Dimostrazione numero 1

Teorema di Fermat

Definizioni necessarie

Si ricordano le seguenti definizioni:

- x_0 è un punto stazionario se $f(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di ottimo se è un punto di massimo o di minimo locale;
- x_M è un punto di massimo locale se $M = f(x_M) \geqslant f(x) \forall x \in A$ dove M è il valore massimo locale;
- x_M è un punto di minimo locale se $m = f(x_m) \leqslant f(x) \forall x \in A$ dove m è il valore minimo locale.

Enunciato

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$\begin{aligned} f : A = (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che:

1. $x_0 \in A$;
2. f sia derivabile in A;
3. x_0 sia un punto di ottimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

ovvero x_0 è un punto stazionario

Dimostrazione

Caso 1 - x_0 è un punto di massimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1 \leqslant 0 \text{ dove } L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2 \geqslant 0 \text{ dove } L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Caso 2 - x_0 è un punto di minimo locale

Per l'ipotesi 1 e l'ipotesi 2, quando $h > 0$ possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

quando $h < 0$ invece possiamo dire che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

quindi sempre per l'ipotesi di derivabilità valgono le seguenti affermazioni

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1 \geqslant 0 dove L_1 \exists \wedge L_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2 \leqslant 0 dove L_2 \exists \wedge L_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_1 = L_2 = f'(x_0)$$

e quindi

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

da cui

$$f'(x_0) = 0$$

c.v.d.