Relazioni e funzioni

Dati n insiemi A_n, una relazione R di arità n è un insieme nella forma

$$R \coloneqq \{(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) \mid a_i \in A_i,\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\}\,.$$

Dunque, $R \subseteq A_a \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Poiché sono insiemi, valgono le usuali operazioni ($\subset$, $\subseteq$, $=$, $\cap$, $\cup$). Proprietà:

Proprietà	$\cap$	$\cup$
Idempotenza	$R \cap R = R$	$R \cup R = R$
Commutatività	$R \cap S = S \cap R$	$R \cup S = S \cup R$
Associatività	$(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$	$(R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T)$
Distributività	$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$	$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$

Il prodotto tra due relazioni $R \subseteq A_1 \times A_2$ e $S \subseteq A_2 \times A_3$ è definito come

$$R \cdot S \coloneqq \{(a_1,\, a_3) \mid \exists\, a_2 \in A_2 \,:\, (a_1,\, a_2) \in R \land (a_2,\, a_3) \in S\}\,.$$

Il prodotto tra relazioni è associativo, compatibile con l'inclusione ($R \subseteq T \subseteq A_1 \times A_2 \,\land\, S \subseteq V \subseteq A_2 \times A_3 \implies R \cdot S \subseteq T \cdot V$), ma non è commutativo.

Relazione inversa: $R^{-1} \coloneqq \{(a_2,\, a_1) \mid (a_1,\, a_2) \in R\}$. Proprietà:

- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$,
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,
- $R \cdot (S \cap T) = (R \cdot S) \cap (R \cdot T)$,
- $R \cdot (S \cup T) = (R \cdot S) \cup (R \cdot T)$,
- $(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$,
- $R \subseteq S \implies R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

La potenza di una relazione binaria $R \subseteq A \times A$ è definita come

$$R^n \coloneqq \begin{cases} I_A & \text{se n} = 0 \\ R \cdot R^{n-1} & \text{se n} > 0 \end{cases} \qquad \text{dove } n \in \mathbb{N}.$$

La restrizione $B \subseteq A$ di una relazione $R \subseteq A \times A$ è definita come

$$R|_B \coloneqq R \cap (B \times B).$$

Proprietà:

- $R|_\varnothing = \varnothing$,
- $R|_B \cup R|_C \subseteq R|_{B \cup C}$,
- $R|_B \cap R|_C = R|_{B \cap C}$.

Proprietà di una relazione:

Serialità

Strutture algebriche

Semigruppo Una struttura algebrica nella forma $(A, +)$, dove $+$ è un'operazione associativa sull'insieme A;

Semigruppo commutativo Un semigruppo con l'aggiunta della proprietà commutativa.

Monoide Un semigruppo con l'aggiunta di un'elemento neutro (scrittura: $(A, +, u)$);

Gruppo Un monoide che presenta l'inverso per ogni elemento dell'insieme;

Gruppo abeliano Un gruppo che presenta la proprietà commutativa.

Anello Una struttura nella forma $(A, +, *, u)$, dove

- $(A, +, u)$ forma un gruppo abeliano;

- $(A, *)$ forma un semigruppo;
- $*$ è distributiva rispetto a $+$;

Anello con unità Un anello con un monoide al posto del semigruppo;

Anello commutativo Un anello dove il semigruppo è commutativo;

Corpo Un anello dove $(A \backslash \{u\}, *)$ forma un gruppo;

Campo Un corpo dove $(A \backslash \{u\}, *)$ forma un gruppo abeliano.