

# Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

# Indice

1	Disuguaglianza di Bernoulli	2
2	Teorema di Fermat	3
3	Teorema di Rolle	5
4	Teorema di Lagrange	6
5	Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto	8
6	Cardinalità di $\mathbb{R}^2$	10
7	Teorema di Cauchy	12
8	Teorema de l'Hospital	14
9	Teorema del resto secondo Peano	15

## Dimostrazione numero 1

# Disuguaglianza di Bernoulli

### Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo  $n$ .

Dimostriamolo per  $n+1$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

## Dimostrazione numero 2

# Teorema di Fermat

### Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- $x_0$  è un punto stazionario se  $f'(x_0) = 0$ ;
- $x_0$  è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- $x_M$  è un punto di massimo locale se  $M = f(x_M) \geq f(x) \forall x \in A$  dove  $M$  è il valore massimo locale;
- $x_m$  è un punto di minimo locale se  $m = f(x_m) \leq f(x) \forall x \in A$  dove  $m$  è il valore minimo locale.

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $x_0 \in A$ ;
2.  $f$  sia derivabile in  $A$ ;
3.  $x_0$  sia un punto di ottimo.

#### Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero  $x_0$  è un punto stazionario

## Dimostrazione

### Caso 1 - $x_0$ è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leq 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geq 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

### Caso 2 - $x_0$ è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando  $h > 0$  possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quando  $h < 0$  invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geq 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leq 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 3

# Teorema di Rolle

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f$  è continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ ;
2.  $f(a) = f(b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti  $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$ .

#### Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di  $f(x)$  su  $A$  e essendo  $A$  un intervallo chiuso e limitato, vale il **teorema di Weierstrass**.

$$\exists M, m / f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in A$$

e almeno uno tra  $x_m$  e  $x_M$  è interno ad  $(a, b)$  dato che  $m \neq M$  ( $f$  non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists x_0 \in (a, b) / f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 4

# Teorema di Lagrange

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che  $f$  sia continua su  $A$  e derivabile su  $(a, b)$ .

#### Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta passante  $a$  e  $b$ .

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $g(x)$  così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che  $g$  ha la regolarità di  $f$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned}g(a) &= f(a) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\&= f(a) - \left[ f(a) + 0 \right] \\&= f(a) - f(a) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(b) &= f(b) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\&= f(b) - \left[ f(a) + f(b) - f(a) \right] \\&= f(b) - f(b) = 0\end{aligned}$$

Da cui  $g(a) = g(b)$ .

Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su  $A$ :

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi  $g'(x)$ :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.



## Dimostrazione numero 5

# Test di monotonia di $f$ su un intervallo aperto

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f$  sia derivabile su  $(a, b)$ ;

#### Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su  $A$ .

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su  $A$ .

### Dimostrazione

#### Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$

Siano  $x_1, x_2 \in A / a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il **teorema di Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) > 0$  e anche  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è strettamente monotona crescente. c.v.d.

**Caso 2 -  $f'(x) < 0 \ \forall x \in A$**

Siano  $x_1, x_2 \in A / a < x_1 < x_2 < b$ . Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad  $A$ . Su  $[x_1, x_2]$  applico il **teorema di Lagrange** a  $f$  quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo  $f'(x_0) < 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$  ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi  $f(x)$  è strettamente monotona decrescente. c.v.d.

## Dimostrazione numero 6

# Cardinalità di $\mathbb{R}^2$

### Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto;

### Enunciato

#### Ipotesi

$\mathbb{R}$  ha la cardinalità del continuo.

#### Tesi

$\mathbb{R}^2$  ha la cardinalità del continuo.

### Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo  $[0, 1]$ .

#### Iniettività

Dato un punto generico  $P(x, y)$  definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1x_2x_3x_4\dots \text{ e } y_p = 0.y_1y_2y_3y_4\dots$$

l'immagine di  $P$  su  $\mathbb{R}$  è  $Q$ , così definito:

$$Q = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4\dots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P* \neq P / f(P*) = f(P)$$

$$P* = (0.x * _1 x * _2 x * _3 x * _4 \dots, 0.y * _1 y * _2 y * _3 y * _4 \dots)$$

allora

$$f(P*) = Q = 0.x * _1 y * _1 x * _2 y * _2 x * _3 y * _3 x * _4 y * _4 \dots$$

Ma visto che

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

$$\Rightarrow P = P* \Rightarrow \text{contraddizione}$$

Quindi  $f$  è **iniettiva**.

## **Suriettività**

Dato:

$$Q \in [0, 1] = 0.q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists? P^\circ \in [0, 1] \times [0, 1] / f(P^\circ) = Q$$

Sì,  $P^\circ$  è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1 q_3 q_5 \dots, 0.q_2 q_4 q_6 \dots)$$

Da cui si ricava che  $f$  è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.

## Dimostrazione numero 7

# Teorema di Cauchy

### Enunciato

#### Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre  $f, g$  continue in  $A$  e derivabili in  $(a, b)$

#### Tesi

$$\exists x^* \in (a, b) / \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria**  $h(x)$  così definita:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

Notiamo che  $h$  ha la regolarità di  $f$  e di  $g$  su  $A$ :

1. è continua su  $A$ ;
2. derivabile su  $(a, b)$ .

Verifico se su  $h$  nell'intervallo  $[a, b]$  vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) \\ h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ h(b) &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) \\ h(b) &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$h(a) = h(b)$  quindi posso applicare il **teorema di Rolle**. Da cui  $h$  ha un punto stazionario  $x^*$

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

$$h'(x^*) = 0$$

E quindi infine

$$h'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)]g'(x^*) - [g(b) - g(a)]f'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)]g'(x^*) = [g(b) - g(a)]f'(x^*)$$

$$\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 8

# Teorema de l'Hospital

### Enunciato

#### Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1.  $f, g$  continue in  $A$  e derivabili in  $(a, b)$ ;
2.  $f, g$  infinitesime in  $x_0 \in (a, b)$ .

#### Tesi

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

### Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists \theta \in (a, b) \wedge \theta \in (x_0, x)$$

Aggiungo  $f(x_0)$  che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo  $(x_0, x)$  :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

c.v.d.

## Dimostrazione numero 9

# Teorema del resto secondo Peano

### Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ( $T_n^f(x)$ ) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

### Enunciato

#### Ipotesi

Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1.  $f \in C^n(A)$ ;
2.  $x_0 \in A$ .

#### Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x - x_0)^n)$$

### Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

#### Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per  $n = 1$ :

$$f \in C^1(A)$$

$$f(x) - \left[ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right] \stackrel{?}{=} o((x - x_0))$$



Per la definizione di  $o$ -piccolo una funzione  $(f(x))$  è  $o$ -piccolo di un'altra  $(g(x))$  quando il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right]}{(x - x_0)} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) \rightarrow 0$$

Quindi  $F(1)$  è vera.

**Ipotesi induttiva:**  $F(n-1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\forall g \in C^{n-1}(A)$$

$$g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

**Verifica per  $F(n)$**

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di  $o$ -piccolo:

$$B_\epsilon(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

Questa è però una forma di indeterminazione  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  per risolverla, le applico il **teorema de l'Hospital**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left[ f(x) - T_n^f(x) \right]'}{\left[ (x - x_0)^n \right]'}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \left[ T_n^f(x) \right]'}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Calcolo  $\left[ T_n^f(x) \right]'$  a parte:

$$\begin{aligned} \left[ T_n^f(x) \right]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} 3(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} n(x - x_0)^{n-1} \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \\ &= T_{n-1}^{f'}(x) \end{aligned}$$

Infatti se  $f \in C^n(A) \Rightarrow f' \in C^{n-1}$ .

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che  $f' \in C^{n-1}$  e che  $g \in C^{n-1}$  poniamo quindi  $g = f'$ . Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

c.v.d.