Dimostrazione numero 1

Formule di De Moivre

Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi z_1 e z_2 definiti come

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$$
$$z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

Il loro prodotto sarà uguale a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 =&[\rho_1 \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \rho_2 \cos\theta_2 + i\sin\theta_2] \\ =&\rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2] \\ =&\rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ =&\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

Quoziente di due numeri complessi

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} =&\frac{\rho_1 \cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\rho_2 \cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \\ =&\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \\ =&\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ =&\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ =&\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \end{aligned}$$

Potenza di numero complesso

Si dimostra per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 2$:

$$\begin{aligned} z^2 = zz &= \rho\rho[\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)] \\ &= \rho^2(\cos 2\theta) + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

Che è quindi, in generale, uguale a

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.

Dimostriamolo per $n+2$:

$$\begin{aligned}
z^{n+2} \;=\; z^n z^2 &= \rho^n \rho^2[(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)] \\
&= \rho^n \rho^2[\cos n\theta \cos 2\theta + \cos n\theta i \sin 2\theta + i \sin n\theta \cos 2\theta - \sin n\theta \sin 2\theta] \\
&= \rho^{n+2}(\cos(n\theta + 2\theta) + i \sin(n\theta + 2\theta)) \\
&= \rho^{n+2}(\cos(n+2)\theta + i \sin(n+2)\theta)
\end{aligned}$$