Analisi Matematica II

Mattia Martelli

Indice

I Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine **3**

II Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili **4**

Indice delle Definizioni e dei Teoremi

1 Definizione (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine) 3
2 Definizione (Forma normale di una EDO) 3
3 Definizione (Integrale generale e particolare di una EDO) 3

4 Definizione (EDO a variabili separate) 4
1 Teorema (Risoluzione di EDO a variabili separabili) 4

CAPITOLO I

Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

Definizione 1 (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine)**.** *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita $y(x)$, dove $x \in \mathbb{R}$, e la sua derivata prima $y'(x)$:*

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0.$$

In altre parole, ***una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione****.*

Definizione 2 (Forma normale di una EDO)**.** *Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma*

$$y'(x) = f\left(x,\, y(x)\right).$$

Definizione 3 (Integrale generale e particolare di una EDO)**.** *Data la EDO*

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0,$$

chiamiamo ***integrale generale*** *dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

Si chiama ***integrale particolare*** *dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.*

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo
$$y'(x) = f(x),$$
cioè EDO del primo ordine, in forma normale con $f\left(x,\, \cancel{y(x)}\right)$, basta integrare:
$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare y conoscendo delle informazioni relative a y'. Da qui il nome *integrale generale*.

- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

CAPITOLO II

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

Definizione 4 (EDO a variabili separate)**.** *Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Cioè $f(x, y) = h(x) \times g(y)$ *è il prodotto di una funzione che dipende da* x *per una funzione che dipende solo da* y*.*

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 1 (Risoluzione di EDO a variabili separabili)**.** *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

1. *Se* $g(D) = 0$ *per qualche* $D \in \mathbb{R}$ *allora la funzione costante* $y(x) = D, \forall\, x$ *è soluzione.*
2. *Se* $g(y) \neq 0, \forall\, y$ *in un certo intervallo, una soluzione* $y(x)$ *è definita implicitamente dall'equazione*

   $$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

   dove

   - $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
   - H *è una primitiva di* h*;*
   - Γ *è una primitiva di* $\frac{1}{g}$*.*

   Se Γ *non è invertibile otteniamo eslicitamente*

   $$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + \mathrm{c}),$$

   con $c \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le categorie:

1. Sia $g(D) = 0$ e $y(x) = D$, $\forall\, x$. L'identità è soddisfatta:
   (a) Sinistra: $y'(x) = 0$;
   (b) Destra: $h(x)\, g(y(x)) = h(x)\, g(D) = h(x) \times 0 = 0$.
2. Prendiamo un intervallo $[x_0, x]$ in cui la funzione $g(y)$ non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Dati $x_0 < x$, con x_0, $x \in \mathrm{J}_1$, integriamo:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{x_0}^{x} h(r)\, \mathrm{d}r = H(x) + \mathrm{c}.$$

Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$
$$y'(r) = \mathrm{d}k,$$

quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$
$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

Dunque,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)}\, \mathrm{d}k = \Gamma(y(x)) + \mathrm{c}.$$

Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

con $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.

□