Analisi Matematica II

Mattia Martelli

Indice

Indice delle Definizioni e dei Teoremi

PARTE I

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

CAPITOLO I

Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

Definizione 1 (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine)**.** Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita $y(x)$, dove $x \in \mathbb{R}$, e la sua derivata prima $y'(x)$:

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0.$$

In altre parole, **una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione**.

Definizione 2 (Forma normale di una EDO)**.** Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma

$$y'(x) = f\left(x,\, y(x)\right).$$

Definizione 3 (Integrale generale e particolare di una EDO)**.** Data la EDO

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) = 0,$$

chiamiamo **integrale generale** dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Si chiama **integrale particolare** dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo
$$y'(x) = f(x),$$
cioè EDO del primo ordine in forma normale con $f\left(x,\, \cancel{y(x)}\right)$, basta integrare:
$$y(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare y conoscendo delle informazioni relative a y'. Da qui il nome *integrale generale*.

- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

CAPITOLO II

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

Definizione 4 (EDO a variabili separate)**.** Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Cioè $f(x, y) = h(x) \times g(y)$ è il prodotto di una funzione che dipende solo da x per una funzione che dipende solo da y.

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 1 (Risoluzione di EDO a variabili separabili)**.** *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x)\ g(y(x)),$$

con $h : \mathrm{J}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathrm{J}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

I. Se $g(D) = 0$ *per qualche* $D \in \mathbb{R}$ *allora la funzione costante* $y(x) = D, \forall\, x$ *è soluzione.*

II. Se $g(y) \neq 0, \forall\, y$ *in un certo intervallo, una soluzione* $y(x)$ *è definita implicitamente dall'equazione*

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

dove

- $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
- H *è una primitiva di* h*;*
- Γ *è una primitiva di* $\frac{1}{g}$*.*

Se Γ *non è invertibile otteniamo eslicitamente*

$$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + \mathrm{c}),$$

con $c \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le categorie:

I. Sia $g(D) = 0$ e $y(x) = D$, $\forall\, x$. L'identità è soddisfatta:

   (a) Sinistra: $y'(x) = 0$;

   (b) Destra: $h(x)\, g(y(x)) = h(x)\, g(D) = h(x) \times 0 = 0$.

II. Prendiamo un intervallo $[x_0, x]$ in cui la funzione $g(y)$ non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Dati $x_0 < x$, con x_0, $x \in \mathrm{J}_1$, integriamo:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{x_0}^{x} h(r)\, \mathrm{d}r = H(x) + \mathrm{c}.$$

Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$
$$y'(r) = \mathrm{d}k,$$

quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$
$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

Dunque,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, \mathrm{d}r = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)}\, \mathrm{d}k = \Gamma(y(x)) + \mathrm{c}.$$

Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + \mathrm{c},$$

con $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.

$\square$

CAPITOLO III

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

Definizione 5 (EDO lineari del primo ordine)**.** Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma

$$c(x)\,y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x),$$

con $c, a, b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue su J.

Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

Teorema 2 (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine)**.** *Date $a, b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x).$$

L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[B(x) + \mathrm{c}\right],$$

dove

- $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$*;*
- $A(x)$ *è una qualunque primitiva di* $a(x)$*:* $A = \int a$*;*
- $B(x)$ *è una qualunque primitiva di* $e^{A(x)}\,b(x)$*:* $A = \int e^{\int a}\,b$*.*

Dimostrazione. Moltiplichiamo tutto per a^A

$$\underbrace{y'\,e^A + a\,y\,e^A}_{(y\,e^A)'} = b\,e^A,$$

infatti

$$\left(y\,e^A\right)' = y'\,e^A + y\,\left(e^A\right)' = y'\,e^A + y\,e^A\,A' = y'\,e^A + y\,e^A\,a.$$

Quindi la nostra equazione è uguale a

$$\Big(y(x)\,e^{A(x)}\Big)' = e^{A(x)}\,b(x).$$

Ora integriamo tra x_0 e x:

$$\int_{x_0}^{x} \Big(y(s)\, e^{A(s)} \Big)' \, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}\, b(s)\, \mathrm{d}s.$$

Uso il teorema fondamentale del calcolo integrale per il lato sinistro:

$$y(x)\, e^{A(x)} \underbrace{-y(x_0)\, e^{A(x_0)}}_{-\mathrm{c}} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} e^{A(s)}\, b(s)\, \mathrm{d}s}_{B(x)}.$$

Per ottenere la formula è sufficiente moltiplicare questa equazione per $e^{-A(x)}$. □

Introduciamo ora le EDO omogenee del primo ordine con alcuni importanti teoremi.

Definizione 6 (Equazione omogenea associata ad una EDO del primo ordine)**.** Data una EDO lineare del primo ordine nella forma

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x),$$

si chiama **equazione omogenea associata** la EDO

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = 0.$$

Teorema 3 (Principio di sovrapposizione per EDO lineari omogenee del primo ordine)**.** *Data* $a : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua, consideriamo la EDO omogenea*

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = 0.$$

Se y_1 *e* y_2 *sono due soluzioni di questa equazione e* α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, *allora*

$$\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x)$$

è anch'essa soluzione dell'equazione.

Dimostrazione. Sapendo che

$$y_1'(x) + a(x)\, y_1(x) = y_2'(x) + a(x)\, y_2(x) = 0,$$

dobbiamo dimostrare che

$$(\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x))' + a(x)\, (\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x)) = 0.$$

Possiamo riarrangiare i termini per linearità:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x))' + a(x)\, (\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x)) &= \\
&= \alpha_1\, y_1'(x) + \alpha_2\, y_2'(x) + a(x)\, \alpha_1\, y_1(x) + a(x)\, \alpha_2\, y_2(x) \\
&= \alpha_1\, (y_1'(x) + a(x)\, y_1(x)) + \alpha_2\, (y_2'(x) + a(x)\, y_2(x)) \\
&= \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

□

Teorema 4 (Struttura dell'integrale generale di EDO lineari del primo ordine)**.** *Siano* a, $b : \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue:*

I. L'integrale generale dell'equazione omogenea

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione unitaria, cioè

$$y_O(x) = \mathrm{C} \times \overline{y_O}(x),$$

con $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

II. L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x)$$

equivale a

$$y(x) = y_O(x) + y_P(x),$$

dove

- $y_O(x)$ *è l'integrale dell'equazione omogenea, come al punto I;*
- $y_P(x)$ *è una soluzione particolare dell'equazione completa.*

Introduciamo infine il concetto di problema di Cauchy.

Definizione 7 (Problema di Cauchy)**.** Data la EDO del primo ordine in forma normale

$$y'(x) = f\,(x,\, y(x))$$

ed assegnata la coppia $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nella quale f è ben definita, si chiama **problema di Cauchy** il problema di determinare $y : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} y'(x) = f\,(x,\, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

CAPITOLO IV

Equazioni differenziali non lineari del primo ordine risolvibili esplicitamente

Non tutte le equazione diferenziali non lineari del primo ordine sono risolvibili esplicitamente. Quelle che possono essere risolte sono:

I. EDO a variabili separabili,

II. EDO non lineari omogenee,

III. Equazioni di Bernoulli.

Le equazioni a variabili separabili sono già state trattate nel **relativo capitolo**. Discutiamo dunque delle EDO non lineari omogenee.

I Equazioni differenziali ordinarie non lineari omogenee

Partiamo dalla definizione.

Definizione 8 (EDO non lineari omogenee)**.** Una EDO non lineare omogenea è della forma

$$y'(x) = \frac{P(x,\, y(x))}{Q(x,\, y(x))},$$

con P e Q polinomi omogenei, ovvero composti solamente da monomi di uno stesso grado n.

Delineiamo quindi una strategia di risoluzione:

I. Dividiamo ciascun monomio per x^n.

II. Eseguiamo il cambio di variabile con

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

III. Otteniamo dunque un'equazione a variabili separabili che possiamo facilmente risolvere.

IV. Infine torniamo alla variabile iniziale y, tenendo a mente che $y(x) = x\, z(x)$, in base al cambio di variabile precedentemente fatto.

II Equazioni di Bernoulli

L'ultima categoria è quella delle equazioni di Bernoulli. Partiamo anche in questo caso dalla definizione.

Definizione 9 (Equazione di Bernoulli)**.** Chiamiamo equazione di Bernoulli una EDO non lineare del tipo

$$y'(x) = f(x)\, y(x) + g(x)\, y(x)^{\alpha},$$

con $f,\, g : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \notin \{0,\, 1\}$.

Le condizioni su α sono state imposte in quanto:

- Per $\alpha = 0$, l'equazione diventa $y'(x) = f(x)\, y(x) + g(x)$, la quale è lineare;
- Per $\alpha = 1$, l'equazione diventa $y'(x) = (f(x) + g(x))\; y(x)$, la quale è lineare a variabili separabili.

Delineiamo ora la strategia di risoluzione:

I. Cerchiamo le soluzioni costanti:
   - Se $\alpha > 1$ poniamo
     $$f(x)\, y + g(x)\, y^{\alpha} = 0,$$
     che possiamo riscrivere come
     $$y\left(f(x) + g(x)\, y^{\alpha-1}\right) = 0,$$
     che implica
     $$y(x) = 0 \quad \forall\, x.$$
   - Se $0 < \alpha < 1$ poniamo
     $$f(x)\, y + g(x)\, y^{\alpha} = 0,$$
     che possiamo riscrivere come
     $$y^{\alpha}\left(f(x)\, y^{1-\alpha} + g(x)\right) = 0,$$
     che implica
     $$y(x) = 0 \quad \forall\, x.$$
   - Se f e g sono delle costanti in $\mathbb{R}$, troviamo un'ulteriore soluzione costante come
     $$y(x) = \left(-\frac{f}{g}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad \forall\, x.$$

II. Per cercare le soluzioni non costanti, dividiamo l'equazione per $y^{\alpha}(x)$, ottenendo
   $$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} = \frac{f'(x)}{y^{\alpha-1}(x)} + g(x).$$
   Dunque l'equazione diventa
   $$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{y^{\alpha-1}(x)}\right)' = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)} + g(x).$$

III. Effetuiamo il cambio di variabili con
   $$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)}.$$
   Sostituendo si ottiene
   $$\frac{1}{1-\alpha} z'(x) = f(x)\, z(x) + g(x),$$
   o, più esplicitamente,
   $$z'(x) - (1-\alpha)\, f(x)\, z(x) = (1-\alpha)\, f(x),$$
   la quale è una EDO lineare con
   - $a(x) = -(1-\alpha)\, g(x)$,
   - $b(x) = (1-\alpha)\, g(x)$.

IV. Si risolve l'equazione lineare in z e poi si torna alla variabile $y(x)$.

CAPITOLO V

Modelli di crescita delle popolazioni

Tramite le equazioni differenziali, possiamo definire dei semplici modelli di crescita. In particolare, trattiamo il modello di Malthus e l'equazione logistica.

I Modello di Malthus

Il modello di Malthus è stato il primo modello di dinamica delle popolazioni a essere introdotto, per la precisione verso la fine del 1700, ed è il più semplice modello di crescita esponenziale. Il modello deve il suo nome al reverendo Thomas Robert Malthus, uno dei primi ad essersi dedicati allo studio demografico.

Il modello è il seguente: supponiamo che la densità di una certa popolazione possa essere rappresentata da una funzione regolare

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geqslant 0\} \\ x &\mapsto y(x) \end{aligned},$$

dove $y(x)$ rappresenta la densità di popolazione al tempo x. Secondo Malthus la popolazione cresce ad un tasso proporzionae al suo numero di individuoi secondo la formula

$$y'(x) = k\, y(x),$$

dove

- $y'(x)$ rappresenta il tasso di crescita,
- k è detta *costante di crescita* e dipende dalla natalità e dalla mortalità,
- il tasso di crescita di y è proporionale a y stesso.

Possiamo dunque risolvere questa equazione. Innanzitutto troviamo la soluzione costante

$$y(x) = 0 \quad \forall\, x.$$

Concentriamoci dunque sulle soluzioni non triviali:

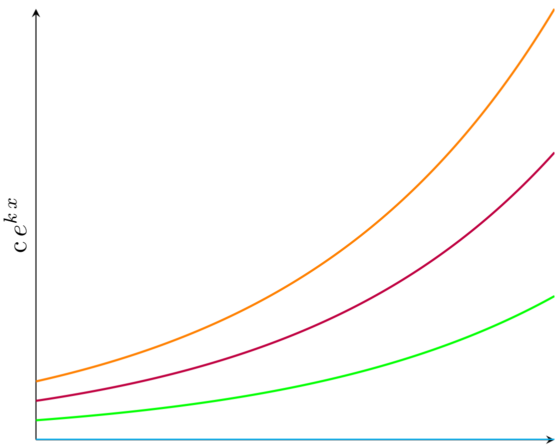
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)}\, \mathrm{d}s &= \int_{x_0}^{x} k\, \mathrm{d}s \\ [\ln y(s)]_{x_0}^{x} &= k\,(x - x_0) \\ \ln \frac{y(x)}{y(x_0)} &= k\,(x - x_0) \\ y(x) &= y(x_0)\, e^{k\,(x-x_0)} \\ y(x) &= \mathrm{c}\, e^{k\,x}, \end{aligned}$$

con

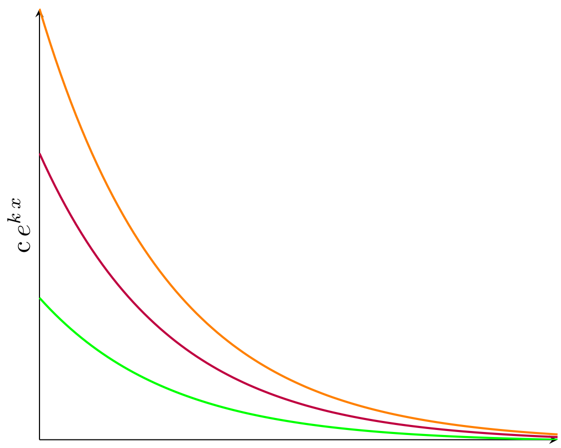
- $c \in \mathbb{R}$,
- $c = y(x_0)\, e^{-k\, x_0}$,
- $x > 0$.

Studiamo graficamente l'andamento:

Fissato $k \geqslant 0$



Fissato $k < 0$



Riassumendo, questo modello prevede tre comportamenti possibili, in base a k:

- Se $k > 0$, cioè la natalità è superiore alla mortalità, la popolazione aumenta esponenzialmente;
- Se $k = 0$, cioè la natalità è equivalente alla mortalità, la popolazione resta costante;
- Se $k < 0$, cioè la natalità è inferiore alla mortalità, la popolazione si estingue esponenzialmente.

II Equazione logistica

L'equazione logistica è stata introdotta dal matematico francese Pierre François Verhulst verso la metà del 1800. Questa è più articolata rispetto alla precedente.

La formulazione è la seguente: al crescere della popolazione, diventa più difficile procurarsi il cibo. Possiamo dunque definire un'equazione

$$y'(x) = k\, y(x) - g(y(x)),$$

con g funzione opportuna. una buona scelta di g risulta

$$g(s) = h\, s^2,$$

con h costante positiva. Dunque, l'equazione logistica diventa

$$y'(x) = k\, y(x) - h\, y^2(x).$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con soluzioni:

- Soluzioni costanti:

$$y = 0,$$
$$y = \frac{k}{h};$$

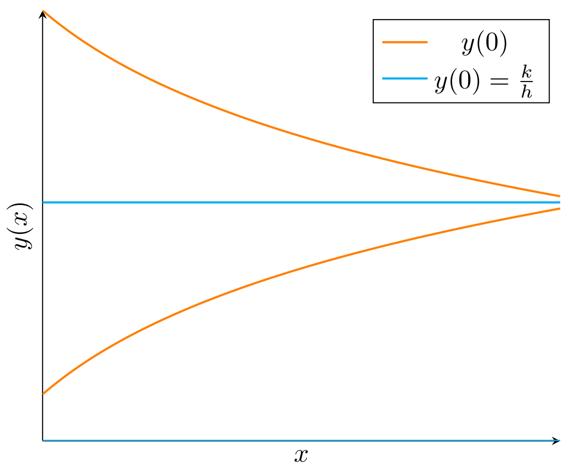
- Soluzioni non costanti:

$$y(x) = \frac{k\, e^{k\, x}}{\mathrm{c} + h\, e^{k\, x}},$$

  dove $x > 0$ e $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ e con

$$y(0) = \frac{k}{\mathrm{c} + h}.$$

Studiamo graficamente l'andamento:



PARTE II

SERIE DI FUNZIONI, SERIE DI POTENZE E SERIE DI FOURIER

CAPITOLO VI

Serie di funzioni

Introduciamo il concetto di serie di funzione.

Definizione 10 (Serie di funzioni)**.** Dato un intervallo $\mathrm{J} \subseteq \mathbb{R}$, siano, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ delle funzioni. La serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$ è la successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f_0(x), \\ S_1(x) &= f_0(x) + f_1(x), \\ &\dots \\ S_k(x) &= \sum_{n=0}^{k} f_n(x). \end{aligned}$$

Osservazione. Fissato un punto $\overline{x} \in \mathrm{J}$, si ha che la serie di termine generale $f_n(\overline{x})$ è una serie numerica. Abbiamo quindi infinite serie numeriche, una per ogni $x \in \mathrm{J}$.

Parliamo dunque della convergenza.

Definizione 11 (Convergenza puntuale di una serie di funzioni)**.** Diciamo che la serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$, $x \in \mathrm{J}$, **converge puntualmente** o semplicemente nel punto $\overline{x} \in \mathrm{J}$ se la serie numerica di termine generale $f_n(\overline{x})$ è convergente, ovvero se esiste finito il limite

$$\lim_{k \to +\infty} S_k(\overline{x}) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n(\overline{x}).$$

Osservazione. Una serie di funzioni può essere convergente per alcuni $x \in \mathrm{J}$, divergente od indeterminata per altri $x \in \mathrm{J}$.

Da questa ultima osservazione deriva la prossima definizione.

Definizione 12 (Insieme di convergenza puntuale e somma della serie)**.** L'insieme $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{J}$ dei punti x in cui la serie converge è detto **insieme di convergenza puntuale** della serie. Nell'insieme E risulta definita la **somma della serie**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{k \to +\infty} S_k(x), \quad \text{con } x \in \mathrm{E}.$$

Un altro tipo di convergenza, simile a quella puntuale, è quella assoluta: per ogni fissato $\overline{x} \in \mathrm{J}$ guardiamo la convergenza della serie numerica $|f_n(\overline{x})|$.

Definizione 13 (Convergenza assoluta di una serie di funzioni)**.** Diciamo che la serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$, con $x \in \mathrm{J}$, **converge assolutamente** nel punto $\overline{x} \in \mathrm{J}$ se la serie numerica di termine generale $|f_n(\overline{x})|$ è convergente.

Osservazione. La convergenza assoluta implica quella semplice, ovvero, se una serie converge assolutamente in $\overline{x}$ allora $\overline{x}$ appartiene al suo insieme di convergenza puntuale.

Esiste un altro tipo di convergenza, che prende in considerazione un intervallo.

Definizione 14 (Convergenza totale di una serie)**.** La serie di termine generale $f_n(x)$, con $x \in \mathrm{J}$, **converge totalmente** in $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{J}$ se:

I. si ha $|f_n(x)| \leqslant a_n$, $\forall\, x \in \mathrm{I}, n \in \mathbb{N}$,

II. la serie numerica di termine generale a_n è convergente.

Osservazione. La convergenza totale in I implica la convergenza assoluta per ogni $\overline{x} \in \mathrm{I}$, che a sua volta implica quella puntuale. Questa implicazione non si applica però all'inverso.

Osservazione. Se le f_n sono continue e la serie converge totalmente, allora la funzione somma è continua ed integrabile termine a termine.

CAPITOLO VII

Serie di potenze in $\mathbb{R}$

Introduciamo il concetto di serie di potenze.

Definizione 15 (Serie di potenze)**.** Una serie di potenze reale è una serie di funzioni nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

con $a_n \in \mathbb{R}$ **coefficienti** della serie e $x_0 \in \mathbb{R}$ **centro** della serie.

Osservazione. Stiamo adottando la convenzione che, nel caso $x = x_0$ e $n = 0$, si ha

$$a_0 (x_0 - x_0)^0 = a_0 \times 1 = a_0.$$

Si tratta di una convenzione, in quanto la scrittura 0^0 in realtà non è determinata.

In particolare, nel caso $x = x_0$ e n generico si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \ldots = a_0,$$

dunque tutte le serie di potenze convergono in $x = x_0$.

L'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un intervallo centrato in x_0. Questo ci porta al nostro prossimo teorema.

Teorema 5 (Raggio di convergenza di una serie di potenze reale)**.** *Data una serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

si verifica sempre una tra tre condizioni:

I. *la serie converge solo per $x = x_0$, dunque si ha un raggio di convergenza nullo;*

II. *la serie converge assolutamete su tutto $\mathbb{R}$, dunque si ha un raggio di convergenza infinito;*

III. *esiste un numero reale $\mathbb{R} > 0$ tale che:*
   - *la serie converge assolutamente per ogni x con $|x - x_0| < R$,*
   - *la serie non converge per $|x - x_0| > R$,*

   dunque si ha un raggio di convergenza R.

Osservazione. Per quanto riguarda il caso numero tre, nulla è detto riguardo ai punti $x = x_0 \pm R$, perciò vanno analizzati caso per caso.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare due cose:

I. l'insieme di convergenza semplice è un intervallo "privo di buchi" centrato in x_0;

II. nell'intervallo di convergenza, la convergenza è assoluta.

Partiamo dal punto primo. Chiamiamo E l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze data. È sufficiente dimostrare l'implicazione

$$x \in \mathrm{E} \implies \forall\, y \mid |y - x_0| < |x - x_0|,\ y \in \mathrm{E}. \tag{*}$$

Data y che soddisfa l'implicazione, devo dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(y - x_0\right)^n$$

converge.

Per prima cosa osserviamo che $x \in \mathrm{E}$ implica

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n \left(x - x_0\right)| = 0, \tag{**}$$

in quanto, poiché la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ converge, il suo termine generale tende a zero. Poi calcoliamo

$$|a_n \left(y - x_0\right)^n| = \underbrace{|a_n \left(x - x_0\right)^n|}_{\leqslant 1 \text{ per } n \text{ grande grazie a (**)}} \times \left|\frac{\left(y - x_0\right)^n}{\left(x - x_0\right)^n}\right|.$$

Quindi,

$$|a_n \left(y - x_0\right)^n| \leqslant \left|\frac{y - x_0}{x - x_0}\right|^n$$

per n grande.

Grazie a (*), la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{y - x_0}{x - x_0}\right|^n$$

è convergente, in quanto è una geometrica con ragione $q < 1$. Quindi, per il teorema del confronto, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \left(y - x_0\right)^n|$$

è convergente, cioè $y \in \mathrm{E}$. Abbiamo dunque dimostrato il punto primo. Il punto secondo è stato anch'esso dimostrato, in quanto sono stati usati i valori assoluti. $\square$

Introduciamo ora il teorema che sancisce come calcolare questo raggio di convergenza.

Teorema 6 (Calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze reale)**.** *Data la serie di potenze*

$$\sum_{x=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n,$$

possiamo calcolare il raggio di convergenza R come

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

o, alternativamente, come

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

dove R esiste ed appartiene all'insieme $[0, +\infty]$.

Osservazione. Il criterio del rapporto ed il criterio della radice per le serie numeriche forniscono $\frac{1}{R}$.

A questo punto, definiamo un paio di serie importanti.

Definizione 16 (Serie esponenziale)**.** La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots,$$

avente $x_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$, è detta **serie esponenziale**.

Il suo raggio di convergenza è dato da

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}(n+1)! = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

La serie esponenziale converge dunque assolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Definizione 17 (Serie logaritmica)**.** La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots,$$

avente $x_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n}$, con $n \geqslant 1$, è detta **serie logaritmica**.

Il suo raggio di convergenza è dato da

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left|\sqrt[n]{a_n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

La serie logaritmica converge dunque assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Per quanto riguarda il caso $|x| = 1$, se $x = 1$ la serie è una serie armonica divergente, mentre con $x = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz.

In conclusione, la serie logaritmica ha insieme di convergenza semplice $[-1,\, 1)$ ed insieme di convergenza assoluta $(-1,\, 1)$.

Terminiamo il capitolo introducendo gli ultimi teoremi.

Teorema 7 (Convergenza totale per una serie di potenze reale)**.** *Data una generica serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n,$$

avente raggio di convergenza $0 < R \leqslant +\infty$*, si ha:*

- *Se* $R = +\infty$*, la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso* $[a,\, b]$, $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$*, con* $a < b$.
- *Se* $0 < R < +\infty$*, la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso* $[a,\, b] \subset (x_0 - R,\, x_0 + R)$.

Teorema 8 (Integrabilità e derivabilità termine a termine per una serie di potenze reale)**.** *Sia data una generica serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n,$$

avente raggio di convergenza $0 < R \leqslant +\infty$ *e somma* $f(x)$*, con* $x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$*. Allora:*

I. Per ogni $x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$ *si ha*

$$\int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s := \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(s - x_0)^n\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (s - x_0)^n\,\mathrm{d}s$$

ed il raggio di convergenza della serie integrata è anch'esso R.

II. $f(x)$ *è derivabile, dunque in particolare anche continua, in* $(x_0 - R, x_0 + R)$*. Inoltre,*

$$f'(x) \coloneqq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n (x - x_0)^n)'$$

ed il raggio di convergenza della serie derivata è anch'esso R*.*

Osservazione. La serie di potenze è in realtà derivabile ad ogni ordine, mantenendo il raggio di convergenza.

Osservazione. Il comportamento della serie in $x = x_0 \pm R$ può variare, dunque va studiato separatamente.

CAPITOLO VIII

Serie di Taylor

Prendiamo ora una funzione derivabile infinite volte f e chiediamoci: esiste una serie di potenze la cui somma sia proprio f?

Spezziamo questa domanda in tre sotto-domande:

I. Qual è la serie candidata?

II. Qual è il raggio di convergenza della serie candidata?

III. La serie candidata converge a f ovunque dentro il raggio di convergenza?

Partiamo dalla prima. Ricordiamo che, data $f : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte, il suo polinomio di Taylor centrato in $x_0 \in \mathrm{I}$ di ordine m è

$$\mathrm{T}_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m.$$

Come già visto nel corso di Analisi Matematica I, se f è derivabile infinite volte, vale lo sviluppo di Taylor all'ordine m, $\forall\, m$,

$$f(x) = \mathrm{T}_m(x) + o(|x-x_0|^m),$$

dove $o(|x-x_0|^m)$ è tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(|x-x_0|^m)}{|x-x_0|^m} = 0.$$

Definizione 18 (Serie di Taylor)**.** Sia $f : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to R$ derivabile inifinite volte in $x_0 \in \mathrm{I}$. Si chiama **serie di Taylor con centro x_0 della funzione** f la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

I numeri $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ sono detti **coefficienti di Taylor** e se $x_0 = 0$ la serie è anche detta **serie di McLaurin**.

Passiamo ora alla seconda domanda. Come per tutte le serie di potenze, il raggio di convergenza può essere:

- $R = 0$, dunque la serie converge solo in x_0 e dunque non proseguiamo,
- $R > 0$, compreso il caso $R = +\infty$, e dunque possiamo proseguire.

Passiamo dunque alla terza domanda.

PARTE III

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

CAPITOLO IX

Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Un'equazione differenziale del secondo ordine si presenta nella forma

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t),$$

con $t \in \mathrm{I}$. Definiamo dunque una sua soluzione.

Definizione 19 (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine)**.** Si dice **soluzione dell'equazione differenziale** nell'intervallo $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ una funzione $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ **derivabile due volte** per cui, sostituendo nell'equazione differenziale i valori effettivi di $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$, si ottiene che

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t) \quad \forall\, t \in \mathrm{I},$$

cioè un'identità su I.

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha soluzioni infinite. Queste vengono racchiuse nella loro totalità in dipendenza da due parametri all'interno dell'integrale generale. Se a questo aggiungiamo una coppia di condizioni iniziali otteniamo una soluzione specifica. Il sistema formato dall'integrale generale e le condizioni iniziali è detto **problema di Cauchy** ed il teorema che garantisce l'unicità della soluzione è detto **teorema di Cauchy**.

Teorema 9 (Teorema di Cauchy)**.** *Data l'equazione differenziale*

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t),$$

con $t \in \mathrm{I}$, a, b, c e d funzioni continue in I e $a \neq 0$, allora, $\forall\, t_0 \in \mathrm{I}$ e $\forall\,(y_0,\, v_0) \in \mathbb{R}^2$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

*ha **una ed una sola** soluzione definita su **tutto l'intervallo** I.*

Introduciamo dunque un importante teorema che sfrutta la linearità delle equazioni: il principio di sovrapposizione.

Teorema 10 (Principio di sovrapposizione)**.** *Se y_1 è soluzione di $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1$ ed y_2 è soluzione di $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_2$, allora la funzione*

$$y(t) = \mathrm{C}_1\, y_1(t) + \mathrm{C}_2\, y_2(t)$$

è soluzione di

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = \mathrm{C}_1\, f_1 + \mathrm{C}_2\, f_2.$$

Prendiamo ora un'equazione differenziale omogenea, ovvero con $f = 0$. Possiamo a questo punto notare che l'insieme S delle soluzioni forma uno **spazio vettoriale** di dimensione due. Da questo ricaviamo il teorema di struttura.

Teorema 11 (Teorema di struttura)**.** *L'integrale generale di*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = 0,$$

con a, b e c continue su I *e $a(t) \neq 0$, è dato da tutte le combinazioni lineari*

$$y(t) = \mathrm{C}_1\, y_1(t) + \mathrm{C}_2\, y_2(t) \quad \forall\, \mathrm{C}_1,\, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1 ed y_2 sono due ***soluzioni linearmente indipendenti*** *dell'equazione stessa.*

Osserviamo adesso un'equazione con $f \neq 0$. Questa è detta completa o **non omogenea**. Se poniamo $f = 0$, otteniamo dunque l'equazione **omogenea associata**. Definendo y_P come una particolare soluzione dell'equazione completa e y_0 come una particolare soluzione dell'equazione omogenea associata, notiamo che queste soddisfano il principio di sovrapposizione. Con queste premesse possiamo dunque estendere il teorema di struttura alle equazioni non omogenee.

Teorema 12 (Teorema di struttura per equazioni complete)**.** *L'integrale generale di*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t),$$

con a, b, c e f continue su I *e $a(t) \neq 0$, è dato da* ***tutte e sole*** *le funzioni*

$$y(t) = \mathrm{C}_1\, y_1(t) + \mathrm{C}_2\, y_2(t) + y_P(t) \quad \forall\, \mathrm{C}_1,\, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1 ed y_2 sono due ***soluzioni linearmente indipendenti*** *dell'equazione omogenea associata*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = 0$$

e y_P è una ***soluzione particolare*** *dell'equazione completa*

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t).$$

CAPITOLO X

Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

Per studiare un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti, possiamo sfruttare il teorema di struttura. Partiamo innanzitutto definendo il **polinomio caratteristico**: data una generica equazione differenziale $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$, il polinomio caratteristico associato è

$$P(\lambda) = a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c.$$

Possiamo dunque facilmente definire l'equazione caratteristica come $P(\lambda) = 0$, o, più esplicitamente,

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0.$$

Abbiamo dunque ricondotto la ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea a quella delle radici del polinomio caratteristico, ovvero alla risoluzione dell'equazione caratteristica. La natura delle radici dipende chiaramente dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

I Il caso $\Delta > 0$

Nel caso di un discriminante positivo, possiamo ricavare due radici **reali e distinte** tramite la classica formula

$$\lambda_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

da cui ricaviamo le due soluzioni dell'equazione differenziale come

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t},$$
$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

linearmente indipendenti poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Possiamo dunque sfruttare il teorema di struttura ed ottenere l'integrale generale dell'equazione di partenza come

$$y(t) = \mathrm{C}_1\,e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2\,e^{\lambda_2 t}.$$

II Il caso $\Delta < 0$

Nel caso di un discriminante negativo, possiamo ricavare due radici **complesse e coniugate** definite come

$$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta,$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\,\beta,$$

dove

$$\alpha = \frac{-b}{2a},$$
$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

ricavabili dalla formula classica. Prendendo la generica soluzione $y(t) = e^{\lambda\, t}$ e ricordando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso $e^{\alpha + i\,\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\,\sin\beta)$, possiamo dunque scrivere le soluzioni come

$$y_1(t) = e^{\alpha}(\cos\beta + i\,\sin\beta),$$
$$y_2(t) = e^{\alpha}(\cos\beta + i\,\sin\beta).$$

Ma poiché cerchiamo soluzioni reali, dobbiamo definire due funzioni che chiameremo u come

$$u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2},$$
$$u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2},$$

che possono dunque essere generalizzate come

$$u_1(t) = e^{\alpha\, t}\cos(\beta\, t),$$
$$u_2(t) = e^{\alpha\, t}\sin(\beta\, t).$$

L'integrale generale è dunque

$$y(t) = e^{\alpha\, t}\left(\mathrm{C}_1\,\cos(\beta\, t) + \mathrm{C}_2\,\sin(\beta\, t)\right).$$

III Il caso $\Delta = 0$

Nel caso di un discriminante nullo, possiamo ricavare due radici **reali e concidenti** definite come

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

come si può facilmente ricavare dalla formula classica. Poiché abbiamo una sola soluzione, abbiamo bisogno di cercare una funzione $C(t)$ tale che

$$y_2(t) = C(t)\,e^{\lambda_1},$$
$$y_2(t)' = e^{\lambda_1}\left(C'(t) + \lambda_1\,C(t)\right),$$
$$y_2(t)'' = e^{\lambda_1}\left(C''(t) + 2\lambda_1\,C'(t) + 3\lambda_1\,C(t)\right).$$

Se sostituiamo nell'equazione differenziale ci accorgiamo che tutti i termini contenenti $C(t)$ e $C'(t)$ si semplificano, risultando nell'equazione

$$C''(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

La più semplice funzione che soddisfa l'equazione è la funzione identità, ovvero $C(t) = t$. Possiamo dunque generalizzare quanto trovato definendo l'integrale generale come

$$y(t) = \mathrm{C}_1\,e^{\lambda_1\, t} + \mathrm{C}_2\,t\,e^{\lambda_2\, t}.$$

IV Tabella riassuntiva

Riassumiamo quanto trovato in una tabella.

Δ	Radici	Soluzioni		Integrale generale
		$y_1(t)$	$y_2(t)$	$\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}$	$e^{\lambda_2 t}$	$y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}$	$t\, e^{\lambda_2 t}$	$y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, t\, e^{\lambda_2 t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm \beta,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha t} \cos(\beta\, t)$	$e^{\alpha t} \sin(\beta\, t)$	$y(t) = e^{\alpha t}\, (C_1\, \cos(\beta\, t) + C_2\, \sin(\beta\, t))$

Queste formule generali valgono per la risoluzione di equazioni **omogenee**, siano esse associate o meno, con **coefficienti costanti**. Non si applicano se queste due condizioni non sono verificate.