Dimostrazioni di Analisi matematica 1

Giovanni Manfredi e Mattia Martelli

Indice

Dimostrazione numero 1

Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato

La disuguaglianza di Bernoulli è

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\, x > -1$$

Dimostrazione

Per dimostrare l'enunciato, procediamo con una dimostrazione per induzione.

Dimostriamo l'enunciato per $n = 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &\geqslant 1 + 0x \\ 1 &\geqslant 1 \end{aligned}$$

Possiamo perciò considerare l'enunciato vero al passo n.

Dimostriamolo per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geqslant (1+x)(1+nx) && \textit{Per ipotesi induttiva} \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + x(n+1) + nx^2 \\ &\geqslant 1 + x(n+1) && \textit{Per l'enunciato del teorema} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli.

Dimostrazione numero 2

Teorema di Fermat

Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- x_0 è un punto stazionario se $f(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geqslant f(x) \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_M è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leqslant f(x) \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1 - x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \leqslant 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \geqslant 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2 - x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_1 \geqslant 0 dove L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L_2 \leqslant 0 dove L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 3

Teorema di Rolle

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f è continua su A e derivabile su (a,b);
2. $f(a) = f(b)$.

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Caso 1 - $f(x)$ è una funzione costante

Il teorema è dimostrato, infatti $\forall\, x \in (a,b)\ \ f(x) = 0$.

Caso 2 - $f(x)$ non è una funzione costante

Data la continuità di $f(x)$ su A e essendo A un intervallo chiuso e limitato, vale il teorema di **Weierstrass**.

$$\exists\, M, m / f(x_m) = m \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M \ \ \forall\, x \in A$$

e almeno uno tra x_m e x_M è interno ad (a,b) dato che $m \neq M$ (f non è costante).

Visto che almeno uno dei due punti di ottimo è interno all'intervallo, posso applicare il **teorema di Fermat**, da cui ricavo che il punto di ottimo interno è un punto stazionario e quindi:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) / f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 4

Teorema di Lagrange

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che f sia continua su A e derivabile su (a,b).

Tesi

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante a e b.

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $g(x)$ così definita:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) + f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Notiamo che g ha la regolarità di f su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a,b).

Notiamo anche che:

$$
\begin{aligned}
g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right] \\
&= f(a) - \left[f(a) + 0\right] \\
&= f(a) - f(a) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right] \\
&= f(b) - \left[f(a) + f(b) - f(a)\right] \\
&= f(b) - f(b) = 0
\end{aligned}
$$

Da cui $g(a) = g(b)$.
Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su A:

$$\exists\ x_0 \in (a,b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c.v.d.

Dimostrazione numero 5

Test di monotonia di f su un intervallo aperto

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f: A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. f sia derivabile su (a,b);

Tesi

$$f'(x) > 0 \; \forall \, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente crescente su A.

$$f'(x) < 0 \; \forall \, x \in A \Rightarrow f$$

è monotona strettamente decrescente su A.

Dimostrazione

Caso 1 - $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \,/\, a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il teorema di **Lagrange** a f quindi:

$$\exists \, x_0 \in (x_1, x_2) \,/\, f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) > 0$ e anche $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall \, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è strettamente monotona crescente. c.v.d.

Caso 2 - $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in A$

Siano $x_1, x_2 \in A \, / \, a < x_1 < x_2 < b$. Seleziono un sottointervallo chiuso interno ad A. Su $[x_1, x_2]$ applico il teorema di **Lagrange** a f quindi:

$$\exists \, x_0 \in (x_1, x_2) \, / \, f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

essendo $f'(x_0) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ ne segue che:

$$\forall \, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

quindi $f(x)$ è strettamente monotona decrescente. c.v.d.

Dimostrazione numero 6

Cardinalità del continuo

Definizioni necessarie

Si ricorda che:

- Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra di essi;
- Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un insieme infinito da lui contenuto;

Enunciato

Ipotesi

$\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo.

Tesi

$\mathbb{R}^2$ ha la cardinalità del continuo.

Dimostrazione

Come definito in precedenza per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità dobbiamo dimostrare che siano in corrispondenza **biunivoca**. Per semplicità restringiamo la dimostrazione all'intervallo $[0, 1]$.

Iniettività

Dato un punto generico $P(x, y)$ definiamo che le sue coordinate in questo modo:

$$x_p = 0.x_1x_2x_3x_4\dots \text{ e } y_p = 0.y_1y_2y_3y_4\dots$$

l'immagine di P su $\mathbb{R}$ è Q, così definito:

$$Q = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4\dots$$

Ipotizziamo ora per assurdo che esista

$$P* \neq P \,/\, f(P*) = f(P)P* = (0.x*_1\,x*_2\,x*_3\,x*_4\dots, 0.y*_1\,y*_2\,y*_3\,y*_4\dots)$$

allora

$f(P*) = Q = 0.x*_1y*_1x*_2y*_2x*_3y*_3x*_4y*_4\dots$ Ma visto che$Q = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4\dots \Rightarrow P = P* \Rightarrow$ contraddizione

Quindi f è **iniettiva**.

Suriettività

Dato:

$$Q \in [0,1] = 0.q_1q_2q_3q_4\dots$$

Vale questa affermazione?

$$\exists ?\, P^\circ \in [0,1]\text{x}[0,1] \,/\, f(P^\circ) = Q$$

Sì, P° è così definito:

$$P^\circ = (0.q_1q_3q_5\dots, 0.q_2q_4q_6\dots)$$

Da cui si ricava che f è anche **suriettiva**.

Abbiamo quindi trovato una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi il che dimostra che hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione numero 7

Teorema di Cauchy

Enunciato

Ipotesi

Date:

$$\begin{aligned} f, g : A = [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \\ & y = g(x) \end{aligned}$$

Supponendo inoltre che f, g continue in A e derivabili in (a, b)

Tesi

$$\exists\, x* \in (a, b) \,/\, \frac{f'(x*)}{g'(x*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Introduco una **funzione ausiliaria** $h(x)$ così definita:

$$h(x) = \big[f(b) - f(a)\big]g(x) - \big[g(b) - g(a)\big]f(x)$$

Notiamo che h ha la regolarità di f e di g su A:

1. è continua su A;
2. derivabile su (a, b).

Notiamo anche che:

$$
\begin{aligned}
g(a) &= f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] \\
&= f(a) - \left[f(a) + 0 \right] \\
&= f(a) - f(a) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(b) &= f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] \\
&= f(b) - \left[f(a) + f(b) - f(a) \right] \\
&= f(b) - f(b) = 0
\end{aligned}
$$

Da cui $g(a) = g(b)$.
Posso quindi applicare il teorema di **Rolle** su A:

$$\exists\ x_0 \in (a, b) \mid g'(x_0) = 0$$

Calcolo quindi $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.