Dimostrazione numero 1

Criterio del Rapporto per la Convergenza delle Serie a termini positivi.

Enunciato

$$\text{Sia} \sum a_n \text{una serie a termini positivi} a_n > 0 \forall n$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \begin{aligned} G : [a,b] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Prima Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione **limitata e Riemann-integrabile**:

$$\begin{aligned} f : A = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y = f(t) \end{aligned}$$

Tesi

G è una funzione **continua**.

Dimostrazione

Voglio dimostrare che

$$\forall x_0 \in [a,b] \qquad G(x_0) = \lim_{x \to x_0} G(x)$$

Caso 1 - $a < x_0 < x < b$

Consideriamo quindi il limite da destra:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0{}^+} G(x) = \lim_{xtox_0} \int_a^x f(t)dt = \\ = \lim_{x\to x_0} \left[\int_a^{x_0} + \int_{x_0}^x\right] = \\ = \lim_{x\to x_0} \left[G(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt\right]\end{aligned}$$

Se $\lim_{x\to x_0{}^+} \int_{x_0}^x f(t)dt$ fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x\to x_0{}^+} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che $\lim_{x\to x_0{}^+} \int_{x_0}^x f(t)dt$ è *infinitesimo*:

$$m \leqslant f(t) \leqslant M \qquad \text{accumulo tra} \qquad x_0 \; ed \; x$$

$$m(x - x_0) \leqslant \int_{x_0}^x f(t)dt \leqslant M(x - x_0)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Caso 2 - $a < x < x_0 < b$

Consideriamo quindi il limite da sinistra:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0{}^-} G(x) = \lim_{xtox_0} \int_a^x f(t)dt = \\ = \lim_{x\to x_0{}^-} \left[\int_a^{x_0} f(t)dt - \int_x^{x_0} f(t)dt\right] = \\ = \lim_{x\to x_0{}^-} \left[G(x_0) - \int_x^{x_0} f(t)dt\right]\end{aligned}$$

Se $\lim_{x\to x_0{}^-} \int_x^{x_0} f(t)dt$ fosse *infinitesimo* allora:

$$\lim_{x\to x_0{}^-} G(x) = G(x_0)$$

Passiamo quindi a dimostrare che $\lim_{x\to x_0{}^-} \int_x^{x_0} f(t)dt$ è *infinitesimo*:

$$m \leqslant f(t) \leqslant M \qquad \text{accumulo tra} \qquad x \; ed \; x_0$$

$$m(x_0 - x) \leqslant \int_x^{x_0} f(t)dt \leqslant M(x_0 - x)$$

L'integrale definito è *infinitesimo* perché limitato tra quantità che tendono a 0.

Nel *Caso 1* abbiamo dimostrato che $\lim_{x\to x_0{}^+} G(x) = G(x_0)$ e *Caso 2* che $\lim_{x\to x_0{}^-} G(x) = G(x_0)$ quindi abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0{}^-} G(x) = G(x_0) = \lim_{x\to x_0{}^+} G(x) \qquad \forall x_0 \in [a, b]$$

Che dimostra la continuità di $G(x)$. c.v.d.

Seconda Forma

Enunciato

Ipotesi

Data una funzione **continua**:

$$f : A = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto y = f(t)$$

Tesi

G è una funzione **derivabile**.

$$G \in C^1([a, b]) \quad e \quad G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione

Sia $x_0 \in (a, b)$, vogliamo dimostrare che G è derivabile in x_0

Caso 1 - $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt && \text{VMI dif su}[x_0, x_0+h] \\
\exists\, \theta \in (x_0, x_0+h) | &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\
& && \textit{con } h \to 0^+
\end{aligned}$$

Dimostrando che non solo $G(x)$ è derivabile su (a, b) data l'arbitrarietà di x_0, ma anche che la derivata di $G(x)$ è $f(x)$. c.v.d.

Caso 2 - $h < 0$

$$\begin{aligned}
\frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt && \text{VMI dif su}[x_0+h, x_0] \\
\exists\, \theta \in (x_0+h, x_0) | &= f(\theta) \longmapsto f(x_0) && \text{per la seconda proprietà del VMI} \\
& && \textit{con } h \to 0^-
\end{aligned}$$

Dimostrando che non solo $G(x)$ è derivabile su (a, b) data l'arbitrarietà di x_0, ma anche che la derivata di $G(x)$ è $f(x)$. c.v.d.