

# Analisi Matematica II

Mattia Martelli

---

## Indice

---

<b>I</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine</b>	<b>3</b>
I	Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine	4
II	Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili	5
III	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	7
<b>II</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine</b>	<b>9</b>
IV	Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine	10
V	Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti	12
I	Il caso $\Delta > 0$ . . . . .	12
II	Il caso $\Delta < 0$ . . . . .	13
III	Il caso $\Delta = 0$ . . . . .	13
IV	Tabella riassuntiva . . . . .	14

---

## Indice delle Definizioni e dei Teoremi

---

1	Definizione (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine) . . . . .	4
2	Definizione (Forma normale di una EDO) . . . . .	4
3	Definizione (Integrale generale e particolare di una EDO) . . . . .	4
4	Definizione (EDO a variabili separate) . . . . .	5
1	Teorema (Risoluzione di EDO a variabili separabili) . . . . .	5
5	Definizione (EDO lineari del primo ordine) . . . . .	7
2	Teorema (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine) . . . . .	7
6	Definizione (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine) . . . . .	10
3	Teorema (Teorema di Cauchy) . . . . .	10
4	Teorema (Principio di sovrapposizione) . . . . .	10
5	Teorema (Teorema di struttura) . . . . .	11
6	Teorema (Teorema di struttura per equazioni complete) . . . . .	11

---

---

# PARTE I

---

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

---

## Introduzione alle equazioni differenziali del primo ordine

---

Introduciamo il concetto di equazione differenziale.

**Definizione 1** (Equazione differenziale ordinaria del primo ordine). *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, per brevità EDO, è una relazione che coinvolge una funzione incognita  $y(x)$ , dove  $x \in \mathbb{R}$ , e la sua derivata prima  $y'(x)$ :*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

*In altre parole, una EDO è un'equazione nella quale l'incognita non è un numero, ma una funzione.*

**Definizione 2** (Forma normale di una EDO). *Una EDO del primo ordine in forma normale è una EDO nella forma*

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

**Definizione 3** (Integrale generale e particolare di una EDO). *Data la EDO*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

*chiamiamo **integrale generale** dell'equazione, più raramente soluzione generale, l'insieme di tutte le sue soluzioni.*

*Si chiama **integrale particolare** dell'equazione, più raramente soluzione particolare, una specifica soluzione.*

Alcune osservazioni:

- Nel caso particolare di EDO del tipo

$$y'(x) = f(x),$$

cioè EDO del primo ordine in forma normale con  $f(x, y(x))$ , basta integrare:

$$y(x) = \int f(x) dx.$$

- Più in generale, risolvere una EDO non significa calcolare un integrale, ma comunque trovare  $y$  conoscendo delle informazioni relative a  $y'$ . Da qui il nome *integrale generale*.
- In generale, una EDO ha infinite soluzioni, proprio come la soluzione di un integrale indefinito.

## CAPITOLO II

---

### Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

---

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili.

**Definizione 4** (EDO a variabili separate). *Una EDO del primo ordine in forma normale si dice a variabili separabili se è della forma*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con  $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Cioè  $f(x, y) = h(x) \times g(y)$  è il prodotto di una funzione che dipende solo da  $x$  per una funzione che dipende solo da  $y$ .

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

**Teorema 1** (Risoluzione di EDO a variabili separabili). *Consideriamo la EDO a variabili separate*

$$y'(x) = h(x) g(y(x)),$$

con  $h : J_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Possiamo dunque dividere le soluzioni in due categorie:

1. Se  $g(D) = 0$  per qualche  $D \in \mathbb{R}$  allora la funzione costante  $y(x) = D$ ,  $\forall x$  è soluzione.
2. Se  $g(y) \neq 0, \forall y$  in un certo intervallo, una soluzione  $y(x)$  è definita implicitamente dall'equazione

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$ ;
- $H$  è una primitiva di  $h$ ;
- $\Gamma$  è una primitiva di  $\frac{1}{g}$ .

Se  $\Gamma$  non è invertibile otteniamo eslicitamente

$$y(x) = \Gamma^{-1}(H(x) + c),$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambe le categorie:

1. Sia  $g(D) = 0$  e  $y(x) = D, \forall x$ . L'identità è soddisfatta:

(a) Sinistra:  $y'(x) = 0$ ;

(b) Destra:  $h(x)g(y(x)) = h(x)g(D) = h(x) \times 0 = 0$ .

2. Prendiamo un intervallo  $[x_0, x]$  in cui la funzione  $g(y)$  non si annulla. Dunque,

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Dati  $x_0 < x$ , con  $x_0, x \in J_1$ , integriamo:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{x_0}^x h(r) dr = H(x) + c.$$

Per il lato sinistro faccio il cambio di variabili:

$$y(r) = k,$$

$$y'(r) = dk,$$

quando

$$r = x_0 \Rightarrow k = y(x_0),$$

$$r = x \Rightarrow k = y(x).$$

Dunque,

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(k)} dk = \Gamma(y(x)) + c.$$

Uguagliando i due lati,

$$\Gamma(y(x)) = H(x) + c,$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

□

## CAPITOLO III

---

### Equazioni differenziali lineari del primo ordine

---

Introduciamo ora il concetto di equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine.

**Definizione 5** (EDO lineari del primo ordine). *Un'equazione differenziale lineare ordinaria del primo ordine è una EDO nella forma*

$$c(x) y'(x) + a(x) y(x) = b(x),$$

con  $c, a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue su  $J$ .

*Ci occuperemo solo di EDO lineari del primo ordine in forma normale, cioè*

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

A questo punto passiamo alla loro risoluzione.

**Teorema 2** (Integrale generale di una EDO lineare del primo ordine). *Date  $a, b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, consideriamo*

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x).$$

*L'integrale generale di questa equazione è dato dalla formula*

$$y(x) = e^{-A(x)} [B(x) + c],$$

dove

- $c \in \mathbb{R}$ ;
- $A(x)$  è una qualunque primitiva di  $a(x)$ :  $A = \int a$ ;
- $B(x)$  è una qualunque primitiva di  $e^{A(x)} b(x)$ :  $A = \int e^{\int a} b$ .

*Dimostrazione.* Moltiplichiamo tutto per  $e^A$

$$\underbrace{y' e^A + a y e^A}_{(y e^A)'} = b e^A,$$

infatti

$$(y e^A)' = y' e^A + y (e^A)' = y' e^A + y e^A A' = y' e^A + y e^A a.$$

Quindi la nostra equazione è uguale a

$$(y(x) e^{A(x)})' = e^{A(x)} b(x).$$



Ora integriamo tra  $x_0$  e  $x$ :

$$\int_{x_0}^x \left( y(s) e^{A(s)} \right)' ds = \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds.$$

Uso il teorema fondamentale del calcolo integrale per il lato sinistro:

$$y(x) e^{A(x)} - \underbrace{y(x_0) e^{A(x_0)}}_{-c} = \underbrace{\int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds}_{B(x)}.$$

Per ottenere la formula è sufficiente moltiplicare questa equazione per  $e^{-A(x)}$ .

□

---

---

## PARTE II

---

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

## CAPITOLO IV

---

### Introduzione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

---

Un'equazione differenziale del secondo ordine si presenta nella forma

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

con  $t \in I$ . Definiamo dunque una sua soluzione.

**Definizione 6** (Soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine). *Si dice **soluzione dell'equazione differenziale** nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  una funzione  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  **derivabile due volte** per cui, sostituendo nell'equazione differenziale i valori effettivi di  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , si ottiene che*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \quad \forall t \in I,$$

*cioè un'identità su  $I$ .*

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha soluzioni infinite. Queste vengono racchiuse nella loro totalità in dipendenza da due parametri all'interno dell'integrale generale. Se a questo aggiungiamo una coppia di condizioni iniziali otteniamo una soluzione specifica. Il sistema formato dall'integrale generale e le condizioni iniziali è detto **problema di Cauchy** ed il teorema che garantisce l'unicità della soluzione è detto **teorema di Cauchy**.

**Teorema 3** (Teorema di Cauchy). *Data l'equazione differenziale*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

*con  $t \in I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  funzioni continue in  $I$  e  $a \neq 0$ , allora,  $\forall t_0 \in I$  e  $\forall (y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ , il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

*ha **una ed una sola** soluzione definita su **tutto l'intervallo**  $I$ .*

Introduciamo dunque un importante teorema che sfrutta la linearità delle equazioni: il principio di sovrapposizione.

**Teorema 4** (Principio di sovrapposizione). *Se  $y_1$  è soluzione di  $a y'' + b y' + c y = f_1$  ed  $y_2$  è soluzione di  $a y'' + b y' + c y = f_2$ , allora la funzione*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

*è soluzione di*

$$a y'' + b y' + c y = C_1 f_1 + C_2 f_2.$$

Prendiamo ora un'equazione differenziale omogenea, ovvero con  $f = 0$ . Possiamo a questo punto notare che l'insieme  $S$  delle soluzioni forma uno **spazio vettoriale** di dimensione due. Da questo ricaviamo il teorema di struttura.

**Teorema 5** (Teorema di struttura). *L'integrale generale di*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0,$$

*con  $a, b$  e  $c$  continue su  $I$  e  $a(t) \neq 0$ , è dato da tutte le combinazioni lineari*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

*dove  $y_1$  ed  $y_2$  sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione stessa.*

Osserviamo adesso un'equazione con  $f \neq 0$ . Questa è detta completa o **non omogenea**. Se poniamo  $f = 0$ , otteniamo dunque l'equazione **omogenea associata**. Definendo  $y_P$  come una particolare soluzione dell'equazione completa e  $y_0$  come una particolare soluzione dell'equazione omogenea associata, notiamo che queste soddisfano il principio di sovrapposizione. Con queste premesse possiamo dunque estendere il teorema di struttura alle equazioni non omogenee.

**Teorema 6** (Teorema di struttura per equazioni complete). *L'integrale generale di*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

*con  $a, b, c$  e  $f$  continue su  $I$  e  $a(t) \neq 0$ , è dato da **tutte e sole** le funzioni*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_P(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

*dove  $y_1$  ed  $y_2$  sono due **soluzioni linearmente indipendenti** dell'equazione omogenea associata*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

*e  $y_P$  è una **soluzione particolare** dell'equazione completa*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t).$$

---

## Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

---

Per studiare un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti, possiamo sfruttare il teorema di struttura. Partiamo innanzitutto definendo il **polinomio caratteristico**: data una generica equazione differenziale  $a y'' + b y' + c y = 0$ , il polinomio caratteristico associato è

$$P(\lambda) = a \lambda^2 + b \lambda + c.$$

Possiamo dunque facilmente definire l'equazione caratteristica come  $P(\lambda) = 0$ , o, più esplicitamente,

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0.$$

Abbiamo dunque ricondotto la ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea a quella delle radici del polinomio caratteristico, ovvero alla risoluzione dell'equazione caratteristica. La natura delle radici dipende chiaramente dal discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

### I Il caso $\Delta > 0$

Nel caso di un discriminante positivo, possiamo ricavare due radici **reali e distinte** tramite la classica formula

$$\lambda_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

da cui ricaviamo le due soluzioni dell'equazione differenziale come

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) &= e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

linearmente indipendenti poiché  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Possiamo dunque sfruttare il teorema di struttura ed ottenere l'integrale generale dell'equazione di partenza come

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

## II Il caso $\Delta < 0$

Nel caso di un discriminante negativo, possiamo ricavare due radici **complesse e coniugate** definite come

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta,\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-b}{2a}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a},\end{aligned}$$

ricavabili dalla formula classica. Prendendo la generica soluzione  $y(t) = e^{\lambda t}$  e ricordando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso  $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)$ , possiamo dunque scrivere le soluzioni come

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta), \\ y_2(t) &= e^{\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta).\end{aligned}$$

Ma poiché cerchiamo soluzioni reali, dobbiamo definire due funzioni che chiameremo  $u$  come

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2}, \\ u_2(t) &= \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i},\end{aligned}$$

che possono dunque essere generalizzate come

$$\begin{aligned}u_1(t) &= e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ u_2(t) &= e^{\alpha t} \sin(\beta t).\end{aligned}$$

L'integrale generale è dunque

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

## III Il caso $\Delta = 0$

Nel caso di un discriminante nullo, possiamo ricavare due radici **reali e coincidenti** definite come

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

come si può facilmente ricavare dalla formula classica. Poiché abbiamo una sola soluzione, abbiamo bisogno di cercare una funzione  $C(t)$  tale che

$$\begin{aligned}y_2(t) &= C(t) e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t)' &= e^{\lambda_1 t} (C'(t) + \lambda_1 C(t)), \\ y_2(t)'' &= e^{\lambda_1 t} (C''(t) + 2\lambda_1 C'(t) + \lambda_1^2 C(t)).\end{aligned}$$

Se sostituiamo nell'equazione differenziale ci accorgiamo che tutti i termini contenenti  $C(t)$  e  $C'(t)$  si semplificano, risultando nell'equazione

$$C''(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La più semplice funzione che soddisfa l'equazione è la funzione identità, ovvero  $C(t) = t$ . Possiamo dunque generalizzare quanto trovato definendo l'integrale generale come

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}.$$

## IV Tabella riassuntiva

Riassumiamo quanto trovato in una tabella.

$\Delta$	Radici	Soluzioni		Integrale generale
		$y_1(t)$	$y_2(t)$	$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}$	$e^{\lambda_2 t}$	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}$	$t e^{\lambda_2 t}$	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$

Queste formule generali valgono per la risoluzione di equazioni **omogenee**, siano esse associate o meno, con **coefficienti costanti**. Non si applicano se queste due condizioni non sono verificate.