Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Virginia Longo, Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

Indice

Dimostrazione numero 1

Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\, x > -1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &\geqslant 1 + 0x \\ 1 &\geqslant 1 \end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.

Dimostriamolo per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geqslant (1+x)(1+nx) && \textit{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + x(n+1) + nx^2 \\ &\geqslant 1 + x(n+1) && \textit{Per l'enunciato del teorema} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

Dimostrazione numero 2

Teorema di Fermat

Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- x_0 è un punto stazionario se $f(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geqslant f(x) \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_M è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leqslant f(x) \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1 - x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1 \leqslant 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2 \geqslant 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2 - x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1 \geqslant 0 dove L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2 \leqslant 0 dove L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 3

Teorema di Rolle

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f è continua su A e derivabile su (a, b);
2. $f(a) = f(b)$.

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti $\forall\, x \in (a,b)\;\; f(x) = 0$.

Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di $f(x)$ su A e essendo A un intervallo chiuso e limitato, vale il **teorema di Weierstrass**.

$$\exists\, M, m \mid f(x_m) = m \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M \quad \forall\, x \in A$$

e almeno uno tra x_m e x_M è interno ad (a, b), dato che $m \neq M$ (f non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 4

Teorema di Lagrange

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia continua su A e derivabile su (a, b).

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante per a e b.

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $g(x)$ così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) + f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che g ha la regolarità di f su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a, b).

Notiamo anche che:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right] \\ &= f(a) - \left[f(a) + 0 \right] \\ &= f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] \\ &= f(b) - \left[f(a) + f(b) - f(a) \right] \\ &= f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$$

Da cui $g(a) = g(b)$.
Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su A:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 5

Test di monotonia di f su un intervallo aperto

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia derivabile su (a, b).

Tesi

$$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su A.

$$f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su A.

Dimostrazione

Caso 1 - $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \,|\, a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2) \,|\, f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) > 0$ e anche $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è monotona strettamente crescente, c.v.d.

Caso 2 - $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \,|\, a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il **teorema di Lagrange** a f quindi:

$$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2) \,/\, f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è monotona strettamente decrescente, c.v.d.

Dimostrazione numero 6

Cardinalità di $\mathbb{R}^n$

Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto;

Enunciato

Ipotesi

$\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo.

Tesi

$\mathbb{R}^n$ ha la cardinalità del continuo.

Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo $[0, 1]$.

Iniettività

Dato un punto generico $P(x_P, y_P)$ definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \ldots \text{ e } y_p = 0.y_1\, y_2\, y_3\, y_4 \ldots$$

L'immagine di P su $\mathbb{R}$ è Q, così definita:

$$Q = 0.x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3\, x_4\, y_4 \ldots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P^* \neq P \,|\, f(P^*) = f(P)$$

$$P^* = (0.x_1^*\, x_2^*\, x_3^*\, x_4^* \ldots, 0.y_1^*\, y_2^*\, y_3^*\, y_4^* \ldots)$$

allora

$$f(P*) = Q = 0.x_1^* \, y_1^* \, x_2^* \, y_2^* \, x_3^* \, y_3^* \, x_4^* \, y_4^* \ldots$$

Ma visto che

$$Q = 0.x_1 \, y_1 \, x_2 \, y_2 \, x_3 \, y_3 \, x_4 \, y_4 \ldots$$

ne deriva che

$$P = P^*$$

il che è assurdo. Quindi f è **iniettiva**.

Suriettività

Dato

$$Q \in [0, 1] = 0.q_1 \, q_2 \, q_3 \, q_4 \ldots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists ? \, P^\circ \in [0, 1] \times [0, 1] \mid f(P^\circ) = Q$$

Sì, P° è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1 \, q_3 \, q_5 \ldots, 0.q_2 \, q_4 \, q_6 \ldots)$$

Da cui si ricava che f è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione numero 7

Teorema di Cauchy

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre f, g continue in A e derivabili in (a, b).

Tesi

$$\exists\, x^* \in (a, b) \mid \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $h(x)$ così definita:

$$h(x) = \big[f(b) - f(a)\big]\, g(x) - \big[g(b) - g(a)\big]\, f(x)$$

Notiamo che h ha la regolarità di f e di g su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a, b).

Verifico se su h nell'intervallo $[a, b]$ vale il **teorema di Rolle**:

$$\begin{aligned} h(a) &= \big[f(b) - f(a)\big]\, g(a) - \big[g(b) - g(a)\big]\, f(a) \\ h(a) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(a) - f(a)\, g(b) + f(a)\, g(a) \\ h(a) &= f(b\,)g(a) - f(a)\, g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= \big[f(b) - f(a)\big]\, g(b) - \big[g(b) - g(a)\big]\, f(b) \\ h(b) &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(b) - f(b)\, g(b) + f(b)\, g(a) \\ h(b) &= f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) \end{aligned}$$

$h(a) = h(b)$, quindi posso applicare il **teorema di Rolle**, da cui si deriva che h ha un punto stazionario x^*

$$h'(x) = \big[f(b) - f(a)\big]\, g'(x) - \big[g(b) - g(a)\big]\, f'(x)$$

$$h'(x^*) = 0$$

E quindi infine

$$h'(x^*) = 0$$

$$\big[f(b) - f(a)\big]\, g'(x^*) - \big[g(b) - g(a)\big]\, f'(x^*) = 0$$

$$\big[f(b) - f(a)\big]\, g'(x^*) = \big[g(b) - g(a)\big]\, f'(x^*)$$

$$\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 8

Teorema di de l'Hôpital

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & \quad\; y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1. f, g continue in A e derivabili in (a, b);
2. f, g infinitesime in $x_0 \in (a, b)$.

Tesi

$$\text{Se } l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ allora } l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists\, \theta \in (a, b) \Rightarrow \theta \in (x_0, x)$$

Aggiungo $f(x_0)$ che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo (x_0, x):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 9

Teorema del resto secondo Peano

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor ($T_n^f(x)$)** è così definito:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^n(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$F(n) : f(x) - T_n^f(x) = o((x-x_0)^n)$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Passo Base: $F(1)$

Dimostriamo l'enunciato per $n = 1$:

$$f \in C^1(A)$$

$$f(x) - \Big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\Big] \stackrel{?}{=} o((x-x_0))$$

Per la definizione di o-piccolo una funzione $(f(x))$ è o-piccolo di un altra $(g(x))$ quando il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \to 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \Big[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\Big]}{(x - x_0)} \overset{?}{\to} 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \overset{?}{\to} 0$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) \to 0$$

Quindi $F(1)$ è vera.

Ipotesi induttiva: $F(n-1)$

Assumiamo per ipotesi induttiva vera la seguente affermazione:

$$\forall\, g \in C^{\,n-1}(A)$$

$$g(x) - T_n^g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - T_n^g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \to 0$$

Verifica per $F(n)$

Per verificare la tesi, mi devo anche qui rifare alla definizione di o-piccolo:

$$B_\epsilon(0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \overset{?}{\to} 0$$

Questa è però una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$ per risolverla, le applico il **teorema de l'Hospital**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Big[f(x) - T_n^f(x)\Big]'}{\Big[(x - x_0)^n\Big]'}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \Big[T_n^f(x)\Big]'}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Calcolo $\Big[T_n^f(x)\Big]'$ a parte:

$$\begin{aligned}
\Big[T_n^f(x)\Big]' &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}3(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}n(x - x_0)^n \\
&= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\
&= T_{n-1}^{f'}(x)
\end{aligned}$$

Infatti se $f \in C^{\,n}(A) \Rightarrow f' \in C^{\,n-1}$.
Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Notiamo che $f' \in C^{\,n-1}$ e che $g \in C^{\,n-1}$ poniamo quindi $g = f'$. Da cui abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Per ipotesi di induzione sappiamo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_{n}^{g}(x)}{(x-x_0)^{n-1}} \to 0$$

quindi anche:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \to 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 10

Teorema del resto secondo Lagrange

Definizioni necessarie

Si ricorda che il **Polinomio di Taylor ($T_n^f(x)$)** è così definito:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $f \in C^{\,n+1}(A)$;
2. $x_0 \in A$.

Tesi

$$\exists\, \theta \in (x_0, x) \,|\, f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{\,n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione

Considero due **funzioni ausiliarie** $g(x), w(x)$ così definite:

$$g(x) = f(x) - T_n(x) \qquad g(x) \in C^{\,n+1}(A)$$

$$w(x) = (x-x_0)^{n+1} \qquad w(x) \in C^{\,\infty}(A)$$

Calcolo $g(x_0)\,,\, g'(x_0)\,,\,\ldots\,,\, g^{\,(n+1)}(x_0)$:

$$g(x_0) = f(x_0) - \left[\frac{f(x_0)}{0!}1 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0 - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{\,(n)}(x_0)}{n!}(x_0 - x_0)^n\right] = 0$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left[\frac{f'(x_0)}{1!}1 + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x_0 - x_0) + \cdots + \frac{f^{\,(n)}(x_0)}{n!}n(x_0 - x_0)^{n-1}\right] = 0$$

$$g''(x_0) = 0$$

$$\ldots$$

$$g^{\,(n)}(x_0) = 0$$

$$g^{\,(n+1)}(x_0) = f^{\,(n+1)}(x_0) - 0 = f^{\,(n+1)}(x_0)$$

Calcolo $w(x_0)\,,\, w'(x_0)\,,\, \ldots\,,\, w^{\,(n+1)}(x_0)$:

$$w(x_0) = (x_0 - x_0)^{n+1} = 0$$

$$w'(x_0) = (n+1)(x_0 - x_0)^n = 0$$

$$w'(x_0) = (n+1)(n)(x_0 - x_0)^{n-1} = 0$$

$$\ldots$$

$$w^{\,(n)}(x_0) = \big[(n+1)!\big](x_0 - x_0) = 0$$

$$w^{\,(n+1)}(x_0) = \big[(n+1)!\big]1 = (n+1)!$$

Toniamo ora su ciò che dobbiamo dimostrare:

$$\exists\, \theta \in (x_0, x) \mid f(x) - T_n^f(x) = \frac{f^{\,n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{\,n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Notiamo che $\frac{f(x)-T_n^f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{w(x)}$ quindi utilizzando il teorema di Cauchy:

Dimostrazione numero 11

Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(t)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. G sia primitiva di f su (a, b);
2. $f(t)$ sia Riemann-integrabile su (a, b)

Tesi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

Posti $a = t_0$ e $b = t_n$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(t_0) - G(t_n) \\ &= G(t_n) - G(t_{n-1}) + G(t_{n-1}) + ... - G(t_i) + G(t_i) + ... - G(t_1) + G(t_1) - G(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (G(t_i) - G(t_{i-1})) \end{aligned}$$

A G possiamo applicare il **teorema di Lagrange** su $[t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} \exists \theta_i \in (t_{i-1}, t_i) \mid G'(\theta_i) &= \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} G'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow S \end{aligned}$$

Con S output cumulativo. Si tratta quindi di una somma di Riemann.
c.v.d.