

Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

Indice

1	Disuguaglianza di Bernoulli	2
2	Teorema di Fermat	3
3	Teorema di Rolle	5
4	Teorema di Lagrange	6
5	Test di monotonia di f su un intervallo aperto	8
6	\mathbb{R}^2 ha la cardinalità di \mathbb{R}	10

Dimostrazione numero 1

Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n .

Dimostriamolo per $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

Dimostrazione numero 2

Teorema di Fermat

Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- x_0 è un punto stazionario se $f'(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geq f(x) \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_m è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leq f(x) \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A ;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1 - x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \geq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leq 0 \text{ dove } L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geq 0 \text{ dove } L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2 - x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geq 0 \text{ dove } L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leq 0 \text{ dove } L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 3

Teorema di Rolle

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f è continua su A e derivabile su (a, b) ;
2. $f(a) = f(b)$.

Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$.

Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di $f(x)$ su A e essendo A un intervallo chiuso e limitato, vale il teorema di **Weierstrass**.

$$\exists M, m / f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in A$$

e almeno uno tra x_m e x_M è interno ad (a, b) dato che $m \neq M$ (f non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists x_0 \in (a, b) / f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 4

Teorema di Lagrange

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia continua su A e derivabile su (a, b) .

Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante a e b .

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $g(x)$ così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che g ha la regolarità di f su A :

1. è continua su A ;
2. derivabile su (a, b) .

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned}g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\&= f(a) - \left[f(a) + 0 \right] \\&= f(a) - f(a) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\&= f(b) - \left[f(a) + f(b) - f(a) \right] \\&= f(b) - f(b) = 0\end{aligned}$$

Da cui $g(a) = g(b)$.

Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su A :

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 5

Test di monotonia di f su un intervallo aperto

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f sia derivabile su (a, b) ;

Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su A .

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su A .

Dimostrazione

Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A / a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A . Su $[x_1, x_2]$ applico il teorema di **Lagrange** a f quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) > 0$ e anche $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è strettamente monotona crescente. c.v.d.

Caso 2 - $f'(x) < 0 \ \forall x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A / a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A . Su $[x_1, x_2]$ applico il teorema di **Lagrange** a f quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è strettamente monotona decrescente. c.v.d.

Dimostrazione numero 6

\mathbb{R}^2 ha la cardinalità di \mathbb{R}

Enunciato

Ipotesi

Tesi

Dimostrazione