Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

Indice

Dimostrazione numero 1

Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\, x > -1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &\geqslant 1+0x \\ 1 &\geqslant 1 \end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.

Dimostriamolo per $n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geqslant (1+x)(1+nx) && \textit{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1)+nx^2 \\ &\geqslant 1+x(n+1) && \textit{Per l'enunciato del teorema} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

Dimostrazione numero 2

Teorema di Fermat

Ipotesi preliminari

Supponiamo che:

- x_0 è un punto stazionario se $f(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geqslant f(x) \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_M è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leqslant f(x) \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1
x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{(f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1 \leqslant 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2 \geqslant 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2
x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1 \geqslant 0 dove L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2 \leqslant 0 dove L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 3

Teorema di Rolle

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f è continua su A e derivabile su (a, b);
2. $f(a) = f(b)$.

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Caso 1
$f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti $\forall\, x \in (a, b) \;\; f(x) = 0$.

Caso 2
$f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di $f(x)$ su A e essendo A un intervallo chiuso e limitato,
vale il teorema di **Weierstrass**.

$$\exists\, M, m / f(x_m) = m \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M \;\; \forall\, x \in A$$

e almeno uno tra x_m e x_M è interno ad (a, b) dato che $m \neq M$ (f non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists\, x_0 \in (a, b) / f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 4

Teorema di Lagrange

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia continua su A e derivabile su (a, b).

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante a e b.

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $g(x)$ così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) + f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che g ha la regolarità di f su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a, b).

Notiamo anche che:

$$
\begin{aligned}
g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right] \\
&= f(a) - \left[f(a) + 0 \right] \\
&= f(a) - f(a) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] \\
&= f(b) - \left[f(a) + f(b) - f(a) \right] \\
&= f(b) - f(b) = 0
\end{aligned}
$$

Da cui $g(a) = g(b)$.
Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su A:

$$\exists\ x_0 \in (a,b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
g'(x_0) &= 0 \\
f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= 0 \\
f'(x_0) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}
$$

c.v.d.