N}$ , dunque  $\mathbb{R}$  non è numerabile.

## Dimostrazione numero 11

# Teorema fondamentale delle successioni monotone

Si dimostrano diversi casi:

1. una successione monotona e limitata *converge*;
2. una successione monotona e illimitata
  - *diverge positivamente*, se crescente;
  - *diverge negativamente*, se decrescente.

## Primo caso

### Enunciato

#### Ipotesi

Fisso per comodità  $a_n$  monotona crescente

1.  $a_n \leq a_{n+1}$  (ipotesi di monotonia);
2.  $\{a_n\} \subset B_r(0)$  con  $r > 0$  (ipotesi di limitatezza).

#### Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

## Dimostrazione

Essendo  $a_n$  limitata avrà un maggiorante in  $r$  e quindi avrà il sup. Dimostro che  $L = \sup a_n$ .

Definiamo un intorno  $\varepsilon$  di sup come  $B_\varepsilon(S)$ : allora  $\forall \varepsilon \geq 0$ ,  $S - \varepsilon$  non è più né sup né maggiorante, quindi

$$\begin{aligned} & \exists a_{n^*} \mid S - \varepsilon < a_{n^*} \leq S \\ & \forall n > n^*, S - \varepsilon < a_{n^*} \leq a_n \leq S \\ & a_n \in B_\varepsilon(S) \end{aligned}$$

## Secondo caso

### Enunciato

Consideriamo il caso della crescita.

### Ipotesi

Fisso per comodità  $a_n$  monotona crescente

1.  $a_n \leq a_{n+1}$  (ipotesi di monotonia);
2.  $\nexists B_r(0) \supset \{a_n\} \quad \forall n$  (ipotesi di illimitatezza).

### Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

### Dimostrazione

Essendo  $a_n$  illimitata

$$\forall B_r(0), a_{n^*} \geq r$$

e per la monotonia

$$\forall n > n^*, a_{n^*} \leq a_n$$

quindi, definitivamente

$$a_n \in B_r(+\infty)$$

e per la definizione di limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

## Dimostrazione numero 12

# Convergenza della successione che definisce $e$

### Definizione

La successione che definisce il numero  $e$  è

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Questa è **monotona crescente** e **limitata**, quindi converge per il teorema fondamentale delle successioni monotone.

### Verifica della monotonia crescente

Secondo la definizione,  $\forall n, a_n \leq a_{n+1}$ . Dunque

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$$

Verifichiamo la disequazione:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, per passare ad una disuguaglianza, è stata usata la disuguaglianza di Bernoulli. In particolare,

$$x = -\frac{1}{n^2}$$

dunque,

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

## Verifica della limitatezza

Innanzitutto, introduciamo una successione ausiliaria  $\{b_n\}$  definita come

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1}$$

Quindi,  $\forall n, a_n < b_n$ . Dimostriamo quindi che  $\{b_n\}$  decresce, da cui segue che  $\{a_n\}$  è limitata. La disequazione da verificare è dunque

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1$$

Verifichiamola:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \\ &\leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

Come nella verifica precedente, è stata usata la disuguaglianza di Bernoulli. In particolare,

$$x = \frac{1}{n^2-1}$$

dunque,

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n \left(\frac{1}{n^2-1}\right) > 1 + \frac{n}{n^2}$$

da cui

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{-n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

## Dimostrazione numero 13

# Teorema di unicità del limite

### Enunciato

Se una successione converge, il valore a cui converge è unico.

### Dimostrazione

Sia  $\{a_n\}$  una successione convergente ed ipotizziamo, per assurdo, che

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= L_1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= L_2\end{aligned}$$

con  $L_1 \neq L_2$ .

Per la definizione di limite otteniamo

$$\begin{aligned}\forall B_r(L_1), \exists M_1 \mid \forall n > M_1, a_n \in B_r(L_1) \\ \forall B_r(L_2), \exists M_2 \mid \forall n > M_2, a_n \in B_r(L_2)\end{aligned}$$

Scegliamo  $r$  come

$$\begin{aligned}r &< \frac{\text{dist}(L_1, L_2)}{2} \\ &< \frac{|L_1 - L_2|}{2}\end{aligned}$$

così da avere

$$B_r(L_1) \cap B_r(L_2) = \emptyset$$

Da ciò otteniamo

$$\forall n > \max\{M_1, M_2\}, n \in B_r(L_1) \wedge n \in B_r(L_2)$$

il che è assurdo, poiché l'intersezione è equivalente all'insieme vuoto.

## Dimostrazione numero 14

# Teorema di permanenza del segno

### Enunciato

Se  $\{a_n\}$  è definitivamente positiva e convergente allora il suo limite sarà non negativo.

### Dimostrazione

Dalle ipotesi del teorema possiamo ricavare

$$\begin{aligned} \exists M \mid \forall n > M, a_n > 0 \\ L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che  $L \geq 0$ . Procediamo per assurdo supponendo  $L < 0$ . Per la definizione di limite,

$$\forall B_r(L), \exists M^* \mid \forall n > M^*, a_n \in B_r(L)$$

Se definiamo  $r$  come

$$r < \frac{|L|}{2}$$

stiamo dicendo che la successione è definitivamente negativa da  $M^*$  in poi, il che è assurdo poiché contraddice l'ipotesi.



## Dimostrazione numero 15

# Teorema del confronto

### Enunciato

Siano  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  tali che definitivamente  $a_n \leq b_n \leq c_n$ . Inoltre,  $\{a_n\}, \{c_n\}$  convergono a  $L$ . Allora,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

### Dimostrazione

Dalle ipotesi del teorema possiamo ricavare

$$\begin{aligned} & \exists M_1 \mid \forall n > M_1, a_n \leq b_n \leq c_n \\ & \forall B_r(L), \exists M_2 \mid \forall n > M_2, a_n \in B_r(L) \quad \text{ovvero} \quad L - r < a_n < L + r \\ & \forall B_r(L), \exists M_3 \mid \forall n > M_3, c_n \in B_r(L) \quad \text{ovvero} \quad L - r < c_n < L + r \end{aligned}$$

Chiamiamo  $M^* = \max\{M_1, M_2, M_3\}$ . Dopo  $M^*$  valgono le tre precedenti relazioni. Dunque,

$$\forall n > M^*, L - r < a_n \leq b_n \leq c_n < L + r$$

da cui si deduce che

$$b_n \in B_r(L)$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$$

## Dimostrazione numero 16

# Teorema di Bolzano

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $A = [a, b]$  è un intervallo compatto;
2.  $f$  è continua su  $A$ ;
3.  $f(a)f(b) < 0$ .

#### Tesi

$$\exists x^* \in (a, b) \mid f'(x^*) = 0$$

### Dimostrazione

Per fissare le idee,

$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ f(b) &< 0 \end{aligned}$$

Procediamo per bisezione: definiamo  $x_1$  uguale al punto medio, ovvero

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

A questo punto, valutiamo  $f(x_1)$ :

$$f(x_1) = \begin{cases} \text{se } f(x_1) = 0 & \text{ho trovato lo zero} \\ \text{se } f(x_1) > 0 & a_1 = x_1 \wedge b_1 = b_0 \quad (\text{studio l'intervallo destro}) \\ \text{se } f(x_1) < 0 & a_1 = a_0 \wedge b_1 = x_1 \quad (\text{studio l'intervallo sinistro}) \end{cases}$$

Possiamo quindi proseguire fino a  $x_k$ , che sarà definito come

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$$

da cui

$$f(x_k) = \begin{cases} \text{se } f(x_k) = 0 & \text{ho trovato lo zero} \\ \text{se } f(x_k) > 0 & a_k = x_k \wedge b_k = b_{k-1} \quad (\text{studio l'intervallo destro}) \\ \text{se } f(x_k) < 0 & a_k = a_{k-1} \wedge b_k = x_k \quad (\text{studio l'intervallo sinistro}) \end{cases}$$

Abbiamo dunque due successioni:

$a_k$  monotona crescente

$b_k$  monotona decrescente

entrambe limitate, in quanto stanno in  $[a, b]$ , e convergenti, per il teorema fondamentale delle successioni monotone. Quindi,

$$\begin{matrix} a_k \rightarrow L \\ b_k \rightarrow M \end{matrix} \quad \text{ma } L = M \text{ dato che } \text{dist}(a_k, b_k) = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Prendiamo quindi  $x^* = L = M$  e mostriamo che  $f(x^*) = 0$ :

$$\left. \begin{matrix} f(a_k) \text{ converge ad un valore } \geq 0 \\ f(b_k) \text{ converge ad un valore } \leq 0 \end{matrix} \right\} \text{ per il teorema della permanenza del segno}$$

Uso la continuità di  $f$ : se  $x \rightarrow x_0$ , allora  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ . Dunque,

$$\left. \begin{matrix} f(a_k) \rightarrow f(x^*) \geq 0 \\ f(b_k) \rightarrow f(x^*) \leq 0 \end{matrix} \right\} f(x^*) = 0$$

## Dimostrazione numero 17

# Teorema di Darboux

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $A = [a, b]$  è un intervallo compatto;
2.  $f$  è continua su  $A$ .

#### Tesi

$$\forall \lambda \mid m < \lambda < M, \exists x_\lambda \in A \mid f(x_\lambda) = \lambda$$

### Dimostrazione

Valendo il teorema di Weirstrass sappiamo che esistono  $M$ ,  $m$ ,  $x_M$  e  $x_m$  tali che

$$f(x_m) = m \leq f(x) \leq M = f(x_M)$$

Introduciamo quindi una funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \lambda$$

Notare come  $g$  ha la stessa regolarità di  $f$ , infatti è continua. Inoltre  $g$ , studiata nell'intervallo  $[x_m, x_M]$  soddisfa il teorema di Bolzano. Dunque,

$$\begin{aligned} g(x_m) &= f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0 \\ g(x_M) &= f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \exists x_\lambda \mid g(x_\lambda) &= 0 \\ f(x_\lambda) - \lambda &= 0 \\ f(x_\lambda) &= \lambda \end{aligned}$$

## Dimostrazione numero 18

# Derivate elementari con la definizione

### Derivata di $x^n$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-1} \\ &= \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} + o(1) = nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

### Derivata di $\ln x$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( \frac{x_0 + h}{x_0} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x_0} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right) \right) \\ &= \frac{1}{x_0} + o\left(\frac{1}{x_0}\right) \\ &= \frac{1}{x_0} + o(1) = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

## Derivata di $e^x$

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{h + o(h)}{h} \\&= e^{x_0}(1 + o(1)) = e^{x_0}\end{aligned}$$

## Dimostrazione numero 19

# Derivabilità implica continuità

### Enunciato

Se  $f$  è derivabile in un punto  $x_0$  allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

### Dimostrazione

Per la definizione di derivata, se la funzione è derivabile in un punto  $x_0$  significa che

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \exists \text{ finito}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{mh} = 1$$

Dunque, per la definizione di asintotico, con  $h \rightarrow 0$ ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \sim mh$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = mh + o(mh)$$
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(mh)$$

Bisogna perciò calcolare  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$ . Eseguendo la sostituzione  $x = x_0 + h$  si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + \underbrace{mh}_{\rightarrow 0} + \underbrace{o(mh)}_{\rightarrow 0} = f(x_0)$$

c.v.d.

## Parte II



## Dimostrazione numero 20

# Teorema di Fermat

### Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- $x_0$  è un punto stazionario se  $f'(x_0) = 0$ ;
- $x_0$  è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- $x_M$  è un punto di massimo locale se  $M = f(x_M) \geq f(x), \forall x \in A$  dove M è il valore massimo locale;
- $x_m$  è un punto di minimo locale se  $m = f(x_m) \leq f(x), \forall x \in A$  dove m è il valore minimo locale.

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $x_0 \in A$ ;
2.  $f$  sia derivabile in  $A$ ;
3.  $x_0$  sia un punto di ottimo.

#### Tesi

$$f'(x_0) = 0$$

ovvero  $x_0$  è un punto stazionario

## Dimostrazione

### Caso 1 - $x_0$ è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= L_1 \leq 0 \text{ dove } L_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= L_2 \geq 0 \text{ dove } L_2 \in \mathbb{R} \\ L_1 &= L_2 = f'(x_0) \end{aligned}$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

### Caso 2 - $x_0$ è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= L_1 \geq 0 \text{ dove } L_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= L_2 \leq 0 \text{ dove } L_2 \in \mathbb{R} \\ L_1 &= L_2 = f'(x_0) \end{aligned}$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 21

# Teorema di Rolle

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f$  è continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ ;
2.  $f(a) = f(b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti  $\forall x \in (a, b)$ ,  $f'(x) = 0$ .

#### Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di  $f(x)$  su  $A$  e essendo  $A$  un intervallo chiuso e limitato, vale il **teorema di Weierstrass**.

$$\exists M, m \mid f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in A$$

e almeno uno tra  $x_m$  e  $x_M$  è interno ad  $(a, b)$ , dato che  $m \neq M$ , poiché  $f$  non è costante.

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 22

# Teorema di Lagrange

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che  $f$  sia continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta passante per  $a$  e  $b$ .

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $g(x)$  così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che  $g$  ha la regolarità di  $f$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\ &= f(a) - [f(a) + 0] \\ &= f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\ &= f(b) - [f(a) + f(b) - f(a)] \\ &= f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$$

Da cui  $g(a) = g(b)$ .

Posso quindi applicare il **teorema di Rolle** su  $A$ :

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi  $g'(x)$ :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 23

# Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che  $f$  sia derivabile su  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su  $A$ .

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su  $A$ .

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$

Siano  $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il **teorema di Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \mid f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) > 0$  e anche  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è monotona strettamente crescente, c.v.d.

**Caso 2 -  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in A$**

Siano  $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il **teorema di Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \mid f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) < 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è monotona strettamente decrescente, c.v.d.

## Dimostrazione numero 24

# Teorema di Cauchy

### Enunciato

#### Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre  $f, g$  continue in  $A$  e derivabili in  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$\exists x^* \in (a, b) \mid \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $h(x)$  così definita:

$$h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$$

Notiamo che  $h$  ha la regolarità di  $f$  e di  $g$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Verifico se su  $h$  nell'intervallo  $[a, b]$  vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)] g(a) - [g(b) - g(a)] f(a) \\ h(a) &= f(b) g(a) - f(a) g(a) - f(a) g(b) + f(a) g(a) \\ h(a) &= f(b) g(a) - f(a) g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)] g(b) - [g(b) - g(a)] f(b) \\ h(b) &= f(b) g(b) - f(a) g(b) - f(b) g(b) + f(b) g(a) \\ h(b) &= f(b) g(a) - f(a) g(b) \end{aligned}$$



$h(a) = h(b)$ , quindi posso applicare il **teorema di Rolle**, da cui si deriva che  $h$  ha un punto stazionario  $x^*$

$$\begin{aligned}h'(x) &= [f(b) - f(a)] g'(x) - [g(b) - g(a)] f'(x) \\h'(x^*) &= 0\end{aligned}$$

E quindi infine

$$\begin{aligned}h'(x^*) &= 0 \\[f(b) - f(a)] g'(x^*) - [g(b) - g(a)] f'(x^*) &= 0 \\[f(b) - f(a)] g'(x^*) &= [g(b) - g(a)] f'(x^*) \\\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} &= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\end{aligned}$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 25

# Teorema di de l'Hôpital

### Enunciato

#### Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1.  $f, g$  continue in  $A$  e derivabili in  $(a, b)$ ;
2.  $f, g$  infinitesime in  $x_0 \in (a, b)$ .

#### Tesi

$$\text{Se } l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ allora } l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

### Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists \vartheta \in (a, b) \Rightarrow \vartheta \in (x_0, x)$$

Aggiungo  $f(x_0)$  che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo  $(x_0, x)$ :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\vartheta)}{g'(\vartheta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\vartheta)}{g'(\vartheta)} = l$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 26

# Teorema del resto secondo Peano

### Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f \in C^n(A)$ ;
2.  $x_0 \in A$ .

#### Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x - x_0)^n)$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

#### Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} f &\in C^1(A) \\ f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] &\stackrel{?}{=} o((x - x_0)) \end{aligned}$$

Per la definizione di  $o$ -piccolo una funzione  $(f(x))$  è  $o$ -piccolo di un'altra  $(g(x))$  quando il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)} &\stackrel{?}{=} 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) &\stackrel{?}{=} 0 \\ f'(x_0) - f'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi  $F(1)$  è vera.

### **Ipotesi induttiva:** $F(n - 1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\begin{aligned} \forall g \in C^{n-1}(A) \\ g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1}) \end{aligned}$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

### **Verifica per** $F(n)$

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di  $o$ -piccolo:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} &\stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

Questa è però una forma di indeterminazione  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Per risolverla, le applico il **teorema di de l'Hôpital**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - [T_n^f(x)]'}{n(x - x_0)^{n-1}} \end{aligned}$$

Calcolo  $[T_n^f(x)]'$  a parte:

$$\begin{aligned} [T_n^f(x)]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} 3(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} n(x - x_0)^{n-1} \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \\ &= T_{n-1}^{f'}(x) \end{aligned}$$

Infatti se  $f \in C^n(A) \Rightarrow f' \in C^{n-1}$ .

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che  $f' \in C^{n-1}$  e che  $g \in C^{n-1}$ . Poniamo quindi  $g = f'$ . Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 27

# Teorema del resto secondo Lagrange

### Definizioni necessarie

Si ricorda che il **polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f \in C^{n+1}(A)$ ;
2.  $x_0 \in A$ .

#### Tesi

$$\exists \vartheta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

### Dimostrazione

Considero due **funzioni ausiliarie**  $g(x), w(x)$  così definite:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - T_n^f(x) & g(x) &\in C^{n+1}(A) \\ w(x) &= (x - x_0)^{n+1} & w(x) &\in C^\infty(A) \end{aligned}$$

Calcolo  $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n+1)}(x_0)$ :

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0) - \left[ \frac{f(x_0)}{0!} 1 + \frac{f'(x_0)}{1!} (x_0 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x_0 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_0 - x_0)^n \right] = 0 \\
g'(x_0) &= f'(x_0) - \left[ \frac{f'(x_0)}{1!} 1 + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x_0 - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(x_0 - x_0)^{n-1} \right] = 0 \\
g''(x_0) &= 0 \\
&\dots \\
g^{(n)}(x_0) &= 0 \\
g^{(n+1)}(x_0) &= f^{(n+1)}(x_0) - 0 = f^{(n+1)}(x_0)
\end{aligned}$$

Calcolo  $w(x_0), w'(x_0), \dots, w^{(n+1)}(x_0)$ :

$$\begin{aligned}
w(x_0) &= (x_0 - x_0)^{n+1} = 0 \\
w'(x_0) &= (n+1)(x_0 - x_0)^n = 0 \\
w'(x_0) &= (n+1)(n)(x_0 - x_0)^{n-1} = 0 \\
&\dots \\
w^{(n)}(x_0) &= [(n+1)!](x_0 - x_0) = 0 \\
w^{(n+1)}(x_0) &= [(n+1)!]1 = (n+1)!
\end{aligned}$$

Toniamo ora su ciò che dobbiamo dimostrare:

$$\begin{aligned}
\exists \vartheta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) &= \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\
\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Notiamo che  $\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)}$  quindi utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{w(x)} &= \frac{g(x) - g(x_0)}{w(x) - w(x_0)} \\
\exists x_1 \in (x_0, x) \quad &= \frac{g'(x_1)}{w'(x_1)} = \frac{g'(x_1) - g'(x_0)}{w'(x_1) - w'(x_0)} \\
\exists x_2 \in (x_0, x_1) \quad &= \frac{g''(x_2)}{w''(x_2)} = \frac{g''(x_2) - g''(x_0)}{w''(x_2) - w''(x_0)} \\
\exists x_3 \in (x_0, x_2) \quad &= \frac{g'''(x_3)}{w'''(x_3)} = \dots \\
\exists \vartheta \in (x_0, x_n) \quad &= \frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{w^{(n+1)}(\vartheta)} \quad \text{Iterando } n \text{ volte}
\end{aligned}$$

Notiamo anche che possiamo fare questo perché da come abbiamo dimostrato prima calcolandolo,  $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n)}(x_0)$  e  $w(x_0), w'(x_0), \dots, w^{(n)}(x_0)$  sono infinitesimi.

Quindi le derivate  $(n+1)$ -esime dal precedente calcolo di  $g(x)$  e  $w(x)$  sono:

$$\frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{w^{(n+1)}(\vartheta)} = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

Quindi per come abbiamo definito  $g(x)$  e  $w(x)$ :

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g^{(n+1)}(\vartheta)}{w^{(n+1)}(\vartheta)} = \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!} \\ f(x) - T_n^f(x) &= \frac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

c.v.d.



## Dimostrazione numero 28

# Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

## Enunciato

### Ipotesi

Sia  $f(t)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t). \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $G$  sia primitiva di  $f$  su  $(a, b)$ ;
2.  $f(t)$  sia Riemann-integrabile su  $(a, b)$

### Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = G(b) - G(a)$$

## Dimostrazione

Posti  $a = t_0$  e  $b = t_n$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(t_n) - G(t_0) \\ &= G(t_n) - G(t_{n-1}) + G(t_{n-1}) + \dots - G(t_i) + G(t_i) + \dots - G(t_1) + G(t_1) - G(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (G(t_i) - G(t_{i-1})) \end{aligned}$$

A  $G$  possiamo applicare il **teorema di Lagrange** su  $[t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} \exists \vartheta_i \in (t_{i-1}, t_i) \mid G'(\vartheta_i) &= \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^n G'(\vartheta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\vartheta_i)(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow S \end{aligned}$$

Con  $S$  output cumulativo. Si tratta quindi di una somma di Riemann.  
c.v.d.

## Dimostrazione numero 29

# Teorema valor medio integrale

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione limitata tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $m = \min f$  su  $[a, b]$ ;
2.  $M = \max f$  su  $[a, b]$ .

#### Definizione

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$

purché  $f$  sia Riemann-integrabile.

### Proprietà 1

$$m \leq VMI \leq M$$

#### Dimostrazione

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b]$$

Integrale definito:

$$\int_a^b m \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b M \, dt$$

Per la monotonia:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt \leq M \end{aligned}$$

## Proprietà 2

Se  $f \in C^0([a, b])$  allora:

$$\exists \vartheta \in [a, b] \mid f(\vartheta) = VMI$$

## Dimostrazione

Valendo Weierstrass e Darboux:

$$m \leqslant VMI \leqslant M$$

## Dimostrazione numero 30

# Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

## Definizioni necessarie

Si ricorda che è detta **funzione integrale** la funzione  $G$ :

$$\begin{aligned} G : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

## Prima Forma

### Enunciato

#### Ipotesi

Data una funzione **limitata** e **Riemann-integrabile**:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

#### Tesi

$G$  è una funzione **continua**.

## Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall x_0 \in [a, b], \quad G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$$

**Caso 1** -  $a < x_0 < x < b$

Consideriamo quindi il limite da destra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_a^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[ \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[ G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$  fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$  è *infinitesimo*:

$$\begin{aligned}m \leq f(t) \leq M \quad & \text{accumulo tra } x_0 \text{ e } x \\ m(x - x_0) & \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0)\end{aligned}$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

**Caso 2** -  $a < x < x_0 < b$

Consideriamo quindi il limite da sinistra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_a^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[ \int_a^{x_0} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[ G(x_0) - \int_x^{x_0} f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$  fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$  è *infinitesimo*:

$$\begin{aligned}m \leq f(t) \leq M \quad & \text{accumulo tra } x \text{ e } x_0 \\ m(x_0 - x) & \leq - \int_x^{x_0} f(t) dt \leq M(x_0 - x)\end{aligned}$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Nel *caso 1* abbiamo dimostrato che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$  e *caso 2* che  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$  quindi abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) \quad \forall x_0 \in [a, b]$$

Che dimostra la continuità di  $G(x)$ , c.v.d.

## Seconda Forma

### Enunciato

#### Ipotesi

Data una funzione **continua**:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

#### Tesi

$G$  è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a, b]) \quad \text{e} \quad G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

### Dimostrazione

Sia  $x_0 \in (a, b)$ , vogliamo dimostrare che  $G$  è derivabile in  $x_0$ .

**Caso 1** -  $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt && \text{VMI di } f \text{ su } [x_0, x_0 + h] \\ \exists \vartheta \in [x_0, x_0 + h] \mid &= f(\vartheta) \longrightarrow f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo  $G(x)$  è derivabile su  $(a, b)$  data l'arbitrarietà di  $x_0$ , ma anche che la derivata di  $G(x)$  è  $f(x)$ . c.v.d.

**Caso 2** -  $h < 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{-h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt && \text{VMI di } f \text{ su } [x_0 + h, x_0] \\ \exists \vartheta \in [x_0 + h, x_0] \mid &= f(\vartheta) \longrightarrow f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0^- \end{aligned}$$

Dimostrando che non solo  $G(x)$  è derivabile su  $(a, b)$  data l'arbitrarietà di  $x_0$ , ma anche che la derivata di  $G(x)$  è  $f(x)$ , c.v.d.

## Dimostrazione numero 31

# Condizione necessaria per la convergenza di una serie

## Definizioni necessarie

- Data la successione:

$$\begin{aligned} a_n : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Si dice **serie**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- La successione  $a_n$  è detta *argomento* della serie;
- La **successione delle somme parziali** è così definita:

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

- Il *carattere* (o la *natura*) della **serie** è il *carattere* (o la *natura*) della sua **successione delle somme parziali**.

## Enunciato

### Ipotesi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge}$$

### Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$



## Dimostrazione

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge allora:

$$L = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

## Osservazione

Posso definire  $S_N$  ricorsivamente:

$$\begin{cases} S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \\ S_0 = a_0 \end{cases}$$

Noto che anche:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{N+1} &= L \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N &= L \end{aligned}$$

Essendo i due limiti finiti posso fare il limite della loro differenza:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = L - L = 0$$

Dalla definizione ricorsiva che ho dato di  $S_N$  posso riscrivere il tutto come:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N + a_{N+1} - S_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1}$$

Da quanto detto sopra sappiamo che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = 0$ , quindi:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{N+1} - S_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1} = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 32

# Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi

### Enunciato

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi  $a_n > 0 \forall n$ . Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $0 \leq l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \quad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall B_\varepsilon(l) \exists M \mid \forall n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo  $\varepsilon$  in modo che  $\varepsilon < 1 - l$  da  $M$  in poi. Dunque,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n < l + \varepsilon$$

$$a_{n+1} < a_n(l + \varepsilon)$$

*Disuguaglianza ricorsiva che vale **definitivamente***

$$a_{M+2} < a_{M+1}(l + \varepsilon)$$

$$a_{M+3} < a_{M+2}(l + \varepsilon) < a_{M+1}(l + \varepsilon)^2$$

$$a_{M+4} < a_{M+3}(l + \varepsilon) < a_{M+1}(l + \varepsilon)^3$$

...

$$a_{M+n+1} < a_{M+1}(l + \varepsilon)^n$$

Ho **maggiorato** definitivamente la serie di partenza con una serie

$$\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_{M+1}(l + \varepsilon)^n$$

Applico il **criterio del confronto** con la geometrica con ragione

$$-1 < q = l + \varepsilon < 1$$

che *converge*, quindi anche la serie di partenza  $\sum a_n$  **converge**, c.v.d.

## Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria  $b_n$  come

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò si può dedurre che

$$\forall n \quad a_{n+1} > a_n$$

Da questo possiamo stabilire che la successione  $b_n$  è monotona strettamente crescente. Ma, poiché la successione  $b_n$  è stata definita in funzione della successione  $a_n$ , significa che anche questa ultima è monotona strettamente crescente. In tal caso, significa che la serie ad essa associata  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty$ , c.v.d.

## Dimostrazione numero 33

# Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi

## Enunciato

### Ipotesi

Siano

$$\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$$

tali che:

1.  $\exists M_1 \mid \forall n \geq M_1, a_n > 0 \wedge b_n > 0$ ;
2.  $\exists M_2 \mid \forall n \geq M_2, a_n \leq b_n$ .

### Tesi

1. Se  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$  diverge, allora anche  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$  diverge;
2. Se  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n$  converge, allora anche  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$  converge.

## Dimostrazione

### Parte 1 - Divergenza

Siano  $A_N = \sum_{n=\dots}^N a_n$  e  $B_N = \sum_{n=\dots}^N b_n$ . Se  $\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n$  diverge significa che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N = +\infty$  quindi per definizione di limite:

$$\forall B_r(+\infty) \exists R \mid \forall N > R \quad A_N > R$$

Ricordiamo che:

$$a_n \leq b_n \quad (\forall n > M_2)$$

Con le sommatorie:

$$\begin{aligned} \sum_{n=\max(M_1, M_2)}^{+\infty} a_n &\leq \sum_{n=\max(M_1, M_2)}^{+\infty} b_n \\ A_N &\leq B_N \end{aligned}$$

Da cui:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} B_N = +\infty$$

$$B_N > R \Rightarrow \text{Quindi } \sum b_n \text{ diverge a } +\infty$$

c.v.d.

## Parte 2 - Convergenza

Se  $\sum_{n=...}^{+\infty} b_n$  converge significa che  $\lim_{N \rightarrow +\infty} B_N = L$  ovvero per definizione di limite:

$$\forall B_r(L) \exists M_3 \mid \forall n > M_3 \quad B_N \in B_r(L) \quad L - r \leq B_N \leq L + r$$

$A_N \leq B_N$  inoltre  $A_N, B_N$  sono monotone, infatti:

$$A_{N+1} = A_N + a_{N+1} \text{ e } a_{N+1} > 0 \quad \text{perciò} \quad A_{N+1} > A_N$$

$A_N$  è strettamente crescente e limitata (dal valore di  $L$ ).

$$A_N \leq B_N \leq L$$

quindi per il teorema fondamentale delle successioni monotone  $A_N$  converge, c.v.d.

## Dimostrazione numero 34

# Criterio della radice per la convergenza delle serie a termini positivi

### Enunciato

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi  $a_n > 0 \forall n$ . Se

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Allora

$$l \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } l > 1 \\ \text{il criterio non si applica} & \text{se } l = 1 \\ \text{converge} & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $0 \leq l < 1$

Introduco una **successione ausiliaria**

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \quad \text{e so che } l < 1$$

Per la definizione di limite

$$\forall B_\varepsilon(l) \exists M \mid \forall n > M \quad b_n \in B_\varepsilon(l)$$

Scegliamo  $\varepsilon$  in modo che  $\varepsilon < 1 - l$  da  $M$  in poi. Dunque,

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \quad (< 1)$$

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \quad (< 1)$$

$$a_n < (l + \varepsilon)^n$$

Applico il **criterio del confronto** tra  $\sum a_n$  e  $\sum (l + \varepsilon)^n$ , dove  $\sum (l + \varepsilon)^n$  è la geometrica di ragione  $q = l + \varepsilon$ , con  $-1 < q < 1$ . Essendo quest'ultima convergente, possiamo concludere che anche la serie di partenza **converge**.

#### Caso 2 - $l > 1$

Definiamo una successione ausiliaria  $b_n$  come

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Sappiamo inoltre che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l > 1$$

Da ciò possiamo dedurre che

$$\forall n \quad \sqrt[n]{a_n} = 1 + k$$

con  $k > 0$ .

Questo ci permette di dividere la serie di partenza in una somma di due serie distinte:

$$\sum a_n = \sum 1 + \sum k$$

Ma, poiché  $\sum 1$  diverge a  $+\infty$  e  $\sum k > 0$ , perciò sicuramente non diverge a  $-\infty$ , sicuramente la serie risultante dalla loro somma, ovvero la serie di partenza, diverge a  $+\infty$ , c.v.d.

## Dimostrazione numero 35

# Giustificazione della formula di Eulero con l'esponenziale complesso

### Definizioni necessarie

- Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- Data la funzione:

$$\begin{aligned} f_k : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f_k(x) \end{aligned}$$

Si dice **serie di funzioni**:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Un esempio di **serie di funzioni** è il **Polinomio di Taylor** esteso a  $+\infty$ .

- La funzione  $f_k(x)$  è detta *argomento* della serie.
- La **successione delle somme parziali** è così definita:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

- Il *carattere* (o la *natura*) della **serie di funzioni** è il *carattere* (o la *natura*) della sua **successione delle somme parziali**.
- Se:

$$\forall x^* \in [a, b] \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x^*) = L(x^*)$$

La serie di funzioni converge puntualmente in tutto  $A = [a, b]$ .



## Enunciato

Ridefinendo le funzioni  $e^x, \sin x, \cos x$  nei complessi è possibile verificare la **formula di Eulero**:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

## Dimostrazione

### Parte 1 - $e^z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times x^k \quad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di  $e^x$  esteso all'infinito. Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k \quad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ;
- converge assolutamente puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$ .

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \left| \frac{1}{k!} \times z^k \right| = \sum_{k=\dots}^{+\infty} A_k$$

Applico il **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(z^*)^{k+1}|}{(k+1)k!} \times \frac{k!}{|(z^*)^k|} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{z^*}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} A_k$  converge puntualmente ( $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ) e la serie  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$  converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa  $f(z)$ .

Definiamo così la funzione:

$$e^z \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k$$

Notiamo anche che se  $z = x + 0 \times i$  abbiamo:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times x^k$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di  $e^x$  esteso a  $+\infty$ . Abbiamo così definito la funzione esponenziale nei complessi.

Lo stesso tipo di procedimento può essere fatto per altre funzioni elementari.

## Parte 2 - $\sin z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times x^{2k+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di  $\sin x$  esteso a  $+\infty$ . Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \quad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$
- converge assolutamente puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$$

Applico il **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{B_{k+1}}{B_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(-1)^{k+1} \times (z^*)^{2(k+1)+1}|}{[2(k+1)+1]!} \times \frac{(2k+1)!}{|(-1)^k \times (z^*)^{2k+1}|} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(z^*)^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$  converge puntualmente ( $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ) e la serie  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$  converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa  $f(z)$ .

Definiamo così la funzione:

$$\sin z \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1}$$

Notiamo anche che se  $z = x + 0 \times i$  abbiamo:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times x^{2k+1}$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di  $\sin x$  esteso a  $+\infty$ . Abbiamo così definito la funzione seno nei complessi.

## Parte 3 - $\cos z$

Consideriamo la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times x^{2k} \quad x \in \mathbb{R}$$

Questo è lo sviluppo di MacLaurin di  $\cos x$  esteso a  $+\infty$ . Portiamo ora la serie nei complessi:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \quad x \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo se:

- converge puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$
- converge assolutamente puntualmente in  $z^*$   $\forall z^* \in \mathbb{C}$

Sappiamo che se converge assolutamente ne seguirà la convergenza semplice. Quindi passiamo a dimostrare che:

$$\sum_{k=\dots}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \right| = \sum_{k=\dots}^{+\infty} C_k$$

Applico **criterio del rapporto**:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(-1)^{k+1} \times (z^*)^{2(k+1)}|}{[2(k+1)]!} \times \frac{(2k)!}{|(-1)^k \times (z^*)^{2k}|} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(z^*)^2}{(2k+2)(2k+1)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} C_k$  converge puntualmente ( $\forall z^* \in \mathbb{C}$ ) e la serie  $\sum_{k=\dots}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$  converge assolutamente e semplicemente puntualmente.

Questa serie corrisponde quindi a una funzione di variabile complessa  $f(z)$ .

Definiamo così la funzione:

$$\cos z \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k}$$

Notiamo anche che se  $z = x + 0 \times i$  abbiamo:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times x^{2k}$$

Che altro non è che lo sviluppo di MacLaurin di  $\cos x$  esteso a  $+\infty$ . Abbiamo così definito la funzione seno nei complessi.

## Parte 4 - La formula di Eulero

Abbiamo ora definito le funzioni  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  in  $\mathbb{C}$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times z^k \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times z^{2k+1} \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times z^{2k} \end{aligned}$$

Prendiamo ora  $z = i\vartheta$  (parte reale nulla) avremo:

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times (i\vartheta)^k \\ &= \frac{1}{0!} \times (i\vartheta)^0 + \frac{1}{1!} \times (i\vartheta)^1 + \frac{1}{2!} \times (i\vartheta)^2 + \frac{1}{3!} \times (i\vartheta)^3 + \dots \quad (i^2 = -1) \\ &= 1 + i\vartheta - \frac{1}{2} \vartheta^2 - \frac{1}{3!} \vartheta^3 i + \frac{1}{4!} \vartheta^4 + \frac{1}{5!} \vartheta^5 i + \dots \end{aligned}$$

La convergenza assoluta autorizza ad usare le proprietà elementari della somma. Commuto quindi tutti i termini con la  $i$  in fondo e gli altri li porto avanti. Ottengo così:

$$e^{i\vartheta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \times \vartheta^{2k} + i \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \vartheta^{2k+1} \right)$$

Da cui:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

c.v.d.

## Dimostrazioni aggiuntive

## Dimostrazione aggiuntiva numero 1

# Cardinalità di $\mathbb{R}^n$

### Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto.

### Enunciato

#### Ipotesi

$\mathbb{R}$  ha la cardinalità del continuo.

#### Tesi

$\mathbb{R}^n$  ha la cardinalità del continuo.

### Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo  $[0, 1]$ .

#### Iniettività

Dato un punto generico  $P(x_P, y_P)$  definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \text{ e } y_p = 0.y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$$

L'immagine di  $P$  su  $\mathbb{R}$  è  $Q$ , così definita:

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P^* \neq P \mid f(P^*) = f(P)$$

$$P^* = (0.x_1^* x_2^* x_3^* x_4^* \dots, 0.y_1^* y_2^* y_3^* y_4^* \dots)$$

allora

$$f(P^*) = Q = 0.x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* x_3^* y_3^* x_4^* y_4^* \dots$$

Ma visto che

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

ne deriva che

$$P = P^*$$

il che è assurdo. Quindi  $f$  è **iniettiva**.

## Suriettività

Dato

$$Q \in [0, 1] = 0.q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists? P^\circ \in [0, 1] \times [0, 1] \mid f(P^\circ) = Q$$

Sì,  $P^\circ$  è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1 q_3 q_5 \dots, 0.q_2 q_4 q_6 \dots)$$

Da cui si ricava che  $f$  è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.