

Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Virginia Longo, Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

Indice

1	Disuguaglianza di Bernoulli	2
2	Teorema di Fermat	3
3	Teorema di Rolle	5
4	Teorema di Lagrange	6
5	Test di monotonia di f su un intervallo aperto	8
6	Cardinalità di \mathbb{R}^n	10
7	Teorema di Cauchy	12
8	Teorema di de l'Hôpital	14
9	Teorema del resto secondo Peano	15
10	Teorema del resto secondo Lagrange	18
11	Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale	21
12	Teorema Valor Medio Integrale	23
13	Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale	25

Dimostrazione numero 1

Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &\geq 1+0x \\ 1 &\geq 1\end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n .

Dimostriamolo per $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) && \text{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geq 1+x(n+1) && \text{Per l'enunciato del teorema}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

Dimostrazione numero 2

Teorema di Fermat

Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- x_0 è un punto stazionario se $f'(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geq f(x) \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_m è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leq f(x) \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A ;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1 - x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leq 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geq 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2 - x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geq 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leq 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 3

Teorema di Rolle

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f è continua su A e derivabile su (a, b) ;
2. $f(a) = f(b)$.

Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$.

Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di $f(x)$ su A e essendo A un intervallo chiuso e limitato, vale il **teorema di Weierstrass**.

$$\exists M, m \mid f(x_m) = m \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall x \in A$$

e almeno uno tra x_m e x_M è interno ad (a, b) , dato che $m \neq M$ (f non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 4

Teorema di Lagrange

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia continua su A e derivabile su (a, b) .

Tesi

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante per a e b .

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $g(x)$ così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che g ha la regolarità di f su A :

1. è continua su A ;
2. derivabile su (a, b) .

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned}g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\&= f(a) - \left[f(a) + 0 \right] \\&= f(a) - f(a) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\&= f(b) - \left[f(a) + f(b) - f(a) \right] \\&= f(b) - f(b) = 0\end{aligned}$$

Da cui $g(a) = g(b)$.

Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su A :

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 5

Test di monotonia di f su un intervallo aperto

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia derivabile su (a, b) .

Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su A .

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su A .

Dimostrazione

Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A . Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \mid f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) > 0$ e anche $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è monotona strettamente crescente, c.v.d.

Caso 2 - $f'(x) < 0 \quad \forall x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \mid a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A . Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) / f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è monotona strettamente decrescente, c.v.d.

Dimostrazione numero 6

Cardinalità di \mathbb{R}^n

Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto;

Enunciato

Ipotesi

\mathbb{R} ha la cardinalità del continuo.

Tesi

\mathbb{R}^n ha la cardinalità del continuo.

Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo $[0, 1]$.

Iniettività

Dato un punto generico $P(x_P, y_P)$ definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \text{ e } y_p = 0.y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$$

L'immagine di P su \mathbb{R} è Q , così definita:

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P^* \neq P \mid f(P^*) = f(P)$$

$$P^* = (0.x_1^* x_2^* x_3^* x_4^* \dots, 0.y_1^* y_2^* y_3^* y_4^* \dots)$$

allora

$$f(P^*) = Q = 0.x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* x_3^* y_3^* x_4^* y_4^* \dots$$

Ma visto che

$$Q = 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 \dots$$

ne deriva che

$$P = P^*$$

il che è assurdo. Quindi f è **iniettiva**.

Suriettività

Dato

$$Q \in [0, 1] = 0.q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists? P^\circ \in [0, 1] \times [0, 1] \mid f(P^\circ) = Q$$

Sì, P° è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1 q_3 q_5 \dots, 0.q_2 q_4 q_6 \dots)$$

Da cui si ricava che f è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione numero 7

Teorema di Cauchy

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre f, g continue in A e derivabili in (a, b) .

Tesi

$$\exists x^* \in (a, b) \mid \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $h(x)$ così definita:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

Notiamo che h ha la regolarità di f e di g su A :

1. è continua su A ;
2. derivabile su (a, b) .

Verifico se su h nell'intervallo $[a, b]$ vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) \\ h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ h(b) &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) \\ h(b) &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$h(a) = h(b)$, quindi posso applicare il **teorema di Rolle**, da cui si deriva che h ha un punto stazionario x^*

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] g'(x) - [g(b) - g(a)] f'(x)$$

$$h'(x^*) = 0$$

E quindi infine

$$h'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)] g'(x^*) - [g(b) - g(a)] f'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)] g'(x^*) = [g(b) - g(a)] f'(x^*)$$

$$\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 8

Teorema di de l'Hôpital

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ &\quad y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1. f, g continue in A e derivabili in (a, b) ;
2. f, g infinitesime in $x_0 \in (a, b)$.

Tesi

$$\text{Se } l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ allora } l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists \theta \in (a, b) \Rightarrow \theta \in (x_0, x)$$

Aggiungo $f(x_0)$ che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo (x_0, x) :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 9

Teorema del resto secondo Peano

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ($T_n^f(x)$) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^n(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x - x_0)^n)$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per $n = 1$:

$$f \in C^1(A)$$

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right] \stackrel{?}{=} o((x - x_0))$$

Per la definizione di o -piccolo una funzione $(f(x))$ è o -piccolo di un'altra $(g(x))$ quando il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right]}{(x - x_0)} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) \rightarrow 0$$

Quindi $F(1)$ è vera.

Ipotesi induttiva: $F(n-1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\forall g \in C^{n-1}(A)$$

$$g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

Verifica per $F(n)$

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di o -piccolo:

$$B_\epsilon(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

Questa è però una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0} \right]$ per risolverla, le applico il **teorema de l'Hospital**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left[f(x) - T_n^f(x) \right]'}{\left[(x - x_0)^n \right]'}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \left[T_n^f(x) \right]'}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Calcolo $\left[T_n^f(x) \right]'$ a parte:

$$\begin{aligned} \left[T_n^f(x) \right]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} 3(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} n(x - x_0)^{n-1} \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \\ &= T_{n-1}^{f'}(x) \end{aligned}$$

Infatti se $f \in C^n(A) \Rightarrow f' \in C^{n-1}$.

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che $f' \in C^{n-1}$ e che $g \in C^{n-1}$ poniamo quindi $g = f'$. Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^g(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 10

Teorema del resto secondo Lagrange

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor** ($T_n^f(x)$) è così definito:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^{n+1}(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$\exists \theta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione

Considero due **funzioni ausiliarie** $g(x), w(x)$ così definite:

$$g(x) = f(x) - T_n(x) \quad g(x) \in C^{n+1}(A)$$

$$w(x) = (x - x_0)^{n+1} \quad w(x) \in C^\infty(A)$$

Calcolo $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n+1)}(x_0)$:

$$g(x_0) = f(x_0) - \left[\frac{f(x_0)}{0!} 1 + \frac{f'(x_0)}{1!} (x_0 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x_0 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_0 - x_0)^n \right] = 0$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left[\frac{f'(x_0)}{1!} 1 + \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x_0 - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(x_0 - x_0)^{n-1} \right] = 0$$

$$g''(x_0) = 0$$

...

$$g^{(n)}(x_0) = 0$$

$$g^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0) - 0 = f^{(n+1)}(x_0)$$

Calcolo $w(x_0)$, $w'(x_0)$, \dots , $w^{(n+1)}(x_0)$:

$$w(x_0) = (x_0 - x_0)^{n+1} = 0$$

$$w'(x_0) = (n+1)(x_0 - x_0)^n = 0$$

$$w''(x_0) = (n+1)(n)(x_0 - x_0)^{n-1} = 0$$

...

$$w^{(n)}(x_0) = [(n+1)!](x_0 - x_0) = 0$$

$$w^{(n+1)}(x_0) = [(n+1)!]1 = (n+1)!$$

Toniamo ora su ciò che dobbiamo dimostrare:

$$\exists \theta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

Notiamo che $\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)}$ quindi utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{w(x) - w(x_0)}$$

$$\exists x_1 \in (x_0, x) = \frac{g'(x_1)}{w'(x_1)} = \frac{g'(x_1) - g'(x_0)}{w'(x_1) - w'(x_0)}$$

$$\exists x_2 \in (x_0, x_1) = \frac{g''(x_2)}{w''(x_2)} = \frac{g''(x_2) - g''(x_0)}{w''(x_2) - w''(x_0)}$$

$$\exists x_3 \in (x_0, x_2) = \frac{g'''(x_3)}{w'''(x_3)} = \dots$$

Iterando n volte

$$\exists \theta \in (x_0, x_n) = \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{w^{(n+1)}(\theta)}$$

Notiamo anche che possiamo fare questo perché da come abbiamo dimostrato prima calcolandolo, $g(x_0), g'(x_0), \dots, g^{(n)}(x_0)$ e $w(x_0), w'(x_0), \dots, w^{(n)}(x_0)$ sono infinitesimi.

Quindi le derivate $(n+1)$ -esime dal precedente calcolo di $g(x)$ e $w(x)$ sono:

$$\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{w^{(n+1)}(\theta)} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Quindi per come abbiamo definito $g(x)$ e $w(x)$:

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{w^{(n+1)}(\theta)} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Da cui:

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

$$f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 11

Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrabile

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(t)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. G sia primitiva di f su (a, b) ;
2. $f(t)$ sia Riemann-integrabile su (a, b)

Tesi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

Posti $a = t_0$ e $b = t_n$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(t_0) - G(t_n) \\ &= G(t_n) - G(t_{n-1}) + G(t_{n-1}) + \dots - G(t_i) + G(t_i) + \dots - G(t_1) + G(t_1) - G(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (G(t_i) - G(t_{i-1})) \end{aligned}$$

A G possiamo applicare il **teorema di Lagrange** su $[t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} \exists \theta_i \in (t_{i-1}, t_i) \mid G'(\theta_i) &= \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^n G'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow S \end{aligned}$$

Con S output cumulativo. Si tratta quindi di una somma di Riemann.
c.v.d.

Dimostrazione numero 12

Teorema Valor Medio Integrale

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione limitata tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $m = \inf f$ su $[a, b]$;
2. $M = \sup f$ su $[a, b]$

Definizione

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

purché f sia Riemann-integrabile.

Proprietà 1

$$m \leq VMI \leq M$$

Dimostrazione

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b]$$

Integrale definito

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$$

Per la monotonia:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M \end{aligned}$$

Proprietà 2

Se $f \in C^0([a, b])$ allora:

$$\exists \theta \in [a, b] \mid f(\theta) = VMI$$

Dimostrazione

Valendo Weierstrass e Darboux:

$$m \leq VMI \leq M$$

Dimostrazione numero 13

Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Ha due formulazioni:

Prima Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione limitata e Riemann-integrabile:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

È detta **funzione integrale** la funzione G :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x f(t)dt & G : [a, b] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Tesi

G è una funzione **continua**.

Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall x_0 \in [a, b] \quad G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$$

Caso 1 - $a < x_0 < x < b$

Consideriamo quindi il limite da destra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_a^x f(t) dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt \right] = \\ &= G(x_0)\end{aligned}$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$ è *infinitesimo* (tende a 0) allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0)$$

che dimostra la continuità di $G(x)$. Quindi passiamo a dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{x_0}^x f(t) dt$ è *infinitesimo*:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \text{accumulo tra} \quad x_0 \text{ ed } x$$

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0. Questo dimostra la continuità di $G(x)$.

c.v.d.

Caso 2 - $a < x < x_0 < b$

Consideriamo quindi il limite da sinistra:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_a^x f(t) dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[\int_a^{x_0} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[G(x_0) - \int_x^{x_0} f(t) dt \right] =\end{aligned}$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$ è *infinitesimo* (tende a 0) allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = G(x_0)$$

che dimostra la continuità di $G(x)$. Quindi passiamo a dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \int_x^{x_0} f(t) dt$ è *infinitesimo*:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \text{accumulo tra} \quad x \text{ ed } x_0$$

$$m(x_0 - x) \leq \int_x^{x_0} f(t) dt \leq M(x_0 - x)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0. Questo dimostra la continuità di $G(x)$.

c.v.d.

Seconda Forma

Data una funzione continua:

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

È detta **funzione integrale** la funzione G :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x f(t) dt & G : [a, b] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

G è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a, b]) \quad e \quad G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione

Sia $x_0 \in (a, b)$, vogliamo dimostrare che G è derivabile in x_0

$$\begin{aligned} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt && \text{VMI dif su } [x_0, x_0 + h] \\ &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\ &&& \text{con } h \rightarrow 0 \text{ e } \theta \rightarrow x_0 \end{aligned}$$