Dimostrazione numero 1

Teorema de l'Hopital

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & \quad\; y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre:

1. f, g continue in A e derivabili in (a, b);
2. f, g infinitesime in $x_0 \in (a, b)$.

Tesi

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dimostrazione

La dimostrazione avviene direttamente utilizzando il **teorema di Cauchy**:

$$\exists\ \theta \in (a, b) \wedge \theta \in (x_0, x)$$

Aggiungo $f(x_0)$ che ricordiamo essere infinitesimo per ipotesi, poi considerando l'intervallo (x_0, x) :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

c.v.d.