Dimostrazione numero 1

Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Ha due formulazioni:

Prima Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione limitata e Riemann-integrabile:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

È detta **funzione integrale** la funzione G:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \begin{aligned} G : [a, b] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Tesi

G è una funzione **continua**.

Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall x_0 \in [a, b] \qquad G(x_0) = \lim_{x \to x_0} G(x)$$

Per comodità consideriamo il limite da destra e $a < x_0 < x < b$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to {x_0}^+} G(x) = \lim_{x to x_0} \int_a^x f(t)dt = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\int_a^{x_0} + \int_{x_0}^x \right] = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt \right] = \\ &= G(x_0) \end{aligned}$$

$$m \leqslant f(t) \leqslant M \qquad \text{accumulo tra} \qquad x_0 \; ed \; x$$

$$m(x - x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant M(x_0 - x)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Seconda Forma

Data una funzione continua:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

È detta **funzione integrale** la funzione G:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \begin{aligned} G : [a, b] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

G è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a, b]) \quad e \quad G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione

Sia $x_0 \in (a, b)$, vogliamo dimostrare che G è derivabile in x_0

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x-0} f(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt && \text{VMI dif su}[x_0, x_0 + h] \\ &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ & && \textit{con } h \to 0 \textit{ e } \theta \to x_0 \end{aligned}$$