Dimostrazione numero 1

Teorema del resto secondo Lagrange

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor ($T_n^f(x)$)** è così definito:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^{\,n+1}(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$\exists\, \theta \in (x_0, x) \,|\, f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{\,n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione

Considero due **funzioni ausiliarie** $g(x), w(x)$ così definite:

$$g(x) = f(x) - T_n(x) \qquad g(x) \in C^{\,n+1}(A)$$

$$w(x) = (x-x_0)^{n+1} \qquad w(x) \in C^{\,\infty}(A)$$

Calcolo $g(x_0)\,,\, g'(x_0)\,,\,\ldots\,,\, g^{\,(n+1)}(x_0)$:

$$g(x_0) = f(x_0) - \left[\frac{f(x_0)}{0!}1 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0 - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{\,(n)}(x_0)}{n!}(x_0 - x_0)^n\right] = 0$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left[\frac{f'(x_0)}{1!}1 + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x_0 - x_0) + \cdots + \frac{f^{\,(n)}(x_0)}{n!}n(x_0 - x_0)^{n-1}\right] = 0$$

$$g''(x_0) = 0$$

$$\ldots$$

$$g^{\,(n)}(x_0) = 0$$

$$g^{\,(n+1)}(x_0) = f^{\,(n+1)}(x_0) - 0 = f^{\,(n+1)}(x_0)$$

Calcolo $w(x_0)\,,\, w'(x_0)\,,\, \ldots\,,\, w^{\,(n+1)}(x_0)$:

$$w(x_0) = (x_0 - x_0)^{n+1} = 0$$

$$w'(x_0) = (n+1)(x_0 - x_0)^n = 0$$

$$w'(x_0) = (n+1)(n)(x_0 - x_0)^{n-1} = 0$$

$$\ldots$$

$$w^{\,(n)}(x_0) = \big[(n+1)!\big](x_0 - x_0) = 0$$

$$w^{\,(n+1)}(x_0) = \big[(n+1)!\big]1 = (n+1)!$$

Toniamo ora su ciò che dobbiamo dimostrare:

$$\exists\, \theta \in (x_0, x) \,|\, f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{\,n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{\,n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Notiamo che $\frac{f(x)-T_n^f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)}$ quindi utilizzando il teorema di Cauchy: