Dimostrazione numero 1

Teorema di Cauchy

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & \quad\ \ y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre f, g continue in A e derivabili in (a, b).

Tesi

$$\exists\, x^* \in (a, b) \mid \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $h(x)$ così definita:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$$

Notiamo che h ha la regolarità di f e di g su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a, b).

Verifico se su h nell'intervallo $[a, b]$ vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]\ g(a) - [g(b) - g(a)]\ f(a) \\ h(a) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(a) - f(a)\, g(b) + f(a)\, g(a) \\ h(a) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]\ g(b) - [g(b) - g(a)]\ f(b) \\ h(b) &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(b) - f(b)\, g(b) + f(b)\, g(a) \\ h(b) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) \end{aligned}$$

$h(a) = h(b)$, quindi posso applicare il **teorema di Rolle**, da cui si deriva che h ha un punto stazionario x^*

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]\ g'(x) - [g(b) - g(a)]\ f'(x)$$

$$h'(x^*) = 0$$

E quindi infine

$$h'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)]\ g'(x^*) - [g(b) - g(a)]\ f'(x^*) = 0$$

$$[f(b) - f(a)]\ g'(x^*) = [g(b) - g(a)]\ f'(x^*)$$

$$\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.